6.2 Lógica estándar.

Entendamos ahora por «lógica estándar» nuestra lógica básica de primer orden. Bueno, si Ud, ha cursado un primer año de Lógica en cualquier universidad ordinaria, debe conocerla. Otros se refieren a ella como "lógica moderna" (cf. *supra*, el principio del c. **5**); algunos la llaman "clásica"; hay quien sobrentiende en cualquiera de estos apelativos «Lógica» sin más [1].

El calificativo «estándar» responde a su condición de lógica establecida en el sentido de ser, desde los años 1940-50 y por lo común, tanto la base primordial de aprendizaje de quienes se inician en la materia de lógica, como el cuerpo de nociones, métodos y resultados que se dan por consabidos entre quienes practican esta disciplina. Tiene en este contexto un un sentido histórico e institucional -en otros contextos, e.g. en teoría de modelos a partir de Henkin, Rosser y Wang, o en el análisis a partir de Robinson, el par «estándar / no-estándar» cobra sentidos técnicos distintos—. Naturalmente, de esa fortuna institucional no se sigue que la lógica estándar sea la única existente o la única reconocida. Pero su carácter técnicamente elemental tampoco implica la carencia de interés lógico, filosófico e histórico [2]. Al contrario, en este último sentido, la gestación, el desarrollo y la consolidación de la lógica estándar han sido uno de los grandes acontecimientos -si no el mayor- que ha vivido la lógica en el siglo XX. De modo que tomaré ese proceso como eje central de la Hª de la lógica contemporánea.

Creo que, en términos muy generales, cabe resumir la aparición y el desarrollo de la lógica estándar en el curso de las décadas 1910-30 con arreglo a este esquema.

1. Distinción y acotación teórica y metateórica de la lógica primaria de enunciados (o "teoría de la deducción", según *PM*) por parte de Post; investigaciones posteriores, sobre todo en el seminario de Łukasiewicz y, más en general, a cargo de la escuela polaca.

2. Génesis y desarrollo de la teoría de la cuantificación:

2.1 En principio, como lógica subyacente en teorías matemáticas básicas (aritmética de Peano; teoría de conjuntos).

2.2 Estudios sobre cuantificación de variables individuales con referencia a dominios numerables (e.g. en las líneas de Skolem, Hilbert, Herbrand).

---

1 Este no es el lugar más indicado para detenerse en los problemas de identificación y caracterización interna de la lógica estándar. Cf. al respecto L. Vega 1987, *El análisis lógico: nociones y problemas. II.* Madrid: UNED; D, cap. 2, pp. 125-141; D. Quesada 1995, "Lógica clásica de primer orden", en AAVV, *Lógica [EIAF 9]*, Madrid: Trotta, pp. 71-104.

2 Vid., e.g., el abanico de planteamientos y cuestiones que recoge R.I.H. Hughes (comp.) 1993, *A Philosophical Companion to First-Order Logic*, Indianapolis: Hackett.

2.3 Exploración de rasgos metateóricos característicos (e.g. en la línea Löwenheim-Skolem, en el marco del programa de Hilbert, en la confluencia de ambos en Gödel).

Por otro lado, su consolidación obedece a motivos de diverso orden. Como muestras de su diversidad, me atreveré a mencionar los siguientes:

(*a*) Motivos técnicos: ámbito destacado por los resultados de Skolem, Herbrand, Gödel y Church, por la axiomatización Bernays-Gödel de la teoría de conjuntos —no sin resistencias y alternativas, e.g., de Zermelo o de Tarski—; relieve reforzado por el concurso de los nuevos sistemas de deducción natural (Jaśkowski, Gentzen).

(*b*) Factores institucionales: influjo de los primeros manuales de "lógica matemática" elaborados por la escuela polaca, complicidad del positivismo lógico y de la filosofía analítica, creciente peso académico de los "lógicos matemáticos" en Europa central, USA y el Reino Unido, diseminación favorecida por la diáspora de alemanes, austriacos y polacos.

Hay un aspecto de este proceso que merece atención especial en la medida en que constituye un rasgo distintivo de la lógica de nuestro siglo: se trata, a mi juicio, de las interrelaciones existentes entre el desarrollo técnico de los métodos de análisis y de las teorías o sistemas lógicos y la investigación de sus propiedades metateóricas. Como una Guía para armar historias no es una historia, no voy a desplegar aquí el vasto e intrincado panorama de estas relaciones en todos sus detalles. Sólo adelantaré unas notas al hilo de lo que podría ser un esquema central del desarrollo histórico de las investigaciones lógica y metalógicas en este campo. Algunos estudios que merecen destacarse al respecto son, por orden de antigüedad, Mostowski 1966, Wang 1970, Prawitz 1971, Mangione 1972, van Heijenoort 1976, Goldfarb 1979, Grattan-Guinness 1981, van Heijenoort 1985, Dreben y van Heijenoort 1986, Moore 1988, Anellis 1991, Dawson 1993 (vid. más adelante § **6.2.2**).

Por otro lado, si el lector quiere información histórica sobre otros puntos técnicos concretos (e.g. desde el "descubrimiento múltiple" de las tablas de verdad hasta los problemas de formulación de la regla de sustitución de variables), puede acudir a las oportunas notas históricas que inserta Church 1956², edic. c. —sobre lógica proposicional, § 29, pp. 155-166; sobre lógica de primer orden, § 49, 288-294—, o ir espigando noticias en las historias y las antologías de la lógica contemporánea.

6.2.0 Un esquema del desarrollo de la investigación en/sobre lógica de primer orden.

Señalaré algunos rasgos generales de los momentos principales, para luego detenerme en determinadas contribuciones de especial relieve. Espero que el estilo de exposición, por fuerza sumario, no resulte críptico; doy por supuesta la familiaridad con las nociones relativas a la lógica estándar que cabe atribuir a quienes hayan hecho algún curso de Lógica.

0. Antecedentes

Dos líneas generales de investigación:

I. Desarrollos del programa del álgebra de la lógica en relación con diversos dominios de interpretación (en particular, Schröder 1890-1905).

II. Desarrollo de diversas tendencias en la dirección de la rigorización de los conceptos y las pruebas matemáticas, desde mediados del s. XIX, y extensión hacia finales del siglo de las imágenes: el matemático como arquitecto de la deducción, la lógica como lógica subyacente.

Algunos aspectos particulares:

- Cuestiones de consistencia relativa y de independencia relacionadas con la aparición de geometrías no-euclidianas. Proyección en Peano 1894: cabe probar la independencia de unos postulados mediante ejemplos pertinentes [cf. Borga, Freguglia, Palladino 1985]. Posterior desarrollo en la escuela de Peano: relación entre independencia y consecuencia, e.g. Pieri 1897: unos postulados P, Q, R son mutuamente independientes si ninguno de ellos es consecuencia de alguno de los otros; para probar que todas las premisas de un sistema deductivo son compatibles, consistentes, basta un ejemplo que las verifique a todas; el mismo recurso basta para concluir que la negación de cada una es independiente del resto [cf. Marchisotto 1993]. Padoa 1900: planteamiento de la deducción como consecuencia lógica y consideración indiferenciada, "sintáctico-semántica", de conjuntos irreducibles de nociones y de proposiciones primitivas sobre una noción informal de demostración. Por ejemplo,

«... Un sistema de proposiciones no-demostradas es irreducible (o estas proposiciones son absolutamente independientes) cuando no es posible deducir ninguna proposición no-demostrada de otras proposiciones de este tipo (y de proposiciones lógicas) ... Para demostrar que el sistema de las proposiciones no-demostradas es irreducible, es necesario y suficiente hallar, para cada una de estas proposiciones, una interpretación del sistema de los símbolos no-definidos que verifica todas las demás proposiciones no-demostradas, pero no esta proposición» (vid. Padoa

1900, fragm., en van Heijenoort (ed.) 1967, pp. 119-123).

- Estudio de la categoricidad de $\mathscr{R}$ (Dedekind, Cantor); categoricidad de $\mathscr{N}$ (Dedekind, Peano).

Cuestiones relacionadas con la categoricidad (e.g. Huntington, 1905: en el caso de un conjunto cualquiera de postulados categóricos, uno está tentado de decir que cualquier proposición que pueda que pueda establecerse en términos de los conceptos fundamentales, o es deducible de los postulados o lo es su contradictoria, aunque nuestro dominio de la lógica de la deducción no sea suficiente para justificarlo. Veblen admitía, en cambio, la posibilidad de proposiciones verdaderas en el modelo único del sistema pero indemostrables dentro del sistema mismo. Cf. Moore 1988, pp. 108-109. Para más detalles, Corcoran 1980.

1. El parto múltiple de la lógica estándar: los años 1910 y 1920

En términos generales, cabe apreciar la constitución de dos grandes ámbitos de trabajo en lógica durante las primeras décadas del s. XX:

A. El de la gran lógica postfregeana, desplegado en Russell y Whitehead 1910-1913, *PM*.

B. El de las investigaciones "semánticas" sobre satisfacibilidad, después de la inflexión marcada por Schröder en el programa del álgebra de la lógica.

Cada uno de ellos propicia diversas actitudes antes de los años 20: **A**, una actitud más bien "experimental" hacia la sistematización axiomática de la deducción lógico-matemática

(E.g.: «La principal razón en favor de cualquier teoría sobre los principios de la matemática debe ser siempre inductiva, i.e. debe descansar en el hecho de que la teoría en cuestión nos permita deducir las matemáticas ordinarias», *PM*, I 1910, Preface, p. v).

B, a su vez, una actitud informal hacia el análisis de la cuantificación, i.e. un proceder al margen de axiomas y reglas expresas de deducción.

Hay, sin embargo, otros dos factores relevantes que vienen a completar el cuadro de la situación hacia 1920: uno es el horizonte abierto por la propuesta inicial del programa de Hilbert y los primeros pasos de la "escuela de Gotinga"; el otro es el desarrollo, en parte propiciado por este programa y en parte independiente, de las cuestiones de decisión —son síntomas de esta relativa independencia: el uso de tablas de verdad y de formas normales disyuntivas por parte de Post 1921 como procedimientos efectivos de decisión y derivabilidad en la lógica proposicional de *PM*; la aparición de formas normales prenexas en teoría de la cuantificación (Löwenheim 1915). En cualquier caso, creo que los dos fenómenos históricos que presiden la aparición y el desarrollo de la lógica estándar en los años 20 son:

1. El hecho de tratarse de una gestación tanto postbooleana como postfregeana, en el sentido de responder a unas condiciones y asunciones más o menos emparentadas con los programas originales de Boole y de Frege, pero bajo inflexiones imprevisibles desde ellos.

2. El hecho de consistir en un parto múltiple, en el sentido de proceder de diversos motivos y distintas líneas de investigación fecundantes (algebraica, hilbertiana, etc.).

También son varios y diversos sus primeros campos y motivos de desarrollo:

- Desarrollo informal del ámbito de la satisfacibilidad (Löwenheim-Skolem).
- Cuestiones fundacionales de consistencia y estrategia estratificada (programa Hilbert).
- Cuestiones de decidibilidad.

Recordemos en este último caso los síntomas ya apuntados. E.g.: Post 1921 dispone y emplea las tablas de verdad como recurso dirigido a obtener un procedimiento efectivo de derivabilidad mediante la manipulación sistemática de valores a-semánticos. Post, además, discurre al margen de las líneas sistemática postfregeana e informal-postbooleana, aunque se aproveche de los recursos metódicos de Shröder y *PM*; presta mayor atención a desarrollos formales o "sintácticos" como los sugeridos por Lewis 1918 al que se remite expresamente.

El otro síntoma es el desarrollo de las formas normales y la investigación de clases de fórmulas decidibles y de clases de reducción (e.g. Ackermann: las fórmulas de prefijo «$\exists ... \exists \ \forall \ \exists ... \exists$» son decidibles; Skolem: las fórmulas de prefijo «$\forall ... \forall \ \exists ... \exists$» son una clase de reducción: si son decidibles, cualquier fórmula de la teoría de la cuantificación es decidible).

2. Maduración y consolidación: años 30-40

Desde el punto de vista de la madurez de la lógica estándar, los años 1930 representan una especie de década prodigiosa. Algunas señales de su maduración son las siguientes:

- Desarrollo de las relaciones entre nociones "sintácticas" y "semánticas", en cuyo marco tendrá lugar la solución de cuestiones de consistencia y de completud (Gödel 1930).

Son sintomáticas en este sentido las precisiones de Gödel en torno a la noción formal de derivación en un sistema y en torno a la validez universal de las tesis de la teoría de la cuantificación. Especialmente, cuando se toman en el contexto de su relación con Skolem y con Herbrand 1929. Considérese la serie: sistematización axiomática formal, procedimiento de prueba, validez universal. Diríamos que Skolem conecta los dos últimos términos; Herbrand conecta los dos primeros. Gödel conecta el primero y el tercero. Combinando Herbrand con

Skolem 1923, resultaría la completud para las fórmulas en forma prenexa de Skolem; combinándolo con Skolem 1929, resultaría la completud para todas las fórmulas de la teoría de la cuantificación. (Cf. Dreben-van Heijenoort en Gödel 1986, pág. 55.).

- Aparición expresa de una metodología de las teorías deductivas, sobre la base de una noción de *teoría* como un conjunto de proposiciones cerrado bajo una operación regulada de derivación, y de una semántica científica referida a las nociones de *satisfacción*, *verdad* y *consecuencia lógica* (Tarski 1930-1936). Pueden interpretarse como dos vías paralelas y complementarias de concreción de los papeles reservados a una lógica subyacente.
- Paso desde la decidibilidad informal a la computabilidad (tesis de Church 1936, impacto de Turing 1936; primeros desarrollos de la teoría de la recursividad antes avanzada por Gödel 1930). Cabe interpretar estos resultados, junto con Gödel 1930 y los métodos y los resultados de limitación de Gödel 1931, como la plenitud de la autoconciencia metateórica de la lógica estándar en su calidad de teoría o sistema lógico de primer orden.
- La tercera vía de una metalógica «constructiva» (Gentzen 1935-36), abierta al hilo de una nueva concepción de las lógicas estándar e intuicionista como sistemas de deducción natural y de una nueva determinación estructural y regular del papel de los operadores deductivos.

Hay otros dos aspectos de la consolidación de la lógica estándar durante los años 30-40 que suelen pasar un tanto inadvertidos.

- Uno tiene que ver con la institucionalización de la lógica estándar como «lógica matemática» por antonomasia —pese a la existencia de otras orientaciones competidoras, como el intuicionismo y la naciente sistematización de una "lógica intuicionista". Pueden observarse diversos indicadores de esta institucionalización, pero uno, en especial, reviste el mayor relieve desde una perspectiva historiográfica: en los años 30, la lógica estándar pasa a inspirar la reconstrucción retrospectiva de la Hª de la lógica en general y su lenguaje formalizado (por ende, su teoría del análisis lógico) deviene un instrumento de interpretación de los textos *lógicamente* pertinentes en esta Hª, es decir: un medio de identificación y de reconocimiento de las «contribuciones históricas» al desarrollo de la Lógica. Una brillante muestra es el trabajo seminal de Łukasiewicz (1934, 1935) "Contribución a la historia de la lógica de proposiciones" —sobre su significación en este sentido, vid. Vega 1981, *Lecturas de Lógica. I,* nota (1) a la traducción de este trabajo, pp. 133-135.
- El otro tiene que ver con la capacidad de organización de los principales resultados

metalógicos sobre la lógica de primer orden, que se desprende de Henkin 1949.

3. Explotación y clausura: años 50-60

Debido a su proximidad, me permitiré ser telegráfico:

Los años 50 vienen a ser una época de explotación de los métodos y resultados encontrados en esta área con una proyección que apunta hacia nuevas aplicaciones, más allá incluso de ella, y hacia la promoción de diversas subespecialidades lógicas. Dos muestras notables y, en ocasiones, interrelacionadas son:

- El despegue de la compacidad.
- El desarrollo de la teoría de modelos (lógica de primer orden + nociones y métodos de la teoría de conjuntos + estructuras algebraicas abstractas).

Los años 60 acentúan esta tendencia y asisten a la aparición de nuevas orientaciones que se benefician de las perspectivas abiertas en la década prodigiosa de los 30. Una muestra: - El germen de una «teoría general de la demostración» en Prawitz 1965.

Sin embargo, tanta madurez no puede dejar de tener su punto de clausura. En 1935, Tarski ya había establecido la clausura de una clase estándar de sistemas deductivos de la lógica de proposiciones bajo ciertas condiciones. Ahora le tocará el turno a las teorías de primer orden, en general: cualquier sistema lógico de primer orden que satisfaga los teoremas de Löwenheim-Skolem y de compacidad —o, en lugar de éste último, el de completud o el de axiomatizabilidad — resulta equivalente a la lógica estándar, en el sentido de que toda proposición que sea válida en aquel sistema también lo será en ésta última. Así pues:

- Acotación de la lógica estándar de primer orden (Lindström 1969).

Ahora bien, la Hª de nuestra lógica estándar ha vivido no sólo grandes épocas, sino también grandes momentos. Algunos momentos memorables han sido los siguientes.

<u>1. Löwenheim 1915-Skolem 1920 ss.</u>

Vid. Löwenheim 1915 en van Heijenoort 1967 (ed.), pp. 232-251-. Cf. Thiel 1977, 1978; Anellis 1991; un estudio comprensivo es Calixto Badesa 1991: «El teorema de Löwenheim en el marco del cálculo de relativos», Tesis de doctorado inédita, Universidad de Barcelona.

Löwenheim se mueve en una linea algebraica post-Schröder de análisis "semántico" informal y no considera conjuntos de fórmulas sino ecuaciones singulares de los tipos:

'A = 0' es válida, i.e. 'A' es (informalmente) insatisfacible en un dominio dado;

'A = 0' no es válida, i.e. 'A' es (informalmente) satisfacible en un dominio dado.
Su atención está centrada en la consideración de la expresión numérica finitaria [«Zählausdruck»], con un número finito de cuantiicadores, aplicados a símbolos individuales, no a símbolos relativos-

. La investigación gira en torno al problema de las relaciones entre validez y satisfacibilidad tanto en dominios finitos, como en general, en cualquier dominio.
(Por ejemplo, las relaciones hoy familiares: si 'A' es válida en un universo no vacío U, 'A' es válida en un universo de igual o menor cardinalidad que U; si 'A' es satisfacible en un universo no vacío U, 'A' es satisfacible en un universo de igual o mayor cardinalidad que U.)

Los logros de Löwenheim 1915 tienen, de entrada, un carácter operativo o, si se quiere, "calculístico". Consisten en la transformación de una fórmula 'A' en su cuantificación prenexa 'A*'= '∑... ∏... F' (donde ' '∑...' y '∏...' son tantos cuantificadores, existenciales y universales respectivamente, como variables o índices individuales correspondan, y 'F' es una matriz booleana normalizada), de modo que 'A' y 'A*' sean equivalentes en punto a validez, satisfacibilidad o insatisfacibilidad. Löwenheim no consigue un procedimiento efectivo de obtención de fórmas normales para fórmulas cualesquiera, pero alcanza ciertos éxitos en la cuestión de la decisión de validez, por ejemplo: 1/ tiene solución positiva para las expresiones de primer orden monádicas [si una expresión 'A' de este tipo consta de n predicados distintos y es 2^n-válida, entonces 'A' es válida (Bernays-Schönfinkel, 1928); de ahí se sigue la solución del problema de determinar la validez de expresiones de primer orden en dominios finitos de individuos (Löwenheim 1915, § 3)]; 2/ la decisión de validez de expresiones de primer orden poliádicas se reduce al caso de las diádicas (§ 4).

Con todo, su resultado principal es el sentado en § 2: Si una ecuación de primer orden no es válida, pero es válida en todo dominio finito, entonces no es válida en ningún dominio infinito numerable. Por contraposición: si 'A*' es satisfacible en algún dominio, pero no es satisfacible en ningún dominio finito, 'A*' es satisfacible en un dominio infinito numerable. Es decir: la ecuación numérica 'A = 0' no es válida en un dominio infinito nuemrable.

Este resultado plantea un interesante problema de interpretación. Admite dos lecturas:
(*a*): «Si una fórmula de primer orden es satisfacible, pero no es satisfacible en ningún dominio finito, entonces es satisfacible en un dominio infinito numerable». Versión débil.

Procedimiento de prueba: construcción de una solución en un dominio infinito numerable cualquiera.

(*b*): «Si una fórmula de primer orden es satisfacible en un dominio infinito, pero no es satisfacible en ningún dominio finito, entonces es satisfacible en un subdominio infinito numerable». Versión fuerte o del subdominio.

Procedimiento de prueba: sobre el supuesto de una solución en un dominio infinito, construcción de un subdominio apropiado. Requiere el concurso del axioma de elección.

Según la interpretación tradicional, Löwenheim prueba la versión débil, aun cuando se sirve del axioma de elección, mientras que Skolem 1920 prueba la versión fuerte. Sin embargo, Skolem, en 1938, atribuye a Löwenheim la prueba de la versión fuerte. Pero, según todos los visos, no parece obrar al principio la distinción entre ambas versiones. Por ejemplo, Skolem 1920 prueba la fuerte, luego, en 1922, prueba la débil; sin embargo, en ambos casos, su enunciado del teorema se corresponde con la lectura (*a*), con la versión débil. Donde por primera vez aparece nítidamente la distinción entre los dos resultados es en Skolem 1929.

Al margen de este problema que dejo a la consideración del lector, el relieve de esta contribución parece indiscutible. Suele decirse que Löwenheim 1915 (cf. e.g. van Heijenoort 1967, 1976) es una contribución capital en dos aspectos al menos:

1) como inicio de las cuestiones de carácter metalógico (no ya metadeductivo);

2) como inicio, más en particular, de una perspectiva "semántica" informal.

También revisten especial importancia sus secuelas de diverso orden. Por ejemplo:

a/ Generalizaciones: A partir de Skolem 1920, se consideran conjuntos de fórmulas (vid. Skolem 1920, 1922, 1923, 1928, en J. van Heijenoort (ed.) 1967, amén de la edic. de J.E. Fenstad 1970, [cf. *ibd.* "A Survey" de H. Wang, 17-52]. En esta línea, se establecerá que toda teoría de primer orden que tenga un modelo, tiene un modelo numerable, y que toda teoría de primer orden que tenga un modelo infinito, tiene un modelo infinito de cualquier cardinalidad. Lo cual, a su vez, admite una lectura «upward», ascendente (Tarski, semin. 1927-28): si una teoría de primer orden tiene un modelo infinito M, tiene un modelo infinito M' tal que M es un submodelo de M'. Y una lectura «downward», descendente (Skolem): si una teoría de primer orden tiene un modelo infinito M, tiene un modelo infinito numerable M* que es submodelo de M.

b/ No categoricidad de las teorías de primer orden con un modelo infinito.

c/ «Paradoja Löwenheim-Skolem»: a partir de la formalización de la teoría de conjuntos clásica en los términos de una teoría de primer orden, y de la aplicación de los resultados anteriores. La interpretación pretendida de la teoría hace referencia a modelos (conjuntos) no numerables, e.g. el axioma de Zermelo-Fraenkel de existencia, para todo conjunto dado X, del conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de X, i.e. del conjunto potencia $\wp$(X); pero su formalización estándar como teoría de primer orden le impondría, de ser consistente, un modelo numerable. Skolem (desde 1923): «relatividad» versus fundamentación axiomática. En la perspectiva de Henkin 1949, alcanzará a tener consecuencias aún más relevantes.

Por lo demás y al margen de estas secuelas, Skolem 1920 sugerirá otra forma prenexa ('A*' = '∏... ∑... F [normal]') y Skolem 1923 (escrito en 1919) hará la presentación intuitiva de las funciones recursivas como un «modo recursivo de pensar», consistente en el uso de definiciones recursivas primitivas para introducir nuevas funciones y predicados, y del principio de inducción matemática en las pruebas, como una vía de desarrollo de la aritmética alternativa a la teoría de los tipos y *PM*.

2. Hilbert y la escuela de Göttingen.

[*Gesammelte Abhandlungen*. Berlin; Springer, 1932 (I), 1933 (II), 1935 (III). Reimp. en New York: Chelsea, 1965. Vid. Hilbert 1904, 1925, 1927 en van Heijenoort (ed.) 1967, 1977[3]. Hilbert 1900a-b, 1904, 1918, 1922, 1923, 1926, 1928, 1929, 1930, 1931a-b, en V.M. Abrusci (ed.) 1978. Hilbert 1900, 1900b, 1904, 1925, 1928a-b, en *Fundamentos de la geometría*. Trad. de F. Cebrián. Madrid: CSIC, 1952, reimp. 1991.]

A diferencia de Löwenheim, un escondido profesor de Gymnasium [3], Hilbert brilló como un dios olímpico en Gotinga y en el área de influencia del pensamiento matemático alemán de las 4 primeras décadas del siglo (vid. C. Reid 1970, *Hilbert*, New York/Berlin/ Heidelberg: Springer 1986[2]). Supongo que la abundante literatura disponible sobre Hilbert, sus diversas contribuciones y su programa, me permitirán ser sumamente esquemático.

- Hilbert 1900. Tres convicciones: utilidad del método axiomático abstracto; solubilidad positiva o negativa de todo problema matemático bien planteado; la consistencia o ausencia de contradicción de un sistema axiomático S implica la existencia de un "modelo" de S.

---

3 Cuenta Ch. Thiel que en la reunión convocada por la Australian Mathematical Society en 1974 bajo el título *Algebra and Logic* [J.N. Crossley (ed.) 1975, Berlin/Heidelberg/New York], hubo una discusión acerca de la recolección de "Reminiscences of Logicians" que hizo perentoria la pregunta: «¿Quién sabe de alguien que conociera a Löwenheim?». Al parecer, sólo Tarski podía presumir de haberlo conocido personalmente. Para colmo, se ha perdido casi toda su correspondencia; por ejemplo, las 20 cartas cruzadas entre Frege y Löwenheim durante los años 1908-1910 en que se discutían cuestiones sobre el formalismo.

- Hilbert 1904. Estrategia de prueba de consistencia "sintáctica". Para una miniteoría axiomática del concepto «igual»: 1/ los axiomas tienen una propiedad -la de ser ecuaciones homogéneas- que les preserva de incurrir en contradicción; 2/ esta propiedad es transmitida por las reglas de deducción a toda consecuencia posible de los axiomas.

Desarrollos de Hilbert y su escuela:

- Hilbert/Bernays (desde 1917 [Bernays 1918, *Habilitationschrift* - 1926]):

1. Axiomatización y formalización de diversos cálculos lógicos. Al principio, a partir de *PM* como marco sistemático de referencia; luego, dada la índole no lógica de los axiomas de reducibilidad y de infinitud, sobre la base del perspicuo sistema hilbertiano de axiom.
por grupos de axiomas lógicos para los conectores y los cuantificadores.

2. Identificación de diversas propiedades metalógicas.

Pruebas para subsistema P: corrección (consistencia) por preservación-transmisión de la propiedad de "tautologicidad", i.e. «ser una fórmula idénticamente verdadera»valor designado; completud débil (deducibilidad de toda "tautología": toda fórmula idénticamente verdadera en forma normal conjuntiva, es derivable), fuerte (completud en sentido "Post": si se añadiera como axioma una fórmula no derivable, resultaría derivable cualquier fórmula).

3. Elaboración de técnicas metalógicas: formas normales conjuntivas y disyuntivas; matrices de valores designados para comprobar la independencia de axiomas.

Cfr. Kneale 1991, pp. 681-692, 702-703 [1972, 633-644, 653-654]. Edic. Abrusci 1978, 27-30, 62-65, sobre la base de *Grundlagen der Mathematik I* (1934), *II* (1939].

- Hilbert/Ackermann 1928.

l. Consistencia del subsistema Q: satisfacible en un dominio de un elemento.

Reelaboraciones ulteriores de resultados de los años 20-30: *Grundzügen der theoretischen Logik*. Berlin: Springer, 1928, 1938[2]. *Elementos de lógica teórica*. Trad. de V. Sánchez de Zavala. Madrid: Tecnos, 1962 [sobre la edic. revisada de 1958[4]].

Hilbert 1929: planteamiento de completud: si un conjunto de fórmulas-Q no es refutable para ninguna determinación de sus predicados, entonces es demostrable.

2. Elaboraciones Hilbert-Bernays, 1934, 1939. Consistencia: «toda fórmula derivable del cálculo (puro o extendido) de predicados es una identidad en lo finito», i.e. es k-válida en cualquier dominio finito de cardinalidad k. Completud de subsistema monádico: «Toda fórmula del cálculo (puro o extendido) de predicados monádicos que es una identidad en lo finito, es derivable en el

cálculo», y de ahí se sigue su decidibilidad.

3. Post 1921.

Cf. Post 1921 en Vega 1981, *Lecturas de Lógica. I*, pp. 317-351). Lejos de tener la influencia de algunas contribuciones de Hilbert o la significación de Löwenheim 1915, la contribución de Post 1921 al análisis metalógico del (sub)sistema proposicional o «teoría de la deducción» de *PM* (sección A, 1ª parte, I [1910]), suele ser más mentada que leída. Pero creo que merece la pena recordar sus contenidos por su valor de síntomas.

Para empezar, introduce una distinción neta entre lógica, teoría-objeto, y metalógica, metateoría (con unos recursos inferenciales y metódicos propios -e.g. nociones conjuntistas, funciones veritativas, inducción matemática). Sus resultados se cifran en los siguientes:

1. Adecuación funcional de F= {∼, v} para expresar cualquier función verit.: a toda tabla de verdad le corresponde al menos una función F que tiene tal tabla por tabla de verdad.

2. Clasificación de funciones positiva, negativa, mixta. Toda función contenida en una función positiva es positiva; toda función contenida en una función negativa es negativa; toda función mixta contiene al menos una función posit. o negat. o mixta. [A está contenida en A_0 ssi es un refinamiento (se obtiene por sustitución regular de variables elem.) de A_0].

3. Teorema fundamental: Una condición necesaria y suficiente para la aserción de una función de F, como consecuencia de los postulados de la teoría (reglas de sustitución y MP, asertos primitivos), es la de que todos sus valores veritativos sean positivos (i,e, +).

Se prueba mediante el procedimiento de las formas normales disyuntivas. Post tiene conciencia expresa de que se trata, así mismo, de un método efectivo de derivación en *PM*. Así pues, podríamos hablar de una prueba constructiva. Más adelante, entre las décadas 30 y 50, Post volverá a dar muestras expresas de su interés por las cuestiones de solubilidad y decidibilidad.

4. Corolarios. (*a*) El sistema de proposiciones elementales de *PM* es consistente [condición necesaria]. (*b*) Toda función de S o es derivable o es inconsistente con S. (*c*) Toda función de S o es derivable o su adición a S permite la derivación de cualquier proposición expresable en los términos de S (completud en sentido Post, o sistema «saturado»). (*d*) S es consistente si ninguna fórmula compuesta únicamente por una variable no modificada [una proposición elemental «atómica»] 'p', es derivable en S (consistencia en sentido Post). (*e*) Una función falsa es tal que su adición a los postulados de S convertiría S en inconsistente. Si cada función de S consistente

es o bien verdadera o bien falsa, el sistema se llamará "cerrado". La «teoría de la deducción», P, de *PM* es un sistema saturado y cerrado.

5. Consideración ulterior de sistemas veritativos multivalorados «*m*-valued»; consideración, digamos, "sintáctico-experimental" sin otra pretensión que la del cálculo, de modo que no se trata de una propuesta similar a la avanzada por Łukasiewicz 1920 en la línea de un análisis lógico polivalente.

En esta tesis de doctorado, realizada en Columbia con Sheffer, se encuentran los primeros resultados publicados de metalógica finitista. Por desgracia, no hay —que yo sepa— un estudio monográfico cabal de la introducción y los primeros pasos de la lógica de *PM* en USA. De ahí que algunas de las contribuciones pioneras de Post 1921 se nos presenten hoy con el aire un tanto incierto de unas ocurrencias personales y aisladas.

4. Contribuciones polacas.

Hoy contamos con bastante información sobre las generaciones (la de Łukasiewicz y la de Tarski, en especial) que conforman la escuela polaca de lógica de entreguerras. Al pionero Z.A. Jordan 1945, *The Development of Matethematical Logic and of Logical Positivism in Poland Between the Two Wars*, Oxford/London: Oxford Univ. Press, se han ido sumando varios ensayos y trabajos, e.g. J. Woleński 1989, *Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School*, Dordrecht/Boston: Kluwer. En realidad, la diversidad de centros y la presencia de autores tan originales como Leśniewski bien podría hacer pensar en más de una escuela. En todo caso, de ella provienen los primeros manuales estándar (e.g. Łukasiewicz 1929, Tarski 1936). Otro aspecto digno de mención en esta Guía es la pronta constitución de una línea de investigación historiográfica, sobre todo en torno a la figura de Łukasiewicz (vid. T. Kwiatkowski 1980, "Jan Łukasiewicz -A Historian of Logic", *Organon*, **16**/**17**: 169-188).

Al margen de estas cuestiones, cabe resumir la contribución polaca a la lógica estándar en unos puntos como los siguientes:

- Investigaciones sobre functores y reducciones axiomáticas (en las líneas de Peirce, Sheffer (1913), Nicod (1917-1920). E.g. Ziliński (1929): prueba de la adecuación exclusiva de 'α|β' [¬(αβ)] y 'α↓β'; Sobociński, Wajsberg -seminario de łukasiewicz, desde 1926.
- Planteamientos de Ajdukiewic 1920 en torno a la deducción:

(*a*) 1ª contribución polaca a la metodología estructural de las cc. deductivas: tratamiento de la noción lógica de prueba como deducibilidad sintáctica en un sistema axiomático, con reglas de sustitución (equiforme, definicional) y *Modus Ponens*; inspiración para la prueba tarskiana (1921) del metateorema de deducción.

(*b*) Consistencia de un conjuntos de fórmulas y existencia de un "ejemplo" de aplicación. Para que Γ sea consistente es suficiente que tenga un ejemplo; es además necesario que el ejemplo no conduzca a contradicción. Es necesario y suficiente que el ejemplo en cuestión exista. Pero puede haber pruebas alternativas de consistencia, como ha mostrado Hilbert, sean relativas o sean absolutas (e.g. mediante la exclusión de ciertas fórmulas determinadas del conjunto de las consecuencias deducibles del sistema).

(*c*) Examen del concepto pertinente de existencia con relación a una teoría deductiva: el objeto **x** existe syssi es un elemento del dominio de la teoría, su definición es consistente, no restringe el dominio de los objetos posibles de la teoría -i.e. no hay una definición constrctiva de otro objeto **y** tal que el par {**x**, **y**} resulta inconsistente, e.g. no pueden (co-)existir en una teoría rectas euclidianas y rectas no euclidianas.

- Contribuciones de Tarski 1930.

Vid. el monográfico *The Journal of Symbolic Logic*, **51/4** (1986) -bibliografía de Tarski, a cargo de S. Givant, pp. 913-941. Cf. J. Czelakowski, G. Malinowski 1985.

(*a*) Metodología conjuntista (no finitista) de las ciencias deductivas;

(*b*) Axiomatización de la operación «consecuencia» para un conjunto contable S de proposiciones cerrado bajo esta operación, y determinación de propiedades sintácticas de S: axiomatizabilidad, consistencia, completud, independencia, e.g.: toda teoría deductiva o sistema S contable tiene un conjunto independiente de axiomas; toda teoría consistente contable tiene una extensión consistente máxima (Lindenbaum).

- Tarski 1933-1936: los inicios de una «semántica científica».

Puede ser sintomático del entorno dominante que la contribución de Tarski al Congreso Intern. de Filosofía científica (Paris, 1935) sobre el concepto de consecuencia lógica se publique en las *Actes* correspondientes (Paris, 1936; vol. 7, pp. 1-11) como el primer trabajo de la Sección que lleva por título «Syntaxe».

5. Herbrand (1930).

Cf. la edic. póstuma J. Herbrand, *Écrits logiques* (prefacio de J. van Heijenoort, nota biográfica de C. Chevalley y A. Lautmann, introducción "Sur le pensée de Herbrand" de C. Chevalley), Paris: PUF, 1968; y la edic. inglesa de W.D. Goldfarb 1971, *Logical Writings*.

Sus contribuciones pueden considerarse un intento de reducción "metamatemática" en la línea del programa de Hilbert, es decir: una especie de reducción formal o "sintáctico" y finitista del planteamiento de Löwenheim.

E.g. 1929, "Sur quelques propiétés des propositions vrais et leur applications" sienta los teoremas I: «si la proposición 'P' es una identidad —i.e. una fórmula tautológica de Herbrand (vid. edic. 1968, pp. 21-22)—, entonces '¬P' no puede ser verdadera en un campo infinito»; II: «si 'P' no es una identidad, se puede construir un campo infinito donde '¬P' es verdadera» (edic. c., p. 28).

A partir de Herbrand 1930, "Recherches sur la théorie de la démonstration" (edic, 1968, pp, 35-153), cabe disponer de tres perspectivas alternativas en este ámbito de la lógica estándar o teoría de la cuantificación estándar de primer orden. Sea 'Q' una wff. enunciativa de la lógica de primer orden; su convalidación o invalidación puede considerarse:

I. Perspectiva axiomática (hilbertiana):

I^{a}: Q es demostrable;   *I^{a}: ¬Q es refutable.
I^{b}: Q no es demostrable;   *I^{b}: ¬Q no es refutable.

II. Perspectiva no finitista ("semántica" informal Löwenheim-Skolem):

II^{a}: Q es válida;   *II^{a}: ¬Q no es satisfacible.
II^{b}: Q no es válida;   *II^{b}: ¬Q es satisfacible.

III. Perspectiva Herbrand;

III^{a}: hay un número r tal que la r-ésima disyunción de Herbrand de Q es válida;
*III^{a}: hay un número r tal que la r-ésima conjunción de H. de ¬Q no es satisfacible.
III^{b}: hay un número r tal que la r-ésima disyunción de H. de Q no es válida;
*III^{b}: hay un número r tal que la r-ésima conjunción de H. de ¬Q es satisfacible.

Las nociones de validez/satisfacibilidad se toman en sentido veritativo-funcional, i.e. en relación con un valor veritativo designado y determinable por vía lógico-proposicional.

El teorema fundamental de Herbrand 1930 establece I^{a} syssi III^{a}, con la virtud añadida de dar un método de demostración de Q constructivo, i.e. sin corte. Por otro lado, Herbrand 1929 ya sabía que *III^{b} implica *II^{b}. Así que, por contraposición, II^{a} implica III^{a}.

Ahora bien, el teorema fundamental y el resultado II^{a} syssi III^{a} implicarían, por transitividad, I^{a} ssi II^{a}, i.e. una versión de que las wffs. Q no sólo pueden componer una teoría lógica consistente, sino completa. Pero Herbrand no llega al resultado indicado, ni por ende a la prueba de que su lógica cuantificacional de primer orden es completa, debido a su desinterés por las nociones no finitistas de validez y satisfacibilidad. Debido, más aún, a su convicción de que la única manera precisa y satisfactoria de tratar metamatemáticamente con Q es en términos axiomáticos o finitistas, i.e. en términos de I o III.

Algunos errores de Herbrand 1930 han sido corregidos por Dreben, Drenton y Scanlon.

6.1 Gödel 1930.

"Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküs", *Monatshefte für Mathematik und Logik*, **37**: 349-360. En van Heijenoort, 583-591. En *Obras completas*. Edic. J. Mosterín.

Madrid: Alianza, 1981, pp. 20-34. *Collected Works*, edic. de S Feferman *et al.* Vol. I. Oxford/New York: Oxford University Press, 1986.

A estas alturas del siglo, no parece necesario en absoluto glosar tanto esta contribución de Gödel como la aún más decisiva publicada el año siguiente. Sirvan las notas que incluyo a continuación como mero recordatorio.

Según Gödel (1964, carta a J. van Heijenoort), Skolem 1922 habría implícitamente probado, aunque no declarado, que: «o A es informalmente demostrable o ¬A es satisfacible», pero no parece reparar en la significación de este resultado en orden a la completud de Q, como tampoco Hilbert & Ackermann 1928, que no lo mencionan en relación con su planteamiento de la cuestión [van Heijenoort (ed) 1967, p. 510, n. 1]. También Herbrand se había acercado mucho a este resultado. Pero, Skolem trabajaba con fórmulas extraíbles de un lenguaje cuantificacional sin preocuparse por sus condiciones de derivación, y Herbrand, interesado en la determinación finitista de la deducción, no tomaba en consideración la contrapartida conjuntista de las nociones de satisfacibilidad o validez, aun conociendo Löwenheim 1915.

- Proceso de prueba.

Considérese el cálculo funcional -teoría de la cuantificación de variables individuales- de *PM.* Se dice que una fórmula A ∈ *F* cualquiera es refutable si y sólo si *F* ¬A.

Entonces:

Hay constancia de que la equivalencia entre una fórmula cualquiera A y su FNP Skolem A* es demostrable, así como de la completud del subsistema P (establecida en H & A, 1928). Sea K la clase de las wffs. prenexuadas (univ. exist. matriz sin variables ind. libres).

(*a*) Teorema III: si cada k-fórmula es refutable o es satisfacible en un dominio infinito numerable, también lo será parejamente cualquier fórmula de *F*.

TT. IV, V: cada k-fórmula o es refutable o es satisfacible. Prueba por inducción sobre la complejidad del prefijo cuantificacional.

(*b*) En consecuencia:

Teorema II: cada fórmula de *F* o es refutable o es satisfacible en un dominio infinito numerable.

(*c*) Sea α una fórmula cualquiera válida en tal dominio. Entonces ¬α no es satisfacible; luego, por (b), es refutable. Pero ¬α es refutable ssi ¬¬α es demostrable, por la definición supuesta inicialmente. Por consiguiente, α es demostrable (clásicamente). En conclusión,

Teorema I: toda α válida del calculo funcional restringido es demostrable.

(*d*) Generalización de estos resultados a sistemas de primer orden con identidad (teoremas VII y VIII): toda fórmula de este sistema extendido o es refutable o es satisfacible -en un dominio finito o numerable de individuos-.

Generalización del resultado Löwemheim-Skolem: si α es satisfacible, entonces es demostrable y, por consistencia de *F*, resulta válida en un dominio infinito numerable.

(*e*) Teorema IX: todo conjunto infinito numerable de fórmulas del cálculo funcional restringido o es (simultáneamente) satisfacible o contiene un subconjunto finito de fórmulas cuyo producto lógico es refutable. Lema del que se sigue inmediatamente X, la compacidad:

Teorema X: para que un conjunto infinito numerable de fórmulas sea satisfacible, es necesario y suficiente que cada uno de sus subconjuntos finitos sea satisfacible.

Este resultado estaba ausente de la tesis doctoral presentada en 1929, cf. sobre este punto J.W. Dawson 1993.

A.I. Mal'cev [Maltsev] 1936 ("Investigaciones por regiones de la lógica matemática") generaliza este resultado (llamado "teorema local") para conjuntos de fórmulas del cálculo proposicional de cualquier cardinalidad. Pero la compacidad permanece virtualmente ignorada hasta cerca de los años 50, en que vuelve a ser recordada por Henkin, Robinson y Tarski. Un fruto de la relación de los teoremas de compacidad y Löwenheim-Skolem fue la invención del llamado «análisis no estándar» por parte de Robinson 1951.

6.2 Gödel 1931.

"Ueber formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme", *Monatshefte f. Mathem. u. Phys.*, 38: 173-198. En van Heijenoort (ed.) 1967, pp. 596-617. En la edic. de J. Mosterín 1981, *Kurt Gödel. Obras completas* [Madrid: Alianza], 55-89. También hay trad. de M. Garrido, A. García Suárez, L.M. Valdés. Valencia: Cuad. Teorema 8, 1980 [precedida de una introducción de R.B. Braithwaite]. *CW*, vol. I.

Anticipo-resumen de resultados presentado en la Academia de Ciencias de Viena, 1930.

Sea el sistema S compuesto por los axiomas de Peano más la lógica de *PM* (con los números naturales como individuos) y el axioma de elección. Entonces:

1. S no es completo: contiene enunciados A tales que ni A ni ¬A son demostrables, y el sistema comprende problemas indecidibles de la estructura simple de $\exists$ x F(x), donde x varía sobre los nn. naturales y F es una propiedad (incluso decidible) de los nn. naturales. (Hay además en S fórmulas del cálculos funcional restringido para las que no es decidible ni la validez universal ni la existencia de un contraejemplo.)
2. Incluso admitiendo todo el instrumental lógico de *PM*, en metamatemática no existe una demostración de consistencia para S. Por consiguiente, la consistencia de S sólo puede llevarse a cabo mediante modos de inferencia no formalizados en el mismo sistema S.

3. El resultado o teorema 1 sigue valiendo para todas las extensiones ω-consistentes de S que resulten de añadirle infinitos axiomas, siempre que la clase de axiomas sea decidible. Esto también se aplica a la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel
con tal de que los sistemas en cuestión sean consistentes.

Gödel 1931 envuelve cuatro contribuciones decisivas para la suerte posterior de la "lógica matemática", entendida como la lógica estándar subyacente en cualquier teoría o sistema deductivo formalizado, a saber:

(*a*) Aritmetización Gödel de la sintaxis —fuente del análisis lógico posterior de las complicadas cuestiones de reflexividad en diversas áreas (modalidad, demostrabilidad, etc.).

(*b*) Si un sistema equivalente a *PM* y aritmetizable es consistente, es incompleto e indecidible —1er. resultado de limitación interna del sistema *PM* y sistemas afines.

(*c*) La consistencia de tales sistemas y, en particular, una formalización adecuada para la representación de la aritmética de Peano, es indemostrable —2º resultado de limitación.

(*d*) Teoría inicial de las funciones recursivas.

<u>7. Henkin 1949.</u>

"The completeness of the first-order functional calculus", *The Journal of Symbolic Logic*, **14**: 159-166. [Parte de la tesis PhD «The Completeness of Formal Systems", Princeton, 1947]
En J. Hintikka (ed.) 1969, *The Philosophy of Mathematics*, pp. 42-50. En J. Largeault (ed), 1972, *Logique mathématique. Textes*, pp. 187-195. Introd. y trad. de L. Vega en Castrillo y Vega 1984, *Lecturas de Lógica. II*, Madrid: UNED; texto: pp. 303-315.
Introduce una nueva perspectiva conceptual sobre ciertas propiedades metateóricas:

(a) *derivabilidad* guarda relación con *consistencia*, i.e. $\Gamma \vdash \alpha$ ssi $\{\Gamma, \neg\alpha\}$ es inconsistente;

- demostrable por medios finitistas (se dice que un conjunto cualquiera Γ de fórmulas bien formadas es inconsistente si, para alguna fórmula bien formada $\alpha \in \Gamma$, caben tanto $\Gamma \vdash \alpha$ como $\Gamma \vdash \neg\alpha$).

(b) *consecuencia* guarda relación con *satisfacibilidad*, $\Gamma \models \alpha$ ssi $\{\Gamma, \neg\alpha\}$ es insatisfacible.
- demostrable por referencias no finitistas

(c) *derivabilidad en S* equivale a *consecuencia en S*, $\vdash \alpha$ ssi $\models \alpha$.
- consistencia y completud de lógica de primer orden (Gödel, 1930).
[la 1ª formulación expresa de la completud fuerte parece ser Robinson 1951].

Aportación de Henkin 1949:

(d) *consistencia* equivale a *satisfacibilidad en un dominio numerable*, de donde se sigue la existencia de un modelo canónico de la lógica estándar (de primer orden).

La importancia de Henkin 1949 salta a la vista cuando se considera su capacidad para organizar en torno suyo diversos resultados metateóricos sobre la lógica estándar. Valga como muestra el esquema siguiente (donde Γ es un conjunto cualquiera de fórmulas enunciativas bien formadas de primer orden; α, una fórmula enunciativa; S, un sistema lógico estándar):

[A] Vertiente formal-sintáctica	[B] Vertiente semántica

1. Lindebaum-Tarski 1928: todo Γ consistente admite una extensión consistente máxima.
2. Henkin-Hasenjaeger 1953: admite una extensión consistente máxima y existencialmente saturada.

3. Henkin: interpretación de Γ en el dominio $D_\aleph$ de las constantes indiv. del lenguaje de S.

4. Henkin. Lema: $\Gamma_\omega \vdash \alpha$ syssi α es verdadera en este $D_\aleph$.

5. Henkin. Teorema: si Γ es consistente, es satisfacible en un dominio del mismo cardinal que el conjunto de símbolos primitivos del lenguaje empleado.

[Hilber-Ackermann 1928: consistencia]

6. Gödel 1930. Henkin, corolario 1: si α es universalmente válida, es derivable.
7. Robinson 1951. Completud fuerte.

[Coincidencia fuerte entre la derivabilidad y la consecuencia en S. Por ende, finitud de la consecuencia: $\Gamma \models \alpha$ en S syssi $\Delta \models \alpha$, siendo Δ un subconjunto finito de Γ]

8. Gödel 1930. Compacidad: un conjunto infinito numerable de wffs. es satisfacible ssi cada uno de sus subconjuntos finitos es satisfacible.

9. Henkin, corolario 2: satisfacibilidad en dominio de cardinalidad **m** (cardinal conj. simb. prim.).
10. Löwenheim-Skolem: aplicación a $\mathbf{m} = {}_0\aleph$.

11. Henkin. Generalización a sistemas lógicos S de primer orden: si S es consistente, S tiene un modelo numerable. Si S tiene un modelo infinito, tiene un modelo infinito numerable (canónico), compuesto por sus propios símbolos primitivos.

12. Skolem. No categoricidad de las teorías S de primer orden con un modelo infinito.

Este esquema no pretende tener, desde luego, significación histórica. Se trata, a lo sumo, de una reconstrucción racional. El orden y la secuencia seguidos responden a motivos conceptuales y a relaciones de implicación, no a líneas de filiación o de influencia históricas —de entrada incluye, entre los antecedentes de los resultados principales de Henkin 1949 (el teorema [5] y los corolarios [6, 9]) una generalización posterior de Henkin y Hasenjaeger. He aquí, pues, una magnífica ocasión para distinguir entre ambas formas de reconstrucción, la racional y la histórica, habitualmente confundidas por algunos filósofos de la ciencia dados a la historiografía. Una sugerencia: ¿podría el lector poner sobre los pies, en el suelo del tiempo y de las relaciones históricas, este esquema que más bien anda de cabeza?

8. Church 1936.

Recordemos algunos resultados sobre decidibilidad de conjuntos de fórmulas de primer orden, obtenidos con anterioridad a los años 30:

Son decidibles —i.e. hay un procedimiento efectivo para determinar si una fórmula bien formada cualquiera del conjunto en cuestión es lógicamente válida (o formalmente derivable) o no lo es—, los conjuntos de fbfs cerradas siguientes:

(a) carentes de cuantificadores
(b) carentes de cuantificadores existenciales (Bernays-Schönfinkel 1928)
(c) carentes de cuantificadores universales

(d) con sólo un cuantificador existencial (Skolem 1928; Ackermann 1928 independ.)

Cf. amplios catálogos en Church (1956^2), § 46, pp. 246-257, y en Ackermann 1955, *Solvable Cases of the Decision Problem*, Amsterdam.

En esta línea de investigación, fuertemente alentada por el programa de Hilbert y no menos sobresaltada por los resultados de limitación de Gödel, se puede inscribir las contribuciones de A. Church 1936, "An unsolvable problem of elementary number theory", *The American Journal of Mathematics*, **58**: 345-363; y 1936, "A Note on the Entscheidungs-problem"

The Journal of Symbolic Logic, **1**: 40-41; correcciones, 101-102.

Una fina y lúcida exposición es J.B. Rosser 1939, "An informal exposition of proofs of Gödel's theorem and Church's theorem", *The Journal of Symbolic Logic*, **4**: 53-60 (trad. de L. Vega en Castrillo y Vega (eds.) 1984, *Lecturas de Lógica. II*, pp. 362-374).

Otros pasos ulteriores van abriendo una de las áreas más fértiles de trabajo de la lógica matemática de nuestro tiempo, el área de las cuestiones de computabilidad y el vasto campo de sus múltiples aplicaciones.

Por ejemplo: A.M. Turing 1936, "On computable numbers, with an application to the Entscheidungs-problem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, vol. **42** (1936-37): 230-265; correcciones, vol. 43 (1937): 544-546. Revisión crítica y correcciones ulteriores de Post (1947: "Recursive unsolvability of a problem of thue", *The Journal of Symbolic Logic*, **12**: 1-11, appendix). S. Kleene 1936, "General recursive functions of natural numbers", *Mathematische Annalen*, Bd. 112, Heft 5: 727-742; correcciones en *The Journal of Symbolic Logic*, **3** (1938): 152. Todos ellos se encuentran recogidos en M. Davis (ed.) *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*. Hewlett (New York): Raven Press, 1965.

Las contribuciones de Church 1936 se puedan concretar en las siguientes:

(*a*) Toda cuestión efectivamente resoluble, e.g. por un algoritmo o un método de decisión, consiste en una función calculable en un sentido preciso (λ-definible, § 2 en 1936, "An unsolvable..."; recursiva general, § 6 *ibd.*).

Su generalización en los términos «todo problema soluble es computable» suele recibir el nombre de «Tesis de Church». No es un teorema demostrable en la medida en que empareja una noción informal de solubilidad y un concepto formalmente definido de computabilidad. Pero goza de la autoridad de una aserción -casi con el estatuto de una directriz- abonada por razones de distinto orden, algunas de carácter empírico. Cf. S.C. Kleene (1953), *Introducción a la metamatemática* (trad. M. Garrido con la colaboración de R. Beneyto, J. Sanmartín y E. Casaban), Madrid: Tecnos, 1974, § 62, pp. 288-293; D. Ross 1974, "Church's Thesis: What Its Difficulties Are and Are Not?", *The Journal of Philosophy*, **71**: 515-525; S. Shapiro 1981, "Understanding Church's thesis", *Journal of Philosohical Logic*, **10**/**3**: 353-365.

(*b*) Determinación de la clase de las funciones calculables como funciones λ-definibles o recursivas generales.

(*c*) En el preciso sentido indicado en (*a*)-(*b*), hay problemas de la teoría elemental de los números que son irresolubles.

(*d*) "A note on..." Repercusión negativa sobre la decidibilidad general de la lógica estándar. Hay fórmulas enunciativas cuya derivabilidad (o validez) es indecidible, irresoluble.

[Vid. la interesante confluencia de Gödel [completud], Gentzen [deducción natural], Tarski y Church [indecidibilidad] en E.W. Beth 1955, "Semantical entailment and formal derivability", *Medelingen der Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen*, **18**/ **13**: 103-249.

Entrañamiento semántico y derivabilidad formal, introd. y trad. de M. Garrido y R. Beneyto. Valencia, 1978; trad. de P. Castrillo en Castrillo y Vega 1984, pp. 204-268.]

Hay una visión general sobre computabilidad y recursividad en H. Hermes 1981. Algunos aspectos de su desarrollo están apuntados en S. Shapiro 1983, "Remarks on the development of computability", *History and Philosophy*, **12/2**: 173-195. Por otro lado, cf. la amplia perspectiva histórica y tecnológica de H.H. Goldstine 1972, *The Computer from Pascal to von Neumann*, Princeton, 1993^{2}. Pero los trabajos más comprensivos podrían ser Aspray 1980 y 1990. La Hª de esta área contemporánea de investigación aplicada y de sus múltiples proyecciones puede seguirse a través de los *Annals of the History of Computing* del IEEE.

El desarrollo de la lógica estándar desempeña un papel protagonista en la Hª de la lógica contemporánea. Representa, como ya he sugerido, el cauce central por el que esta nueva lógica discurre y por el que va adquiriendo sus señas de identidad histórica. Constituye, así mismo, su forma de consolidación institucional. Ha servido, en fin, como suelo nutricio para ulteriores desarrollos técnicos en diversas áreas y subáreas especializadas que, desde luego, hoy desbordan con holgura esa base inicial y elemental.

Un buen ejemplo podría ser el desarrollo de la teoría de modelos, a partir de las nuevas vías abiertas en torno a los años 50 (e.g. Kemeny 1948, Henkin 1949 y 1950, Tarski 1954). Cabe seguir su irresistible ascenso a través de A. Robinson (1960), R.L. Vaught 1974, C.C. Chang 1974, A. MacIntyre 1981 ("Model Theory", en E. Agazzi (ed.) 1981, *Modern Logic -A Survey*, pp. 45-65), M. Guillaume 1994.

Pero el protagonismo de la lógica estándar no hace de la lógica contemporánea ni una obra monolítica, ni un monólogo.

Por un lado, aparte de los desarrollos especializados más allá del ámbito de los lenguajes y sistemas lógicos elementales de primer orden a los que acabo de aludir, hay una creciente plétora de otras lógicas más o menos «alternativas» o «no-estándar».

Por otro lado, con ser el de la lógica estándar un ámbito perfectamente determinado y acotado, no sólo en términos de construcción formal sino en razón de ciertos atributos metateóricos de clausura (cf. e.g. P. Lindström 1969, amén de Lindström 1974, "On

Characterizing Elementary Logic", en E. Stenlund (ed.) 1974, *Logical Theory and Semantic Analysis*, Dordrecht/Boston, pp. 129-146), la caracterización precisa e inequívoca de sus propios términos u operadores lógicos sigue presentado dificultades. La lógica estándar no es por dentro tan monolítica como tal vez pueda verse desde fuera.

Cf. un panorama del debate sobre este punto en L. Vega 1987, *Nociones y problemas del análisis lógico. II*, Madrid; D § 2, pp. 125-146. La discusión continúa: cf. los distintos puntos de vista de K. Dosen 1989, "Logical Constants as Punctuation Marks", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **30**: 362-381; G. Sheer 1991, *The Bounds of Logic*, Cambridge (Mass.)/London; A. Koslow 1992, *A Structuralist Theory of Logic*, Cambridge (UK); P. Milne 1994, "Classical harmony: rules of inference and the meaning of the logical constants", *Synthese*, **100/1**: 49-94.

Sobre otros aspectos que también se han prestado a discusión puede verse el panorama ofrecido en R.I.G. Hughes, ed. 1993, *A Philosophical Companion to First-Order Logic*, Indianapolis/Cambridge: Hackett.

Pero, en cualquier caso, tanto su suerte histórica como su filiación matemática sólo cobran sentido en un marco general. Así pues, como resumen y colofón, voy a aventuraré un esquema de este marco de las tradiciones y las líneas que conforman sus antecedentes, su gestación y su maduración. Tratándose de un esquema relativamente integrador, incorporará las contribuciones del cuadro anterior (§ **6.1 B**) más relacionadas con las señas de identidad que adquiere la lógica contemporánea a través de su cauce central estándar.

Ni que decir tiene que desde otros puntos de vista, podrían resultar otros esquemas; cf. luego, en § **6.3**, otro parejamente factible en relación con el análisis lógico del lenguaje.

El esquema parte de dos orientaciones matrices: una consistente en la tradición de la lógica algebraica; la otra constituida por los programas de fundamentos y las tradiciones de rigorización de los conceptos y las pruebas matemáticas —vid. el esquema anterior sobre lógica y fundamentos matemáticos, § **6.1 B**. Por lo demás, tratándose de un esquema, nadie podrá sorprenderse de la ausencia de algún que otro nombre y alguna que otra contribución —sólo espero que ninguna de esas omisiones sea sustancial. Un inconveniente mayor es el de resultar una especie de mapa mudo en el que las afinidades e influencias están únicamente sugeridas, no marcadas; tómese como signo de su carácter aproximativo y provisional.

[Lógica algebraica] [Programas de fundam. y tradic. de rigorización]

Boole
1847, 1854
Jevons
De Morgan 1864
1860
Frege
Peirce 1879,
1880... 1884, Peano
1893-1903 1889, 1891, 1897 Hilbert*
Schröder 1880-1895 [Pieri, Padoa] 1899,
Russell 1904
1903-1908
PM
1910-1913
Löwenheim
1915 Hilbert**
Lewis [Göttingen]
1918 Polacos-1ª Gen. Bernays
Ajdukiewicz 1918
1920 .
Skolem Post .
1920...1923 Wittgenst. 1921 .
. 1921-22 Sem. Łukas. Bernays
. /Kolmogorov Ramsey (1926...) 1926
. 1924-25/ 1925, 1926 /Leśniewski H. & Ackermann
1928 1927.../1928
Herbrand
1929-30
/Heyting Polacos-2ª Gen.
1930/ Gödel Tarski*
1930 1930
Lewis 1931 H. & B.
1932 1933-34 Jaśkowski Gentzen* 1934
[Maltsev 1934 1934-35
1936...] Tarski**
Kleene Church 1933-35, Gentzen**
1936 1936 1936 1936

Turing 1936-37
Henkin
1949
Robinson Tarski***
1951 1954 Beth
... 1955
1961 Prawitz 1965

Lindström 1969

6.2.1 Fuentes

Siguiendo el planteamiento representado en el cuadro anterior, es decir: la integración de un cauce central de desarrollo en el marco general de las tradiciones que han conformado la lógica contemporánea, este apartado y el siguiente incluirá referencias correspondientes a los apartados anteriores de fuentes y de literatura secundaria (§§ **6.1 A/1-2**, **6.1 B/1-2**).

BOOLE 1847, 1854. Cf. **6.1 A/1**

DE MORGAN 1860, *ibd*.

JEVONS 1864, *ibd*.

PEIRCE 1880 ss., *ibd*.

SCHROEDER 1880-1895, *ibd.*

FREGE 1879, 1884, 1893-1903. Cf. **6.1 B/1**

PEANO 1889, *ibd*. [1891, 1897, en la edic. citada de U. Cassina, *Opere scelte*]

PIERI 1900, "Sur la géométrie envisagée comme un système purement logique", *Bibliothèque du Congrès Intern. de Philosophie [Paris, 1900]*, III (Paris, 1901), pp. 367-404; recogido en la edic. *Opere sui fondamenti della matematica*, Roma, 1980, pp. 235-272.

PADOA 1900. Cf. **6.1 B/1**. [PEANO, PIERI, PADOA: fragmentos en E. Casari, ed. 1981, *La logica del Novecento*, Torino; vid. las antologías y compilaciones citadas anteriormente en § **6.0**]

HILBERT 1899, 1900, 1904, 1925, 1928, 1933-35, cf. **6.1 B/1**. [1904, 1925 y 1927 también están recogidos en van Heijenoort, ed. 1967; 1925, en Largeault, ed. 1972]

WHITEHEAD & RUSSELL, 1910-1913, *P(rincipia) M(athematica)*, cf. **6.1 B/1**

LÖWENHEIM 1915, "Ueber Möglichkeiten in Relativkalkül", *Mathematische Annalen*, **76**: 447-470.

- Traducción inglesa en van Heijenoort, ed. 1967, pp. 228-251.
- Traducción francesa en Largeault, ed. 1972, pp. 116-138.

LÖWENHEIM 1940, "Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkül", *The Journal of Symbolic Logic*, **5**/**1**: 1-15.

LEWIS, C.I. 1918 *A Survey of Symbolic Logic*, Berkeley. Reimp. New York, 1960. [Buena parte del material fue luego recogido, revisado y ampliado en C.I. Lewis & C.H. Lanford 1932, *Symbolic Logic*, New York/London. Reimp. New York, 1951, 1959.]

AJDUKIEWICZ, K.Z. 1920, *Z metodologii nauk dedukcyjnych*, Łwóv.

- "From the methodology of the deductive sciences", trad. J. Giedymin. *Studia Logica*, **19** (1966): 11-45.

SKOLEM 1920, "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen", *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania. [1 Matem.-naturvidens. Klasse]*, nº **4**. Kristiania Univ.

- Trad. parcial: § 1, en van Heijenoort, ed. 1967, pp. 252-263.

SKOLEM 1923, "Begründung der elementaren Arithmetik durcg die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Verämderlischen mit unendlichem Ausdehnungs-bereich", *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet... [1 Mat-.nat. Klasse]*, nº **6**. Kristiania.

- Trad. en van Heijennoort, ed. 1967, pp. 302-333.

SKOLEM 1928, "Ueber die mathematische Logik", *Norsk matematisk tidsskrift*, **10**: 125-142.

- Trad. inglesa en van Heijenoort, ed. 1967, pp. 508-524.

- Trad. francesa en Largeault, ed. 1972, pp. 93-108.

Selected Works in Logic by Thoralf Skolem, edic. de J.E. Fenstad. Oslo, 1970 [con una introducción de H. Wang: "A Survey", pp. 17-52].

- "Sobre la naturaleza del razonamiento matemático", *Gaceta matemática*, **4** (1952): 113-124.

- "Consideraciones sobre los fundamentos de la matemática", *Revista matemática hispano-americana*, **12** (1952): 169-200; **13** (1953): 149-174.

ŁUKASIEWICZ 1920, "O logice trójwartościowej", *Ruch Filozoficzny*, **5**: 170-171.

- Trad. inglesa en edic. L. Borkowski 1970 (vid. *infra*), pp. 87-88.

- Trad. española en edic. A. Deaño 1975 (vid. *infra*), pp. 41-42.

Jan Łukasiweicz. Selected Works, edic. de L. Borkowski. Amsterdam/London, 1970.

Jan Łukasiewicz. Estudios de Lógica y Filosofía, edic. de A. Deaño, Madrid, 1975.

POST, E.L. 1921, "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", *American Journal of Mathematics*, **43**: 165-185.

- Recogido en van Heijenoort, ed. 1967, pp. 265-283.

- Trad. española en Vega, ed. 1981 [cf. **6.0**], pp. 317-351.

WITTGENSTEIN 1921, 1922. Cf. **6.1 B/1**.

KOLMOGOROV, A.N. 1924-25, "O principe tertium non datur", *Matématičéski Shornik* [latiniz. de caracteres cirílicos], **32**: 646-667.

- Trad. en van Heijenoort, ed. 1967, pp. 414-437.

KOLMOGOROV, A.N. 1932, "Zur Deutung der intuitionistischen Logik", *Mathematische Zeitschrift*, **35**: 58-65.

RAMSEY (1925-1928). Cf. **6.1 B/1**.

FINSLER, P. "Formale Beweise und die Entscheidbarkeit", *Mathematische Zeitschrift*. **25**: 676-682. [Trad. inglesa en van Heijenoort, ed., pp. 438-445]

BERNAYS 1926, "Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der *Principia Mathematica*", *Mathematische Zeitschrift*, **25**: 305-320 [incluye material ya elaborado en su 1918, Habilitationschrift dirigida por Hilbert en Göttingen].

BERNAYS-SCHOENFINKEL 1928, "Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, **99**: 401-419.

LESNIEWSKY (1927-1931), "O podstawach matematiki", *Przegląd Filozoficzny*, **30** (1927): 164-206; **31** (1928): 261-291; **32** (1929): 60-101; **33** (1930): 77-105; **34** (1931): 142-170.

LESNIEWSKI 1929, "Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik", *Fundamenta Mathematica*, **14**: 1-81. [Cf. "Introductory remarks to the continuation [1930] of my article 'Grundzüge eines neuen Systems...", en S. McCall, ed. 1967 (vid. **6.0**), pp. 116-169.

S. Leśniewski. Collected Works. Edic. S.J. Surma, J.T. Srzednicki, D.I. Barnett, V.F. Rickey. Dordrecht/Boston/London, 1992; 2 vols.

HILBERT-ACKERMANN 1928, *Grundzügen der theoretischen Logik*. Berlin, 1938[2].

- *Elementos de lógica teórica*. Trad. de V. Sánchez de Zavala. Madrid, 1962 [sobre la edic. revisada 1958[4]].

[HILBERT-BERNAYS 1934, 1939. Cf. **6.1 B/1**]

ŁUKASIEWICZ 1929, *Elementy logiki matematycnej* [imp. fotolitográf.], Warzsaw.

ŁUKASIEWICZ 1930, "Philosophische Bemerkungen zu merhrwertigen Systemen der Aussagenkalküls", *Comptes-rendues des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III*, **23**: 51-77.

- Trad. inglesa en edic. L. Borkowski 1970, pp. 153-178.

- Trad. española en edic. A. Deaño 1975, pp. 61-86.

HERBRAND (1929-1930). Edic. póstuma: *J. Herbrand. Écrits logiques* (prefacio de van

Heijenoort, nota biográfica de C. Chevalley y A. Lautmann, introducción "Sur le pensée de Herbrand" de C. Chevalley), Paris, 1968;

-*Logical Writings by J. Herbrand*, edic. de W. Goldfarb, Dordrecht/Cambridge (Mass.), 1971.

HEYTING 1930, "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", *Sitzungs-berichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. [Phys.-mathem. Klasse]*, **26**: 42-56.

TARSKI 1930, "Ueber einige fundamentale Begriffe der Metamathematik", *Comptes-rendues des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. [Classe III]*, **23**: 22-29. Recogido en Tarski 1986, edic. Givant, McKenzie, vol. I, 313-320.

- Trad. inglesa en la edic. Woodger 1956, 1983^2 [vid. *infra*], pp. 30-37.

- Trad. francesa en la edic. dirigida por Granger 1972 [vid. *infra*], pp. 35-44.

TARSKI 1930, "Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissens-chaften", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **37**: 361-404. [En edic. Givant, McKenzie 1986, I, 347-390; edic. Woodger 1983^2, 60-109; edic. Granger (dir.) 1972, 67-116.

A. Tarski. Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938. Edic. de J.H. Woodger 1956, Oxford. 1983, 2ª edic. rev. Introd. de J. Corcoran. Indianapolis.

Alfred Tarski. Logique, sémantique, métamathématique. 1923-1944. Edic. dirigida por G.G. Granger, Paris, 1972, vol. I; 1974, vol. II.

A. Tarski. *Collected Papers*. Edic. de S.R. Givant, R.N. McKenzie. Basel/Boston, 1986; 4 vols.

GÖDEL 1930, "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Logik*, **37**: 349-360. En edic. Feferman *et al.* I, 1986 (vid. *infra*), pp. 102-122. [Trad. ingl. en van Heijenoort, 583-591; edic. 1986 I, pp. 103-123]. Trad. francesa en Largeault, ed. 1972, pp. 176-185.

- Trad. española en Mosterín, ed. 1981 [vid. *infra*], pp. 20-34.

GÖDEL 1931, "Ueber formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme. I", *Monatshefte f. Mathem. u. Phys.*, **38**: 173-198. En edic. Feferman 1986, I, pp. 144-194. [Trad. ingl. en van Heijenoort, 596-616; edic. 1986 I, pp. 145-195]

- Trad. española de M. Garrido, A. García Suárez, L.M. Valdés. Valencia: Cuadernos Teorema 8, 1980 [precedida de una introducción de R.B. Braithwaite]. También en Mosterín, ed. 1981, pp. 55-89.

GÖDEL 1932, "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloqiums*, **4** (Heft corresp. a 1931-32; public. en 1933): 39-40. En edic. Ferferman 1986, I, 300; versión inglesa, 301.

- Trad. en Mosterín, ed. 1981, pp. 115-116. También en Vega, ed. 1981, 301-302.

GÖDEL 1933, "Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathemtik und Physik*, **40**: 433-443. En edic. Feferman 1986, I, 306-326; versión inglesa, 307-327.

- Trad. en Mosterín, ed. 1981, pp. 130-144.

GÖDEL 1934, *On undecidable propositions of formal mathematical systems*. Princeton [mimeograf.]. Rev. posterior y postdata de 1964. En edic. Feferman 1986, I, 364-369.

- Trad. en Mosterín, ed. 1981, pp. 151-182.

Kurt Gödel. Obras completas. Edic. J. Mosterín. Madrid 1981. ["Obras completas" es una elipsis de "obras publicadas completas"]

Kurt Gödel Collected Works. Edic. de S Feferman (editor principal), J.N. Dawson, S.C. Kleene, G.H. Moore, R.M. Solovay, J. van Heijenoort. Versiones bilingües anotadas. Vol. I [*Publications 1929-1936*] Oxford/New York, 1986; II [*Publications 1938-1974]*, 1990; III [*Unpublished essays and lectures*], 1995 -con adiciones y correcciones de los vols. I y II.

[GÖDEL (1951-1956). *Ensayos inéditos*. Edic. (de tres ensayos filosóficos de 1951, ¿1953-54?, ¿1955-56?) a cargo de F. Rodríguez Consuegra. Madrid, 1994]

TARSKI 1933, "Pojęcie prawdy językach nauk dedukcyjnych", *Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. [Classe III, Sc. Mathém. et Phys.]*, nº **34**, Warszawa. [En edic. Granger (dir.) 1972, 157-269, atendiendo también a la versión 1935]

- 1935, "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Studia Philosophica*, **1**: 261-405. [En edi. Givant, McKenzie 1986, II, 53-198; Woodger 1983^2, 152-278.]

TARSKI 1936, "O ugruntowaniu naukowej semantyki", *Przegląd Filozofiiczny*, **39**: 50-57. "Grundelung der wissenschaftlichen Semantik", *Actes Cong. Intern. de Philosophie Scientifique*, **3**. *Actualités Scientif. et indust.*, **390**. Paris; pp. 1-8. [Edic. 1986, II, 261-268; edic. 1983^2, 401-408; edic. 1972, 131-139]

TARSKI 1936, "O pojęciu wynikania logicznego", *Przegląd Filozoficzny*, **39**: 58-68. "Ueber den Begriff der logischen Folgerung", *Actes Cong. Intern. de Phil. Scientif.*, **3**. *Actualités...*, **394**. [Edic. 1986, II, 271-281; edic. 1983^2, 409-420; edic. 1972, 141-152.

- Trad. española de L. Vega, en Castrillo y Vega, 1984, pp. 178-192.

[TARSKI 1936, *O logice Matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, ŁWóv-Warszawa.

- *Introduction to Logic and to the Methodolgy of Deductive Sciences*. Versión rev. y ampliada. Oxford/New York, 1941; 1946 2ª edic. rev.; reedic. post.

- *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas*. Trad. de T.R. Bachiller y J.R. Fuertes. Madrid, 1951, 1968[2] -según las edic. revisadas inglesas.]

[TARSKI (1939?), "Some current problems in metamathematics", edic. de J. Tarski y J. Wolenski. *History and Philosophy of Logic*, **16** (1995): 159-168.]

TARSKI 1954-55. "Contributions to the Theory of Models", *Indagationes Mathematicae*, **16** (1954): 572-588; **17** (1955): 56-64. [En edic. Givant, McKenzie 1986, III, pp. 517-525, 529-535, 539-547]

[TARSKI. "What are logical notions?". Edic. de J. Corcoran. *History and Philosophy of Logic*, **7** (1986): 143-154.]

JASKOWSKI, S. 1934, "On the Rules of Suppositions in Formal Logic", *Studia Logica*, **1**: 5-32. [Recogido en McCall, ed. 1967, pp. 232-258.

- Trad. española en Vega, ed. 1981, pp. 195-236.

GENTZEN 1934-35, "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift*, **39**: 176-210, 405-431. [Trad. inglesa en edic. Szabo 1969, pp. 69-131.

- Trad. francesa anotada en edic. R. Feys, J. Ladrière: *G. Gentzen. Recherches sur la déduction logique*. Paris, 1955.

GENTZEN 1936, "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", *Mathema tische Annalen*, **112**: 493-565. [Trad. con adiciones en edic. Szabo 1969, pp. 132-213]

The Collected Papers of Gerhardt Gentzen. Edic. M.E. Szabo. Amsterdam/London, 1969.

MALSEV 1936, "Untersuchungen aus dem Gebiet der mathematischen Logik", *Matématičéskij Shornik* [latiniz.], N.S. **1**: 323-336. [Trad. en Wells, ed. 1971; pp. 1-14.]

A.I. Malsev. The Metamathematics of Algebraic Systems: Collected Papers. Edic. de B.F. Wells. Amsterdam, 1971.

JOHANSSON, I. 1936, "Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus", *Compositio Mathematica*, **4**: 119-136.

CHURCH 1936, "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory", *The American Journal of Mathematics*, **58**: 345-363. [Recogido en Davis, ed. 1965, pp. 88-107]

CHURCH 1936, "A Note on the Entscheidungs-problem" *The Journal of Symbolic Logic*, **1**: 40-41; correcciones, 101-102. [Rec. en Davis, ed. 1965, pp. 108-114]

KLEENE 1936, "General Recursive Functions of Natural Numbers", *Mathematische Annalen*, **112**: 727-742. Corrección de errata y simplificación en *The Journal of Symbolic Logic*, **2** (1937): 38, **3** (1938): 152; **4** (1939): iv. [En Davis, ed. 1965, pp. 236-253]

TURING 1936, "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungs-problem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, vol. **42** (1936-37): 230-265; correcciones, vol. **43** (1937): 544-546. Revisión crítica y correcciones ulteriores de Post 1947: "Recursive unsolvability of a problem of thue", *The Journal of Symbolic Logic*, **12**: 1-11, appendix. [En Davis, ed. 1965, pp. 115-153]

ROSSER, J.B. 1936, "Extensions of some theorems of Gödel and Church", *The Journal of Symbolic Logic*, **1**: 87-91. [Recogido enn Davis, ed. 1965, pp. 231-235.

KEMENY, J.G. 1948, "Models of Logical Systems", *The Journal of Symbolic Logic*, **13**: 16-30.

HENKIN 1949, "The Completeness of the First-Order Functional Calculus", *The Journal of Symbolic Logic*, **14**: 159-166. [Recogido en J. Hintikka, ed. 1969, pp. 42-50. Trad. francesa en Largeault, ed. 1972, pp. 187-195.]

- Trad. española de L. Vega en Castrillo y Vega, eds. 1984, pp. 303-315.

HENKIN 1950, "Completeness in the Theory of Types", *The Journal of Symbolic Logic*, **15**: 81-91. [Recog. en Hintikka (ed.) 1969, pp. 51-63. Trad. francesa en Largeault (ed.) 1972, pp. 199-211]

ROBINSON, A. 1951, *On the Metamathematics of Algebra*, Amsterdam.

ROBINSON, A. 1961, "Non-standard analysis", *Proceedings of the Royal Academy of Sciences. Amsterdam*, ser. A, **64**: 432-440.

Abraham Robinson. Selected Papers. Edic. H.J. Keisler, S. Körner, W.A.J. Luxemburg, A.D. Young. New Haven/London, 1979; 3 vols.

BETH 1955, "Semantical Entailment and Formal Derivability", *Medelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, afd. Letterkunde*, NS, **18**/**13**: 203-249. [Recogido en Hintikka, ed. 1969, pp. 9-41. Trad. francesa en Largeault, ed. 1972, 60-90]

- *Entrañamiento semántico y derivabilidad formal*, introd. y trad. de M. Garrido y R. Beneyto. Valencia: Cuad. Teorema 18, 1978. Tambien hay trad. de P. Castrillo en Castrillo y

Vega, eds. 1984, pp. 204-268.]

PRAWITZ, D. 1965, *Natural Deduction*. Stockholm.

QUINE, W.v.O. 1966, *Selected Logic Papers*. Cambridge (Mass)/London, 1995, edic. ampliada [contiene 31 artículos desde 1939 hasta 1994].

LINDSTRÖM, P. 1969, "On extensions of elementary logic", *Theoria*, **XXXV**: 1-11.

6.2.2 Literatura secundaria.

ABRUSCI, V.M. 1978. "Introduzione" a su edic. David Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*. Napoli; pp. 13-131.

AGAZZI, E., ed. 1981, *Modern Logic - A Survey*. Dordrecht/Boston: Reidel.

ANELLIS, I.H. 1991, "The Löwenheim-Skolem theorem, theories of quantification and proof theory", en Ducker, ed. 1991, pp. 71-83.

ASPRAY, W.F. 1980, *From mathematical constructivity to computer science: Alan Turing, John von Neumann, and the origins of computer science in mathematical logic*. Madison (Wisconsin).

ASPRAY, W.F. 1990. *John von Neumann and the origins of modern computing*. Cambridge (Massachusetts).

ASPRAY, KITCHER, eds. 1988. Cf. **6.0**.

BADESA CORTÉS, C. 1991, *El teorema de Löwenheim en el marco de la teoría de relativos* Tesis Doct. [inédita], Univ. de Barcelona.

BLOCK, W.J., PIGOZZI, D. 1988, "Alfred Tarski's work on general metamathematics", *The Journal of Symbolic Logic*, **53**: 36-50.

BORGA, M. 1992. Cf. **6.2 B/2**.

BORKOVSKI, L., SLUPECKI, J. 1958, "The logical works of J. Łukasiewicz", *Studia Logica*, 8: 7-56.

CHANG, C.C. (1971), "Model Theory. 1945-1971", en L. Henkin *et al.* 1974, *Proceedings of the Tarski Symposium*, Providence (Rh.I.), pp. 173-186.

COFFA, A. 1987, "Carnap, Tarski and the search for truth", *Noûs*, **21**: 547-572.

COFFA, A. 1991, *The Semantic Tradition from Kant to Carnap. To the Vienna Station*. Cambridge.

CORCORAN, J. 1980, "Categoricity", *History and Philosphy of Logic*, **1**: 187-207.

CORCORAN, J. 1981, "From Categoricity to Completeness", *History and Philosophy of Logic*, **2**: 113-119.

CROSSLEY, J.N. 1975, "Reminiscence of logicians", en J.N. Crossley, ed. 1975, *Algebra and Logic. [Lecture Notes 450]*, Berlin/Heidelberg/New York; pp. 1-57.

CZELAKOWSKY, S., MALINOWSKI, G. 1985, Key Notions of Tarski's Methodology of Deductive Systems", *Studia Logica*, **44**: 321-351.

DAUBEN, J.W. 1988, "Abraham Robinson and nonstandard analysis: history, philosphy and foundations of mathematics", en Aspray, Kitcher, eds. 1988, pp. 177-200.

DAUBEN, J.W. 1995, *Abraham Robinson. The Creation of Nonstandard Analysis*, New York

DAWSON, J.W. (1984a) "The Reception of Gödel's Incompleteness Theorem", *PSA 1984*, reimp. en Shanker, ed. 1988, pp. 74-95; en Drucker, ed. 1991, pp. 84-100.

DAWSON, J.W. (1984b), "Kurt Gödel in Sharper Focus", en Shanker, ed. 1988, pp. 1-16.

DAWSON, J.W,, 1993. "The compactness of first-order logic: from Gödel to Lindström", *History and Philosophy of Logic*, 14: 15-37.

DETLEFSEN, M. 1979, "On Interpreting Gödel's Second Theorem", *Journal of Philosophical Logic*, **8**/**3**: 296-313. En Shanker, ed. 1988, pp. 131-154.

DIPERT, R. 1984. Cf. **6.1 A/2**.

DREBEN, B., van HEIJENOORT, J., 1986. "Introductory note to 1929, 1930 and 1930a", en *Kurt Gödel. Collected Works. I (Publications 1929-1936)*, edic.c., pp. 44-59.

DRUCKER, T., ed. 1991, *Perspectives on the History of Mathematical Logic*. Boston/Basel.

DUMMETT, M. (1967), "La filosofía de Frege", en M. Dummett (1978), *La verdad y otros enigmas*, México, 1990; pp. 157-189.

DUMMETT, M. 1973 [1981^2], 1991. Cf. **6.2 B/2**.

ETCHEMENDY, J. 1988, "Tarski on truth and logical consequence", *The Journal of Symbolic Logic*, **53**: 51-79.

FEFERMAN, S. 1984, "Kurt Gödel: Conviction and Caution", *Philosophia Naturalis*, **21**: 546-562. En Shanker, ed. 1988, pp. 86-114.

FEFERMAN, S. 1986, "Gödel's Life and Work", en edic. Feferman *et al.* 1986, Kurt Gödel, *Collected Works. I. Publications 1929-1936*, pp. 1-36.

FRIEDMAN, M. 1988, "Logical truth and analyticity in Carnap's *Logical Syntax of Language*", en Aspray, Kitcher, eds. 1988, pp. 82-94.

GILLIES, D. 1992, "The Fregean revolution in Logic", en Gillies, ed. 1991, pp. 265-305.

GILLIES, D., ed. 1992, *Revolutions in Mathematics*, Oxford.

GÖDEL, K. (1944) "La lógica matemática de Russell", en edic. J. Mosterín 1981, *Kurt Gödel. Obras...*, pp. 297-327.

GOLDFARB, W.D. 1979. "Logic in the twenties: the nature of the quantifier", *The Journal of Symbolic Logic*, **44**: 351-368.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1981. "On the development of logics between the two world wars", *American Mathematical Monthly*, **88**: 495-509.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1984, 1988. Cf. **6.2 B/2**

GRIFFIN, N. 1980, "Russell on the nature of logic (1903-1913)", *Synthese*, **45**: 117-188.

GUILLAUME, M. 1978, "Sur l'histoire des modèles non standards et celle de l'analyse non standard", *Cahiers Fundamenta Scientiae*, nº **85**: 1-13.

HEIJENOORT, J. van, 1967, "Logic as calculus, logic as language", *Synthese*, **17**: 324-330.

HEIJENOORT, J. van, 1976a, *El desarrollo de la teoría de la cuantificación*. México.

HEIJENOORT, J. van 1976b, "Set-Theoretic Semantics", en J. van Heijenoort 1985, *Selected Essays*, Napoli, pp. 43-53.

HEIJENOORT, J. van, 1985, "Jacques Herbrand's work in logic and its historical context", en J. van Heijenoort, 1985, *Selected Essays*, pp. 99-121.

HEIJENOORT, J. van (1985), "Système et métasystème chez Russell", *Logic Colloquium '85*. Amsterdam, 1987.

HERMES, H. 1981, "Recursion Theory", en E. Agazzi, ed. 1981, pp. 173-195

HINTIKKA, J. 1988, "On the Development of the Model-Theoretic View in Logical Theory", *Synthese*, **77**: 1-36.

HOUSER, N. 1994, "Algebraic logic from Boole to Schröder". Cf. **6.1 A/1**.

JÓNSSON, B. 1986, "The Contribution of Alfred Tarski to General Algebra", *The Journal of Symbolic Logic*, **51**/**4**: 883-916.

JORDAN, Z. 1945, *The Development of Mathematical Logic and of Logical Positivism in Poland Between the Two Wars*, Oxford/London. Parcialmente recogido en S. McCall, ed. 1967, pp. 346-397.

KLEENE, S.C. 1986. "Introductory note to Gödel 1930b, 1931 and 1932b", edic. Ferferman *et al.*, *CWI*, pp. 126-141.

KOTARBINSKI, T. 1967, "Notes on the Development of Formal Logic in Poland in the years 1900-1939", en S. McCall, ed. 1967, pp. 1-14 [cf. § **6.0**].

KREISEL, G. 1971, "*The Collected Papers of G. Gentzen*, 1969. A review", *The Journal of Philosophy*, **68**: 238-265.

KREISEL, G. 1980, "Kurt Gödel. 1906-1978", *Biographical Memoirs of Fellows of The Royal Society*, **26**: 148-224; **27**: 697; **28**: 718.

LADRIÈRE, J. (1957), *Las limitaciones internas de los formalismos*. Madrid, 1969.

LORENZO, Javier de, 1979, "Lógica y matemática en K. Gödel", *Estudios Filosóficos*, **28**/**79**: 391-453.

MOORE, G.H. 1980. Cf. **6.2 B/2**.

MOORE, G.H. (1986) "The Origins of Forcing", en F.R. Drake, J.K. Truss (eds.) 1988, *Logic Colloquium '86*, Amsterdam; pp. 143-173.

MOORE, G.H. 1987, "A house divided against itself: the emergence of first-order logic as the basis for mathematics", en E.R. Phillips, ed. 1987, *Studies in the history of mathematics. [Stud. in Mathem. 26. Mathem. Ass. of Amer.]*, New York: pp. 98-136.

MOORE, G.H. 1988, "The emergence of first-order logic", en Aspray, Kitcher (eds.), pp. 95-135.

MOSTOWSKI, A., 1966. *Thirty Years of Foundational Studies. Lectures on Develop. of Mathematical Logic and the Study of the Found. of Maths. 1930-1964*. Oxford.

ORTIZ HILL, C. 1995, "Husserl and Hilbert on completeness", en J. Hintikka, ed. 1995, pp. 143-163.

PLA I CARRERA, J. 1989, "Alfred Tarski i la teoria de conjunts", *Theoria*, **11**: 327-342.

PRAWITZ, D. 1971. "Ideas and results in proof theory", en J.E. Fenstad, ed. 1971, *Proc. 2nd. Scandinavian Logic Symposium*. Amsterdam; pp. 235-307.

RESNIK, M.D. 1966, "On Skolem's paradox", *The Journal of Philosophy*, **LXIII**: 425-438. [1969, "More on Skolem's paradox", *Noûs*, **3**: 185-196.

ROBINSON, A. (1960), "Recent Developments in Model Theory", en E. Nagel, P. Suppes, A. Tarski, eds., *Logic, Methodology and Philosophy of Science [1960 Stanford Intern. Congress*, Stanford, 1962; pp. 60-79.

RODRÍGUEZ CONSUEGRA, F. 1992, "Gödel's first works, 1929-1936: mathematics without philosophy?", *Modern Logic*, **3**: 58-74.

RODRÍGUEZ CONSUEGRA, F. 1994. Cf. **6.1 B/2**.

ROSS, D. 1974, "Church's Thesis: What Its Difficulties Are and Are Not?", *The Journal of Philosophy*, **71**: 515-525.

ROSSER, J.B. 1939, "An informal exposition of proofs of Gödel's theorem and Church's theorem", *The Journal of Symbolic Logic*, **4**: 53-60 (trad. de L. Vega en Castrillo y Vega, eds. 1984, *Lecturas de Lógica. II*, pp. 362-374).

RUITENBURG, W. 1991, "The Unintended Interpretations of Intuitionistic Logic", en Drucker, ed. 1991, pp. 143-160.

SCHIMANOVICH, W., BULDT, B., KÖHLER, E., WEIBEL, P., eds. 1993, *Wahrheit und Beweisbarkeit. Leben und Werk Kurt Gödels*, Wien.

SHANKER, S.G., ed. 1988, *Gödel's Theorem in Focus*. London.

SHAPIRO, S. 1983, "Remarks on the development od computability", *History and Philosophy of Logic*, **4**/**2**: 203-220.

SHOENFIELD, J.R. 1995, "The mathematical work of S.C. Kleene", *The Bulletin of Symbolic Logic*, **1**/**1**: 9-43.

SIEG, W. 1988, "Hilbert's Program sixty years later", *The Journal of Symbolic Logic*, **53**: 338-348.

SIMPSON, S.C. 1988, "Partial realizations of Hillbert's Program", *The Journal of Symbolic Logic*, **53**: 349-363.

SZABO, M.E, 1969. "Introduction" a su edic. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North Holland, pp. 1-28.

The Journal of Symbolic Logic, **51**/**4** (1986), monográfico sobre Tarski; **53**/**1** (1988), sección monográfica sobre Tarski; **53**/**2** (1988), sección monográfica sobre Hilbert.

THIEL, Ch. 1977, "Leopold Löwenheim: Life, Work and Early Influence", en R. Gandy, M. Hyland (eds.) *Logic Colloquium '76*, Amsterdam; pp. 235-252.

THIEL, Ch. 1978, "Reflexiones en el centenario del nacimiento de Leopold Löwenheim", *Teorema*, **8**/**3-4**: 263-267.

VAUGHT, R.L. (1971) "Model Theory before 1945", en L. Henkin *et al.* (eds.), 1974, *Proceedings of the Tarski Symposium*, Providence (Rh.I.), pp. 153-172.

WANG, H. 1970, "A survey of Skolem's work in logic", en Thoralf Skolem, *Selected Works in Logic*, J.E. Fenstad, ed. Oslo: Universitetsforlaget, pp. 17-52.

WANG, H. (1987), *Reflexiones sobre Kurt Gödel*, Madrid, 1992.

WEIL, H. 1944, "David Hilbert and his mathematical work", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **50**: 612-654.

WOLENSKI, J. 1989, *Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School*, Dordrecht/Boston.

WOLENSKI, J. 1995, "On Tarski's background", en Hintikka, ed. 1995, pp. 331-341

WOLKOWSKI, Z.W., ed. 1993, *First Intern. Symposium on Gödel's Theorems [Paris, 1991]*, Singapore/New Jersey/London.

WRIGHT, C. 1984. *Frege. Tradition & Influence*. Oxford/New York, 1986^2.