UNED TORTOSA Cadup Estudios

BAJAS EN LAS SUBASTAS: DETERMINACIÓN LÓGICA

Josep Maria Franquet Bernis

Marzo 2018

ÍNDICE

Pág.

* * * * *

BAJAS EN LAS SUBASTAS: DETERMINACIÓN LÓGICA

Josep Maria Franquet Bernis

Ingeniero Agrónomo (MSc) EUR-ING. Diplomado en Investigación Operativa. Dr. en Ciencias Económicas y Empresariales (UB). Dr. en Arquitectura (UIC). Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Campus del Nordeste. Centro Asociado de Tortosa (Tarragona). director@tortosa.uned.es.

RESUMEN

El problema de la determinación de la cuantía de las bajas en una subasta pública debe merecer especial atención para cualquier licitador, especialmente en el caso de las empresas que concurran a los diferentes concursos públicos para la adjudicación de diversas obras y servicios. Muy especialmente por lo que se refiere a las empresas constructoras. Del estudio desarrollado, con la resolución de un ejemplo práctico, se deduce que la aplicación de los diversos criterios propios de la Teoría de la Decisión y la Teoría de Juegos pueden conducir a la adopción de estrategias diferentes por parte de la empresa licitadora. Ahora bien, si la probabilidad de adjudicarse el concurso es la misma, ¿por qué se tiene que ofertar una rebaja determinada si es posible ofertar una rebaja inferior desde el punto de vista probabilístico? Además, con ello, se puede llegar a obtener un mayor beneficio para la empresa concursante.

Palabras clave: matriz, fila, columna, decisión, juego, esperanza matemática, riesgo, incertidumbre, probabilidad.

RESUM

El problema de la determinació de la quantia de les baixes en una subhasta pública ha de merèixer especial atenció per a qualsevol licitador, especialment en el cas de les empreses que concorrin als diferents concursos públics per a l'adjudicació de diverses obres i serveis. Molt especialment pel que es refereix a les empreses constructores. De l'estudi desenvolupat, amb la resolució d'un exemple pràctic, es dedueix que l'aplicació dels diversos criteris propis de la Teoria de la Decisió i la Teoria de Jocs poden conduir a l'adopció d'estratègies diferents per part de l'empresa licitadora. Ara bé, si la probabilitat d'adjudicar-se l'obra és la mateixa, perquè ha d'oferir-se una rebaixa determinada si és possible oferir una rebaixa inferior des del punt de vista probabilístic? A més, amb això, es pot arribar a obtenir un major benefici per a l'empresa concursant.

Paraules clau: matriu, fila, columna, decisió, joc, esperança matemàtica, risc, incertesa, probabilitat.

SUMMARY / ABSTRACT

The problem of the determination of the low amount in a public auction has to deserve a special attention for any bidder, especially in the case of the companies which come to the different public contests for the adjudication of several works and services, specifically those that refers to the undertaken constructors. From the study done, with a resolution of a practical example, it is deduced that the application of the diverse own criteria of the Theory of the Decision and the Theory of Games can drive to the adoption of the different strategies by the undertaken bidder. However, if the probability to award the work is the same, why has to be offered a determinate discount if it is possible offer a lower discount since the probabilistic point of view? Besides, if we do the mentioned before, it can be reached a bigger profit for the company contestant.

***Key words**: matrix, row, column, decision, game, mathematical hope, risk, uncertainty, probability.*

RÉSUMÉ

Le problème de la détermination du nombre d'adjudication à la baisse dans une vente aux enchères publique mériterait une attention particulière de la part de tout soumissionnaire, en particulier dans le cas des entreprises qui participent aux divers appels d'offres publics pour l'attribution de divers travaux et services. Très spécialement en ce qui concerne les entreprises de construction. De l'étude développée, avec la résolution d'un exemple pratique, on peut déduire que l'application des différents critères de la Théorie de la Décision et de la Théorie des Jeux peut conduire à l'adoption de différentes stratégies par la société soumissionnaire. Maintenant, si la probabilité de gagner le travail est la même, pourquoi devez-vous offrir une certaine réduction s'il est possible d'offrir une réduction plus faible du point de vue probabiliste? En outre, avec cela, vous pouvez obtenir un plus grand bénéfice pour l'entreprise concourante.

Mots-clés: *matrice, rangée, colonne, décision, jeu, espoir mathématique, risque, incertitude, probabilité.*

1. INTRODUCCIÓN

En el mundo de los negocios, como sucede también en la vida misma, cualquier decisión empresarial presupone tener que escoger entre acciones alternativas; si no existieran diferentes alternativas tampoco habrían decisiones a tomar: sólo habría que proceder con la única actuación posible. Consiguientemente, en toda decisión empresarial hay involucrada una cierta libertad de elección, lo cual hace necesario que el encargado de tomarla sepa cuáles son las posibilidades de que dispone. Ahora bien, ¿tendría que introducirlas en el modelo de la situación que ha construido o bien tiene que construir un modelo separado para cada alternativa? La respuesta a esta pregunta dependerá del problema en cuestión; sin embargo, la necesidad de hacerse estas preguntas, antes de tomar cualquier decisión, constituye una cuestión de principio que el director de empresa nunca puede olvidar.

Todo esto nos conduce a la siguiente consideración: puesto que todos los problemas que se presentan al encargado de tomar las decisiones comportan, cuanto menos, dos alternativas diferentes, se presupone que tiene que escoger la mejor de las que se le ofrecen. De lo contrario, ¿cómo reconocer cuál es la mejor y cómo hacerlo rápidamente? Es importante que el encargado de tomar la decisión no acepte la primera solución que tenga por delante, sea esta buena o mala. También es importante darse cuenta que el tiempo de que dispone el responsable empresarial para actuar, y la misma empresa, se habrán perdido lamentablemente si se produce una larga búsqueda entre las alternativas posibles para encontrar la mejor de ellas. Al fin y al cabo, sólo puede resultar escogida una sola alternativa e, incluso, algunas pueden ser bien poco agradables. Nos encontramos, pues, frente a un problema que se podría denominar "de búsqueda". Lo que necesitamos, entonces, es una regla que permita al decisor conocer el grado óptimo de búsqueda correspondiente a cada situación, es decir, cuál es el número mínimo de alternativas a considerar (Franquet, 2012).

Actualmente, no resulta posible formular una regla sencilla de esta clase para solucionar el problema planteado. Pero aquello que sí que se puede hacer es llamar la atención del responsable empresarial sobre esta cuestión. Como sucede algunas veces con nuestro conocimiento acerca de los problemas empresariales, lo máximo que hay que esperar es a comprender el problema; el responsable o decisor hace falta que se dé cuenta de que existe un problema de búsqueda y que éste es del tipo coste-beneficio. Esto quiere decir, obviamente, que sólo habrá que invertir recursos en la búsqueda de acciones alternativas en la medida en que el beneficio a obtener supere el coste de la mencionada investigación.

El problema de la determinación de la cuantía de las bajas en una subasta pública constituye un ejemplo claro de lo que se acaba de exponer y debe merecer especial atención para cualquier licitador, especialmente en el caso de las empresas que concurran a los diferentes concursos públicos para la adjudicación de diversas obras y servicios. Muy especialmente por lo que se refiere a las empresas constructoras.

Existen, fundamentalmente, dos criterios o razones que justifican dicha importancia, a saber:

a) Una baja importante influye negativamente en la política económica de la sociedad, si los ingresos por certificación de obra o servicio son menores, iguales o insuficientemente mayores ("costes de oportunidad") que los costes netos del trabajo.

b) Por otra parte, a menudo resulta conveniente -dentro de lo posible y hacedero- bajar al máximo el precio de licitación, habida cuenta del gran número de contratistas competidores que pueden concurrir a la subasta, algunos de ellos con rendimientos elevados y probados de su trabajo, y otros con el afán puro y simple de adjudicarse la obra o el servicio como sea (a cualquier precio).

Si el número de empresas licitantes es suficientemente elevado (por lo menos cuatro o cinco) la empresa A puede decidir -con notables y racionales garantías de éxito- el porcentaje de rebaja que le conviene ofrecer en su plica, recurriendo a lo que se ha dado en llamar "juego contra la naturaleza" ("Teoría General de los Juegos de Estrategia", que es una técnica de la Investigación Operativa aplicada). En este caso, "la naturaleza" es, precisamente, el conjunto integrado por, v. gr., las cuatro restantes empresas consideradas.

Debe tenerse en cuenta que aquí intentaremos averiguar la baja óptima en la subasta que debe realizarse por A en circunstancias *ceteris paribus*[1], esto es, habiendo cumplido satisfactoriamente todos los licitadores con las restantes condiciones jurídico-administrativas exigidas en el concurso público en cuestión y habiendo obtenido, por ello, una puntuación igual o similar, de tal suerte que la propuesta de decisión de la adjudicación, por parte de la mesa de contratación, dependerá, únicamente, del porcentaje ofertado de rebaja en la subasta por parte de las empresas concurrentes.

[1] Es una locución latina que significa literalmente «[siendo] las demás cosas igual» y que se parafrasea en español como «permaneciendo el resto constante». En el lenguaje científico se llama así al método en el que se mantienen constantes todas las variables de una situación, menos aquella cuya influencia se desea estudiar. Esto permite simplificar el análisis, ya que en caso contrario sería muy difícil o imposible dilucidar el efecto de cada variable individual. Si se aplica reiteradamente el método, variando ordenadamente cada una de las variables y sólo una variable por vez, es posible llegar a comprender fenómenos muy complicados. Este método permite el análisis de fenómenos complejos y facilita su descripción.

2. METODOLOGÍA

Las Teorías de Juegos y de la Decisión son unas de las técnicas básicas de la Investigación Operativa cuyos modelos operativos de gestión pueden ser radicalmente diferentes de los empleados en otras técnicas de aquella disciplina científica. Se trata de tomar una o varias decisiones frente a uno o varios adversarios cuyas reacciones, ante las decisiones tomadas, se conocen poco o nada. Constituyen problemas en que se elaboran decisiones en situación de concurrencia, con control parcial del resultado final y en donde los actuantes tienen intereses opuestos (puesto que los beneficios de unos suelen representar pérdidas para los otros). En ellos se intenta adivinar las actuaciones de la competencia para oponerles las acciones más eficaces.

Hay una cierta cantidad de pagos en cada juego que puede ser pérdida para un jugador y ganancia para su oponente. A esta cantidad se la denomina "valor del juego" (v), y no se puede obtener más ventaja que (v) como pérdida o ganancia. Si es una cantidad positiva, es precisamente la que el jugador o empresa A debería pagar al B en cada jugada, haciendo un juego limpio. En los demás juegos, normalmente, v = 0.

En un juego de 2 personas, la regla del juego se halla habitualmente resumida por una tabla o "matriz del juego" que expresa las ganancias del jugador maximizante A o las pérdidas del jugador minimizante B si se trata de un juego bipersonal de suma nula, es decir, si las ganancias de uno son iguales a las pérdidas del otro (Desbazeille, 1969).

La matriz antedicha se puede representar así:

$$\begin{array}{cc} & \text{B (minimizante)} \\ \text{A (maximizante)} & \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}} \end{array}$$

En una partida comportando una jugada única, se denomina "estrategia pura" a la elección de una sola fila de la matriz; si se realizan varias jugadas, se llamará "estrategia mixta" de A a la elección de un cierto número de filas de la matriz según unas frecuencias apropiadas, aunque este último caso no se contempla en el ejemplo que se desarrolla a continuación. En cualquier caso, una estrategia pura o mixta no podrá ser elaborada hasta después de haber realizado la elección de un criterio teniendo en cuenta la actitud del jugador A.

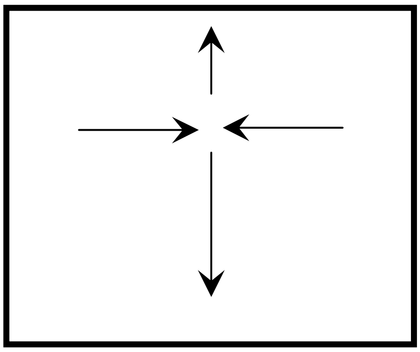
Si se contempla un comportamiento neumanniano y se considera la matriz $M = [a_{ij}]$, se demuestra que, para cualquier matriz M, se tiene:

$$\min_{j}\,[\max_{i}\, a_{ij}] \;\geq\; \max_{i}\,[\min_{j}\, a_{ij}]\,.$$

Cuando la matriz M, es tal que: $\max_{i}\,[\min_{j}\, a_{ij}] = \min_{j}\,[\max_{i}\, a_{ij}] = v$,

se dice que el juego rectangular posee un *punto de equilibrio* o *punto de silla*.

El punto de silla o ensilladura es el que representa el número más pequeño de su fila y el más grande de su columna, como puede verse en el esquema siguiente:



Notas: Hay que tener presente que: 1) Una matriz puede poseer diversos puntos de silla. 2) Una matriz puede no tener punto de silla (Desbazeille, 1969).

3. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Veámoslo a través de un ejemplo.

Imaginemos que sale a subasta una obra o servicio determinado con un presupuesto de ejecución material (antes de impuestos y beneficio industrial) de:

$$P = 42\,546\,270.00 \text{ €}.$$

La empresa A, que ha estudiado concienzudamente el correspondiente proyecto técnico y la documentación administrativa que le acompaña, llega a la conclusión de que el precio de coste de la obra le resultará por un importe global de C = 35 500 000.00 € (previendo, incluso, el aumento de coste de los materiales y mano de obra durante el plazo de ejecución, en el caso de que no esté prevista una revisión de precios). Esto es: si pretende concurrir por su coste, deberá hacer una baja en la subasta de:

$$R = \frac{42\,546\,270.00 - 35\,500\,000.00}{42\,546\,270.00} \times 100 = 16.561\%\,.$$

No obstante, ¿cómo tener en cuenta la rebaja que puedan ofrecer los cuatro competidores restantes? Pues bien, habida cuenta de la experiencia adquirida en casos similares, la gerencia de A decide seguir una cualquiera de estas 4 políticas (con porcentajes próximos al calculado, algo más por defecto que por exceso, para mayor seguridad):

- Ofrecer un porcentaje de rebaja del 10%.
- Ofrecer un porcentaje de rebaja del 12%.
- Ofrecer un porcentaje de rebaja del 16%.
- Ofrecer un porcentaje de rebaja del 20%.

Sin embargo la gerencia de A no sabe "a priori" cuál de estas 4 políticas es preferible; lo único que conoce es el precio del presupuesto (P euros), y que A es capaz de construir la obra o prestar el servicio por C euros.

Si alguna de las restantes empresas ofrece una rebaja R superior a la rebaja ofrecida por A, ésta no se adjudicará la obra y, no podrá obtener, por ello, ninguna ganancia económica. Por el contrario, si la rebaja ofrecida por A es racionalmente superior a cualquiera de las otras rebajas, se adjudicará la obra (amén de otros condicionantes legales y administrativos) y, con ella, unos posibles beneficios.

En esta tesitura, la "matriz de ganancias" de A es, evidentemente, la siguiente:

	Rebaja máxima de los competidores de A				
Rebaja de A	**R<10%**	**10%≤R<12%**	**12%≤R<16%**	**16%≤R<20%**	**R ≥20%**
10%	0.90 P-C	0	0	0	0
12%	0.88 P-C	0.88 P-C	0	0	0
16%	0.84 P-C	0.84 P-C	0.84 P-C	0	0
20%	0.80 P-C	0.80 P-C	0.80 P-C	0.80 P-C	0

Tabla 1. Matriz del juego.

Por ejemplo, si A rebaja un 16% y B, que es la segunda empresa concurrente de mayor baja, rebaja un 14%, la obra es adjudicada a A, que cobrará un precio de:

$$P - 0.16 \cdot P = (1 - 0.16) \cdot P = 0.84 \cdot P ,$$

luego la ganancia de A es igual a: 0.84 P-C, valor que se ha escrito en la casilla correspondiente a la "tercera fila – tercera columna" de la matriz anterior. Los valores de las otras casillas se deducen de modo análogo. Además, aplicando el criterio de prudencia, la gerencia de A admite que en caso de empate en la baja, la obra se adjudicará, por el órgano competente, a la otra empresa que rebajó el mismo porcentaje que A.

4. CRITERIOS CON UTILIZACIÓN DE LOS ESTADOS DE LA NATURALEZA

4.1. Consideraciones previas

En aplicación del criterio pesimista de Wald, que se verá posteriormente, la persona de A que toma la decisión piensa que una vez seleccionada una determinada estrategia se presentará el estado de la naturaleza más desfavorable y elegirá la estrategia que le dé la retribución más favorable entre las peores. Se trataría de una situación de incertidumbre en la que no se utilizan los estados de la naturaleza.

Sin embargo, contrariamente, aquí nos hallamos en situación de "riesgo", en que conocemos la lista de estados de la naturaleza así como su probabilidad de ocurrencia. Como los sucesos son mutuamente excluyentes[2], resulta que la suma de las probabilidades de todos los estados ha de ser igual a la unidad (probabilidad total). Entonces, se calcula la "esperanza matemática" o valor medio y se escoge, para cada fila, la mayor de ellas (Franquet, 2012).

4.2. Criterio de la equiprobabilidad de Laplace

Los diferentes estados posibles de la naturaleza, teniendo probabilidades desconocidas, son considerados como equiprobables. Es decir, ante la ignorancia de las probabilidades de cada caso, considera el decisor que los diferentes estados de la naturaleza tienen la misma probabilidad. Es, pues, el único criterio que muestra indiferencia, puesto que se enfrenta a la incertidumbre[3] otorgando una equiprobabilidad (o igual probabilidad) de ocurrencia a todos los posibles estados de la naturaleza. Este criterio, propuesto por Laplace en el año 1825, está basado en el principio de la "razón insuficiente". Ya que las probabilidades asociadas a la ocurrencia se desconocen, no existe información suficiente para concluir que estas probabilidades serán diferentes. Por consiguiente, debido a una razón insuficiente para creer otra cosa, los estados de la naturaleza tienen todos ellos la misma posibilidad de ocurrir. Cuando se establece esta conclusión, el problema se convierte en una decisión con "riesgo", donde se elige la acción que proporciona la ganancia mayor esperada.

---

[2] En teoría de la probabilidad, se dice que los eventos o sucesos E_1, E_2, ..., E_n son **mutuamente excluyentes** si la ocurrencia de uno de ellos implica la no ocurrencia de los otros $n - 1$ eventos. Por lo tanto, no pueden suceder simultáneamente dos eventos mutuamente excluyentes. En lenguaje formal, la intersección de cada par de ellos es el conjunto vacío (el evento nulo): $A \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, los eventos mutuamente excluyentes tienen la propiedad de que: $P(A \cap B) = 0$.

[3] La *incertidumbre* es "la imperfección en el conocimiento sobre el estado o los procesos de la naturaleza" (FAO/Gobierno de Suecia, 1995). La incertidumbre estadística es "la aleatoriedad o el error proveniente de varias fuentes como las descritas al usar la metodología estadística". Cuando las decisiones de ordenación van a basarse en estimados cuantitativos, provenientes de los modelos de evaluación, es deseable que la incertidumbre sea cuantificada y utilizada para calcular la probabilidad de lograr el objetivo deseado y/o de incurrir en eventos indeseables.

Fig. 1. Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

La gerencia de A no es ni pesimista ni optimista. Simplemente, carece de la información sobre las ofertas de sus competidores (probablemente, no sabe siquiera, quienes y cuantos son) y no tiene tampoco elementos de juicio para suponer que la "naturaleza" (restantes empresas) vayan a jugar una mejor que cualquier otra. En suma, ignora las posibilidades de que la rebaja máxima ofrecida por las 4 competidoras de A está situada en una determinada columna de las cinco posibles de la anterior matriz de ganancias; tampoco se atreve a pronunciarse a favor ni en contra de ninguna posibilidad. Entonces, su absoluta neutralidad le inclina a conceder iguales posibilidades a todas y cada una de las columnas de la matriz (o sea, una p = 20% = $\frac{1}{5}$), por lo que adopta la hipótesis laplaciana[4] de equiprobabilidad de las columnas que representan todos los estados de la naturaleza (e_j).

En estas condiciones, el jugador elegirá la fila correspondiente a:

$$\underset{i}{\mathrm{MAX}}\left[\frac{a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in}}{n}\right],$$

es decir, la fila para la cual la esperanza matemática o valor medio de sus ganancias es más grande. Se ve que la matriz del juego se reduce simplemente a una matriz columna. Si son conocidas las probabilidades de los diferentes estados posibles de la naturaleza, se utilizará igualmente el criterio de la esperanza matemática máxima reduciendo la matriz del juego a una matriz columna.

[4] **Pierre-Simon Laplace** fue un astrónomo, físico y matemático francés. Continuador de la mecánica newtoniana, descubrió y desarrolló la transformada de Laplace (de gran utilidad para la resolución de las ecuaciones diferenciales e integrales) y la ecuación de Laplace; como estadístico sentó las bases de la teoría analítica de la probabilidad.

Si definimos ahora la "esperanza matemática"[5] de un juego como el producto del premio (o castigo) que ofrece el mismo por la probabilidad de obtenerlo, veamos que pueden producirse los siguientes casos, teniendo en cuenta que: $E_i = p_j \times a_{ij}$ ($\forall i \in [1,4]$; $\forall j \in [1,5]$).

1) Si A ofrece una rebaja del 10%, su esperanza matemática de ganancia es:

$$E_1 = \frac{1}{5}(0.90\,P - C) + \frac{1}{5}\times 0 + \frac{1}{5}\times 0 + \frac{1}{5}\times 0 + \frac{1}{5}\times 0 = \frac{1}{5}(0.90\,P - C);$$

2) Si A ofrece una rebaja del 12%, su esperanza matemática de ganancia es:

$$E_2 = \frac{1}{5}(0.88\,P - C) + \frac{1}{5}(0.88\,P - C) + \frac{1}{5}\times 0 + \frac{1}{5}\times 0 + \frac{1}{5}\times 0 = \frac{2}{5}(0.88\,P - C);$$

3) Si A ofrece una rebaja del 16%, su esperanza matemática de ganancia es:

$$E_3 = \frac{1}{5}(0.84\,P - C) + \frac{1}{5}(0.84\,P - C) + \frac{1}{5}(0.84\,P - C) + \frac{1}{5}\times 0 + \frac{1}{5}\times 0 = \frac{3}{5}(0.84\,P - C);$$

4) Si A ofrece una rebaja del 20%, su esperanza matemática de ganancia es:

$$E_4 = \frac{1}{5}(0.80\,P - C) + \frac{1}{5}(0.80\,P - C) + \frac{1}{5}(0.80\,P - C) + \frac{1}{5}(0.80\,P - C) + \frac{1}{5}\times 0 = \frac{4}{5}(0.80\,P - C),$$

ya que se admite la hipótesis de igual probabilidad (p = 1/5 = 20%) para cada columna de la matriz anterior.

Pues bien, como sabemos que P = 42 546 270.00 €, podemos dibujar, en la Fig. 2, las funciones lineales (rectas) obtenidas de las esperanzas matemáticas en función del coste de la obra, que serán, respectivamente:

[5] En Estadística, la **esperanza matemática** (también llamada **esperanza**, **valor esperado**, **media poblacional** o simplemente **media**) de una variable aleatoria, es el número que formaliza la idea de *valor medio* de un fenómeno aleatorio. Cuando la variable aleatoria es discreta, la esperanza matemática es igual a la suma de la probabilidad de cada posible suceso aleatorio multiplicada por el valor de dicho suceso. Por lo tanto, representa la cantidad media que se "espera" como resultado de un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite un elevado número de veces. Cabe decir que el valor que toma la esperanza matemática en algunos casos puede no ser "esperado" en el sentido más general de la palabra (el valor de la esperanza puede ser improbable o incluso imposible).

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{5}(38\,291\,643.00 - C) \\ E_2 = \frac{2}{5}(37\,440\,718.00 - C) \\ E_3 = \frac{3}{5}(35\,738\,867.00 - C) \\ E_4 = \frac{4}{5}(34\,037\,016.00 - C) \end{cases}$$

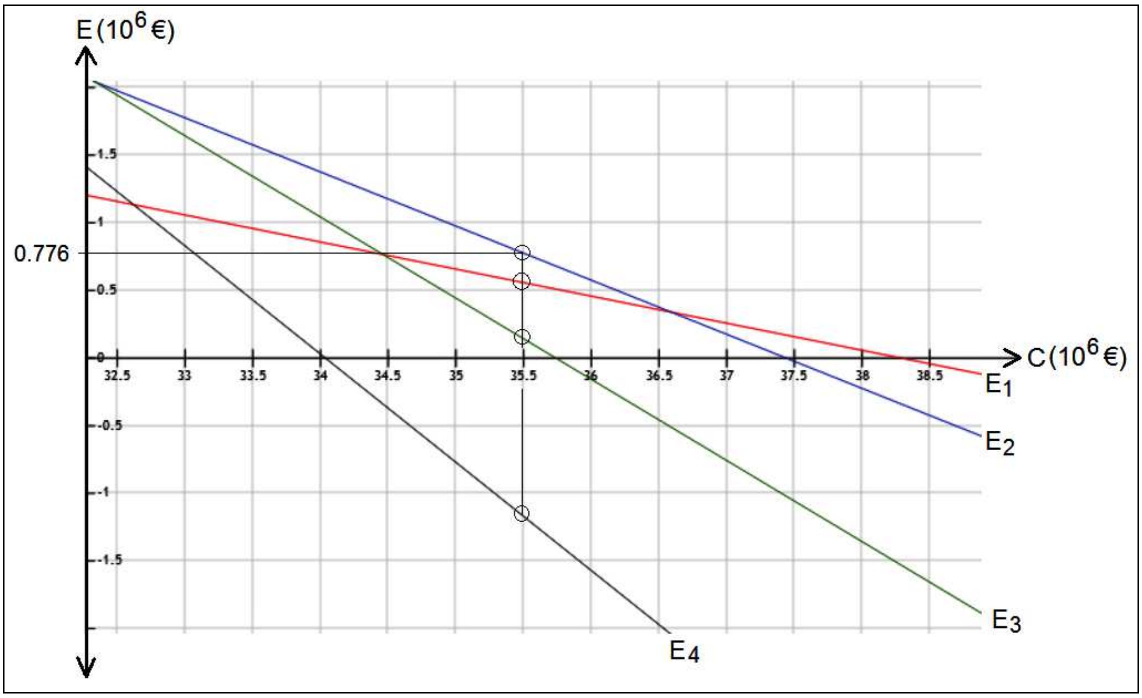


Fig. 2. Diversas esperanzas matemáticas (I).

Substituyendo el valor estimado de C en las expresiones anteriores, se tiene que:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{5}(38\,291\,643.00 - 35\,500\,000.00) = 558\,328.60\,€ \\ \mathbf{E_2 = \frac{2}{5}(37\,440\,718.00 - 35\,500\,000.00) = 776\,287.20\,€} \\ E_3 = \frac{3}{5}(35\,738\,867.00 - 35\,500\,000.00) = 143\,320.20\,€ \\ E_4 = \frac{4}{5}(34\,037\,016.00 - 35\,500\,000.00) = -1\,170\,387.20\,€ \end{cases}$$

, resultando la E_2 la mayor esperanza matemática obtenida, y siendo, incluso, la E_4 una esperanza matemática negativa[6].

Ello puede verse también reflejado en la Fig. 2 puesto que, en nuestro caso, al coste de realización previsto de la obra, como hemos visto, cuyo importe es C = 35 500 000.00 €, le corresponde, en el gráfico, una esperanza matemática máxima del tipo E_2, por lo que la empresa A debe ofrecer una baja de un 12% en la subasta.

O lo que es lo mismo: siendo el coste previsto de 35 500 000.00 €, hay la misma probabilidad de adjudicarse la obra bajando un 16.561% en la subasta que bajando un 12% (aunque parezca paradójico), razón por la cual y con el fin de que le descuenten lo mínimo, A deberá bajar sólo el 12%.

En general, puede elaborarse el siguiente cuadro-resumen de las diversas bajas en la subasta que se pueden ofrecer por parte de A, según los costes previstos C de la obra, deduciendo los extremos de los intervalos de clase, a saber:

COSTE PREVISTO EN OBRA (€)	**POLÍTICA A SEGUIR**	**BAJA EN LA SUBASTA**
C < 28 931 436.60	E_4	20%
28 931 436.60 ≤ C < 32 335 165.20	E_3	16%
32 335 165.20 ≤ C < 36 589 729.20	E_2	12%
36 589 729.20 ≤ C < 38 291 643.00	E_1	10%
C ≥ 38 291 643.00	"según el coste" (método normal)	$\frac{P-C}{P}\times 100$

Tabla 2. Bajas en la subasta según intervalos de coste.

4.3. Criterio de la ganancia esperada o de las probabilidades subjetivas

Puede darse el caso, de que la gerencia de A, debido a la buena información que posea acerca de las otras empresas licitantes, no conceda igual probabilidad a las cinco columnas de la matriz en cuestión. En este caso, las probabilidades de ocurrencia de los diversos estados de la naturaleza son distintas.

Aquí se han efectuado dos supuestos diferentes (aunque podríamos haber considerado algunos más), para cada uno de los cuales se calculará la ganancia esperada o valor esperado correspondiente. Así:

[6] Siempre que elijamos un sistema determinado tenemos que comprobar que tenga esperanza matemática positiva, puesto que si un sistema o estrategia tiene una esperanza matemática negativa es un sistema perdedor y, en el largo plazo, nos hará perder dinero.

a) Ninguna de las empresas competidoras suele arriesgar en las subastas, no soliendo bajar más del 10%. En este caso, se puede conceder a la 1ª columna de la matriz una probabilidad de $p_1 = 3/5 = 60\%$, a la 2ª columna una probabilidad de $p_2 = 1/5 = 20\%$ y a las restantes columnas de la matriz una probabilidad de $p_3 = p_4 = p_5 = 1/15 = 6.67\%$, de tal modo que resultará una probabilidad total de:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=1,$$

y se obtienen, considerando los mismos supuestos que en el caso anterior, las siguientes esperanzas matemáticas:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{3}{5}(0.90\,P-C)+\frac{1}{5}\times 0+\frac{1}{15}\times 0+\frac{1}{15}\times 0+\frac{1}{15}\times 0=\frac{3}{5}(0.90\,P-C) \\ E_2 = \frac{3}{5}(0.88\,P-C)+\frac{1}{5}(0.88\,P-C)+\frac{1}{15}\times 0+\frac{1}{15}\times 0+\frac{1}{15}\times 0=\frac{4}{5}(0.88\,P-C) \\ E_3 = \frac{3}{5}(0.84\,P-C)+\frac{1}{5}(0.84\,P-C)+\frac{1}{15}(0.84\,P-C)+\frac{1}{15}\times 0+\frac{1}{15}\times 0=\frac{13}{15}(0.84\,P-C) \\ E_4 = \frac{3}{5}(0.80\,P-C)+\frac{1}{5}(0.80\,P-C)+\frac{1}{15}(0.80\,P-C)+\frac{1}{15}(0.80\,P-C)+\frac{1}{15}\times 0=\frac{14}{15}(0.80\,P-C) \end{cases}$$

con lo que, probablemente, el resultado será distinto al que obtendríamos aplicando el criterio antecedente de la equiprobabilidad laplaciana. Para su cálculo, seguiríamos el mismo proceso que el ya indicado anteriormente, y entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{E_1 = \frac{3}{5}(0.90\times 42\,546\,270.00-35\,500\,000.00)=1\,674\,985.80\text{ €}} \\ E_2 = \frac{4}{5}(0.88\times 42\,546\,270.00-35\,500\,000.00)=1\,552\,574.10\text{ €} \\ E_3 = \frac{13}{15}(0.84\times 42\,546\,270.00-35\,500\,000.00)=207\,017.89\text{ €} \\ E_4 = \frac{14}{15}(0.80\times 42\,546\,270.00-35\,500\,000.00)=-1\,365\,451.70\text{ €} \end{cases}$$

Como se ve, en este supuesto convendría escoger la estrategia E_1 que, en la siguiente Fig. 3, alcanza el valor máximo de la esperanza matemática para el coste de 35 500 000.00 €.

Este criterio supone seleccionar aquella alternativa cuyo pago esperado o medio sea mejor (si los pagos son beneficios la de mayor beneficio esperado, y si son costes, la de menor coste esperado). Este criterio es el más común cuando las probabilidades son conocidas, pero no tiene por qué ser el más apropiado. Obsérvese que si el proceso de decisión se repite muchas veces en idénticas condiciones las leyes de los grandes números aseguran que en el límite el pago medio es la esperanza (Vitoriano, 2017).

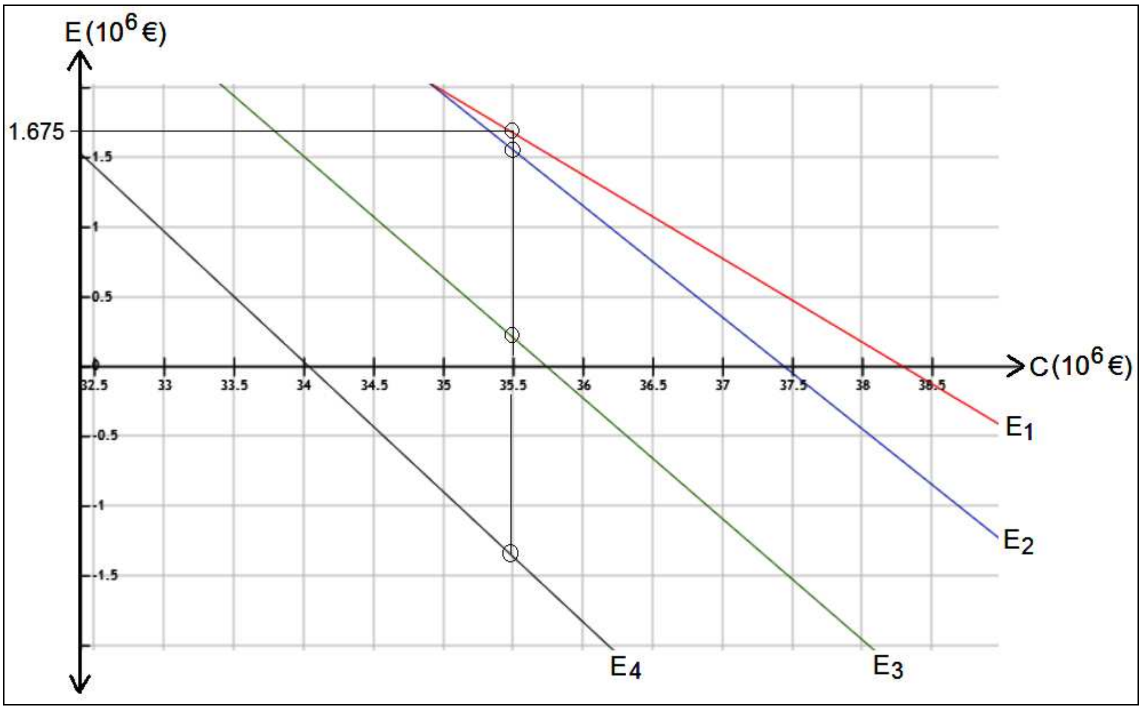


Fig. 3. Diversas esperanzas matemáticas (II).

b) <u>Una de las empresas que concurre a la subasta tiene la "irracional" costumbre, sea la obra o servicio como sea, de bajar por sistema en su oferta más del 20%</u>.

En este caso, concederemos a la 5ª columna de la matriz , v. gr., una probabilidad de $p_5 = 4/5 = 80\%$, y a las cuatro columnas restantes, una probabilidad de $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/20 = 5\%$ a cada una, de tal modo que resultará una probabilidad total de:

$\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{4}{5}=1$. Entonces, nos quedaría:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{20}(0.90\,P - C) + \frac{1}{20}\times 0 + \frac{1}{20}\times 0 + \frac{1}{20}\times 0 + \frac{4}{5}\times 0 = \frac{1}{20}(0.90\,P - C) \\ E_2 = \frac{1}{20}(0.88\,P - C) + \frac{1}{20}(0.88\,P - C) + \frac{1}{20}\times 0 + \frac{1}{20}\times 0 + \frac{4}{5}\times 0 = \frac{1}{10}(0.88\,P - C) \\ E_3 = \frac{1}{20}(0.84\,P - C) + \frac{1}{20}(0.84\,P - C) + \frac{1}{20}(0.84\,P - C) + \frac{1}{20}\times 0 + \frac{4}{5}\times 0 = \frac{3}{20}(0.84\,P - C) \\ E_4 = \frac{1}{20}(0.80\,P - C) + \frac{1}{20}(0.80\,P - C) + \frac{1}{20}(0.80\,P - C) + \frac{1}{20}(0.80\,P - C) + \frac{4}{5}\times 0 = \frac{1}{5}(0.80\,P - C) \end{cases}$$

También, aquí, el resultado (la elección del porcentaje de baja en la subasta) puede ser distinto al que hemos calculado anteriormente, debiendo escoger la alternativa E_2 por ser la mayor, como ha sucedido en el primer supuesto. En efecto:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{20}(0.90 \times 42\,546\,270.00 - 35\,500\,000.00) = 139\,582.15\text{ €} \\ \mathbf{E_2 = \frac{1}{10}(0.88 \times 42\,546\,270.00 - 35\,500\,000.00) = 194\,071.76\text{ €}} \\ E_3 = \frac{3}{20}(0.84 \times 42\,546\,270.00 - 35\,500\,000.00) = 35\,830.02\text{ €} \\ E_4 = \frac{1}{5}(0.80 \times 42\,546\,270.00 - 35\,500\,000.00) = -292\,596.80\text{ €} \end{cases}$$

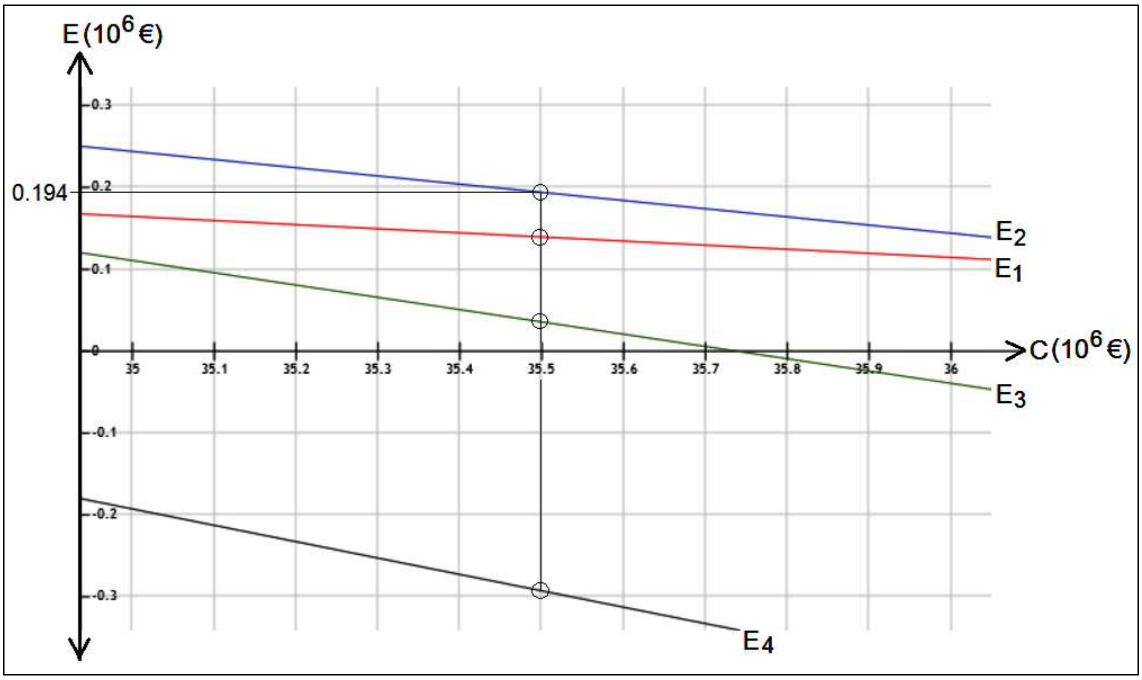


Fig. 4. Diversas esperanzas matemáticas (III).

4.4. Criterio de lo más probable

Se escogerá el estado de la naturaleza más probable y, para ese estado, la mejor alternativa o estrategia. En nuestro caso, habrá que contemplar los supuestos a) y b) del epígrafe anterior (ganancia esperada). Si ahora substituimos los valores monetarios correspondientes de la matriz del juego, cuyos elementos son los diferentes a_{ij}, obtendremos:

N

		↓				↓
		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
A	E_1	2 791 643	0	0	0	0
	E_2	1 940 718	1 940 718	0	0	0
	E_3	238 867	238 867	238 867	0	0
	E_4	-1 462 984	-1 462 984	-1 462 984	-1 462 984	0

Caso a) El estado de la naturaleza más probable es e_1, con $p_1 = 3/5 = 0.6$, y para ese estado la mejor alternativa es E_1 (2 791 643 €).

Caso b) El estado de la naturaleza más probable es e_5, con $p_5 = 4/5 = 0.8$, y para ese estado resulta válida cualquier alternativa (0 €).

4.5. Criterio del escenario medio

Se calcula el escenario medio (EM) por ponderación con las probabilidades de ocurrencia de cada estado de la naturaleza, escogiéndose la alternativa correspondiente a la mayor ganancia obtenible que, con frecuencia, deberá hallarse por interpolación entre dos valores consecutivos. O sea, en el caso de equiprobabilidad laplaciana, se tendría:

$$EM = 1\times0.2 + 2\times0.2 + 3\times0.2 + 4\times0.2 + 5\times0.2 = 0.2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3,$$

que corresponde al estado de la naturaleza e_3. Las ganancias serían las siguientes: 0 € para E_1; 0 € para E_2; 238 867 € para E_3; -1 462 984 € para E_4.

Entonces, la alternativa escogida sería la E_3.

De haber contemplado ambos supuestos de los dos epígrafes anteriores, se tendría:

Caso a):

$$EM = 1\times3/5 + 2\times1/5 + 3\times1/15 + 4\times1/15 + 5\times1/15 = 9/5 = 1.8,$$

que no se corresponde exactamente a ninguno de los estados de la naturaleza ya que $EM \notin \{N\}$, aunque si procedemos a estimar por interpolación lineal entre los estados 1 y 2 resulta el mayor a_{ij} = 1 940 718 €, por lo que se escogerá la alternativa E_2.

Caso b):

$$EM = 1\times1/20 + 2\times1/20 + 3\times1/20 + 4\times1/20 + 5\times4/5 = 9/2 = 4'5,$$

que tampoco se corresponde a ninguno de los estados ya que $EM \notin \{N\}$, aunque si procedemos por interpolación entre 4 y 5 resulta una ganancia negativa (pérdida) de: a_{ij} = -1 462 984/2 = -731 492 €, por lo que resulta contraproducente la asunción de cualquier alternativa.

4.6. Criterio de la variabilidad de los resultados

El hecho de utilizar como único criterio de decisión la esperanza matemática supone asumir también ciertas hipótesis de partida que pueden parecer discutibles, a saber:

- Que al sujeto decisor no le importe la dispersión o variabilidad del resultado (no se tiene en cuenta la desviación típica, la desviación media, la varianza, el rango o cualquier otra medida de la dispersión absoluta o relativa de la muestra).
- Que no existe riesgo de ruina o quiebra: es el riesgo que el desenlace de una determinada estrategia pueda suponer un quebranto económico tal que no pueda ser superado por la empresa. En este caso, el decisor pasaría a escoger, entre aquellas alternativas, los resultados más desfavorables que puedan ser asumidos por la empresa A. Esto tiene que ver con la capacidad de asumir pérdidas.

Pues bien, para solucionar estas molestas limitaciones se construyen unas determinadas funciones de utilidad, como se verá a continuación.

La consideración de la variabilidad de los resultados implica penalizar la esperanza económica con una medida que proporcione una idea acerca de la variabilidad de los datos (ganancias), considerando la multiplicación de esta medida de variabilidad por un determinado *coeficiente indicativo de temor al riesgo (*β*)*, tal que $0 \leq \beta \leq 1$, del sujeto decisor (la empresa A). La función de utilidad se halla restando al valor esperado de cada alternativa el coeficiente de aversión multiplicado por la desviación típica σ_{n-1} muestral y considerando los siguientes valores extremos:

- Si $\beta \to 1$, mayor aversión al riesgo. El decisor presenta un perfil más típicamente conservador.

- Si $\beta \to 0$, poca aversión al riesgo. El decisor presenta un perfil más arriesgado.

Función de utilidad = $U(E_i) = E_i - \beta \cdot \sigma_i$.

Obsérvese que cuando β tiende a 1 la cantidad a restar es mayor, por tanto la utilidad esperada es también menor, lo que corresponde a un perfil conservador. Por otra parte, las desviaciones típicas o "standard" de la muestra de las cinco ganancias de cada fila de la matriz del juego son las siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_1 = 1\,248\,460.70\ € \\ \sigma_2 = 1\,062\,975.00\ € \\ \sigma_3 = 130\,832.84\ € \\ \sigma_4 = 654\,266.33\ € \end{array}}$$

En nuestro caso existen cinco estados de la naturaleza e_j con sus probabilidades respectivas de ocurrencia diferentes según los tres supuestos anteriormente analizados, y se presupone una aversión al riesgo, por parte de los gestores de A, del 20%, con lo que se tendrá, para cada supuesto, las siguientes determinaciones:

Laplace:

$$\begin{cases} U(E_1) = E_1 - \beta \cdot \sigma_1 = 558\,328.60 - 0.2 \times 1\,248\,460.70 = 308\,636.46\text{ €} \\ \mathbf{U(E_2) = E_2 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = 776\,287.20 - 0.2 \times 1\,062\,975.00 = 563\,692.20\text{ €}} \\ U(E_3) = E_3 - \beta \cdot \sigma_3 = 143\,320.20 - 0.2 \times 130\,832.84 = 117\,153.63\text{ €} \\ U(E_4) = E_4 - \beta \cdot \sigma_4 = -1\,170\,387.20 - 0.2 \times 654\,266.33 = -1\,301\,240.50\text{ €} \end{cases}$$

Así pues, se escogería la alternativa E_2 por ser la mayor de todas.

Caso a):

$$\begin{cases} \mathbf{U(E_1) = E_1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 = 1\,674\,985.80 - 0.2 \times 1\,248\,460.70 = 1\,425\,293.70\text{ €}} \\ U(E_2) = E_2 - \beta \cdot \sigma_2 = 1\,552\,574.10 - 0.2 \times 1\,062\,975.00 = 1\,339\,979.10\text{ €} \\ U(E_3) = E_3 - \beta \cdot \sigma_3 = 207\,017.89 - 0.2 \times 130\,832.84 = 180\,851.32\text{ €} \\ U(E_4) = E_4 - \beta \cdot \sigma_4 = -1\,365\,451.70 - 0.2 \times 654\,266.33 = -1\,496\,305.00\text{ €} \end{cases}$$

Así pues, se escogería la alternativa E_1 por ser la mayor de todas.

Caso b):

$$\begin{cases} U(E_1) = E_1 - \beta \cdot \sigma_1 = 139\,582.15 - 0.2 \times 1\,248\,460.70 = -110\,109.99\text{ €} \\ U(E_2) = E_2 - \beta \cdot \sigma_2 = 194\,071.76 - 0.2 \times 1\,062\,975.00 = -18\,523.24\text{ €} \\ \mathbf{U(E_3) = E_3 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_3 = 35\,830.02 - 0.2 \times 130\,832.84 = 9663.45\text{ €}} \\ U(E_4) = E_4 - \beta \cdot \sigma_4 = -292\,596.80 - 0.2 \times 654\,266.33 = -423\,450.07\text{ €} \end{cases}$$

Aquí se escogería la alternativa E_3 por ser la mayor de todas ellas y, por cierto, la única positiva.

Cabe tener en cuenta, en fin, que tanto los valores de la esperanza matemática (y, consecuentemente, de las probabilidades asignadas a cada estado de la naturaleza) como del parámetro β influyen decisivamente en el cómputo de la utilidad esperada correspondiente, hasta el punto de poder hacer variar la estrategia inicialmente adoptada.

Así, por ejemplo, si consideramos la $U(E_1)$ escogida del caso a) y estudiamos la variabilidad de los resultados contemplando 4 diferentes valores que puede adoptar el decisor en relación al expresado parámetro (20%, 40%, 60% y 80%, salvando sus valores extremos), podremos representar la siguiente Fig. 5, en que:

$$\begin{cases} U(E_1) = E_1 - \beta_1 \cdot \sigma_1 = 1\,674\,985.80 - 0.2 \times 1\,248\,460.70 = 1\,425\,293.70\text{ €} \\ U(E_1) = E_1 - \beta_2 \cdot \sigma_1 = 1\,674\,985.80 - 0.4 \times 1\,248\,460.70 = 1\,175\,601.52\text{ €} \\ U(E_1) = E_1 - \beta_3 \cdot \sigma_1 = 1\,674\,985.80 - 0.6 \times 1\,248\,460.70 = 925\,909.38\text{ €} \\ U(E_1) = E_1 - \beta_4 \cdot \sigma_1 = 1\,674\,985.80 - 0.8 \times 1\,248\,460.70 = 676\,217.24\text{ €} \end{cases}$$

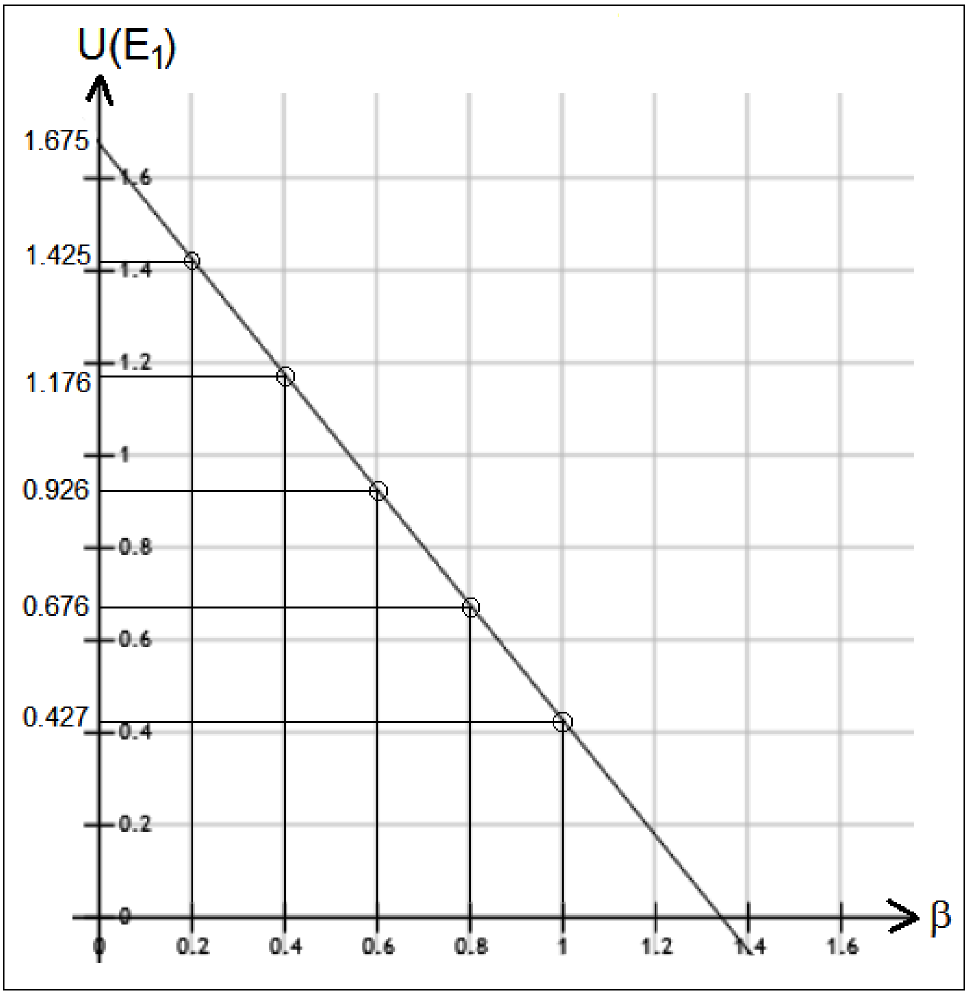


Fig. 5. Función U = f(β).

5. CRITERIOS SIN UTILIZACIÓN DE LOS ESTADOS DE LA NATURALEZA

5.1. Consideraciones previas

Lo cierto es que la estrategia a seguir no podrá ser elaborada hasta después de haber elegido un criterio determinado, teniendo en cuenta la actitud de la empresa A. Hasta ahora hemos aplicado el criterio de Laplace o del "razonamiento insuficiente", según el cual todas las probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza son iguales, o bien otros supuestos en los cuales dichas probabilidades podían ser diferentes. Se trata de situaciones de "incertidumbre". Seguidamente, se aplicarán al ejemplo anterior otros criterios también comúnmente empleados para resolver este tipo de problemas de decisión, que no utilizan las probabilidades de los estados de la naturaleza, y que se emplean cuando aquellas probabilidades son desconocidas o se prefiere que sean ignoradas.

5.2. Criterio de Von Neumann o criterio de Wald (pesimista)

Este teorema "minimax" data del año 1928, debido inicialmente a Von Neumann[7] y posteriormente perfeccionado (Wald, 1945). Establece que en ciertos juegos de suma cero (juegos bipersonales de suma nula), que involucran información perfecta (esto es, que cada jugador conoce de antemano la estrategia de su oponente y sus consecuencias), existe una estrategia que permite a ambos jugadores minimizar su máxima pérdida (de ahí el nombre de «minimax»). En particular, cuando se examina cada posible estrategia, un jugador debe considerar todas las respuestas posibles del jugador adversario y la pérdida máxima que ello puede acarrear. El jugador juega, entonces, con la estrategia que da como resultado la minimización de su máxima pérdida. Tal estrategia se considera óptima para ambos jugadores sólo en caso de que sus minimaxes sean iguales (en valor absoluto) y contrarios (en signo). Si el valor común es cero, el juego se convierte en un sinsentido.

Se supone que las empresas A y B actúan inteligente y prudentemente. En estas condiciones, A elegirá la fila de la matriz en la cual su ganancia más pequeña es máxima, mientras que B o N elegirá entre todas las columnas aquella en la cual su mayor pérdida es mínima. Este comportamiento corresponde a la actitud de una empresa que no desea correr ningún riesgo[8].

Así, A elegirá la fila correspondiente a:

$$\underset{i}{\mathrm{MAX}}\,[\underset{j}{\mathrm{MIN}}\; a_{ij}] \quad \begin{cases} \forall i = 1, 2, ..., m, \\ \forall j = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

y B la columna correspondiente a:

$$\underset{j}{\mathrm{MIN}}\,[\underset{i}{\mathrm{MAX}}\; a_{ij}] \quad \begin{cases} \forall i = 1, 2, ..., m, \\ \forall j = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

[7] **John von Neumann** fue un matemático húngaro-estadounidense que realizó contribuciones fundamentales en diversos campos: física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, teoría de juegos, ciencias de la computación, economía, análisis numérico, cibernética, hidrodinámica, estadística y muchos otros campos. Está considerado como uno de los más importantes matemáticos de la historia moderna.

[8] Desde un punto de vista económico, el riesgo significa incertidumbre sobre la evolución de un activo, e indica la posibilidad de que una inversión ofrezca un rendimiento distinto del esperado (tanto a favor como en contra del inversor, aunque lógicamente a éste sólo le preocupa el riesgo de registrar pérdidas). También puede entenderse como una medida de la magnitud de los daños frente a una situación peligrosa. El riesgo se mide asumiendo una determinada vulnerabilidad frente a cada tipo de peligro. Si bien no siempre se hace, debe distinguirse adecuadamente entre peligrosidad (probabilidad de ocurrencia de un peligro), vulnerabilidad (probabilidad de ocurrencia de daños dado que se ha presentado un peligro) y riesgo (propiamente dicho).

Fig. 6. John Von Neumann (1903-1957).

Para cada alternativa se supone que va a pasar lo peor, eligiéndose aquella alternativa que ofrezca mejor valor. De esta forma, se asegura que, en el peor de los casos, se obtenga lo mejor posible, que corresponde a una visión pesimista de lo que puede ocurrir. En el caso de que los pagos sean costes, esta filosofía de enfoque supone elegir el mínimo de los máximos (“minimax”), mientras que si son ganancias será el máximo de los mínimos (“maximin”) (Vitoriano, 2007).

La matriz del juego hemos visto que es:

		N							
	E1	2 791 643	0	0	**0**	**0**	0	←	MAXIMIN
	E2	1 940 718	1 940 718	0	**0**	**0**	0	←	
A	**E3**	238 867	238 867	238 867	**0**	**0**	0	←	
	E4	-1 462 984	-1 462 984	-1 462 984	-1 462 984	0	-1 462 984		
		2 791 643	1 940 718	238 867	0	0			
					↑	↑			
				MINIMAX					

La estrategia pura a seguir por la empresa A vendría dada por cualquiera de las tres primeras filas (E_1, E_2, E_3). Si la naturaleza fuese substituida por un jugador inteligente y prudente, éste elegiría las columnas 4 y 5. En definitiva, hay seis puntos de equilibrio o puntos de silla, de valor: v = 0 €.

5.3. Criterio optimista

Este criterio se basa en la elección del mejor de los casos posibles. Considera los puntos de vista optimista y agresivo. Un decisor optimista cree que siempre obtendrá el mejor resultado sin importarle la decisión tomada. Un decisor agresivo escoge la decisión que le proporcionará una mayor ganancia. Para encontrar la decisión óptima se marca la máxima ganancia para cada una de las alternativas de decisión y se selecciona la decisión que tiene el máximo de las ganancias. Este criterio es el único que se fundamenta en el principio de que, una vez se ha tomado la decisión, la naturaleza siempre favorece esta decisión, mostrándose absolutamente optimista y alegrándose por aquello que se gana. Ello comporta unos inconvenientes sobre los cuales no nos extenderemos aquí por obvias razones de espacio.

Es el criterio "maximax", justamente opuesto al anterior. Para cada alternativa se supone que pasará lo mejor, eligiéndose la que ofrezca el mejor valor. Este criterio apenas es utilizado ya que no tiene en cuenta, en ningún momento, los riesgos que se corren al tomar una determinada decisión (Vitoriano, 2007).

N

	E_1	2 791 643	0	0	0	0	2 791 643	←	MAXIMAX
	E_2	1 940 718	1 940 718	0	0	0	1 940 718		
A	E_3	238 867	238 867	238 867	0	0	238 867		
	E_4	-1 462 984	-1 462 984	-1 462 984	-1 462 984	0	-1 462 984		

En este caso, los máximos de las filas coinciden con las ganancias de cada una de ellas, por lo que se escogería la estrategia pura E_1.

5.4. Criterio de Hurwicz o del optimismo parcial

Este criterio (Hurwicz, 1945) combina salomónicamente las actitudes pesimista y optimista, valorando cada alternativa con una ponderación entre lo mejor y lo peor posible. La ponderación se lleva a cabo multiplicando lo mejor por un cierto factor α comprendido entre 0 y 1, denominado "índice de optimismo", y lo peor por $1-\alpha$, sumando ambas cantidades. Se elegirá la alternativa que mejor valor ofrezca.

El criterio en cuestión presenta la dificultad de estimar subjetivamente el valor del índice de optimismo del decisor, de tal modo que habitualmente se obtiene la solución para todos los posibles valores de este índice y se intenta situar al decisor en alguno de los intervalos resultantes del índice de optimismo (Vitoriano, 2007). No obstante, es bastante normal la adopción de un valor intermedio $\alpha = ½$.

Fig. 7. Leonid Hurwicz (1917-2008).

Así pues, el optimismo de A se define por el factor α / $0 \leq \alpha \leq 1$. Si D y d son, respectivamente, el mayor y el menor de los elementos de una fila, se elegirá la fila correspondiente a:

$$\text{Max } [\alpha \cdot D + (1-\alpha) \cdot d].$$

Entonces, en nuestro caso, considerando $\alpha = ½$ (50% de optimismo y 50% de pesimismo), se tiene:

$$\begin{cases} \textbf{Fila 1: } \tfrac{1}{2} \times \textbf{2 791 643} + \tfrac{1}{2} \times \textbf{0} = \textbf{1 395 821.50 €} \\ \text{Fila 2: } \tfrac{1}{2} \times 1\,940\,718 + \tfrac{1}{2} \times 0 = 970\,359.00 \text{ €} \\ \text{Fila 3: } \tfrac{1}{2} \times 238\,867 + \tfrac{1}{2} \times 0 = 119\,433.50 \text{ €} \\ \text{Fila 4: } \tfrac{1}{2} \times 0 + \tfrac{1}{2} \times (-1\,462\,984) = -731\,492.00 \text{ €} \end{cases}$$

, luego se escogerá la estrategia E_1, incluso con independencia del valor subjetivamente adoptado del parámetro α, como puede comprobarse.

Cuando la matriz del juego sólo tiene 2 columnas, el criterio de Laplace no es sino un caso particular del criterio de Hurwicz[9] para un empresario mitad optimista y mitad pesimista. Pero cuando dicha matriz tiene más de dos columnas no sucede ya lo mismo. Mientras el criterio de Hurwicz sólo hace intervenir a dos columnas en la evaluación de cada estrategia a seguir, el criterio de Laplace hace intervenir a todas las columnas en la evaluación. En general, los resultados obtenidos con la aplicación de ambos criterios diferirán por esta causa, como sucede en nuestro ejemplo (Ballestero, 1973).

[9] **Hurwicz** fue un economista y matemático estadounidense de origen polaco. Su reconocimiento académico se debe ante todo a sus investigaciones acerca del diseño de mecanismos y en teoría de la compatibilidad de incentivos. Ambas son ampliamente utilizadas en economía, sociología y ciencias políticas como instrumentos para conseguir el diseño de instituciones que optimicen ciertos resultados dados. Fue uno de los primeros economistas en reconocer el valor de la Teoría de Juegos, y había sido pionero en su aplicación.

5.5. Criterio de Savage o del arrepentimiento

Este criterio (Savage, 1955) toma en consideración el coste de oportunidad[10], penalización o arrepentimiento por no prever correctamente el estado de la naturaleza. Estos costes de oportunidad se evalúan para cada alternativa y cada estado, haciendo la diferencia entre lo mejor de ese estado y lo que proporciona esa alternativa para ese estado, construyendo la llamada "matriz de penalizaciones o costes de oportunidad". Sobre esta matriz se aplican los criterios anteriores, pudiendo aplicarse el del coste esperado, o lo que es más habitual, el criterio *mínimas*, conociéndose entonces también como el criterio de minimizar el máximo arrepentimiento.

Este criterio lo utilizarían las personas que tienen miedo a equivocarse y arrepentirse subsiguientemente. Se construye una nueva matriz con los costes de oportunidad en base a no escoger la mejor estrategia en cada estado de la naturaleza. Después, se averiguan los valores más altos (costes más grandes) de cada estrategia. Por último, se escoge el valor más bajo que representa la estrategia que tiene el coste de oportunidad menor.

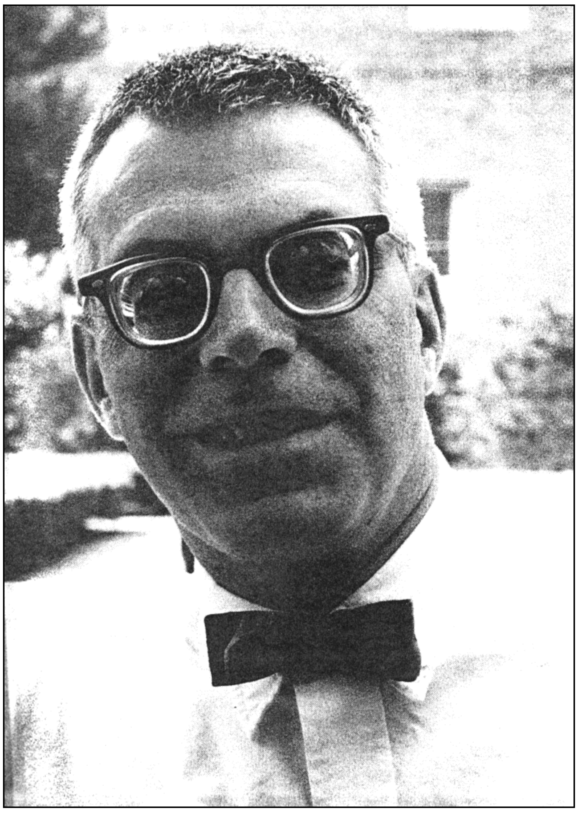


Fig. 8. Leonard Jimmie Savage (1917-1971).

[10] El "coste de oportunidad" es el coste de la alternativa a la que renunciamos cuando tomamos una determinada decisión, incluyendo los beneficios que podríamos haber obtenido de haber escogido la opción alternativa. Por lo tanto, el coste de oportunidad son aquellos recursos que dejamos de percibir o que representan un coste por el hecho de no haber elegido la mejor alternativa posible, cuando se tienen unos recursos limitados (generalmente dinero, factor trabajo y tiempo). El término "coste de oportunidad" también es denominado como "el valor de la mejor opción no seleccionada".

El primer paso, pues, estriba en construir la matriz de penalizaciones, perjuicios ("penas o lamentos") o costes de oportunidad, cuyos elementos α_{ij} representan la desviación existente entre la ganancia realizada y la presumible. La matriz la formamos por columnas, obteniendo el máximo de la columna y restándole a este valor el pago de cada alternativa (Vitoriano, 2007). La empresa A escogerá la fila para la cual el riesgo más grande es mínimo (*minimax*). De este modo, dicha matriz será tal que sus elementos viene dados por:

$$\alpha_{ij} = \max a_{kj} - a_{ij}\,.$$

La empresa A elegirá la fila correspondiente a:

$$\underset{j}{\mathrm{MIN}}\ [\underset{i}{\mathrm{MAX}}\ \alpha_{ij}] \quad \begin{cases} \forall i = 1, 2, ..., m, \\ \forall j = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Así, la matriz de perjuicios obtenida es la siguiente:

		N						
	E_1	0	1 940 718	238 867	0	0	1 940 718	
	E_2	850 925	0	238 867	0	0	850 925	← MINIMAX
A	E_3	2 552 776	1 701 851	0	0	0	2 552 776	
	E_4	4 254 627	3 403 702	1 701 851	1 462 984	0	4 254 627	

Se elegirá, consecuentemente, la alternativa E_2 (minimax).

5.6. Criterio de Agrawal-Heady o del beneficio

Este criterio, como otros, se fundamenta en el principio de que, una vez tomada la decisión, la naturaleza siempre se opondrá a ella y, ante este hecho, se adopta la postura de alegrarse de lo que se deja de perder. Se hará una breve descripción del mismo pero sin llegar a aplicarlo en nuestro ejemplo.

Aquí, cabe darle la vuelta al anterior criterio de Savage[11], y en vez de acongojarse por su error *parcial*, el decisor puede alegrarse por su acierto *parcial*. Estos aciertos parciales del decisor se anotan en una nueva matriz: la de las cantidades que la empresa A deja de perder por no equivocarse del todo. Con este criterio, en definitiva, la empresa A llega a una conclusión que se aparta tanto de la del criterio de Wald como de la del criterio de Savage.

[11] **Savage** fue un matemático estadounidense especializado en estadística. Su obra más conocida data del año 1954, publicada el año siguiente, y se titula *The Foundations of Statistics* (citada en la bibliografía) en el que introduce ciertos elementos sobre la teoría de la decisión. En su obra menciona y elabora subjetividad de la utilidad esperada estableciendo las bases de la inferencia bayesiana y sus fecundas aplicaciones a la teoría de los juegos de estrategia.

Conviene recalcar, en suma, que el decisor se manifiesta como un pesimista absoluto al aplicar los tres criterios. Lo que distingue esencialmente a estos criterios es la mentalidad conformista, inconformista o timorata para la que fueron pensados por sus ilustres autores (Ballestero, 1973).

5.7. Valor esperado de la información perfecta (VEIP)

Se parte de la base de que podría modificarse el conocimiento que se tiene acerca de los estados de la naturaleza. Esa modificación puede conllevar un coste, por lo que cabe preguntarse ¿qué valor tiene disponer de esa información?, o bien ¿cuánto se está dispuesto a pagar por ella? Es obvio que con mayor información la ganancia esperada también será mayor (Vitoriano, 2007).

Se define la *ganancia esperada con información perfecta* (GEIP) a la esperanza matemática de la ganancia tomando para cada estado de la naturaleza la mejor opción posible. Para el ejemplo que nos ocupa sería, v. gr., en el supuesto a) antedicho del epígrafe 4.3.:

$$GEIP = 3/5 \cdot 2\,791\,643 + 1/5 \cdot 1\,940\,718 + 1/15 \cdot 238\,867 + 1/15 \cdot 0 +$$

$$+ 1/15 \cdot 0 = 2\,079\,053.87 \text{ €} .$$

Por otra parte, se estima la *ganancia esperada con incertidumbre* (GEI), es decir, la ganancia esperada con la decisión que se haya tomado con alguno de los criterios anteriores. De este modo, si la decisión seleccionada es la E_2, la GEI es 1 940 718.00 €.

Por último, se define el valor esperado de la información perfecta (VEIP) como la diferencia existente entre ambas ganancias anteriormente definidas, esto es, en este caso:

$$VEIP = GEIP - GEI = 2\,079\,053.87 - 1\,940\,718.00 = 138\,335.87 \text{ €}.$$

Obsérvese que ello resulta equivalente a utilizar el criterio de Savage (o de los costes de oportunidad) con la mínima penalización esperada (Vitoriano, 2007).

6. RESULTADO DE LOS CRITERIOS APLICADOS

Puede verse, en definitiva, que la aplicación de los diversos criterios expuestos puede conducir a la adopción de estrategias diferentes por parte de la empresa A.

Ello puede sintetizarse en el siguiente cuadro-resumen, con indicación expresa de las 15 estrategias puras elegidas, según cada uno de los criterios adoptados por la empresa licitante A.

<table>
<tr><td rowspan="15">MODALIDAD</td><td rowspan="9">CON ESTADOS DE LA NATURALEZA</td><td>LAPLACE</td><td>E_2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">GANANCIA ESPERADA</td><td>E_1</td></tr>
<tr><td>E_2</td></tr>
<tr><td>MÁS PROBABLE</td><td>E_1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ESCENARIO MEDIO</td><td>E_3</td></tr>
<tr><td>E_2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">VARIABILIDAD DE RESULTADOS (β = 0.2)</td><td>E_2</td></tr>
<tr><td>E_1</td></tr>
<tr><td>E_3</td></tr>
<tr><td rowspan="6">SIN ESTADOS DE LA NATURALEZA</td><td rowspan="3">NEUMANN O WALD (PESIMISTA)</td><td>E_1</td></tr>
<tr><td>E_2</td></tr>
<tr><td>E_3</td></tr>
<tr><td>OPTIMISTA</td><td>E_1</td></tr>
<tr><td>HURWICZ (α = ½)</td><td>E_1</td></tr>
<tr><td>SAVAGE</td><td>E_2</td></tr>
</table>

Tabla 3. Resumen de los resultados obtenidos.

Puede comprobarse que de entre las 15 opciones calculadas por aplicación de todos los criterios contemplados en el presente artículo, aparece como alternativa escogida la E_1 6 veces, la E_2 6 veces, la E_3 3 veces y la E_4 ninguna vez, por lo que se concluye la conveniencia de que la empresa A se decida por efectuar, en la plica de la subasta en cuestión, una rebaja teniendo en cuenta las 2 primeras alternativas estudiadas, esto es, ofreciendo una bajada del 10-12%, o mejor aún, efectuando una media aritmética ponderada de todas las opciones, así:

$$R = \frac{6 \times 10\% + 6 \times 12\% + 3 \times 16\% + 0 \times 20\%}{15} = 12\%,$$

<u>con lo que la determinación más racional que adoptará la empresa A deberá ser el efectuar una bajada en la subasta del 12% sobre el presupuesto de licitación de la correspondiente obra o servicio</u>.

7. CONCLUSIÓN

En esta exposición se ha tratado de simplificar al máximo el presente problema; cuantos más datos se tuvieran de las otras empresas competidoras, su complicación iría aumentando progresivamente aunque, en cualquier caso, el problema es resoluble.

Hay que tener en cuenta, por otra parte, que es muy conveniente aplicar estos criterios en el momento de concurrir a la subasta. Podemos comparar el caso al de un buen jugador de quinielas: manejando su teoría combinatoria, llega a la conclusión de que debe rellenar 644 columnas para tener cierta seguridad de acertar; y, sin embargo, el simple aficionado, para tener la misma seguridad, necesitará probablemente, sin usar ninguna técnica estadística especial, rellenar 2 ó 3000 columnas, con la consiguiente diferencia de coste.

Pues bien, el caso planteado es muy parecido: si la probabilidad de adjudicarse la obra es la misma, ¿porqué se tiene que bajar un 16.561% si da igual hacerlo un 12% desde el punto de vista probabilístico? Además, con ello, se ganará un 4.561% del presupuesto en todas las certificaciones que se cobren, lo que conllevará, en el total de la obra estudiada, una cantidad de:

$$\frac{4.561 \times 42\,546\,270.00}{100} = 1\,940\,535.38 \text{ €},$$

lo que representa, prácticamente, 2 millones de euros, cantidad que, desde luego, no supone un ahorro en absoluto despreciable.

La determinación de las bajas en la subasta, en definitiva, es algo que no sólo debe realizarse con el estudio exhaustivo del proyecto técnico, del terreno y de las condiciones de financiación de la empresa licitante, sino también mediante la aplicación de reputadas técnicas de la Investigación Operativa, como la teoría de la Decisión, que -por complicadas que puedan parecer, en un principio- inmediatamente confieren un alto grado de rentabilidad a la gestión empresarial efectuada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AGRAWAL, R.C. y HEADY, E.O. (1972). *Operations research methods for agricultural decisions*. Iowa State University Press. 303 p.

2. BALLESTERO, E. (1973). *Principios de economía de la empresa*. Ed. Alianza Universidad. Madrid. 494 p.

3. DESBAZEILLE, G. (1969). *Ejercicios y problemas de Investigación Operativa*. Ediciones ICE. Madrid. 358 p.

4. FRANQUET, J.M. (2012). *El sector primari a les terres de l'Ebre (Una aplicació del mètodes quantitatius)*. Ed. IDECE (Institut per al Desenvolupament de les Comarques de l'Ebre). Departament de Territori i Sostenibilitat. Generalitat de Catalunya. Tortosa (Tarragona). 676 p.

5. HURWICZ, L. (1945). "The Theory of Economic Behavior". *American Economic Review*, 35(5), pp. 909-925.

6. SAVAGE, L.J. (1955). "The Foundations of Statistics". Bull. Amer. Math. Society. 61, pp. 236-239. https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183519727.

7. VITORIANO, B. (2007). "Teoría de la Decisión: Decisión con incertidumbre, Decisión multicriterio y Teoría de juegos". Universidad Complutense de Madrid. Madrid. 106 p.

8. WALD, A. (1945). "Statistical Decision Functions which Minimize the Maximum Risk". Ed. Annals of Mathematics, 46, pp. 265-280.

RELACIÓN DE TABLAS Y FIGURAS: