LOGICAS MODALES PROPOSICIONALES NORMALES SIN INTERPOLACION.

H.J.MARRAUD
Dpto. de Lógica y Filosofía de la Ciencia
U.Autónoma. Madrid

Se sabe que el teorema de interpolación falla para algunas lógicas modales cuantificacionales (cfr. Fine, 1979).En esos casos el fallo puede ser atribuido a la interacción de cuantificadores y operadores modales. En esta artículo se describen varias lógicas modales proposicionales, bastante simples y con las propiedades metateóricas deseables, sin la propiedad de interpolación. La ausencia de interpolación en esas lógicas ha de explicarse, obviamente, en términos estrictamente modales.

Sea S una lógica modal proposicional y sear Var(α) el conjunto de las variables sentenciales que ocurren en la fórmula α. S tiene la **propiedad de interpolación** *syss* $\vdash\alpha\rightarrow\beta$ y Var(α) y Var(β) no son disjuntos, entonces hay alguna fórmula τ tal que Var(τ) está contenido en Var(α)$\cap$Var(β), $\vdash\alpha\rightarrow\tau$ y $\vdash\tau\rightarrow\beta$. En tal caso, diremos que la fórmula τ es interpolante entre α y β en S.

Dos propiedades intuitivamente ligadas a la interpolación son la uniformidad y la razonabilidad en sentido de Halldén. Siguiendo a Los y Suszko(1958), se dice que una lógica S es **uniforme** cuando para cualesquiera dos conjuntos de fórmulas Γ y Σ y cualquier fórmula α, si Var(Γ,α)$\cap$Var(Σ)=ϕ y además Σ es S-consistente, entonces si $\Gamma,\Sigma\vdash\alpha$, $\Gamma\vdash\alpha$.

Éndoxa: Series Filosóficas, nº 2, 1993, UNED, Madrid:
H.J.MARAUD: Lógicas proposicionales normales sin interpolación.
pp. 171-176

Una lógica S, cuyo lenguaje incorpora la disyunción, es **razonable** en sentido de Halldén(1951) syss, para cualesquiera fórmulas α y β, si $\vdash \alpha v \beta$ y $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \phi$ entonces o bien $\vdash \alpha$ o bien $\vdash \beta$.

En el contexto de las lógicas modales proposicionales normales, la uniformidad y la razonabilidad en sentido halldeniano son equivalentes.

PROPOSICION 1.

Toda lógica modal proposicional normal uniforme es razonable en sentido de Halldén.

DEMOSTRACION. Sean α y β dos fórmulas sin variables compartidas y tales que $\vdash \alpha v \beta$. Asímismo sea p una variable sin ocurrencias en β. En tal caso, $Var(\neg\alpha, p \& \neg p) \cap Var(\neg\beta) = \phi$ y $\neg\alpha, \neg\beta \vdash p \& \neg p$. Como por hipótesis S es uniforme, o bien $\vdash \alpha$ o bien 172 $\vdash \beta$.■

PROPOSICION 2.

Toda lógica modal proposicional normal razonable en sentido de Halldén es uniforme.

DEMOSTRACION. Si S no fuese uniforme, habría dos conjuntos de fórmulas, Γ y Σ, y una fórmula α, tales que (1) $Var(\Gamma, \alpha) \cap Var(\Sigma) = \phi$, (2) Σ es S-consistente, (3) $\Gamma, \Sigma \vdash \alpha$, y (4) no $\Gamma \vdash \alpha$. Puesto que la derivabilidad es finitaria, habría una colección finita de fórmulas $\delta_1, \ldots, \delta_n \varepsilon \Sigma$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_m \varepsilon \Gamma$, de modo que $\vdash \neg(\delta_1 \& \ldots \& \delta_n) v ((\Theta_1 \& \ldots \& \Theta_m) \rightarrow \alpha)$. Por (1), los dos disyuntos no comparten ninguna variable sentencial; por (4) y por monotonía, no $\vdash (\Theta_1 \& \ldots \& \Theta_m) \rightarrow \alpha$, y por (2), no $\vdash \neg(\delta_1 \& \ldots \& \delta_n)$. Así, si S no fuese uniforme, tampoco sería razonable en sentido de Halldén.■

La uniformidad y la razonabilidad en sentido de Halldén no proporcionan, empero, condiciones suficientes para la interpolación. La fórmula $(Lp\rightarrow Mp)vL(q\&\neg q)$ "dice" que todo punto o es un punto terminal o no lo es, y por tanto es una tesis de la lógica modal K, aunque ni $Lp\rightarrow Mp$ ni $L(q\&\neg q)$ lo son. Por ello, K no es uniforme, aunque, como demuestra Plaza(1988), sí tiene la propiedad de interpolación.

El teorema que viene a continuación clarifica algo las interconexiones entre uniformidad e interpolación en las lógicas modales.

TEOREMA 1.

Toda extensión de KD con la propiedad de interpolación es uniforme.

DEMOSTRACION. Supóngase que hubiera dos conjuntos Σ y Γ y una fórmula α tales que $Var(\Gamma,\alpha)\cap Var(\Sigma)=\phi$, Σ fuese S-consistente y $\Gamma,\Sigma\vdash\alpha$ sin que $\Gamma\vdash\alpha$. Por un argumento como el de la demostración de la proposición precedente se llegaría a $\Theta_1\&...\&\Theta_n\vdash(\delta_1\&...\&\delta_m)\rightarrow\alpha$. Adviértase que por la hipótesis inicial, los vocabularios de la conjunción de los δ_i, $1\leq i\leq m$, y de la conjunción de los Θ_j, $1\leq j\leq n$, son disjuntos. Sea p una variable sentencial ajena a esas dos fórmulas; resulta entonces: $(\Theta_1\&...\&\Theta_n)\&(pv\neg p)\vdash(\delta_1\&...\&\delta_m\rightarrow\alpha)v(p\&\neg p)$. Si el teorema de interpolación valiera para S, habría una fórmula interpolante σ, con p como única variable sentencial, de modo que $(\Theta_1\&...\&\Theta_n)\vdash\sigma\vdash(\delta_1\&...\&\delta_m\rightarrow\alpha)$.

Dada una fórmula ß, en la que no ocurren variables distintas de $q_1,...,q_k$, y k variables sentenciales $r_1,...,r_k$, ajenas a ß, sea T(ß) la fórmula resultante de reemplazar en ß cada ocurrencia de q_i por una ocurrencia de la fórmula $r_i v\neg r_i$, para todo i, $1\leq i\leq k$. Para extensiones de KD es fácil demostrar que una de las fórmulas T(ß), $\neg$T(ß) es una tesis (la restricción a extensiones de KD -es decir, semánticamente, la eliminación de puntos terminales- garantiza que si ß es una tesis también lo es Mß, y que si $\neg$ß es una tesis también lo es $\neg$Lß). Usando el método descrito se obtiene una nueva fórmula interpolante $T(\sigma)$, de manera que o bien $\vdash T(\sigma)$ o bien $\vdash \neg T(\sigma)$. En el primer caso, $\vdash (\delta 1 \& ... \& \delta m) \rightarrow \alpha$ y así $\Gamma \vdash \alpha$, contra la asunción inicial. En el segundo caso, si $\neg T(\sigma)$ fuese un teorema, Σ sería S-inconsistente, contradiciendo de nuevo las asunciones de partida. Por consiguiente, S es uniforme.■

Siguiendo la nomenclatura de Lemmon y Scott(1974) para las lógicas modales, que es la que se ha venido utilizando aquí, formaré el nombre de una lógica modal combinando los nombres de sus axiomas. Convengamos a este respecto que si F y F′ son dos fórmulas que no comparten ninguna variable sentencial, dFF′ designará su disyunción (o una fórmula equivalente a la misma).

Un corolario del teorema anterior es que lógicas como KDdTB y KTdB4 carecen de la propiedad de interpolación (e incluso que carecen de ella por no ser uniformes).

Semánticamente, el axioma (dTB) $\neg(p \rightarrow Mp) \rightarrow (q \rightarrow LMp)$ expresa la condición de primer-orden sobre marcos modales que viene a continuación: $(x)(xRx \vee (y)(xRy \rightarrow yRx))$, puesto que ese axioma equivale a $(p \rightarrow Mp) \vee (q \rightarrow LMq)$, la disyunción de dos fórmulas bien conocidas en lógica modal y que expresan, respectivamente, la reflexividad y la simetría de la relación de accesibilidad R. Aunque la formulación anterior tiene ciertas ventajas heurísticas, no deja de ser curioso que KdTB, y por ende KDdTB, puedan axiomatizarse igualmente como $K + p \rightarrow (Mp \vee LMp)$ y $KD + p \rightarrow (Mp \vee LMp)$, por medio de una fórmula que no exhibe ninguna disyuntividad de los vocabularios de su antecedente y su consecuente.

Por su parte, el axioma (dB4) $\neg(p \rightarrow LMp) \rightarrow (Lq \rightarrow LLq)$, equivalente a la disyunción de las fórmulas B y 4 (que expresa la transitividad de R, captura la condición de primer-orden sobre marcos: $(x)((y)(xRy \rightarrow yRx) \vee (y)(z)(xRy \,\&\, yRz \rightarrow xRz))$. Adviértase que en extensiones de KT tanto $(\neg(p \rightarrow LMp) \rightarrow (Lp \rightarrow LLp)) \equiv (Lp \rightarrow$-

LMp) como Lp→LMp son tesis, y que por consiguiente la disyuntividad de los vocabularios del antecendente y del consecuente de dB4 parece desempeñar un papel fundamental en la ausencia de interpolación en lógicas como KTdB4. Estas consideraciones muestran asímismo que KDdTB y KTdB4 tienen propiedades muy deseables: son completas, canónicas, de primer-orden y finitamente axiomatizables. Además, se demuestra del modo usual que tiene la propiedad de disyunción y la propiedad del modelo finito, y que por ello son decidibles.

El fallo del teorema de interpolación en lógicas más débiles que las mencionadas, como KdTB o KdB4, requiere ulteriores aclaraciones. La proposición siguiente es más o menos inmediata:

PROPOSICION 3.

Si S es una lógica modal proposicional normal con la propiedad de interpolación, entonces S + D también tiene la propiedad de interpolación.

DEMOSTRACION. Supóngase que el teorema de interpolación no valiera para SD pero sí para S. Habría entonces dos fórmulas α y ß tales que Var(α) y Var(ß) no serían disjuntos, y ß sería derivable de α en SD pero no en S. Defínase el rango modal de una fórmula τ por analogía con el rango cuantificacional: si τ es atómica, $RM(\tau)=0$; $RM(\neg\tau)=RM(\tau)$; $RM(\tau \circ \delta)=máx(RM(\tau),RM(\delta))$, siendo '$\circ$' cualquier operador booleano binario; y $RM(L\tau)=RM(M\tau)=RM(\tau)+1$. Sea entonces n = máx(RM(α),RM(ß)). Para cada entero m se define uan fórmula asociada Θ_m como sigue: sea p cualquier variable sentencial de la fórmula α; entonces $\Theta_0 = \neg L(p\&\neg p),\ldots,\Theta_{i+1}=\Theta_0\&\ldots\&\Theta_i\&\neg M_1\ldots M_m L(p\&\neg p)$. La fórmula Θ_m es tal que si se verifica en un punto w, no hay ningún punto terminal accesible desde w en a lo sumo m pasos. Por tanto, vía completud, $\alpha\&\Theta_n \vdash_s ß$, y puesto que todas las variables de Θ_n están en Var(α), hay una fórmula interpolante σ entre $\alpha\&\Theta_n$ y ß en S, y trivialmente $\alpha\&\Theta_n \vdash_{sd} \sigma \vdash_{sd} ß$.

Como quiera que α y $\alpha\&\Theta_n$ son SD-equivalentes y esta lógica es normal, y por ello cerrada bajo sustitución de equivalentes demostrados, σ es interpolante entre α y ß en SD.■

De esta proposición y del teorema 1 se desprende el siguiente útil corolario:

TEOREMA 2.

Si S es una lógica modal proposicional normal y SD no es uniforme, entonces S no tiene la propiedad de interpolación.

Este resultado proporciona un test para los fallos del teorema de interpolación en lógicas modales proposicionales normales, que autoriza a concluir, por ejemplo, que KdTB y KdB4 carecen de la propiedad de interpolación.

REFERENCIAS

FINE, K., 'Failures of the interpolation lemma in quantified modal logics'. *Journal of Symbolic Logic* 44(1979), págs.201-206.

HALLDEN, S., 'On the semantic non-completeness of certain Lewis calculi'. *Journal of Symbolic Logic* 16(1951), págs.127-129.

LEMMON, E. J. y SCOTT, D., *The 'Lemmon Notes':An Introduction to Modal Logic*. Ed. por K.Segerberg. Oxford, Basil Blackwell,1977.

LOS, J. y SUSZKO, R., 'Remarks on sentential logics'. *Indagationes Mathematicae 20(l958)*, págs.177-183.

PLAZA, J., 'The Craig interpolation lemma for certain modal logics', en *Logic Colloquium '86*, ed. por F.R.Drake y J.K.Truss. Amsterdam, North Holland, 1988.