

**Método de Asignación de Autoestructura para  
diseño de sistemas MIMO**

Jesús Manuel de la Cruz García  
Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática. UCM

Joaquín Aranda Almansa  
Departamento de Informática y Automática. UNED

XVII Curso de Automática en la Industria  
Denia (Alicante), del 16 al 20 de Junio de 1997



# ÍNDICE

<i>1 Introducción</i>	<i>1</i>
<i>2 Respuesta Temporal y Autoestructura</i>	<i>2</i>
2.1 Breve Revisión de la Respuesta Transitoria	2
<i>3 El Problema de Control</i>	<i>5</i>
3.1 Estructura del Controlador	5
<i>4 Estructura Asignable</i>	<i>6</i>
4.1 Realimentación de la salida	6
4.2 Especificación Parcial de $v_i^d$	9
4.3 Desacoplo	10
4.4 Cálculo de la Ganancia K	12
4.4 Forma Dual	13
4.5 Realimentación Dinámica de la Salida	14
<i>5 Asignación Robusta de la Autoestructura</i>	<i>16</i>
5.1 Proyección de los vectores en lazo abierto	16
5.2 Minimización de la Sensibilidad de los Autovalores	17
5.3 Mejora de los Márgenes de Estabilidad	17
5.4 Aproximación Multimodal	20
<i>6 Aspectos prácticos de la implementación</i>	<i>20</i>
<i>7 Aplicaciones</i>	<i>21</i>
<i>Referencias</i>	<i>23</i>
<i>Apendice A Valores Singulares</i>	<i>24</i>

## ARTÍCULOS

**Eigenstructure Assignment for Linear Systems.** A.N. Andry, E.Y. Shapiro, J.C. Chung. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1983. Vol. AES-19, pp. 711-729.

**Robust Pole Assignment in Linear State Feedback.** J. Kautsky, N.K. Nichols, P. Van Dooren. Int. J. Contr. 1985. Vol. 41, no. 5, pp. 1129-1155.

**Eigenstructure Assignment.** K.M. Sobel, E.Y. Shapiro, A.N. Andry. Int. J. Contr. 1994. Vol. 59, no. 1, pp. 13-37.

**Eigenstructure Assignment and Controller Optimization for Mechanical Systems.** M.J. Schulz, D.J. Inman, IEEE Trans. on Control Systems Technology. 1994. Vol. 2, no. 2, pp. 88-100.

**Eigenstructure Assignment by Decentralized Feedback Control.** J. Lu, H.D. Chiang, J.S. Thorp. IEEE Trans. on Automatic Control. 1993. Vol. 38, no. 4, pp. 587-594.

# Método de Asignación de Autoestructura

## 1 Introducción

Este método es la extensión multivariable del método del lugar de las raíces. El comportamiento de un sistema MIMO está caracterizado por los autovalores y autovectores. Los autovalores determinan la estabilidad y los autovectores caracterizan la forma y el acoplamiento entre los diferentes modos. El método permite al diseñador satisfacer directamente especificaciones en términos de tiempo de asentamiento, amortiguación y desacoplamiento con la elección adecuada de los autovalores y los autovectores.

La técnica de asignación de la autoestructura no es una técnica de control robusto pero puede adaptarse para tener en cuenta variaciones de los parámetros y para mejorar la robustez ante la presencia de dinámica no modelada.

Esta técnica se ha utilizado ampliamente en aplicaciones de control aeronáutico debido a sus posibilidades para incorporar directamente criterios de diseño sobre las cualidades del manejo del vehículo.

Para comprender mejor la influencia de los autovalores y autovectores sobre la respuesta de un sistema MIMO vamos a intentar reflejar su relación con la respuesta de un sistema a una entrada escalón dada por

$$y(t) = Ae^{-at} + Be^{-bt} \sin(\omega t + \phi) + C$$

La respuesta tiene tres modos, descritos por los tres términos independientes de la parte derecha de la ecuación. Cada uno de estos modos se puede describirse por dos aspectos.

En el primero de los términos el valor de  $a$  define la velocidad con la que decae el modo, lo que se puede relacionar con una constante de tiempo. En el segundo de los términos el factor tiempo aparece dos veces en la exponencial y en la senoide. El valor  $b$  define la velocidad de caída del modo y  $\omega$  la frecuencia de oscilación del modo. El último término no tiene ninguna dependencia temporal y su presencia se debe al escalón de entrada.

Así, el primer aspecto de cada modo es aquel que describe su comportamiento transitorio. En el control clásico los valores de  $a$ ,  $b$  y  $\omega$  definen los polos del sistema, y en nuestra denominación son los autovalores.

El siguiente aspecto de la ecuación anterior es la magnitud que se tiene en cada entrada escalón, esto es, el residuo del modo. De manera más específica, lo que importa es la importancia relativa de los residuos de  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Estos valores marcan la importancia que el modo va a tener en la salida. En el control SISO clásico los residuos dependen de los ceros y polos del sistema. En el modelo MIMO, y como se pondrá de manifiesto en la ecuación (2.17), el residuo depende de los autovectores del sistema.

## 2 Respuesta Temporal y Autoestructura

Consideramos el sistema lineal invariante en el tiempo descrito por la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde el número de estados es  $n$ , el número de señales de entrada es  $m$ , y el número de señales de salida es  $p$ .  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices de dimensiones apropiadas.

Suponemos que no hay señales de entrada exógenas al sistema.

Normalmente se realizan las siguientes suposiciones estandar:

- $B$  y  $C$  tienen rango completo
- $(A, B)$  es controlable y  $(A, C)$  es observable.

Sin embargo, la suposición de controlabilidad puede eliminarse y el diseño puede alterar autovectores que corresponden a autovalores no controlables, Sobel et al. 1994.

### 2.1 Breve Revisión de la Respuesta Transitoria

Como es bien conocido, la solución de (2.1) es

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$y(t) = Ce^{At} x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

La solución (2.2) se puede poner en términos de los autovalores y autovectores de la matriz  $A$ . Supóngase que  $A$  tiene  $n$  autovalores distintos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  reales o complejo conjugados, con sus correspondientes autovectores por la derecha  $\{v_i\}_{i=1}^n$ . Definimos las matrices de  $n \times n$

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (2.4)$$

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \quad (2.5)$$

entonces

$$AV = V\Lambda \quad (2.6)$$

A la matriz  $V$  se la denomina matriz *modal*. Los  $n$  autovectores constituyen una familia linealmente independiente de modo que forman una base del espacio complejo de dimensión  $n$  y se dice que  $A$  tiene una base de  $n$  autovectores o *autovectores por la derecha*.

$A$  también tiene una base de *autovectores por la izquierda*  $\{w_i\}_{i=1}^n$  tal que

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^H \quad (2.7)$$

$$WA = \Lambda W \quad (2.8)$$

donde los vectores  $v_i$  y  $w_i$  se normalizan de modo que

$$WV = I = VW \quad (2.9)$$

$$WAV = \Lambda$$

La solución dada por las ecuaciones (2.2) y (2.3) pueden ponerse como

$$x(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} v_i \left( w_i^H x_0 + \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} w_i^H B u(\tau) d\tau \right) \quad (2.10)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} C v_i \left( w_i^H x_0 + \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} w_i^H B u(\tau) d\tau \right) \quad (2.11)$$

Si nos fijamos en la solución homogénea de (2.10), o respuesta para entrada nula, podemos escribir

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i \quad (2.12)$$

donde  $\alpha_i$  son los escalares  $w_i^H x_0$ . Considerando el cambio de base

$$\begin{aligned} \xi &= Wx \\ x &= V\xi \end{aligned} \quad (2.13)$$

la ecuación (2.12) se puede poner

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \alpha_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, n \\ x(t) &= \sum_{i=1}^n \xi_i(t) v_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

Las componentes del vector  $\xi$  se denominan *modos del sistema* y la ecuación (2.14) muestra claramente que la respuesta es una composición de los modos en los autovectores de la matriz  $A$ . La figura 1 muestra el sistema en la base modal. De ella vemos que si la componente  $j$  del autovector  $v_i$  es cero, el modo  $i$  no actúa sobre la componente  $j$  del vector de estados.

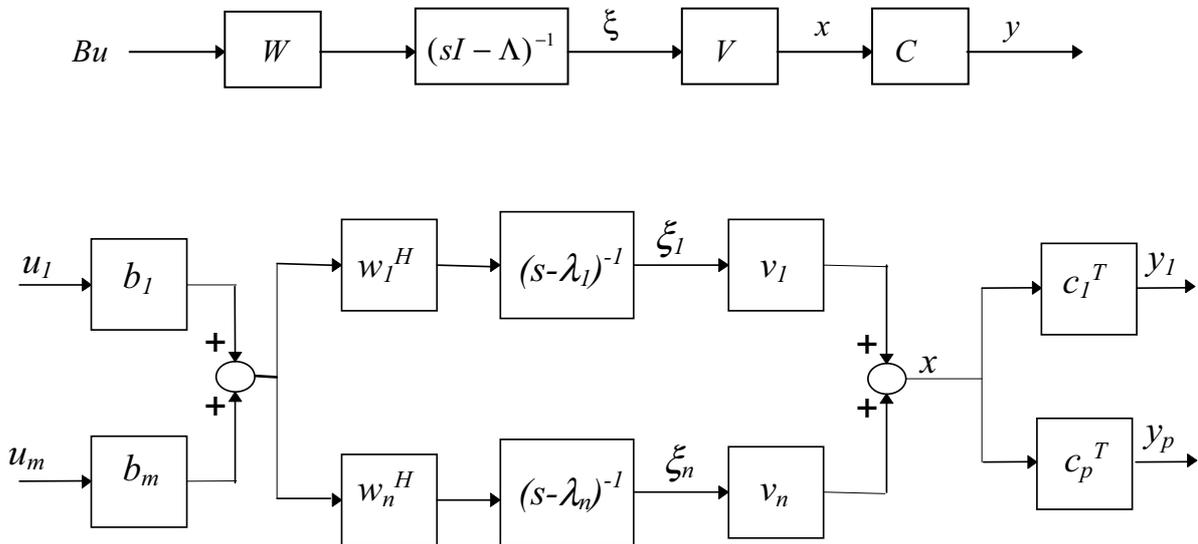


Figura 1. Diagrama de bloques en la base modal

La matriz de transferencia para el sistema (2.1) está dada por

$$G(s) = \sum_{i=1}^n (s - \lambda_i)^{-1} C v_i \cdot w_i^H B \quad (2.15)$$

Si descomponemos las matrices  $B$  y  $C$  en vectores columna de  $n$  componentes en la forma

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_p^T \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

la función de transferencia entre la salida  $y_k$  y la entrada  $u_l$  está dada por

$$\frac{y_k(s)}{u_l(s)} = G_{kl}(s) = \sum_{i=1}^n (s - \lambda_i)^{-1} c_k^T v_i \cdot w_i^H b_l \quad (2.17)$$

- En (2.11) vemos que el acoplamiento del modo  $i$ -ésimo con la salida está dada por  $Cv_i$ ; si  $Cv_i = 0$  el modo  $i$ -ésimo no contribuye a la salida.

- En (2.17) vemos que si  $c_k^T v_i = 0$  el modo  $i$ -ésimo no contribuye a la salida  $k$ .
- En (2.11) vemos que el acoplamiento del modo  $i$ -ésimo con la entrada está dada por  $w_i^H B$ ; si  $w_i^H B = 0$  el modo  $i$ -ésimo no se ve afectado por la entrada.
- En (2.17) vemos que si  $w_i^H b_l = 0$  el modo  $i$ -ésimo no se ve afectado por la entrada  $l$ .

### 3 El Problema de Control

Consideramos el sistema lineal invariante en el tiempo descrito por la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.1)$$

El objetivo es encontrar un sistema realimentado de modo que posea en lazo cerrado una autoestructura deseada.

#### 3.1 Estructura del Controlador

Como ley de control se puede utilizar o realimentación estática de la salida, o realimentación de estados o compensación dinámica. Normalmente se elige la realimentación estática de la salida ya que los otros dos métodos pueden reformularse como un problema de realimentación de la salida.

#### Realimentación de la salida

De forma más precisa el problema se puede plantear como sigue: dado un conjunto de autovalores deseados  $\{\lambda_i^d, i = 1, \dots, q\}$  y un conjunto correspondiente de autovectores deseados  $\{v_i^d, i = 1, \dots, q\}$  encontrar una matriz  $K$  de  $m \times p$  de modo que los autovalores de la matriz en lazo cerrado del sistema  $(A - BKC)$ , obtenida con la ley de control

$$u = -Ky \quad (3.2)$$

contiene a  $\{\lambda_i^d\}$  como un subconjunto y los autovectores correspondientes de  $A - BKC$  están próximos a sus respectivos miembros del conjunto deseado  $\{v_i^d\}$ .

La solución la proporciona el siguiente teorema debido a Srinathkumar (1978).

**Teorema.** Si el sistema es controlable y observable y las matrices  $B$  y  $C$  tienen rango completo entonces la ley de control (3.2) permite asignar  $\max\{m, p\}$  autovalores y también permite asignar  $\max\{m, p\}$  autovectores con  $\min\{m, p\}$  elementos de cada vector escogidos arbitrariamente.

Si, por ejemplo, se supone que

$$m < p < n \quad (3.3)$$

entonces  $p$  autovalores pueden asignarse y  $m$  elementos de cada autovector pueden ser elegidos arbitrariamente. Sin embargo, no es posible asegurar con la ley de control usada que autovalores en lazo abierto que son estables se pasen al semiplano complejo derecho, Sobel(1994).

A lo largo de la exposición, y para simplificarla, supondremos que se verifica la condición (3.3).

## 4 Estructura Asignable

### 4.1 Realimentación de la salida

Suponemos que el sistema está controlado por una realimentación de salida estática y por una acción feedforward de la entrada de referencia  $r$  mediante la ganancia  $K_{FF}$ , acción que no afecta a la autoestructura del sistema en lazo cerrado, de modo que se tiene:

$$u = -Ky + K_{FF}r \quad (4.1)$$

La dinámica del sistema está dada por la ecuación

$$\dot{x} = (A - BKC)x + BK_{FF}r \quad (4.2)$$

si  $D = 0$ , o si  $D \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK(I + DK)^{-1}C)x + B(I + DK)^{-1}K_{FF}r \\ &= (A - B(I + KD)^{-1}KC)x + B(I + KD)^{-1}K_{FF}r \end{aligned} \quad (4.3)$$

Los autovectores por la derecha del sistema en lazo cerrado verifican:

$$\begin{aligned} (A - B(I + KD)^{-1}KC)v_i &= \lambda_i v_i \\ (A - \lambda_i I)v_i &= B(I + KD)^{-1}K Cv_i \end{aligned} \quad (4.4)$$

Definimos la *dirección de entrada*

$$z_i = (I + KD)^{-1}K Cv_i \Leftrightarrow z_i = K(Cv_i - Dz_i) \quad (4.5)$$

La dirección de entrada indica como el autovector  $v_i$  se transmite por la realimentación en la señal de entrada. La figura 2 muestra gráficamente la relación entre el autovector y la dirección de entrada.

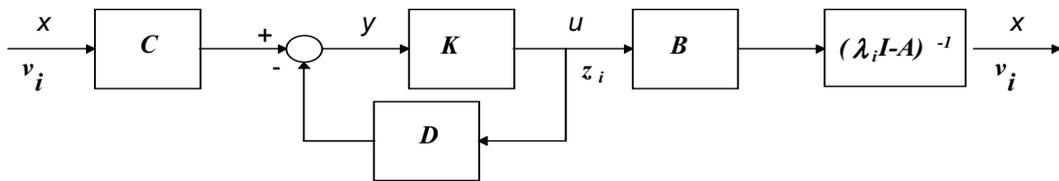


Figura 2 Diagrama de bloques que muestra la relación entre  $v_i$  y  $z_i$

Podemos escribir entonces (4.4) y (4.5) de forma conjunta como

$$\begin{pmatrix} \textcircled{R} A - \lambda_i I & -B \\ \textcircled{C} & -KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \textcircled{R} v_i \\ \textcircled{C} z_i \end{pmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

Todas las técnicas de autoestructura resuelven la primera de estas ecuaciones

$$\left( (A - \lambda_i I) \quad -B \right) \begin{pmatrix} \textcircled{R} v_i \\ \textcircled{C} z_i \end{pmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

**Lema 1** Una tripleta  $(\lambda_i, v_i, z_i)$  puede asignarse mediante realimentación de la salida si y sólo si satisface la ecuación (4.7). La tripleta se asigna en lazo cerrado por cualquier ganancia  $K$  que satisface la ecuación lineal (4.5).

Se ve por la ecuación (4.7) que

$$\begin{pmatrix} v_i \\ z_i \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_i \\ M_i \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

donde  $L_i$  es una matriz de  $n \times m$  de rango  $m$  y  $M_i$  es una matriz de  $m \times m$ . De forma equivalente se ve que el autovector  $v_i$  verifica

$$v_i = (A - \lambda_i I)^{-1} B z_i \quad (4.9)$$

luego pertenece al subespacio desarrollado por las columnas de la matriz  $L_i = (A - \lambda_i I)^{-1} B$ . La figura 3 muestra una representación gráfica de un subespacio nulo de dimensión dos en un espacio vectorial de dimensión tres.

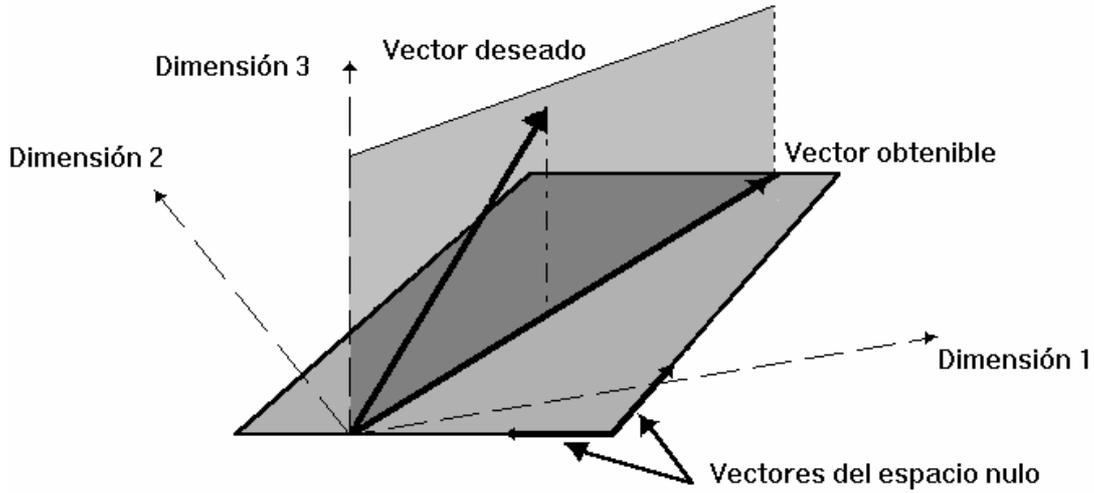


Figura 3. Interpretación geométrica del autovector deseado y el obtenible

En general, los autovectores deseados  $v_i^d$ , cuya elección debe hacerse en términos de desacoplo y forma de la respuesta, no residen en el subespacio, y por ello, no pueden conseguirse enteramente. Para obtener el autovector tan próximo como sea posible al deseado se realiza una aproximación óptima: la proyección del autovector deseado en el subespacio obtenible se encuentra minimizando

$$J_i = \min_{z_i} [v_i^d - L_i z_i]^T R_i [v_i^d - L_i z_i], \quad i = 1, \dots, p \quad (4.10)$$

donde  $R_i$  es una matriz de ponderación cuyo rango es al menos  $m$ .

El valor óptimo  $z_i$  se calcula como

$$z_i = (L_i^T R_i L_i)^{-1} L_i^T R_i v_i^d \quad i = 1, \dots, p \quad (4.11)$$

y el autovector que se obtiene  $v_i^a$  esta dado por

$$v_i^a = L_i z_i \quad i = 1, \dots, p \quad (4.12)$$

## 4.2 Especificación Parcial de $v_i^d$

En muchas ocasiones no se desea la especificación completa del autovector en lazo cerrado sino que el diseñador sólo está interesado en ciertos elementos del autovector. Por ejemplo el autovector deseado puede tener la estructura:

$$v_i^d = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ x \\ x \\ v_{ij} \\ x \\ v_{in} \end{pmatrix}$$

donde  $v_{ij}$  indica una componente especificada y  $x$  una componente no especificada.

Introducimos una matriz de transformación  $N_i$  que separa el autovector en componentes especificadas y no especificadas

$$N_i v_i^d = \begin{pmatrix} v_{di}^s \\ v_{di}^u \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Lo mismo se puede hacer con el subespacio nulo o, lo que es equivalente, con  $L_i$

$$N_i L_i = \begin{pmatrix} L_i^s \\ L_i^u \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Ahora se busca la proyección de  $v_{di}^s$  en  $L_i^s$ . La solución tiene la forma de la ecuación (4.11) donde  $R_i = N_i^T N_i$ . Así, el autovector que se obtiene está dado por (ver Andry et al. (1983))

$$v_i = L_i (L_i^{sH} L_i^s)^{-1} L_i^{sH} v_{di}^s \quad (4.15)$$

Si se desea que los elementos no especificados no introduzcan ningún valor en la función de coste se puede elegir la matriz  $R_i$  como una matriz diagonal con unos en las entradas que se asignan y cero en el resto de los elementos de la diagonal.

## 4.3 Desacoplo

Como se indicó en la sección 2, algunos modos pueden no influir en algún componente del vector de estado, o en alguna de las salidas, o no ser influidos por alguna de las entradas.

### Desacoplo de un modo a uno de los estados

Si se desea que un modo del sistema en lazo cerrado no está presente en un determinado componente del vector de estado, se debe especificar como cero la entrada correspondiente del autovector deseado. Por ejemplo,  $v_i^d = [x \ x \ 0 \ x]^T$ . Este desacoplo se puede indicar también introduciendo una matriz  $g_i$  ortogonal al autovector deseado  $g_i^T v_i = 0$  y en la que cada fila tiene todos sus elementos nulos salvo en alguna de las entradas correspondiente a la especificación nula en el autovector deseado. De esta manera se puede especificar el desacoplo con  $m-1$  componentes del vector de salida. Para el autovector del ejemplo anterior  $g_i = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ .

Podemos expresar el desacoplo mediante la siguiente ecuación que debe cumplir la tripleta  $(\lambda_i, v_i, z_i)$  del sistema en lazo cerrado

$$\begin{pmatrix} A - \lambda_i I & -B \\ g_i^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0 \quad (4.16)$$

que nos dice que el autovector y la dirección de entrada deben verificar

$$\begin{pmatrix} v_i \\ z_i \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} A - \lambda_i I & -B \\ g_i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Si la matriz  $g_i$  tiene  $m-1$  filas entonces la dimensión del subespacio nulo<sup>1</sup> es uno y el par autovector-dirección de entrada se puede encontrar sin proyección.

### Desacoplo de un modo a una de las salidas

Como se dedujo de la ecuación (2.17) vemos que el modo  $i$ -ésimo no está presente en la salida  $k$ -ésima si  $c_k^T v_i = 0$ , luego tenemos una condición similar al desacoplo de los estados con  $c_k$  cumpliendo la misma función que  $g_i$ . Tenemos ahora la condición

$$\begin{pmatrix} A - \lambda_i I & -B \\ c_k^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0 \quad (4.18)$$

<sup>1</sup> En una aplicación lineal se verifica que la dimensión del espacio origen es igual a la suma de la dimensión de la imagen de la aplicación y de la dimensión del núcleo.

En algunas ocasiones las salidas reguladas no coinciden con las salidas medidas, en este caso el modo de proceder es similar sustituyendo el vector  $c_k$  por el vector que relaciona la salida regulada con el vector de estado.

### Desacoplo de una señal de referencia a un modo

La ecuación (4.2), o (4.3) si  $D \neq 0$ , describe la dinámica del sistema en lazo cerrado con una señal de referencia  $r$ . De las ecuaciones (2.15) y (2.17) deducimos que el modo  $i$ -ésimo no se ve afectado por la entrada de referencia  $l$  si se cumple la relación  $w_i^H B K_{FFl} = 0$ . Donde el subíndice  $l$  indica la columna correspondiente de la ganancia.

### Desacoplo de una señal de referencia a una salida

Combinando el desacoplo de los modos con la salida y de la entrada de referencia con los modos podemos conseguir el desacoplo de la señal de referencia con la salida.

En algunos casos se desea que cada una de las señales de salida o, de forma más general, señales reguladas, siga asintóticamente a la correspondiente componente de la señal de referencia. La ganancia de feedforward puede entonces calcularse de modo que en el estado estacionario se obtenga el desacoplo estático deseado.

Si el control está determinado por la ecuación (4.1) y suponemos que  $D=0$  la dinámica del sistema en lazo cerrado está dado por (4.2). Si la salida regulada está dada por

$$y_r = C_r x$$

el estado de equilibrio  $x_r$  del sistema en lazo cerrado y la salida regulada verifican

$$\begin{aligned} 0 &= (A - BKC)x_r + BK_{FF}r \\ r &= C_r x_r \end{aligned}$$

ecuaciones que dan las condiciones de desacoplo entrada-salida estáticas. Las ecuaciones anteriores se pueden poner en la forma equivalente

$$\begin{aligned} 0 &= Ax_r + Bu_r \\ r &= C_r x_r \end{aligned}$$

donde

$$u_r = -KCx_r + K_{FF}r$$

De las ecuaciones anteriores se deduce (Lin, 1994)

$$K_{FF} = [-KC \quad I] \begin{pmatrix} A & B \\ C_r & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

#### 4.4 Cálculo de la Ganancia K

La ganancia  $K$  se puede calcular directamente resolviendo la ecuación lineal que se deduce de las ecuaciones (4.5),  $i=1, \dots, q$

$$Z = K(CV^a - DZ) \quad (4.19)$$

donde

$$V^a = [v_1, v_2, \dots, v_q]$$

$$Z = [z_1, z_2, \dots, z_q]$$

y los vectores  $v_i$  y  $z_i$  son los obtenidos como solución al problema de asignación de la autoestructura.

Normalmente  $D=0$  y el número de columnas de  $V^a$  y de  $Z$  es igual al número de salidas  $p$ , y se tiene

$$K = Z(CV^a)^{-1} \quad (4.20)$$

Si el número de tripletas que se deben asignar  $(\lambda_i, v_i, z_i)$  es menor que  $p$ , digamos  $q$ , quedan libres algunos grados de libertad en la determinación de la ganancia. En este caso lo natural es elegir la ganancia de norma mínima, o aquella más próxima a una dada. En este caso las matrices  $V^a$  y  $Z$  tienen  $q$  vectores columnas. Si utilizamos la representación

$$S = C[v_1, \dots, v_q] - D[z_1, \dots, z_q]$$

obtenemos la ganancia de norma mínima como

$$K = [z_1, \dots, z_q](S^T S)^{-1} S^T \quad (4.21)$$

Si el número de tripletas es mayor que  $p$  entonces se puede utilizar realimentación dinámica como se indica en 4.5.

Cuando  $v_i$  se calcula utilizando una reordenación del vector deseado,  $z_i$  se puede calcular fácilmente para resolver la ecuación (4.16). Sin embargo, si  $D=0$  la matriz de ganancia resultante se puede determinar fácilmente sustituyendo  $V^a$  en (4.4), que puede ponerse en la forma

$$K = B^{\circledast}(AV^a - V^a \Lambda)(CV^a)^{-1}$$

donde  $B^{\circledast}$  indica la matriz pseudoinversa. Otras formas de cálculo de la matriz  $K$  se pueden encontrar en Andry et al. (1983) y en Kaustky et al. (1985).

#### 4.4 Forma Dual

De forma dual los autovalores por la izquierda  $w_i^H$  verifican

$$\begin{aligned} w_i^H (A - BK(I + DK)^{-1}C) &= \lambda_i w_i^H \Leftrightarrow \\ w_i^H (A - \lambda_i I) &= w_i^H BK(I + DK)^{-1}C \end{aligned} \quad (4.22)$$

Las direcciones de salida se definen como

$$q_i^H = w_i^H BK(I + DK)^{-1} \Leftrightarrow q_i^H = (w_i^H B - q_i^H D)K \quad (4.23)$$

Podemos escribir entonces

$$\left( \begin{array}{cc|c} \textcircled{R} A^H - \lambda_i^H I & -C^H & \left. \begin{array}{c} \textcircled{R} w_i \\ \textcircled{C} \\ \textcircled{TM} q_i \end{array} \right\} \\ \textcircled{C} -K^H B^H & (I + K^H D^H) & \end{array} \right) = 0 \quad (4.24)$$

**Lema 2** Una tripleta  $(\lambda_i, w_i, q_i)$  puede asignarse mediante realimentación de la salida si y sólo si satisface la ecuación

$$\left( (A^H - \lambda_i^H I) \quad -C^H \right) \left. \begin{array}{c} \textcircled{R} w_i \\ \textcircled{C} \\ \textcircled{TM} q_i \end{array} \right\} = 0 \quad (4.25)$$

La tripleta se asigna en lazo cerrado por cualquier ganancia  $K$  que satisface la ecuación lineal

$$q_i = K^H (B^H w_i - D^H q_i) \quad (4.26)$$

Podemos proceder ahora como con los autovectores por la derecha para encontrar la solución que asigna un conjunto de tripletas  $(\lambda_i, w_i, q_i)$ .

La ganancia  $K$  se puede calcular directamente resolviendo la ecuación lineal

$$Q = (W^a B - QD)K \quad (4.27)$$

donde

$$\begin{aligned} W^a &= [w_1, w_2, \dots, w_p]^H \\ Q &= [q_1, q_2, \dots, q_p]^H \end{aligned} \quad (4.28)$$

#### 4.5 Realimentación Dinámica de la Salida

La estructura de control es como la que muestra la figura 5.

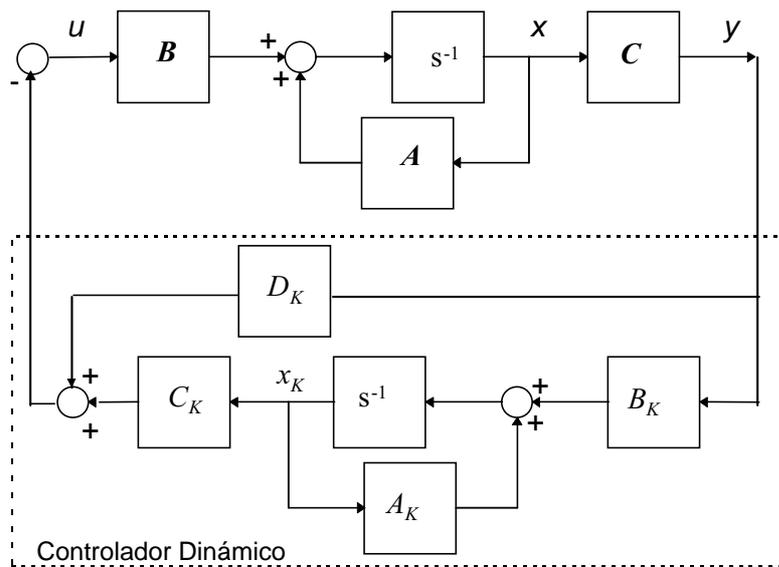


Figura 5. Sistema de control de realimentación dinámica de la salida

La matriz de transferencia del controlador está dada por

$$H(s) = C_K(sI - A_K)^{-1} B_K + D_K \quad (4.29)$$

donde la representación en variables de estado del controlador está dada por las matrices  $(A_K, B_K, C_K, D_K)$ . Como se ve, la salida del compensador está conectada a la entrada del sistema y la salida del sistema a la entrada del compensador, por lo que se obtiene la siguiente representación global en variables de estado:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_K \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A - BD_K C & -BC_K \\ B_K C & A_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_K \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D_K & -C_K \\ B_K & A_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_K \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Este sistema lo podemos ver como uno nuevo descrito por las matrices

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_K \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

y con la ganancia de realimentación dada ahora por

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} -D_K & -C_K \\ B_K & A_K \end{pmatrix}$$

Sea  $\lambda_i$  un autovalor del sistema en lazo cerrado y

$$\begin{pmatrix} v_i \\ v_{Ki} \end{pmatrix}$$

el correspondiente autovector por la derecha. El siguiente lema nos muestra el modo de proceder para determinar la ganancia dinámica de realimentación.

**Lema 3** Una tripleta  $(\lambda_i, v_i, z_i)$  que satisface la ecuación

$$\left( (A - \lambda_i I) \quad -B \right) \begin{pmatrix} v_i \\ v_{Ki} \\ z_i \end{pmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

puede asignarse en lazo cerrado mediante realimentación dinámica de la salida por cualquier ganancia dinámica  $H(s)$  que satisfaga la ecuación lineal

$$z_i = H(\lambda_i)(Cv_i - Dz_i) \quad (4.31)$$

Las restricciones lineales de la ecuación (4.31) pueden resolverse utilizando Programación Lineal Cuadrática.

Los grados de libertad introducidos por este tipo de control pueden utilizarse para asignación multimodal, sección 5.3.

## 5 Asignación Robusta de la Autoestructura

El método de asignación de autoestructura tal como lo hemos planteado permite tener en cuenta especificaciones de comportamiento y desacoplo pero no es un método de control robusto, por lo que se han propuesto muchos algoritmos para mejorar la robustez. Estos algoritmos pueden clasificarse en dos grupos: mejora de la sensibilidad de los autovalores y robustez en la estabilidad. Los algoritmos del primer grupo tienen en cuenta variaciones estructuradas de los parámetros. La mayoría de los métodos de este grupo plantean un problema de optimización con restricciones. El segundo grupo de algoritmos trata con dinámicas no modeladas. En ellos el método de autoestructura se integra con el método de diseño  $H_\infty$ , Lin (1994).

Presentamos a continuación cuatro formas distintas de abordar la robustez. Estos métodos no son exclusivos entre si sino que permiten ser utilizados de forma cooperativa.

### 5.1 Proyección de los vectores en lazo abierto

En Wilkinson (1965) y Döll et al. (1997), se muestra que una perturbación en la matriz en lazo cerrado ( $A-BKC$ ) dada por  $\Delta(A-BKC)$ , se traduce en la siguiente perturbación de primer orden del  $i$ -ésimo autovalor

$$\Delta\lambda_i = w_i^H \Delta(A - BKC) v_i \quad (5.1)$$

donde  $w_i$  y  $v_i$  están normalizados de manera que su producto escalar es uno. Si suponemos que los autovalores del sistema en lazo abierto no varían mucho con la variación de los parámetros, la ecuación (5.1) muestra que cualquier variación puede relacionarse directamente con los autovectores del sistema. Por lo que, si se especifican como autovectores deseados los del sistema en lazo abierto, la sensibilidad a las perturbaciones de los autovalores en lazo cerrado no deben deteriorarse en exceso por la realimentación, Döll y col. (1997).

### 5.2 Minimización de la Sensibilidad de los Autovalores

La selección de los autovectores influyen en la sensibilidad de los autovalores a las perturbaciones, ya que la sensibilidad de los autovalores de una matriz decrece cuando aumenta la ortogonalidad de los autovectores correspondientes, Kautsky et al. (1985).

Una medida de la sensibilidad de un autovalor  $\lambda_i$  a perturbaciones en los componentes de la matriz en lazo cerrado del sistema  $A-BKC$ , se obtiene con la magnitud del número de condición

$$c_i = \|w_i\|_2 \|v_i\|_2 / |w_i^H v_i| \geq 1 \quad (5.2)$$

Si los autovectores por la derecha  $v_i$  se normalizan de modo que su norma Euclídea sea uno entonces el número de condición de cualquier autovalor está dado por la magnitud Euclídea del correspondiente autovector por la izquierda  $w_i$ . Una cota en la sensibilidad de los autovalores está dada por el número de condición de la matriz de autovectores:

$$\max_j c_j \leq \kappa(V) \equiv \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2 \quad (5.3)$$

El mínimo de esta matriz de condición es 1 cuando la matriz en lazo cerrado es normal, ya que los autovectores normalizados forman una base ortonormal del plano complejo  $n$  dimensional.

Kautsky et al. (1985) proponen cuatro métodos que tratan de minimizar cuatro medidas diferentes del condicionamiento del problema de autoestructura, entre ellos el máximo del número de condición de los autovalores y  $\kappa(V)$ . Todas estas medidas alcanzan su valor mínimo cuando el problema está perfectamente condicionado y los autovalores asignados son tan insensibles como sea posible.

### 5.3 Mejora de los Márgenes de Estabilidad

Para la selección de la autoestructura se puede utilizar una medida de la robustez de la sensibilidad del lazo de control. Dichas medidas se expresan en forma de márgenes de ganancia y de fase de las funciones de sensibilidad. Damos a continuación algunas de las medidas más utilizadas.

Considérese el sistema de control de la figura 6, donde  $G(s)$  es la función de transferencia matricial de la planta y  $H(s)$  es la función de transferencia matricial del

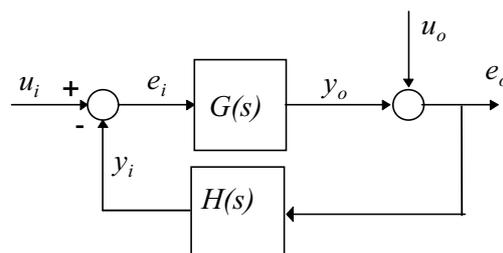


Figura 6. Sistema de control realimentado

controlador;  $u_i$  y  $u_o$  son vectores de entradas externas;  $y_i$  e  $y_o$  son los vectores de salida del controlador y de la planta, respectivamente;  $e_i$  y  $e_o$  son vectores de las señales de error.

Para medir los márgenes de estabilidad para sistemas de control realimentados multivariables se pueden utilizar los valores singulares de la función de sensibilidad  $S = (I + L)^{-1}$ , o de la función de sensibilidad complementaria  $T = L(I + L)^{-1}$  o de la

función de sensibilidad balanceada  $S + T$ , donde  $L$  es la matriz de ganancia del lazo abierto Lehtomaki et al. (1981), Dailey(1991) y Blight et al. (1994).

Las funciones  $S$  y  $T$  pueden calcularse a la entrada de los actuadores o a la salida de los sensores. Para la entrada de los actuadores  $L = HG$  y para la salida de los sensores  $L = GH$ . Normalmente las matrices de transferencia del lazo abierto a la entrada y a la salida son distintas porque la multiplicación matricial no es conmutativa y, por ello, ambos casos deben ser tenidos en cuenta.

La función de sensibilidad es la matriz de transferencia de la señal de entrada al punto de suma  $u$  a la señal  $e$  de salida del punto de suma ( $u_i, e_i$  para el nodo de entrada y  $u_o, e_o$  para el nodo de salida). La función de sensibilidad complementaria es la matriz de transferencia de la señal de entrada al punto de suma  $u$  a la señal  $y$  de retorno del lazo correspondiente ( $u_i, y_i$  para el nodo de entrada y  $u_o, y_o$  para el nodo de salida). La función de sensibilidad balanceada es la matriz de transferencia de la señal  $u$  a la señal  $y+e$ . El valor de pico del valor singular máximo ( $\bar{\sigma}$ ) de  $S, T$  o  $S+T$  da una garantía de robustez para todas las frecuencias.

Las fórmulas que se aplican para calcular el margen de ganancia  $GM$  y el margen de fase  $PM$  utilizando las funciones de sensibilidad son las siguientes:

Función  $S$ :

$$K_m = 1/\bar{\sigma}(S)$$

$$GM = [1/(1 + K_m), 1/(1-K_m)] \quad (5.4)$$

$$PM = \pm 2 \sin^{-1}(K_m/2)$$

donde  $K_m \leq 1$ . La interpretación de la ecuación (5.4) es como sigue: las ganancias de los lazos pueden ser perturbados simultáneamente por las ganancias  $\Delta_i$  que satisfacen  $1/(1+K_m) < \Delta_i < 1/(1-K_m)$  sin desestabilizar al sistema en lazo cerrado. Esto es, el margen de ganancia superior es al menos tan grande como  $1/(1-K_m)$  y el margen de reducción de la ganancia tan pequeño como  $1/(1+K_m)$ . De forma similar, los lazos de realimentación pueden ser perturbados simultáneamente por fases  $\varphi_i$  que satisfacen  $\varphi_i < 2\sin^{-1}(K_m/2)$  sin que por ello se inestabilice el sistema en lazo cerrado. Los mejores márgenes de ganancia y de fase se obtienen cuando  $\bar{\sigma}(S) = 1$ , en que se tiene  $GM = [-6 \text{ dB}, +\infty \text{ dB}]$  y  $PM = [-60^\circ, 60^\circ]$ .

Las fórmulas que se aplican para calcular los márgenes de ganancia y de fase utilizando la función de sensibilidad complementaria, son las siguientes:

Función  $T$ :

$$K_m = 1/\bar{\sigma}(T)$$

$$GM = [1 - K_m, 1 + K_m] \quad (5.5)$$

$$PM = \pm 2 \sin^{-1}(K_m/2)$$

donde  $K_m \leq 1$ . La interpretación es similar a la realizada con la función de sensibilidad  $S$ . Los mejores márgenes se obtienen cuando  $\bar{\sigma}(T) = 1$  y son ahora  $GM = [-\infty \text{ dB}, 6 \text{ dB}]$  y  $PM = [-60^\circ, 60^\circ]$ .

Finalmente, las fórmulas que se utilizan para calcular los márgenes de ganancia y de fase cuando se utiliza la función de sensibilidad balanceada son:

Función  $S+T$ :

$$K_m = 1/\bar{\sigma}(S+T)$$

$$GM = [(1-K_m)/(1+K_m), (1+K_m)/(1-K_m)] \quad (5.6)$$

$$PM = \pm 2 \tan^{-1}(K_m)$$

donde  $K_m \leq 1$ . La interpretación es similar al caso de la función de sensibilidad. Ahora el mejor margen de ganancia posible es  $GM = [-\infty \text{ dB}, +\infty \text{ dB}]$  y el de fase es  $PM = [-90^\circ, 90^\circ]$ , que se obtienen cuando  $\bar{\sigma}(S+T) = 1$ .

Estos márgenes son conservadores, una mejor aproximación se puede obtener reemplazando el máximo valor singular  $\bar{\sigma}$  por el valor singular estructurado  $\mu$ , Blight et al. (1994).

La descripción anterior sólo da una medida de la robustez. Esta información se puede utilizar en la fase de diseño de modo que la autoestructura se selecciona teniendo en cuenta los márgenes que se obtienen. Mediante un proceso iterativo se puede conseguir una estructura con buenos márgenes de estabilidad y que además cumpla las especificaciones de diseño. Las medidas se pueden utilizar también dentro de una función de coste en la que la autoestructura se elige dentro de un problema de optimización con restricciones.

#### 5.4 Aproximación Multimodal

El método se basa en producir un conjunto de modelos lineales en diferentes puntos de operación, Döll et al. (1977). Estos modelos se representan como  $(A_i, B_i, C_i)$ ,  $i = 1 \dots q$ . Con esta aproximación en lugar de asignar toda la autoestructura a un modelo lineal, se utiliza un modelo distinto para cada tripleta  $(\lambda_i, v_i, z_i)$  que se asigna. De esta manera se separan los modelos con autovalores especialmente sensibles, y se reasigna en cada modelo un modo relevante, con el fin de aumentar su robustez. Así, para un autovalor deseado  $\lambda_i$  y un modelo  $(A_i, B_i, C_i)$  se resuelve para  $v_i$ ,  $z_i$  la ecuación siguiente

$$\begin{pmatrix} A_i - \lambda_i I & -B_i \\ g_i^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0$$

Si el número de autovalores asignados es igual al número de salidas, la ganancia  $K$  se obtiene de la ecuación:

$$K \begin{bmatrix} C_1 v_1 & C_2 v_2 & \dots & C_q v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_q \end{bmatrix}$$

Si el número de autovalores asignados es superior al número de salidas, es necesario utilizar realimentación dinámica  $H(s)$ . Con cada autovalor a asignar y con cada modelo dinámico se utiliza la ecuación (4.31) de la sección 4.5. Se tiene ahora el conjunto de ecuaciones:

$$z_i = H(\lambda_i) C_i v_i, \quad i = 1 \dots q$$

## 6 Aspectos prácticos de la implementación

En Kautsky et al. (1985) se muestra que el subespacio en el que debe residir el autovector que se puede obtener  $v_i^d$  está dado también por el espacio nulo de  $U_{b1}^T (\lambda_i^d I - A)$ . El mejor método, desde el punto de vista numérico, para calcular los autovectores que se pueden obtener, consiste en calcular la proyección ortogonal del autovector deseado en el espacio nulo de esta matriz. La matriz  $U_l$  se obtiene de la descomposición en valores singulares de  $B$ ,

$$B = \begin{bmatrix} U_{b0} & U_{b1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_b V_b^T \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desde el punto de vista numérico el método más adecuado para determinar la matriz de realimentación es, suponiendo que  $D$  es una matriz nula,

$$K = -V_b \Sigma_b^{-1} U_{b0}^T (V \Lambda - A V) V_{n_y} \Sigma_{n_y}^{-1} U_{n_y,0}^T$$

donde la matriz  $B$  se descompone en valores singulares como se ha indicado anteriormente y donde la matriz  $CV$  se descompone también en valores singulares en la forma

$$CV = \begin{bmatrix} U_{p0} & U_{p1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_p V_p^T \\ 0 \end{pmatrix}$$

y donde  $V$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_i^a$  y  $\Lambda$  es la matriz diagonal de  $p \times p$  cuyas entradas son los autovalores deseados  $\lambda_i, i=1, \dots, p$ .

La ganancia de realimentación  $K$  conecta cada una de las salidas del sistema con cada una de las entradas, Sin embargo, en algunos casos puede ser necesario hacer cero a ciertos componentes de  $K$  de manera que se refleje físicamente ciertas realimentaciones no deseadas en el sistema. Con esto se consigue reducir la complejidad del controlador y aumentar su fiabilidad. En Andry et al. (1983) se muestra un método con el que se pueden especificar elementos nulos de la matriz de realimentación. En Calvo-Ramon (1986) se propone un método en el que se determina a priori que elementos de  $K$  se deben de anular, basándose en la sensibilidad de los autovalores a cambios en las ganancias de realimentación. Con ello consigue reducir al mínimo el efecto sobre los autovalores de la autoestructura deseada. Sin embargo no tienen en cuenta el efecto sobre los autovectores. Sobel et al. (1990) se extienden los resultados de Calvo-Ramon para deducir las ganancias que se pueden anular teniendo en cuenta la sensibilidad tanto de los autovalores como de los autovectores.

En algunos casos las interacciones modales pueden estar acopladas con la robustez del sistema y con el esfuerzo de control, lo que hace que la selección de la autoestructura más adecuada se obtenga mediante un proceso iterativo.

## 7 Aplicaciones

Sobel et al. (1994) aplican el método de asignación de autoestructura a la dinámica lateral linealizada del F-18 High Angle of Attack Research Vehicle (HARV). Utilizan MATLAB para calcular los autovectores obtenibles. En este trabajo también se realiza el diseño de un controlador robusto muestreado para la maniobra de traslación lateral del Flight Propulsion Control Coupling (FPCC) aircraft. Para obtener un controlador robusto utilizan el método de Piou et al. (1992).

En Lin (1994) se utiliza este método para el control lateral en condiciones de vuelo de crucero del avión L-1011. Aplican un proceso iterativo basado en el método  $H_\infty$  para producir pequeñas mejoras en la robustez.

En White (1993) se dan varios algoritmos para la asignación de autoestructuras y se realiza su implementación con MATLAB. Los algoritmos se aplican al control de un modelo lineal del movimiento lateral de un avión de caza-entrenamiento MS760 Paris.

En Patton et al. (1994) se presenta un método de asignación de autoestructura para reducir la sensibilidad del método frente a variaciones de los parámetros utilizando el método de la desigualdades. El método lo aplican también al control de la dinámica lateral del L-1011.

Burrows et al. (1989) proponen el aumento en la estabilidad de un avión ligero utilizando el método de asignación de autoestructura con la optimización del número de condición de la matriz modal.

En Schutlz & Inman (1994) aplican el método de asignación de autoestructura junto con optimización del sistema en lazo cerrado con la minimización de una norma relacionada con las ganancias de realimentación del sistema. Aplican el método al control de dos sistemas mecánicos.

En Lu et al. (1993) diseñan un control descentralizado de asignación de autoestructura. Utilizan el método en el control de sistemas de potencia.

## **Referencias**

- Andry, A.N., Shapiro, E.Y., Chung, J.C., "Eigenstructure assignment for linear systems." IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. AES-19, pp. 711-729, Sept. 1983.
- Burrows, S.P., Patton, R.J., Szymansky, E. "Robust eigenstructure assignment with a control design package." IEEE Control Systems Magazine, vol. 9, pp. 29-32, 1989.
- Calvo-Ramon, J.R. "Eigenstructure assignment by output feedback and residue analysis". IEEE Trans. Auto. Control, 31, 247-249. 1986.
- Döll, C., Magni, J.F. and Le Gorrec, Y. "RCAM Design Challenge Presentation Document: A Modal Control Approach". GARTEUR/TP-088-12, 1997.
- Kautsky, J., Nichols, N.K., Van Dooren, P., "Robust pole assignment in linear state feedback." Int. J. Contr., vol. 41, pp. 1129-1155, 1985.
- Lin, C.F., "Advanced control design." Chapt. 3. Prentice Hall, 1994.
- Lu, J., Chiang, H.D. and Thorp, J.S. "Eigenstructure assignment by decentralized feedback control". IEEE Trans. Auto. Control, vol. 38, n° 4, pp. 587-594, 1993.
- Moore, B.C., "On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed-loop eigenvalue assignment. " IEEE Trans. Autom. Contr., vol AC-21, pp. 659-692, 1976.
- Patton, R.J., Liu, G.P., Chen, J. "Multiobjective controller design using eigenstructure assignment and the method of inequalities." Journal of Guidance, Control and Dynamics. vol. 17, pp. 862-864, 1994.
- Piou, J.E., Sobel, K.M., Shapiro, E.Y., "Robust Lyapunov constrained sampled data eigenstructure assignment using the delta operator with application to flight control design." Proc. First IEEE Conference on Control Applications, pp. 1000-1005, 1992.
- Schulz, M.J. and Inman, D.J. "Eigenstructure assignment and controller optimization for mechanical systems". IEEE Trans. Control Syst. Tech., vol. 2, n° 2, pp.88-100,1994.
- Sobel, K.M., Shapiro, E.Y., Andry, A.N., "Eigenstructure assignment." Int. J. Contr., vol. 59, n° 1, 13-37, 1994.
- Sobel, K.M., Yu, W., Lallman, F.J., "Eigenstructure assignment with gain suppression using eigenvalue and eigenvectors derivatives." Journal of Guidance, Control and Dynamics. vol. 13, pp. 1008-1013, 1990.
- Srinathkumar, S., "Eigenvalue/eigenvector assignment using output feedback". IEEE Trans. Autom. Contr., vol. AC-23, pp. 79-81, 1978.
- White, B.A. "Eigenstructure assignment for aerospace applications." In "MATLAB toolboxes and applications for control". Edited Chipperfield, A.J. and Fleming, P.J. Chapter 11. Peter Peregrinus, 1993.
- Wilkinson, J.H. "The Algebraic Eigenvalue Problem". Monographs on Numerical Analysis. Clarendon Press, Oxford, 1965.

## Apendice A Valores Singulares

Los valores singulares de una matriz  $A \in C^{m \times n}$  se representan por  $\sigma_i(A)$  y se definen como

$$\sigma_i(A) \equiv \lambda_i^{1/2}(A^H A) = \lambda_i^{1/2}(AA^H) \quad (\text{A.1})$$

donde  $A^H$  representa la traspuesta complejo conjugada de la matriz  $A$ , y  $\lambda_i(A^H A)$  es el  $i$ -ésimo mayor autovalor de la matriz  $A^H A$  y  $\lambda_i(AA^H)$  es el  $i$ -ésimo mayor autovalor de la matriz  $AA^H$ .

Una de las descomposiciones matriciales más utilizadas en cálculos con matrices es la denominada descomposición en valores singulares (SVD) y está dada por el siguiente teorema.

**Teorema 1.** Si  $A \in C^{m \times n}$  entonces existen matrices unitarias

$$U \equiv [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m] \in C^{m \times m} \quad (\text{A.2})$$

y

$$V \equiv [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \in C^{n \times n} \quad (\text{A.3})$$

tales que

$$A = U \Sigma V^H = \sum_{i=1}^p \sigma_i(A) u_i v_i^H \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p); \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \quad p = \min\{m, n\}.$$

Recordamos que una matriz  $U \in C^{n \times n}$  definida sobre el cuerpo de los números complejos es unitaria si verifica  $U^H U = U U^H = I_n$ . Si está definida sobre el cuerpo de los números reales se denomina ortogonal. Las matrices ortogonales representan rotaciones en  $R^n$ .

De la ecuación (A.4) es fácil deducir que se verifica:

$$Av_i = \sigma_i u_i \quad (\text{A.5a})$$

$$A^H u_i = \sigma_i v_i \quad (\text{A.5b})$$

La descomposición en valores singulares tiene la siguiente interpretación, por la ecuación (A.5a) vemos que cualquier transformación lineal *gira* ( $v_i \rightarrow u_i$ ) y *escala* ( $u_i \rightarrow \sigma_i u_i$ ).

Si consideramos  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $S$  la esfera de radio unidad, la aplicación  $A(S) = \{y: y = Ax, \|x\|_2 = 1\}$  es un elipsoide cuyos ejes principales están en la dirección de los  $u_i$  y tienen una longitud  $\sigma_i$ . Según la ecuación (A.5a) los vectores  $v_i$  son aquellos vectores de la esfera unidad que se transforman en los puntos de los semiejes del elipsoide.

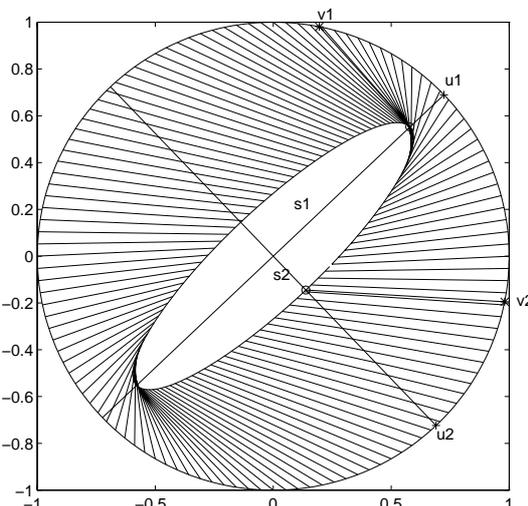


Fig. 7 Transformación del círculo unidad en un elipsoide bajo la aplicación de la matriz  $A$

**Corolario 1.** Si la matriz  $A$  tiene la descomposición en valores singulares dada por el Teorema 1 y tiene rango  $r$ , entonces

a)  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$

b)  $V = [V_1:V_2]$ ,  $V_1 \in \mathbb{C}^{n \times r}$ ,  $V_2 \in \mathbb{C}^{n \times (n-r)}$

las columnas de  $V_1$  forman una base ortonormal de  $R(A^H)$ :  $R(V_1) = R(A^H)$

las columnas de  $V_2$  forman una base ortonormal de  $N(A)$ :  $R(V_2) = N(A)$

las columnas de  $V$  forman una base ortonormal de autovectores de  $A^H A$

c)  $U = [U_1:U_2]$ ,  $U_1 \in \mathbb{C}^{m \times r}$ ,  $U_2 \in \mathbb{C}^{m \times (m-r)}$

las columnas de  $U_1$  forman una base ortonormal de  $R(A)$ :  $R(U_1) = R(A)$

las columnas de  $U_2$  forman una base ortonormal de  $N(A^H)$ :  $R(U_2) = N(A^H)$   
 las columnas de  $U$  forman una base ortonormal de autovectores de  $AA^H$

$$d) A = U_1 \Sigma_1 V_1^H = \prod_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^H, \quad \Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e) r = \text{rango}(AA^H) = \text{rango}(A^H) = \text{rango}(A^H A)$$

Los valores singulares máximo y mínimo, que representamos por  $\bar{\sigma}$  y  $\underline{\sigma}$ , respectivamente, se definen a veces de forma equivalente en términos de la norma matricial espectral  $\|\cdot\|_2$  como

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2$$

y

$$\underline{\sigma}(A) = \min_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

$$= \begin{cases} \left[ \|A^{-1}\|_2^{-1}, & \text{si } \det A \neq 0 \\ 0 & \text{si } \det A = 0 \end{cases}$$

Algunas propiedades de los valores singulares que facilitan su manipulación son las siguientes:

- $\underline{\sigma}(A) \leq \lambda(A) \leq \bar{\sigma}(A)$
- Si  $A^{-1}$  existe  $\underline{\sigma}(A) = 1/\bar{\sigma}(A^{-1})$
- Si  $A^{-1}$  existe  $\bar{\sigma}(A) = 1/\underline{\sigma}(A^{-1})$
- $\bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A)$
- $\bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$
- $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B)$
- $\underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(E) \leq \underline{\sigma}(A+E) \leq \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(E)$
- $\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma}(AB) \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\}$
- $\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \bar{\sigma}(A) \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|$

- $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{traza}(A^H A)$

Si tomamos ahora como matriz a  $G(s)$ , una matriz de transferencia entre una señal de entrada  $u(s)$  y una señal de salida  $y(s)$ , y hacemos  $s = j\omega$  ( $0 < \omega < \infty$ ) los valores singulares de  $G(j\omega)$  son función de la frecuencia y se denominan ganancias principales de  $G(s)$ . Ahora  $y(j\omega) = G(j\omega) u(j\omega)$  y se verifica

$$\underline{\sigma}(\omega) \leq \frac{\|y(j\omega)\|_2}{\|u(j\omega)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)u(j\omega)\|_2}{\|u(j\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(\omega)$$

luego la ganancia de un sistema multivariable está empaquetada entre la mayor y la menor de las ganancias principales.