

CAPÍTULO 6

LÓGICA CONTEMPORÁNEA

«El adoptar un lenguaje formalizado particular envuelve la adopción de una teoría particular del análisis lógico.» (A. Church [1944, 1956 edic. rev. y ampliada], *Introduction to Mathematical Logic. I*, Princeton (NJ): Princeton University Press, 1970⁶; p. 3)

Pocos periodos del desarrollo de una disciplina o de una materia científica habrán tenido una autoconciencia de su novedad y de su valor tan acusada como la lógica contemporánea. Esta impresión que ya se dejaba sentir en sus programas iniciales, durante la segunda mitad del s. XIX, alcanza la plenitud de su propia estima y de su autoidentificación en el momento crítico de su maduración, a principios de los años 30, cuando está a punto de pasar del conocimiento de sus posibilidades —a lo largo de las tres décadas anteriores 1900-1920— al conocimiento de sus limitaciones —en el curso de esa misma década 1930—. Un reflejo de esta autoimagen puede verse en Carnap (1930-31), "La antigua y la nueva lógica", recogido en A.J. Ayer (ed.) [1959], *El positivismo lógico*, México: FCE, 1965; pp. 139-152.

Los historiadores de la lógica han venido a poner luego mayor énfasis aún sobre esta novedad. I.M. Bocheński (1956, *Historia de la lógica formal*, edic. c., p. 282) califica el ensayo de Boole 1847, *The Mathematical Analysis of Logic*, no sólo de «innovador» sino de «revolucionario». Por su parte, D. Gillies 1992, "The Fregean revolution in Logic" (en Gillies, ed. 1992, *Revolutions in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, pp. 265-305), atribuye la revolución a Frege 1879, *Begriffsschrift*, para describirla en los términos post-kuhonianos de «cambio de paradigma» en lógica. A nadie se le escapa, sin embargo, ni la existencia de alguna línea de desarrollo continuado (e.g. en el análisis lógico de las relaciones: De Morgan 1847, Peirce 1883, Russell 1903, Wiener 1914), ni el hecho de que contribuyeran decisivamente a tal "revolución" motivos y problemas extra-lógicos. Quiero decir: el cambio, al margen de cómo queramos calificarlo, se gestó fuera del *Collegium Logicum*, en diversos medios (tradiciones, programas) matemáticos. Una señal de este origen es la fortuna del nombre difundido por la escuela de Peano, "lógica matemática" —expresión que el marco de programas concurrentes tornó ambigua nada más nacer : ¿significaba una "lógica matematizada" o una "lógica de las (teorías o pruebas) matemáticas"?—.

¿Cómo se puede caracterizar la novedad de esta lógica? El rasgo más aparente fue al principio su lenguaje simbólico —de ahí que el título de "lógica simbólica" precediera al de "lógica matemática" ¹—; un rasgo más profundo en esta línea es la formalización, el recurso a lenguajes artificiales, contruidos para formular de modo transparente y preciso los contenidos lógicos —según Frege— o para dejar que se mostraran las formas lógicas —según el *Tractatus* de Wittgenstein—. Hay, sin embargo, tres características más notables de la "nueva lógica", a saber: (a) la conciencia de ser una lógica subyacente en las teorías o las pruebas deductivas; (b) el constituirse ella misma no sólo en un sistema sino en una teoría del análisis lógico (una teoría de la formación de las expresiones lógicamente pertinentes, una teoría de la derivabilidad formal o de la "deducibilidad", una teoría de la verdad o de la consecuencia lógica); (c) el hacer de los sistemas deductivos y de las teorías lógicas en particular un objeto primordial del análisis lógico, metateórico. Por ejemplo, el rasgo (b), ya destacado en la cita de cabecera de Church, diferencia la lógica contemporánea de cualquier tradición anterior más o menos comprometida con una suerte de historia natural o de destino trascendental de la razón; el rasgo (c) es parejamente novedoso y guarda relación con el rasgo (b): hoy, en vez de suponer que la lógica es doblemente racional por tratarse de un arte o una ciencia que procede conforme a la razón y reflexiona sobre las operaciones de la razón, se supone que la lógica consiste no sólo en análisis de segundo orden, metalingüísticos, de textos o argumentos deductivos, sino en análisis metateóricos de las condiciones, propiedades y límites de (clases de) teorías deductivas, incluidas -con arreglo a (b)- las teorías lógicas mismas. Una consecuencia de este punto de vista, también inédita en la Hª de la lógica hasta este momento, es la consideración expresa de "teorías lógicas alternativas" —al margen o más allá de las discusiones históricas sobre si el silogismo aristotélico traslucía mejor que los esquemas estoicos el discurso inferencial de la razón, o sobre si la lógica escolástica era más artificiosa y menos natural que la dialéctica humanista o que la lógica moderna de las ideas, los juicios, el razonamiento y el método: todas estas discusiones presuponían que la lógica, en definitiva, era única, universal y uniforme, según correspondía a la unidad, universalidad y uniformidad de la facultad natural de la razón.

Una caracterización genérica inicial puede verse en Bocheński (1956), edic. c., pp. 281-

¹Es curioso observar que la denominación «lógica matemática» se deba inicialmente a A. De Morgan (1858), "On the Syllogism. III" —cf. edic. de P. Heath, 1960, p. 78—, que la emplea para significar una relación genérica con las matemáticas como la designada por la expresión más común en la Gran Bretaña de la 2ª mitad del s. XIX: «lógica simbólica».

286 —muy en deuda con la fecha de su composición-, o Bocheński 1980, "The general sense and character of modern logic", en E. Agazzi (ed.) 1980, *Modern Logic. A Survey*, Dordrecht/Boston: Reidel, pp. 3-14. Mayor agudeza e interés tiene S.J. Surma 1980, "The growth of logic out of the foundational research in mathematics", *ibid.*, pp. 15-33. Otro modo de asomarse a un panorama de la lógica contemporánea es ojear el ya citado N. Rescher (1968) "A map of logic", en su *Topics in Philosophical Logic*, Dordrecht: Reidel, 1968; pp. 6-9 ["Desarrollos y orientaciones recientes en lógica", trad. en *Teorema*, 2 (1971): 51-64].

Naturalmente, ninguna otra época de la lógica nos resulta más próxima que la lógica contemporánea. Y en ninguna otra época la lógica ha conocido un desarrollo y una variedad comparables a los que muestra en la actualidad. Ambas circunstancias pueden inducirnos a una falsa familiaridad: a tomar por la lógica de nuestro tiempo aquella en que nos hemos especializado o aquella a la que más tiempo personal hemos dedicado. No me considero, en absoluto, inmune a este tipo de sesgos. De manera que si el lector ya ha observado que la presentación de algún capítulo anterior es parcial y tendenciosa, puede dar por seguro que la del presente capítulo lo será más. Se centrará en la génesis y el desarrollo lógico-matemáticos de la lógica estándar —no sé si el agudo lector habrá reparado en que al hablar de «lógica estándar» a lo largo de esta *Guía* me refiero a la lógica que hoy oficia como lógica elemental ordinaria, i.e. la instituida como base general de la enseñanza de la disciplina. La opción por este foco de atención es razonable pero, desde luego, no es la única que cabe.

Una muestra de la complejidad que envuelve la consideración panorámica de la lógica contemporánea es la siguiente: de entrada, nos encontramos con tres presuntos fundadores, con cuatro programas y con solapamientos de distintas áreas y líneas de investigación.

Los tres presuntos fundadores son: Boole (cf. e.g. el ya citado Bocheński 1956; fue el candidato más popular a principios de siglo pero todavía hoy encuentra partidarios); Frege (cf. el ya citado Gillies 1992; es la candidatura más votada en esta segunda mitad del siglo); Peano (según una opinión francamente minoritaria, cf. e.g. F. Rodríguez Consuegra 1994, en I. Grattan-Guinness (ed.) 1994, *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, London/New York: Routledge, I, § 5.2, pp. 617-621).

Los cuatro programas relevantes por su capacidad de orientación del análisis lógico son: (1) El programa del «álgebra de la lógica», de origen booleano, pero con profundas inflexiones posteriores —e.g. a partir de Peirce y de Schröder, en primera instancia; a partir de Löwenheim,

ulteriormente—. (2) El programa logicista de Frege que procura formar y desarrollar el análisis lógico sobre la base del lenguaje de una "gran lógica"; se difunde en el primer tercio del siglo no sólo a la luz sino a la sombra de Russell. (3) El programa de una lógica subyacente y de una metodología estructural de las teorías deductivas (matemáticas), que se beneficia de dos fuentes de inspiración y desarrollo: Peano y su escuela; Hilbert y su área de influencia. (4) Diversas contribuciones en el campo de la semántica —de procedencias y líneas de investigación tan dispares como la algebraica (más, digamos, calculística), la fregeana (más filosófica) o la hilbertiana (más abstracta)—, que acaban encontrando unas primeras señas técnicas de identidad en la «semántica científica» de Tarski de los años 30.

En fin, las áreas más o menos solapadas se extienden desde la silogística tradicional reelaborada por Boole 1847 o la axiomatización de la geometría a partir de Hilbert 1899, hasta los problemas suscitados por la fundamentación (lógica o epistemológica o axiomática) de las matemáticas y por la aparición de diversos tipos de antinomias y de paradojas.

Con miras a reducir, dentro de lo posible, esta compleja configuración a un mapa básico de orientación por todo este terreno y por sus ulteriores extensiones, me atenderé a un guión marcado por los puntos siguientes:

I/ Los orígenes de la perspectiva de la «lógica matemática», en su doble proyección inicial: **A**, el «álgebra de la lógica» y sus contribuciones a una suerte de lógica matematizada; **B**, los problemas y programas de fundamentos, y sus contribuciones a la accidentada suerte de una "gran lógica" (fundamental o, al menos, subyacente) de la matemática.

II/ La gestación y el desarrollo de nuestra lógica elemental estándar, **C**, en su doble dimensión teórica y metateórica.

El núcleo central de este capítulo **6** será la integración de las perspectivas **IA** y **IB** como matriz y marco de **II C** (siguiendo los apartados §§ **6.1 A**, **6.1 B**, y § **6.2 [= C]**). Los casos de otras lógicas (extensiones, réplicas, alternativas complementarias o rivales de esa lógica estándar) no tendrán aquí, lo siento, consideración especial. Sólo incluiré algunas referencias a ellas en el apartado **6.3** sobre cuestiones o temas de posibles trabajos.

Las peculiaridades de la lógica contemporánea (e.g. su deslumbradora cercanía y su desbordante riqueza) me obligarán a una forma de exposición similar a la del cap. **5**. Iré intercalando notas y esquemas introductorios y distribuyendo las referencias bibliográficas. Además, puede que la distinción entre fuentes y literatura resulte a veces un tanto arbitraria: hay

trabajos que parecen cumplir ambas funciones y prestarse a una y otra catalogación. En fin, renunciaré a la mención expresa de términos o nociones clave: o son términos técnicos que se suponen familiares (e.g. «satisfacibilidad», «compacidad»), o designan áreas y subáreas de investigación (e.g. «teoría de la prueba», «teoría de modelos», «computabilidad»).

6.0 Referencias de orden general.

Cualquier manual de H^a de la lógica, publicado en la segunda mitad del presente siglo, dedica un amplio espacio a la lógica contemporánea (cf. el cap. 1). El estudiante también puede beneficiarse de los numerosos artículos monográficos sobre los temas y los autores correspondientes que recoge P. Edwards (ed.) 1967, *The Encyclopedia of Philosophy*, New York/London: Macmillan & Free Press/Collier-Macmillan, 1972 reimp. —recordemos que en esta y en otras muchas obras de referencia (Enciclopedias, Diccionarios, etc.) recibe el nombre de «lógica moderna», vid. el principio del anterior cap. 5.

Por añadidura, no estará de más recordar la existencia de algunos estudios y compilaciones de estudios monográficos que abren una perspectiva comprensiva sobre este periodo, amén de algunas antologías de textos originales o traducidos dignas de mención.

Dos estudios amplios y comprensivos son:

* C. MANGIONE (1972, 1976²), "La lógica en el s. XX", en L. Geymonat (dir.): *Historia del pensamiento filosófico y científico. Siglo XX (II)*, Barcelona, 1985, c. 5, pp. 202-421 [breve nota de bibliografía comentada, 590-596]; *H^a... Siglo XX (III)*, Barcelona, 1985, c. 3, pp. 143-280 [breve nota de bibliografía comentada, 557-560].

C. MANGIONE, C. BOZZI, 1993, *Storia della logica da Boole ai nostri giorni*, Milano.

Otros trabajos vienen incluidos en compilaciones y obras colectivas como las que cito a continuación en un orden de especialización y de exigencia crecientes:

I. GRATTAN-GUINNESS, ed. 1994, *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, London/New York, vol. 1, P. 5 en particular, pp. 595-708 (artículos de carácter panorámico e introductorio).

W. ASPRAY, Ph. KITCHER, eds. 1988, *History and Philosophy of Modern Mathematics* [*Minnesota Stud. in Philosophy of Science, XI*], Minneapolis.

J. HINTIKKA, ed. 1995, *From Dedekind to Gödel*. Dordrecht.

J.P. PIER, ed. 1994, *Development of Mathematics. 1900-1950*, Basel/Boston/Berlin (vid. en

particular M. GUILLAUME, "La logique mathématique en sa jeunesse", pp. 185-321, con abundante bibliografía, pp. 322-365.

Th. DRUCKER, ed. 1991, *Perspectives on the History of Mathematical Logic*, Basel/Boston.

Dos notables repertorios bibliográficos de contribuciones a la formación y desarrollo de la lógica contemporánea son:

A. CHURCH 1936, "A Bibliography of Symbolic Logic", *The Journal of Symbolic Logic*, I/4: 121-218; adic. y correcc. 1938, *Ibd.*, III/4: 178-212.

G.H. MUELLER (en colab. con W. LENSKI) 1988, *Ω -Bibliography of Mathematical Logic*, Berlin/Heidelberg/New York/London; 6 vols.

Abundan, por otro lado, las antologías de textos relevantes bien por su carácter, digamos, "fundacional", bien por su carácter representativo o sintomático. La más notable sigue siendo sin duda:

* J. van Heijenoort, ed. 1967, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge (Mass.)/London, 1977³.

La más introductoria y comprensiva, aunque compuesta por fragmentos, quizás sea:

* E. Casari, ed. 1981, *La logica del novecento*, Torino: Loescher.

Otras que cabe distinguir por diversos motivos son, en orden de antigüedad:

M. Davis, ed. 1965, *The Undecidable*. Hewlett/New York: Raven Press.

S. McCall, ed. 1967, *Polish Logic. 1920-1939*. Oxford: Clarendon Press.

P.F. Strawson, ed. 1967, *Philosophical Logic*, London: Oxford University Press.

Hintikka, ed. 1969, *The Philosophy of Mathematics*. London: Oxford Univ. Press.

K. Berka, L. Kreiser, eds. 1971, *Logik-Texte*. Berlin: Akademie-Verlag, 1983³.

J. Largeault ed. 1972, *Logique mathématique. Textes*. Paris: Armand Colin.

L. Vega, ed. 1981, *Lecturas de Lógica. I*. Madrid: UNED, 1986².

P. Castrillo, L. Vega, eds. 1984, *Lecturas de Lógica. II*. Madrid: UNED (pte. reimp.).

J. Largeault, ed. 1992, *Intuitionism et théorie de la démonstration*, Paris: Vrin.

El lector español haría bien en buscar además traducciones de contribuciones clásicas entre los títulos de dos colecciones de Cuadernos: los *Cuadernos Teorema*, Dpto. de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad de Valencia, Valencia (años 70-80); los *Cuadernos de Crítica*, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, México D.F. (años 70-90). Por lo

demás, cualquier lector podrá beneficiarse de los artículos y reseñas bibliográficas de revistas como *History and Philosophy of Logic*, *Modern Logic*, *Theoria* o *Mathesis*.

6.1 A Álgebra de la lógica.

De acuerdo con el guión y con el sesgo selectivo antes anunciados, los apartados de fuentes y de literatura secundaria estarán distribuidos en tres grandes secciones: **A** (álgebra de la lógica), **B** (fundamentos, teorías de conjuntos y grandes lógicas) y **C** (= **6.2.1/2**, gestación y desarrollo de la lógica estándar), en las que incluiré notas y esquemas complementarios.

El desarrollo del «Álgebra de la lógica» comprende, en general, cuatro momentos:

(i) El "fundacional": Boole 1847, 1854².

(ii) Las contribuciones de los reformadores (Jevons 1864; Venn 1881) y las indirectas de los, digamos, autónomos (e.g. desde De Morgan hasta MacColl, cf. *supra* capítulo 5, § 5.2).

(iii) Las contribuciones de los sistematizadores y avanzados (e.g. Schröder 1877, 1890-1895, Poretsky 1900-1901 —en ruso, vid. N.I. Styazhkin 1969, edic. c. 6, pp. 216-247; hasta la presentación normalizada de Couturat 1905).

(iv) Las contribuciones que trascienden el marco originario del programa en la dirección de la teoría de la cuantificación (desde Peirce -años 1880- hasta Löwenheim 1915).

Limitémonos a recordar algunas aportaciones características de Boole.

Para empezar, abre la perspectiva de las álgebras lógicas interpretadas (aplicables a clases, proposiciones o probabilidades) y emplea métodos resolutivos de convalidación "lógico-algebraica" con el fin de mostrar la eficacia y la adecuación de su concepción abstracta del cálculo algebraico incluso en temas lógicos tan tradicionales como el silogismo. La lógica pasa a formar parte del álgebra en la medida en que ésta trata con símbolos y composiciones simbólicas y con operaciones abstractas que no dejan de reflejar las leyes más generales del pensamiento. Prevalen, con todo, ciertas propiedades y estructuras matemáticas (e.g. retículos) sobre las propiedades y estructuras de las relaciones lógicas de consecuencia, deducción, etc. La prueba es concebida según el patrón algebraico de sucesión y transformación de ecuaciones -a través de reglas tácitas de deducción.

Quizás su contribución básica sea la simbolización y determinación de operaciones

2 Como nada se crea de la nada, conviene recordar el desarrollo del álgebra inglesa en las primeras décadas del siglo (vid. cap. 5, § 5.2) y la existencia de un ambiente proclive a una matematización de la lógica; cf. en este sentido M. Panteki 1993, "Thomas Solly (1816-1875): an Unknown Pioneer of the Mathematization of Logic in England, 1839", *History and Philosophy of Logic*, **14**: 133-169.

lógico-algebraicas, conforme a:

- 1/ el supuesto de que toda operación lógica tiene un análogo algebraico,
- y 2/ estas directrices: partir de una ecuación dejando de lado la interpretación lógica de los símbolos, tratarlos como símbolos sólo susceptibles de valores 0 y 1, realizar sobre ellos todos los procesos requeridos para la resolución de la ecuación y restituir al final su interpretación lógica (cf. 1854 *Laws of Thought*, edic. c., pp. 67-70).

El procedimiento de «desenvolvimiento», [a saber: $f(x) = ax + b(1-x)$; si $f(1)$, $a + b(1-1) = a + 0 = a$; si $f(0)$, $a + b(1-0) = a + b = b$; luego, $f(x) = f(1)x + f(0)(1-x)$], sirve como método general para reducir las expresiones a fórmulas lógicamente interpretables.

En suma, puede verse a Boole como un innovador a caballo entre dos épocas: si su método algebraico general lo sitúa del lado de la lógica contemporánea, en línea con los proyectos de matematización de la lógica, su mantenimiento del silogismo y de cierto aire psicologista lo sitúa del lado de la lógica tradicional. Vid. James W. van Evra 1977 «A Reassessment of George Boole's Theory of Logic», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XVIII/3: 363-377.

El programa, aparte del interés booleano por la simbolización y la algebraización de las operaciones lógicas, también se aplica a la axiomatización y caracterización de estructuras algebraicas (e.g. en las líneas de trabajo de Schöder 1890-1905, Whitehead 1898, Huntington 1904) e inspira cambios de rumbo hacia el análisis lógico de relaciones y de cuantificadores (e.g. en la línea de trabajo de Peirce, Ladd-Franklin, Mitchell).

En el curso del presente siglo, los caminos frecuentados por procedimientos lógico-algebraicos han venido a desembocar en nuevas áreas de trabajo matemático (las álgebras booleanas) y en nuevos campos de desarrollo del análisis lógico y metateórico, que sólo guardan con el programa histórico de Boole una relación de homonimia.

6.1 A/1 Fuentes.

BOOLE 1847, *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge. Reimp. Oxford, 1965⁴.

- *El análisis matemático de la lógica*. Introd. J. Sanmartín; trad. E. Requena. Madrid, 1979.

BOOLE 1854, *The Laws of Thought*, London. Reimp. New York, 1958.

- *Investigación sobre leyes del pensamiento*. Trad. J.A. Suárez. Madrid, 1982.

BOOLE, *Studies in Logic and Probability*. Edic. de R. Rhees. La Salle, 1952. 2 vols.

Boole. Selected Manuscripts on Logic and Its Philosophy. Edic. en preparación de I. Grattan-Guinness y G. Bornet. Basel, 1997.

W.S. JEVONS 1864, *Pure Logic, or the Logic of Quality apart from Quantity*, London/New York.

- 1880, *Studies in Deductive Logic*, London.

- 1890 *Pure Logic and Other Minor Works*, edic. R. Adamson y H.A. Jevons, London. Reimp. Bristol, 1991.

PEIRCE. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge (Mass.). I-VI, edic. de C. Harsthorne, P. Weiss, 1931-1935; VII-VIII, edic. de A.W. Burks.

- *Writings of Charles S. Peirce: A Cronological Edition*. Bloomington (Indiana). I, edic. de M. Fisch *et al.*, 1982; II, edic. de E.C. Moore *et al.*, 1984; III, edic. de C.J.W. Kloesel, 1986.

PEIRCE, ed. (1883), *Studies in Logic by Members of the John Hopkins University*. Introd. M.H. Fisch; pref. A. Eschbach. Amsterdam/Philadelphia, 1983. Incluye "A Theory of probable inference", pp. 126-181, "Note A, On a limited universe of marks", 182-186, y "Note B, The logic of relatives", 187-203, tras las contribuciones de otros autores.

- (1898) *Reasoning and the Logic of Things [Cambridge Confernces Lect.]*, Edic. de K.L. Ketner. Introd. K.L. Ketner, H. Putnam. Cambridge (Mass.), 1992.

- (1867-1901), *Escritos lógicos*. Introd. y trad. P. Castrillo. Madrid, 1988. Cf., e.g.: 1880, "Sobre el álgebra de la lógica", pp. 85-146; 1885, "Sobre el álgebra de la lógica. Contribución a la filosofía de una notación", pp. 165-200; 1897, "La lógica de relativos", pp. 148-164.

- (1878), *Deducción, inducción e hipótesis*. Trad. J.M. Ruiz-Werner. Bs. Aires, 1970.

- (1895-1909 [selec.]), *La ciencia de la semiótica*. Trad. B. Bugni. Bs. Aires, 1974.

- *Ch.S. Peirce: El hombre, un signo*. Antología (más o menos) semiótica edit. por J. Vericat. Barcelona, 1988. Cf. en particular, III, c. X, pp. 332-391.

LADD (LADD-FRANKLIN), C. 1883, "On the algebra of Logic", en Peirce, ed. 1983, pp. 17-71.

MITCHELL, O.H. 1883, "On a New Algebra of Logic", en Peirce, ed., pp. 72-106.

F.W.K.E. SCHROEDER 1877, *Der Operationskreis des Logikkalkulus*, Leipzig.

- (1890-1895) *Vorlesungen über die Algebra der Logik [exakte Logik]*, Leipzig. Reedic. de E. Müller, Leipzig, 1905. Reimp. Chelsea (NY), 1966.

- (1909-1910) *Abriss der Algebra der Logik*. Edic. E. Müller, Leipzig. 2 Vols. Reimp. New York, 1966.

A. MACFARLANE 1879, *Principles of the Algebra of Logic*, Edinburgh.

J. VENN (1881, 1894²) *Symbolic Logic*, London. Reimp. New York, 1971.

J. VENN 1888, *The Logic of Chance. An Essay on the Foundations and Province of the Theory of Probability*, London/New York.

J. VENN 1889, *The Principles of Empirical and Inductive Logic*, London/New York.

A. MARQUAND 1885, *A New Logical Machine*, Princeton. Con referencias a otros ensayos de Venn, MacFarlane, Ladd-Franklin, Schröder, Johnson, McColl, Nagy.

A.N. WHITEHEAD 1898, *A Treatise on Universal Algebra*. Cambridge.

E.V. HUNTINGTON 1904, "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic", *Transactions of the American Mathematical Society*, **5**: 288-309.

L. COUTURAT (1905), *El álgebra de la lógica*. Trad. E. Requena. Madrid, 1976.

[En la Biblioteca del C.S.I.C., Madrid, se encuentra como legado de V. Reyes Prósper una colección de 18 trabajos, titulada genéricamente *Algebra of Logic and Mathematics. 1871-1891*, Leipzig, etc., a cargo de Schröder, Caley, Peano, Ellis, Vailati y Nagy.]

6.1 A/2 Literatura secundaria.

I. General.

BARONE, F. 1965, *Logica formale e logica trascendentale. II, L'Algebra della Logica*, Torino.

BRODY, B. (1967), *The Rise of the Algebra of Logic*. PhD Dissert. Ann Arbor (Univ. Microf. Intern.), 1986.

COLBERT, J.G. 1968, *La evolución de la lógica simbólica y sus implicaciones filosóficas*. Pamplona; c. 2, pp. 59-102, en particular.

LIARD, L. 1878, *Les logiciens anglais contemporains*, Paris.

JOURDAIN, P.E.B. (1910-1913) "The developments of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics", ensayos incluidos en *Selected Essays on the History of Set Theory and Logic*, edic. de I. Grattan-Guinness, Bologna, 1991.

SHEARMAN, A.T. 1906, *The Development of Symbolic Logic. [A critical-historical study of the logical calculus]*, London. Reimp. Dubuque (Iowa), 1965.

STYAZHKIN, N.I. (1964) *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*, Cambridge (Mass)/London, 1969; esp. cc. 5 y 6 (§§ 1-3), pp. 170-262.

I.H. Anelli, con la colaboración de otros miembros del consejo editorial de *Modern Logic* (T.L. Drucker, N. Houser, V. Peckhaus y C. Thiel), ha publicado una primera entrega bibliográfica: "Studies in the nineteenth-century history of algebraic logic and universal algebra: a secondary bibliography", *Modern Logic*, **5/1** (1995): 1-120, a la que seguirán otras entregas periódicamente sucesivas de actualización.

II. Monográfica.

BERNAYS, P. 1976, "Review of E. Schröder, *Vorlesungen über...*, vol. I", *The Journal of Symbolic Logic*, **40/1**: 609-614.

CHURCH, A. 1976, "Schröder's anticipation of the simple theory of types", *Erkenntnis*, **10**: 407-411.

CORCORAN, J., WOOD, S. 1980, "Boole's criteria of validity and invalidity", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **21**: 609-638.

DIPERT, R. 1980, "Ein Karlsruher Pionier der Logik. Ernst Schröder Beitrag zur Logik und den Grundlagen der Mathematik", *Fridericiana* [Karlsruhe], **27**: 23-44.

DIPERT, R. 1981, "Peirce's propositional logic", *Review of Metaphysics*, **34**: 569-595.

DIPERT, R. 1984, "Peirce, Frege, the Logic of Relations and Church's Theorem", *History and Philosophy of Logic*, **5**: 49-66.

EISELE, C. ed. 1985, *Historical Perspectives on Peirce's Logic of Science*, Berlin.

EVRA, J.W. van 1977, "A reassessment of George Boole's theory of logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **18/3**: 363-377.

FREGE, G. (1895) "A critical elucidation of some points in E. Schröder's *Algebra der Logik*", en la edic. de P.T. Geach y M. Black, *Translations from the Philosophical Papers of Gottlob Frege*, Oxford, 1980, pp. 86-106.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1988, "Living together and living apart. On the interaction between mathematics and logics from the French Revolution to the First World War", *South African Journal of Philosophy*, **7/2**: 73-82. ["Vida en común, vidas separadas. Sobre las interacciones entre matemáticas y lógicas desde la Revolución francesa hasta la Primera Guerra Mundial", versión actualizada en L. Vega Reñón, ed., sección monog. de *Theoria* sobre H^a de la lógica contemporánea, en preparación, 1997]

GRATTAN-GUINNESS, I. 1991, "The correspondence between George Boole and Stanley

- Jevons, 1863-1864", *History and Philosophy of Logic*, **12**: 15-35.
- GRATTAN-GUINNES, I. 1991, "Boole y su semi-seguidor Jevons", *Mathesis*, **7/3**: 351-362.
- HAILPERIN, T. 1976, *Boole's Logic and Probability*, Amsterdam.
- HAILPERIN, T. 1981, "Boole's algebra isn't Boolean algebra", *Mathem. Magazine*, **54**: 172-184.
- HEIJENOORT, J. van 1967, "Logic as calculus and logic as language", *Synthese*, **17**: 324-330.
- HOOKEYWAY, C. 1985, *Peirce*. London/New York, 1992 (paperback edit.).
- HOUSER, N. 1994, "Algebraic logic from Boole to Schröder", en I. Grattan-Guinness, ed. *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, London/New York; vol. 1, pp. 600-616.
- HUSSERL, E. (1891), "Recension du livre de Schröder: *Vorlesungen über... I.*", en la edic. de J. English, *Husserl. Articles sur la logique*, Paris, 1975; pp. 9-61
- KNEALE, W. 1948, "Boole and the revival of logic", *Mind*, **57**: 149-175.
- LAITA, L.M. 1979, "Influences on Boole's logic: the controversy between William Hamilton and Augustus de Morgan", *Annals of Science*, **36**: 45-65.
- MAC HALE, D. 1985, *George Boole: His Life and Work*, Dublin.
- MARKHAM BROWN, F. 1990, *Boolean Reasoning [The Logic of Boolean Equations]*, Basel/Boston.
- MARTIN, R.M. 1979, *Peirce's Logic of Relations and other Studies*, Lisse.
- MAYS, W., HENRY, D.P. 1953, "Jevons and Logic", *Mind*, **62**: 484-505.
- MUGNAI, M. (1982) "Alle origini dell'algebra della logica", en W.M. Abrusci *et al.* eds., *Atti del Convegno Intern. di Storia della Logica [S. Geminiano, 1982]*, Bologna, 1983; pp. 117-131.
- OTERO, M.H. 1963, "Boole y la renovación de la lógica", *Cuadernos Uruguayos de Filosofía*, **2**: 94-114.
- Peirce and Contemporary Thought [Ch.S. Peirce Sesquicentennial Intern Congress, 1992]*, Lubbock (Texas), 1993.
- PANTEKI, M. 1993, "Thomas Solly (1816-1875): an unknown pioneer of the mathematization of logic in England", *History and Philosophy of Logic*, **14**: 133-169.
- PUTNAM, H. 1982, "Peirce the logician", *Historia Mathematica*, **9**: 290-301.
- RICHARDS, J. 1980, "Boole and Mill: Differing perspectives on logical psychologism", *History and Philosophy of Logic*, **1**: 19-36.

ROBERTS, D., HOUSER, N., EVRA, J.v., eds. 1996, *Studies in the Logic of Charles S. Peirce*, Bloomington (Indiana); en prensa.

SHIN, S.-J., 1994, "Peirce and the logical status of Diagrams", *History and Philosophy of Logic*, **15**: 45-58.

SMITH, G.C. 1982, *The Boole-De Morgan Correspondence 1842-1864*, Oxford [cf. también la reseña crítica de J. Corcoran en *Hist. & Phil. Logic*, **7/1**: 65-75].

SMITH, G.C. 1983, "Boole's annotations on *The Mathematical Analysis of Logic*", *History and Philosophy of Logic*, **4**: 27-39.

THIBAUD, P. 1975, *La lógica de Charles Sanders Peirce*, Madrid, 1982.

[Para el estudio de la introducción de la «lógica simbólica» en España tienen interés las reseñas de Ventura REYES PRÓSPER (1891-1893), "El raciocinio a máquina", "Proyecto de clasificación de los escritos lógicos-simbólicos", "Cristina Ladd Franklin", "Charles Santiago Peirce y Oscar Howard Mitchell", "Ernesto Schroeder", aparecidas en *El Progreso Matemático* y recogidas por J.A. del Val en *Teorema*, **III/2-3** (1973), pp. 329-348.]

6.1 B Fundamentos de matemáticos y grandes lógicas.

Cuando se habla de la fundamentación de la matemática sobre la base de una "gran lógica", es inevitable pensar en Frege.

Por otro lado, como ya he sugerido, hoy es harto común la consideración de Frege como padre fundador de la lógica contemporánea. Su 1879, *Begriffsschrift*, pasa por ser el acta de nacimiento de la nueva lógica. Las tres grandes líneas de contribución de Frege 1879 tienen que ver (a) con una escritura lógica perspicua, (b) con la sistematización interna de la lógica, (c) con una aplicación inicial de su programa logístico de reducción de los conceptos y principios matemáticos a nociones y leyes (de leyes) lógicas.

El planteamiento fregeano de una notación y un lenguaje lógicos responde a estos supuestos:

- (i) las aserciones significativas tienen un contenido conceptual objetivo;
- (ii) contenido que no halla expresión cabalmente adecuada en el lenguaje usual;
- (iii) cabe diseñar una notación específicamente adaptada a este propósito, i.e. una notación congruente con la articulación lógica de estos contenidos, e.g. *versus* simbolismo booleano, y sumamente perspicua, e.g. *versus* notaciones lineales.

Una consecuencia es la sustitución del paradigma tradicional S-cópula-P, demasiado ligado a las gramáticas ordinarias (aparte de su complicidad con una perspectiva no sólo

incorrecta, e.g. asociaciones: S-nombre propio-idea individual/P-nombre común-idea general, sino limitada del análisis lógico, e.g. indistinción entre «proposición» y «aserción» en el "juicio", problema de cuantificadores incrustados en el caso de la cuantificación múltiple).

Sobre estos supuestos, Frege propone una escritura para la expresión transparente y precisa de contenidos conceptuales que:

(a) mejora sustancialmente el modelo del lenguaje aritmético (es especial por lo que toca a la noción lógica de *función* y a la cuantificación de *variables* —«no sería exagerado calificar el empleo de cuantificadores para ligar variables como una de las mayores conquistas intelectuales del siglo diecinueve», aseguran W. y M. Kneale 1984, 511 [1972, 472—];

(b) no parte de los conceptos o de su composición como una suma de marcas conceptuales (Prefacio, edic. c. 1981, 52), sino que procede por descomposición del pensamiento puro (escrito de 26/junio/1919, en van Heijenoort ed. 1967, 1 nota b) y a partir del principio del contexto (en 1884 *Los fundamentos de la aritmética*, edic. 1972, Introd., 20: «el significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en las palabras aisladas»).

Algunos aspectos concretos de su propuesta son:

1. Distinción entre: expresión enunciativa, contenido proposicional (barra) y aserción ()
2. Grafía bidimensional de funciones veritativas enunciativas: condicional y negación.
3. Paradigma lógico-gramatical: argumento/función. Cuantificación de variables: letras góticas frente a las itálicas como marca de universalidad con alcance sobre la expresión en su conjunto. Concepción característica de la cuantificación como un predicado de segundo orden, aplicable al predicado $Q(x)$ del que es prefijo ssi todo objeto a -en el caso de una cuantificación general- del dominio de variación de x , es instancia de $Q(x)$ de modo que la aserción de $Q(a)$ es verdadera.
4. Sistematización axiomática del cuerpo de la lógica como una teoría de asertos lógicos —que envuelve la negación, la condición, la generalización universal y la identidad— sobre la base de nueve axiomas y cuatro reglas informales de deducción: el *Modus Ponens*, una regla tácita de sustitución, una regla no del todo explícita de clausura mediante ligadura de itálicas y una regla expresa de generalización.

De la significación atribuida a esta aportación de Frege pueden dar idea las apreciaciones de tres renombrados concedores de la lógica contemporánea, Jan Łukasiewicz, William Kneale y Jean van Heijenoort. Łukasiewicz destaca la singular novedad de *Begriffsschrift* —en el ámbito de la lógica proposicional que toma en consideración: «Y aquí nos encontramos de pronto ante un fenómeno único en la Historia de la lógica: de repente, sin explicación histórica posible, la moderna lógica proposicional surge casi en un estado de perfecta plenitud en la aguda mente de Gottlob Frege, el mayor lógico de nuestro tiempo» (1934, 1935, "Contribución a la historia de la

lógica de proposiciones", en Vega ed. 1981, *Lecturas de lógica. I*, p. 123). W. Kneale se pronuncia en términos aún más generales de este tenor: a/ *Begriffsschrift* constituye el primer sistema realmente acabado [comprehensive] de la lógica formal (1972, *El desarrollo de la lógica*, p. 471; [1984, 510]). b/ En él parecen confluír y complementarse las tradiciones y contribuciones básicas anteriores (Aristóteles, Crisipo, lógicos medievales, Leibniz, Boole, Peirce). c/ «La obra de Frege encierra todos los elementos esenciales de la lógica moderna y no sería injusto para con los lógicos anteriores o posteriores considerar [to say] que 1879 es la fecha más trascendental de toda [most important in] la historia de la lógica [of the subject]» (1972, p. 473; [1894, 511]). Por último, van Heijenoort en su afamado 1967, "Logic as calculus and logic as language" (*Synthese*, 17: 324-330), contrapone a la perspectiva operativa y calculística del programa booleano la perspectiva más general y profunda del lenguaje de la lógica, característica del programa fregeano. En síntesis, esta perspectiva consiste en: (1) La formación de un lenguaje lógico universal articulado sobre la base de una lógica proposicional de funciones veritativas, primordial e incrustada en una lógica general de la cuantificación de variables individuales y predicativas. (2) La consideración no ya de diversos universos de discurso o de uno solo, sino de «el universo» como dominio del análisis lógico. (3) La distribución del universo en objetos y funciones (conceptos): todo lo que no sea un objeto es una función y no hay nada que no sea o un objeto o una función; esta distribución es pareja a la prevista en el paradigma lógico argumento-función; por lo demás, el universo resultará ulteriormente estratificable. (4) La condensación y autosuficiencia del sistema de la lógica, donde no cabe plantearse la diversificación de dimensiones específicamente "sintácticas" o "semánticas". Tampoco hay lugar para las cuestiones de índole metasistemática.

Me temo que hoy ninguna de estas apreciaciones es sostenible sin ciertas reservas y sin algunos matices —véase más adelante, § 6.3.

Al margen de esta cuestión, el planteamiento de van Heijenoort tiene especial relieve en el presente contexto al apuntar en la dirección de las que he venido llamando "grandes lógicas". Frege 1879 es la primera presentación cabal de una "gran lógica". Una "gran Lógica" se caracteriza por (i) sus pretensiones fundamentalistas -e.g., logicistas-; (ii) su universalidad constitutiva; (iii) su presunta autosuficiencia. El rasgo (i) puede presentarse con mayor o menor fuerza —en su grado mínimo: para toda teoría deductiva, hay alguna lógica capaz de convalidar el conjunto de sus inferencias demostrativas (cf. Mehlberg 1962)—; pero lo normal son

compromisos filosóficos fuertes, e.g. no sólo en la línea de la convalidación de las teorías o las pruebas matemáticas sino, así mismo, en el orden de la justificación epistemológica y/o ontológica del conocimiento matemático. Conforme a (ii), tanto la distinción de dominios de discurso como la distinción de ámbitos o teorías lógicas (e.g.: lógica de proposiciones, lógica de primer orden, lógica de segundo orden), carecen de relieve desde un punto de vista estrictamente lógico; con arreglo a (iii), las cuestiones metateóricas tampoco son lógicamente sustanciales. Los dos rasgos son solidarios. Un corolario de la asunción fuerte de (i)-(iii) podría ser la unicidad y uniformidad de la lógica.

Según esto, la crisis de una "gran lógica" asociada a la fundamentación de las matemáticas puede sobrevenir por varios caminos. En general, por dificultades o limitaciones internas, como la generación de antinomias o la demostración de resultados de limitación. Más en particular: *versus* (i), por cambios de rumbo filosófico y metodológico; *versus* (ii)-(iii) por diversificación y especialización interna; *versus* el corolario, por la promoción de «lógicas alternativas». Cabe reparar en que, de hecho, se dan motivos de todos estos tipos para que hacia 1960 haya cambiado sustancialmente el ambiente generalmente favorable a las "grandes lógicas" del primer tercio del siglo.

Por ejemplo, Frege alentaba un modelo axiomático clásico, rigorizado, de "gran lógica" dentro del programa de la fundamentación lógica de las verdades aritméticas como verdades reducibles a definiciones de conceptos lógicos y/o a deducciones que parten de verdades lógicas. Esta propuesta es inicialmente ensayada en *Begriffsschrift* a propósito de la determinación de la relación de «descendencia» y la definición del concepto de propiedad hereditaria -como fundamentos logicistas de una teoría de la serie aritmética que incluye el principio de inducción-.

Tomemos una relación del tipo: Δ sigue a Γ en la serie generada por Φ ssi Δ posee toda propiedad que pertenezca a (i) todo objeto respecto del cual Γ se halla en la relación Φ , y a (ii) todo objeto respecto del cual cualquier poseedor de dicha propiedad se halla en la relación Φ . Entonces, se considera propiedad hereditaria en una serie así generada aquella propiedad que justamente es compartida por todos los miembros de la serie, sin excepción, y que constituye a la vez su propiedad distintiva en cuanto miembros de la serie. (Del análisis de esta relación Φ se puede desprenderse tanto que Δ sigue a Γ en la serie generada por Φ , como que Γ precede a Δ en la serie generada por Φ .)

De estos supuestos, resulta que: «Si y sigue a x en la serie f , y cada resultado de aplicar el

procedimiento f a x tiene la propiedad F , y la propiedad F es hereditaria en la serie f , entonces y tiene la propiedad F » (prop. 77, § 27); «Si x tiene una propiedad F hereditaria en la serie f y si y sigue a x en la serie f , entonces y tiene la propiedad F » (*Begriffsschrift*, prop. 81, § 27; «en esto descansa la inducción de Bernoulli», anota Frege a pie de página, cf. *Conceptografía*, edic. H. Padilla 1972, p. 79).

El programa se desarrolla luego en un plano filosófico en 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik* y en un plano sistemático en 1893, 1903, *Die Grundgesetze der Arithmetik [I, II]*.

Pues bien, apenas terminado el edificio se tambalea socavado por la famosa «paradoja de Russell»³; por otro lado, el programa logicista sólo se difunde al problemático y un tanto infiel amparo de Russell y Whitehead 1910-1913, *Principia Mathematica*: aparecen las señales de una inflexión; pero, por entonces, otras sistematizaciones axiomáticas conjuntistas, como la de Zermelo, ya han iniciado un nuevo rumbo. Por añadidura, en los años 20-30 van cobrando forma otros programas rivales más coherentes al parecer (como el intuicionista) o, al parecer, más prometedoras (como el de Hilbert). Para colmo, los años 30 asisten a la consideración expresa no sólo de ciertas lógicas alternativas a *Principia Mathematica* (lógicas modales, polivalentes o multivaloradas), sino a la idea general de sistemas lógicos alternativos a una lógica dada (e.g. de la mano de C.I. Lewis 1932, "Sistemas lógicos alternativos", en Vega 1981, *Lecturas de lógica. I*, pp. 247-271). Mientras tanto han empezado a cobrar señas de identidad propia los diversos estratos involucrados en la "gran lógica" fregeana: la teoría de las funciones de verdad, la teoría de la cuantificación. Y, en fin, también han comenzado a distinguirse las dimensiones del análisis lógico sistemático: teoría y metateoría, sintaxis y semántica.

Todo lo cual quiere decir que, al mediar el siglo, ha terminado una Historia, la de las "grandes lógicas" mientras que han empezado otras Historias nuevas: la de la lógica o la teoría de la cuantificación estándar —generalmente circunscrita al ámbito de los lenguajes lógicos elementales de primer orden—; las de las llamadas con mayor o menor fortuna y propiedad «lógicas alternativas». Pero, de momento, no conviene adelantar acontecimientos.

Demos, antes de seguir adelante, un vistazo final a la H^a de las perspectivas sobre fundamentos matemáticos y de los grandes programas lógico-matemáticos entre, digamos, 1850 y 1950 aproximadamente. Valga para estos efectos el esquema siguiente:

3 Otras paradojas de la familia de la de Russell ya eran conocidas en otros medios matemáticos, cf. G.H. Moore 1995. Sobre el contexto de los supuestos fregeanos, vid. R.G. Heck 1995, "Frege's principle", en J. Hintikka, ed. 1995, pp. 119-142.

UN ESQUEMA SOBRE LÓGICA Y FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

DEDEKIND 1852-1972: perspectiva conjuntista

CANTOR 1874-1883, 1895-97:

FREGE 1879, 1884, Teoría de conjuntos transfinitos
(*) 1893-1903: C, C^* [hipótesis de Cantor] HILBERT 1897 ss.:
Programa logicista - 1855-1899: anomalías o Axiomática abstracta

paradojas₁

RUSSELL 1901-1903: [Burali- Forti 1897
paradojas₂: antinomias ... Richards 1905] - 1904-1920:
- 1908: teoría de los tipos Metamatemática
- (*) 1910-13 Whitehead & R: *PM* Programa de Hilbert

ZERMELO 1904-1908:

Axiomatización
 E [ax. de elección]

[MIRIMANOFF 1917]

FRAENKEL 1923: *ZF*

VON NEUMANN 1925:

RAMSEY 1926:

Simplif. teoría tipos

paradojas₂ lógico-matemáticas
vs. "epistemológicas"

[Peano 1906: matem. vs. linguist.]
y de E con respecto a *NBG*

[TARSKI 1930: metodología cc. deductivas

1933-35: verdad en leng. formalizados]

1934, 1939

(*) QUINE 1938, 1940

Clases/Conjuntos

BERNAYS 1937: simplif.

GÖDEL 1938: *NBG*

consistencia relativa de C^*

(*) HILBERT-BERNAYS

[COHEN 1963: independencia
de C^* y E con respecto a *ZF*]

Propuestas disidentes o alternativas: POINCARÉ 1905-1906

BROUWER 1912 ss.

WEYL 1918, 1921.

Abreviaturas:

C , hipótesis del continuo, i.e.: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$; C^* , generalizada: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, para todo α .

E , axioma de elección: "dada una familia T de conjuntos no vacíos hay una función f que asigna a cada miembro A de T un elemento $f(A)$ de A " (Zermelo, 1908).

PM: *Principia Mathematica*; *ZF*: axiomatización Zermelo-Fraenkel; *NBG*: axiomatización von Neumann-Bernays-Gödel.

Las «grandes lógicas» están señaladas con un asterisco entre paréntesis.

Este esquema harto sumario trata simplemente de recordar algunas contribuciones relevantes en ese complicado marco de los programas y problemas de fundamentación y del desarrollo de las perspectivas y de las teorías conjuntistas, dentro del que se mueven las "grandes lógicas" así como otras propuestas críticas o disidentes.

Pero el cuadro también puede invitar a plantearse algunas cuestiones historiográficas, por ejemplo:

A.- En torno al nacimiento de la perspectiva conjuntista y de la teoría de conjuntos. Cf. e.g. Dugac 1976, Dauben 1979, Ferreirós 1993.

B.- En torno a la generación y distinción de las paradojas₁ / paradojas₂. Cf. en Beth (1965²) un catálogo convencional; vid. Garcíadiego 1992, 1994, para recabar noticias al respecto.

C.- En torno a los cambios de rumbo en el debate sobre fundamentos. Es instructivo comparar las contribuciones al congreso de Königsberg 1930 -recogidas en Benacerraf y Putnam, eds. 1964- y al congreso de Stanford 1960 -en Nagel, Suppes y Tarski, eds. 1964-.

D.- En torno al desarrollo de las teorías axiomáticas de conjuntos. Por ejemplo, J. Mosterín, en la introducción a su 1971, *Teoría axiomática de conjuntos* (Barcelona: Ariel, 1980²), se hace eco de la «teoría de los 3 estadios», relativamente popular en medios matemáticos. Según esta visión historiográfica, el desarrollo de la teoría de la conjuntos ha atravesado por tres fases o estadios de desarrollo: el primero, informal e ingenuo; el segundo, más bien informal pero axiomático; el tercero, formalizado (pp. 16-18, 20-31).

¿Qué opina Ud. al respecto?

6.1 B/1 Fuentes.

Una antología de textos (fragmentos) entre mediados del s. XIX y los años 1930: A. Cantini (comp.), 1979, *I Fondamenti della matematica*, Torino.

DEDEKIND 1872, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*; 1888, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, en *Gesammelte mathematische Werke*, Hrsg. R. Fricke, E. Noether, O. Ore. Braunschweig, 1930-1932, 3 vols.; vol. 3, pp. 315-334, 335-390. Reim. New York, 1969.

- (1872, 1888) *Essays on the Theory of Numbers*. Trad. W.W. Beman. Chicago, 1901; reimp. New York, 1963.

FREGE 1879, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denken*, Halle. Reedic. de I Angelelli, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Hildesheim, 1964. Versión inglesa en van Heijenoort ed. 1967, pp. 1-82.

- *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*. Trad. de H. Padilla, México, 1972; pp. 6-104. ["Prefacio" anotado en Vega 1986², 45-87].

FREGE 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau.

- *Fundamentos de la Aritmética*. Trad. de C.U. Moulines. Barcelona, 1972; con un estudio de C. Imbert (1969), pp. 131-238. [En trad. Padilla, 1972, pp. 107-206]

FREGE 1893, 1903, *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena. Reimp. Hildesheim, 1962.

- *The Basic Laws of Arithmetic [I, §§ 0-52]* Trad. parcial de M. Furth, Berkeley, 1964; [II, §§ 56-57, 86-137, 139-144, 146-147, App.] Trad. parcial de M. Black y P. Geach en *Translations from the philosophical writings of G. Frege*, Oxford, 1960.

FREGE (1891-1918), *Funktion, Begriff, Bedeutung, 5 logische Studien*. Hrsg. G. Patzig. Göttingen, 1962.

- (1891-1895), *Estudios sobre semántica*. Trad. U. Moulines. Barcelona, 1971.

- (1891-1918), *Escritos lógico-semánticos*. Trad. C.R. Luis y C. Pereda. Madrid, 1974. Cf. también *Investigaciones lógicas*, edic. L.M. Valdés. Madrid, 1984.

FREGE (1894-1918) *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hrsg. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach, Ch. Thiel, A. Veraart. Hamburg, vol. I, 1969; vol. II, 1976.

- *Posthumous Writings*. Trad. vol. I (1969), P. Long y R. White. Oxford, 1979.

- *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Edic. selectiva vol. II (1976), B. McGuinness; trad. H. Kaal. Chicago, 1980. [Cf. las observaciones críticas de C. Ortiz Hill 1995, "Frege's letters", en J. Hintikka, ed. 1995, pp. 97-118.]

CANTOR 1883, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig. Recogido en *G. Cantor. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen inhalts*. Hrsg. E. Zermelo. Berlin, 1932; 165-208. Reimp. Hildesheim, 1966.

- (1895, 1897) *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, edic. Ph.B. Jourdain. Chicago, 1915. Reedic. New York, 1955.

BURALI-FORTI 1984, *Logica matematica*. Milano, 1919².

BURALI-FORTI 1897, "Una questione sui numeri transfiniti", *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, **11**: 154-164 [trad. ing. en van Heijenoort, pp. 104-111].

PEANO 1889, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Torino.

- *Los principios de la aritmética*. Edic. biling. de J. Velarde. Oviedo, 1979.

Giuseppe Peano. Opere scelte. Edic. de U. Cassina. Roma. 1957-1959; 3 vols.

PADOA 1900, "Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque", *C.R. Congrès Intern. Philosophie [Paris, 1900]*, Paris, vol. III, pp. 309-365. [En v. Heijennort, trad. parc., 118-123].

HILBERT 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig.

- *Fundamentos de la geometría*. Trad. de la edic. 1930⁷, F. Cebrián. Madrid, 1953; reimp. sin correcciones -lástima- y con introd. de J.M. Sánchez Ron, Madrid, 1991. Incluye como apéndices Hilbert 1900 (244-249), 1904 (250-263), 1925 (264-287), 1928 (289-309).

HILBERT 1933-1935, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, 3 vols. Reimp. New York, 1965.

- (1900-1931) *Ricerca sui fondamenti della matematica*. Edic. de V.M. Abrusci.

POINCARÉ 1900, "Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques", *C.R. Congrès Intern. [Paris, 1900]*, Paris; pp. 115-130. Versión rev. en 1905, *La valeur de la science*, Paris, reimp. post., c. I [hay varias trad. castellanas, e.g. Bs. Aires, 1954].

POINCARÉ 1905, 1906 "Les mathématiques et la logique", *Revue de Métaphysique et de Moral*, **13**: 815-835; **14**: 17-34, 294-317. Versiones rev. en 1908, *Science et méthode*, Paris, reimp. post., cc. III, IV, V [hay varias trad. castellanas no muy cuidadas].

RUSSELL 1903, *The Principles of Mathematics*. London. 1937, 2^a edic. cf. introd. pp. v-

xiv. Reimp. posteriores.

- *Los principios de la matemática*. Trad. J. Barrio en Bertrand Russell, *Obras Completas*, vol. II: *Ciencia y Filosofía 1897-1919*. Madrid, 1973; pp. 377-820.

RUSSELL 1905, "On Denoting", *Mind*, **14**: 479-493. Recogido en 1956, *Logic and Knowledge [1901-1950]*, edic. de R.C. Marsh, London. [*Lógica y conocimiento*, trad. J. Muguerza, Madrid, 1966; pp. 53-74].

RUSSELL 1908, "Mathematical logic as based on the theory of types", *American Journal of Mathematics*, **30**: 222-262. Recogido en la edic. c. 1956, *Logic and Knowledge [1901-1950]*, [1966, pp. 77-144].

RUSSELL [WHITEHEAD & RUSSELL] 1910-1913, *Principia Mathematica*, Cambridge. Una edic. provechosa: *Principia Mathematica [to * 56]*, Cambridge, 1962, reimp. post. [Hay una versión española poco aprovechable: Madrid, 1986]

The Collected Papers of Bertrand Russell. Vol. 4, *Foundations of Logic, 1903-1905*, edic. A. Urquhart, A.C. Lewis, London/New York, 1994; vol. 6, *Logical and Philosophical Papers, 1908-1913*, edic. J.G. Slater, 1992; vol. 8, *The Philosophy of Logical Atomism and Other Essays, 1914-1919*, edic. J.G. Slater, 1986.

ZERMELO 1904, "Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann", *Mathematische Annalen*, **59**: 514-516 [en van Heijenoort, pp. 139-141; cf. también 183-193]

ZERMELO 1908, "Ueber die Grundlagen der Mengenlehre, I", *Mathematische Annalen*, **65**: 261-281 [en van Heijenoort, pp. 199-215].

[G. Heinzmann, ed. 1986, *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les Fondements des mathématiques*. Paris]

BROUWER 1912, *Intuitionisme en formalisme*, Groningen.

- "Intuitionism and formalism", *Bull. American Mathematical Society*, **20** (1913): 81-96; reimp. en Benacerraf & Putnam 1964, pp. 66-77; "Intuitionisme et formalisme", en Largeault, ed. 1992, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, pp. 39-53.

BROUWER 1923 "Ueber die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie", *Journal f. die reine u. angew. Mathematik*, **154**: 1-7 [en van Heijenoort, pp. 334-341; en Largeault 1992, 197-205].

BROUWER 1952, "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism", *South-African Journal of Science*, **24**: 139-146 [en Largeault 1992, pp. 445-458].

- BROUWER (1905-1955), *Collected Works*. Edic. de I.A. Heyting. Amsterdam, 1975.
- WEYL 1921, "Ueber die neue Grundlagenkrise der Mathematik", *Mathematische Zeitschrift*, **10**: 39-79.
- WITTGENSTEIN [1921, "Logisch-philosophische Abhandlung", *Annalen der Naturphilosophie*, **14**: 185-262] 1922, *Tractatus Logico-Philosophicus*, introd. B. Russell; edic. bil. con trad. ing. de C.K. Ogden. London.
- *Tractatus Logico-Philosophicus*, edic. bil. con trad. castellana de J. Muñoz e I. Renguera, Madrid, 1987 [viene a sustituir a la de E. Tierno Galván, 1973, reimp. post.]
- FRAENKEL 1922, "Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen, I", *Mathematische Zeitschrift*, **13**: 153-188.
- L. CHWISTEK 1924-1925, "The theory of constructive types", *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, **2**: 9-48; **3**: 92-141.
- VON NEUMANN 1925, "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", *Journal f. die reine u. angewandte Mathematik*, **154**: 219-240; "Berichtigung", *ibid.*, **155**: 128 [abrev. en van Heijenoort, 393-413.
- F.P. RAMSEY (1925-1928), *Foundations [Essays in Philosophy, Logic, Mathematics and Economics]*. Edic. D.H. Mellor. London, 1978 [revisa y amplia edic. Braithwaite, 1931]
- CARNAP (1934, 1937), *Logical Syntax of Language*. Trad. ing. A. Smeaton. London, 1964, 6ª reimp. correg.
- HILBERT - BERNAYS 1934, 1939 *Grundlagen der Mathematik*. Berlin. Vols. I, II. Reedid. Berlin/Heidelberg/New York, 1968 y 1970 respectiv.
- BERNAYS (1938) "Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration", en F. Gonseth, ed. *Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques*, Zurich, 1941; pp. 147-171.
- WITTGENSTEIN (1937-1944), *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Edic. bilingüe (alemán-inglés) de G.H. von Wright, R. Rhees, G.E.M. Anscombe. Oxford, 1956, 1967, 1978. Con la inclusión de notas procedentes de los años 1933-1934.
- *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Trad. de la edic. von Wright, Rhees, Anscombe 1978 a cargo de I. Reguera. Madrid, 1987.
- J. CAVAILLÈS (1938-1940; 1946-1949 póstumos), *Oeuvres complètes de Philosophie des sciences*. Edic. B. Huisman *et al.*; "In Memoriam", por G. Canguilhem. Paris. 1994.

J. CAVAILLÈS (1938, 1981²) *Método Axiomático y Formalismo*, trad. C. Álvarez y S. Ramírez. México, 1992.

QUINE 1938, "New Foundations for the Mathematical Logic", *The American Mathematical Monthly*, **44**: 70-80.

QUINE 1940, *Mathematical Logic*. New York. 1951² edic. rev. Cambridge (Mass.).

- *Lógica matemática*. Trad. J. Hierro S. Pescador. Madrid, 1972.

[COHEN, P.J. 1963, *The independence of the axiom of choice*. Stanford (mimeograf.)

COHEN, P.J. 1963-64, "The independence of the continuum hypothesis", *Proc. National Academy of Sciences U.S.A.*, I, **50** (1963): 1143-1148; II, **51** (1964): 105-110.]

6.1 B/2 Literatura secundaria.

ABRUSCI, V.M. 1980, "«Proof», «Theory», and «Foundations» in Hilbert's Mathematical Work from 1885 to 1900", en M.L. dalla Chiara, ed. 1990, *Italian Studies in the Philosophy of Science*, Dordrecht/Boston; pp. 453-491.

ANGELELLI, I. 1967, *Studies on Frege and Traditional Philosophy*. Reidel.

ANGELELLI, I. (1973) "Freges Ort in der Begriffsgeschichte", en C. Thiel, ed. 1975, *Frege und die moderne Grundlagenforschung [Symp. Bad Homburg, 1973]*, Meisenheim am Glann; pp. 9-22.

ASPRAY, W., KITCHER, P., (eds.) 1988, *History and Philosophy of Modern Mathematics*. [Minnesota Stud. in the Phil. of Science, XI], Minneapolis.

BAKER, G. 1988, *Wittgenstein, Frege & the Vienna Circle*, Oxford/New York.

BEESON, M.J. 1985, *Foundations of Constructive Mathematics*, Berlin/Heidelberg/New York. En particular: "Historical Appendix", pp. 417-438, y refer. 439-449.

BENACERRAF, P., PUTNAM, H. (eds.) 1964, *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall. 1983² modif., Cambridge. Cf. P. I, "The foundations of mathematics", pp. 41-238 (incluye, entre otros trabajos y estudios, las contribuciones de Carnap [logicismo],

Heyting [intuicionismo] y von Neumann [formalismo] al Simposio Königsberg 1930).

BERNAYS, P. 1967, "Hilbert, David" en P. Edwards, dir. *The Encyclopedia of Philosophy*, New York/London: Macmillan-The Free Press/Collier-Macmillan, vol. 3, 496-504.

- BETH, E.W. 1959, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam, 1965². En especial, I, c. 3, 52- 78; II, cc. 4-7, 81-174; V, cc. 13-16, 353-477; VI, c. 17, 481-518.
- BETH, E.W. (1965², VI, c. 17) *Las paradojas de la lógica*. Valencia, 1975.
- BIRKHOFF, G., BENNET, M.K. 1987, "Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*", *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, [ser. 2] **36**: 343-389.
- BÔCHER, M. 1904, "The fundamental conceptions and methods of mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **11**: 115-135.
- BOOLOS, G. 1985, "Reading the *Begriffsschrift*", *Mind*, **94**: 331-344.
- BORGA, M. 1992, "Sulla consistenza delle teorie matematiche: Hilbert e la scuola di Peano a confronto", *Epistemologia*, **15**: 41-54.
- BORGA, M., PALLADINO, D. 1992, "Logic and foundations of mathematics in Peano's school", *Modern Logic*, **3**: 18-44.
- BORGA, M., FREGUGLIA, P., PALLADINO, D. 1985, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano.
- BOS, H., MEHRTENS, H., SCHNEIDER, I. eds. 1981, *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, Basel/Boston.
- BOTAZZINI, U. 1985, "Dell'analisi matematica al calcolo geometrico: origine delle prime ricerche di logica di Peano", *History and Philosophy of Logic*, **6**: 25-52.
- BOTAZZINI, U. 1990, *Il flauto di Hilbert*, Torino. [Aunque se trata de una H^a de la matemática desde Leibniz hasta Gödel, está centrada en torno al s. XIX y las primeras décadas del XX; pueden verse también los breves fragmentos y glosas de U. Botazzini, P. Freguglia, L. Toti 1992, *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, 4, "Le principali tematiche fondazionali tra ottocento e novecento", pp. 432-463.]
- BOURBAKI, N. (1969), *Elementos de historia de las matemáticas*. Trad. J. Hernández. Madrid, 1972; pp. 11-70, en particular.
- BUNN, R. (1980), "Los desarrollos de la fundamentación de la matemática desde 1870 a 1910" en I. Grattan-Guinness, ed. (1980), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630- 1910. Una introducción histórica*. Madrid, 1984; pp. 283-327.
- CARL, W. 1994, *Frege's Theory of Sense and Reference. Its Origins and Scope*. Cambridge.
- CASARI, E. 1964, *Questioni di filosofia della matematica*. Milano.
- CASARI, E. 1981, "Logic and the foundations of mathematics", en E. Agazzi, ed. *Modern*

- Logic*, Dordrecht, 1981; pp. 155-166.
- CASCANTE, J.M.^a 1968, *Los fundamentos lógicos de la matemática y su repercusión sobre la concepción de una nueva filosofía sistemática* [Discurso inaugural del curso 1967-68, Univ. de La Laguna]. La Laguna (Tenerife).
- CHURCH, A. (1960), "Mathematics and Logic", en E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski, eds. *Logic, Methodology and Philosophy of Science [1960 Intern. Congress]*, Stanford, 1962; pp. 181-186.
- COFFA, A. 1991, *Semantic Tradition from Kant to Carnap*. Cambridge.
- CONTRO, W. 1976, "Von Pasch zu Hilbert", *Archive for Hist. Exact Sciences*, **15**: 283-295.
- CURRIE, G. 1986, "Continuity and change in Frege's philosophy of mathematics", en I. Haaparanta, J. Hintikka (eds.) 1986, pp. 435-373.
- CURRIE, G. 1987, "Remarks on Frege's Conception of Inference", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **24/1**: 55-68.
- CURRY, H.B. 1951, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, 1958.
- DAUBEN, J.W. 1979, *Georg Cantor*. Cambridge (Mass.).
- DAUBEN, J.W. 1995, "Georg Cantor", *Investigación y Ciencia [Temas. 1]*, pp. 94-105.
- DAUBEN, J.W. ed. 1981, *Mathematical Perspectives. Essays on mathematics and its historical development*, New York.
- DETLEFSEN, M. 1987, *Hilbert's Program*. Dordrecht.
- DETLEFSEN, M. 1994, "Constructivism", en I. Grattan-Guinness, ed. 1994, *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. London/New York; vol. I, **5.6**, pp. 656-664.
- DIEUDONNÉ, J. ed. 1978, *Abregé d'histoire des mathématiques. 1700-1900*. Paris; 2 vols., vol. II en particular. [2^a edic. revisada: Paris, 1986, en un solo volumen].
- DUDMAN, V.H. 1976, "From Boole to Frege", en S. Schirn ed. 1976, I, pp. 109-138.
- DUGAC, P. 1976, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris.
- DUMMETT, M. 1973, *Frege. Philosophy of Language*. London, 1981².
- DUMMETT, M. 1977, *Elements of Intuitionism*. Oxford/New York.
- DUMMETT, M. 1991, *Frege. Philosophy of Mathematics*. Cambridge (Mass.).
- DUMMETT, M. 1991, *Frege and Other Philosophers*. Oxford/New York.
- EDWARDS, H.M. 1989, "Kronecker's views on the foundations of mathematics", en Rowe,

- McCleary (eds.) 1989, *The History of Modern Mathematics. I, Ideas...*, pp. 67-77.
- FERNÁNDEZ MORENO, L. (1993), "Logical Laws and the Word «True»", en I. Max, W. Stelzner (hergbn), 1995: 241-248.
- FERREIRÓS, J. (1991), *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908*. Madrid, 1993.
- FOLINA, J. 1992, *Poincaré and the Philosophy of Mathematics*. Basingstoke/London.
- FRAENKEL, A.A., BAR-HILLEL, Y. 1958, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam.
- FREUDENTHAL, H. (1962), "The main trends in the foundations of geometry in the 19th. century", en Nagel, Suppes, Tarski (eds.) 1962, *Logic ...*, pp. 613-621.
- FRIEDMAN, M. 1988, "Logical truth and analyticity in Carnap's *Logical Syntax of Language*", en Aspray, Kitcher (eds.) 1988, pp. 82-94.
- GARCÍADIEGO, A. 1985, "The emergence of some of the non-logical paradoxes of the Theory of Sets", *Historia Mathematica*, **12**: 337-351.
- GARCÍADIEGO, A. 1986, "On rewriting the history of the foundations of mathematics at the turn of the century", *Historia Mathematica*, **13**: 39-41.
- GARCÍADIEGO, A. 1992, *Bertrand Russell and the Origin of the Set Theoretic Paradoxes*, Basel/Boston. [Edic. española sin parte del aparato textual: Madrid, 1992].
- GARCÍADIEGO, A. 1994, "The set-theoretic paradoxes", en I. Grattan-Guinness, ed. 1994, *Companion Encyclopedia...* London/New York; vol. I, **5.3**, pp. 629-634.
- GIAQUINTO, M. 1983, "Hilbert's philosophy of mathematics", *British Journal of the Philosophy of Science*, **34**: 119-132.
- GILLIES, D. 1982, *Frege, Dedekind and Peano on the Foundation of Arithmetic*, Assen.
- GILLIES, D. 1992, "The Fregean revolution in Logic", en D. Gillies, ed. 1992, *Revolutions in Mathematics*, Oxford; pp. 265-305.
- GÓDEL, K. 1944, "Russell's mathematical logic", en F. Schilpp, ed. 1944, *The Philosophy of Bertrand Russell*, La Salle (Illinois), 2, pp. 123-154. [En Kurt Gödel, *Obras completas*, edic. J. Mosterín, Madrid, 1981; pp. 297-327
- GOLDFARB, W.D. 1982, "Kant, Bolzano and the emergence of logicism", *The Journal of Philosophy*, **79/11**: 679-695.
- GRATTAN-GUINNESS, I. 1984, "Notes on the Fate of Logicism from *Principia Mathematica* to Gödel's Incompleteness Theory", *History and Philosophy of Logic*, **5**: 67-78.

- GRATTAN-GUINNESS, I. 1985, "Bertrand Russell's logical manuscripts: An apprehensive brief", *History and Philosophy of Logic*, **6/1**: 53-74.
- GRATTAN-GUINNESS, I. 1988, "Living together and living apart...", citado en **6.1 A/2**.
- GRIFFIN, N. 1980, "Russell on the nature of logic (1903-1913)", *Synthese*, **42**: 117-188.
- HAAPARANTA, L., HINTIKKA, J. 1986, eds. *Frege synthesized*. Dordrecht/Boston.
- HAAPARANTA, L. 1988, "Analysis as the method of logical discovery: some remarks on Frege and Husserl", *Synthese*, **77**: 73-97.
- HEIJENOORT, J. van, 1967, "Logic as calculus, logic as language", *Synthese*, **17**: 324-330.
- HEYTING, A. 1962, "After thirty years", en Nagel, Suppes, Tarski, pp. 194-197.
- HINTIKKA, J. 1984, "A hundred years later: the rise and fall of Frege's influence in language theory", *Synthese*, **59**: 27-49.
- HINTIKKA, J. 1988, "On the development of the model-theoretic viewpoint in logical theory", *Synthese*, **77**: 1-36.
- IRVINE, A.D. 1989, "Epistemic logicism & Russell's regressive method", *Synthese*, **55**: 303-327.
- JOURDAIN, P.E.B. (1906-1914), "The Development of the Theory of Transfinite Numbers" *Archiv für Mathematik und Physik*, **10**: 254-281; **14**: 287-311; **16**: 21-43; **22**: 1-21; en 1989, *Selected Essays... (1906-1918)*, edic. I. Grattan-Guinness, pp. 101-244.
- JOURDAIN, P.E.B. (1910-1913), "The Development of Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics", *Quarterly Journal for Pure and Applied Mathematics*, **41**: 324-352; **43**: 219-314; **44**: 113-128; en 1989, *Selected Essays... (1906-1918)*, edic. c., pp. 1-100.
- KENNEDY, H.C. 1973, "The Origins of Modern Axiomatics: Pasch to Peano", *American Mathematical Monthly*, **79**: 133-136.
- KENNEDY, H.C. 1980, *Peano. Life and Works of Giuseppe Peano*. Dordrecht/Boston.
- KILMISTER, C.W. (1984), *Russell*, México, 1992.
- KITCHER, P. 1976, "Hilbert's Epistemology", *Philosophy of Science*, **43**: 99-115.
- KITCHER, P. 1979, "Frege's Epistemology", *The Philosophical Review*, **88**: 235-262.
- KITCHER, P. 1986, "Frege, Dedekind and the philosophy of mathematics", en Haaparanta, Hintikka, eds. 1986, pp. 67-82.
- KITCHER, P. 1990, "The Foundations of Mathematics", en R.C. Olby, G.N. Cantor, J.R.

- Christie, M.J.S. Hodge, eds. 1990, *Companion to the History of Modern Science*, London/New York; pp. 677-689.
- KLEMKE, E.D. 1979, "Frege's philosophy of logic", *Rev. Intern. Philosophie*, **33**: 666-693.
- KNOBLOCH, E. 1981, "Symbolik und Formalismus im mathematischen Denken des 19. und beginnenden 20. Jahrhunderts", en Dauben, ed. 1981, pp. 139-165.
- KREISEL, G. (1958) "Hilbert's programme", en P. Benacerraf & H. Putnam, eds. 1983², *Philosophy of Mathematics*, pp. 207-230; "Postscript (1978)", pp. 231-238.
- LARGEAULT, J. 1970, *Logique et philosophie chez Frege*. Paris.
- LORENZO, J. de, 1974, *La filosofía de la matemática de Poincaré*, Madrid.
- LORENZO, J. de, 1995, "Gottlob Frege", *Investigación y Ciencia [Temas. 1]*, pp. 106-119.
- MAX, I., STELZNER, W. (Hergbn) 1995, *Logik und Mathematik [Frege-Kolloquium Jena 1993]*, Berlin/New York.
- MOORE, G.H. 1980, "Beyond first-order logic: the historical interplay between mathematical logic and axiomatic set theory", *History and Philosophy of Logic*, **1**: 95-137.
- MOORE, G.H. 1982, *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development and Influence*. New York/Heidelberg/Berlin.
- MOORE, G.H. 1989, "Towards a history of Cantor's continuum problem", en D.E. Rowe, J. McCleary, eds. 1989, *The History of Modern... I*, pp. 79-121.
- MOORE, G.H. 1994, "Logic and set theory", en I. Grattan-Guinness, ed. 1994, *Companion Encyclopedia... I*, **5.4**, pp. 635-643.
- MOORE, G.H. 1995, "The origins of Russell's paradox: Russell, Couturat, and the antinomy of Infinity Number", en Hintikka, ed. 1995, pp. 215-239.
- MORICONI, E. 1988, *La teoria della dimostrazione di Hilbert*, Napoli.
- MOSTERÍN, J. (1980), "La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático", recog. en su 1984, *Conceptos y teorías en la ciencia*, Madrid; 5, pp. 111-130.
- PATZIG, G. 1969, "Leibniz, Frege und die sogenannte «lingua characteristica universalis»", *Studia leibnitiana*, **III/3**: 103-112.
- PECKHAUS, V. 1990, *Hilbertprogramm und kritische Philosophie. Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie*. Göttingen.
- PRAWITZ, D. 1993, "Remarks on Hilbert's Program for the Foundation of Mathematics", en G. Corsi, M.L. dalla Chiara, G.C. Ghirardi, eds. 1993, *Bridging the Gap*:

- Philosophy, Mathematics, and Physics*, Dordrecht/Boston/London; pp. 87-98.
- PULKKINEN, J. 1994, *The Threat of Logical Mathematism. [A Study on the Critique of Mathematical Logic in Germany at the Turn of the 20th Century]*. Frankfurt/Berlin.
- REID, C. (1970), *Hilbert*. Recogido [sin el ensayo de H. Weyl: "Hilbert"] en *Hilbert-Courant*, New York/Heidelberg/Berlin, 1986; pp. 1-220.
- RIVENC, F., ROUILHAN, Ph., eds. 1992, *Logique et fondements de mathématiques*. Paris.
- RODRÍGUEZ CONSUEGRA, F. 1987, "Russell's logicist definitions of numbers 1899-1913: chronology and significance", *History and Philosophy of Logic*, **10**: 131-164.
- RODRÍGUEZ CONSUEGRA, F. 1991, *The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell: Origins and Development*. Basel/Berlin/Boston: Birkhäuser.
- RODRÍGUEZ CONSUEGRA, F. 1993, "Mathematical logic and logicism from Peano to Quine", en I. Grattan-Guinness, ed. 1993, *Companion.... I*, **5.2**, pp. 617-628.
- ROWE, D.E. 1989, "Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition", *Osiris*, **5**: 186-213.
- Revue internationale de philosophie* [Monog. sobre Hilbert y formalismo], **186/4** (1993).
- SARKAR, S. 1992, "The boundless ocean of unlimited possibilities: Logic in Carnap's *Logical Syntax of Language*", *Synthese*, **93**: 121-137.
- SCHOENMAN, R. ed. (1967), *Homenaje a Bertrand Russell*. Barcelona, 1968. En esp. P. IV: contribuciones de D. Scott, G. Kreisel, H. Putnam, W.O Quine, pp. 255-444.
- SCHRIN, M., ed. 1976, *Studien zu Frege/Studies on Frege*, Stuttgart/Bad Cannstatt. 3 vols.
- SHANKER, S.G. 1987, *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, Albany (NY).
- SLUGA, H. 1980, *Gottlob Frege*. London.
- SLUGA, H. 1985, "Frege Against the Booleans", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **28**: 80-98.
- STERNFELD, R. 1966, *Frege's Logical Theory*. Carbondale (Illinois).
- The Journal of Symbolic Logic* [A Symposium on Hilbert's Program], **53/2** (1988): 337-384.
- THIEL, C. (1970), *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege*, Madrid, 1972.
- THIEL, C. 1971, "El problema de la fundamentación de la Matemática y la Filosofía", *Teorema*, **3**: 5-24.
- THIEL, C. (1979), "From Leibniz to Frege ...", 1982, pp. 755-770; cf. § **5.1.2**.

- THIEL, C. 1990, "Must Frege's rôle in the history of philosophy and logic be rewritten?", en I. Angelelli, A. D'Ors, eds. 1990, *Estudios de Historia de la Lógica*, Pamplona; pp. 571-584.
- TICHY, P. 1988, *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin/Heidelberg/New York.
- TILES, M. 1989, *The Philosophy of Set Theory. [An Historical Introduction to Cantor's Paradise]*, Oxford.
- TOPELL, M. 1986, "On the Origins of David Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*", *Archive for History of Exact Sciences*, **35**: 329-344.
- TORRETTI, R. 1978, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht/Boston, 1984². En especial, cc. 3-4, pp. 155 ss.
- VEGA, L. 1989, "Wittgenstein, un *outsider* en lógica", *Contextos*, **VII**/13: 79-103.
- WANG, H. 1974, *From Mathematics to Philosophy*. London/New York. En part. cc. I, 30-58; III, 103-130; VI, 181-223.
- WEYL, H. 1944, "David Hilbert and his mathematical work", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **50**: 612-654.
- WRIGHT, C. 1980, *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, London.
- WRIGHT, C. 1984, *Frege. Tradition & Influence*. Oxford/New York, 1986².