ESTUDIO DE UN LIBRO. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE GRAFOS

Josep Maria Franquet Bernis

Dr. Ingeniero Agrónomo EUR-ING. Diplomado en Investigación Operativa. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Campus del Nordeste. Centro Asociado de Tortosa (Tarragona). director@tortosa.uned.es.

RESUMEN

La Teoría de Grafos constituye, sin duda, una parte importante de la Investigación Operativa, de fecundas aplicaciones en la Economía y en la Técnica, aunque, como veremos seguidamente, también puede crear un extenso campo de utilidades en la Pedagogía y en las ciencias de la educación. En este trabajo se aplicarán estos conceptos al estudio eficiente de un libro. En el ejemplo del libro que aquí desarrollamos, los vértices son los diferentes capítulos del mismo y se entiende que los arcos denotan el tiempo necesario para llevar a cabo las actividades de estudio y comprensión necesarias para asimilar correctamente un capítulo determinado incidente. Se lleva a cabo, por último, la ponderación temporal del grafo lo que ofrece, como resultado, la obtención de los caminos de duración máxima y mínima en el proceso de estudio y asimilación del texto.

Palabras clave: grafo, vértice, arco, actividad, ponderación, camino máximo y mínimo, algoritmo.

SUMMARY / ABSTRACT

Graph theory is, no doubt, an important part of operational research, productive applications in economy and technique, although, as we will see next, you can also create a wide field of utilities in pedagogy and Education Sciences. In this work these concepts will be applied to the efficient study of a book. In the example from the book here we develop, the vertices are the different chapters of the same and refers to bows to denote the time needed to carry out the activities of study and understanding necessary to properly assimilate a particular chapter incident. Finally, it is performed the temporal weighting of the graph that offers, as a result, the obtaining of the paths of minimum and maximum duration in the process of study and assimilation of the text.

***Key words**: graph, vertex, arc, activity, weighting, minimum and maximum path algorithm.*

ÍNDICE

* * * * *

I. INTRODUCCIÓN

Un "grafo" es la representación, por medio de conjuntos, de relaciones arbitrarias existentes entre diversos objetos. Su teoría constituye una herramienta básica de la Investigación Operativa[1]. Existen dos tipos de grafos según que la relación entre los objetos sea unívoca o bien biunívoca (biyectiva). Los primeros forman los grafos dirigidos o dígrafos y los segundos los grafos no dirigidos o simplemente grafos. En la mayor parte de los algoritmos que son objeto de estudio se hace referencia a la terminología básica que se propone a continuación. Dicha terminología, sin embargo, no es estándar y puede llegar a variar en los distintos textos que pueden encontrarse sobre la materia.

En matemáticas y en las ciencias de la computación, la teoría de grafos (también llamada teoría de las gráficas) estudia las propiedades de los grafos (también llamadas gráficas). Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices (o nodos) y una selección de pares de vértices, llamados aristas (*arcs* en inglés) que pueden ser orientados o no. Típicamente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).

[1] La investigación de operaciones o investigación operativa o investigación operacional (conocida también como teoría de la toma de decisiones o programación matemática) (I.O.) es una rama de las matemáticas que consiste en el uso de modelos matemáticos, estadística y algoritmos con objeto de realizar un proceso racional de toma de decisiones. Frecuentemente, trata del estudio de complejos sistemas reales, con la finalidad de mejorar (u optimizar) su funcionamiento. La investigación de operaciones permite el análisis de la toma de decisiones teniendo en cuenta la escasez de recursos, para determinar cómo se puede optimizar un objetivo definido, como la maximización de los beneficios o los ingresos, o la minimización de costos.

II. METODOLOGÍA

1. Definiciones básicas

La teoría de los grafos es una de las partes teóricas de las matemáticas en la cual la noción de “correspondencia multívoca” resulta muy útil, esto es, cuando existe algún elemento del conjunto inicial con más de una imagen. Pues bien, consideremos ahora un conjunto finito $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y una correspondencia multívoca Γ definida sobre este conjunto. Se dice que el par G = (V, Γ) constituye un grafo de orden n, que se puede representar con la ayuda de un dibujo denominado “representación sagital del grafo”. A cada elemento v_i se le hace corresponder un punto sobre el papel, llamado “vértice” del grafo. Dos vértices v_i y v_j que están ligados por una flecha que va de v_i hacia v_j se denominan *adyacentes*. Esta flecha, llamada *arco del grafo*, representa la relación existente entre los dos elementos v_i y v_j del conjunto V (Desbazeille, 1969).

Un grafo se dice que no tiene bucles cuando la diagonal principal de la matriz asociada a él no contiene más que ceros. Cuando $(v_i,v_i) = 1$, se dice que existe un bucle en el vértice v_i.

Sea $a = (v_i,v_j)$ un arco cualquiera del grafo G. El vértice v_i se llama *extremidad inicial* del arco y el vértice v_j *extremidad terminal* del mismo. Se dice también que *a* es un arco incidente interiormente a v_j e incidente exteriormente a v_i. El *grado interior o exterior* de un vértice es el número de arcos incidentes interior o exteriormente a este vértice.

Se llama *camino* a una sucesión ordenada de arcos $(a_1, a_2,\ldots,a_p)$ tal que la extremidad terminal de cada arco coincida con la extremidad inicial del arco siguiente. Cuando la extremidad terminal del último arco se confunde con la extremidad inicial del primer arco, el camino (finito) forma un *circuito*. Salvo indicaciones contrarias, la longitud de un camino o de un circuito es igual al número de arcos que lo componen. Cuando estos arcos son todos distintos se dice que el camino o el circuito es *simple*, y cuando tienen por extremidad terminal (o inicial) vértices todos diferentes, se dice que es *elemental*.

Un camino o un circuito que pase una vez y una sola por cada vértice del grafo se denomina *hamiltoniano*. Tal camino o circuito puede estar caracterizado por la doble propiedad siguiente: ser elemental y de longitud *n*, en el caso de un circuito, o de longitud *n-1* en el caso de un camino, siendo *n* el orden del grafo.

Se utiliza con provecho, para la búsqueda de los caminos y de los circuitos hamiltonianos, el método de composición latina presentado por A. Kaufmann e Y. Malgrange en la *Revista de la Sociedad Francesa de Investigación Operativa*, VII, número 26, editada por Dunod, que no podemos exponer aquí por falta de espacio.

He aquí diferentes tipos de grafos que poseen propiedades particulares, a saber (Franquet, 2008):

- *Grafo simétrico*: en que dos vértices adyacentes están siempre ligados por dos arcos (uno en cada sentido):

$$(v_i,v_j) \in A \Rightarrow (v_j,v_i) \in A;$$

- *Grafo antisimétrico*: en que dos vértices no están jamás ligados por dos arcos:

$$(v_i,v_j) \in A \Rightarrow (v_j,v_i) \notin A;$$

- *Grafo completo*: en que dos vértices cualesquiera son siempre adyacentes; o dicho de otro modo, que todo par de vértices está ligado al menos en una de las dos direcciones;

- *Grafo fuertemente conexo*: en que dos vértices distintos están siempre ligados, al menos, por dos caminos (uno en cada sentido);

- *Grafo transitivo*: en que existe siempre un arco que va del origen de un camino cualquiera a su extremidad; además, cada vértice posee un bucle;

- *Grafo sin circuitos*: en que no existe ningún circuito, ni siquiera un bucle;

- *Grafo simple*: en que existe una división de dos vértices en dos clases de tal forma que todo arco tenga su extremidad inicial en la primera y su extremidad terminal en la segunda. Un grafo simple está, a menudo, expresado así: $G = (V, W, \Gamma)$.

Un “grafo dirigido” o “dígrafo” consiste en un conjunto de vértices V y un conjunto de arcos A. Los vértices se denominan *nodos* o *puntos*; los arcos también se conocen como *aristas* o *líneas* dirigidas que representan que, entre un par de vértices, existe una relación unívoca aRb pero no necesariamente bRa (en cuyo caso existiría un “circuito” entre esos nodos). De modo que los arcos se representan comúnmente por medio de pares ordenados (a,b), donde se dice que *a* es la cabeza y *b* la cola del arco y, a menudo, se representa también por medio de una flecha, tal como se muestra en la figura siguiente:

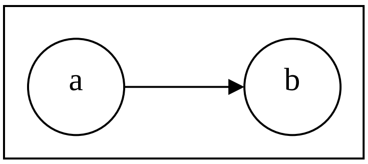

FIG. 1. Grafo dirigido.

También se puede definir el grafo como: $G = \{V, A\}$ donde $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $a_i = (v_j, v_k)$ tal que $v_j, v_k \in V$. En dicho grafo se entiende que $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$ y en muchos casos solo existe uno de los pares de vértices.

Un vértice que solo tiene arcos saliendo de él se denomina *fuente* y un vértice que solo tiene arcos dirigidos hacia él se denomina *sumidero*. Dicha nomenclatura resulta importante cuando los dígrafos se usan para resolver problemas de flujos.

Un grafo no dirigido, o grafo, al igual que un dígrafo, consiste de un conjunto de vértices V y un conjunto de arcos A. La diferencia entre ambos estriba en que la existencia de aRb presupone que bRa también existe y además que son iguales. De este modo, resulta indistinto hablar del arco (a,b) o (b,a), como tampoco tiene sentido hablar de la “cabeza” o la “cola” del arco. Estos grafos se representan esquemáticamente como lo indica la figura 2, donde los círculos representan los vértices y las líneas representan los arcos. Así:

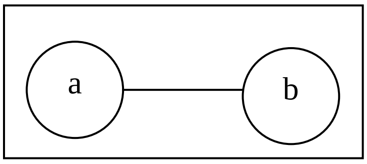

FIG. 2. Grafo no dirigido.

En este último caso, $G = \{V, A\}$ donde $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ y $a_i = (v_j, v_k)$ tal que $v_j, v_k \in V$. En dicho grafo se entiende que $(v_i, v_j) \Leftrightarrow (v_j, v_i)$ y además se cumple que: $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, donde ambos pares de vértices representan precisamente el mismo arco.

Existen además grafos en donde los arcos tienen asociado algún valor (en nuestro caso podría ser el tiempo previsible de asimilación por el/la lector/a de un capítulo determinado del libro), en cuyo caso hablamos de “grafos ponderados” y ahora se representan los arcos como tripletas. Sigue, pues, existiendo la información de los vértices unidos por dicho arco, además de la información del peso o ponderación de dicho arco o actividad. Así pues, el arco se representa como: $a = (v_i, v_j, w)$ donde v_i, v_j son el origen y destino y w es el peso (el tiempo expresado en minutos, en nuestro caso), respectivamente.

Utilizando, pues, la nueva terminología, veamos que un nodo **b** se dice que es **adyacente** al nodo **a** si existe el arco (a,b). Téngase en cuenta que, para un grafo no dirigido, necesariamente **a** es también adyacente a **b**. Esto no ocurre en los grafos dirigidos donde la existencia de (a, b) no implica que (b, a) también exista. Este concepto resulta de particular importancia, dado que los grafos suelen representarse en la computadora por medio de listas o matrices de adyacencias.

Un arco (a,b) **incide** en el nodo *b*, de igual modo en un grafo no dirigido dicho arco también incide en el nodo *a* debido a que también existe el arco (b, a). El número de arcos que inciden en un nodo le otorga el **grado** a dicho nodo. El nodo con mayor grado en el grafo le indica el grado de dicho grafo. También se acostumbra a representar a un grafo por medio de listas o matrices de incidencias (Franquet, 2013).

2. Ordenación en niveles del grafo

2.1. Conceptualización

A la hora de afrontar la construcción manual del grafo de un libro o estudio cualquiera resulta de gran utilidad ordenar las actividades por niveles. La ordenación por niveles permite construir el grafo en cuestión disponiendo los sucesos de forma tal que al trazar las actividades o prelaciones no aparezca un número excesivo de cruces, lo que dificultaría la interpretación del grafo del libro. En el ejemplo del libro que aquí desarrollamos, los vértices serán los diferentes capítulos del mismo en número de nueve (o diez, considerando un hipotético capítulo introductorio), y se entiende que los arcos denotan el tiempo necesario para llevar a cabo las actividades de estudio y comprensión necesarias para asimilar correctamente un capítulo determinado incidente, cuestión ésta que veremos más adelante, con lo que resultará, en definitiva, el siguiente grafo:

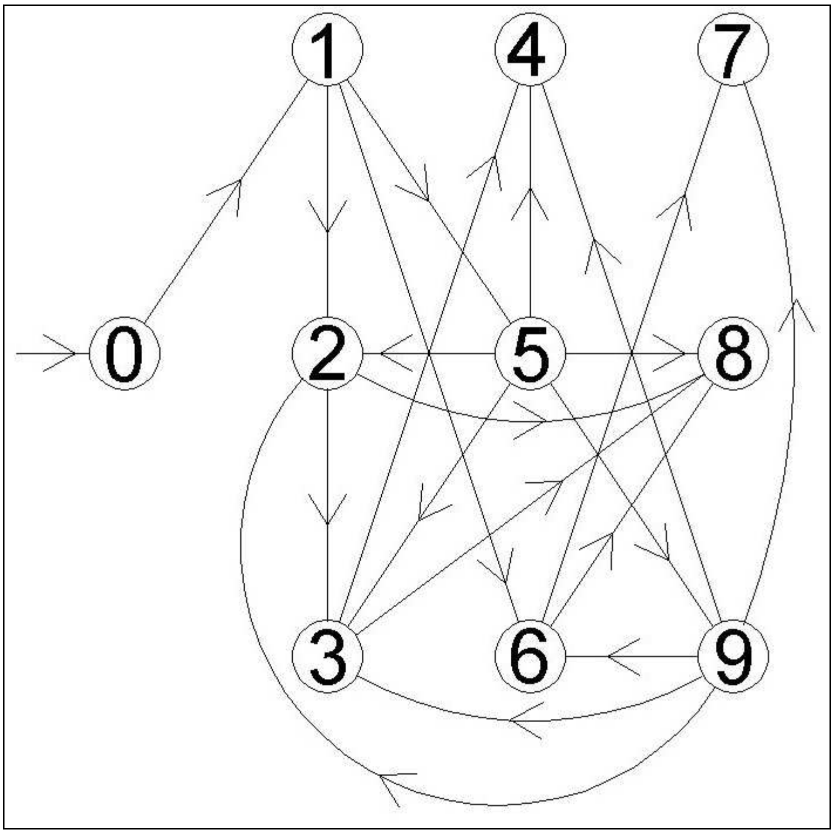

FIG. 3. Grafo del libro.

Aquí debe producirse la intervención decisiva del lector del libro, o mejor aún del propio autor, que debe establecer las prelaciones existentes entre los diferentes capítulos o partes del libro al objeto de poder construir el grafo en cuestión.

2.2. Método gráfico

Para ello, se deberán seguir los siguientes pasos:

1.- Se busca en el grafo el subconjunto de vértices de los que no nace ningún arco. Este subconjunto constituye el último nivel del grafo.

2.- Seguidamente, suprimimos estos vértices y los arcos relacionados con ellos.

3.- En el subgrafo obtenido se vuelve a buscar el subconjunto de vértices de los que no nace ningún arco. Este subconjunto constituye el penúltimo nivel del grafo.

4.- A continuación, eliminamos estos vértices y los arcos relacionados con ellos.

5.- Repitiendo iterativamente este proceso obtenemos el grafo ordenado en niveles.

6.- Nótese, en fin, que en la numeración de los vértices de una actividad, el número del suceso origen siempre es menor que el número del suceso final.

2.3. Método matricial

Es el que emplearemos en nuestro caso. Para ello, se deberán seguir los siguientes pasos (algoritmo de Demoucron-Malgrange-Pertuiset):

1.- Concepto de matriz asociada a un grafo: Es una matriz cuadrada de dimensión n, igual al número de vértices, en la que sus elementos a_{ij} son 1 ó 0 dependiendo de si existe o no arco entre el vértice i y el vértice j.

2.- Ampliamos la matriz asociada al grafo por medio de un cierto vector columna V_1. Los elementos de este vector son iguales a la suma de los elementos de cada fila de la matriz asociada.

3.- Los elementos de la columna que sean ceros, nos indican los vértices que constituyen el último nivel del grafo.

4.- Ampliamos la matriz asociada por un nuevo vector columna V_2. Los elementos de este nuevo vector se obtienen restando, a los elementos de V_1, los elementos homólogos de la(s) columna(s) que corresponden a los vértices que en dicho vector V_1 toman el valor cero. Cuando el minuendo y el sustraendo sean cero se coloca una aspa en el vector en lugar de un cero.

5.- Debajo de la columna correspondiente a cada vector se van colocando los números de los vértices con los que se obtienen elementos de valor cero en el vector. Los elementos de V_2 que sean cero serán los vértices del penúltimo nivel.

6.- Repitiendo iterativamente este proceso obtenemos los vértices del resto de niveles, esto es, los demás vectores columna que representan la ordenación en niveles del grafo, hasta que aparezca el último vector en que todas sus componentes sean aspas.

Como puede verse, se trata en este caso de un grafo conexo y sin circuitos. De este modo, siguiendo el método matricial anteriormente expuesto, que conduce a la ordenación de los vértices en niveles *hacia la antibase* por el método también conocido como de “eliminación de descendientes”, podemos formar el correspondiente algoritmo de Demoucron-Malgrange-Pertuiset (Chartrand y Oellermann, 1993), a saber:

ALGORITMO DE DEMOUCRON

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		$\vec{v}_0$	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$	$\vec{v}_5$	$\vec{v}_6$	$\vec{v}_7$
0		I										1	1	1	1	1	1	0	X
1			I			I	I					3	3	2	1	1	0	X	X
2				I					I			2	1	0	X	X	X	X	X
3					I				I			2	0	X	X	X	X	X	X
4												0	X	X	X	X	X	X	X
5			I	I	I				I	I		5	3	2	1	0	X	X	X
6								I	I			2	0	X	X	X	X	X	X
7												0	X	X	X	X	X	X	X
8												0	X	X	X	X	X	X	X
9			I	I	I		I	I				5	3	1	0	X	X	X	X
Σ	0	1	3	3	3	1	2	2	4	1		4 7 8 nivel sup.	3 6	2	9	5	1	0 nivel inf.	-

FIG. 4. Algoritmo de Demoucron-Malgrange-Pertuiset.

MÉTODO:

$$\vec{v_1} = \vec{v_0} - (4) - (7) - (8)$$
$$\vec{v_2} = \vec{v_1} - (3) - (6)$$
$$\vec{v_3} = \vec{v_2} - (2)$$
$$\vec{v_4} = \vec{v_3} - (9)$$
$$\vec{v_5} = \vec{v_4} - (5)$$
$$\vec{v_6} = \vec{v_5} - (1)$$
$$\vec{v_7} = \vec{v_6} - (0)$$

Ahora, el grafo ordenado del libro resulta ser el siguiente:

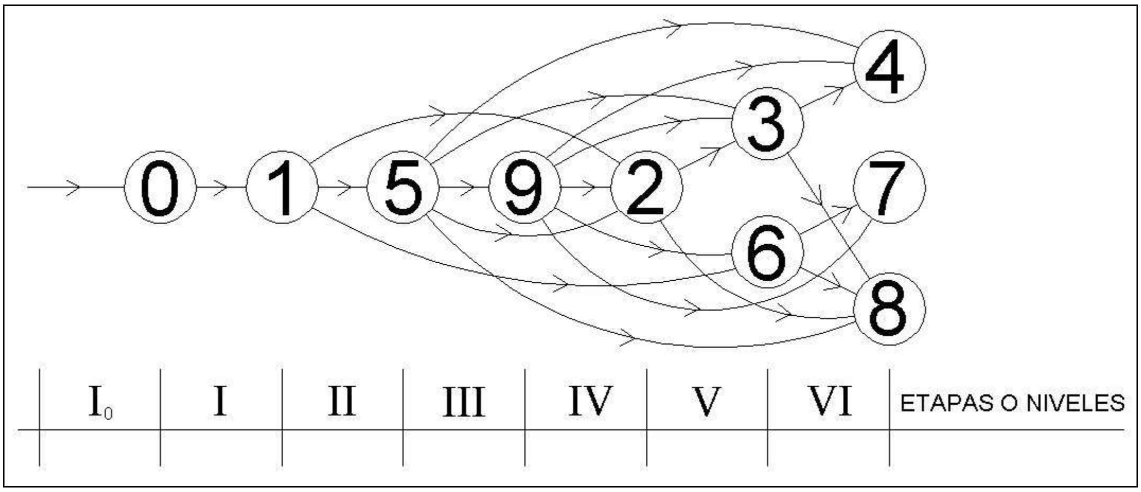

FIG. 5. Grafo ordenado en niveles del libro.

A través de la ordenación anterior, se ha puesto de manifiesto una prelación bien clara entre las diversas etapas del esquema aconsejable de estudio y asimilación de los contenidos del libro. En cualquier caso, debe cumplirse que:

1) Todos los capítulos del libro de un mismo nivel no deben poseer "ascendientes" en el nivel siguiente.

2) El orden de estudio de los vértices o capítulos de un mismo nivel es independiente.

3. Ponderación temporal del grafo

Por último, daremos a los arcos del grafo su correspondiente valor expresado, por ejemplo, en minutos. El tiempo que se tarda en desarrollar una actividad no se conoce con exactitud por lo que hay que realizar estimaciones de tiempo. El método PERT[2] considera tres estimaciones de tiempo distintas, a saber:

- Estimación optimista (E_o): es el tiempo mínimo en que podría ejecutarse la actividad si no surgiera ningún contratiempo indeseable. A falta de otras determinaciones, le estableceremos aproximadamente aquí en 10' por página impresa, con independencia de si es completa o no, por lo que vendrá dado por $(10 \cdot n)$ minutos, siendo *n* el número de páginas del capítulo en cuestión del libro.

- Estimación más probable o estimación modal (E_m): es el tiempo que se empleará en ejecutar la actividad en circunstancias normales; se supondrá, en este caso, un valor de $(25 \cdot n)$ minutos.

- Estimación pesimista (E_p): es el tiempo máximo de ejecución de la actividad si las circunstancias de estudio son muy desfavorables; se supondrá, en este caso, un valor de $(40 \cdot n)$ minutos.

El tiempo PERT (D) será la media aritmética ponderada o esperanza matemática de las estimaciones anteriores, esto es:

$$D = \frac{E_o + 4E_m + E_p}{6} = \frac{10 \cdot n + 100 \cdot n + 40 \cdot n}{6} = (25 \cdot n) \text{ minutos}$$

Por otra parte, podría también tenerse en cuenta la varianza y/o la desviación típica o "standard" de una actividad cualquiera, que se define así:

$$V^2 = \frac{(E_o - E_p)^2}{36} = \frac{(10 \cdot n - 40 \cdot n)^2}{36} = 25 \cdot n^2,$$

siendo la desviación típica o "standard" de valor: $V = 5 \cdot n$. Las actividades con mayor varianza tienen, obviamente, un mayor riesgo de error en la estimación de su duración.

Aquí se ha supuesto un número determinado de páginas de cada capítulo del libro (tomado, por cierto, de un ejemplo real), con un total de 714.

[2] La **Técnicas de Revisión y Evaluación de Proyectos** (en inglés, *Project Evaluation and Review Techniques*), comúnmente abreviada como **PERT**, es un modelo para la administración y gestión de proyectos inventado en 1958 por la Oficina de Proyectos Especiales de la Marina de Guerra del Departamento de Defensa de los EE. UU. como parte del proyecto Polaris de misil balístico móvil lanzado desde un submarino. PERT es básicamente un método para analizar las tareas involucradas en completar un proyecto dado, especialmente el tiempo para completar cada tarea, e identificar el tiempo mínimo necesario para completar el proyecto total. Este modelo de proyecto fue el primero de su tipo, un reanimo para la administración científica, fundada por el fordismo y el taylorismo. No es muy común el *modelo de proyectos*, pues todos se basan en PERT de algún modo. Sólo el método del camino crítico (*CPM, Critical Path Method*) de la Corporación DuPont fue inventado en casi el mismo momento que el PERT.

Capítulo	N	D	V	t(h.)	%	% acum.
0	12	300	60	5.00	1.68	1.68
1	34	850	170	14.17	4.76	6.44
2	144	3600	720	60.00	20.17	26.61
3	152	3800	760	63.33	21.29	47.90
4	42	1050	210	17.50	5.88	53.78
5	92	2300	460	38.33	12.89	66.67
6	72	1800	360	30.00	10.08	76.75
7	16	400	80	6.67	2.24	78.99
8	72	1800	360	3.00	10.08	89.07
9	78	1950	390	32.50	10.93	100
TOTAL	714	17850	3570	297.50	100	---

FIG. 6. Tabla de actividades.

Veamos el cuadro anterior con el número de páginas y la duración de cada actividad D según los diferentes capítulos del libro, así como su correspondiente desviación típica V y el tiempo horario empleado en la asimilación de cada uno de ellos y el acumulado desde el inicio del estudio del libro. Obviamente, el coeficiente de variación de Pearson, que es una medida relativa de dispersión de los valores de la variable aleatoria estadística "duración de la actividad", será del: $\frac{V}{D} \times 100 = 20\%$, en todos los casos. Obsérvese también que la asimilación de la totalidad de los capítulos del libro comportaría, según los supuestos ya expresados, una duración de 17850 minutos (exactamente un tiempo de 297 horas y media). Sería posible, sin embargo, alcanzar la asimilación de los capítulos del último nivel (de interesar ello) sin necesidad de pasar necesariamente por el estudio de algunos otros, ya fuera recorriendo trayectos de duración máxima o mínima, como se verá a continuación. Por otra parte, la media aritmética de la duración de cada actividad (estudio y asimilación de cada capítulo) sería de 17850/10 = 1785 minutos = 29.75 horas/capítulo, y se alcanzarían los 2/3 del estudio completo del texto al finalizar el capítulo 5.

En definitiva, bajo estas condiciones temporales, el grafo del libro en el cual se han buscado los caminos de valor máximo y se ha añadido el capítulo ficticio O', quedará configurado del siguiente modo:

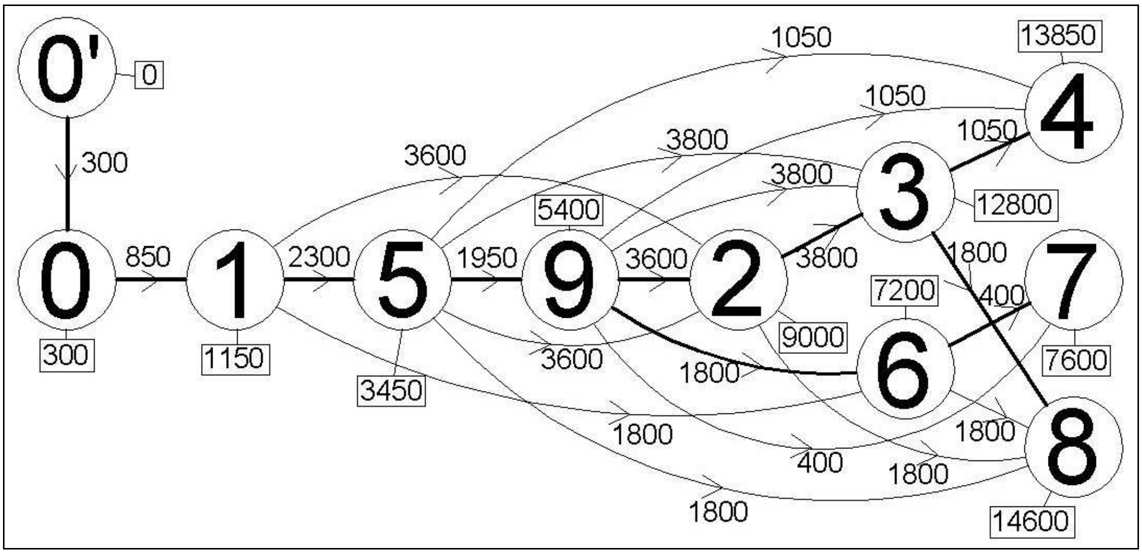

FIG. 7. Grafo con ponderación temporal de las actividades. Camino máximo.

Se han obtenido, pues, tres caminos de longitud o duración máxima, para alcanzar respectivamente los capítulos del último nivel o etapa, cuya traza ha sido remarcada convenientemente en la figura anterior, a saber:

[0’, 0, 1, 5, 9, 2, 3, 4] = 13850 minutos (Cap. 4)
[0’, 0, 1, 5, 9, 6, 7] = 7600 minutos (Cap. 7)
[0’, 0, 1, 5, 9, 2, 3, 8] = 14600 minutos (Cap. 8)

Del mismo modo, el grafo del libro en el cual se han buscado los caminos de valor mínimo, quedará configurado del siguiente modo:

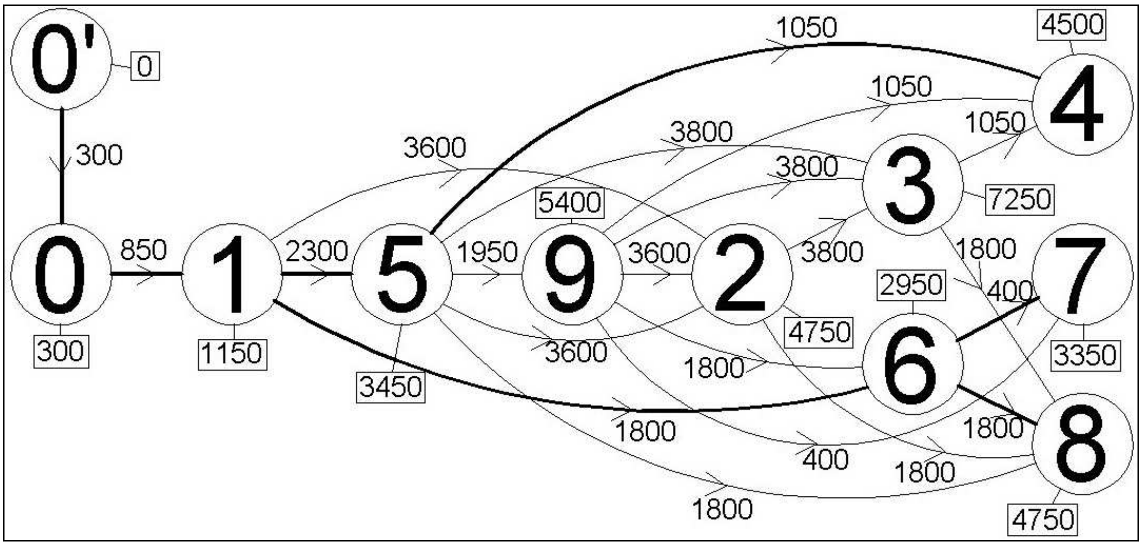

FIG. 8. Grafo con ponderación temporal de las actividades. Camino mínimo.

En nuestro caso podría emplearse una versión simplificada del *algoritmo de Dijkstra*, también llamado *algoritmo de caminos mínimos*, es un algoritmo para la determinación del camino más corto dado un vértice origen al resto de vértices en un grafo con pesos en cada arista. Su nombre se refiere a Edsger Dijkstra, quien lo describió por primera vez en el año 1959[3].

Se han obtenido tres caminos de longitud o duración mínima, para alcanzar respectivamente los capítulos del último nivel o etapa, cuya traza ha sido remarcada convenientemente en la figura anterior, a saber:

[0’, 0, 1, 5, 4] = 4500 minutos (Cap. 4)
[0’, 0, 1, 6, 7] = 3350 minutos (Cap. 7)
[0’, 0, 1, 6, 8] = 4750 minutos (Cap. 8)

Lo expuesto hasta aquí, por ejemplo, también resultaría de aplicación al estudio de los capítulos del penúltimo nivel (Caps. 3 y 6) o de cualquier otro teniendo en cuenta, en cada caso, el camino de duración más conveniente a los intereses del lector.

III. CONSEJOS ELEMENTALES PARA EL ESTUDIO DEL LIBRO

Llegados a este punto, y una vez ordenados en niveles o etapas los diferentes capítulos del libro, así como presentadas las diferentes alternativas o itinerarios de su asimilación, me permito sugerir a nuestros lectores algunas ideas acerca de cómo enfocar más eficientemente el estudio y comprensión de una monografía, informe, etc. Y así trataremos de:

- **Aumentar la rapidez y eficacia de la lectura:**

1. Se trata de aprender de manera inteligente a leer deprisa utilizando las técnicas adecuadas que permitan leer más y memorizar mayor cantidad de contenido en menos tiempo, y sacar más provecho de lo que se ha leído. Algunas de las aptitudes necesarias para una buena lectura son las siguientes:

    - Capacidad para leer y comprender a altas velocidades,
    - Capacidad para usar un ritmo variable en función de la finalidad y la dificultad del tema,
    - Capacidad para comprender las ideas principales o los pensamientos centrales del material de lectura,
    - Capacidad para comprender y retener los detalles, buena retención general,
    - Capacidad para apreciar la organización del material,
    - Capacidad para leer de manera crítica y valorativa.

---

[3] La idea subyacente en este algoritmo consiste en ir explorando todos los caminos más cortos que parten del vértice origen y que llevan a todos los demás vértices; cuando se obtiene el camino más corto desde el vértice origen, al resto de vértices que componen el grafo, el algoritmo se detiene. El algoritmo es una especialización de la búsqueda de costo uniforme, y como tal, no funciona en grafos con aristas de coste negativo (puesto que al elegir siempre el nodo con distancia menor, pueden quedar excluidos de la búsqueda nodos que en próximas iteraciones bajarían el costo general del camino al pasar por una arista con costo negativo).

2. Los lectores ineficaces leen todo a la misma velocidad, mientras que los lectores eficaces leen de tres a cinco veces más deprisa y comprenden mucho mejor las ideas principales.

- **Mejorar la concentración:**

1. Evitar las distracciones externas e internas.
2. Localizar un lugar de estudio adecuado.
3. Eliminar las interrupciones planteadas.
4. Eliminar las distracciones sonoras como ruidos o música con canciones.
5. Encontrar el momento más favorable para el estudio.
6. Marcar objetivos acerca de cuando empezar, interrumpir y terminar.
7. Controlar las inquietudes mentales.
8. Descansar periódicamente 10 minutos cada 50 de lectura o estudio.

- **Establecer el ambiente adecuado, dedicarle el tiempo estipulado, cuidar la vista, etc.**

IV. CONCLUSIONES

La Teoría de Grafos también puede resultar útil para crear un extenso campo de utilidades en la Pedagogía y en las ciencias de la educación. En este trabajo se aplica su metodología para el estudio eficiente de un libro. Según el objetivo de asimilación de conocimientos que se persiga en cada caso, sus técnicas nos permitirán escoger el itinerario más adecuado y menos costoso en el estudio y asimilación del libro en cuestión, pudiendo ahorrar al discente mucho tiempo y esfuerzo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. CHARTRAND, G. y OELLERMANN, O. R. "Applied and Algorithmic Graph Theory". Ed. McGraw-Hill, 1993.

2. DESBAZEILLE, G. Ejercicios y problemas de Investigación Operativa. Ed. ICE. Selecciones de Economía de la Empresa. Madrid, 1969.

3. DIJKSTRA, E. W. *Go To Statement Considered Harmful*, Communications of the ACM, Vol. 11 (1968) 147-148.

4. FRANQUET BERNIS, J.M. *El estudio operativo de la Psicología: una aproximación matemática.* Ed. Centro Asociado de la UNED. Cadup-Estudios. Tortosa, 2008.

5. FRANQUET BERNIS, J.M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas*. *Curso práctico.* Ed. Centro Asociado de la UNED. Cadup-Estudios. Tortosa, 2013.

6. KAUFMANN A. y MALGRANGE Y. Revista de la Sociedad Francesa de Investigación Operativa, VII, n. 26. Ed. DUNOD.