INTRODUCCION HISTORICA A LA TEORIA DE LA METRIZACION. DOS LINEAS DE INVESTIGACION: AXIOMATICA Y MORFISMOS REALES, ESCALAS E INVARIANZAS. (I).

José A. DÍEZ CALZADA
U. Rovira i Virgili (Tarragona)

El objeto de este trabajo es reconstruir la evolución histórica de la Teoría de la Metrización (*Measurement Theory*). La reconstrucción no pretende ser exhaustiva, aunque sí relativamente completa y actualizada, comparativa-mente con las existentes en la literatura. En la TM se pueden distinguir dos períodos claramente diferenciados cuyo límite lo marca la publicación del trabajo fundacional Suppes 1951. En ese trabajo confluyen del modo adecuado dos líneas de investigación anteriores sobre fundamentos de medición que constituyen la primera etapa, o período de formación, de la teoría. Por un lado, los estudios sobre axiomática y morfismos reales de Helmholtz, Campbell y Hölder. Por otro, los trabajos sobre tipos de escalas y transformaciones realizados por Stevens y su escuela. Estas dos líneas de investigación son complementarias y entre ambas contienen todo lo necesario para desarrollar la teoría, pero son a la vez incompletas en sí mismas, pues cada una, sin lo que la otra desarrolla, es insuficiente. Es en Suppes 1951 donde confluyen del modo adecuado ambos enfoques y se encuentran por primera vez todos los elementos constitutivos de la teoría; con este trabajo fundacional se inicia por tanto la teoría "madura", sometida después a rápida evolución. Nuestra reconstrucción histórica se divide en dos partes, dedicadas respectivamente a cada uno de los dos períodos señalados: el de formación y el de madurez. Esta primera parte, que trata principalmente de

Éndoxa: Series Filosóficas, nº 2, 1993, UNED, Madrid:
José A.Díez Calzada: Introducción histórica a la teoría de la metrización (parteI).
pp. 207-236

las dos lineas de investigacion del periodo de formación, contiene además una introducción temática con el objetivo de fijar algunos conceptos, principalmente los de *medición* y *metrización*.

1.Introducción: medición y metrización.

Medir es asignar números a las cosas de modo que aquellos expresen ciertas propiedades que éstas exhiben. A estas propiedades, que se dan "según un más y un menos", las llamamos *magnitudes*. El análisis de la medición debe distinguir, por un lado, la asignación efectiva de valores a los objetos, y por otro, las condiciones que hacen posible tal asignación y que a la vez determinan el uso que podemos hacer de ella. Las asignaciones *se realizan*, siguiendo ciertos procedimientos. Las condiciones que las hacen posibles y determinan su uso, *se estudian*. La realización de las asignaciones y el estudio de sus condiciones de posibilidad son ambas tareas o actividades que corresponden a la ciencia. Pero son actividades de naturaleza diferente. La primera, *medir* propiamente dicho, es básicamente una actividad *práctica*, cuyo resultado es la asignación de una entidad a otra. La segunda, a la que llamaremos *metrizar*[1], es una actividad eminentemente *teórica*, cuyo resultado es la afirmación de que ciertas cosas son de cierto modo, e.e., la elaboración de una *theoria*.

Los procedimientos de medición pueden ser directos o indirectos. En la medición directa (o fundamental) asignamos, para una magnitud, valores a los objetos sin hacer uso de mediciones-asignaciones previas. Esto hay que entenderlo en un sentido amplio que dé cabida a la medición por comparación directa con un estándar. En sentido estricto, la única medición directa sería la que se realiza para el estándar, pues para asignar un valor a los

---

[1] A veces se llama metrización a la "introducción de un concepto métrico" (ver, más adelante, nota 6). En qué sentido nuestro uso del término coincide con, y difiere de, éste se discutirá en breve.

otros objetos comparándolos directamente con él se usa el valor asignado al estándar. Lo entenderemos aquí en sentido amplio. En la medición indirecta asignamos valores a los objetos haciendo uso de valores previos, bien de la misma magnitud para otros objetos, bien de otras magnitudes para el mismo objeto, bien de ambas cosas a la vez. A partir de los valores-asignaciones previamente conocidos, se obtiene el buscado "calculándolo" mediante aquellos valores y ciertas leyes.[2] Puedo medir la longitud final de una barra que se calienta a partir de su longitud inicial, su temperatura original y final (junto con el coeficiente de dilatación para el material) y la ley de dilatación. O puedo medir la masa de un cuerpo celeste a partir de la masa de un cohete, de su (cambio de) trayectoria y de ciertas leyes mecánicas.

La diferencia entre medición directa e indirecta es relativa a los *procedimientos*, no a las *magnitudes*. Una misma magnitud se puede medir unas veces directamente y otras indirectamente.[3] Pero, si no son magnitudes que se obtienen a partir de otras, al menos en algunos casos se han de medir directamente, por algún lugar "hemos de comenzar". Así, aunque las mediciones indirectas son las más comunes en la ciencia, y prácticamente las únicas "cuando la cosa ya está en marcha", desde un punto de vista conceptual las mediciones directas son tan importantes, si no más, que aquellas. Por otro lado, aunque al menos en algunos casos la medición ha de ser directa, no es posible en general hacerlo en todos los casos, para todo el rango de objetos que exhiben la magnitud. Mido directamente la masa poniendo objetos en una balanza, pero no todo objeto con esta propiedad se puede medir mediante este procedimiento, o mediante otro también directo; el único modo de

[2] Aquí usamos 'leyes' en sentido amplio, como sinónimo de 'enunciado legaliforme', esto es, significando tanto a leyes en sentido estricto como a definiciones.

[3] No sólo en el sentido de que para algunos objetos se mide directamente y para otros indirectamente, como ocurre con la masa; sino también en el de que ciertas magnitudes, como la densidad, podemos medirlas a veces sin hacer uso de otras, pero también podemos medirlas haciendo *siempre* uso de otras (si hacemos lo primero, sin embargo, la medición tiene propiedades más débiles).

medir la masa de algunos objetos (p.e. estelares) es utilizar procedimientos indirectos. En estos casos, la medición directa "entra en la magnitud" a través de unos pocos objetos y se expande al resto mediante las cadenas de medición indirecta a partir de aquéllos.

Esto por lo que se refiere a los procedimeintos de medición directos e indirectos. En cuanto a las condiciones de posibilidad, las de la medición indirecta se han sugerido ya en la caracterización informal de este tipo de medición. Lo que hace posible este tipo de medición es: por un lado, la existencia de mediciones previas conocidas tanto de la misma magnitud para otros objetos, como de otras magnitudes para el mismo objeto; y, por otro, la existencia de ciertas regularidades o leyes que vinculan los valores conocidos con el que se desea medir. El estudio de las condiciones que hacen posible la medición indirecta se divide pues en: el estudio de las condiciones que hacen posible las mediciones previas que en ella se usan; y el estudio de las leyes con cuya ayuda se obtiene el valor buscado. El primero nos retrotrae entonces a los procedimientos de medición con los que hemos realizado las mediciones previas. Si son procedimientos de medición indirectos, volvemos a empezar. Si son directos, el estudio de sus condiciones de posibilidad exige otro tratamiento. Por lo que se refiere a las leyes cuantitativas (y definiciones) involucradas en estos procedimientos, su estudio corresponde simplemente a las diversas teorías empíricas. Es sencillo pues ver por qué la literatura no se ha ocupado específicamente de la *fundamentación* de la medición indirecta.[4] Las condiciones que hacen posible este tipo de medición se retrotraen, en última instancia, a las que hacen posible la medición directa y a la existencia de leyes físicas. De lo primero se ocupa la metrización fundamental, lo segundo es el objeto de las teorías empíricas usuales.

[4] Salvo, quizás, en lo relativo a ese tipo especial de medición indirecta que involucra la introducción de una a partir de otras, e.e., a la teoría de la definición.

Llegamos pues en último término a la medición directa, y al estudio de las condiciones o hechos que la hacen posible, esto es, a esa actividad teoórica que llamamos *metrización fundamental*, cuyo resultado es una *theoria* en sentido amplio del término, la afirmación de que ciertas cosas son de cierto modo. Antes de introducirnos en la naturaleza de esta actividad teórica, y su historia, aclararemos el uso que hacemos del término 'metrizar'. Cuando se usa este término en la literatura (y se usa muy escasamente[5]) se suele querer significar "la introducción de un nuevo concepto cuantitativo (o concepto métrico)"[6], entendiendo por ello, en el caso de la metrización fundamental, la especificación de un criterio que permita representar numéricamente un orden cualitativo. Esta tarea se considera en general que tiene dos partes. La primera, investigar las condiciones que debe satisfacer un sistema cualitativo cualquiera para que sea posible la representación, probar que ellas son efectivamente suficientes y estudiar qué uso es legítimo hacer de una tal representación. La segunda, determinar el procedimiento de comparación cualitativo y el estándar con el que arbitrariamente se comienza a efectuar la asignación. Estas tareas son esencialmente diferentes. El uso que nosotros hacemos del término 'metrizar (fundamentalmente)' corresponde sólo a la primera, pues la segunda es parte de lo que hemos llamado 'procedimientos de medición'. Es esencial distinguir ambas cosas. Una vez lo hagamos, qué palabras usemos para cada una es lo de menos. Aquí usaremos las expresiones mencionadas en el sentido indicado al comienzo de este apartado.

2. Metrización fundamental.

---

[5] En ninguna de las principales monografías sobre *measurement theory* (Ellis 1966, Pfanzgl 1968, Krantz-Luce-Suppes-Tversky 1971, 1989 y 1990, Roberts 1979a y Narens 1985) aparece en el índice de conceptos.

[6] Cf. Stegmüller 1970, p. 64 y 128 (y en general, todo el c. 1). Otros lugares en que se usa son Hempel 1952 (aptd. 12), Berka 1983 (esp. c. 6, aptd. 3) y Mosterín 1978 p. 36.

Tengo (supongamos) un diamante frente a mí. Es pequeño, brillante, liviano, duro, bonito y caro. Si me piden que precise un poco más, podré decir que es muy pequeño, bastante liviano, muy, muy duro y carísimo. Puedo seguir precisando pero, por más que refine mis adjetivos, parece que siempre podré hacerlo un poco más (en casi todos los casos). Es un hecho notable que en cuanto responda dando las medidas del diamante para las propiedades que exhibe no se me exigirá ya mayor precisión. Sin embargo, como sabemos, ello no es posible para todas sus propiedades. Puedo decir que su volumen es x, su masa y, incluso que su dureza es z, pero no que su belleza es v. ¿Por qué? Tengo también un trozo de yeso ante mí. Es pequeño, mate, liviano, blando, feo y barato. Ambos son pequeños y livianos, aunque el yeso *no lo es tanto*. También ahora puedo precisar más hasta dar (cuando sea posible) sus medidas, y quizás me interese además compararlas con las del diamante. Puedo decir entonces que la masa del yeso es cien veces la del diamante mientras que su dureza es sólo la décima parte. Pero, es otro hecho notable que, mientras lo primero significa algo, lo segundo no. O, mejor dicho, que ambas cosas significan algo, pero sólo lo significado por la primera depende de los dos objetos exclusivamente. Ambas expresan un hecho numérico (el cociente de las masas es 100, el de las durezas 0.1) pero sólo el expresado por la primera representa un hecho relativo exclusivamente a los objetos. ¿Por qué?

Lo que hemos llamado "metrización fundamental" (una *theoria*, de momento en un sentido amplio del término) intenta responder a estos interrogantes investigando los hechos o condiciones que hacen posible la medición de una propiedad y el modo en que es posible usar la medida obtenida para hacer afirmaciones sobre los objetos. Según una primera caracterización, metrizar fundamentalmente una propiedad o atributo que se manifiesta en los objetos de cierto dominio es investigar las condiciones que debe satisfacer dicho dominio para que sea posible asignar, sin ayuda de otras asignaciones previas, números a los objetos de modo tal que ciertos hechos (matemáticamente comunes) concernientes a los números asignados representen adecuadamente hechos relevantes en relación con la propiedad, es decir, hechos que se dan entre los objetos que exhiben la propiedad *por* exhibir la propiedad. Esta caracterización provisional exige algunos comentarios.

En primer lugar, hablar de metrizar fundamentalmente[7] una propiedad es un tanto extraño. Las propiedades se miden y al metrizar investigamos cómo ello es posible. Ahora bien, las condiciones que se investigan en la metrización no dependen esencialmente de ninguna propiedad concreta, son condiciones generales que ha de satisfacer una propiedad *cualquiera* para ser susceptible de medición. Si en algún sentido se puede hablar de metrizar *una* propiedad concreta, por ello habría que entender, en todo caso, la investigación (empírica) sobre si tal propiedad satisface o no determinado grupo de condiciones.[8]

En segundo lugar, no hemos distinguido entre propiedades que se pueden medir y propiedades que no se pueden medir. Es tradicional llamar 'magnitudes' a las propiedades susceptibles de medición y distinguirlas del resto por su poder ejemplificarse en los objetos según "un más y un menos", en diverso grado.[9] El motivo de no usar esta distinción en nuestra caracterización es obvio: ella sólo tiene sentido preciso en relación a la metrización; al ocuparse ésta de los diversos grupos de condiciones de posibilidad de la medición de propiedades, una magnitud será cualquier propiedad que satisfaga tales condiciones.

En relación con lo anterior surge otra cuestión. Si hubiésemos caracterizado la metrización meramente como el análisis de las

---

[7] En adelante, y cuando no cause confusión, omitiré casi siempre las cualificaciones "fundamental" y "fundamentalmente" y escribiré sólo "metrización" y "metrizar".

[8] En realidad, como veremos, no se trata de un único grupo de "condiciones de posibilidad para la medición", sino de varios grupos de condiciones que, además, tienen consecuencias diferentes en cuanto a las propiedades de las mediciones-escala que posibilitan.

[9] Parecería entonces que, contra lo que sugerimos, la belleza es también una magnitud. La cuestión es que ese "darse según un más y un menos" ha de atenerse a ciertas condiciones para que la magnitud sea representable. Y parece que la belleza, en sentido objetivo, no se atiene. Otra cosa es su sentido subjetivo, muy próximo al de la preferencia.

condiciones que hacen posible la asignación de números a objetos que exhiben una propiedad, no habría obviamente nada que analizar, pues bajo cualesquiera condiciones es posible asignar números a cualquier dominio de objetos. Por eso es (lo) esencial el añadido 'de modo tal que...'. No toda asignación se considera una medición y la teoría de la metrización debe hacer precisa esa restricción adicional. Los objetos conforman ciertos hechos, algunos de los cuales *se deberán a* la propiedad que se desea medir. La asignación numérica debe *representar* esos hechos, expresarlos numéricamente. Esto no es todavía una restricción interesante pues se puede lograr siempre con la única condición de que haya al menos tantos números como objetos: tengo cierto hecho conformado con los objetos, asigno (si hay números suficientes) un número a cada objeto, a continuación *defino* arbitrariamente propiedades de y relaciones entre números que repliquen a las de los objetos, de este modo obtengo "hechos numéricos" que "expresan" los estados de cosas entre objetos. Está claro que esto no es lo que buscamos, todo lo que hemos hecho ha sido simplemente redenominar nuestros objetos. Los hechos numéricos representantes deben ser "matemáticamente comunes", constituidos por propiedades y relaciones numéricas conocidas y, en algún sentido, naturales; de otra forma la supuesta medición no tiene ningún sentido ni utilidad. Esta restricción es ya efectiva pues no todo estado de cosas entre los objetos se deja representar así, hay condiciones que los sistemas deben cumplir y la metrización se torna una tarea interesante.

Sin embargo, esas condiciones pueden ser muy débiles y dar lugar a representaciones "poco útiles". Ahora aparece la otra cara de la cuestión. Una vez tengo una representación adecuada (con propiedades y relaciones numéricas conocidas), de los números asignados son verdad ciertos enunciados matemáticos. Pues bien, no todos ellos se pueden considerar *significativos* para nuestros objetos, no todos los hechos numéricos que ellos expresan representan estados de cosas concernientes sólo a los objetos y la propiedad. Esto es esencial pues, cuantos más sean los tipos de enunciados numéricos significativos, más útil será la medición. Y es efectivamente la otra cara de la moneda ya que cuanto más estrictas son las condiciones de posibilidad de la representación (y ya vimos que hay varios grupos de tales condiciones) mayor es el ámbito de significatividad. Así, es ciertamente posible encontrar representaciones adecuadas bajo condiciones muy débiles, pero en esos casos la significatividad es muy escasa y, con ella, también lo es la utilidad de la medición.

Por último, la representación numérica lo es de los hechos que conforman los objetos, obviamente no de todos sino de aquellos hechos que involucran la propiedad a medir, los estados de cosas que se dan entre los objetos *por* ejemplificar la propiedad. Puesto que la propiedad a medir es (en sentido intuitivo) una que ejemplifican los objetos según "un más y un menos", los hechos a representar serán *comparativos*, hechos relacionales que se dan entre los objetos como consecuencia de poseer la propiedad en mayor o menor grado. Los hechos a representar no pueden ser del tipo "tal objeto tiene tanto (=nº) de P" pues ese "tanto" es el resultado de la representación numérica.

Hasta aquí la caracterización introductoria y grosera de esa actividad teórica que hemos llamado *metrización fundamental*. El resultado de esta actividad es, en un sentido todavía amplio del término, una teoría, la teoría de la metrización. Pasemos ya al objetivo principal de este trabajo, la reconstrucción de su historia.

3. Helmholtz: semejanza y aditividad.

Es usual considerar el ensayo de Helmholtz 'Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachten'[10], publicado en 1887, como la primera contribución teórica a las cuestiones relacionadas con la medición. Y efectivamente, en lo que a nosotros nos ocupa

[10] Las referencias que se hagan serán, cuando no se indique lo contrario, de la versión inglesa.

ahora, es en este escrito donde por primera vez (hasta donde conozco) aparece explícitamente formulada la pregunta por las condiciones que hacen posible la medición[11].

Helmholtz llama *magnitud* a "los atributos de los objetos que, cuando se comparan con otros similares, dan lugar a la distinción entre mayor, semejante y menor"[12]. Si expresamos atributos mediante números, éstos son el *valor* de la magnitud, y el procedimiento por el que encontramos los valores es la *medición* de la magnitud. Tras ello plantea explícitamente la cuestión que nos va a ocupar: "deberemos investigar en qué circunstancias podemos expresar magnitudes mediante números"[13]. En mi opinión, con esta cuestión se inaugura lo que más adelante llamaremos Teoría de la Metrización Fundamental.

La investigación, afirma Helmholtz, debe comenzar con el concepto de **semejanza.**[14] La semejanza, "relación que puede existir entre los atributos de dos objetos", viene caracterizada por dos propiedades, (las que hoy llamamos) simetría y transitividad (pp. 88-89). A la semejanza entre atributos comparables de dos objetos se llega por observación de ciertos resultados factuales al interactuar los objetos en condiciones apropiadas, y al procedimiento por el cual se ponen los objetos en las condiciones apropiadas para observar el resultado se le llama *método de comparación*.

---

[11] La atención que le vamos a prestar es un tanto desproporcionada, sobre todo por la escasez de resultados técnicos en relación con otros autores, pero nos parece justificada por la riqueza de las cuestiones que plantea.

[12] Op. cit. p. 89.

[13] Op. cit. p. 89. Omito aquí cierta cualificación que hace Helmholtz (y que se mantiene en la traducción inglesa) de los números en este contexto. En el original alemán a estos números se les llama 'benannte Zahl', números denominados (el traductor escribe 'denominate numbers' aunque señala que sería más natural usar 'concrete numbers', si bien no encaja tampoco plenamente con la caracterización que hace Helmholtz de ellos (cf. p. 84 del original alemán).

[14] *Gleichheit* en el original alemán, *alikeness* en la traducción inglesa.

Así, las magnitudes que exhiben dos objetos son semejantes si (1) el resultado que se observa al aplicar el método de comparación a los dos objetos no se altera al invertir el orden de los objetos y (2) ambos objetos dan siempre el mismo resultado cuando cada uno se compara con un mismo tercer objeto. El concepto de **semejanza en magnitud** parece ser aquí un concepto teórico destinado a explicar ciertas propiedades observadas en los resultados de un método de comparación.[15] Así concebidas es obvio que dos magnitudes semejantes (en realidad, dos objetos con magnitudes semejantes) son intercambiables en cuanto al procedimiento de comparación, se pueden sustituir entre sí sin alterar los resultados del procedimiento, pues justamente nos basamos en ello para determinar su semejanza (p. 90). Más interesante es el hecho de que sean también intercambiables en otros respectos, en otros fenómenos. Estos otros fenómenos que se preservan sustituyendo magnitudes semejantes se consideran entonces efectos del atributo en cuestión, "empíricamente dependientes sólo del atributo" (p. 91).

Con el concepto de semejanza (y el de desemejanza, por él implicado) se puede elucidar ahora el de magnitudes del mismo tipo u homogéneas: "A las magnitudes cuya semejanza o desemejanza se decide por el mismo método de comparación las llamamos 'del mismo tipo' ['gleichartig' en el original alemán, esto es, 'homogéneas']" (p. 91). Tipo de magnitud así entendido es lo que hoy llamamos magnitud, el atributo mismo susceptible de medición (p.e. la masa). Helmholth presenta a continuación algunos ejemplos de tales atributos (peso, longitud, duración y otros) y de bien conocidos procedimientos de comparación para determinar la semejanza en relación a ellos (equilibrio, congruencia, simultaneidad...).

La comparación de magnitudes discutida hasta aquí sólo permite decir si son semejantes o no pero, si son desemejantes, no

[15] Las propiedades de simetría y transitividad "determinan qué relaciones físicas podemos considerar como de semejanza" (p. 94).

da lugar a ninguna medida de su diferencia. Si las magnitudes han de ser *completamente especificables* mediante números, "el mayor de ellos ha de ser visto como la suma del menor y su diferencia"(p. 94). Para ello es necesario que exista alguna conexión o conjunción física "entre magnitudes del mismo tipo que sea semejante a la adición" (p. 94). Es curioso que Helmholtz se plantee directamente el problema de la aditividad sin haberse detenido antes en la cuestión del orden, pues sólo si el procedimiento da lugar a cierto orden entre las magnitudes se puede hablar de la mayor y de la menor de dos desemejantes y plantear el problema de la aditividad en los términos en que lo hace. La existencia de un orden no se sigue de sus condiciones[16]; las condiciones que exige a la semejanza no impiden, por ejemplo, que se observe el mismo hecho para dos magnitudes desemejantes cuando éstas se intercambian, esto es, no implica la existencia de una relación asimétrica entre magnitudes desemejantes. Veremos enseguida cómo analiza "mayor que" tras ocuparse de la conjunción.

Para que la conjunción física de magnitudes (lease objetos con magnitud) sea semejante a la adición ha de satisfacer tres condiciones. (1) Las magnitudes han de ser del mismo tipo (del mismo atributo). Dado cómo ha caracterizado el tipo de una magnitud, esta condición sólo es interesante si en la conjunción entran tres o más, pues lo que esta condición exige es que el procedimiento que decide la semejanza o no de cada dos de ellas sea el mismo en todos los casos, y esto sólo es restrictivo si se combinan más de dos. Helmholtz considera evidente que de esta condición se sigue la sustitutividad: el resultado de la conjunción no se altera (léase es semejante) al intercambiar una magnitud por otra semejante. En realidad es difícil que se siga, a no ser que se establezca una relación previa entre la conjunción y la semejanza. Consideraremos pues a la pretendida consecuencia como la primera condición que, si usamos '$\sim$' para denotar la semejanza y '$\circ$' la conjunción, tiene

[16] "El método de comparación descrito sólo nos dice si las magnitudes son semejantes o desemejantes" (p. 96).

la forma: si a~b entonces (aOc)~(bOc) (~monotonía de O). (2) La conjunción ha de ser ~conmutativa: (aOb)~(bOa). Y (3) "asociativa" (sic, p. 95): el resultado no se altera (es semejante) al sustituir algunas magnitudes conjuntadas por otras semejantes. Este uso del término 'asociativo' difiere del usual, pues la condición a que él se refiere es: si (aOb)~c entonces ((aOb)Od)~(cOd). Helmholtz señala que (3) se sigue de las anteriores, y efectivamente es redundante pues es un caso particular de (1) (tal como aquí se ha entendido).

Es ahora cuando se refiere al orden: del método de conjunción "se sigue cuál es mayor y cuál es menor [...], el todo es mayor que las partes componentes"[17]; aOb es mayor que a y que b. Es obvio que ello no se puede considerar una definición de "mayor que" para dos magnitudes *cualesquiera*, pues no queda definida para pares de objetos no compuestos, pero sugiere una (que no menciona explícitamente Helmholtz): aMb syss_{df} hay c tal que a~bOc.[18] Así definida, sin embargo, no se sigue de las condiciones anteriores que la relación M sea asimétrica,[19] con lo que difícilmente puede hacer las veces de "mayor que", pues a esta relación entre magnitudes ha de corresponder la relación > entre los números que a ellas se asignan. Será necesario, contrariamente a lo que pretende Helmholtz, tomar una relación M asimétrica, transitiva, ~conexa (o aMb o a~b o bMa) y ~conservativa (si aMb y a~c entonces cMb) como primitivamente determinada por el procedimiento de comparación, y añadir como nueva condición,

---

17 p. 96. Inmediatamente a continuación añade, respecto de los ejemplos de magnitudes citados anteriormente, que "nunca hemos dudado acerca de cuál era mayor y cual menor, *porque* conocíamos de hecho métodos para conjuntarlas" (la cursiva es mía).

18 Nótese que esta definición sólo define "mayor (estrictamente) que" si no hay elemento neutro para la operación **O**, si no hay c tal que a**O**c~a. Si pudiese haberlo, la definición debería ser "... syss hay c tal que a~b**O**c y no a**O**c~a".

19 Y se debería seguir, a no ser que se introduzcan tras la definición axiomas adicionales, lo que no hace Helmholtz.

positividad, el hecho que menciona: $a \circ bMa$ y $a \circ bMb$. Estas condiciones caracterizan la "adición física". Si una conjunción física es o no aditiva sólo se puede saber empíricamente, lo será si tal conjunción satisface las condiciones "definicionales" impuestas[20].

Acabaremos mencionando tres observaciones adicionales, de interés para la metrización fundamental, que hace Helmholtz. La primera (que a la vez tiene que ver con la metrización derivada, tema del que, aunque brevemente, también se ocupa, si bien no nos detendremos ahora en él) es que hay casos en que es posible encontrar dos conjunciones aditivas diferentes, lo que sugiere la presencia de dos (tipos de) magnitudes, y para las cuales, sin embargo, el método de comparación que determina la semejanza en cada una de ellas es el mismo. "Mediante exactamente el mismo método de comparación determinamos si dos espirales son semejantes en resistencia eléctrica y si son semejantes en conductancia", pero la conexión de las espirales en serie es aditiva sólo para la primera y en paralelo lo es sólo para la segunda (pp. 96-97) (lo mismo ocurre en los condensadores para su capacidad y su voltaje). Lo curioso es que la caracterización que ha hecho del tipo de una magnitud parece implicar que son del mismo tipo (el mismo atributo), pues la semejanza en cada una se determina por el mismo procedimiento. Si del procedimiento se exigiera, como vimos que era razonable, que determinara también el orden "mayor que" no habría problema pues los órdenes son inversos.

Segundo, Helmholtz menciona la medición "por componentes" (vectorial) como un tipo peculiar de medición que supone la

[20] Creo que la ~conexión y la ~conservación de M se pueden considerar presentes en el trabajo de Helmholtz, sólo que oscurecidas por su pretensión de derivar M de ~ y $\circ$. Más forzado sería considerar ya aquí presente la M-monotonía de $\circ$ (si aMb entonces $a \circ cMb \circ c$), aunque, como hemos visto, la ~monotonía se exige explícitamente. Así mismo parecería forzado transformar sus palabras "el mayor de los números puede ser visto como la suma del menor y de su diferencia" en una afirmación sobre las magnitudes y ver en ella entonces una formulación explícita de la condición de resolubilidad (*solvability*): si aMb entonces hay c tal que $a \sim b \circ c$ (la conversa se sigue de la positividad de $\circ$ y la ~conservación de M).

posibilidad de conjuntar aditivamente magnitudes de diferente tipo (cada una de las componentes) mediante una única operación física sobre los objetos que las poseen, y cita como ejemplos los casos de la velocidad, la aceleración, la fuerza y algunos otros (entre los que incluye el color, según la teoría de los tres componentes). Helmholtz titula este parágrafo "La adición de magnitudes de diferente tipo" (p. 99), pero es obvio que con ello no pretende sugerir que se puedan conjuntar magnitudes de un tipo con magnitudes de otro(s). Se trata sólo de la adición simultanea de diferentes magnitudes, cada una con las de su tipo, mediante un mismo modo de combinación física. El tipo de representación aquí involucrado es lo que más adelante se llamará *representación multidimensional*.[21]

Por último, aunque en ningún momento trata formalmente la cuestión de si sus condiciones son necesarias y/o suficientes para que las magnitudes sean "completamente especificables" mediante números, sí menciona explícitamente el hecho de que los números así obtenidos "sólo tienen un valor proporcional" (p. 89). Esto es, no tienen valor absoluto, sólo tienen valor, en tanto que especificación de las magnitudes, cuando con ellos se expresan proporciones o razones. Ahora bien, añade, se pueden usar absolutamente cuando se relativizan al valor de la magnitud para un objeto estándar arbitrariamente elegido (unidad).

4. Hölder: axiomática y morfismos reales.

El primero en estudiar formalmente las condiciones necesarias y/o suficientes para que ciertos hechos, relativos a la "cantidad", entre los elementos de un conjunto se puedan expresar numérica-

[21] No es claro, sin embargo, que en los ejemplos mencionados por Helmholtz se trate de combinación simultánea de magnitudes *diferentes*.

mente fue Hölder[22]. Por tales hechos se entiende aquí los que corresponden a cierta relación (de orden) y a cierta operación (de concatenación), entre los elementos. Los objetos numéricos que se les asigna a éstos son reales positivos. Los "hechos numéricos" con los que se expresan los que se dan entre los objetos son los correspondientes a la relación ≥ y a la operación + entre reales positivos. Y la "expresión" consiste en una traducción completa, esto es, en un isomorfismo. Hölder ofrece siete condiciones o axiomas que deben satisfacer tales conjunto, relación y operación para que exista un isomorfismo *sobre* (no sólo *en*) los reales positivos con ≥ y + (este resultado es lo que conoce como Teorema de Hölder). Entre ellas, presenta explícitamente las de *resolubilidad* (si un objeto es anterior a otro hay un tercero que concatenado con el primero resulta equivalente al segundo) y *arquimedianidad* (o axioma arquimediano: si un objeto es anterior a otro, concatenándolo consigo mismo un número finito de veces podemos superar al segundo, esto es, ningún elemento supera "infinitamente" a otro). El Teorema de Hölder es puramente matemático y su importancia empírica es escasa, pues las condiciones que impone son excesivas desde un punto de vista empírico[23] (en especial una semejante a la Dedekind-completud). Para la medición no es esencial (antes al contrario) que todo real corresponda a la magnitud de un objeto, ni parece razonable excluir que dos objetos tengan la misma magnitud (la exclusión se sigue de que la asignación es in isomorfismo, es decir, biunívoca; aunque esta cuestión es menos importante pues las condiciones se pueden considerar referidas a las clases de equivalencia).

---

[22] Cf. Hölder 1901. Por la misma época, Huntington se propone una tarea parecida (Huntington 1902), pero fue la de Hólder la que marcó la pauta de las investigaciones posteriores. En la misma dirección, aunque mucho más tardío, se sitúa Wiener 1921.

[23] Sus axiomas constituyen lo que hoy día se llama, en teoría de modelos, una teoría categórica: todas sus realizaciones son isomorfas, y isomorfas por tanto al semigrupo aditivo de los reales positivos.

Los resultados de Hölder, adecuadamente modificados para que sean aplicables a situaciones empíricas, constituyen el núcleo de la mayoría de los análisis posteriores sobre las condiciones que hacen posible la medición aditiva. En adelante se considerará que tal análisis consiste básicamente en el establecimiento de los axiomas que debe satisfacer un sistema empírico para que exista un (no necesariamente *iso*, bastará en general que sea *homo*) morfismo de tal sistema *en* (no necesariamente *sobre*) los reales. La medición aditiva es el paradigma de medición, y el análisis de sus condiciones lo es de la metrización. Por ello, el "espíritu" del trabajo de Hölder, la búsqueda de condiciones para un morfismo real, inspirará también el análisis de otros tipos de medición. No es de extrañar entonces que la investigación en metrización parezca muchas veces una tarea puramente matemática.

5. Campbell: orden y aditividad.

Resulta curioso que quien universalmente es considerado como el padre de la teoría de la medición, N. Campbell, no mencione en su obra más importante[24], escrita casi veinte años después, los resultados de Hölder. Este hecho quizás se deba a la orientación preferentemente filosófica, y no matemática, de su trabajo. Campbell dedica toda la segunda parte de su libro, que originalmente debía contener cuatro partes, de las que sólo consumó las dos primeras, al estudio de la medición. Su trabajo se ocupa, por primera vez y de forma sistemática, de prácticamente todas las cuestiones relacionadas con la medición y, entre ellas, de las condiciones que hacen posible la medición fundamental. Esta es la que nos interesa ahora.

[24] Campbell 1920, reeditado como Campbell 1957, por la que se cita.

Campbell caracteriza la medición como "el proceso de asignar números para representar cualidades"[25] y se plantea explícitamente la cuestión que nos ocupa :"¿Por qué podemos medir algunas propiedades de los cuerpos y no otras?"[26]. La respuesta es, básicamente, que las propiedades medibles de los cuerpos deben parecerse en algún sentido especial a las de los números[27]. Cuál es ese sentido es lo que hay que precisar.

La primera condición para la medición es que la propiedad genere una relación asimétrica y transitiva, esto es, de orden, entre los objetos que la poseen. Además, la relación ha de ser tal que, si no conecta dos objetos, éstos se relacionan del mismo modo con los restantes: (utilizando las convenciones anteriores) si no aMb y no bMa entonces aMc syss bMc. Los objetos no conectados por la relación se consideran "iguales respecto de la propiedad"[28]. Una relación que satisfaga esas tres propiedades permite definir otra de semejanza o indiferencia ~: a~b syss$_{df}$ no aMb y no bMa. Es fácil ver que, así definida, ~ es una relación de equivalencia y M es ~conservativa y ~conexa.

La satisfacción de estas condiciones permite ya una cierta representación numérica "empíricamente informativa". Tal es el caso de la dureza y la densidad (si ésta se mide sin ayuda de otras magnitudes). Este tipo de representación es, sin embargo, escasamente informativa pues la diferencia entre los números asignados "no representa la diferencia física"[29]. Para que ello sea posible es

---

[25] Campbell 1920 p. 267; cf. también Campbell 1921 p. 110: "[la medición] puede ser definida, en general, como la asignación de números para representar propiedades".

[26] Campbell 1920 p. 268; cf. también Campbell 1921 p. 111.

[27] Campbell 1921 p. 112.

[28] Campbell 1920 p. 273; cf. también Cambell 1928 p. 5.

[29] Campbell 1920 p. 274.

necesario que la adición tenga una interpretación física, debe haber un modo de combinar los objetos cuyo resultado para la propiedad remede las características de la adición numérica. Si lo hay, la propiedad se puede medir "perfecta y definitivamente"[30].

Campbell no siempre es uniforme en las condiciones que debe satisfacer la combinación física (de nuevo usaré '$\circ$') para que remede la adición, pero podemos extraer de los diversos lugares en que se ocupa de ellas las siguientes. (1) Positividad: $a \circ b M a$ (de ésta es un caso particular otra que también menciona: si $a \sim b$ entonces no $a \circ b \sim a$). (2) $\sim$-Conmutatividad y $\sim$-asociatividad. (3) $\sim$-monotonía y M-monotonía. (4) "Combinando objetos sucesivamente debemos ser capaces de formar una serie estándar [de objetos estándar, esto es, una combinación sucesiva de objetos semejantes] tal que cualquier otro objeto que queramos medir sea igual respecto de la propiedad a un término de la serie"[31] (esta condición, extremadamente fuerte, implica las -más débiles- de resolubilidad y arquimedianidad, más razonables empíricamente y suficientes para desempeñar la función por la que Campbell introduce ésta).

De nuevo, como en Helmholtz, si una combinación $\circ$ y comparación M físicas satisfacen o no estas condiciones es una cuestión que decide sólo la experiencia. Podría pensarse, dice

---

[30] "La diferencia entre aquellas propiedades que pueden medirse perfecta y definitivamente y aquellas que no, radica en la posibilidad o imposibilidad de encontrar en conexión con esas propiedades una interpretación física del proceso de adición" (Campbell 1920 pp. 277-278). Sobre si es adecuado hablar o no de medición en los casos no aditivos no vamos a detenernos ahora, pues en parte es una cuestión verbal. Como miembro de un comité de la *British Association for the Advancement of Science* encargado de analizar la posibilidad de la medición en psicología, Campbell desestima tal posibilidad por la ausencia de aditividad (Ferguson et al. 1940 p. 340; ver más adelante el siguiente apartado). Ya hemos visto que en otros lugares, sin embargo, habla de medición para meros órdenes (dureza).

[31] Campbell 1921 p. 117. En Campbell 1920 no la exige *explícitamente*, aunque ver, p.e., p. 280.

Campbell, que alguna de tales condiciones, por ejemplo para la medición del peso mediante balanza, se deduzcan, sin experimento, de principios conocidos, p. e. las leyes de la estática. Pero, continúa, la investigación muestra que nuestra creencia en la verdad de esas leyes se basa en nuestro conocimiento de que la medición del peso es posible, y asume por tanto la satisfacción de tales condiciones[32]. Más adelante, cuando discutamos la relación entre nuestra teoría y las teorías que usan conceptos cuantitativos, volveremos sobre esta cuestión.[33]

Campbell se plantea también la cuestión de cuan arbitraria es la asignación numérica para una propiedad que satisface las condiciones vistas. Si contemplamos un único modo de combinación, prueba (informalmente) que, dadas dos asignaciones tales que en ambas los números asignados satisfacen con > y + las condiciones satisfechas por los objetos a los que se asignan con M y ○, una es múltiplo de (proporcional a) la otra. Por tanto, los valores asignados sólo son arbitrarios en la elección de la unidad (o, lo que es igual, el cociente entre valores es constante para cualesquiera asignaciones).

Puede ocurrir, sin embargo, que haya más de un modo de combinación que satisfaga las condiciones. La arbitrariedad adicional aquí involucrada, respecto de qué procedimiento se elija, puede ser sólo aparente, pues puede ocurrir que el orden M, en relación al cual los modos de combinación satisfacen las condiciones, sea diferente. Campbell menciona el caso ya visto en Helmholtz de la combinación de espirales en serie y paralelo. Ambas cumplen las condiciones, pero mientras una lo hace respecto de un orden M la otra lo hace respecto de otro M', en este caso inverso al anterior. Las propiedades que ambos procedimientos posibilitan medir son diferentes, resistencia y conductancia como vimos.

[32] Campbell 1920 p. 286 y nota.

[33] Cf. cap. 7, sec. 3.

Para que dos procedimientos posibiliten la medición de la misma propiedad, el orden en relación al cual satisfacen las condiciones debe ser el mismo. Aunque Campbell no menciona ningún caso, de lo que dice se sigue que si se diera alguno nos encontraríamos ante un elemento de arbitrariedad nuevo e ineliminable: ¿mediante qué modo de combinación se mide "la" propiedad? *Si* la pregunta es correcta (y lo será en función de si tiene o no sentido hablar de "la" propiedad independientemente de *un* procedimiento concreto), es también urgente, pues diferentes procedimientos pueden dar lugar a asignaciones no proporcionales. Veremos que Ellis presentará más adelante un caso semejante.

6. Stevens: escalas, transformaciones e invarianza.

Entre los trabajos de Campbell y la publicación en 1946 (más de veinte años después, aunque el material principal es de finales de los treinta) de 'On the Theory of Scales of Measurement', de S. S. Stevens, no hay ninguna contribución de importancia en metrización.[34] Este artículo, y otros que le siguieron del mismo autor y de sus colaboradores, marca un punto de inflexión en la investigación sobre metrización influyendo de modo determinante en la investigación posterior.

Stevens provenía del campo de la psicología y su artículo es en principio una respuesta a la desestimación por parte de un comité de la *British Association for the Advancement of Science* (del que era miembro Campbell) de la validez de ciertas escalas para magnitudes psicológicas, como la intensidad de las sensaciones auditivas,

[34] Los trabajos de Nagel de los años treinta, solo y en colaboración con Cohen, no presentan novedad digna de mención (cf. Nagel 1932, que corresponde al segundo capítulo de su tesis doctoral *On the Logic of Measurement*, de 1930; y el cap. XV, 'Measurement', de Nagel-Cohen 1934).

en las que el propio Stevens había estado trabajando.[35] El rechazo se basa en la imposibilidad de concatenar aditivamente las sensaciones. En el informe final, Campbell afirma que, para que la medición tenga sentido es necesario que el número asignado al objeto pueda ser visto como el número de estándares que concatenados igualan al objeto respecto de la propiedad en cuestión[36] y otro miembro concluye que "cualquier ley que pretenda expresar una relación cuantitativa entre la intensidad de la sensación y la del estímulo no es sólo falsa sino carente de sentido, a menos y hasta que se pueda dar sentido al concepto de adición aplicado a las sensaciones".[37] No está claro si los trabajos de Stevens sobre escalas sensoriales deben interpretarse como la medición derivada de ciertas magnitudes psicológicas o como el establecimiento de leyes psicofísicas entre magnitudes medidas independientemente[38]. En cualquier caso, y aunque la teoría de las escalas de Stevens se aplica tanto a la medición fundamental como a la derivada, es esencial en nuestra discusión de la primera.

Stevens, si bien no pretende polemizar sobre nombres, propone considerar como medición (en sentido amplio) cualquier asignación de números a objetos o acontecimientos siguiendo una regla. Una escala es una de tales asignaciones. Aunque considera que las escalas son posibles "sólo porque hay cierto isomorfismo entre lo que podemos hacer con los aspectos de los objetos y las propiedades de las series numéricas"[39], y que en las escalas hay involucradas operaciones empíricas que determinan ciertas relaciones entre los aspectos de los objetos, no analiza estas operaciones ni, por

---

[35] Cf. Stevens-Davis 1938.

[36] Cf., Ferguson et al. p. 140.

[37] Ibid. p. 145.

[38] Ver, por ejemplo, Roberts 1979a p. 153.

[39] Stevens 1946 p. 142.

tanto, las condiciones que deben satisfacer; sólo menciona "lo" que las operaciones empíricas deben determinar (semejanza, orden, comparación de diferencias,...). Si a pesar de ello sus trabajos son cruciales para la metrización, es porque lo que más le interesa y trata, los tipos de escalas, es esencial para establecer hasta qué punto las asignaciones (posibilitadas por ciertas condiciones empíricas como las estudiadas por Helmholtz y Campbell) son únicas o arbitrarias.

El tipo de una escala viene caracterizado por su grupo de transformaciones, esto es, por las transformaciones *admisibles* para ella. A cada tipo de escala corresponde: (1) operaciones empíricas asociadas que deben determinar ciertos hechos, hechos que deben preservarse bajo las transformaciones, y (2) una (función, medida) estadística permisible. La conocida clasificación es la siguiente. Las variables denotan los valores de la escala (los números asignados a los objetos); f(x) es la transformación admisible, una función del conjunto numérico (en el que está incluido el recorrido de la escala) en sí mismo[40]; y $\phi(x_1,...,x_n)$ es el *hecho numérico* que las operaciones empíricas deben determinar, esto es, la ecuación (o inecuación) $\phi(x_1,...,x_n)$ más fuerte para la que vale "$\phi(x_1,...,x_n)$ si y sólo si $\phi(f(x_1),...,f(x_n))$".[41] La clasificación es acumulativa, se expresan condiciones progresivamente más fuertes[42].

[40] El término 'transformación' se usará aquí con cierta ambigüedad. Unas veces, como en este caso, denotará a una función de dominio y recorrido numéricos que se aplica a otra (una escala) de dominio empírico y recorrido numérico, esto es, a la función transformadora. Otras, como cuando afirmemos que cierta asignación de números a objetos es una transformación de otra previa, denotará al resultado de la composición, con dominio empírico y recorrido numérico, esto es, otra escala. El contexto aclarará el sentido en que se use.

[41] Coombs 1950 da una clasificación de las escalas semejante a la de Stevens tomando como primitivas, no las transformaciones admisibles, sino ciertas ecuaciones, que coinciden grosso modo con éstas ϕ. Así, p.e., una escala ordinal es aquella tal que las ecuaciones para las que tiene aplicación son del tipo $x \geq y$.

[42] Cf., p. e., Stevens 1946 y Stevens 1959 p. 24 y ss.

Escala nominal. f(x) es cualquier función biyectiva. ϕ es: $x_1=x_2$. Medida estadística: moda. Ejemplo: cualquier numeración. A estas escalas corresponde el tipo de "medición" poco (nada) interesante que mencionamos en el capítulo anterior, esto es, la *mera* redenominación de los objetos.
Escala ordinal. f(x) es monótona creciente. ϕ es: $x_1>x_2$. Med. est.: mediana. Ejemplo: dureza. Dada la asignación de un objeto, la de otro es completamente arbitraria, siempre y cuando respete el orden.
Escala de intervalos o diferencias. f(x)=ax+b (a>0; esto es, transformaciones lineales). ϕ es: $x_1-x_2=x_3-x_4$ (las operaciones empíricas determinan la igualdad de diferencias). Med. est.: media aritmética. Ejemplo: temperatura termométrica, tiempo-calendario[43]. La asignación a un objeto determina la de otro, una vez se elige arbitrariamente el origen o cero y la unidad. El cociente x_1-x_2/x_3-x_4 entre intervalos de valores no se altera ($x_1-x_2/x_3-x_4=f(x_1)-f(x_2)/f(x_3)-f(x_4)$).
Escala proporcional o de razón. f(x)=ax (a>0; esto es, transformaciones similares). ϕ es: $x_1/x_2=x_3/x_4$ (las operaciones empíricas determinan la igualdad de razones).[44] Med. est.: media geométrica. Ejemplo: longitud, masa, duración, temperatura termodinámica.[45] La asignación a un objeto determina la de otro, una vez se elige arbitrariamente la unidad (el cero es absoluto). El cociente x_1/x_2 entre valores no se altera ($x_1/x_2=f(x_1)/f(x_2)$).

Stevens añade en algunos lugares otro tipo al que sitúa, como a la de intervalos, entre la ordinal y la proporcional:
Escala de intervalos logarítmicos. $f(x)=ax^n$ (a>0, n>0; esto es, transforma-ciones exponenciales). ϕ es: $\log(x_1)-\log(x_2)=\log(x_3)-$

---

[43] Los calendarios son, más propiamente, escalas de un subtipo de este, las escalas de intervalos absolutos (ver cuadro).

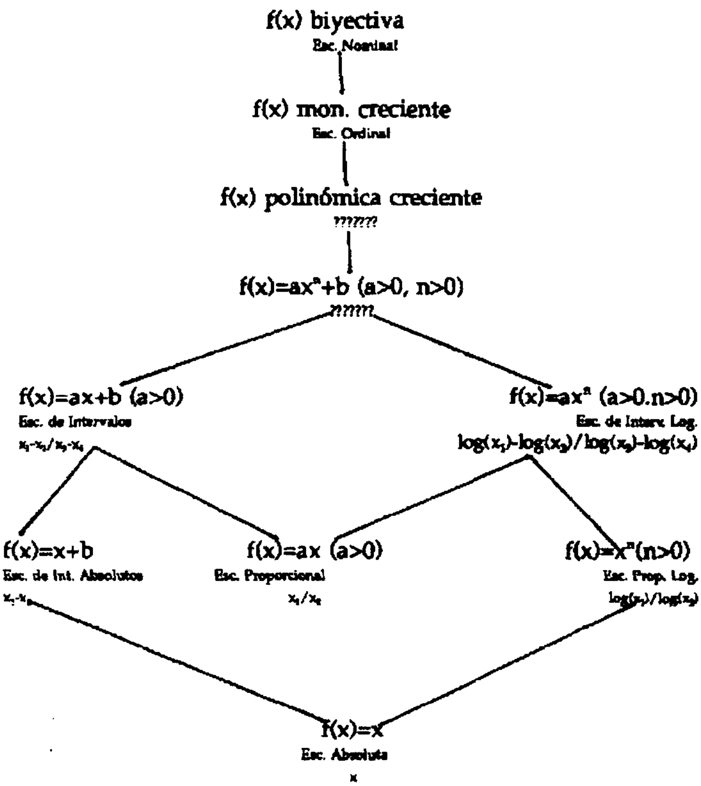
[44] Otro modo de expresar el hecho numérico es ϕ: $x_1/x_2=\alpha$.

[45] No nos preocupa en este punto si tal magnitud es susceptible o no de metrización fundamental.

$\log(x_4)$ (las operaciones empíricas determinan la igualdad de diferencias logarítmicas). Dice que no conoce ninguna medida estadística específica de ella y que no se dan casos de la misma en física, aunque si en psicología[46]. Es fácil ver que para estas transformaciones la siguiente función no se altera: $\log(x_1)-\log(x_2)/-\log(x_3)-\log(x_4)$.

Esta clasificación se puede completar de modo natural introduciendo otros tipos de transformaciones cercanas a las vistas. Cada tipo de transformación $f(x)$ caracteriza eventualmente un tipo de escala. El siguiente cuadro resume la situación. En él, la función que aparece bajo el nombre de la escala no se altera, es invariante bajo la transformación, e. e., es una función $g(x_1,\ldots,x_n)$ tal que $g(x_1,\ldots,x_n)=g(f(x_1),\ldots,f(x_n))$. Las lineas conectan transformaciones. Las transformaciones inferiores son casos particulares de las superiores con las que están conectadas. Ello hace que si una función g es invariante bajo una transformación $f(x)$ también lo es bajo transformaciones inferiores conectadas con $f(x)$.

[46] No está claro si lo que quiere decir es que hay magnitudes psíquicas para las cuales son admisibles las transformaciones exponenciales o que hay leyes de la forma $\sigma=a\mu^n$, donde σ es una magnitud psíquica y μ la magnitud del estímulo físico (ver, p. e., Stevens 1959 p. 36).



Lo que no aclara Stevens es en qué sentido preciso una escala concreta es de cierto tipo. Una escala es de tipo A si sus transformaciones admisibles son de tipo α. ¿Cuándo es admisible una transformación para una escala? Cuando deja invariante algo relativo a la escala. ¿Qué? Decir que su forma no es decir nada. No puede ser su estadística permisible[47]. ¿Qué es? Hemos visto que (la mayoría de) los tipos de transformaciones dejan invariante alguna función relativamente simple. Eso, se dirá, es lo que las transformaciones admisibles deben dejar invariante. Pero, ¿qué tienen que ver esas funciones con la escala *antes de saber* que ella es de cierto tipo? Que ciertas funciones son invariantes bajo ciertas transformaciones es un hecho puramente matemático; una vez caracterizamos un tipo concreto de escala mediante un grupo concreto de transformaciones, es un hecho puramente matemático que ciertas funciones se conservan. Es decir, en realidad el tipo de transformación admisible para una escala es simplemente lo que *define* de qué tipo es la escala: una escala de la magnitud m es de tipo A syss toda transformación suya de tipo α es también una escala de m. De otro modo: "f(x) es admisible para la escala de tipo A" significa simplemente que f(x) es de tipo α. Pero entonces no podemos saber, p. e., por qué una transformación creciente no lineal de la escala Celsius no mide la temperatura, o una transformción monótona pero no similar de la escala MKS no mide la masa.

Para salir de este círculo es necesario, en la definición de transformación admisible, salir de las invarianzas puramente matemáticas y apelar a las propiedades de los objetos, a sus relaciones empíricas. Por ello quizás afirma Stevens que en cada tipo de escala las operaciones empíricas deben determinar ciertos hechos (numéricos) que permanecen invariantes bajo transformaciones del tipo correspondiente a la escala. Lo que falta es determinar qué hechos empíricos corresponden a esos otros numéricos que permanecen invariantes. Una vez realizada esta

[47] No siempre se mantienen constantes. P. e., para la media aritmética y las transformaciones lineales se obtiene: $((ax_1+b)+(ax_2+b))/2=a((x_1+x_2)/2)+b$, esto es, $g(f(x_1),...,f(x_n))= f(g(x_1,...,x_n))$. Por eso Stevens distingue dos sentidos de invarianza para una estadística, que no altere su valor numérico y que se altere el valor pero no el *ítem* designado (Stevens 1959 pp. 27-28).

tarea (iniciada, como vimos, por Helmholtz, Hölder y Campbell) los resultados de Stevens serán esenciales para ver hasta qué punto es única la representación y, por tanto, qué uso se le puede dar.

Helmholtz, Hölder y Campbell analizaron las condiciones que debe satisfacer un sistema empírico para poder ser representado numéricamente, pero no dijeron nada sobre las relaciones entre las diversas representaciones posibles de un mismo sistema empírico. Stevens estudia formalmente los diferentes tipos de relaciones que se dan entre las diversas representaciones-escalas de una magnitud (vale decir, sistema empírico), pero no dice por qué las representaciones que guardan esa relación son representaciones de la misma magnitud. La razón no puede ser que permanezcan invariantes ciertas funciones, pues eso es simplemente otro modo de caracterizar la relación entre las transformaciones. Para responder adecuadamente a esta cuestión es preciso referirse a las condiciones empíricas que satisface el sistema. Si una transformación de una escala para la magnitud m es admisible, es porque el resultado de la transformación es también una representación-morfismo para el sistema. Este es el puente que falta entre los dos tipos de investigación.

REFERENCIAS.

BERKA, K. 1983, *Measurement. Its Concepts, Theories and Problems*, Reidel, Dordrecht.

CAMPBELL, N. 1921, *What is Science?*, Dover, New York(ed. ed 1953).

CAMPBELL, N. 1928, *An Account of the Principles of Measurement and Calculation*, Longmans, London.

CAMPBELL, N. 1920/57, *Foundations of science: the philosophy of theory and experiment*, Dover, New York.

COOMBS, C.H. 1950, 'Psychological scaling without a unit of measurement', *Psychological Review* 57, pp. 145-158.

ELLIS, B. 1966, *Basic Concepts of Measurement*, Cambridge U.P., Londres.

FERGUSON, A. et. elt. 1940, 'Quantitative estimates of sensory events. The advancement of science.', *Report of the British Association for the Advancement of Science* 2, pp. 331-349.

HELMHOLTZ, H.V. 1887, 'Zahlen und Messen, erkenntnistheoretish betrachtet', en Helmholtz, *Schriften zur Erkenntnistheorie*, pp. 70-108.

HELMHOLTZ, H.V. 1921, *Schriften zur Erkenntnistheorie*, Julius Springer,Berlin.

HELMHOLTZ, H.V. 1930, *Counting and measuring*, Van Nostrand, Princeton.

HELMHOLTZ, H.V. 1977a, *Epistemological Writings*, Reidel, Dordrecht (versión inglesa de Helmholtz 1921).

HELMHOLTZ, H.V. 1977b, 'Numbering and Measuring from an Epistemological Viewpoint', en Helmholtz, *Epistemological Writings*, pp. 72-114.

HEMPEL, C.G. 1952, *Fundamental of Concept Formation in Empirical Sciences*, U. Chicago P., Chicago.

HOLDER, O. 1901, 'Die Axiome der Quantitat und die Lehre vom Mass', *Ber. Verh. Kgl. Sachsis. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Classe* 53, pp. 1-64.

HUTINGTON, E.V. 1902, 'A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude', *Trans. Amer. Math. Soc.* 3, pp. 264-284.

KRANTZ, D.-LUCE, D.-SUPPES, P.-TVERSKI, A. 1971, *Foundations of Measurement vol. I*, Academic P., New York.

LUCE, D. -KRANTZ, D. -SUPPES, P. -TVERSKY, A. 1990, *Foundations of Measurement vol. 3*, Academic P., New York.

MOSTERIN, J. 1978, 'La estructura de los conceptos científicos', en Mosterín, *Conceptos y Teorías de la Ciencia*, pp. 11-48..

MOSTERIN, J. 1984, *Conceptos y Torías en la Ciencia*, Alianza, Madrid.

NAGEL, E. 1930, *On the logic of measurement*, Stanford U. Lib., Stanford.

NAGEL, E. 1932, 'Measurement', *Erkenntnis* II-5, pp. 313-333.

NAGEL, E. -COHEN, M.R. 1934, *An Introduction to Logic and Scientific Method*, Harcourt, New York.

NARENS, L. 1985, *Abstract Measurement Theory*, MIT P., Cambridge.

PFANZAGL, J. 1968, *Theory of Measurement*, Wiley, New York.

ROBERTS, F. 1979a, *Measurement Theory*, Addison, Massachusetts.

STEGMULLER, W. 1970, *Theorie und Erfahrung*, Springer, Heidelberg. Tr. cs.: *Teoría y Experiencia*, Ariel, Barcelona 1979.

STEVENS, S.S. 1946, 'On the Theory of Scales of Measurement', *Science* 103, pp. 667-680.

STEVENS, S.S. 1951, 'Mathematics, Measurement and Psychophysics', en xxx, *Handbook of Experimental Psychology*, pp. 1-49.

STEVENS, S.S. 1959, 'Measurement, Psychophysics and Utility', en Churchman-Ratoosh(eds.), *Measurement: Definitions and Theories*, pp. 18-63.

STEVENS, S.S. 1968a, 'Measurement, Statistics and the Schemampiric View', *Science* 161, pp. 849-856.

STEVENS, S.S. 1968b, 'Ratio Scales of Opinion', en Whitla(ed.), *Handbook of Measurement and Assessment in Behavioral Sciences*, pp. 171-199.

STEVENS, S.S. -DAVIS, H. 1938, *Hearing:its psychology and physiology*, Wiley, New York.

SUPPES, P. 1951, 'A set of independent axioms for extensive quantities', *Portugaliae Mathematica* 10, pp. 163-172. Tr. cs.: 'Un conjunto de axiomas independientes para cantidades extensivas', en Suppes, *Estudios de Filosofía y Metodología de la Ciencia*, Alianza, Madrid 1988, pp. 173-183.

SUPPES, P. -KRANTZ, D. -LUCE, D. -TVERSKY, A. 1989, *Foundations of Measurement vol. II*, Academic P., New York.

WIENER, N. 1921, 'A new theory of measurement: a study in the logic of mathematics', *Proc. London Math. Soc.* 19, pp. 181-205.