ECUACIONES DIFERENCIALES MICROECONÓMICAS EN DERIVADAS PARCIALES

Microeconomics differential equations in partial derivatives

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
CENTRO ASOCIADO DE TORTOSA

ECUACIONES DIFERENCIALES MICROECONÓMICAS EN DERIVADAS PARCIALES

Microeconomics differential equations in partial derivatives

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS

2016

Primera edición, octubre de 2016

e-mail: jfbernis@iies.es

ISBN-13: 978-84-
ISBN-10: 9-7884

Depósito legal: T-1399-2016

Edita: UNED-Tortosa. C/ Cervantes, nº: 17, 43.500 TORTOSA
Imprime: **Gráfica Dertosense, S.L.**
C/ Cervantes, nº: 21, 43.500 Tortosa.
Tel.: 977 44 00 28
Fax: 977 78 39 22
e-mail: graficadertosense@hotmail.com

Impreso en España
Printed in Spain

PRESENTACIÓN

"Los que se enamoran de la práctica sin la teoría son como los pilotos sin timón ni brújula, que nunca podrán saber a dónde van".

Leonardo Da Vinci (1452-1519)

"La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos ellos sencillos y fáciles".

René Descartes (1596-1650)

A veces resulta extremadamente difícil encontrar manuales que aúnen la economía con las matemáticas; la teoría con la práctica; que aborden la relación existente entre las matemáticas y la economía desde un punto de vista teórico-práctico intentando responder a las cuestiones básicas que plantea la economía.

El Dr. y profesor Josep Mª Franquet Bernis nos presenta un manual que, precisamente, presenta estas características, invitándonos a reflexionar sobre el valor añadido que tiene el uso analítico de las matemáticas, especialmente las más avanzadas, como recurso para la comprensión de la Economía. A lo largo de toda su obra nos invita al razonamiento frente a la propia intuición, a la reflexión sobre el valor que tienen los modelos matemáticos basados, especialmente, en las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, y su aplicación a la teoría microeconómica, como un mecanismo que nos permita una mejora en la toma de decisiones.

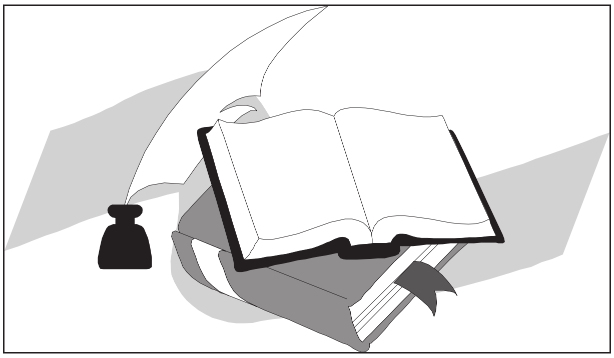
El Dr. Franquet forma parte del grupo de economistas, cada vez más numeroso, que consideran que la utilización de las matemáticas constituye un elemento clave para entender la Economía. Su utilización permite la comprensión de las relaciones cada vez más complejas del comportamiento económico, la resolución de problemas de los que conocemos su punto de partida y hacia dónde se quiere llegar pero que no se conoce muy bien cómo hacerlo y que, a veces, ni tan siquiera existen las herramientas adecuadas para llegar a la resolución de los problemas planteados. Es en este contexto, en el que el manual del Dr. Franquet se nos presenta como de gran ayuda para la comprensión de los problemas económicos fundamentales a los que debe hacer frente nuestra sociedad.

En definitiva, nos encontramos ante un manual bien estructurado y con un alto nivel de rigor metodológico que abarca algunos de los principales temas de la teoría económica. El Dr. Franquet hace fácil lo difícil, con una exposición amena de los problemas teóricos que se quieren abordar y su solución matemática correspondiente. Permite al lector interesado ampliar sus conocimientos y comprobar su comprensión mediante una multitud de ejemplos teórico-prácticos, desde niveles normales de resolución a niveles mucho más complejos y avanzados. Esta facilidad de comprensión de los problemas planteados, de ir de menos a más dificultad, se debe, sin duda, a que el autor ha sido y es profesor universitario con una larga trayectoria académica y divulgativa, lo que le permite conocer a la perfección las limitaciones y el punto de partida de muchos de nuestros alumnos, adecuándose el manual, por lo tanto, a sus necesidades.

Como indica el propio autor, el presente manual es la continuación de su libro anterior titulado "Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes". Ambos manuales son de lectura obligatoria para todos aquellos interesados tanto en la economía como en las matemáticas y va dirigido a "mentes inquietas" que no se conforman con lo banal y preestablecido; que necesitan respuestas a los formidables retos que plantea la Economía y el presente manual les proporciona las herramientas adecuadas para ello.

Dr. Jordi Sardà Pons

Profesor titular, URV
Profesor tutor, UNED



PRÓLOGO

El presente trabajo, continuación de nuestra anterior monografía sobre las aplicaciones económicas de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes, versa sobre la utilidad específica de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (obviadas allí expresamente) para la resolución de distintos problemas en el ámbito de la economía y de la empresa, donde es frecuente estudiar la evolución de los valores de una misma función multivariante en distintos instantes temporales. Se complementa con la conceptualización práctica de los desarrollos en serie de Fourier, de notables utilidades en el análisis económico, así como una ampliación a las funciones multivariantes del cálculo variacional aplicado a las funciones económicas de una sola variable, que en aquel primer trabajo se llevaba a cabo. Como entonces, está pensado esencialmente para los programas de especialización en modelos matemáticos avanzados correspondientes a un curso anual de Master o Doctorado de las Facultades de Economía y Administración y Dirección de Empresas de nuestras Universidades, aunque también de Ingeniería.

El empleo, en general, de las ecuaciones infinitesimales (diferenciales, integro-diferenciales e integrales, así como sus sistemas) presupone que conocemos el comportamiento del sistema dinámico para cada valor de los factores que influyen sobre él (las denominadas “variables independientes o explicativas”) y que, en la mayoría de los casos, incluye la variable “tiempo”. No obstante, no siempre podemos conocer los valores que debe tomar la función con la que se modeliza la situación en cada instante temporal, sino que sólo sabemos lo que ocurre para determinados valores de las variables independientes de nuestra función. Tal situación la encontramos frecuentemente en el campo de la Teoría Económica (macro y microeconómica) al determinar las condiciones de estabilidad dinámica o la trayectoria del tiempo de crecimiento, también de las técnicas actuariales o bien, por ejemplo, cuando en el ámbito de la Matemática Financiera se estudian empréstitos u operaciones de constitución de capital en los que no es necesario conocer qué ocurre en cada instante del tiempo sino sólo el resultado al final de un cierto período de tiempo establecido.

Debe tenerse en cuenta que el tratamiento de los problemas económicos desde una perspectiva dinámica permite una modelización más próxima a la realidad que otras basadas en modelos estáticos y/o estáticos-comparativos. Sobre este particular ya nos extendimos suficientemente en nuestra anterior publicación. Los métodos de discretización a utilizar con las ecuaciones en derivadas parciales deben ser suficientemente rápidos y exactos para que tenga sentido su uso y mejore la respuesta dadas por los procesos estocásticos. No se pretende indicar aquí todas las posibilidades de las ecuaciones en derivadas parciales en los diversos campos de la Economía, aunque sí queremos dejar patente sus grandes posibilidades mediante la resolución de numerosos ejemplos aplicados, fundamentalmente, a la Microeconomía.

Dado el carácter eminentemente práctico de la monografía que aquí se presenta, los ejercicios propuestos poseen un elevado nivel de detalle en su desarrollo resolutivo, pretendiéndose con ello patentizar la necesaria relación existente entre éstos y los conocimientos teóricos, puesto que dichos ejercicios constituyen un medio poderoso de adquisición y de consolidación de los expresados conocimientos. Eso sí, como siempre, todos aquellos errores que puedan aparecer en el texto serán de responsabilidad exclusiva de este autor.

De cualquier manera, tal como señalábamos en nuestra anterior monografía, es sin duda la práctica profesional la que hará surgir problemas nuevos a los que habrá que enfrentarse y resolver con rigor científico a través de nuestros propios conocimientos. Y es que el cultivo del mecanismo abstracto no deja huella útil alguna si no va acompañado del ejercicio de las facultades de abstracción y concreción a los problemas reales y de interpretación práctica de sus resultados. Tal es el carácter que tampoco hemos querido obviar, en ningún momento, en la presente monografía de economía matemática.

Al final del trabajo se incluye una lista de referencias bibliográficas de la que debo advertir, como suele suceder, que son todos los que están pero, evidentemente, que no están todos los que son. La selección ha sido hecha por gusto personal del autor y por aproximación al nivel del texto. Por cierto que, desde estas líneas, y en el marco limitado de estas reflexiones, quiero rendir tributo sincero de admiración y agradecimiento a los excelentes libros de texto y consulta existentes, citados en la bibliografía, sobre las materias objeto de tratamiento, habiendo sido influido notablemente, en mis estudios, por el brillante trabajo de sus autores.

A lo largo de cualquier trabajo científico, como el que ahora ofrecemos, se acumula toda una serie de débitos intelectuales y profesionales que resulta harto difícil describir en toda su extensión; pese a ello, algunos me parecen especialmente relevantes. Tampoco olvida, quien esto escribe, la formidable deuda de gratitud contraída con los que fueron sus guías y maestros, algunos de ellos ya desaparecidos. Mi reconocimiento, en fin, a las diversas instituciones que han apoyado la edición del presente libro y, particularmente, al Patronato del

Consorcio universitario del Centro Asociado en Tortosa de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), a la imprenta Gráfica Dertosense, S.L. por el cuidadoso esmero puesto en la edición de la obra, a mi competente compañero en las tareas docentes universitarias, Dr. Jordi Sardà, por la presentación así como sus acertadas observaciones y, en general, a todos cuantos se han interesado por la elaboración de esta monografía, aportando sugerencias y valiosos consejos dirigidos a la mejor consecución de nuestro empeño.

Tortosa, agosto de 2016
EL AUTOR

PRÒLEG

El present treball, continuació de la nostra anterior monografia sobre les aplicacions econòmiques de les equacions infinitesimals i recurrents, versa sobre la utilitat específica de les equacions diferencials en derivades parcials (obviades allí expressament) per a la resolució de diversos problemes en l'àmbit de l'economia i de l'empresa, on és freqüent estudiar l'evolució dels valors d'una mateixa funció multivariant en diferents instants temporals. Es complementa amb la conceptualització pràctica dels desenvolupaments en sèrie de Fourier, de notòries utilitats en l'anàlisi econòmica, així com una ampliació a les funcions multivariants del càlcul variacional aplicat a les funcions econòmiques d'una sola variable, que en aquell primer treball es portava a terme. En definitiva, està adreçat essencialment als programes d'especialització en models matemàtics avançats corresponents a un curs anual de Màster o Doctorat de les Facultats d'Economia i Administració i Direcció d'Empreses de les nostres Universitats, encara que també d'Enginyeria.

La utilització, en general, de les equacions infinitesimals (diferencials, integro-diferencials i integrals, així com els seus sistemes) pressuposa que coneixem el capteniment del sistema dinàmic per a cada valor dels factors que influeixen sobre ell (les anomenades "variables independents o explicatives") i que, en la majoria dels casos, inclou la variable "temps". No obstant això, no sempre podem conèixer els valores que ha de prendre la funció amb la qual es modelitza la situació a cada instant temporal, sinó que només sabem el que ocorre per a determinats valors de les variables independents de la nostra funció. Tal situació la trobem sovint en el camp de la Teoria Econòmica (macro i micro-econòmica) en determinar les condicions d'estabilitat dinàmica o la trajectòria del temps de creixement, també de les tècniques actuarials o bé, per exemple, quan en l'àmbit de la Matemàtica Financera s'estudien emprèstits u operacions de constitució de capital en els que no és necessari conèixer què ocorre a cada instant del temps sinó sols el resultat que es dóna al final d'un cert període de temps establert.

Cal tenir en compte que el tractament dels problemes econòmics des d'una perspectiva dinàmica permet una modelització més propera a la realitat que altres basades en models estàtics i/o estàtics-comparatius. Sobre aquest particular ja ens varem estendre suficientment en la nostra anterior publicació. Els mètodes de discretització a utilitzar amb les equacions en derivades parcials han d'ésser suficientment ràpids i exactes per tal que tingui sentit el seu ús i millori la resposta donada pels processos estocàstics. No es pretén indicar aquí totes les possibilitats de les equacions en derivades parcials en els diversos camps de l'Economia, encara que sí volem deixar palès les seves grans possibilitats mitjançant la resolució de nombrosos exemples aplicats, fonamentalment, a la Microeconomia.

Donat el caràcter eminentment pràctic de la monografia que aquí es presenta, els exercicis proposats posseeixen un elevat nivell de detall en el seu desenvolupament resolutiu, pretenent-se amb això patentitzar la necessària relació existent entre aquests i els coneixements teòrics, donat que aquests exercicis constitueixen un mitjà poderós d'adquisició i de consolidació dels expressats coneixements. Això sí, com sempre, tots aquells errors que puguin aparèixer al text seran de responsabilitat exclusiva d'aquest autor.

De qualsevol manera, com assenyalàvem a la nostra anterior publicació, és sense dubte la pràctica professional la que farà sorgir problemes nous als que haurà que enfrontar-se i resoldre amb rigor científic a través dels nostres propis coneixements. I és que el cultiu del mecanisme abstracte no deixa petjada útil si no va acompanyat de l'exercici de les facultats d'abstracció i concreció als problemes reals i d'interpretació pràctica dels seus resultats. Tal és el caràcter que tampoc hem volgut obviar, en cap moment, a la present monografia d'economia matemàtica.

Al final del treball s'inclou una llista de referències bibliogràfiques de la que cal advertir, com sol succeir, que són tots els que estan però, evidentment, que no estan tots els que són. La selecció ha estat feta per gust personal de l'autor i per aproximació al nivell del text. Per cert que, des d'aquestes línies, i en el marc limitat d'aquestes reflexions, vull rendir tribut sincer d'admiració i agraïment als excel·lents llibres de text i consulta existents, citats a la bibliografia, sobre les matèries objecte de tractament, havent estat influït notablement, en els meus estudis, pel brillant treball dels seus autors.

Al llarg de qualsevol treball científic, com el que ara presentem, s'acumula tota una sèrie de dèbits intel·lectuals i professionals que resulta prou difícil descriure en tota la seva extensió; malgrat això, alguns em semblen especialment rellevants. Tampoc oblida, qui això escriu, el formidable deute de gratitud contret amb els qui foren els seus guies i mestres, alguns d'ells ja desapareguts. El meu reconeixement, a la fi, a les diverses institucions que han recolzat l'edició del present llibre i, particularment, al Patronat del Consorci universitari del Centre Associat en Tortosa de la Universitat Nacional d'Educació a Distància (UNED), a l'impremta *Gráfica Dertosense, S.L.* per l'acurada cura posada en l'edició de l'obra, al Dr. Jordi Sardà per la presentació així com per les seves encertades observacions i, en general, a tots els que s'han interessat per l'elaboració d'aquesta monografia, aportant suggeriments i valuosos consells adreçats al millor assoliment del nostre objectiu.

Tortosa, agost de 2016
L'AUTOR

PREFACE

This work, continuation of our previous monograph on economic applications of infinitesimal and recurrent equations, is about the utility differential equations in partial derivatives (there expressly avoided) for the resolution of various problems in the field of economy and enterprise-specific, where we often study the evolution of the values of a same multivariate function in different temporal moments. It is complemented by practical conceptualization of the development in series of Fourier, remarkable profits in economic analysis, as well as an extension to multivariate functions of the variational calculus applied to the economic functions of a single variable, which was carried out in that first job. It is essentially intended for programs of specialization in advanced mathematical models corresponding to an annual course of Master or doctorate at the faculties of Economics and Administration and Business Management of our Universities, but also engineering.

Employment, in general, of the infinitesimal equations (differential, integro-differential and integral, as well as their systems) presupposes that we know the behaviour of the dynamic system for each value of the factors that have influence on it (so-called "variables independent or explanatory") and, in the majority of cases, including the variable "time". However, we can not always know the values that must take the function that it models the situation at each time instant, but we only know what happens for certain values of the independent variables from our function. This situation is often found in the field of economic theory (macro and micro) to determine the condition of dynamic stability or the path of the time of growth, also of actuarial techniques or, for example, when in the field of financial mathematics are studied borrowing or operations of Constitution of capital which is not necessary to know what happens in every moment of time but only the result at the end of a certain period of set time.

It must be taken into account that the treatment of economic problems from a dynamic perspective allows a model closer to the reality than others based on static or static-comparative models. In this regard we already extended enough in our previous publication. Methods of discretization to use with equations in partial derivatives must be sufficiently quick and accurate so use makes sense and improves the response given by the stochastic processes. It is not intended to indicate here the possibilities of the partial differential equations in various fields of the economy, although if we wish to patent their great potential by the resolution of numerous applied examples, mainly, to the Microeconomic theory.

This character eminently practical of the monograph presented here, the exercises have a high level of accuracy in its operative development claiming to thereby achieve the necessary relationship between these and the theoretical knowledge, since these exercises are a powerful mean of acquisition and consolidation of the expressed knowledge. Obviously, all those errors that may appear in the text will be sole responsibility of the author.

In any case and despite the high number of examples we tried to deal with, the professional practice will undoubtedly give rise to new problems that will have to be faced and solved with scientific rigor through our own knowledge. This task will be made easier, to a large extent, thanks to the effort put into solving the greatest number of exercises in each unit; that's why we did not want to spare on quantity or diversity. And this is because the cultivation of the abstract mechanism does not leave a useful trace if it is not accompanied by the exercise of abstraction and concretion faculties to the real problems and of practical interpretation of its results. Such is the character we neither wanted to avoid, at any time, in this monograph of mathematical economics.

At the end of the work we include a list of biographical references about which I have to warn you that, as it usually happens, does not include the whole of possibilities. The selection is the author's personal choice and according to the level of the text. Some of them would be, no doubt, the natural continuation of the lessons. By the way, and from these lines here I would like to pay tribute, honorably and gratefully, to the excellent text and consult books, cited in the bibliography, about the subject matter herein that have notably influenced my study because of the outstanding work of their authors.

Any intellectual work as the one presented here, generates such a huge list of indebted intellectual and professional issues that is hard to cite completely herein, some relevant to me, though. Who that writes this does not forget either the enormous gratitude towards those who were his teachers or guides, some of them already gone. My appreciation to the institutions that have backed up the edition of this book, and particularly to the *Patronato del Centro Asociado en Tortosa de la Universidad Nacional de Educación a Distancia* (UNED), to the printing house Gráfica Dertosense, S.L. for their caring in the printing of this work, to our competent fellow University teacher, Dr. Jordi Sardà, for his presentation and insightful comments and, in general, to those who have been involved in the production of this monograph, making suggestions and giving valuable advice for the best outcome.

Tortosa, August 2016
THE AUTHOR

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN TEÓRICA. FUNCIONES MULTIVARIANTES

1. MATEMÁTICAS EN LA ECONOMÍA. LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

En el curso del pasado siglo XX, numerosos artículos aparecidos en revistas principales de economía han sido escritos, de manera casi exclusiva, por economistas en el mundo académico. Como resultado de ello, gran parte del material transmitido en estos escritos hace referencia a la teoría económica y señalan que "la teoría económica ha sido continuamente más abstracta y matemática". Una valoración subjetiva de las técnicas matemáticas usadas en estos escritos muestra un decremento notable en artículos que no usan representaciones geométricas o bien notación matemática, pasando de ser un 95 % en 1892 a un 5’3 % en 1990. Una encuesta del año 2007 acerca de diez revistas económicas encontró que sólo el 5’8 % de los artículos publicados en el 2003 y en el 2004 no contaban con un análisis de información estadística y tampoco contaban con expresiones matemáticas desplegadas que fueran indexadas al margen de la página.

Pues bien, es en este contexto que debe entenderse el profuso empleo del análisis matemático, y particularmente de las ecuaciones infinitesimales (diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, integrales e integro-diferenciales) que llevamos a efecto en el presente libro, particularmente por lo que se refiere a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) que fueron expresamente obviadas en nuestra anterior monografía titulada “Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes”, donde se centró la atención en los otros tipos de ecuaciones relacionados, así como en las ecuaciones recurrentes o en diferencias finitas, todas ellas de fecundas aplicaciones en numerosas cuestiones económicas.

Desde luego, el uso de las EDP en el campo de las finanzas es múltiple y variado, ya que este tipo de ecuaciones permiten modelizar cualquier situación o fenómeno que presenta variaciones en función de sus factores (por ejemplo, cambios y alteraciones a partir del tiempo). Sin embargo, los métodos numéricos basados en las ecuaciones en derivadas parciales no suelen ser muy populares en finanzas, primándose el uso de los métodos estocásticos debido a que los algoritmos -usando estos últimos- suelen ser más fáciles de implementar.

Pero los métodos numéricos pueden llegar a tener una mejor eficiencia si son discretizables y, lo que es más importante, el obtener la solución de la ecuación diferencial provee de una mayor información. En el caso de las opciones, se considera un dominio acotado temporal (0,T) con una condición final singular en el instante $t = T$ (Tenorio, A. *et alt.*, 2013).

También el empleo de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (y su resolución exacta usando técnicas algebraicas de Lie) es actualmente relevante en la resolución de problemas de *screening* multidimensional para combatir la selección adversa en la toma de decisiones de información asimétrica. En este sentido, Basov (2004) analiza la resolución de problemas de *screening* multidimensional que pueden representarse mediante problemas de contorno en los que el método hamiltoniano resulta aplicable. Con esta técnica, Basov consigue información sobre la estructura que pueden tener las soluciones del problema e incluso en ocasiones soluciones particulares del mismo.

El problema de *screening* multidimensional matemáticamente se formula como sigue: “un monopolio que produce n bienes o servicios tiene una función de costes convexa y las preferencias de un consumidor sobre tales bienes se parametrizan con un vector m-dimensional, mientras que la tipología de los consumidores sigue una distribución con función de densidad f continuamente diferenciable sobre un conjunto convexo, acotado y extensible por continuidad a su clausura. El monopolista quiere maximizar sus beneficios mediante la elección de una tarifa de precios adecuada para sus bienes”. Pues bien, hallar dicha tarifa se traduce de manera natural en resolver un sistema de EDPs no lineales. Es de importancia reflejar que no existen métodos generales para resolver tales problemas y que sólo en caso de aparición de simetrías, dicho problema puede ser simplificado e incluso resuelto mediante la asociación de la ecuación en derivadas parciales con un grupo de Lie (Tenorio, A. *et alt.*, 2013).

En nuestro libro anterior titulado “Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes”, nos hemos ocupado *in extenso* de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que son aquellas en las que las magnitudes que se pretende modelizar por medio de ecuaciones diferenciales dependen tan sólo de una variable independiente o explicativa, normalmente un tiempo o una variable económica (precio, cantidad de “input” o “output”, …), tipo de interés, … Sobre todo en el último caso, planteando problemas en el plano o en el espacio, resulta fácil imaginar problemas económicos reales en los que intervenga más de una variable independiente.

Al igual que sucede para las ecuaciones diferenciales ordinarias, el **orden** de una ecuación en derivadas parciales es el orden más alto de las derivadas que aparecen en la ecuación. Por ejemplo, la forma más general de una ecuación de primer orden para una función $u(x_1, \ldots, x_n)$ de variables independientes $x_1, \ldots, x_n$ es:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x1}, \ldots, u_{xn}) = 0,$$

donde F es una función con ciertas condiciones de diferenciabilidad.

Notación: para aligerar la notación empleada, muchas veces nos referiremos a las derivadas parciales por medio de subíndices, y así:

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x},\ u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

siempre que ello no cause confusión alguna.

También, con el mismo objetivo de aligerar la notación, como hemos hecho en el párrafo precedente, eliminaremos las dependencias de las funciones. Por ejemplo, escribiendo u_{xy} en lugar de $u_{xy}(x,y)$, siempre que sean suficientemente conocidas y distinguibles.

2. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

2.1. CONCEPTOS PREVIOS Y DEFINICIONES

En el presente apartado se realiza una introducción básica a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que abreviaremos, como se ha dicho, por las siglas EDP.

- Ecuación diferencial en derivadas parciales es cualquier igualdad del tipo:

$$F\left(\bar{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right) = 0 \quad (1),$$

que evidentemente conexiona las variables independientes o explicativas x_i, $\forall_i = 1, 2, \ldots, n$, la función buscada *u* y sus derivadas parciales, donde se cumple que: $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R^n$ con Ω abierto[1] y de sólo una pieza, siendo F la función prefijada de sus argumentos.

[1] Un **conjunto abierto**, en topología y otras ramas de las matemáticas, es un **conjunto** en el que todos y cada uno de sus elementos están rodeados por elementos que también pertenecen al **conjunto**; o, dicho de una manera más intuitiva, que ningún elemento de dicho **conjunto** pertenece también a la frontera de éste.

También: F: $\Omega \times \Re \times \Re^M \rightarrow \Re$ se supone conocida y M > 0 es un número natural. En el caso n = 2, que será el que mayormente contemplaremos en la presente monografía, resultará más sencillo utilizar la notación habitual: $\bar{x}$ = (x,y) $\in \Omega \subset \Re^2$.

- **Orden de una EDP** es el mayor de los órdenes que tienen las derivadas que en ella intervienen. Así, posee derivadas de orden (n) pero no de orden (n+1).

- **Solución o integral particular** de la EDP (1) es toda función u: $\Omega \rightarrow$ R suficientemente regular, tal que al sustituirla en la ecuación hace que se cumpla.

- **Solución o integral general** de la EDP (1) es la expresión que teóricamente contiene a todas las soluciones particulares.

- **Solución o integral singular** de la EDP (1) que no puede ser considerada como un caso particular de la integral general ni de la integral completa, y cuya interpretación geométrica es la superficie envolvente de todas las integrales completas.

Veamos ahora, con mayor especificidad, algunas definiciones de particular interés para la mejor conceptualización de este tipo de ecuaciones infinitesimales.

- Definición 1 (Ecuación diferencial en derivadas parciales). Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) a la ecuación de la forma identitaria (1):

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \ldots \partial^{k_n} x_n}\right) = 0,$$

Se cumple que: k_i, $\forall_i$ = 1, 2, …, n son números enteros no negativos (naturales) tales que: $\sum_{i=1}^{n} k_i = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$.

- Definición 2 (Orden). Se llama orden de una EDP el orden superior de las derivadas parciales que figuran en la ecuación.

Así, si x,y son variables independientes, u = u(x,y) es la función buscada, entonces:

a) $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, es una EDP de 1^{er} orden, homogénea y de coeficientes variables.

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, es una EDP de 2º orden, homogénea y de coeficientes constantes.

Nota: También, como se ha apuntado, utilizaremos las notaciones simplificadas siguientes:

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x},\ u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y},\ u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots \text{quad}\Delta .$$

- Definición 3 (Solución). Sea la EDP definida en la anterior definición 1, de orden *m*. Se llama solución de dicha EDP en cierta región D de variación de las x_i, $\forall_i$ = 1, 2, …, n, a una función cualquiera del tipo siguiente: $u = u(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in C^m(D)$ (conjunto de funciones continuas en la región D junto con todas las derivadas de hasta orden *m* inclusive), tal que al sustituir *u* y sus derivadas en su expresión, la última se convierte en la identidad respecto a x_i, $\forall_i$ = 1, 2, …, n, en la región D.

2.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL EN DERIVADAS PARCIALES

Una ecuación en derivadas parciales (1), es **lineal** si la función F se puede expresar como suma de una función solamente dependiente de $\bar{x}$, más una función lineal de las variables correspondientes a u, y a las derivadas parciales que intervengan.

Para el caso de dos variables independientes, es decir $\bar{x}$ = (x,y), la expresión general de la ecuación en derivadas parciales lineal y de segundo orden, con una función u(x,y) es de la forma:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \qquad (2),$$

donde a, b, c, d, e, f, g son funciones de *x* e *y*. Estas funciones a, b, c, …, pueden ser independientes de *x* e *y*, en cuyo caso la EDP será **lineal de coeficientes constantes**. Veremos este tipo de ecuaciones, con mayor especificidad, en el epígrafe 4 de este mismo capítulo.

Si g = 0 se tiene la expresión general de la ecuación **lineal homogénea** de segundo orden. Por el contrario, si $g \neq 0$, la EDP sería *no homogénea, inhomogénea o heterogénea*, debiéndose obtener su solución en función de la naturaleza de la expresión del 2º miembro, como también sucede con las EDO. Al igual que sucedía con las EDO de orden *n*, el Principio de Superposición resulta válido para la ecuación lineal y el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea tiene estructura algebraica de espacio vectorial. Sin embargo, la diferencia fundamental con respecto al caso ordinario radica en que el espacio vectorial de las soluciones para una EDP lineal tiene dimensión infinita, puesto que dada una EDP lineal existen infinitas soluciones linealmente independientes. Esta circunstancia provoca que las combinaciones finitas no sean suficientes como para encontrar todas las soluciones y se hace necesario considerar combinaciones infinitas, surgiendo los correspondientes problemas de convergencia.

2.3. CONDICIONES LATERALES Y DE CONTORNO

En numerosas ocasiones, interesa hallar soluciones que cumplen varias o alguna “condición lateral”. Una condición apropiada puede ser que la función económica u(x,y) tome ciertos valores específicos en los puntos que se encuentran situados sobre una línea recta o curva. Algunos ejemplos de tales condiciones son los siguientes:

- $u(x,0) = g(x)$, $\forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre el eje Ox.
- $u(0,y) = g(y)$, $\forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre el eje Oy.
- $u(x,2) = g(x)$, $\forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre la recta y = 2.
- $u(x,x) = g(x)$, $\forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre la recta y = x.
- $u(e^s,s) = g(s)$, $\forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre la gráfica de $x = e^y$.
- $u(3x,x+1) = g(x)$, $\forall x \in \Re$, se indica el valor de *u* sobre la recta $y = (x/3) + 1$.

Se llaman **Condiciones de contorno o de frontera** a las restricciones o condiciones adicionales definidas en el dominio de dominación Ω de una EDP, que suelen acompañarlas cuando estas forman parte de un determinado sistema o problema económico. A estos problemas se les llama **Problemas de valores de contorno (PVC)**, o bien **Problemas de valores en la frontera (PVF)**. Así pues, dada una EDP definida sobre Ω, conviene hallar soluciones de la misma que cumplan determinadas condiciones en la frontera y que resultan fundamentales para describir correctamente el fenómeno económico que nos ocupa.

Para las ecuaciones de segundo orden, se tienen las siguientes condiciones de frontera con nombre propio, a saber:

1. **Condición de Dirichlet[2]**. Especifica los valores de la solución tomada sobre la frontera. Es de la forma:

[2] Johann Dirichlet (1805-1859) fue un matemático alemán al que se le atribuye la definición "formal" moderna de una función. Fue educado en Alemania, y después en Francia, donde aprendió de muchos de los más renombrados matemáticos del tiempo, relacionándose con algunos como Fourier. Sus métodos proporcionaron una perspectiva completamente nueva y sus resultados se encuentran entre los más importantes de las matemáticas. Hoy en día sus técnicas están más en auge que nunca.

$$u(\overline{x}) = g(\overline{x}), \quad \forall \overline{x} \in \text{frontera de } \Omega .$$

2. **Condición de Newmann**[3]. Especifica los valores de la derivada normal de una solución sobre la frontera. Son de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\overline{x}) = g(\overline{x}), \quad \forall \overline{x} \in \text{frontera de } \Omega .$$

3. **Condición de Robin**[4]. Es una combinación lineal de las condiciones de Dirichlet y de Newmann. Es de la forma:

$$Au(\overline{x} + B)\frac{\partial u}{\partial n}(\overline{x}) = g(\overline{x}), A,B \in R, \ \forall \overline{x} \in \text{frontera de } \Omega .$$

En todos los casos, si g = 0, las condiciones se llaman **homogéneas** (Bargueño y Alonso, 2012). Si, por el contrario, se cumple que $g \neq 0$, la condición en cuestión sería *no homogénea, inhomogénea o heterogénea.*

Así, por ejemplo, en la ecuación de 2º orden, lineal, de coeficientes constantes e inhomogénea ($g \neq 0$): $u_{xx} – u_{yy} = x$, definida en: $(0,1) \times \Re$, las siguientes condiciones de contorno:

- $u(0,y) = 5$, $\forall y \in \Re$, es una condición de contorno o frontera del tipo Dirichlet.
- $u_x(0,y) = 0$, $\forall y \in \Re$, es una condición de contorno homogénea del tipo Newmann.
- $u(0,y) = y^2$, $\forall y \in \Re$, es una condición de contorno del tipo Newmann.
- $u_x(0,y) = u(0,y)$, $\forall y \in \Re$, es una condición de contorno del tipo Robin.

Como veremos posteriormente (epígrafe 4.2. de este mismo capítulo), la ecuación del presente ejemplo debe ser clasificada como de tipo elíptico, habida cuenta del valor del discriminante: $(b^2 – 4ac) = -4 < 0$.

---

[3] John von Newmann (1903-1957), nació en el seno de una familia de banqueros acomodada. De origen húngaro, fue un gran matemático del siglo XX que realizó contribuciones importantes en la física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, ciencias de la comunicación, economía, análisis numérico, cibernética, hidrodinámica de expresiones, estadística y otros campos diversos de las matemáticas.

[4] Victor Gustave Robin (1855-1897), fue un matemático francés que trabajó provechosamente en el campo de las matemáticas aplicadas y la termodinámica. Fue galardonado por la Academia Francesa de las Ciencias (1893, 1897) y recibió, en 1895, el prestigioso premio Poncelet.

Desde luego, los problemas de contorno, en algunos casos, pueden resolverse de manera sencilla hallando la solución general de la ecuación e imponiendo, con posterioridad, las condiciones adicionales para buscar la solución particular que se precisa.

2.4. EJEMPLOS

Ejemplo 1. Hallar la solución general u = u(x,y) de la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

Solución:

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ u no depende de *x*, pero puede ser una función cualquiera de *y*, o sea: u = ϕ(y). Se trata, pues, de una solución de la ecuación propuesta que contiene una función arbitraria.

Ejemplo 2. Hallar la solución general u = u(x,y) de la ecuación: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \int_c \frac{i}{z^3 + 1} dz$, a lo largo de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 2.

Solución:

La circunferencia dada tiene de ecuación: $x^2 + y^2 = 4$. En este caso, se trata de resolver, en primer lugar, la integral curvilínea que aparece en el 2º miembro de la expresión dada de la EDP como aplicación por integración en el campo complejo. Los polos serán: $z^3 = 1$, $z = \sqrt[3]{-1}$,

$$\begin{cases} z_1 = -1 \\ z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

El método de los coeficientes indeterminados ofrece:

$$\frac{1}{z^3 + 1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} + \frac{C}{z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} \text{, o sea:}$$

$$i = A\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+B\,(z+1)\left(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+C\,(z+1)\left(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Resulta: A + B + C = 0 (términos de 2º grado). Entonces:

2π (A + B + C) = 0, quedando, en definitiva, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0.$

Si ahora llamamos $v=\dfrac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x}=0$, ya que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$, entonces resultará: v = φ(y). Como $v=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, se tiene que $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi(y)$.

Integrando respecto de y:

$\displaystyle\int \frac{\partial u}{\partial y}dy=\int \varphi(y)dy \Rightarrow u(x,y)=\int \varphi(y)dy+g(x)$, siendo g(x) arbitraria.

Como φ(y) es una función arbitraria, la integral de ésta también es una función arbitraria. Llamémosla f(y). Por tanto:

u(x,y) = f(y) + g(x) siendo f(y) y g(x) funciones arbitrarias.

Se llama "solución general" de la ecuación dada en el presente ejemplo, puesto que cualquier otra solución puede obtenerse de la expresión anterior si se eligen de forma adecuada las funciones arbitrarias f(y) y g(x).

Notas:

a) Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que las EDP's tienen familias enteras de soluciones.

b) Existen EDP's que tienen conjuntos de soluciones muy pequeños y en algunos casos se obtiene incluso el $\varnothing$ (conjunto vacío).

b.1) La ecuación $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$, tiene, por conjunto de soluciones, u(x,y) = cte.

b.2) La ecuación $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+1=0$, no tiene soluciones reales del todo.

c) Más adelante plantearemos el problema de cómo hallar las soluciones particulares o parciales haciendo intervenir condiciones adicionales (laterales o de contorno) que deben plantearse a la función.

En definitiva dada una EDP de orden *n*, una solución que contenga *n* funciones arbitrarias se denomina, como se ha dicho antes, la "solución o integral general" de la misma, y cualquier solución obtenida de esta solución general por selecciones particulares de las funciones arbitrarias se llama una "solución o integral particular".

Como acontece, en fin, en el caso de las EDO's, con frecuencia necesitamos determinar soluciones de EDP's que satisfagan condiciones dadas. Es el caso de las condiciones de contorno o de frontera a las que nos hemos referido con anterioridad. Son de ver, al respecto, las siguientes cuestiones ilustrativas expuestas mediante ejemplos:

Ejemplo 3. ¿De qué orden son las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, donde la función es u(x,y), en dos variables independientes?

a) $u_x + u_y + x = 0$
b) $u_x + u_{xy} + xu_y = 0$
c) $u_x + \sin(u_y) + x = 0$
d) $u_{xy} = u^2$

Solución:

En los casos a) y c) las ecuaciones son de primer orden. En los otros de segundo orden.

Ejemplo 4. Indicar las características básicas (linealidad, homogeneidad, coeficientes), de las siguientes ecuaciones en derivadas parciales, donde la función es u(x,y) en todos los casos.

a) $5u_x + x = 0$
b) $u_x + u_{xy} + xu_y = 5$
c) $u_x + yu = u$
d) $uu_{xx} + (u_y)^2 = u^2$
e) $u_x + \ln(x)u_{yy} + u_{xy} = u$

Solución:

Respectivamente, se tienen las siguientes respuestas:

a) Ecuación lineal, no homogénea, de coeficientes constantes.
b) Lineal, no homogénea, de coeficientes no constantes.
c) Lineal, homogénea, de coeficientes no constantes.

d) Ecuación no lineal, homogénea.
e) Lineal homogénea y de coeficientes no constantes.

3. RESOLUCIÓN DE LAS EDP

3.1. MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

Este método, denominado "de las características", se aplica al caso de las EDP lineales de primer orden o más dimensiones. Por ejemplo, en el caso de dimensión 3, la EDP lineal de primer orden es:

$a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z + d(x,y,z)u = f(x,y,z)$, siendo $u = u(x,y,z)$,

para las funciones dadas a, b, c, d y f. Las curvas características o generatrices $x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}$, parametrizadas de la manera preferida, son las soluciones del siguiente sistema:

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t), y(t), z(t)), \qquad \frac{dy}{dt} = b(x(t), y(t), z(t)), \qquad \frac{dz}{dt} = c(x(t), y(t), z(t)).$$

En la práctica, resulta usualmente más conveniente tratar a *x* como un parámetro en lugar de *t*, en cuyo caso el sistema anterior se transforma en un sistema de dos ecuaciones (si ahora suponemos que $a(x,y,z) \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y(x), z(x))}{a(x, y(x), z(x))}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{c(x, y(x), z(x))}{a(x, y(x), z(x))},$$

para las incógnitas: $y = y(x)$, $z = z(x)$.

Se puede utilizar la primera terminología de "problemas de valor inicial y de frontera" para las EDP's. Sin embargo, debido a que generalmente existe una combinación de condiciones de frontera e iniciales, con frecuencia nos referimos extensivamente a tales problemas como *Problemas de Valor de Frontera* (PVF o bien PVDF).

3.2. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LAS SOLUCIONES GENERAL Y PARTICULAR

Sea una EDP genérica de la forma anteriormente definida:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 ... \partial^{k_n} x_n}) = 0 .$$

Para fijar ideas, tomamos solamente dos variables independientes, a saber: $x_1 = x$, $x_2 = y$. Si la solución de: $F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},...,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},...) = 0$, es por ejemplo: $u(x,y) = P(x,y) + \phi(y) + \varphi(x)$, utilicemos funciones particulares para $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, y reemplacemos las variables *u* por *z*. Entonces, la expresión anterior toma la forma: $z = f(x,y)$.

Se interpreta, por lo tanto, como una superficie en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares: x, y, z (espacio afín tridimensional euclídeo $\Re^3$).

Para las funciones arbitrarias $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, obtenemos una familia de superficies cada miembro de la cual corresponde a una selección particular de $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, esto es, una solución particular. La EDP que tenga ésta como solución se llama “Ecuación Diferencial de la Familia de Superficies”.

Notas:

a) Obsérvense las analogías existentes con las EDO’s en las que la solución general con constantes arbitrarias –en vez de funciones- representa una familia de curvas, donde cada miembro de ella corresponde a una solución particular.

b) Estas ideas se pueden generalizar a los casos donde hay más de dos variables independientes. Así, por ejemplo, tendríamos que si $u = f(x,y,z)$ ya no podríamos visualizar geométricamente: $p = f(x,y,z)$. Se trata de una superficie de cuatro dimensiones o *hipersuperficie*.

   Consideramos ahora que: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ representa una esfera centrada en (0,0,0) y radio R. En consecuencia. la ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$ representa una hiperesfera de centro (0,0,0,0) y radio R en el espacio afín tetradimensional euclídeo $\Re^4$.

3.3. EDP’S QUE SURGEN DE LA ELIMINACIÓN DE FUNCIONES O CONSTANTES ARBITRARIAS

a) Ya que las soluciones de las EDP’s hacen intervenir funciones arbitrarias, parece lógico que se obtengan EDP’s por el proceso inverso de eliminar tales funciones. En efecto, si derivamos la ecuación funcional:

$$\psi[f(x,y,z), \varphi(x,y,z)] = 0 \quad (1),$$

con respecto a dos variables x,y elegidas como independientes en la ecuación de la superficie, obtenemos, designando como:

$$p = z'_x \ , \ q = z'_y :$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial f}(f_x + f_z p) + \dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi}(\varphi_x + \varphi_z p) = 0 \end{cases} ,$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial f}(f_y + f_z q) + \dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi}(\varphi_y + \varphi_z q) = 0 \end{cases}$$

y la eliminación de $\dfrac{\partial \Psi}{\partial f}$ y $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$ conduce a: $\begin{vmatrix} f_x + f_z p & \varphi_x + \varphi_z p \\ f_y + f_z q & \varphi_y + \varphi_z q \end{vmatrix} = 0$,

ecuación que, una vez desarrollada, puede escribirse así:

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(y,z)}p + \frac{D(f,\varphi)}{D(z,x)}q = \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)} \quad (2).$$

En resumen, que partiendo de la ecuación funcional y por eliminación de la función arbitraria ψ, se ha llegado a obtener una ecuación en derivadas parciales lineal y de primer orden en estas derivadas, de la forma: $X(x,y,z)\cdot p + Y(x,y,z)\cdot q = Z(x,y,z)$, en la que los coeficientes X, Y y Z comparando con la expresión (2) son funciones conocidas de x, y, z. Esta ecuación, a la que satisfacen todas las superficies formadas por curvas de la congruencia, se denomina "ecuación diferencial de la familia de superficies" en cuestión, mientras que la ecuación funcional finita (1) con la función arbitraria ψ se denomina "solución o integral general" de la EDP (2).

Por ser *p* y *q* los coeficientes de la ecuación del plano tangente, la EDP así obtenida expresa una propiedad del plano tangente que resulta común a todas las superficies de la familia.

b) También pueden obtenerse las EDP's de primer orden por eliminación de constantes arbitrarias. Considerando un conjunto doblemente infinito de superficies dependientes de dos constantes arbitrarias: $f(x,y,z,C_1,C_2) = 0$ y derivando con respecto a *x* y a *y*, se tiene:

$$f_x + f_z \cdot p = 0 \ ; \ f_y + f_z \cdot q = 0.$$

Si es posible la eliminación de C_1 y C_2 obtendremos una EDP de primer orden (generalmente no lineal) del tipo: $F(x,y,z,p,q) = 0$, a la que satisfacen todas las superficies. Este conjunto de superficies se llama "integral completa" de esta EDP (Puig, 1962).

3.4. EDP'S QUE SURGEN DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES O INTEGRO-DIFERENCIALES MULTIVARIANTES

Las EDP's pueden presentarse también como consecuencia de la resolución de ecuaciones integrales o integro-diferenciales multivariantes como las que fueron contempladas en nuestra anterior monografía. Sería, por ejemplo, el caso de la ecuación integral bidimensional de Abel[5], con 2 variables independientes, del tipo:

$$\iint_D \frac{\varphi(x,y)\cdot dx\cdot dy}{\sqrt{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2}} = f(x_0,y_0)\,,$$

donde la región o dominio de integración D es un triángulo rectángulo isósceles, con la hipotenusa en el eje OX y vértice en el punto (x_0,y_0).

La resolución de aquella integral doble conduciría a la EDP siguiente:

$\varphi(x,y) = \dfrac{1}{2\pi^2}\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$, donde se tiene la función económica:

$$g(x,y) = \iint_{D_1} \frac{f(u,v)\cdot du\cdot dv}{\sqrt{(y-v)^2-(x-u)^2}}\ ,$$

siendo D_1 un triángulo rectángulo isósceles con vértice en el punto (x,y) e hipotenusa en el eje Ou del plano UOV,

3.5. MÉTODO DE DARBOUX-CAUCHY

Este procedimiento proporciona una interpretación geométrica muy clara del problema y de su solución, pero exige conocer la solución completa del sistema característico, que será un conjunto de cinco funciones de la variable auxiliar *t*, que representan una *banda característica*, es decir, una curva junto con un plano tangente en cada uno de sus puntos: $\{x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)\}$.

Se han de verificar además las llamadas "condiciones de banda".

[5] El nombre de Niels Henrik Abel (1802-1829) tiene un lugar privilegiado en el Olimpo Matemático, al lado de otros nombres gloriosos como Newton, Euler, Gauss, Cauchy o Riemann. A lo largo de su corta vida, realizó numerosas contribuciones matemáticas tan importantes como significativas. Aunque sus estudios se centraron fundamentalmente en el álgebra y en el cálculo integral, su nombre será siempre asociado a algunas ramas del análisis, particularmente a la teoría de las ecuaciones integrales, cuyo desarrollo sistemático llevaron a cabo Vito Volterra, Freedholm y Hilbert setenta años después de sus descubrimientos.

También ahora se puede presentar el problema de Cauchy[6]: consiste en encontrar la superficie integral que contiene una cierta curva $\Gamma \equiv \{f(s),\ g(s),\ h(s)\}$; para ello, lo que se hace es resolver el sistema característico siguiente:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{p{\cdot}F_p + q{\cdot}F_q} = -\frac{dp}{F_x + p{\cdot}F_u} = -\frac{dq}{F_y + q{\cdot}F_u} = dt\,.$$

teniendo en cuenta que la superficie buscada u = u(x,y) ha de contener la curva, obteniéndose la superficie solución expresada en forma paramétrica: (x(t,s), y(t,s), u(t,s)).

El sistema característico es autónomo, en el sentido de que los segundos miembros de las ecuaciones diferenciales no dependen de *t*. En algunos casos, este hecho facilita que se puedan construir relaciones que se conserven independientemente de la variable flujo *t* (*integrales primeras*). A veces, estas relaciones reflejan propiedades fundamentales del fenómeno económico a modelar que deben ser respetadas estrictamente si se utiliza una técnica de aproximación.

Por otra parte, cabe señalar que el conocimiento de las integrales primeras simplifica notablemente el cálculo de la solución analítica (Moreno, 1999).

3.6. MÉTODOS DE LAGRANGE-CHARPIT Y DE LA INTEGRAL COMPLETA

Este método se emplea para obtener una integral completa del tipo: $f(x,y,u,C_1,C_2) = 0$, aunque pueden existir múltiples sistemas de integrales completas, por lo que la solución obtenida dista de ofrecer todas las superficies que verifican la ecuación general dada:

$$F(x,y,u,p,q) = 0.$$

Recomendamos al amable lector/a la consulta a la explicación de este método de resolución a la conocida obra de P. Puig Adam (1962) citada en la bibliografía, lección 22.5., refiriéndonos también a este mismo texto clásico para la explicación exhaustiva del método de la integral completa.

[6] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) fue un matemático francés pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

4. EDP'S LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

4.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado se analizan -más específicamente por su particular interés en los modelos económicos- las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales lineales de segundo orden, cuya expresión general es:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=g,\quad (x,y)\in\Omega\ ,\qquad (1),$$

donde a, b, c, d, e, f, g son funciones de las variables explicativas *x* e *y*, o bien constantes.

4.2. TIPOS DE EDP'S LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Se dice que la ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden (1) es, en función del valor del discriminante ($b^2 - 4ac$):

1. Hiperbólica si ($b^2 - 4ac) > 0$.
2. Parabólica si ($b^2 - 4ac) = 0$.
3. Elíptica si ($b^2 - 4ac) < 0$.

Los nombres empleados surgen por analogía de nuestra ecuación con la ecuación de las secciones cónicas en el plano. La clasificación anterior se puede extender a ecuaciones con coeficientes diversos. El carácter de las ecuaciones lineales con coeficientes variables (en las que a, b, c son funciones de *x* e *y*) puede ser distinto según sea el subconjunto $(x,y) \in R^2$, o de otra forma, según sea la región del plano Oxy.

4.3. ECUACIÓN DE EULER

Se conoce por Ecuación de Euler el caso especial de la ecuación (1) homogénea, de la forma:

$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, en la que a, b, c son coeficientes constantes.

Se resuelve dicha EDP buscando una solución expresada en la forma $u = f(\xi)$, donde $\xi = y + mx$, con m = constante. Introduciendo esa solución y sus derivadas, se observa que la solución de la ecuación depende de los valores *m* que hagan: $am^2 + bm + c = 0$. Entonces, según sea la ecuación a resolver, y sean también los valores de *m*, resulta:

1. $a \neq 0$ y las raíces m_1, m_2 de la ecuación son distintas (reales o imaginarias).

1.1. m_1, m_2 reales. Ha de ser $(b^2 - 4ac) > 0$ (ecuaciones hiperbólicas). La solución general será:
$u = f(y + m_1x) + g(y + m_2x)$.

1.2. m_1, m_2 imaginarias. Ha de ser $(b^2 - 4ac) < 0$ (ecuaciones elípticas). La solución general será:
$u = f(y + (p + qi)x) + g(y + (p - qi)x)$.

2. $a \neq 0$ y la ecuación tiene una raíz *m* doble. La solución general será: $u = f(y + mx) + xg(y + mx)$.

3. $a = 0$.

3.1. $b \neq 0$. Solución general: $u = f\left(y - \frac{c}{b}x\right) + g(x)$.

3.2. $b = 0$. Lógicamente $c \neq 0$. La solución general vendrá dada por: $u = f(x) + yg(x)$.

4.4. EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Es un método de resolución de problemas con valores en la frontera en los que intervienen ecuaciones diferenciales en derivadas parciales lineales con *n* variables independientes, y que consiste en suponer la existencia de soluciones producto de la forma: X_1, X_2, …, X_n, donde cada factor X_i es función solamente de cada una de esas variables. Así, si la ecuación contiene dos variables independientes *x* y *t*, con función u(x,t), se supone que la ecuación admite soluciones producto de la forma:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) ,$$

con X(x) función sólo de *x*, y T(t) función sólo de *t*. Por lo tanto, si la suposición hecha es cierta, el método conduce a la resolución de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una de las cuales ha de verificar las condiciones adicionales que contienen los problemas de contorno que se van a resolver.

Para aplicar el método consideremos, por ejemplo, un problema de contorno compuesto por:

- EDP lineal homogénea, con una función u(x,t) definida para: $x \in (0,L)$, $t \geq 0$.

- Condiciones contorno homogéneas: $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

- Condición inicial $u(x,0) = f(x)$.

El procedimiento general para aplicarlo es el siguiente:

1. Se separan variables, suponiendo la solución en la forma siguiente: u(x,t) = X(x)·T(t).

2. Se introduce la solución supuesta, mediante las convenientes derivaciones, en la ED, y se separan a ambos miembros de una igualdad las funciones que resulten dependientes de una u otra variable. El que sean iguales dos funciones dependientes de variables distintas es sólo posible cuando ambas sean una constante λ. Resultan, de este modo, dos ecuaciones ordinarias.

3. Se resuelve la primera ecuación aplicando únicamente las condiciones de contorno, considerando los tres casos en que los valores de λ sean: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ y con ello encontrando los valores y las soluciones correspondientes para que estas sean no triviales.

4. Se resuelve la otra ecuación ordinaria.

5. Se construyen todas las soluciones de la EDP como producto de las anteriores.

6. Se aplica el principio de superposición y se obtiene una combinación lineal de todas las soluciones producto.

7. Se impone la condición inicial.

8. Se identifican los coeficientes. Esta identificación de coeficientes puede hacerse directamente si la forma de f(x) lo permite, o bien mediante otros métodos, como es el desarrollo en serie de Fourier de f(x), que será tratado en el capítulo 9 de la presente monografía.

9. El procedimiento aludido se generaliza sin mayor dificultad a ecuaciones homogéneas de tres variables independientes x,y,z, para las que se buscan soluciones de la forma: X(x), Y(y), Z(z), e incluso a un mayor número de ellas.

4.5. EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1.

Clasifíquense las siguientes ecuaciones lineales, homogéneas, de 2º orden y de coeficientes constantes, en hiperbólicas, parabólicas o elípticas.

a) $5u_{xx} - u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = 0$
b) $-2u_{xx} + 4u_{xy} - 2u_{yy} + u_x = 0$
c) $u_{xx} - 7u_{xy} + 6u_{yy} = 0$
d) $\pi u_{xx} - u_{xy} + 2u_{yy} + u_y = 0$
e) $u_{xx} - u_{xy} + 2u_{yy} + u_y = 0$
f) $-2u_{xx} - 4u_{xy} -2u_{yy} + u_x = 0$
g) $\pi u_{xy} - 2u_{xx} + u_x + u = 0$

Solución:

La clasificación de la ecuación en hiperbólica, parabólica o elíptica depende del signo del discriminante ($b^2 - 4ac$), siendo a, b, c los coeficientes respectivos de u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} en la expresión general de la ecuación lineal de segundo orden (1).

a) En este caso a = 5, b = -1, c = 2. Por lo tanto ($b^2 - 4ac$) = -39 < 0. Ecuación elíptica.

b) a = -2, b = 4, c = -2. Por lo tanto ($b^2 - 4ac$) = 0. Ecuación parabólica.

c) a = 1, b = -7, c = 6. Por lo tanto ($b^2 - 4ac$) = 25 > 0. Ecuación hiperbólica.

d) a = π, b = -1, c = 2. Por lo tanto ($b^2 - 4ac$) = $1 - 8\pi < 0$. Ecuación elíptica.

e) a = 1, b = -1, c = 2. Por lo tanto ($b^2 - 4ac$) = -7 < 0. Ecuación elíptica.

f) a = -2, b = -4, c = -2. Por lo tanto ($b^2 - 4ac$) = 0. Ecuación parabólica.

g) a = -2, b = π, c = 0. Por lo tanto ($b^2 - 4ac$) = $\pi^2 > 0$. Ecuación hiperbólica.

Ejemplo 2.

Sea la solución de la EDP dada por la función económica siguiente: $u(x,y) = -3y^3\varphi(x) - 6x + y$, con $\varphi(x)$ como una función arbitraria de *x*. Encontrar una EDP de primer orden para esa solución general.

Solución:

$u(x,y) = -3y^3\varphi(x) - 6x + y$. Si diferenciamos respecto a *y*:

$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -9y^2\varphi(x) + 1$, eliminando $\varphi(x)$ entre ambas se obtiene:

$$-3y^3\varphi(x) = u(x,y) + 6x - y \Rightarrow \frac{-3y^3\varphi(x)}{-9y^2\varphi(x)} = \frac{u(x,y)+6x-y}{\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-1};$$

$$-9y^2\varphi(x) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{u(x,y)+6x-y}{\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-1} \Rightarrow y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - y = 3u(x,y)+18x-3y\,.$$

$$y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - 3u(x,y) = 18x-2y \Rightarrow y\cdot u'_y - 3u = 18x - 2y.$$

Basta con substituir en esta expresión para comprobar que es la solución pedida. En efecto: $u'_y = -9y^2\cdot\varphi(x) + 1$; entonces:

$$y\cdot u'_y - 3u = -9y^3\cdot\varphi(x) + y + 9y^3\cdot\varphi(x) + 18x - 3y = 18x - 2y, \text{ c.s.q.d.}$$

Ejemplo 3.

Comprobar que las siguientes funciones económicas u(x,y), u(x,t), corresponden a soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales correspondientes en derivadas parciales.

a) $u(x,y) = x + \sin(x - y)$ es solución de la ecuación $u_x + u_y = 1$.
b) $u(x,t) = x^2 + 4t^2$ es solución de la ecuación $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$.
c) Representar gráficamente dichas funciones económicas.

Solución:

a) Se trata de una ecuación lineal, no homogénea, de primer orden y coeficientes constantes. Las derivadas parciales de la función $u(x,y) = x + \sin(x - y)$ son:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 1+\cos(x-y)\,,\quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\cos(x-y)\,.$$

Substituyendo la función y sus derivadas en la ecuación, se comprueba que la verifica. En efecto:

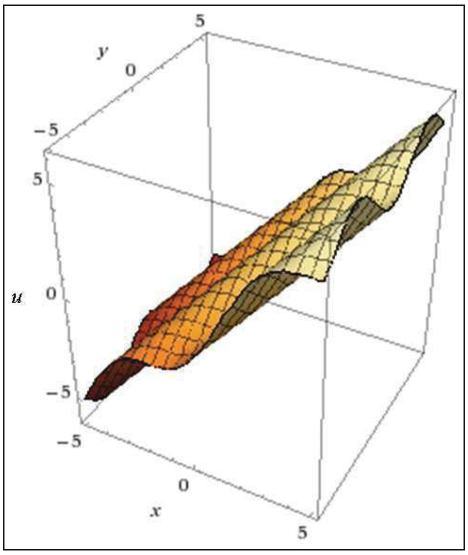
$$u_x + u_y = 1 + \cos(x - y) - \cos(x - y) = 1.$$

b) Se trata de una ecuación lineal, homogénea, de segundo orden y coeficientes constantes. Como a = - 4, b = 0 y c = 1, con el discriminante: (b^2– 4ac) = 16 > 0, es una ecuación del tipo hiperbólico. Las derivadas de la función $u(x,t) = x^2 + 4t^2$ son:

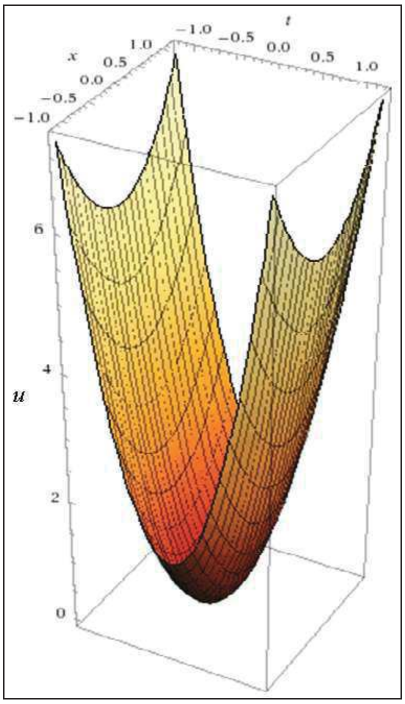
$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 8t \\ u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 8 \end{cases}$$

Se verifica, efectivamente, que: $u_{tt} - 4 \cdot u_{xx} = 8 - 4 \cdot 2 = 0$.

c) La representación gráfica de $u(x,y) = x + \sin(x - y)$, es:



La representación gráfica de $u(x,t) = x^2 + 4t^2$, es:



Ejemplo 4.

Dada la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = \int_{-2}^{2}\int_{-4\sqrt{1-t^2}}^{4\sqrt{1-t^2}} (4-t)\cdot dx\cdot dt - 8\int_0^1\int_0^{\sqrt{16-t^2}} \frac{4\cdot dx\cdot dt}{\sqrt{16-x^2-t^2}}\text{, se pide:}$$

a) Clasificarla en elíptica, parabólica o hiperbólica.
b) Hallar una solución general que contenga dos funciones arbitrarias.
c) Resolver el siguiente problema condicionado:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 0\,; \quad \begin{cases} u(x,0) = -x^2 \\ u(0,t) = t \end{cases}$$

Solución:

a) En primer lugar, conviene resolver el 2º miembro de la ecuación dada, por lo que se calcularán, separadamente, las dos integrales dobles que lo componen. Esto es, respectivamente:

- $\int_{-2}^{2}\int_{-4\sqrt{1-t^2}}^{4\sqrt{1-t^2}} (4-t)\cdot dx\cdot dt = 2\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-t^2}} (4-t)\cdot dx\cdot dt = 16\pi.$
- $8\int_0^1\int_0^{\sqrt{16-t^2}} \frac{4\cdot dx\cdot dt}{\sqrt{16-x^2-t^2}} = 32\int_0^1 \left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{16-t^2}}\right]_0^{\sqrt{16-t^2}} \cdot dt = 32\int_0^1 \frac{\pi\cdot dt}{2} = 16\pi.$

De este modo, la expresión de la EDP propuesta será, definitivamente: $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 16\pi - 16\pi = 0$. Es, pues, una ecuación homogénea, lineal y de coeficiente constante.

Ha de estudiarse, seguidamente, el signo del pertinente discriminante: $(b^2 - 4ac)$. Aquí, resulta que es: a = c = 0, b = 1. Luego:

$(b^2 - 4ac) = 1 > 0 \Rightarrow$ Ecuación hiperbólica.

b) $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$. Integrando respecto a *x*, se obtiene:
$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función arbitraria que se supone continua.

Integrando respecto a *t* se obtiene la solución general:

$$u = \int \varphi(t)dt + g(x) \Rightarrow u = f(t) + g(x)\,,$$

donde f(t) es una función primitiva de φ(t).

También puede obtenerse considerándola una ecuación de Euler[7]. Es el caso: a = 0, b ≠ 0 (con c = 0).

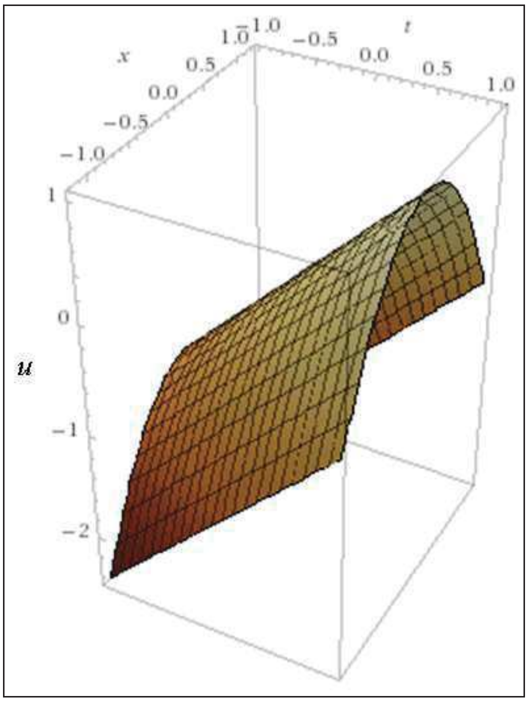
Una solución es $u = f\left(t - \frac{c}{b}x\right)$, que al ser c = 0 queda u = f(t). Otra es u = g(x). La solución general es, pues, u = f(t) + g(x).

c) Aplicando, ahora, las condiciones dadas, se tiene que:

$$u(x,0) = -x^2 : -x^2 = f(0) + g(x);\ g(x) = -f(0) - x^2, \text{ y con ello } g(0) = -f(0).$$

$$u(0,t) = t : t = f(t) + g(0);\ f(t) = t - g(0);\ f(t) = t + f(0).$$

Substituyendo f(t), g(x) en la solución general, resulta, en definitiva, la solución particular buscada, a saber: $u(x,t) = t - x^2$, con la siguiente representación gráfica en E^3:



[7] Leonhard Euler (1707 - 1783). Matemático suizo. Las facultades que desde temprana edad demostró para las matemáticas pronto le ganaron la estima del patriarca de los Bernouilli, Johann, uno de los más eminentes matemáticos de su tiempo y profesor de Euler en la Universidad de Basilea. En 1748 publicó la obra *Introductio in analysim infinitorum*, en la que expuso el concepto de función en el marco del análisis matemático, campo en el que así mismo contribuyó de forma decisiva con resultados como el teorema sobre las funciones homogéneas y la teoría de la convergencia. En el ámbito de la geometría desarrolló conceptos básicos como los del ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo, y revolucionó el tratamiento de las funciones trigonométricas al adoptar ratios numéricos y relacionarlos con los números complejos mediante la denominada identidad de Euler; a él se debe la moderna tendencia a representar cuestiones matemáticas y físicas en términos aritméticos.

Ejemplo 5.

Comprobar si la función económica: $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$ puede ser una solución particular de la EDP: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{2f}{3}=\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot \sin\dfrac{1}{x}$, y representarla gráficamente.

Solución:

Procede, en primer lugar, resolver el 2º miembro de la EDP dada aplicando infinitésimos equivalentes, con lo que resulta:

$\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot \sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x=0$, y entonces: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{2}{3}f$.

La EDP es, pues, lineal, de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

Por el teorema de Euler, se sabe que si *f* es homogénea, se tiene que:

$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=m\cdot f$, siendo *m* su grado de homogeneidad.

Haciendo en ella: x = tx, y = ty, se obtiene:

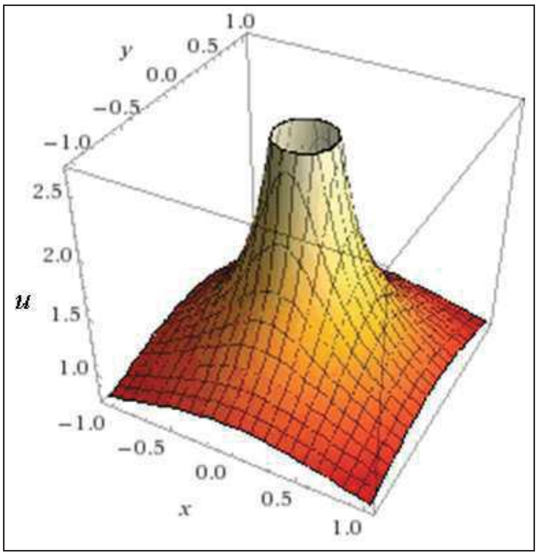
$$f(tx,ty)=\frac{1}{\sqrt[3]{t^2x^2+t^2y^2}}=\frac{1}{t^{2/3}\sqrt[3]{x^2+y^2}}=t^{-2/3}f(x,y),$$

luego la función es homogénea y de grado m = $-\dfrac{2}{3}$. De este modo:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2}{3}f=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2+y^2}},$$

lo que también puede comprobarse por derivación directa, por lo que la función económica dada cumple con la EDP y es una solución particular de la misma.

La representación gráfica en E^3 de esta solución es:



Ejemplo 6.

Comprobar si la función económica $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ puede ser una solución particular de la EDP siguiente:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{2\,f}{9}=\lim_{x\to 0}(x\cdot \ln x)\ ,$$

y representarla gráficamente.

Solución:

Esta EDP es una ecuación lineal, de segundo orden, homogénea (como se verá) y de coeficientes variables. Para proceder a su clasificación, veamos que: $a = x^2$, $b = 2xy$, $c = y^2$, con lo que el discriminante: $(b^2 - 4ac) = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$, luego se trata de una ecuación del tipo parabólico.

Procede, en primer lugar, resolver el 2º miembro de la EDP dada, aunque se trata de una indeterminación de la forma simbólica: 0·(-∞). Se puede escribir:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}\ ,$$

que es de la forma simbólica $\frac{\infty}{\infty}$, a la cual le podemos aplicar directamente la regla de l'Hôpital, esto es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0\,,$$

y entonces, la expresión de la EDP planteada en el enunciado del problema quedará configurada así:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{2\,f}{9}\,.$$

Si *f* es homogénea de grado *m*, se cumple que: $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son homogéneas de grado *m – 1*, luego por el teorema de Euler debe cumplirse también que:

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)+y\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=(m-1)\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ x\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)+y\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(m-1)\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por *x*, la segunda por *y* y sumando, se obtiene:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(m-1)x\frac{\partial f}{\partial x}(m-1)\,y\frac{\partial f}{\partial y}\ .$$

Veamos que haciendo en *f* : x = tx, y = ty, se obtiene:

$$f(tx,ty)=\sqrt[3]{t^2x^2+t^2y^2}=t^{2/3}\sqrt[3]{x^2+y^2}=t^m\cdot f(x,y)\,,$$

luego *f* es homogénea de grado *m*, y también se cumple que:

$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=m\cdot f$. Substituyendo se obtiene:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=m(m-1)\cdot f\,.$$

En el caso del problema planteado, como hemos visto que la función *f* es homogénea de grado m = $\frac{2}{3}$, se tiene que:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot f=-\frac{2}{9}\sqrt[3]{x^2+y^2}\ .$$

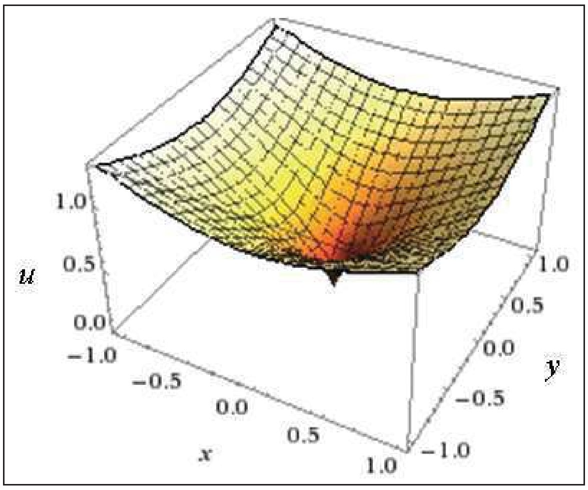
Aplicando directamente la generalización del teorema de Euler se llega al mismo resultado. Como:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=m\,(m-1)\,f\ \text{, y como } m=\frac{2}{3}\text{, entonces:}$$

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)f=-\frac{2}{9}f\ ,$$

por lo que la función económica dada cumple con la EDP propuesta y es, efectivamente, una solución particular de la misma.

La representación gráfica en E^3 de esta solución es:



5. FUNCIONES MULTIVARIANTES

5.1. INTRODUCCIÓN

En esta monografía estudiaremos funciones reales de varias variables reales. Numerosas cantidades de la vida cotidiana o económica o incluso ciertas cantidades físicas dependen de dos o más variables independientes o explicativas. Los costos de una empresa que fabrica dos tipos de artículos dependen de la cantidad de artículos q_1 de tipo I y de la cantidad de artículos q_2 de tipo II que produce, así como de sus precios; luego se trata de una función multivariante.

El conjunto D de pares ordenados de números reales se denomina *dominio de la función* y el conjunto de todos los valores de la función es el *rango de la función*. Una función real de dos variables reales, como las que emplearemos profusamente en el presente libro, es una regla que asigna a cada par ordenado un único número real.

Normalmente no se específica cual es el dominio de la función. Cuando éste es el caso, tenemos que considerar el dominio implícito. El *dominio implícito* de una función multivariante es el conjunto más amplio donde tiene sentido evaluar la fórmula, y el resultado es un número real. Muchas veces, este dominio se representa gráficamente. En el caso de dos variables la representación es una región en el plano.

En nuestra anterior monografía enfocamos el estudio y resolución de las ecuaciones infinitesimales (diferenciales, integrales e integro-diferenciales, así como las ecuaciones recurrentes o en diferencias finitas y los sistemas de todas ellas) de una sola variable y sus aplicaciones económicas, lo que, sin duda, constituye una simplificación de los problemas reales que se presentan en la Economía. Pero también muchos modelos matemáticos empleados en la ciencia económica utilizan funciones multivariantes, así como sus derivadas parciales, elasticidades (funciones derivadas elásticas), integrales múltiples, etc. Las ecuaciones resultantes, con frecuencia, lo son en derivadas parciales (EDP); de ahí el interés de su estudio y el conocimiento de la metodología precisa para su correcta resolución. Ese es, en definitiva, el reto que nos hemos propuesto al redactar la presente monografía desde una perspectiva eminentemente práctica: de ahí el planteamiento y resolución de numerosos ejercicios que abarcan temáticas fundamentales de la Microeconomía.

5.2. EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1.

Hallar el valor de la función económica *u* dada por la superficie integral de la ecuación de primer orden:

$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, que pasa por la curva: $x = 0$, $z = y^2$, cuando $x = 1$ e $y = 2$.

(adaptado de Moreno, C., UNED, 1999).

Solución:

Se tiene que: $x^2 + y^2 = c^2$, con *c* independiente de *t*.

Si se integra la ecuación diferencial: $\frac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - x^2}$, se deduce que un solución positiva (con posible significado económico) sería:

$x = \frac{c \cdot tg(t-k)}{\sqrt{tg^2(t-k)+1}} = \frac{c \cdot tg(t-k)}{sec(t-k)} = c \cdot sin(t-k)$, o también: x = c·sin (t), con k = 0,

y, en consecuencia, se obtiene que: $c^2 \cdot sin^2(t) + y^2 = c^2$; $y^2 = c^2 \cdot cos^2(t)$, con lo que: y = c·cos(t).

Además, de la tercera ecuación diferencial se desprende que:

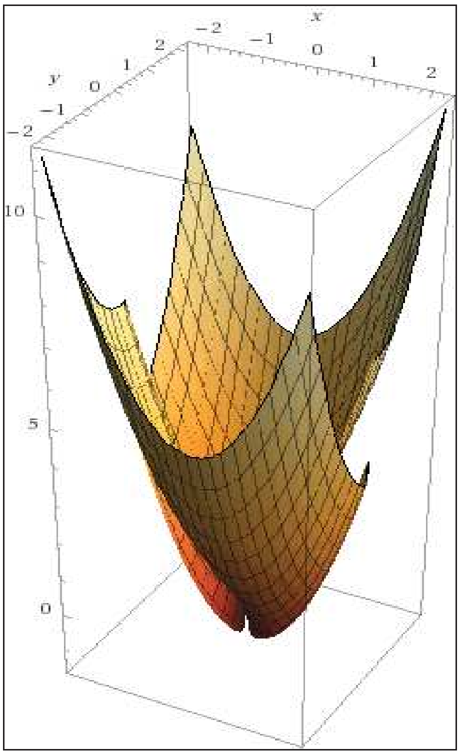
$$z = t + d,$$

donde *d* es una constante. En definitiva, las líneas de campo de esta ecuación son hélices circulares. De la condición inicial se desprende que:

$$\begin{cases} x = s \cdot cos(t), \\ y = s \cdot sin(t), \\ z = t + s^2 \end{cases}$$

Finalmente, si se eliminan *s* y *t* se obtiene la expresión:

$u = z = x^2 + y^2 + arc\ tan\left(\frac{x}{y}\right)$, cuya representación gráfica es:



Veamos, en fin, que en el punto (1,2) se tendrá que la función económica valdrá:

u = 1 + 4 + arc tan (1/2) = 5'464.

Ejercicio 2.

Hallar el valor de la función económica *u*, con precisión hasta las cienmilésimas, dada por la ecuación: $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=I_1-I_2$, con la condición inicial: $u(x,0)=(v(x)+1)^x$, cuando x = 3 e y = 2, viniendo v(x) dada por la EDO: v'(x) – v(x) = 1, con v(0) = 0, y siendo: $I_1=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2}dz\cdot dy\cdot dx$,

$I_2=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2}\rho\cdot\cos\theta\cdot\rho\cdot dz\cdot d\rho\cdot d\theta$.

Solución:

En primer lugar se deberá obtener el 2º miembro de la EDP planteada por diferencia de las dos integrales triples dadas, estando expresado el minuendo en coordenadas cartesianas rectangulares y el sustraendo en coordenadas cilíndricas. Así, respectivamente:

$$\left\{\begin{array}{l} I_1=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2}dz\cdot dy\cdot dx=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\left[(4-y^2)-(2x^2+y^2)dy\cdot dx\right]= \\ \quad =\int_0^{\sqrt{2}}\left(4y-2x^2y-\frac{2y^3}{3}\right)_0^{\sqrt{2-x^2}}\cdot dx=\frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)^{3/2}\cdot dx=\pi . \\ \\ I_2=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2}\rho\cdot\cos\theta\cdot\rho\cdot dz\cdot d\rho\cdot d\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\rho^4\cdot\cos\theta\cdot d\rho\cdot d\theta=\frac{32}{5}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\cdot d\theta=\pi . \end{array}\right.$$

De este modo, la EDP planteada adoptará la configuración analítica: $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=I_1-I_2=\pi-\pi=0$, luego se trata de una ecuación lineal de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

En segundo lugar habrá que resolver la función v(x) que aparece en la condición inicial de la EDP.

Para ello, aplicando el método de las transformadas de Laplace (véase el anexo nº: 1), se obtiene:

$$\begin{cases} Sv_S - v(0) - v_S = L(1); \quad v_S(S-1) = \dfrac{1}{S} \Rightarrow v_S = \dfrac{1}{S(S-1)} \quad , \\ \dfrac{A}{S} + \dfrac{B}{S-1} = \dfrac{1}{S(S-1)}, \quad A(S-1) + BS = 1, \quad A = -1 \Rightarrow B = 1, \\ v(x) = -L^{-1}\left\{\dfrac{1}{S}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{1}{S-1}\right\} = -1 + e^x \, . \end{cases}$$

Alternativamente, por aplicación del método clásico, se tendrá que la ecuación característica de la homogénea o incompleta, será la siguiente:

$\lambda - 1 = 0$; $\lambda = 1$; con lo que: $v^* = c \cdot e^x$; ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} v_p = a \\ v'_p = 0 \end{cases}$$; y substituimos en la ecuación inicial:

$-a = 1$; $a = -1$; con lo que se tendrá la solución general:

$v(x) = v^* + v_p = c \cdot e^x - 1$; y aplicando la condición inicial, se tiene que:

$v(0) = c - 1 = 0$; $c = 1$, y nos quedará la I.P. buscada:

$$\boxed{v(x) = e^x - 1} \quad \text{c. s. q. d.}$$

De hecho se tata de una ecuación lineal de primer orden, con:

$X = -1$; $X_1 = -1$, y: $\int X \cdot dx = -\int dx = -x$;

$\int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx = -\int e^{-x} \cdot dx = e^{-x}$; y aplicando la fórmula pertinente:

$v(x) = e^x(c - e^{-x}) = c \cdot e^x - 1$, que es la I.G. a la cual habrá que aplicar la condición inicial para obtener la I.P. buscada (es evidente que con $c = 1$). De este modo, la expresada condición inicial quedará establecida así:

$$u(x,0) = (e^x)^x = e^{x^2} \, .$$

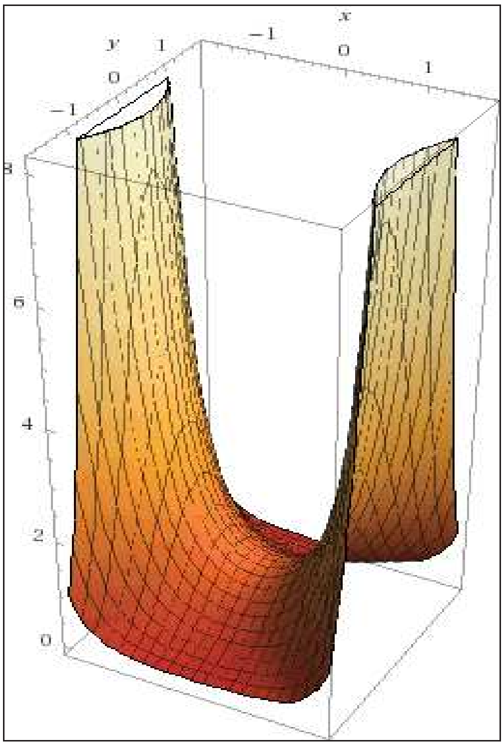
El sistema característico asociado a la ecuación, en forma autónoma, es el siguiente:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0} \, .$$

De la primera igualdad se deduce fácilmente que: $x^2 - y^2 = c = s^2$ es una integral primera. De la segunda igualdad se deduce que:

$$u = c_3(s) = e^{s^2}.$$

De todo ello se obtiene, en definitiva, que: $u = e^{x^2 - y^2}$, es la solución buscada, con la siguiente representación gráfica:



Veamos, en fin, que en el punto (3,2) se tendrá que la función económica valdrá:

$$u(x, y) = e^{x^2 - y^2} = e^5 = 148'41316.$$

CAPÍTULO 2

ELASTICIDADES PARCIALES

1. INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

Cuando en la función considerada haya una variable dependiente (explicada o endógena) y dos o más variables independientes (explicativas o exógenas), circunstancia que se presenta frecuentemente en Economía, no existirá la elasticidad total como tal, si no que existirán elasticidades parciales, que son aquellas otras elasticidades correspondientes a la variable dependiente con respecto a cada una de las variables independientes, al permanecer constantes, en cada caso, el resto de las variables independientes no consideradas (por aplicación del principio *ceteris paribus*).

Estas elasticidades deben interpretarse del siguiente modo:

$$\begin{cases} E = 0 \text{ (función perfectamente inelástica)} \\ \left.\begin{matrix} -1 < E < 0 \\ 0 < E < 1 \end{matrix}\right\} \text{(función relativamente inelástica)} \\ |E| = 1 \text{ (elasticidad unitaria)} \\ \left.\begin{matrix} -\infty < E < -1 \\ 1 < E < \infty \end{matrix}\right\} \text{(función relativamente elástica)} \\ E = \pm\infty \text{ (función perfectamente elástica)} \end{cases}$$

Para una ampliación exhaustiva del concepto económico de "elasticidad funcional" o "función derivada elástica", nos remitimos al capítulo 4 de nuestra anterior monografía titulada *Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes*, citada en la bibliografía, donde se resuelven también numerosos ejercicios de funciones económicas diversas, en aquel caso, no obstante, de una sola variable explicativa.

En el caso de las funciones económicas de varias variables explicativas o independientes, y más concretamente en el estudio de las funciones de producción, la *elasticidad parcial* de producción mide el cambio porcentual en la cantidad producida (*output*) ante un cambio porcentual en uno de los factores, manteniendo el resto constante. La *elasticidad total* de producción, que es la suma de las elasticidades parciales, indica el cambio porcentual en la cantidad producida del bien o servicio en cuestión ante un cambio porcentual igual en todos los factores productivos. Si la función de producción es homogénea (y por tanto también homotética, cumpliendo, consecuentemente, el teorema de Euler), dicha elasticidad total representa justamente el grado de homogeneidad de aquella función.

2. EJERCICIOS

Ejercicio 1

Calcular, con precisión hasta las diezmillonésimas, las diferentes elasticidades de la función económica dada por la siguiente EDP:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 2z(x)\cdot \sin y \\ u(x,0) = x^2 \times \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} \ln x \cdot dx, \forall \varepsilon \in (0,1) \\ u(0,y) = y^2 \end{cases}$$

, en el punto (1,2), en que $z(x) = h(x) + c\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\cdot z(y)\cdot dy$.

Solución:

En primer lugar, habrá que resolver la función z(x) dada por la ecuación integral inhomogénea y de 2ª especie siguiente:

$$z(x) = h(x) + c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} z(y) dy \text{, con } \lambda = c.$$

Se tratará de obtener un núcleo resolvente con el núcleo separable: $k(x,y) = e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}$. Identificamos: $f_1(x) = e^{-x^2}$ y a $g_1(y) = e^{-y^2}$. Luego el coeficiente, K_{11} de la matriz K es:

$$K_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2}\cdot dx = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi} \text{, y así } K = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi} \text{. Luego se deduce que:}$$

$$M = 1 - c\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi} = \frac{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2},$$

y entonces sucede que: $M^{-1} = \dfrac{2}{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}$, para todo c distinto de $\sqrt{2/\pi}$, puesto que de lo contrario la expresión anterior sería infinita. Por lo tanto el núcleo resolvente de la ecuación planteada es:

$$R(x,y;c)=\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\ .$$

Ahora bien, si h(x) = x entonces la solución para la ecuación planteada es, de acuerdo a la teoría, la siguiente:

$$z(x)=x+\int_{-\infty}^{+\infty}c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\cdot y\cdot dy=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\cdot y\cdot dy=$$

$$=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot\left(-\left[\frac{e^{-y^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty}\right)=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot[-\frac{1}{2}(e^{-\infty}-e^{-\infty})]=$$

$$=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot 0=x\,.$$

La comprobación del resultado así obtenido de la ecuación integral puede llevarse a cabo sin más que substituir la solución hallada en dicha ecuación. En efecto:

$$z(x)=x+c\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-y^2}\cdot y\cdot dy=x+c\cdot 0=x\ ,\ \text{c.s.q.d.}$$

En segundo lugar, procede aclarar la primera condición lateral dada. Para resolver la integral en cuestión aplicaremos el método de integración por partes, según el cual:

$$\int_{\varepsilon}^{1}\ln x\cdot dx=[x\cdot\ln x]_{\varepsilon}^{1}-\int_{\varepsilon}^{1}dx=\varepsilon-\varepsilon\cdot\ln\varepsilon-1\,.$$

Calculando ahora el límite por aplicación de la regla de l'Hôpital (o bien por infinitésimos equivalentes, en el caso del 2º sumando), resulta: $\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon-\varepsilon\cdot\ln\varepsilon-1)=-1$, la integral es convergente y la condición antedicha quedará expresada así: $u(x,0) = -x^2$.

Puesta ahora la ecuación planteada en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2x\cdot\sin y\ ,$$

e integrando con respecto a *x*, suponiendo *y* constante, se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2\cdot\sin y+f(y)\,,$$

donde f(y) es una función arbitraria, que se supone continua.

Integrando ahora esta última ecuación con respecto a *y*, con *x* constante, resulta:

$$u(x,y) = -x^2\cos y + g(y) + h(x),$$

donde g(y) es una primitiva de f(y), y h(x) una función arbitraria.

Aplicando las condiciones del enunciado, se tiene que:

$$\begin{cases} u(x,0) = -x^2 \Rightarrow g(0) + h(x) = 0 \\ u(0,y) = y^2 \Rightarrow g(y) + h(0) = y^2 \end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce que:

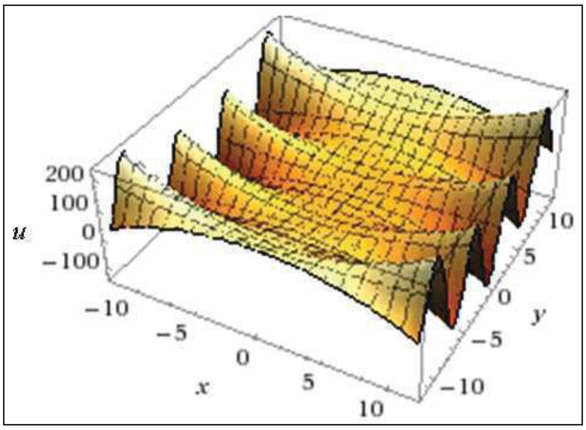
$$h(x) = -g(0), \quad \text{y con ello: } h(0) = -g(0).$$

De la segunda: $g(y) = y^2 – h(0)$, es decir: $g(y) = y^2 + g(0)$.

Por lo tanto, la función en cuestión es:

$$u(x,y) = -x^2\cos y + g(y) + h(x) = -x^2\cdot\cos y + y^2,$$

cuya representación gráfica resulta ser la siguiente:



Para efectuar el cálculo de sus diferentes elasticidades procederemos seguidamente, teniendo en cuenta que, en el punto (1,2), la función económica vale: u(1,2) = 4 – cos 2 = 4’4161468 .

$$u(x,y) = -x^2\cdot\cos y + y^2 \text{ , resultan: } \begin{cases} u'_x = -2x\cdot\cos y \\ u'_y = x^2\cdot\sin y + 2y \end{cases} \text{; y así:}$$

- Elasticidades parciales:

Respectivamente para cada variable, vendrán dadas por:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{x}{u} \times u'_x = \dfrac{2x^2 \cdot \cos y}{x^2 \cdot \cos y - y^2} = 0'1884660 < 1 \\ E_y = \dfrac{y}{u} \times u'_y = \dfrac{2y^2 + x^2 y \cdot \sin y}{y^2 - x^2 \cdot \cos y} = 2'2233398 > 1 \end{cases}$$

- Elasticidad total:

$$E_T = E_x + E_y = 0'188466 + 2'2233398 = 2'4118058 .$$

Por último, las elasticidades direccionadas, con respecto a ambos ejes coordenados, es decir, para 0º y 90º, en el punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$, son las siguientes:

$$\begin{cases} {}_xE_x\, u(x_0, y_0) = \dfrac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 0'188466 \times \sqrt{5} = 0'4214227 \\ {}_yE_y\, u(x_0, y_0) = \dfrac{E_y}{y_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \dfrac{2'2233398 \times \sqrt{5}}{2} = 2'4857695 \end{cases}$$

Como vemos, la función con respecto a la variable *x* (y su direccionada) es relativamente inelástica, mientras que, con respecto a la variable *y* (también su direccionada), se trata de una función económica relativamente elástica, al igual que la elasticidad total.

Ejercicio 2

Calcular: a) el valor de la función económica *u* en el punto $\left(\frac{y_0^2}{2}, -2\right)$, dada por la EDP: (y – u) u_x + (x – y) u_y = u + z(x), con la siguiente condición: u(1,y) = cos 0, ∀y < ln 1, tal que la función z(x) viene dada por la solución negativa de la ecuación integral siguiente: $\int_0^x z(t) \cdot z(x-t)dt = \frac{x^3}{6}$, y b) el valor de sus diferentes elasticidades en dicho punto.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 16).

Solución:

a) La EDP dada exigirá, previamente, la resolución de la ecuación integral de Volterra dada que proporcione el valor de la función z(x). Se trata de una ecuación integral homogénea de 2ª especie, con λ = 1. Para ello, sea: z(x) = $L^{-1}[\phi(p)]$. Aplicando a ambos miembros de la ecuación integral anterior la transformación de Laplace se obtiene que:

$\phi^2(p) = \frac{1}{p^4}$, de donde se deduce que la función generatriz Laplace es:

$$\phi(p) = \sqrt{\frac{1}{p^4}} = \pm\frac{1}{p^2}.$$

Las funciones: $z_1(x) = L^{-1}[\frac{1}{p^2}] = x$, y $z_2(x) = L^{-1}[-\frac{1}{p^2}] = -x$, serán ambas teóricamente soluciones de la ecuación integral planteada (dicha solución no es única) y aquí tomaremos en consideración únicamente la segunda de ellas $z_2(x) = -x$ (recta bisectriz del segundo cuadrante del círculo).

La comprobación de este resultado puede realizarse sin más que substituirlo en la ecuación integral dada, con lo que:

$$\int_0^x z(t)\cdot z(x-t)\cdot dt = \int_0^x t(x-t)\cdot dt = x\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{6}, \text{ c.s.q.d.}$$

Con ello, la EDP dada quedará establecida así:

$(y - u)\, u_x + (x - y)\, u_y = u - x$, con la misma condición de contorno.

En este caso los datos del problema son:

$\begin{cases} f_1(x,y,z) = y - z, \\ f_2(x,y,z) = x - y, \\ f(x,y,z) = z - x \end{cases}$ entonces la curva inicial se parametriza así:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (1,s,1),\ \forall s \in \Re.$$

Dado que: $\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 1-s & 1 \end{pmatrix} = s - 1,$

tenemos que la condición inicial es transversal al flujo cuando $s \neq 1$, con lo cual el problema tiene solución única.

En este caso, la transformada de Jacobi viene dada por la siguiente expresión: $(y - z)w_x + (x - y)w_y + (z - x)w_z = 0$.

En primer lugar, consideramos estos factores integrantes:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

Evidentemente: $w = z + f(x,y)$. Del hecho de que: $1 = w_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, se deduce que: $f(x,y) = y + g(x)$, con lo cual $1 = w_x = g'(x)$. De este modo, probamos que:

$$w_1(x,y,z) = x + y + z,$$

es una integral primera de la ecuación.

En este caso, al no ser $w_1(\gamma(s))$ una función constante, necesitamos encontrar una segunda integral primera funcionalmente independiente de w_1.

Probemos ahora con los factores integrantes:

$$a_1 = x, \quad a_2 = z, \quad a_3 = y.$$

La integral primera asociada a estos factores viene dada al resolver el sistema como sigue:

Dado que $x = w_x$, deducimos que $w = \frac{x^2}{2} + f(y,z)$, con lo cual:

$$z = w_y = \frac{\partial f}{\partial y}(y,z). \text{ Así pues, } f(y,z) = zy + g(z).$$

Del hecho de que $y = w_z = y + g'(z)$ se deduce que:

$$w_2(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + zy, \text{ es la integral primera buscada.}$$

Al igual que sucedía en el caso anterior, $w_2(\gamma(s))$ no es una función constante, por lo tanto la solución buscada no está definida implícitamente al igualar w_2 a una constante. Por otro lado, dado que:

$$\text{rango}\left(\frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x,y,z)}\right) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z,$$

sabemos que en los puntos exteriores a la recta $x = y = z$ las integrales primeras w_1 y w_2 son funcionalmente independientes. En nuestro caso, para $y < 0$ estamos fuera de esa recta. Por consiguiente, toda solución de la ecuación de Jacobi, será una combinación funcional de w_1 y w_2:

$$w(x,y,z) = Z(w_1(x,y,z), w_2(x,y,z)).$$

Para calcular la expresión de la función Z resulta suficiente tener en cuenta que:

$$w_1(\gamma(s)) - w_2(\gamma(s)) = \frac{3}{2}.$$ De este modo, definiendo:

$$Z(p,q) = p - q - \frac{3}{2},$$ llegamos a que:

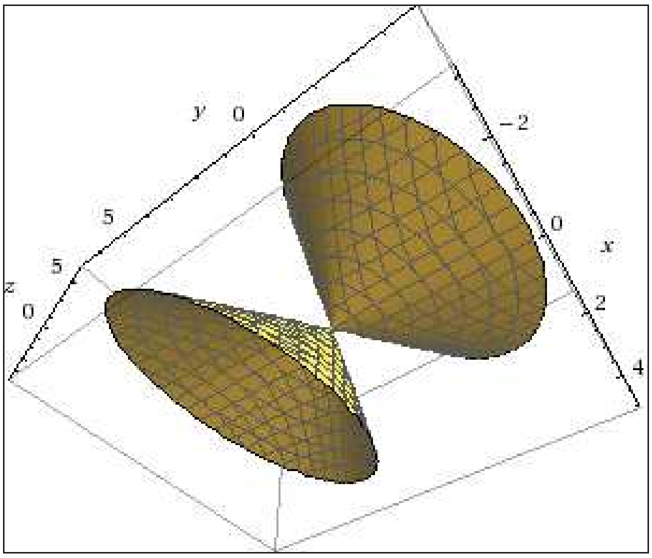
$$w(x,y,z) = w_1(x,y,z) - w_2(x,y,z) - \frac{3}{2} = x + y + z - \frac{x^2}{2} - zy - \frac{3}{2},$$

es la única solución de la ecuación de Jacobi que se anula a lo largo de la curva γ.

Dado que $w_z = 1 - y \neq 0$ siempre que $y \neq 1$, sabemos que esta función define implícitamente la única solución del problema planteado, la cual viene dada por la siguiente expresión:

$$u(x,y) = \frac{2x + 2y - x^2 - 3}{2y - 2},$$

a la que corresponde la siguiente representación gráfica de un cono elíptico infinito de ecuación: $x^2 - 2x - 2y - 2z + 2yz + 3 = 0$. Así:



Para la conceptualización de esta cuádrica o superficie de 2º orden, debe tenerse en cuenta que su matriz (A) es:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$ y entonces: $|A| = 0$; $A'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Además:

$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ con $|A| = 0$ y $a_{11} \cdot A_{44} = -1 < 0$, luego se trata de un cono real. Su centro propio vendrá dado por:

$$x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1; \; y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$, con lo que se trata del punto (-1,1,-1).

Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1 \\ 0 & 1 & -s \end{vmatrix} = 0 \,,$$

de donde: $S_1 = 1 = S_2$, $S_3 = -1$. Se trata, pues, de una cuádrica de revolución, con la siguiente ecuación reducida:

$$S_1x^2 + S_2y^2 + S_3z^2 + I_4/I_3 = 0 \text{ , siendo:}$$

I_4 (invariante bicuadrático) = $|A| = 0$, y también:

I_3 (invariante cúbico) = $A_{44} = -1$.

Con ello resultará, que la ecuación reducida buscada es:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Veamos, en fin, que en el punto $\left(\frac{y_0^2}{2}, -2\right)$ = (2,-2), el valor de la función dada será: u = 7/6 = 1'167.

b) Procederemos, seguidamente, al cálculo de las diferentes elasticidades solicitadas. Así, teniendo en cuenta que:

$$u(x,y) = \frac{2x + 2y - x^2 - 3}{2y - 2} \text{ , resultan: } \begin{cases} u'_x = \dfrac{1-x}{y-1} \\ u'_y = \dfrac{(x-1)^2}{2(y-1)^2} \end{cases} \text{ ; y así:}$$

- Elasticidades parciales:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{x}{u} \times u'_x = \dfrac{2x^2 - 2x}{x^2 - 2x - 2y + 3}; \\ E_y = \dfrac{y}{u} \times u'_y = \dfrac{y(x-1)^2}{(y-1)(2x + 2y - x^2 - 3)}; \end{cases}$$

- Elasticidad total: $E_T = E_x + E_y$.

En el punto $(x_0, y_0) = (2, -2)$, se tendrán, respectivamente, los siguientes valores: $\begin{cases} E_x = \dfrac{4}{7} = 0'571 \in (0,1) \\ E_y = -\dfrac{2}{21} = -0'095 \in (0,-1) \end{cases}$,

y una elasticidad total de: $E_T = E_x + E_y = 4/7 - 2/21 =$

$= 10/21 \sim 0'476 \in (0,1)$.

Por último, las elasticidades direccionadas, con respecto a ambos ejes coordenados, es decir, para 0º y 90º, en el punto $(x_0, y_0) = (2, -2)$, son las siguientes:

$$\begin{cases} {}_xE_x\, u(x_0, y_0) = \dfrac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \dfrac{2}{7} \times \sqrt{8} = 0'808 \in (0,1) \\ {}_yE_y\, u(x_0, y_0) = \dfrac{E_y}{y_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \dfrac{1}{21} \times \sqrt{8} = 0'135 \in (0,1) \end{cases}$$

Como vemos, la función económica en cuestión resulta relativamente inelástica en todos los casos estudiados.

Ejercicio 3

Hallar las elasticidades direccionadas y total de la función económica: u(x,y) en el punto de coordenadas (x_0,y_0) = (1,1), cumpliéndose que: $u_x - u_y + 2u = 6\int_0^1 (x - x^2)dx$, con: $u(x,0) = x^2$, $\forall x \in \Re$.

(adaptado de Aimar *et alt*., 2012, p. 79).

Solución:

El primer paso consiste en resolver el segundo miembro de la EDP, esto es:

$6\int_0^1 (x-x^2)dx = 6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1$, y entonces queda: $u_x - u_y + 2u = 1$, que es una ecuación inhomogénea, lineal, de primer orden y coeficientes constantes.

El segundo paso consiste en hallar la solución general de la ecuación diferencial planteada, ignorando, por un momento, la condición lateral dada por: $u(x,0) = x^2$. Identificamos las características como las rectas de ecuación $y = -x + d$ o las de ecuación $x + y = cte$. Luego hacemos el cambio de variables:

$$\begin{cases} w = x+y \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = w-z \\ y = z. \end{cases}$$

Identificando $u(x,y) = v(w,z)$, veamos qué EDP satisface $v(w, z)$. Como consecuencia de la aplicación de la "regla de la cadena", se tendrá que:

$$\begin{cases} u_x = v_w w_x + v_z z_x \\ u_x = v_w 1 + v_z 0 \\ u_x = v_w \end{cases} \quad \text{y también:} \quad \begin{cases} u_y = v_w w_y + v_z z_y \\ u_y = v_w 1 + v_z 1 \\ u_y = v_w + v_z. \end{cases}$$

Por lo tanto $u_x - u_y = -v_z$. Así, la ecuación diferencial en cuestión se transforma en: $-v_z + 2v = 1$, que es equivalente a $v_z - 2v = -1$. Multiplicamos por el factor integrante: $m(z) = e^{-2z}$ y obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-2z}v\right) = -e^{-2z}.$$

Integrando con respecto a *z* nos queda: $e^{-2z}v = \frac{1}{2}e^{-2z} + C(w)$, o lo que es lo mismo, $v = \frac{1}{2} + C(w)e^{2z}$. Reemplazando *w* y *z* por sus equivalentes en términos de *x* e *y* obtenemos, en definitiva, la solución general:

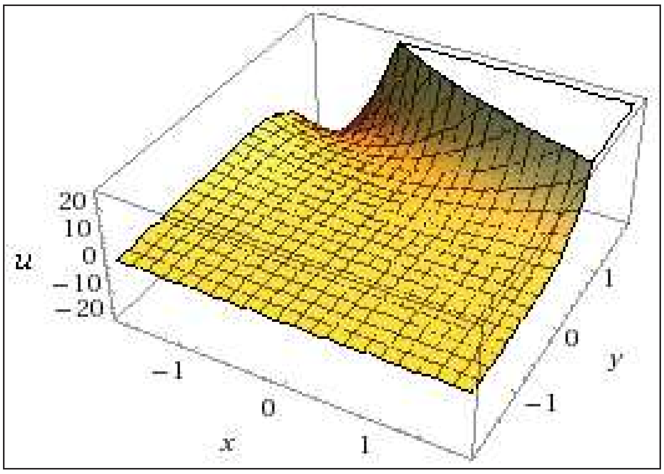
$$u(x,y) = \frac{1}{2} + C(x+y)e^{2y}.$$

Una vez hallada la solución general imponemos la condición lateral dada: $u(x,0) = x^2$ para todo $x \in \Re$. Esto implica que:

$$x^2 = u(x,0) = \frac{1}{2} + C(x), \qquad \forall x \in \Re,$$

es decir: $C(x) = x^2 - \frac{1}{2}$. Luego, la solución particular buscada es, siendo: $C(x+y) = (x+y)^2 - \frac{1}{2}$, la siguiente: $u(x,y) = \frac{1}{2} + \underbrace{\left((x+y)^2 - \frac{1}{2}\right)}_{C(x+y)} e^{2y}$,

cuya representación gráfica es:



Procederemos, ahora, al cálculo de las diferentes elasticidades solicitadas. Esto es:

$$\begin{cases} u'_x = 2e^{2y}(x+y) \\ u'_y = 2e^{2y}\left[(x+y)^2 + x + y - \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

- Elasticidades parciales:

$$E_x = \frac{x}{u} \times u'_x = \frac{2x \cdot e^{2y}(x+y)}{\frac{1}{2} + \left[(x+y)^2 - \frac{1}{2}\right]e^{2y}} \; ; \; E_y = \frac{y}{u} \times u'_y = \frac{2_y e^{2y}\left[(x+y)^2 + x + y - \frac{1}{2}\right]}{\frac{1}{2} + \left[(x+y)^2 - \frac{1}{2}\right]e^{2y}}.$$

- Elasticidad total:

$$E_t = E_x + E_y = \frac{2ye^{2y}\left[(x+y)^2 + 2x + 2y - \frac{1}{2}\right]}{\frac{1}{2} + \left[(x+y)^2 - \frac{1}{2}\right]e^{2y}}.$$

En el punto: $(x_0, y_0) = (1, 1)$, se tendrán, respectivamente, las siguientes elasticidades:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{2e^2 \times 2}{\dfrac{1}{2} + \left[2^2 - \dfrac{1}{2}\right]e^2} = \dfrac{4e^2}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}e^2} = \dfrac{8e^2}{1 + 7e^2} = 1'12 > 1 \\ \text{(función relativamente elástica)} \\ \\ E_y = \dfrac{2e^2\left[2^2 + 2 - \dfrac{1}{2}\right]}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{7e^2}{2}} = \dfrac{2e^2 \times \dfrac{11}{2}}{\dfrac{1 + 7e^2}{2}} = \dfrac{22e^2}{1 + 7e^2} = 3'08 > 1 \\ \text{(función relativamente elástica)} \end{cases}$$

, y una elasticidad total de: $E_t = E_x + E_y = 1'12 + 3'08 = 4'20$.

Las elasticidades direccionadas con respecto a ambos ejes coordenados cartesianos rectangulares, es decir, para 0º y 90º, en el punto: $(x_0, y_0) = (1, 1)$, con $u = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7e^2}{2} = 26'36$, son las siguientes:

$$\begin{cases} {}_xE_x u(x_0, y_0) = \dfrac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ {}_yE_y u(x_0, y_0) = \dfrac{E_y}{y_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{cases} \text{; en } (x_0, y_0) = (1, 1)\text{, se tendrá:}$$

$$\begin{cases} {}_xE_x u(1, 1) = \dfrac{1'12}{1} \times \sqrt{2} \cong 1'58 > 1 \\ {}_yE_y u(1, 1) = \dfrac{3'08}{1} \times \sqrt{2} \cong 4'36 > 1 \end{cases}$$

Así pues, en todos los casos estudiados, se trata de funciones relativamente elásticas.

Ejercicio 4

Hallar las elasticidades direccionadas y total de la función económica u(x,y), en el punto $(x_0,y_0) = (1,1)$, siendo:

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}, \text{ con: } u[x, z(x) + x + 2] = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^8 + 1}dx\ ,\ \forall x \in \Re,$$

tal que: $z(x) = x + \int_{-1}^{1} x \cdot t \cdot z(t) \cdot dt$.

(adaptado de Aimar *et alt*., 2012, p. 80).

Solución:

El primer paso a seguir hace referencia a la ecuación integral dada explicativa de la función z(x) que se halla presente en la condición de contorno, que es de Freedholm de 2ª especie e inhomogénea, con $\lambda = 1$, para cuya resolución emplearemos el método de Bubnov-Galiorkin. Para ello, tomemos como sistema completo de funciones en [-1, 1] el sistema de polinomios de Legendre $P_n(x)$ ($\forall n = 0, 1, 2, \ldots$). La solución aproximada $z_n(x)$ de la ecuación planteada la buscaremos en la forma:

$$z_3(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2}\,.$$

Substituyendo $z_3(x)$ en lugar de z(x) en la ecuación integral planteada, tendremos que:

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xt\left(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2 - 1}{2}\right)dt\,,$$

o bien: $a_1 + a_2 x + a_3 \dfrac{3x^2 - 1}{2} = x + x\dfrac{2}{3}a_2\,.$

Multiplicando ambos miembros de esta última ecuación sucesivamente por 1, x, $\dfrac{3x^2 - 1}{2}$ e integrando respecto a x desde -1 hasta 1, se halla que:

$$2a_1 = 0, \quad \frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a_2\,, \quad \frac{2}{5}a_3 = 0\,.$$

De aquí se obtienen los valores: $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, por lo que $z_2(x) = 3x$. No es difícil comprobar que ésta es precisamente la solución exacta de la ecuación planteada. En efecto:

$$z(x) = x + \int_{-1}^{1} x \cdot t \cdot 3t \cdot dt = x + x\int_{-1}^{1} 3t^2 \cdot dt = x + 3x\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = x + 2x = 3x\,,\ \text{c.s.q.d.}$$

Por otra parte, obsérvese, en esta misma condición, que la integral definida que aparece lo es de una función impar, puesto que f(x) = -f(-x), por lo que el resultado de la integral será 0. De este modo, la condición de contorno quedará definitivamente expresada así:

$$u(x, 4x + 2) = 0\,,\ \forall x \in \Re\,.$$

Ahora, el segundo paso consiste en hallar la solución general de la EDP, que es una ecuación inhomogénea, lineal, de primer orden y coeficientes constantes. Las características son las rectas de pendiente 2, es decir, y se trata de las rectas de la forma: y – 2x = cte. Viendo que en el lado derecho de la ecuación aparece la exponencial e^{x+y} elegimos las variables auxiliares de la siguiente manera:

$$\begin{cases} w = y - 2x \\ z = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z - w}{3} \\ y = \dfrac{2z + w}{3} \end{cases}$$

Identificando u(x, y) = v(w, z), veamos qué EDP satisface v(w, z). Como consecuencia de la aplicación de la "regla de la cadena", se tendrá que:

$$\begin{cases} u_x = v_w w_x + v_z z_x \\ u_x = v_w(-2) + v_z 1 \\ u_x = -2v_w + v_z \end{cases} \quad \text{y también:} \quad \begin{cases} u_y = v_w w_y + v_z z_y \\ u_y = v_w 1 + v_z 1 \\ u_y = v_w + v_z. \end{cases}$$

Por lo tanto: $u_x + 2u_y = 3v_z$. Así, la ecuación diferencial dada se transforma en; $3v_z - 4v = e^z$, que resulta equivalente a: $v_z - \frac{4}{3}v = \frac{e^z}{3}$.

Multiplicamos por el factor integrante $m(z) = e^{-\frac{4}{3}z}$ y obtenemos la expresión: $\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\frac{4}{3}z}v\right) = \frac{e^{-\frac{z}{3}}}{3}$.

Integrando nos queda: $e^{-\frac{4}{3}z}v = -e^{-\frac{z}{3}} + C(w)$, o lo que es lo mismo: $v = -e^z + C(w)e^{\frac{4}{3}z}$. Reemplazando *w* y *z* por sus equivalentes en términos de *x* e *y* obtenemos la solución general:

$$u(x, y) = -e^{x+y} + C(y - 2x)e^{\frac{4}{3}(x+y)}. \quad (1)$$

Una vez hallada la solución general imponemos la condición lateral calculada: u(x, 4x + 2) = 0 para todo $x \in \Re$. Esto implica que:

$$0 = u(x, 4x + 2) = -e^{x+4x+2} + C(4x + 2 - 2x)e^{\frac{4}{3}(x+4x+2)}, \ \forall x \in \Re,$$

es decir: $C(2x + 2) = e^{(5x+2)-\frac{4}{3}(5x+2)} = e^{-\frac{5x+2}{3}}, \forall x \in \Re$. Tenemos entonces que definir la función C (r) (usamos, para ello, una variable genérica r) de manera que:

$$C(2x+2)=e^{-\frac{5x+2}{3}}. \quad (2)$$

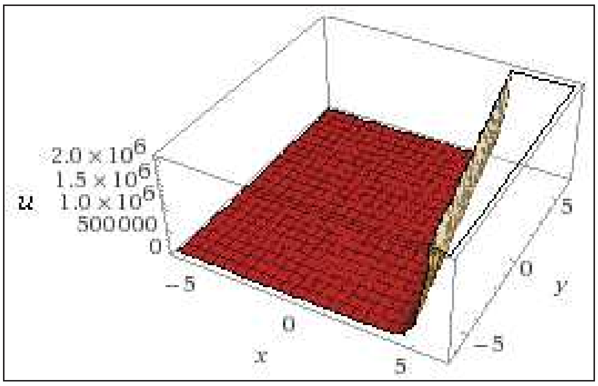
Definimos, entonces, r = 2x + 2 (lo que está como argumento de C), y despejamos *x*, es decir $x=\frac{r-2}{2}$. Luego, reemplazamos esta expresión en todos los lugares en que aparece *x* en la igualdad (2), es decir:

$$C(2x+2)=C\left(2\frac{r-2}{2}+2\right)=C(r)=e^{-\frac{5x+2}{3}}=e^{-\frac{5}{6}r+1}.$$

Es decir, $C(r)=e^{-\frac{5}{6}r+1}$. La solución buscada se obtiene, entonces, utilizando esta definición de C(r) en la expresión (1), es decir:

$$u(x,y)=-e^{x+y}+C(y-2x)e^{\frac{4}{3}(x+y)}=-e^{x+y}+e^{-\frac{5}{6}(y-2x)+1}e^{\frac{4}{3}(x+y)}=-e^{x+y}+e^{\frac{y}{2}+3x+1},$$

cuya representación gráfica es la siguiente:



Procederemos, ahora, el cálculo de las diferentes elasticidades solicitadas. Así:

$$\begin{cases} u'_x = 3\cdot e^{3x+\frac{y}{2}+1}-e^{x+y} \\ u'_y = \frac{1}{2}\cdot e^{3x+\frac{y}{2}+1}-e^{x+y} \end{cases}$$

- Elasticidades parciales:

$$E_x=\frac{x}{u}\times u'_x=\frac{3x\cdot e^{3x+\frac{y}{2}+1}-x\cdot e^{x+y}}{e^{3x+\frac{y}{2}+1}-e^{x+y}}; \qquad E_y=\frac{y}{u}\times u'_y=\frac{\frac{y}{2}\cdot e^{3x+\frac{y}{2}+1}-y\cdot e^{x+y}}{e^{3x+\frac{y}{2}+1}-e^{x+y}};$$

- Elasticidad total:

Del mismo modo, se tendrá que:

$$E_t = E_x + E_y = \frac{\left(3x + \frac{y}{2}\right)e^{3x+\frac{y}{2}+1} - (x+y)e^{x+y}}{e^{3x+\frac{y}{2}+1} - e^{x+y}}.$$

En el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$, se tendrá, respectivamente:

$$E_x = \frac{3 \cdot e^{4'5} - e^2}{e^{4'5} - e^2} = 3'18 > 1; \qquad E_y = \frac{0'5 \times e^{4'5} - e^2}{e^{4'5} - e^2} = 0'46 < 1;$$

y una elasticidad total de: $E_t = E_x + E_y = 3'18 + 0'46 = 3'64$.

Veamos, pues, que con respecto a la variable *x* se trata de una función relativamente elástica, mientras que con respecto a la variable *y* es relativamente inelástica.

Las elasticidades direccionadas con respecto a ambos ejes coordenados, es decir, para 0º y 90º, en el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$, con un valor u = 82'63, son:

$$\begin{cases} {}_xE_x u(x_0, y_0) = \frac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 3'18 \times \sqrt{2} = 4'50 \\ {}_yE_y u(x_0, y_0) = \frac{E_y}{y_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 0'46 \times \sqrt{2} = 0'65 \end{cases}$$

Ejercicio 5

Hallar las elasticidades direccionadas y total de la función económica u(x, y) en el punto $(x_0, y_0) = (4, 6)$, siendo:

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}, \quad \text{con: } u(x, 2x-1) = \int_0^{\pi} x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx, \quad \forall x \in \Re.$$

(adaptado de Aimar *et alt*., 2012, p. 81).

Solución:

Veamos que la ecuación diferencial en derivadas parciales ahora propuesta es la misma que la del ejemplo anterior, a salvo de la condición lateral, así que la solución general es:

$$u(x, y) = -e^{x+y} + C(y - 2x)e^{\frac{4}{3}(x+y)}.$$

Para la resolución de la integral definida de la condición lateral dada, veamos que: $\sin^2 x \cdot \cos^3 x = \sin^2 x(1 - \sin^2 x)^{3/2}$, y entonces:

$$\int_0^\pi x\cdot\sin^2 x\cdot\cos^3 x\cdot dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\cdot\cos^3 x\cdot dx\,,$$

que se resuelve haciendo el cambio de variable: sin x = t, llegándose a:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\cdot\cos^3 x\cdot dx = \int_0^0 t^2(1-t^2)\cdot dt = 0\,.$$

Cuando intentamos, a continuación, imponer la condición lateral deducida: u(x, 2x-1) = 0, obtenemos:

$$0 = u(x,2x-1) = -e^{x+2x-1} + C(2x-1-2x)e^{\frac{4}{3}(x+2x-1)} = -e^{3x-1} + C(-1)e^{\frac{4}{3}(3x-1)}, \qquad \forall x\in\Re,$$

$$\text{es decir: } C(-1) = e^{-\frac{3x-1}{3}}, \qquad \forall x\in\Re.$$

Aquí vemos que estamos pidiendo a la función C(r) que en r = -1 tome diferentes valores dependiendo de *x*, lo que resulta imposible, por lo que el problema planteado no tiene solución. La dificultad que presenta el problema radica en que la condición lateral está dada sobre una característica, la recta y = 2x – 1, que tiene una pendiente o coeficiente angular de la tangente = 2.

A veces se presentan dificultades cuando la condición lateral está dada sobre una característica. La explicación es la siguiente: la EDP resulta ser una EDO a lo largo de las características, y por eso el valor de la solución a lo largo de ellas está determinado por el valor en un solo punto. Como la condición lateral no cumple la EDO sobre la característica, el problema planteado carece de solución.

Ejercicio 6

Hallar las elasticidades direccionadas y total de la función económica u(x, y) en el punto $(x_0,y_0) = (1,2)$, siendo:

$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$, con la condición lateral siguiente:

$u[x,\phi(x)] = -e^{3x} + e^{4x}$, $\forall x\in\Re$, $\forall\phi(x) \neq 0$, viniendo $\phi(x)$ dada por la ecuación integral: $\phi(x) = \lambda\cdot\int_0^1 x\cdot t\cdot\phi^2(t)\cdot dt$, con $\lambda = \log_{10} 100$.

(adaptado de Aimar *et alt*., 2012, p. 82).

Solución:

Procede, en primer lugar, resolver la condición de contorno dada en el enunciado del problema. Veamos que se trata de una ecuación integral no lineal de Hammerstein. Haciendo:

$$c = \int_0^1 t \cdot \phi^2(t) \cdot dt \ . \qquad (1)$$

Entonces resultará que: $\phi(x) = c \cdot \lambda \cdot x$. (2)

Substituyendo $\phi(x)$ por el segundo miembro de (2) en la relación (1), se tendrá:

$$c = \int_0^1 t \cdot \lambda^2 \cdot c^2 \cdot t^2 \cdot dt = \lambda^2 c^2 \cdot \int_0^1 t^3 \cdot dt = \lambda^2 c^2 \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\lambda^2 c^2}{4} .$$

La ecuación anterior tiene dos soluciones, a saber:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{4}{\lambda^2} .$$

Por lo tanto, la ecuación integral problema tiene también dos posibles soluciones para cualquier $\lambda \neq 0$, esto es: $\phi_1(x) = 0, \phi_2(x) = \frac{4}{\lambda} x$, que teniendo en cuenta la condición restrictiva para la función $\phi(x)$ exigida en el enunciado, con $\lambda = 2$, se tiene que: $\phi(x) = 2x$, es la función buscada. Con ello, la condición de contorno quedará establecida así:

$$u(x, 2x) = -e^{3x} + e^{4x}, \ \forall x \in \Re .$$

La comprobación del resultado obtenido de la ecuación integral puede llevarse a cabo sin más que substituir la solución hallada en dicha ecuación. En efecto, $\phi^2(t) = 4t^2$, con lo que:

$$\phi(x) = \lambda \cdot \int_0^1 x \cdot 4t^3 \cdot dt = 8x \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = 2x \text{ , c.s.q.d.}$$

Veamos que la ecuación diferencial parcial que nos ocupa es la misma que en los ejemplos precedentes, pero en este caso la condición lateral está dada sobre una característica, la recta $y = 2x$ definida por la ecuación integral anteriormente calculada. Recordamos que la solución general de la EDP es:

$$u(x,y) = -e^{x+y} + C(y - 2x) e^{\frac{4}{3}(x+y)} ,$$

e intentamos imponer la condición lateral: $u(x, 2x) = -e^{3x} + e^{4x}$, o sea:

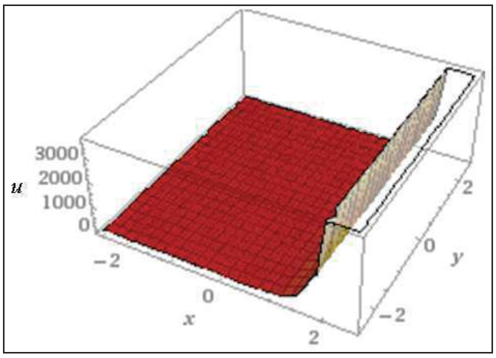
$$-e^{3x}+e^{4x}=u(x,2x)=-e^{x+2x}+C(2x-2x)e^{\frac{4}{3}(x+2x)}=-e^{3x}+C(0)e^{4x},$$

es decir, que: $C(0) = 1, \quad \forall x \in \Re$.

Aquí vemos que estamos pidiendo a la función C(r) que en r = 0 tome el valor 1. Esto sí es posible, por lo que el problema planteado tiene solución. Debe considerarse que existen infinitas funciones C(r) que valen 1 en r = 0. Por este motivo, este problema tiene también infinitas soluciones. He aquí algunos ejemplos de ellas:

C(r)	**u(x,y)**
$(r+1)^3$	$-e^{x+y}+(y-2x+1)^3 e^{\frac{4}{3}(x+y)}$
$\cos(r)$	$-e^{x+y}+\cos(y-2x)e^{\frac{4}{3}(x+y)}$
$e^{-\frac{4}{3}r}$	$-e^{x+y}+e^{-\frac{4}{3}(y-2x)}e^{\frac{4}{3}(x+y)}=-e^{x+y}+e^{4x}$
$\ln(e+r^4)$	$-e^{x+y}+\ln\left(e+(y-2x)^4\right)e^{\frac{4}{3}(x+y)}$

Adoptaremos como ejemplo, para una mayor simplicidad resolutoria, la tercera de las soluciones particulares expuestas en el cuadro precedente, con lo que: $u(x, y) = e^{4x} - e^{x+y}$, cuya representación gráfica, en el espacio afín tridimensional euclídeo, sería la siguiente:



Procederemos, ahora, al cálculo de las diferentes elasticidades solicitadas. Así: $\begin{cases} u'_x = 4 \cdot e^{4x} - e^{x+y} \\ u'_y = -e^{x+y} \end{cases}$

- Elasticidades parciales:

$$E_x = \frac{x}{u} \times u'_x = \frac{4x \cdot e^{4x} - x \cdot e^{x+y}}{e^{4x} - e^{x+y}}; \qquad E_y = \frac{y}{u} \times u'_y = \frac{-y \cdot e^{x+y}}{e^{4x} - e^{x+y}};$$

- Elasticidad total:

$$E_t = E_x + E_y = \frac{4x \cdot e^{4x} - e^{x+y}(x+y)}{e^{4x} - e^{x+y}}.$$

En el punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$, se tendrá, respectivamente:

$$E_x = \frac{4 \cdot e^4 - e^3}{e^4 - e^3} = 5'75 > 1; \quad E_y = -\frac{2 \cdot e^3}{e^4 - e^3} = -1'16 < -1;$$

y una elasticidad total de: $E_t = E_x + E_y = 5'75 - 1'16 = 4'59$.

Las elasticidades direccionadas, con respecto a ambos ejes coordenados, es decir, para 0º y 90º, en el punto dado $(x_0, y_0) = (1, 2)$, con u = 34'51, son:

$$\begin{cases} {}_xE_x u(x_0, y_0) = \dfrac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 5'75 \times \sqrt{5} = 12'86 \\ {}_yE_y u(x_0, y_0) = \dfrac{E_y}{y_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = -0'58 \times \sqrt{5} = -1'30 \end{cases}$$

Así pues, en todos los casos estudiados, se trata de una función relativamente elástica con respecto a sus variables explicativas.

Ejercicio 7

Hallar la elasticidad total de la función económica u(x,y,z,), en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (2, 7, 8)$, siendo:

$2u_x + 3u_y + 5u_z - u = \iiint_A x \cdot dx \cdot dy \cdot dz$, con $u(x, y, 0) = x^2 \cdot \sin y$, $\forall x \in \Re$, $\forall y \in \Re$, donde A es el dominio: $A = \{(x,y,z) / x^2 + y^2 \leq 1 , 0 \leq z \leq 1 - y\}$.

(adaptado de Aimar *et alt*., 2012, p. 97).

Solución:

En primer lugar, debe resolverse la integral múltiple del segundo miembro de la EDP planteada.

Para una mejor comprensión del problema, procede realizar la representación gráfica del dominio de integración A, que puede verse a continuación:

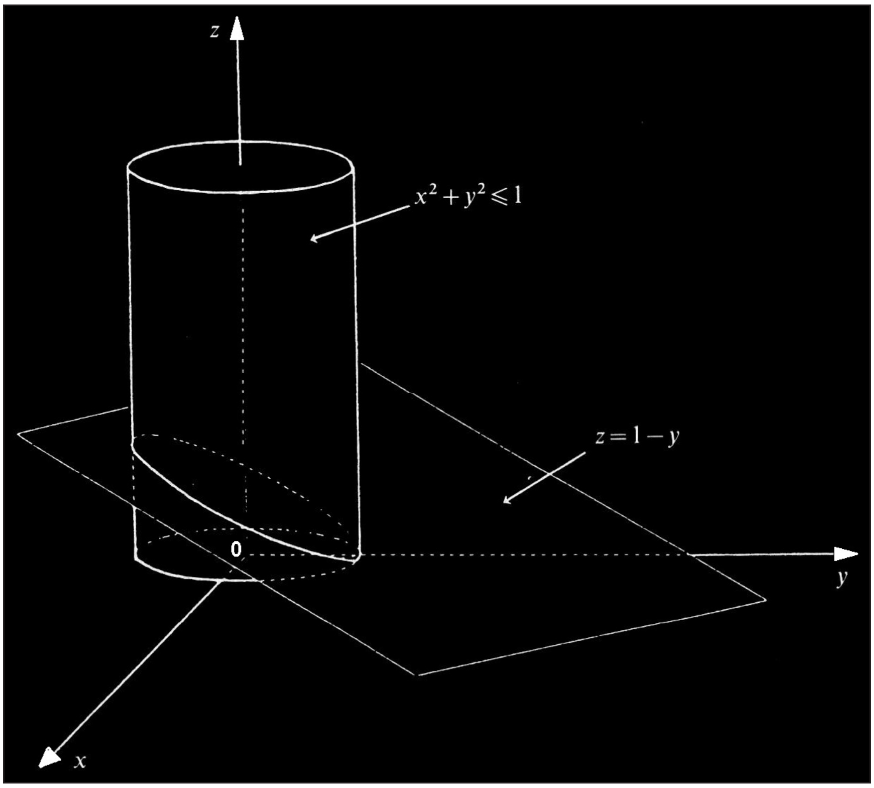


Fig. 1. Dominio de integración.

La proyección del cilindro en el plano z = 0 es el círculo de radio unidad y ecuación: $x^2 + y^2 \leq 1$. Tenemos el dominio A definido así, que es un cilindro truncado:

$$A = \{(x,y,z) / -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq z \leq 1-y\}$$, con lo que:

$$\iiint_A x \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^{1-y} x \cdot dz\right)dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x(1-y)dy\right]dx =$$

$$\int_{-1}^{1} 2x(\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2)dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right]_{-1}^{1} = 0,$$

con lo que la EDP planteada quedará configurada, en definitiva, así:

$$2u_x + 3u_y + 5u_z - u = 0\ .$$

Se trata, pues, de resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales que es una ecuación homogénea, lineal, de primer orden y coeficientes constantes. Las curvas características se encuentran resolviendo el sistema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{5}{2}.$$

Obtenemos: $y=\frac{3}{2}x+\alpha,\ z=\frac{5}{2}x+\beta$, siendo α y β constantes arbitrarias. Las características son, entonces, las líneas dadas por la intersección de dos planos de la forma 2y – 3x = constante y 2z – 5x = constante. Hacemos, entonces, el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases}\overline{x}=2y-3x\\ \overline{y}=2z-5x\\ \overline{z}=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-\overline{y}+2\overline{z}}{5}\\ y=\dfrac{5\overline{x}-3\overline{y}+6\overline{z}}{10}\\ z=\overline{z}\end{cases}$$

Identificando $u(x,y,z)=\overline{u}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, veamos qué EDP satisface $\overline{u}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$. Como consecuencia de la aplicación de la "regla de la cadena", se tendrá que:

$$\begin{cases}u_x=\overline{u}_{\overline{x}}\overline{x}_x+\overline{u}_{\overline{y}}\overline{y}_x+\overline{u}_{\overline{z}}\overline{z}_x\\ u_x=\overline{u}_{\overline{x}}(-3)+\overline{u}_{\overline{y}}(-5)+\overline{u}_{\overline{z}}0\\ 2u_x=-6\overline{u}_{\overline{x}}-10\overline{u}_{\overline{y}}\end{cases} \qquad \begin{cases}u_y=\overline{u}_{\overline{x}}\overline{x}_y+\overline{u}_{\overline{y}}\overline{y}_y+\overline{u}_{\overline{z}}\overline{z}_y\\ u_y=\overline{u}_{\overline{x}}2+\overline{u}_{\overline{y}}0+\overline{u}_{\overline{z}}0\\ 3u_y=6\overline{u}_{\overline{x}}\end{cases}$$

y también: $$\begin{cases}u_z=\overline{u}_{\overline{x}}\overline{x}_z+\overline{u}_{\overline{y}}\overline{y}_z+\overline{u}_{\overline{z}}\overline{z}_z\\ u_z=\overline{u}_{\overline{x}}0+\overline{u}_{\overline{y}}2+\overline{u}_{\overline{z}}1\\ 5u_z=10\overline{u}_{\overline{y}}+5\overline{u}_{\overline{z}}\end{cases}$$

Por lo tanto: $2u_x+3u_y+5u_z=5\overline{u}_{\overline{z}}$. Así, la ecuación diferencial problema se transforma en: $5\overline{u}_{\overline{z}}-\overline{u}=0$, que tiene como solución: $\overline{u}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=C(\overline{x},\overline{y})e^{\overline{z}/5}$.

Reemplazando $\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ por sus equivalentes en términos de *x*, *y*, *z* obtenemos la solución general:

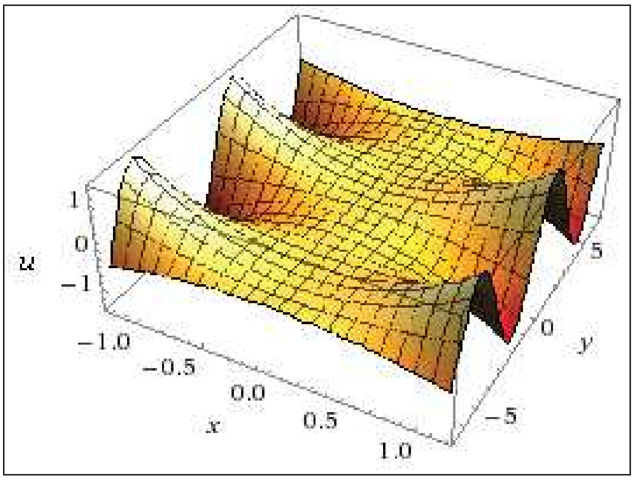
$$u(x, y, z) = C(2y - 3x, 2z - 5x)e^{z/5}.$$

La función de dos variables $C(\overline{x},\overline{y})$ se determina imponiendo una condición lateral sobre una superficie que debe cortar a cada recta característica, de manera transversal, una sola vez.

Ahora establecemos la condición de contorno dada por:

$$u(x, y, 0) = x^2\cdot\sin y,\quad \forall x\in\Re,\ \forall y\in\Re,$$

cuya representación gráfica en $\Re^3$ puede verse a continuación:



Ello implica que: C(2y - 3x, - 5x) = $x^2 \cdot \sin y$. Tomemos r = 2y – 3x , s = - 5x, entonces: $x = -\frac{s}{5}, y = \frac{1}{2}\left(r - \frac{3}{5}s\right)$, con lo que:

$$C(r,s) = \left(\frac{s}{5}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\left(r - \frac{3}{5}s\right)\right) = \left(\frac{s}{5}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{r}{2} - \frac{3}{10}s\right).$$

La solución deseada es, pues:

$$u(x,y,z) = \left(\frac{2z-5x}{5}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2y-3x}{2} - \frac{3}{10}(2z-5x)\right)e^{\frac{z}{5}} = \left(\frac{2}{5}z - x\right)^2 \cdot \sin\left(y - \frac{3}{5}z\right)e^{\frac{z}{5}},$$

cuya representación gráfica tiene lugar en el espacio afín 4-dimensional euclídeo.

Procederemos, ahora, al cálculo de las elasticidades solicitadas. Así, las derivadas parciales serán:

$$\begin{cases} u'_x = -\frac{4}{5}e^{z/5}\left(z - \frac{5}{2}x\right) \cdot \sin\left(y - \frac{3z}{5}\right) \\ u'_y = e^{z/5}\left(\frac{2z}{5} - x\right)^2 \cdot \cos\left(y - \frac{3z}{5}\right) \\ u'_z = \frac{e^{z/5}}{5}\left(\frac{2z}{5} - x\right)^2 \cdot \sin\left(y - \frac{3z}{5}\right) + \frac{4e^{z/5}}{5}\left(\frac{2z}{5} - x\right) \cdot \sin\left(y - \frac{3z}{5}\right) - \\ \qquad -\frac{3e^{z/5}}{5}\left(\frac{2z}{5} - x\right)^2 \cdot \cos\left(y - \frac{3z}{5}\right), \end{cases}$$

y las elasticidades parciales, referidas a cada una de las variables, serán:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{x}{u} \times u'_x = \dfrac{-\dfrac{4x}{5} e^{z/5}\left(z - \dfrac{5x}{2}\right) \cdot \sin\left(y - \dfrac{3z}{5}\right)}{e^{z/5}\left(\dfrac{2z}{5} - x\right)^2 \cdot \sin\left(y - \dfrac{3z}{5}\right)} = \dfrac{\dfrac{4x}{5}\left(\dfrac{5x}{2} - z\right)}{\left(\dfrac{2z}{5} - x\right)^2} = \dfrac{10x}{5x - 2z} \\ E_y = \dfrac{y}{u} \times u'_y = \dfrac{y \times e^{z/5}\left(\dfrac{2z}{5} - x\right)^2 \cdot \cos\left(y - \dfrac{3z}{5}\right)}{e^{z/5}\left(\dfrac{2z}{5} - x\right)^2 \cdot \sin\left(y - \dfrac{3z}{5}\right)} = y \cdot \cot g\left(y - \dfrac{3z}{5}\right) \\ E_z = \dfrac{z}{u} \times u'_z = \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{2z - 5x} - \dfrac{3}{5} \times \cot g\left(y - \dfrac{3z}{5}\right) \end{cases}$$

En el punto $(x_0, y_0, z_0) = (2, 7, 8)$ se tendrá un valor: u = 5'77, y además:

$$E_x = -3'33 < -1; \quad E_y = -5'10 < -1; \quad E_z = 1'30 > 1;$$

y una elasticidad total de:

$$E_t = E_x + E_y + E_z = -3'33 - 5'10 + 1'30 = -7'13.$$

Así pues, en todos los casos estudiados, se trata de funciones relativamente elásticas.

Ejercicio 8

Hallar las elasticidades direccionadas y total de la función económica u(x,t), en el punto $(x_0,t_0) = (2,0)$, siendo que conforma la EDP siguiente:

$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \cdot \partial t} = [z(x) + \cos\ 0] \cdot \cos t \cdot \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$, con las condiciones siguientes:

$$\begin{Bmatrix} u(x,0) = -x^2 \\ u(0,t) = t \end{Bmatrix}, \ \forall x \in \Re, \ \forall t \in \Re, \ \text{siendo } z(x) = h(x) + c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} \cdot z(y) \cdot dy.$$

Solución:

Se trata, en primer lugar, de resolver la ecuación integral inhomogénea y de 2ª especie siguiente:

$$z(x) = h(x) + c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} z(y) dy, \text{ con } \lambda = c.$$

Se tratará de obtener un núcleo resolvente con el núcleo separable[1]: $k(x,y)=e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}$. Identificamos: $f_1(x)=e^{-x^2}$ y a $g_1(y)=e^{-y^2}$. Luego el coeficiente, K_{11} de la matriz K es:

$K_{11}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2}\cdot dx=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}$, y así $K=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}$. Luego se deduce que:

$$M=1-c\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}=\frac{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2},$$

y entonces sucede que: $M^{-1}=\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}$, $\forall c\neq\sqrt{2/\pi}$, puesto que de lo contrario la expresión anterior sería infinita. Por lo tanto el núcleo resolvente de la ecuación planteada es:

$$R(x,y;c)=\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}.$$

Ahora bien, si h(x) = x entonces la solución para la ecuación planteada es, de acuerdo a la teoría (ver nuestra anterior monografía titulada: “Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes”), la siguiente:

$$z(x)=x+\int_{-\infty}^{+\infty}c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\cdot y\cdot dy=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\cdot y\cdot dy=$$

$$=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot\left(-\left[\frac{e^{-y^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty}\right)=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot[-\frac{1}{2}(e^{-\infty}-e^{-\infty})]=$$

$$=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot 0=x,$$

solución ésta que gráficamente viene dada por la recta bisectriz del primer cuadrante del círculo como se puede apreciar en la siguiente figura. Esto es:

---

[1] El núcleo separable *k(x,y)* es una función de dos variables conocida, llamada “núcleo de la ecuación integral” (“kernel”, de la raíz germánica Kern, núcleo, hueso), que se supone continua y, por tanto, acotada en el intervalo completo cerrado de integración [a,b], lo mismo de la variable *x* que de la variable *y*. De hecho, la ecuación de Volterra puede ser considerada como una ecuación de Freedholm en la que la función k(x,y) verifica la condición: “k(x,y) = 0, ∀y > x”. Sin embargo, conviene destacar las ecuaciones de tipo Volterra como una clase especial ya que ellas poseen una serie de propiedades que no tienen lugar para ecuaciones arbitrarias de tipo Freedholm.

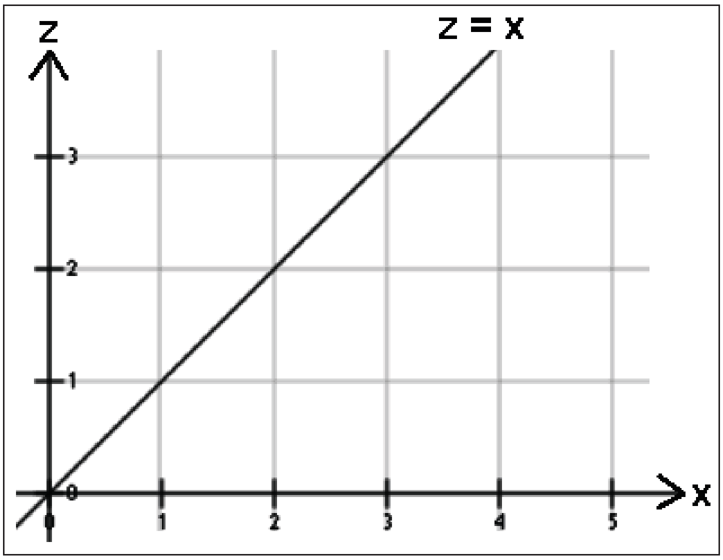


Fig. 2. Recta bisectriz.

Ello puede comprobarse substituyendo en la ecuación integral inicialmente dada, sin más que teniendo en cuenta que:

$$z(x) = x + c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\cdot y\cdot dy = x + c\left[-\frac{1}{2e^{x^2+y^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = x + c\cdot 0 = x \text{ , c.s.q.d.}$$

Ahora bien, ¿qué ocurre si $c = \sqrt{2/\pi}$? La primera respuesta, aunque pueda parecer obvia, es que M no posee inversa y por tanto el núcleo resolverte R(x, y; c) no existe. La segunda es que no podemos resolver la ecuación por el método de los núcleos separables, puesto que $K_{11} = 1$ y $z_1 = h_1 + K_{11}z_1 = 0 + z_1 = z_1$, no obteniendo resultado alguno. Esto no quiere decir, no obstante, que la ecuación planteada no tenga solución. En efecto, para resolver la ecuación en cuestión podemos operar del siguiente modo:

Derivando la ecuación integral inicial con respecto a *x*, y suponiendo que *h* es una función continua y derivable, se tiene que:

$$z'(x) = h'(x) - 2xce^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} z(y)\cdot dy = h'(x) - 2x(z(x) - h(x)) = h'(x) - x\cdot g(x),$$

habiendo definido: g(x) = z(x) – h(x), y obtenemos que:

g’(x) = z’(x) – h’(x) = -2x·g(x), que es una ecuación lineal de primer orden homogénea, con X = 2x y $X_1 = 0$ (ver cap. 2 de nuestra anterior monografía), cuya solución viene dada por:

$$g(x) = e^{\int_0^x -2tdt+k} = e^{-x^2+k} = A\cdot e^{-x^2}, \left(\text{con } A = e^k\right).$$

En cualquier caso, se trata de una sencilla EDO de variables separables, puesto que: $\frac{dg(x)}{g(x)} = -2x \cdot dx$, y mediante una cuadratura resulta que: $\int \frac{dg(x)}{g(x)} = -2\int x{\cdot}dx$; de donde se deduce que:

$$\ln g(x) = -x^2 + K \;\Rightarrow\; g(x) = e^{-x^2+K}\text{, c.s.q.d.}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación planteada en el enunciado del problema es: $z(x) = h(x) + A{\cdot}e^{-x^2}$.

Tal como sucedía en el caso anterior si h(x) = x, obtendremos la solución $z(x) = x + A{\cdot}e^{-x^2}$, que para A = 0 coincide con la solución anteriormente obtenida, lo que exigiría que k = -∞ y también resulta que g(x) = $e^{-\infty}$ = 0, con lo que: z(x) = h(x) = x, c.s.q.d.

Procede ahora resolver la integral definida que aparece en la EDP planteada. Se trata de una integral de 2ª especie y convergente, esto es:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x{\cdot}dx}{\sqrt{1-\sin x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{(\pi/2)-\varepsilon} \frac{\cos x{\cdot}dx}{\sqrt{1-\sin x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-2\sqrt{1-\sin x}\right]_0^{(\pi/2)-\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\sqrt{1-\sin(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}-1\right] = 2.$$

De este modo, la EDP del enunciado, con las mismas condiciones de contorno, de segundo orden e inhomogénea, adoptará definitivamente la configuración analítica siguiente:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x{\cdot}\partial t} = 2(x+1){\cdot}\cos t\,.$$

Para su resolución, por el método de las transformadas de Laplace, denotemos por L_1 a la transformada respecto de la primera variable y por L_2 a la transformada respecto de la segunda variable. Entonces, con respecto a la primera variable, se tiene que:

$$L_1\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x{\cdot}\partial t}\right](w,t) = L_1[2(x+1)\cos t] \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}\left(L_1\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](w,t)\right) = 2L_1[x+1](w,t){\cdot}\cos t \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(wL_1[u](w,t) - u(0,t)) = 2\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}\right)\cos t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(wL_1[u](w,t) - t) = 2\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}\right)\cos t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w\frac{\partial L_1[u](w,t)}{\partial t} - 1 = 2\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}\right)\cos t\ .$$

Transformando, ahora, con respecto a la segunda variable, obtendremos:

$$L_2\left[\frac{\partial L_1[u](w,t)}{\partial t}-1\right](w,s)=L_2\left[2\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}\right)\cos t\right](w,s)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow wL_2\left[\frac{\partial L_1[u](w,t)}{\partial t}\right](w,s)-L_2[1]=2\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}\right)L_2[\cos t](w,s)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(sL_2L_1[u](w,s)-L_1[u(w,0)])-\frac{1}{s}=2\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}\right)\frac{s}{1+s^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(sL_2L_1[u](w,s)+\frac{2}{w^3})-\frac{1}{s}=2\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}\right)\frac{s}{1+s^2}\,.$$

En consecuencia, resultará que:

$$L_2L_1[u](w,s)=\frac{2\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{w}\right)\frac{s}{1+s^2}+\frac{1}{s}}{sw}-\frac{2}{sw^3}=$$

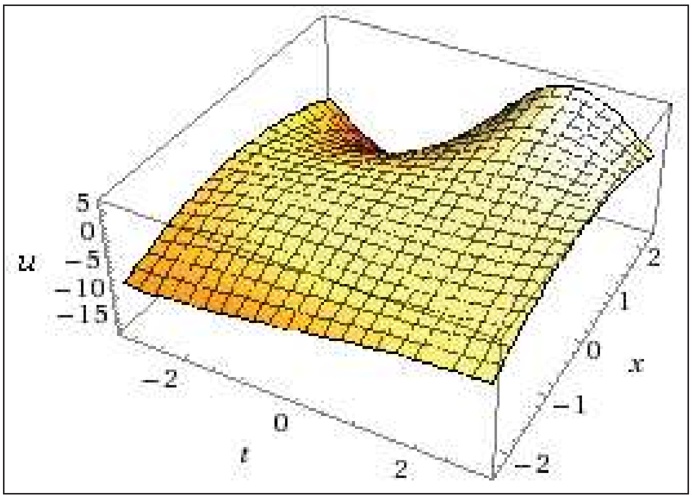
$$=\left(\frac{2}{w^3}+\frac{2}{w^2}\right)\frac{1}{1+s^2}+\frac{1}{ws^2}-\frac{2}{w^3s}\,,$$

obteniéndose, en definitiva: $L_1[u](w,t)=\left(\frac{2}{w^3}+\frac{2}{w^2}\right)\sin t+\frac{t}{w}-\frac{2}{w^3}$,

y la solución particular buscada es la función generatriz Laplace siguiente:

$$u(x,t) = (x^2 + 2x)\cdot\sin t + t - x^2,$$

cuya representación gráfica tridimensional puede verse a continuación:



Procederemos, ahora, al cálculo de las diferentes elasticidades solicitadas. Así:

$$\begin{cases} u'_x = 2[(x+1)\sin t - x] \\ u'_t = x(x+2)\cos t + 1 \end{cases}$$

- Elasticidades parciales:

$$E_x = \frac{x}{u} \times u'_x = \frac{2x[(x+1)\sin t - x]}{(x^2+2x)\sin t + t - x^2};\ E_t = \frac{t}{u} \times u'_t = \frac{tx(x+2)\cos t + t}{(x^2+2x)\sin t + t - x^2}.$$

En el punto: $(x_0, t_0) = (2, 0)$, se tendrán, respectivamente:

$$\begin{cases} E_x = 2 \text{ (función relativamente elástica)} \\ E_t = 0 \text{ (función perfectamente inelástica)} \end{cases}$$

y una elasticidad total de: $E_T = E_x + E_t = 2 + 0 = 2$.

Las elasticidades direccionadas con respecto a ambos ejes coordenados cartesianos rectangulares, es decir, para 0º y 90º, en el punto: $(x_0, t_0) = (2, 0)$, con $u = -4$, son las siguientes:

$$\begin{cases} {}_xE_xu(x_0, t_0) = \frac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + t_0^2} \\ {}_tE_tu(x_0, t_0) = \frac{E_t}{t_0} \times \sqrt{x_0^2 + t_0^2} \end{cases} \text{; en } (x_0, t_0) = (2, 0) \text{, se tendrá: } \begin{cases} {}_xE_xu(2, 0) = 2 \\ {}_tE_tu(2, 0) = 0 \end{cases}.$$

Ejercicio 9

Sean las funciones económicas z_1 y z_2 dadas, respectivamente, por las siguientes EDP:

$$\begin{cases} (4D_x^2 + D_y^2 - 8D_x)z_1 = 3e^{x+2y} \\ (D_x^2 - 2D_y)z_2 = e^{3x-y} \end{cases}$$

Se desea: a) hallar el valor de la función económica $z = z_1 + z_2$ cuando $x = 1$ e $y = I_1 - I_2$, con precisión hasta las cienmilésimas, siendo: $I_1 = \int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} dy{\cdot}dx$, $I_2 = \int_0^2\int_{2-y}^{6-2y}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} z{\cdot}dz{\cdot}dx{\cdot}dy$, b) ¿cuál de ambas ($z_1$ o z_2) posee mayor elasticidad total?

Solución:

a) En primer lugar, procede calcular el valor que toma *y* como diferencia de las dos integrales múltiples dadas, que calcularemos separadamente, así:

$$\begin{cases} I_1 = \int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} dy\cdot dx = \int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx = \frac{32}{3}. \\ I_2 = \int_0^2\int_{2-y}^{6-2y}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\cdot dz\cdot dx\cdot dy = \int_0^2\int_{2-y}^{6-2y}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dx\cdot dy = \frac{1}{2}\int_0^2\int_{2-y}^{6-2y}(4-y^2)dx\cdot dy = \frac{1}{2}\int_0^2\left[(4-y^2)x\right]_{2-y}^{6-2y}dy = \frac{26}{3}. \end{cases}$$

Consecuentemente, se tendrá que: y = $\frac{32}{3} - \frac{26}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

En segundo lugar, habrá que resolver ambas EDP. Por lo que se refiere a la primera de ellas, veamos que α = 1, β = 2, anulan la expresión: $\Phi(\alpha,\beta) = 4\alpha^2 + \beta^2 - 8\alpha$, así como: $\Phi'_\alpha = 8\alpha - 8$, pero no anulan $\Phi'_\beta = 2\beta$. Tendremos, pues, una solución particular de la forma: $C\cdot y\cdot e^{x+2y}$, en la que $C = 3/\Phi'_\beta$ = ¾. La comprobación de cómo efectivamente la solución: $z_1 = (3/4)\cdot y\cdot e^{x+2y}$ satisface la ecuación planteada se propone como ejercicio recapitulatorio a nuestros/as amables lectores/as. Por otra parte, la segunda ecuación puede transformarse en:

$$[(D_x - 3)^2 - 2(D_y - 1)]\cdot\lambda = 1 \text{ , o sea: } (D_x^2 - 6D_x - 2D_y + 11)\cdot\lambda = 1 \text{ ,}$$

que se satisface, evidentemente, para λ = 1/11, ofreciendo la solución particular: $z_2 = \lambda\cdot e^{3x-y} = (1/11)\cdot e^{3x-y}$. Pues bien, en el punto (x_0,y_0) = (1,2), se tiene que:

$$z = z_1 + z_2 = \frac{e^{x-y}(4e^{2x} + 33ye^{3y})}{44} = \frac{2e + 33e^5}{22} = 222'86686.$$

b) Procederemos, ahora, al cálculo de las diferentes elasticidades solicitadas de la función: $z_1 = (3/4)\cdot y\cdot e^{x+2y}$. Así:

$$\begin{cases} z'_x = (3/4)ye^{x+2y} \\ z'_y = (3/4)(2y+1)e^{x+2y} \end{cases}$$

- Elasticidades parciales:

$$E_x = \frac{x}{z}\times z'_x = \frac{(3x/4)ye^{x+2y}}{(3/4)ye^{x+2y}} = x \text{ ; } E_y = \frac{y}{z}\times z'_y = \frac{(3y/4)(2y+1)e^{x+2y}}{(3/4)ye^{x+2y}} = 2y+1.$$

En el punto: (x_0, y_0) = (1, 2), se tendrán, respectivamente:

$$\begin{cases} E_x = 1 \text{ (función de elasticidad unitaria)} \\ E_y = 5 \text{ (función relativamente elástica)} \end{cases}$$

y una elasticidad total de: $E_T = E_x + E_y = x + 2y + 1 = 1 + 4 + 1 = 6$.

Operando ahora correlativamente con la función: $z_2 = (1/11)\cdot e^{3x-y}$, se tiene que:

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{3e^{3x-y}}{11} \\ z'_y = -\dfrac{e^{3x-y}}{11} \end{cases}$$

- Elasticidades parciales:

$$E_x = \frac{x}{z} \times z'_x = \frac{(3xe^{3x-y})/11}{(1/11)e^{3x-y}} = 3x;\ E_y = \frac{y}{z} \times z'_y = -\frac{(ye^{3x-y})/11}{(1/11)e^{3x-y}} = y\,.$$

En el punto: $(x_0, y_0) = (1, 2)$, se tendrán, respectivamente:

$$\begin{cases} E_x = 3 \text{ (función relativamente elástica)} \\ E_y = 2 \text{ (función relativamente elástica)} \end{cases}$$

y una elasticidad total de: $E_T = E_x + E_y = 3x + y = 3 + 2 = 5 < 6$, luego la función z_1 posee una elasticidad total mayor que la z_2.

La determinación de las elasticidades direccionales de ambas funciones z_1 y z_2 las proponemos como ejercicio recapitulatorio a nuestros/as amables lectores/as.

Ejercicio 10

Sean las funciones económicas z_1 y z_2 dadas, respectivamente, por las siguientes EDP no homogéneas:

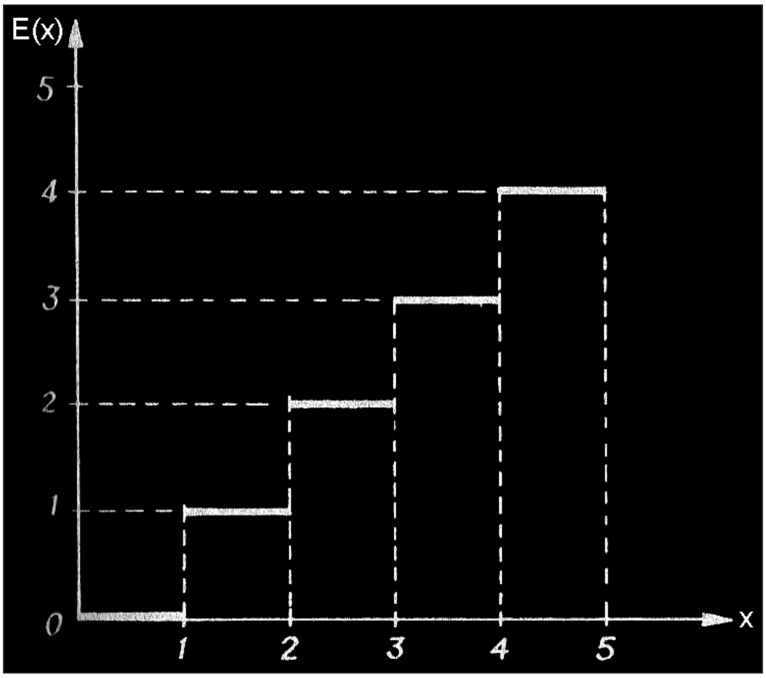
$$\begin{cases} (D_x^2 - 2D_y)z_1 = \sin(3x - y) \\ (D_x^2 + D_y^2 + 2)z_2 = \cos(x + y) \end{cases}$$

Se desea: a) hallar el valor de la función económica $z = z_1 - z_2$ cuando se tienen los valores $x = \dfrac{\int (x^2+1)\cdot d[E(x)]}{17}$, estando $f(x) = x^2 + 1$ acotada en el intervalo abierto]0,5[, e $y = 7\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)dy\cdot dx$, con precisión hasta las millonésimas, y representarla gráficamente, y b) hallar las diferentes elasticidades de la función z_1 en dicho punto.

Solución:

a) En primer lugar, procede despejar el valor de la x dado en el enunciado del problema mediante una integral de Riemann-Stieltjes[2], teniendo en cuenta que, por simple inspección:

$$\psi(x) \equiv \begin{Bmatrix} 0 \to 0 < x < 1 \\ 1 \to 1 \leq x < 2 \\ 2 \to 2 \leq x < 3 \\ 3 \to 3 \leq x < 4 \\ 4 \to 4 \leq x < 5 \end{Bmatrix} \equiv E(x)$$, con la siguiente representación gráfica:



Para obtener la función *salto* $\psi(x)$ se ha sumado en cada intervalo, al salto propio de ese intervalo, el valor de la función *salto* en el intervalo anterior, y esta función $\psi(x)$, en el intervalo abierto (0,5), es la función E(x). A partir de ella, se deduce una nueva función definida por:

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \psi(x) = E(x) - E(x) = 0,$$

que ya es continua, aunque su derivada puede no serlo.

[2] El concepto de integral definida de Riemann (1826-1866) puede considerarse, de hecho, como un caso particular de un proceso más general como es la integral de Stieltjes (1856-1894). La integral de Riemann-Stieltjes es una extensión del concepto de integral de Riemann que permite ampliar el potencial de esta herramienta. A diferencia de la integral de Riemann, que depende de una sola función llamada "integrando", la integral de Riemann-Stieltjes depende de dos funciones, el *integrando* f(x) y una función denominada *integrador* E(x), monótona y creciente en un intervalo. La conexión existente entre la integral de Riemann "estándar" y la integral de Riemann-Stieltjes se produce cuando la función integradora E(x) es la función identidad, es decir, cuando E(x) = x. De aquí se comprende su utilidad en situaciones donde se consideran distribuciones de masas, probabilidades, etc., en parte continuas y en parte discretas, lo que suele presentarse en la realidad de los problemas económicos.

Luego la integral del numerador I de la expresión de la *x* quedará establecida así:

$$I = \int (x^2+1)\cdot d[E(x)] = \int_0^5 (x^2+1)\cdot d[0] + \sum_0^5 (C_k^2+1)S_k \ .$$

Como el intervalo es abierto, la sumatoria sería: $\sum_{0^+}^{5^-}(C_k^2+1)S_k$, y C_k tomará los valores: $C_k \in \{1, 2, 3, 4\}$ y todos los saltos valen 1. Luego:

$$x = \frac{I}{17} = \frac{2+5+10+17}{17} = \frac{34}{17} = 2.$$

En segundo lugar, procede despejar el valor de la *y* dado en el enunciado mediante una integral doble, esto es:

$$y = 7\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+4y^2)\cdot dy\cdot dx = 7\int_0^1 \left[x^2y + \frac{4y^3}{3} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \cdot dx = 3.$$

En tercer lugar, habrá que resolver ambas EDP. Por lo que se refiere a la primera de ellas, veamos que ensayando en dicha ecuación soluciones particulares de la no homogénea que sean del tipo siguiente: $z_1 = k\cdot\sin(3x - y) + h\cdot\cos(3x - y)$, puesto que el segundo miembro de la ecuación es de tipo trigonométrico, se obtiene:

$$\Phi(D_x, D_y)\cdot z_1 = (-9k - 2h)\cdot\sin(3x - y) + (-9h + 2k)\cdot\cos(3x - y) \ .$$

Identificándolo a sin(3x – y), resultaría el siguiente sistema de ecuaciones lineales heterogéneo en *k* y *h*, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 9k+2h=-1 \\ -9h+2k=0 \end{cases} \text{, de donde: } k = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}} = -\frac{9}{85}; h = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{85} \ ,$$

y la solución particular buscada quedará establecida del siguiente modo:

$$z_1 = -\frac{9}{85}\sin(3x-y) - \frac{2}{85}\cos(3x-y) \ .$$

Se comprende que el método seguido para la resolución de esta EDP no es eficiente si: $\Phi(i\alpha, i\beta) = 0$, debiéndose acudir, en tal caso, a la búsqueda de soluciones en forma de producto de las anteriores por *x* o *y*, como sucede también, por cierto, si el segundo miembro es de tipo exponencial.

Por lo que se refiere a la segunda de las ecuaciones planteadas, cuyo segundo miembro es también de tipo trigonométrico, si ensayásemos directamente la solución particular de la no homogénea siguiente: $z_2 = k\cdot\cos(x + y) + h\cdot\sin(x + y)$ entonces llegaríamos al absurdo de que $0 = \cos(x + y)$ por ser el segundo miembro (al igual que $\sin(x + y)$) solución de la EDP homogénea: $(D_x^2 + D_y^2 + 2)z_2 = 0$. Ensayaremos, por tanto, una solución del tipo: $z_2 = kx\cdot\cos(x + y) + hx\cdot\sin(x + y)$, quedándonos, al cabo de operar adecuadamente, lo siguiente:

$2h\cdot\cos(x + y) - 2k\cdot\sin(x + y) = \cos(x + y)$, de donde: $h = ½$, $k = 0$,

y la solución particular buscada es, en definitiva, $z_2 = \frac{x}{2}\sin(x + y)$.

Pues bien, en el punto $(x_0,y_0) = (2,3)$, se tiene que:

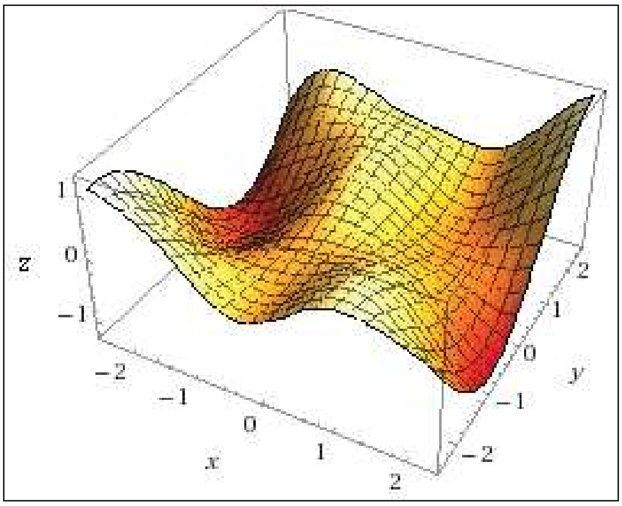
$$z = z_1 - z_2 = -\frac{9}{85}\sin(3x - y) - \frac{2}{85}\cos(3x - y) - \frac{x}{2}\sin(x + y) =$$

$$= \frac{-18\sin(3x - y) - 85x\sin(x + y) - 4\cos(3x - y)}{170} \rightarrow (2,3) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-9\sin 3 - 85\sin 5 - 2\cos 3}{85} = 0'967276$$, con los valores individualizados:

$$\begin{cases} z_1 = 0'008352 \\ z_2 = -0'958924 \end{cases}$$

La representación gráfica pedida de la función económica *z* viene dada por:



b) Procederemos, ahora, al cálculo de las diferentes elasticidades solicitadas de la función: $z_1 = -\frac{9}{85}\sin(3x-y) - \frac{2}{85}\cos(3x-y)$. Así:

$$\begin{cases} z'_x = (6/85)\sin(3x-y) - (27/85)\cos(3x-y) \\ z'_y = (9/85)\cos(3x-y) - (2/85)\sin(3x-y) \end{cases}$$

- Elasticidades parciales:

$$\begin{cases} E_x = \frac{x}{z}\times z'_x = \frac{(6x/85)\sin(3x-y) - (27x/85)\cos(3x-y)}{(-9/85)\sin(3x-y) - (2/85)\cos(3x-y)} = \frac{1}{3}\left(\frac{85}{9\mathrm{tg}(3x-y)+2} - 2\right) \\ \\ E_y = \frac{y}{z}\times z'_y = \frac{(9y/85)\cos(3x-y) - (2y/85)\sin(3x-y)}{(-9/85)\sin(3x-y) - (2/85)\cos(3x-y)} = \frac{6\sin 3 - 27\cos 3}{9\sin 3 + 2\cos 3}. \end{cases}$$

En el punto: $(x_0, y_0) = (2, 3)$, se tendrán, respectivamente:

$$\begin{cases} E_x = \frac{54\cos 3 - 12\sin 3}{9\sin 3 + 2\cos 3} = 77'70 \text{ (función relativamente elástica)} \\ \\ E_y = \frac{6\sin 3 - 27\cos 3}{9\sin 3 + 2\cos 3} = -\ 38'85 \text{ (función relativamente elástica)} \end{cases}$$

y una elasticidad total de: $E_T = E_x + E_y = 77'70 - 38'85 = 38'85$.

Por último, las elasticidades direccionadas (o direccionales) con respecto a ambos ejes coordenados cartesianos rectangulares, es decir, para 0º y 90º, en el punto: $(x_0, y_0) = (2, 3)$, con:

$$z_1 = -\frac{9}{85}\sin 3 - \frac{2}{85}\cos 3 = -0'0149421 + 0'0232939 = 0'0083518411,$$

son las siguientes: $\begin{cases} {}_xE_x z_1(x_0, y_0) = \frac{E_x}{x_0}\times\sqrt{x_0^2+y_0^2} = \frac{77'70}{2}\times\sqrt{13} = 140'08 \\ {}_yE_y z_1(x_0, y_0) = \frac{E_y}{y_0}\times\sqrt{x_0^2+y_0^2} = -\frac{38'85}{3}\times\sqrt{13} = -46'69 \end{cases}$

, siendo ambas funciones relativamente elásticas.

CAPÍTULO 3

FUNCIONES DE UTILIDAD

1. INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

El movimiento librecambista fue, en sus inicios, un movimiento de intelectuales. Se sitúa en uno de los puntos de convergencia de dos corrientes esencialmente diferentes: el *liberalismo económico*, cuyas implicaciones librecambistas fueron precisadas por David Ricardo[1] en el año 1815, y el *utilitarismo*, que aspiraba a orientar la gestión de los asuntos públicos hacia la búsqueda permanente del interés general o "bien común", por lo que sólo apoyaba medidas de inspiración liberal en la medida en que éstas pudieran procurar a la comunidad la mayor "utilidad" posible[2].

Si consideramos, ahora, que la "utilidad" de la comunidad es la suma de las "utilidades" individuales de sus miembros, sería conveniente realizar una pequeña acotación sobre la teoría de la conducta del consumidor, cuyo punto de partida acostumbrado es el postulado de la racionalidad. Se supone que el consumidor escoge entre todas las alternativas de consumo posibles, de manera que la satisfacción obtenida de los bienes o servicios elegidos (en el más amplio sentido) sea la mayor posible. Ello implica que se da cuenta de las alternativas que se le presentan y que es capaz de valorarlas. Toda la información relativa a la satisfacción que el consumidor obtiene de las diferentes cantidades de bienes y servicios por él consumidos, se halla contenida en su denominada "función de utilidad", que es objeto de estudio por parte de la teoría microeconómica como veremos en sucesivos ejemplos.

El concepto de utilidad y su maximización hállase vacío de todo significado sensorial. El aserto de que un consumidor experimente mayor satisfacción o utilidad de un automóvil que de un conjunto de vestidos, significa que si se le presentase la alternativa de recibir como regalo el automóvil o el vestuario escogería lo primero. Bienes que son necesarios

[1] **David Ricardo** (1772 -1823) fue un economista inglés de origen judío sefardí-portugués, miembro de la corriente de pensamiento clásico económico, y uno de los más influyentes junto a Adam Smith y Thomas Malthus. Continuó y profundizó el análisis del circuito de producción de la república, cuyo origen se remonta a F. Quesnay y al fisiocratismo. Es considerado uno de los pioneros de la macroeconomía moderna por su análisis de la relación existente entre beneficios y salarios, uno de los iniciadores del razonamiento que daría lugar a la ley de los rendimientos decrecientes y uno de los principales fundadores de la teoría cuantitativa del dinero. Es por ello que es invocado por familias de pensamiento económico muy diferentes, desde los neoclásicos a los marxistas ingleses.

[2] *Vide* P. LÉON, *Histoire économique et sociale du monde*, Armand Colin, 1978.

para sobrevivir, como una vacuna cuando se declara una gran epidemia, pueden resultar para el consumidor de máxima utilidad, aunque el acto de consumirlas no lleve necesariamente aneja ninguna sensación agradable, como por ejemplo un molesto pinchazo.

Los economistas del siglo XIX W. Stanley Jevons, Léon Walras y Alfred Marshall consideraban la utilidad medible, al igual que es medible el peso de los objetos[3]. Se presumía que el consumidor poseía una medida cardinal de la utilidad, v. gr., que era capaz de asignar a cada bien o combinación de ellos un número representando la cantidad de utilidad asociada con él. Los números que representaban cantidades de utilidad podían manipularse del mismo modo que los pesos de los objetos. Si suponemos que la utilidad de A es de 15 unidades y la de B de 45 unidades, el consumidor "preferiría" tres veces más B que A. Las diferencias existentes entre los índices de utilidad podrían compararse, pudiendo ello conducir a razonamientos curiosos como el siguiente: "A es preferible a B dos veces lo que C es preferible a D". Los economistas del siglo XIX también suponían que las adiciones a la utilidad total del consumidor, resultantes del consumo de nuevas unidades de un producto, disminuían cuanto más se consumiese del mismo (algo así como la "ley de los rendimientos decrecientes" en agricultura).

Las hipótesis sobre las que está construida la teoría cardinal de la utilidad son muy restrictivas. Se pueden deducir conclusiones equivalentes partiendo de hipótesis mucho más débiles. Así, si el consumidor obtiene mayor utilidad de una alternativa A que de una B, se dice que prefiere A a B[4]. El postulado de la racionalidad equivale a la formulación de las siguientes afirmaciones: 1º. En cada posible par de alternativas, A y B, el consumidor sabe si prefiere A a B, B a A, o está indeciso entre ellas. 2º. Sólo una de las tres posibilidades anteriores es verdadera para cada par. 3º. Si el consumidor prefiere A a B y B a C,

---

[3] En la década de los años 70 del siglo XIX, tres profesores por separado publican sus obras casi en simultáneo y sin conocerse, dando un viraje a la teoría del Valor, sosteniendo que el valor de los bienes surge de los precios que dependen de la utilidad marginal que el mismo proporciona al consumirse. Surge así la Escuela Neoclásica, donde forman parte de esta primera generación: W.S. Jevons con su obra *Teoría de la Economía Política* de 1871, Carl Menger con su libro *Principios de Economía* también de 1871 y Leon Walras con su trabajo titulado *Elementos de Economía Pura* de 1974. Posteriormente, algunos pensadores seguirán el marco de esta teoría e incluirán conceptos importantes, concluyendo en un instrumental acabado de la microeconomía. Forman parte de esta segunda generación: Alfred Marshall con sus *Principios de Economía Política* de 1890 y Vilfredo Pareto, que escribe su *Manual de Economía Política* en 1909. Tras un largo derrotero, la escuela logró imponer ideas que transitaban el pensamiento económico desde Aristóteles, con su "valor de uso", hasta el *utilitarismo* de Bentham, con su idea de maximizar placer, teniendo presente que, en cantidades crecientes del consumo de un bien, su utilidad decrece.

[4] Una cadena de definiciones debe detenerse alguna vez. La palabra o tiempo verbal "prefiere" (tercera persona del singular del presente de indicativo) se podría definir en el sentido de "gusta más que", pero entonces esta última expresión tendría que dejarse, a su vez, sin definir. El término "preferir" hállase huero de cualquier significado relacionado con un determinado placer sensorial.

también preferirá A a C. La última afirmación garantiza que las preferencias del consumidor son consistentes o cumplen la *propiedad transitiva*: si se prefiere un automóvil a un vestuario, y éste, a su vez, a un tazón de sopa, también se prefiere un automóvil a un tazón de sopa. Si se considera, por último que A es preferible a B y B es preferible a A y que, como consecuencia de ello, las preferencias del consumidor hacia A y B son las mismas, nos hallaremos en presencia de una "relación de orden estricto" desde el punto de vista de la Teoría de Conjuntos.

El postulado de la racionalidad, tal como acaba de establecerse, solamente requiere que el consumidor sea capaz de clasificar los bienes y servicios en orden de preferencia. El consumidor posee una medida de la utilidad ordinal, o sea, no necesita ser capaz de asignar números que representen (en unidades arbitrarias) el grado o cantidad de utilidad que obtiene de los artículos. Su clasificación de los mismos se expresa matemáticamente por la mencionada "función de utilidad", que no es única y se supone continua, así como su primera y segunda derivadas parciales. Ésta asocia ciertos números con diversas cantidades de productos consumidos, pero aquellos números suministran sólo una clasificación u orden de preferencia. Si la utilidad de la alternativa A es 15 y la de la B es 45 (esto es, si la función de utilidad asocia el número 15 con la alternativa o bien A y el número 45 con la alternativa B) sólo puede decirse que B es preferible a A, *pero es absurdo colegir que B es tres veces preferible a A.*

Esta nueva formulación de los postulados de la teoría del consumidor no se produjo hasta finales del siglo XIX. Es notable que la conducta del consumidor pueda explicarse tan correctamente en términos de una función de utilidad ordinal como en los de una cardinal. Intuitivamente, puede verse que las elecciones del consumidor están completamente determinadas si tiene una clasificación (y sólo una) de los productos, de acuerdo con sus preferencias. Uno puede imaginarse al consumidor poseyendo una cierta lista de productos en orden decreciente de deseabilidad; cuando percibe su renta disponible empieza comprando productos por el principio del listado y desciende tanto como le permite dicha renta[5]. Por lo tanto, no es necesario presumir que se posee una medida cardinal de la utilidad; es suficiente con sostener la hipótesis, mucho más débil, de que posee una clasificación consistente de preferencias[6] (Henderson y Quandt, 1962).

Toda la teoría de la elección del consumidor puede formularse en función de preferencias que se describen gráficamente mediante "curvas

---

[5] Resulta irrelevante cuánto se apetece un artículo concreto de la lista; siempre se escogerá antes el artículo que ocupe en ella un lugar más elevado.

[6] *Vide Microeconomic Theory (A mathematical approach)*. Hay traducción al castellano en Ed. Ariel. Barcelona, 1962. Citada en la bibliografía.

de indiferencia". Es posible trazar una curva de indiferencia partiendo de cualquier cesta de consumo que queramos y estará formada por todas las cestas ante las cuales el consumidor se muestra indiferente. Uno de los problemas que plantea la utilización de las curvas de indiferencia (sobre las cuales desarrollaremos algunos ejercicios seguidamente) para describir las preferencias estriba en que sólo nos muestran las cestas que el consumidor considera indiferentes, pero no cuáles son mejores y cuáles peores. Si no partimos de otros supuestos sobre las preferencias, las curvas de indiferencia pueden adoptar formas realmente peculiares, pero existe un principio fundamental: *las curvas de indiferencia, que representan diversos niveles de preferencias, no pueden cortarse* (Varian, 1998).

2. EJERCICIOS

Ejercicio 1

Se supone que la función de utilidad de un consumidor v(x,y) es la inversa de la función u(x,y), que viene dada por la EDP:

$$x(u^2 - y^2)u_x + y(x^2 - u^2)u_y = u(y^2 - x^2), \text{ con: } u(x,y) = \frac{1}{x^2}, \quad \forall x > 1,$$

tal que, en la condición de contorno, la variable *y* viene dada por la ecuación integral siguiente a resolver por el método de las aproximaciones sucesivas: $y(x) = \int_0^x \frac{1+y^2(t)}{1+t^2}dt$, tomando como aproximación nula, respectivamente, $y_0(x) = 2$ e $y_0(x) = x$.

Los precios de los bienes son, respectivamente, $p_1 = I$ y $p_2 = 3$ unidades monetarias, y la renta personal del consumidor, para el período considerado, es de 160 unidades monetarias, considerando un 25% de impuestos directos, y siendo:

$$I = 3\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^2 z\cdot\rho^2\cdot\sin\theta\cdot d\rho\cdot d\theta \text{. Se pide:}$$

1º.- Determinar la cantidad de bienes $q_1 = x$ y $q_2 = y$ que adquiriría el consumidor y que representan su óptimo.

2º.- Si el precio del bien q_2 asciende a $p_2 = 4$ unidades monetarias, se pide determinar la nueva situación de consumo óptimo del individuo, y compararla con la situación primera, no habiendo variado la renta del sujeto, en los casos siguientes, a) si la renta es cobrada en dinero corriente, b) si la renta es cobrada en especie, es decir, con 60 unidades del bien q_1, c) si la renta es cobrada en especie, con 40 unidades del bien q_2.

3º.- Determinar en cada caso, los efectos renta y sustitución, y representar gráficamente las diferentes posiciones de equilibrio.

Solución:

1º.- En primer lugar, procede llevar a cabo la resolución de la ecuación integral lineal homogénea de Volterra y de 2ª especie, que define la condición de contorno dada. Para ello, aplicando el método señalado de las aproximaciones sucesivas sucede que:

1) Sea $y_0(x) = 0$. Entonces se tendrá que:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg } x \,, \\[2ex] y_2(x) = \int_0^x \frac{1+\text{arctg}^2 t}{1+t^2} dt = \text{arctg } x + \frac{1}{3}\text{arctg}^3 x \,, \\[2ex] y_3(x) = \int_0^x \frac{1+\left(\text{arctgt} + \frac{1}{3}\text{arctg}^3 t\right)^2}{1+t^2} dt = \text{arctg } x + \frac{1}{3}\text{arctg}^3 x + \frac{2}{3\cdot 5}\text{arctg}^5 x + \frac{1}{7\cdot 9}\text{arctg}^7 x, \\[2ex] y_4(x) = \int_0^x \frac{1+y_3^2(t)}{1+t^2} dt = \text{arctg}\, x + \frac{1}{3}\text{artg}^3 x + \frac{2}{3\cdot 5}\text{arctg}^5 x + \frac{17}{5\cdot 7\cdot 9}\text{arctg}^7 x + \\ + \frac{38}{5\cdot 7\cdot 9^2}\text{arctg}^9 x + \frac{134}{9\cdot 11\cdot 21\cdot 25}\text{arctg}^{11} x + \frac{4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 13}\text{arctg}^{13} x + \frac{1}{7^2\cdot 9^2\cdot 15}\text{arctg}^{15} x, \ldots \end{array}\right.$$

y así sucesivamente.

Designando ahora arctg x = u y comparando las expresiones de $y_n(x)$ con el desarrollo:

$$\text{tg}\, u = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \frac{2^{2v}\left(2^{2v}-1\right)}{(2v)!} B_{2v} u^{2v-1} \,, \quad \text{siendo: } |u| < \frac{\pi}{2} \,,$$

donde B_v son los números de Bernouilli[7], y se advierte que:

---

[7] Los números de Bernouilli B_{2v+1} con índices impares son iguales a cero, a excepción de: $B_1 = -\frac{1}{2}$. El número $B_o = 1$; los números B_{2_v} se determinan por las fórmulas de recurrencia siguientes:

$$y_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x\,.$$

No es difícil comprobar, en fin, que la función y(x) = x es la solución de la ecuación integral dada. En definitiva, habrá que demostrar que se cumple que: $\int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\cdot dt = x$, lo que resulta inmediato, puesto que: $\int_0^x dt = [t]_0^x = x$, c. s. q. d.

2) Sea, en este caso, $y_0(x) = x$. Entonces sucede que:

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}dt = [t]_0^x = x\,.$$

De forma análoga se halla que: $y_n(x) = x$ ($\forall$ n = 2, 3, …).

De este modo, la sucesión $\{y_n(x)\}$ es la sucesión estacionaria $\{x\}$, cuyo límite es: y(x) = x. La solución de la ecuación integral dada se obtiene de inmediato y resulta coincidente con la recta bisectriz del primer cuadrante, a saber: y(x) = x. Con ello, la condición de contorno dada queda expresada así: $u(x,x) = \frac{1}{x^2}$, $\forall x > 1$.

En segundo lugar, hay que hallar el valor de p_1 dado por una integral triple expresada en coordenadas cilíndricas, o sea:

$$p_1 = I = 3\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^2 z\cdot\rho^2\cdot\sin\theta\cdot d\rho\cdot d\theta = 3\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 \cdot\rho^2\cdot\sin\theta\cdot d\rho\cdot d\theta = 6\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2\cdot\sin\theta\cdot d\rho\cdot d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\left[\rho^3\right]_0^1\cdot\sin\theta\cdot d\theta = -2[\cos\theta]_0^{\pi/2} = 2\,\text{u.m.}$$

Por otra parte, la solución de esta EDP puede verse en otro ejercicio de este mismo libro, que ofrece: $u(x,y) = \frac{1}{x\cdot y}$, con lo que la función de utilidad, será:

$$v(x,y) = \frac{1}{u(x,y)} = x\cdot y = q_1\cdot q_2\,.$$

El punto de equilibrio debe cumplir la igualdad de las utilidades marginales ponderadas, y debe situarse también sobre la ecuación de

---

$$B_{2_\nu} = -\frac{1}{2\nu+1} + \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{2\nu-2}\frac{2\nu(2\nu-1)\ldots(2\nu-2k+2)}{k!}B_k\,.$$

balance. Ello es así porque para maximizar la función de utilidad condicionada a la ecuación de balance, la razón de las utilidades marginales debe igualarse a la de los precios. La utilidad marginal dividida por el precio debe ser la misma para todos los productos, y nos ofrece la relación en que aumentaría la satisfacción del consumidor si se gastase un euro adicional en un producto concreto. Esto es:

$$\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{2}{3} \; ; \qquad \text{Resolviendo:}$$

$$p_1q_1 + p_2q_2 = y^0 \; ; \; 2q_1 + 3q_2 = y^0 = 160 \times 0'75 = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = 30 \\ q_2 = 20 \end{cases} ; \; U_2 = 30 \times 20 = 600.$$

2º.- Supuesto a)

$$\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{2}{4} \; ; \qquad \text{Resolviendo:}$$

$$120 = 2q_1 + 4q_2 \;\; (60 = q_1 + 2q_2) \;\Rightarrow \begin{cases} q_1 = 30 \\ q_2 = 15 \end{cases} ; \; U_1 = 30 \times 15 = 450.$$

Supuesto b)

$$\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{2}{4} \; ; \qquad \text{igual que antes, o sea:}$$

$$120 = 2q_1 + 4q_2 \;\; (60 = q_1 + 2q_2) \;\Rightarrow \begin{cases} q_1 = 30 \\ q_2 = 15 \end{cases} ; \; U_1 = 30 \times 15 = 450.$$

Supuesto c)

$$\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{2}{4} \; ; \text{ y entonces:}$$

$$160 = 2q_1 + 4q_2 \;\; (80 = q_1 + 2q_2) \;\Rightarrow \begin{cases} q_1 = 40 \\ q_2 = 20 \end{cases} ; \; U_3 = 40 \times 20 = 800.$$

3º.- Supuestos a) y b)

El punto intermedio está situado en la curva de indiferencia $U_2 = q_1 \cdot q_2 = 600$, y debe cumplir que la relación de sustitución es igual a ½.

Recordemos que el efecto *sustitución* (ES) de la variación del precio es el ajuste de la cantidad demandada en respuesta, únicamente, a la variación del precio relativo. Para determinar este efecto debemos analizar cuál es la combinación elegida como consecuencia de un cambio en los precios relativos, pero permaneciendo la renta real inalterada.

El efecto *renta* (ER) de la variación del precio es la posición del ajuste de la cantidad demandada derivada de la variación de la renta real del consumidor. En la medida que al reducirse el precio el aumento de la renta "real" (en el sentido de un mayor poder adquisitivo) redunde en un incremento del consumo, se habla de un "efecto renta" de signo normal, es decir, que una disminución del precio conduce a un incremento en la cantidad demandada del bien. En el caso contrario, esto es, cuando se trate de un bien inferior, el "efecto renta" actuará en el sentido de asociar reducciones en el precio con disminuciones en la cantidad demandada.

Por último, el efecto *total* (ET) de un cambio de precios es el cambio total en la cantidad demandada al pasar el consumidor de un equilibrio a otro, y se descompone en los dos efectos ya citados, ES y ER.

En el caso que nos ocupa, tendremos que:

- Los efectos de sustitución son: $\begin{cases} \Delta q_1 = 20\sqrt{3} - 30 \\ \Delta q_2 = 10\sqrt{3} - 20 \end{cases}$

- Los efectos de renta son: $\begin{cases} \Delta q_1 = 30 - 20\sqrt{3} \\ \Delta q_2 = 15 - 10\sqrt{3} \end{cases}$

Supuesto c)

Ahora, la renta del individuo ha aumentado. En su consecuencia, a los efectos anteriores totales, es decir: $\Delta q_1 = 0$; $\Delta q_2 = 5$, hay que sumar necesariamente los incrementos de consumo en los bienes q_1 y q_2, correspondientes a un aumento de renta de 40 unidades monetarias, es decir: $\Delta q_1 = 10$; $\Delta q_2 = 5$.

Puesto que:

$$\Delta y = 2 \cdot \Delta q_1 + 4 \cdot \Delta q_2 = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 5 = 40.$$

La representación gráfica correspondiente del presente problema es la siguiente:

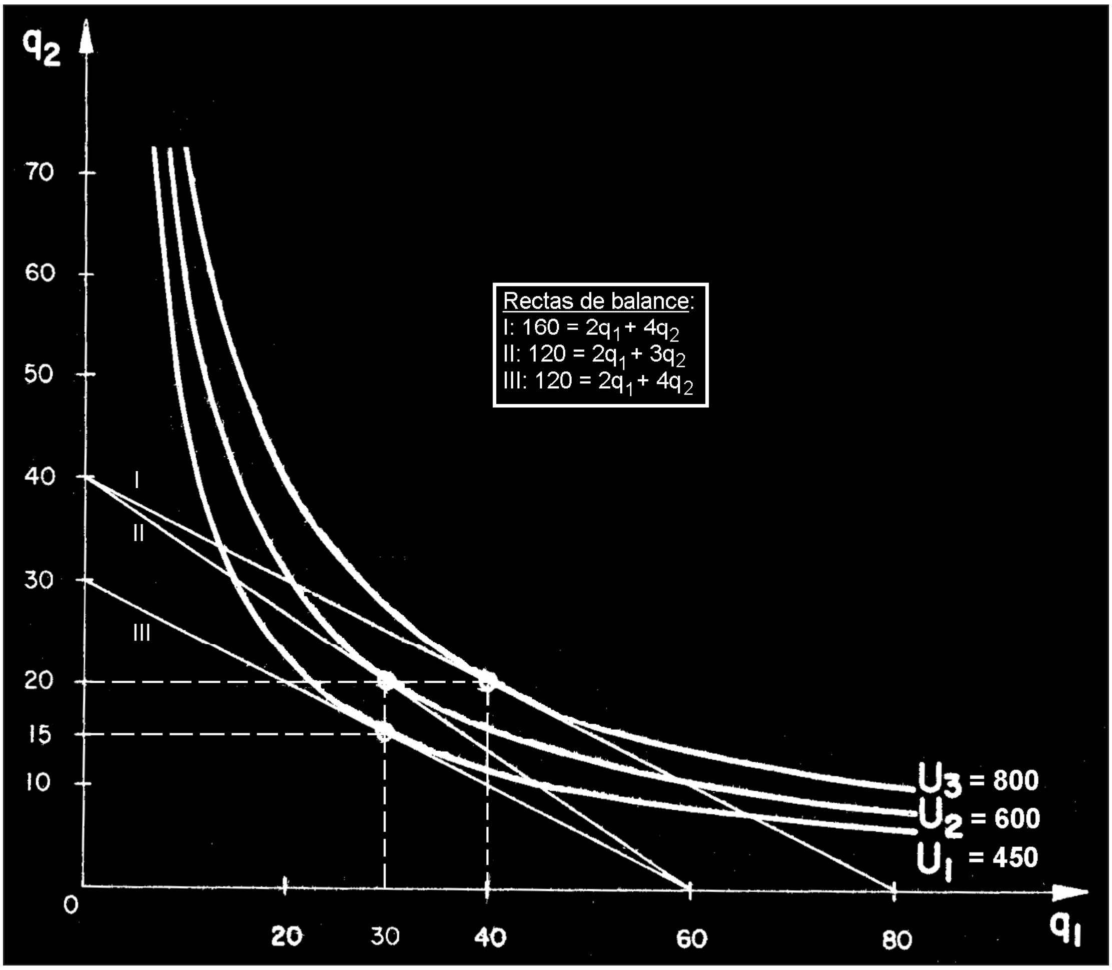


Fig. 1. Curvas de utilidad y rectas de balance.

NOTA : Un enunciado alternativo de este mismo problema podría ser el siguiente: "Se supone que la función de utilidad de un consumidor viene dada por la siguiente ecuación: $u = u'_{q_1} \times u'_{q_2}$, que pasa por la recta de ecuación: $q_1 = 1$; $u = q_2$. Los precios de los bienes…(ídem anterior)".

En este caso, habría que resolver la EDP ahora planteada con su nueva condición de contorno. Para ello, escribamos la ecuación de la recta $\begin{cases} q_1 = 1 \\ u = q_2 \end{cases}$ en forma paramétrica. Para simplificar la operatoria subsiguiente, hagamos los cambios:

$$u = z \; ; \; q_1 = x \; ; \; q_2 = y \; ; \; p = u'_{q_1} \; ; \; q = u'_{q_2} .$$

Entonces, la recta en forma paramétrica será:

$x_0 = 1$; $y_0 = s$; $z_0 = s$. Determinemos $p_0(s)$ y $q_0(s)$, así:

$s = p_0 \cdot q_0$; $1 - q_0 = 0 \Rightarrow p_0 = s$, $q_0 = 1$. Y entonces:

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = dt\ .$$

$p = c_1 \cdot e^t$; $q = c_2 \cdot e^t$; $x = c_2 \cdot e^t + c_3$; $y = c_1 e^t + c_4$; por último:

$dz = 2p \cdot q \cdot dt = 2c_1 \cdot e^t \cdot c_2 \cdot e^t \cdot dt = 2c_1 c_2 \cdot e^{2t} \cdot dt$, e integrando, resulta:

$z = 2c_1 c_2 \int e^{2t} \cdot dt = c_1 c_2 \cdot e^{2t} + c_5$, y teniendo en cuenta que para t = 0 es:

$x = 1$; $y = s$; $z = s$; $p = s$; $q = 1$; se obtiene que:

$p = s \cdot e^t$; $q = e^t$; $x = e^t$; $y = s \cdot e^t$; $z = s \cdot e^{2t}$. Por lo tanto, la superficie integral buscada es: $z = s \cdot e^{2t} = x \cdot y$, o lo que es lo mismo: $u = q_1 \cdot q_2$, obteniéndose la misma función de utilidad que la considerada en el enunciado del ejercicio aquí desarrollado.

Ejercicio 2

La función de utilidad de un consumidor, que dispone para gastos durante un periodo determinado, de una renta personal de 520 u.m. afecta a unos impuestos directos del 25%, viene dada por la ecuación: $q_1 \frac{\partial u}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial u}{\partial q_2} = \frac{u}{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos q_1 \cdot dq_1}{\sqrt[3]{\sin q_1}}}$, que contiene a la curva intersección de la superficie $q_2 = z^3, q_2 > 0$ y el plano $q_1 = 1$. Se pide:

1) Dibujar las curvas de indiferencia correspondiente a los niveles de utilidad: $U_1 = 20$ y $U_2 = 30$.

2) Obtener la relación marginal de sustitución entre los artículos q_1 y q_2.

3) Calcular el nivel de consumo óptimo, cuando los precios de los bienes son, respectivamente: $p_1 = 6$ € ; $p_2 = 4$ € .

4) Determinar, en el punto de equilibrio obtenido, el valor de la relación marginal de sustitución.

(adaptado de Moreno, C., UNED, 1999, p. 67).

Solución:

1) En primer lugar, habrá que resolver la EDP planteada. Para ello, habrá que comenzar resolviendo la integral definida del denominador del segundo miembro de la misma, que resulta ser convergente, puesto que:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos q_1 \cdot dq_1}{\sqrt[3]{\sin q_1}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\cos q_1 \cdot dq_1}{\sqrt[3]{\sin q_1}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{3}{2} \sin^{2/3} q_1 \right]_\varepsilon^{\pi/2} = 3/2 .$$

De este modo, la EDP planteada queda configurada así:

$$q_1 \frac{\partial u}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial u}{\partial q_2} = \frac{2u}{3} ,$$

Tratándose, pues, de una ecuación lineal, homogénea, de primer orden y coeficientes variables. Una parametrización de la curva a la que se refiere el enunciado del ejercicio es la siguiente:

$$q_1 = 1, \qquad q_2 = s^3, \qquad z = s ,$$

para $0 < s < \infty$. El vector tangente a la curva: $\vec{a}_s = 3s^2 \vec{j} + \vec{k}$, no es paralelo al campo vectorial asociado a la ecuación:

$$\vec{a}_t = q_1 \vec{i} + q_2 \vec{j} + \frac{2}{3} z\vec{k} = \vec{i} + s^3 \vec{j} + \frac{2}{3} s\vec{k} ,$$

en los puntos de la curva, ya que el producto vectorial de ambos vectores viene dado por el conocido determinante simbólico de tercer orden:

$$\vec{a}_t \times \vec{a}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & s^3 & \frac{2}{3}s \\ 0 & 3s^2 & 1 \end{vmatrix} = -s^3 \vec{i} - \vec{j} + 3s^2 \vec{k} \neq \vec{0} \text{, para todo valor de s.}$$

Por esta razón, la curva considerada no es una línea de campo y es posible construir una superficie integral con las líneas de campo que parten de ella. Además, la componente de este producto vectorial en la dirección de $\vec{k}$ es distinta de 0 para todo $s > 0$ y, en consecuencia, la superficie es la gráfica de una solución de la ecuación en derivadas parciales.

Por otra parte, las líneas de campo son las gráficas de las soluciones de las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = q_1, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = q_2, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2}{3} z. \end{cases}$$

Si se integra este sistema de ecuaciones diferenciales se obtiene como solución general:

$$\begin{cases} q_1(t,s) = c_1(s)e^{t}, \\ q_2(t,s) = c_2(s)e^{t}, \\ z(t,s) = c_3(s)e^{\frac{2t}{3}}. \end{cases}$$

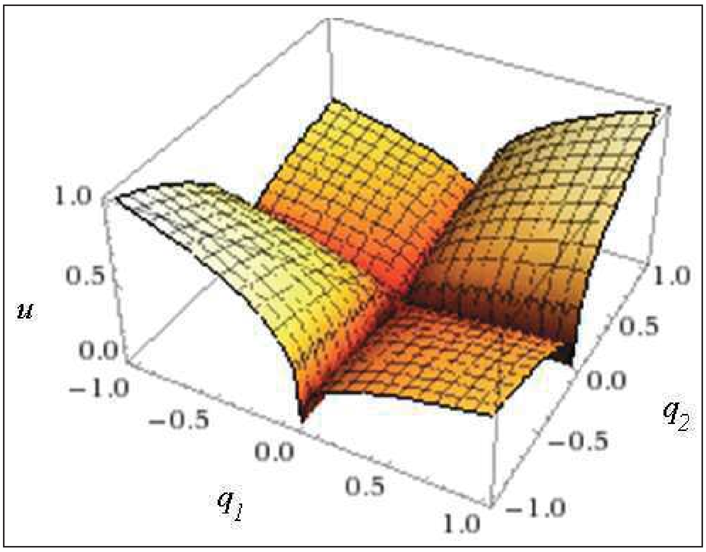
Si se impone la condición inicial se obtiene que:

$$\begin{cases} q_1(0,s) = c_1(s) = 1, \\ q_2(0,s) = c_2(s) = s^3, \\ z(0,s) = c_3(s) = s, \end{cases} \text{ de donde se deduce que: } \begin{cases} q_1(t,s) = e^{t}, \\ q_2(t,s) = s^3 e^{t}, \\ z(t,s) = se^{\frac{2t}{3}}, \end{cases}$$

y es una parametrización de la superficie integral que contiene a la curva.

Si se eliminan los parámetros *t* y *s* se obtiene que la solución particular de la ecuación en derivadas parciales dada, que satisface la condición inicial, es:

$u = (q_1 \cdot q_2)^{\frac{1}{3}}$, con la siguiente representación gráfica:



De este modo: $\begin{cases} \text{Nivel de utilidad } U_1 \rightarrow 20 = q_1^{\frac{1}{3}} \times q_2^{\frac{1}{3}} \\ \text{Nivel de utilidad } U_2 \rightarrow 30 = q_1^{\frac{1}{3}} \times q_2^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

Las representaciones gráficas respectivas de ambas curvas isocuantas son las siguientes:

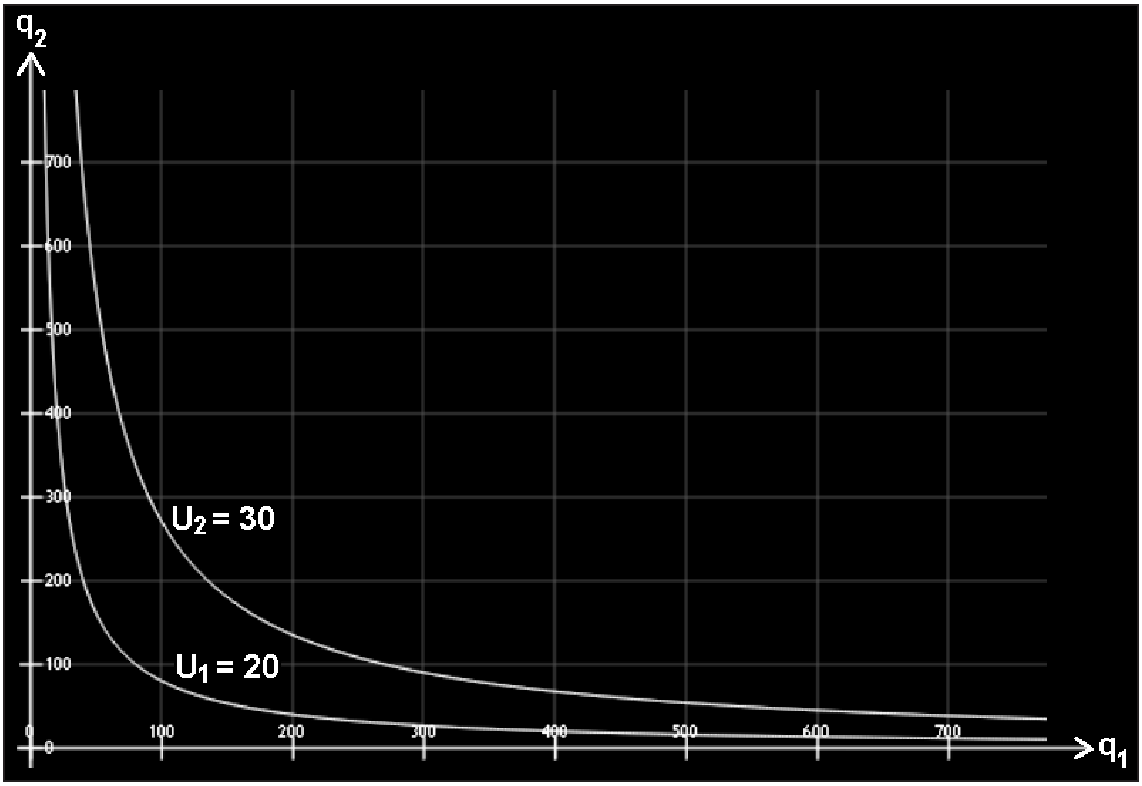


Fig. 2. Curvas de utilidad (I).

La función de utilidad obtenida es tal que: $u(q_1, q_2) = \sqrt[3]{q_1 \cdot q_2}$, con lo que:

$$u(tq_1, tq_2) = \sqrt[3]{tq_1 \cdot tq_2} = \sqrt[3]{t^2 \cdot q_1 \cdot q_2} = t^{2/3} \times \sqrt[3]{q_1 \cdot q_2} = t^{2/3} \times u(q_1, q_2),$$

luego es una función homogénea (y, por tanto, también homotética) de grado m = 2/3, que cumple el teorema de Euler, puesto que: $q_1 \times f'_1 + q_2 \cdot f'_2 = m \times u(q_1, q_2)$. En efecto, substituyendo:

$$q_1 \times \frac{1}{3} \times q_2^{1/3} \times q_1^{-2/3} + q_2 \times \frac{1}{3} \times q_1^{1/3} \times q_2^{-2/3} = \frac{2}{3} \times q_1^{1/3} \times q_2^{1/3}\text{, o también:}$$

$$q_1^{1/3} \times \frac{q_2^{1/3}}{3} + q_2^{1/3} \times \frac{q_1^{1/3}}{3} = q_1^{1/3}\left(\frac{q_2^{1/3}}{3} + \frac{q_2^{1/3}}{3}\right) = \frac{2q_1^{1/3} \times q_2^{1/3}}{3}\text{, c.s.q.d.}$$

$$2)\ (RSB)_2^1 = \frac{f'_1}{f'_2} = \frac{\frac{1}{3} \times q_2^{\frac{1}{3}} \times q_1^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3} \times q_1^{\frac{1}{3}} \times q_2^{-\frac{2}{3}}} = \frac{q_2}{q_1}.$$

3) La ecuación de balance será: $y^0 = 520 \times 0'75 = 390 = 6q_1 + 4q_2$. Además, la elección óptima de las cantidades consumidas se caracteriza por la igualación entre la relación marginal de sustitución de bienes y la

relación de sus precios. Así pues, con la sola introducción de concepto de RSB quedan definidas las características de la elección óptima del consumidor.

$$\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{p_1}{p_2}\text{; o sea: } \frac{q_2}{q_1} = \frac{3}{2}\text{; } 3q_1 = 2q_2\text{; } 390 = 4q_2 + 4q_2 = 8q_2 \quad \Rightarrow$$

$$q_2 = \frac{390}{8} = 48'75 \ ; \ \ q_1 = \frac{2}{3} \times q_2 = \frac{97'50}{3} = 32'50 \text{ ; y el nivel de utilidad será:}$$

$$U = \sqrt[3]{q_1 \cdot q_2} = \sqrt[3]{32'50 \times 48'75} \cong 11'66 .$$

Un procedimiento más intuitivo para determinar el equilibrio del consumidor consiste en el análisis conjunto de la recta de balance (restricción presupuestaria) y la curva de indiferencia (representativa de las preferencias o gustos del consumidor), que también adjuntamos gráficamente. El individuo estará interesado en consumir toda su renta, por lo que buscará una combinación de q_1 y q_2 que se halle situada sobre la recta de balance y que, a su vez, le facilite la máxima satisfacción. Esto se conseguirá cuando ese punto corresponda a la curva de indiferencia que esté más arriba y a la derecha de todas las que se pueden alcanzar. El consumidor se mueve a lo largo de su recta de balance hasta alcanzar el punto de tangencia con la curva de indiferencia. El equilibrio se alcanza cuando la RSB = RMS del consumidor (la pendiente o coeficiente angular de la tangente en un punto de la curva de indiferencia) es igual a la pendiente de la recta de balance, esto es, a la relación entre el precio de ambos bienes. Así:

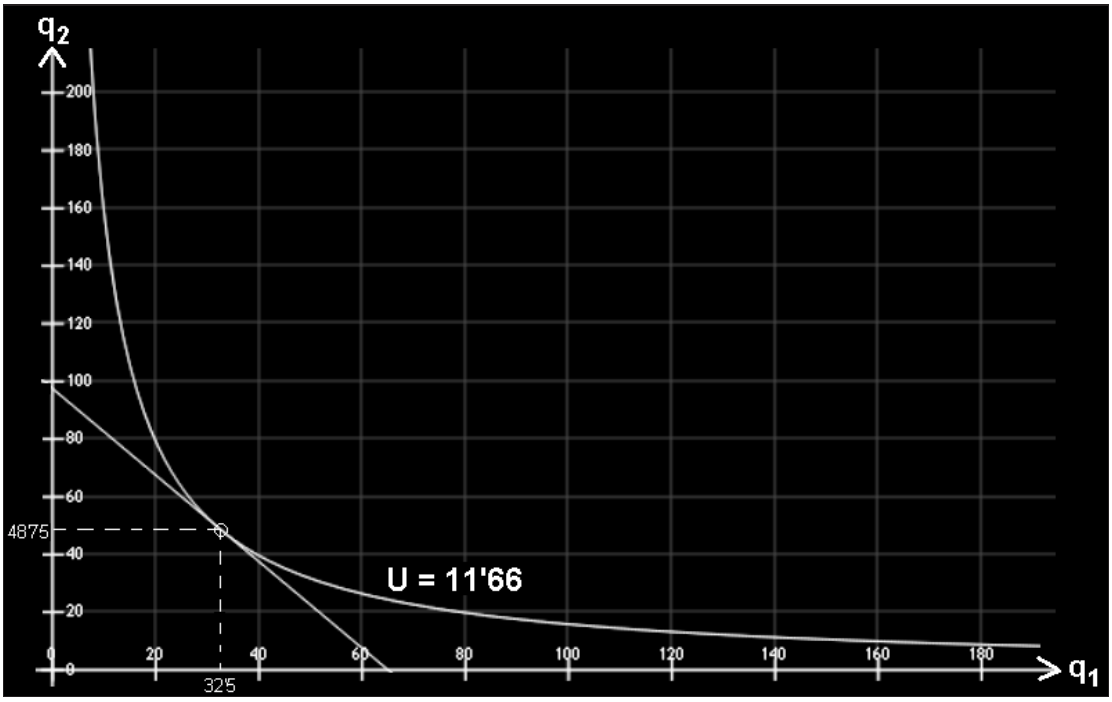


Fig. 3. Curva de utilidad y recta de balance (I).

4) El valor pedido, en el punto de equilibrio obtenido (situación óptima), es: $(\mathrm{RSB})_2^1 = \dfrac{48'75}{32'50} = 1'50$.

Ejercicio 3

1.- La función de utilidad de un consumidor, que dispone para gastos durante un periodo determinado, de una renta personal de 520 u.m. sujeta a una carga fiscal directa del 25%, es la siguiente solución particular de una EDP tridimensional, una vez realizado el pertinente análisis econométrico: $U = 60 \cdot q_1^{\frac{1}{2}} \cdot q_2^{\frac{1}{3}} \cdot q_3^{\frac{1}{4}}$. Se pide:

1º.- Dibujar las curvas de indiferencia correspondientes a los niveles de utilidad $U_1 = 600$ y $U_2 = 360$, y a una cantidad de bien q_3 disponible igual a 16 unidades.

2º.- Obtener las relaciones de sustitución entre los artículos, q_1, q_2 y q_3.

3º.- Calcular el nivel de consumo óptimo, cuando los precios de los bienes son respectivamente: $p_1 = 6$; $p_2 = 4$; $p_3 = 5$.

4º.- Determinar, en el punto de equilibrio obtenido, el valor de las relaciones marginales de sustitución de los tres bienes.

Solución:

1º.- La representación gráfica pedida es la siguiente:

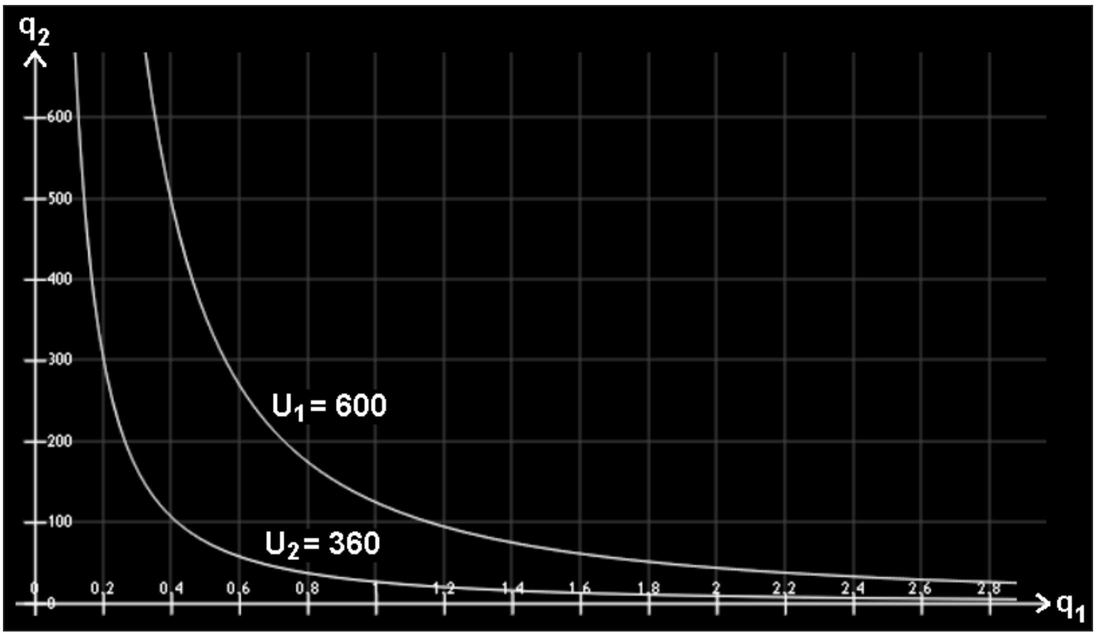


Fig. 4. Curvas de utilidad (II).

La función de utilidad dada es tal que: $u(q_1, q_2, q_3) = 60 \cdot q_1^{1/2} \cdot q_2^{1/3} \cdot q_3^{1/4}$, con lo que:

$$u(tq_1, tq_2, tq_3) = 60 \cdot t^{1/2} \cdot q_1^{1/2} \cdot t^{1/3} \cdot q_2^{1/3} \cdot t^{1/4} \cdot q_3^{1/4} = t^{13/12} \times u(q_1, q_2, q_3),$$

luego es una función homogénea de grado m = 13/12, que cumple el teorema de Euler, como puede comprobarse.

2º.- $(RBS)_2^1 = \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{30 \times q_2^{\frac{1}{3}} \times q_3^{\frac{1}{4}} \times q_1^{-\frac{1}{2}}}{20 \times q_1^{\frac{1}{2}} x q_3^{\frac{1}{4}} \times q_2^{-\frac{2}{3}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{q_2}{q_1}$. Del mismo modo, resultará:

$$(RSB)_3^1 = \frac{f_1'}{f_3'} = \frac{2q_3}{q_1} \text{ y también: } (RSB)_3^2 = \frac{f_2'}{f_3'} = \frac{4q_3}{3q_2} .$$

3º.- La ecuación de balance que, en este caso, no es una recta sino un plano, es: $y^0 = 520 \times 0'75 = 390 = 6q_1 + 4q_2 + 5q_3$. Resolviendo, se obtiene el punto de equilibrio del consumidor, a saber:

$$\frac{5}{q_1} = \frac{5}{q_2} = \frac{3}{q_3}; \qquad q_1 = 30; \quad q_2 = 30; \quad q_3 = 18.$$

Entonces, el nivel de utilidad será:

$$U = 60 \cdot q_1^{\frac{1}{2}} \cdot q_2^{\frac{1}{3}} \cdot q_3^{\frac{1}{4}} = 60 \times \sqrt{30} \times \sqrt[3]{30} \times \sqrt[4]{18} \cong 2103.$$

Aquí, pues, la correspondiente representación gráfica debe realizarse en el espacio afín tridimensional euclídeo $\Re^3$.

4º.- Los valores de las relaciones marginales de sustitución, son los siguientes, en el punto de equilibrio obtenido (situación óptima):

$$(RSB)_2^1 = \frac{3}{2} = 1'50 \ , \ (RSB)_3^1 = \frac{6}{5} = 1'20 \ , \ (RSB)_3^2 = \frac{4}{5} = 0'80 .$$

Ejercicio 4

La función de utilidad *u* de un consumidor, que dispone para gastos, durante un periodo determinado, de una renta personal de 125 u.m. afecta a unos impuestos directos del 20%, viene dada por la ecuación y condición lateral siguientes:

$$\begin{cases} u_x^2 + y^2 u_y - 5yu = \iiint_A x^2 y z^3 dxdydz \\ u(x,1) = x^2, \forall x > 0 \end{cases}$$

donde A es el sólido limitado por el plano: y = 0 y las superficies:

$$y^2 = x - x^2 \;\; , \;\; z^2 = 4x \; .$$

Se pide:

1) Dibujar las curvas de indiferencia correspondientes a los niveles de utilidad $U_1 = 150$ y $U_2 = 600$.

2) Obtener la relación marginal de sustitución entre los artículos *x* e *y*.

3) Calcular el punto de equilibrio del consumidor (nivel de consumo óptimo) cuando los precios de los bienes son, respectivamente, $p_1 = 4$ y $p_2 = 3$.

4) Determinar, en dicho punto de equilibrio, el valor de las relaciones marginales de sustitución de bienes.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 36).

Solución:

1) En primer lugar, hay que determinar la expresión analítica de esta función de utilidad que viene expresada, inicialmente, como una EDP no lineal, de primer orden y coeficientes variables. Para resolver la integral triple del segundo miembro conviene tener en cuenta la correspondiente representación gráfica:

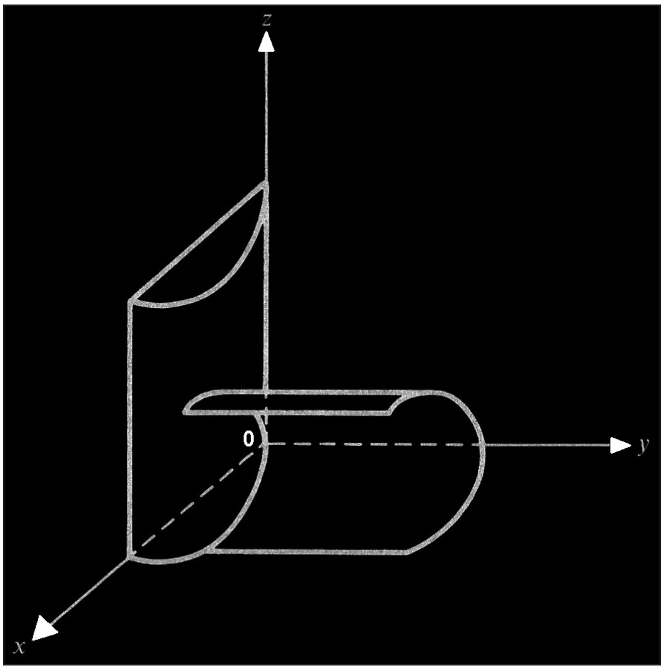


Fig. 5. Dominio de integración.

Procede encontrar la proyección del sólido sobre cualquiera de los tres planos y, posteriormente, establecer los pertinentes límites de integración. En este caso, la proyección sobre el plano z = 0 es el semicírculo:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{1}{4}.$$

Los límites de integración del dominio, son:

$A\{(x,y,z)/0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq\sqrt{x-x^2}, -2\sqrt{x}\ \leq z\leq 2\sqrt{x}$, con lo que:

$$\iiint_A x^2yz^3dxdydz=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{x-x^2}}\left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}x^2yz^3dz\right)dy\right]dx=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{x-x^2}}\left[x^2y\frac{z^4}{4}\right]_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy\right)dx=0,$$

y la EDP planteada será, definitivamente: $u_x^2+y^2u_y-5yu=0$, que es una ecuación no lineal, homogénea y de coeficientes variables.

Entonces, puede escribirse:

$$F(x,y,z,p,q) = p^2 + y^2q - 5yz, \text{ con } u_x = p\ ;\ u_y = q,\ u = z\ ,$$

y la curva inicial se parametriza del siguiente modo:

$$\gamma(s)\equiv(\alpha_1(s),\alpha_2(s),\beta(s)) = (s,1,s^2),\ \forall s\in\Re.$$

La condición de banda nos dice que: $p_0(s) = 2s$, con lo cual la condición de compatibilidad se reduce a: $q_0(s) = s^2$.

Dado que: $\det\begin{pmatrix}F_p & \alpha_1'\\ F_q & \alpha_2'\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}2p_0(s) & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-1,$

sabemos que el problema considerado tiene una única solución.

Para obtener su expresión debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x' = 2p, & x(0)=s,\\ y' = y^2, & y(0)=1,\\ z' = 2p^2+y^2q, & z(0)=s^2,\\ p' = 5py, & p(0)=s^2,\\ q' = 5z+5qy, & q(0)=2s, \end{cases}$$

conjuntamente con la ecuación adicional: $5yz = p^2 + y^2q$. (1)

Es evidente que este sistema no lineal no puede ser reducido, con lo cual debemos resolverlo directamente. Comencemos por la segunda ecuación; en este caso, tenemos:

$$t=\int_0^t 1ds=\int_0^t \frac{y'(s)}{y^2(s)}ds=\int_1^{y(t)}\frac{dr}{r^2}=1-\frac{1}{y(t)}.\ \text{Por lo tanto: } y(t,s)=\frac{1}{1-t}.$$

Dado que conocemos el valor de *y*, la cuarta igualdad del sistema se transforma en la siguiente ecuación lineal con coeficientes variables:

$\frac{p'}{p}=\frac{5}{1-t'}$, de donde: p = $\frac{c}{(t-1)^5}$, que con: p(0) = 2s, sin más que integrar directamente, obtenemos que su única solución resulta ser: $p(t,s)=\frac{2s}{(1-t)^5}$.

Integrando ahora en la primera de las ecuaciones, llegamos a que: $x(t,s)=\frac{s}{(1-t)^4}$.

Finalmente, para calcular la expresión de z debemos resolver la tercera de las igualdades.

En este caso, usando la igualdad (1) conjuntamente con las expresiones de *y* y *p* obtenidas previamente, debemos resolver la ecuación:

$$z'=\frac{5}{1-t}z+\frac{4s^2}{(1-t)^{10}},\qquad z(0)=s^2.$$

Multiplicando en este caso por el factor integrante $(1-t)^5$, obtenemos que la única solución viene dada por:

$z=\frac{c}{(t-1)^5}-\frac{s^2}{(t-1)^9}$, pero: $z(0) = -c + s^2 = s^2$, luego: c = 0, de donde:

$$z(t,s)=\frac{s^2}{(1-t)^9}.$$

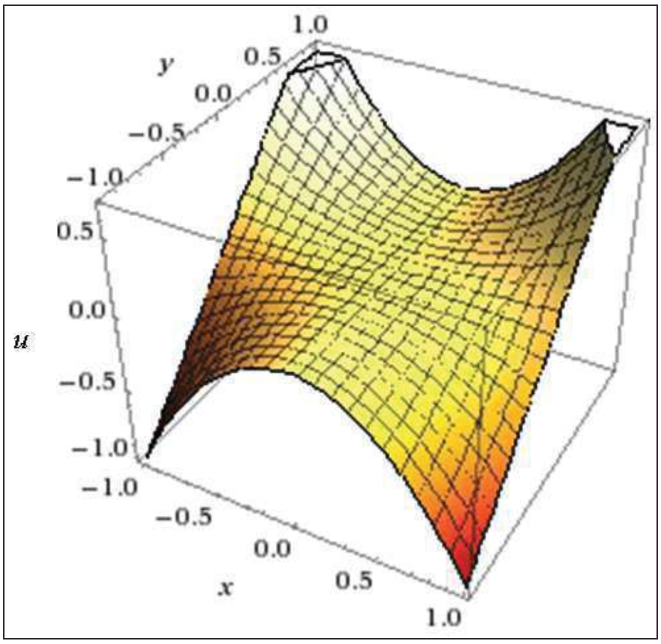
La superficie parametrizada es igual a:

$$\Gamma(t,s)=\left(\frac{s}{(1-t)^4},\frac{1}{1-t},\frac{s^2}{(1-t)^9}\right).$$

Es evidente que esta superficie se corresponde con la expresión que nos ofrece la solución del problema planteado, a saber:

$$u(x,y) = z(t(x,y),s(x,y)) = x^2y\ ,$$

y que se representa en la figura siguiente:



La función de utilidad dada es tal que: $u(x,y) = x^2 \cdot y$, con lo que:

$$u(tx,ty) = t^2x^2 \cdot ty = t^3 \cdot x^2 \cdot y = t^3 \cdot u(x,y)\ ,$$

luego se trata de una función homogénea de grado m = 3 y homotética, que cumple necesariamente el teorema de Euler, como puede comprobarse.

Nota: Nótese que en el presente ejercicio no ha sido necesario calcular el valor de q(t,s). Este resultado, de hecho, también puede aprovecharse como una función de producción de Cobb-Douglas, de expresión genérica:

$q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$, con: q = u, K = x, L = y. Entonces:

$$A = 1, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \alpha + \beta = 3.$$

Así pues, la representación gráfica pedida de las dos curvas de indiferencia pedidas, correspondientes a los niveles de utilidad: $U_1 = 150$ y $U_2 = 600$, es la siguiente:

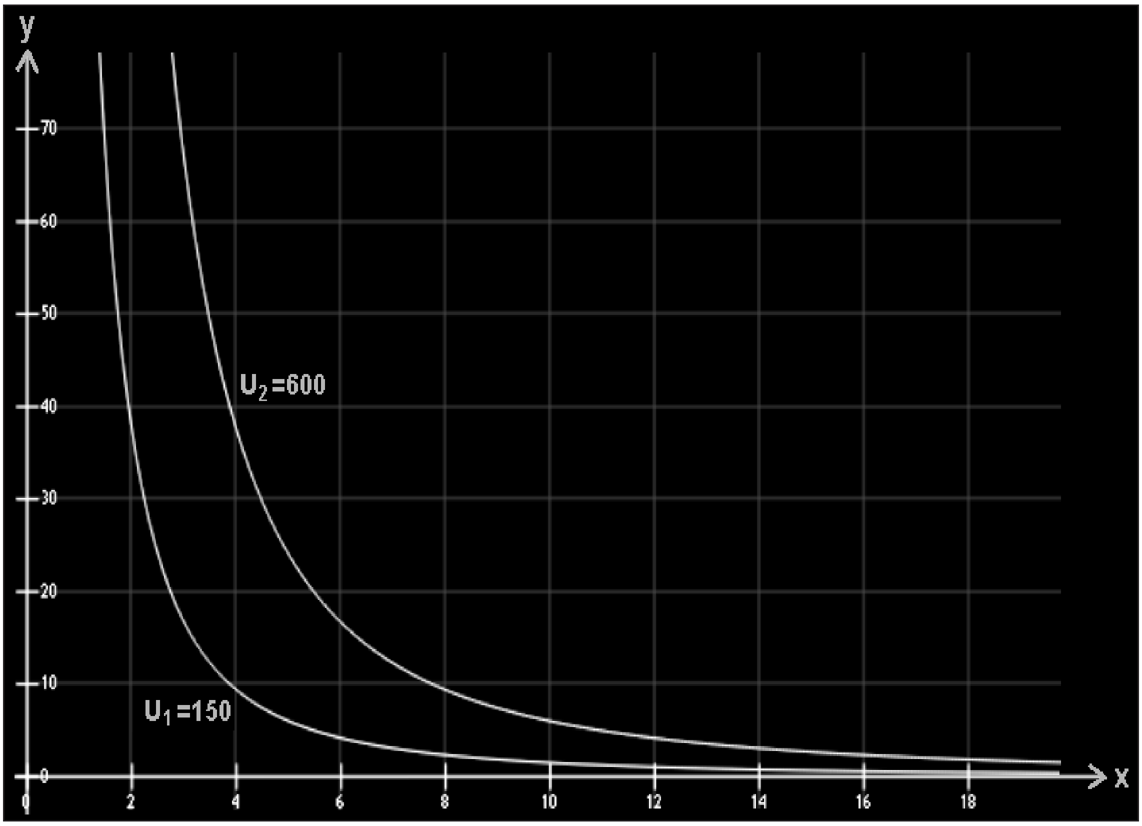


Fig. 6. Curvas de utilidad (III).

2) La relación marginal de sustitución entre los bienes *x* e *y* es:

$$(\mathrm{RSB})_y^x = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{2xy}{x^2} = \frac{2y}{x}.$$

3) Puesto que en un máximo de utilidad se produce la igualdad entre la RSB y la razón de los precios, será preciso que: $\frac{2y}{x} = \frac{4}{3}$. Además, según la ecuación de balance del consumidor: $y^0 = p_1 \cdot x + p_2 \cdot y$, siendo y^0 la renta disponible del consumidor, o sea, en este caso:

$$y^0 = 125 \times 0'80 = 100 = 4x + 3y; \text{ con ello y como: } 4x = 6y:$$

100 = 9y; y = 11’11; x = 16’67, que constituye el punto de equilibrio del consumidor. Entonces, la función de utilidad valdrá:

$$u = x^2 \times y = 16'67^2 \times 11'11 \cong 3.086.$$

La representación gráfica correspondiente puede verse a continuación:

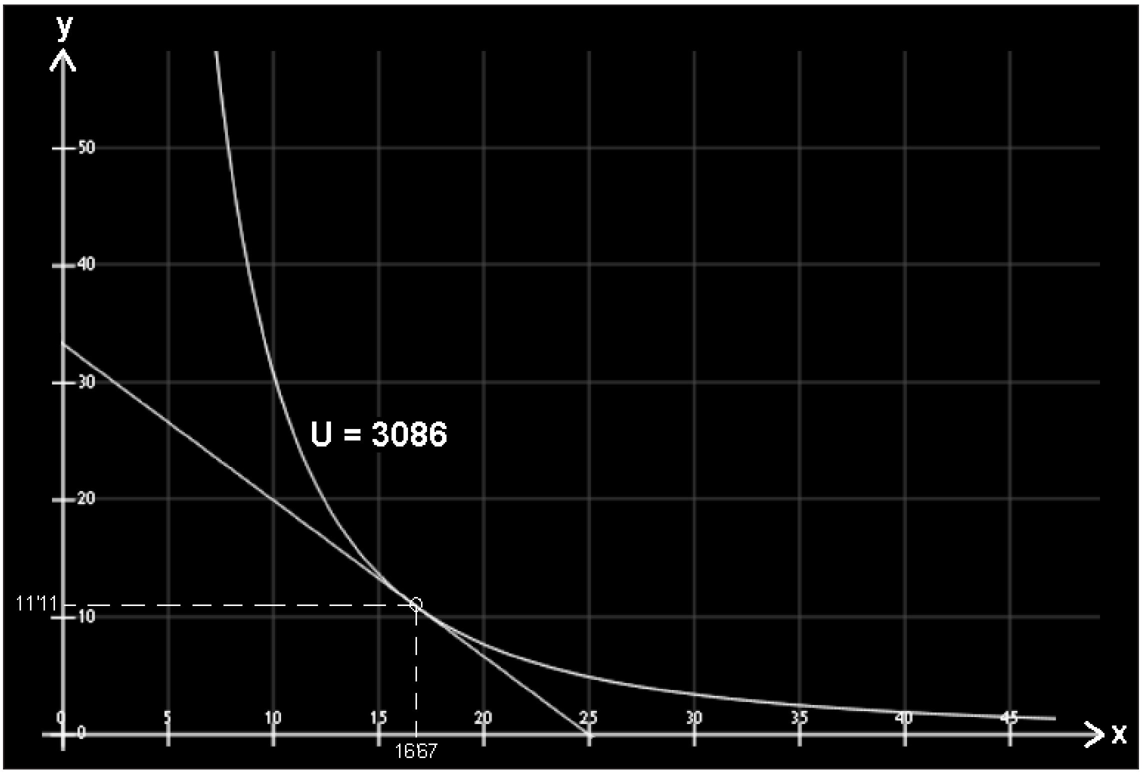


Fig. 7. Curva de utilidad y recta de balance (II).

4) El valor pedido, será (situación óptima):

$$(RSB)_y^x = \frac{2y}{x} = \frac{2y}{\frac{3}{2}\times y} = \frac{4}{3} = 1'33.$$

Ejercicio 5

Sea la función de utilidad de un consumidor, donde u(x,y) es la raíz cuadrada de la inversa de la función v(x,y) que, a su vez, satisface la siguiente EDP:

$$x\left(v^2 - y^2\right)v_x + y\left(x^2 - v^2\right)v_y = v\left(y^2 - x^2\right), \text{ con } v(x,x) = \frac{1}{x^2}, \forall x > 1.$$

Si la renta personal del individuo es de 125 u.m. afecta a unos impuestos directos del 20%, que la gasta en dos bienes *x* e *y*, siendo el precio de x = 5 u.m. y el de y = 4 u.m., se desea saber: a) ¿Qué cantidad se demandará de ambos bienes?. b) Si ahora el precio de *x* pasa a ser de 2 u.m., ¿cuáles serán las nuevas cantidades demandadas?. c) Considerando las dos situaciones de equilibrio anteriores y que la función de demanda es rectilínea, construir la función de demanda del bien *x*.

Solución:

a) En este caso, los datos del problema son los siguientes:

$$\begin{cases} f_1 (x, y, z) = x (z^2 - y^2) \\ f_2 (x, y, z) = y (x^2 - z^2) \\ f (x, y, z) = z (y^2 - x^2) \end{cases}$$

y entonces la condición inicial queda parametrizada del siguiente modo:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = \left(s, s, \frac{1}{s^2} \right),\ \forall s \in \Re.$$

Dado que por aplicación de la regla de Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s\left(\dfrac{1}{s^4} - s^2\right) & 1 \\ -s\left(\dfrac{1}{s^4} - s^2\right) & 1 \end{pmatrix} = 2s\left(\frac{1}{s^4} - s^2\right),$$

tenemos que este problema tiene solución única.

La transformada de Jacobi será:

$$x (z^2 - y^2) w_x + y (x^2 - z^2) w_y + z (y^2 - x^2) w_z = 0.$$

En un primer momento elegimos los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = x, \qquad a_2 = y, \qquad a_3 = z.$$

La integral primera asociada a estos valores se obtiene teniendo en cuenta que $x = w_x$, con lo cual $w = \dfrac{x^2}{2} + f(y,z)$ y, como consecuencia, la igualdad $y = w_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}(y,z)$ implica que: $f(y,z) = \dfrac{y^2}{2} + g(z)$. Finalmente, $z = w_z = g'(z)$ implica que:

$$w(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2},$$ es una integral primera de esta ecuación.

Dado que: $w(\gamma(s)) = s^2 + \dfrac{1}{2s^4}$, no es una función constante, debemos encontrar una segunda integral primera funcionalmente independiente de ésta. Para ello consideramos los siguientes factores integrantes:

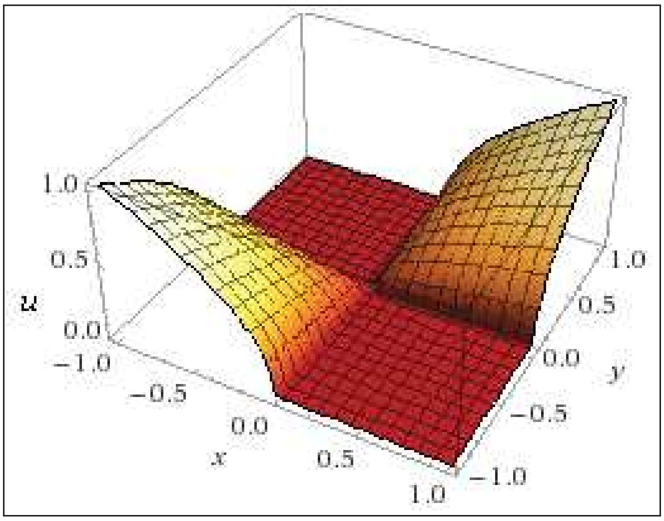
$$a_1 = \frac{1}{x}, \qquad a_2 = \frac{1}{y}, \qquad a_3 = \frac{1}{z}.$$

La solución del sistema se obtiene para estos valores del siguiente modo: Al ser $\frac{1}{x} = w_x$, deducimos que $w = \log|x| + f(y,z)$. De la segunda igualdad obtenemos que $f(y,z) = \log|y| + g(z)$. De la última expresión concluimos que: $w(x,y,z) = \log(|xyz|)$.

Ahora bien, dado que: w(γ(s)) = log 1 = 0, resulta que la función definida implícitamente al igualar esta segunda función a cero nos da la solución particular buscada, es decir:

$$v(x,y) = \frac{1}{xy}, \text{ de donde: } u(x,y) = \sqrt{\frac{1}{v(x,y)}} = \sqrt{x \cdot y} = x^{1/2} \cdot y^{1/2},$$

con la siguiente representación gráfica:



La función de utilidad dada es tal que: $u(x,y) = x^{1/2} \cdot y^{1/2}$, con lo que:

$$u(tx,ty) = t^{1/2} x^{1/2} \cdot t^{1/2} y^{1/2} = t \cdot x^{1/2} \cdot y^{1/2} = t \cdot u(x,y),$$

luego es una función homogénea (y consecuentemente también homotética) de grado m = 1 (linealmente homogénea), que cumple el teorema de Euler, como puede comprobarse.

En efecto: $x \cdot f'_x + y \cdot f'_y = m \cdot u(x,y)$, y substituyendo se tiene que:

$$(1/2) \cdot y^{1/2} \cdot x^{1/2} + (1/2) \cdot y^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{1/2} \cdot y^{1/2} = u(x,y), \text{ c.s.q.d.}$$

El punto de equilibrio ha de estar situado en la recta de balance y, por otra parte, ha de satisfacer que la RMS entre ambos bienes sea igual al cociente de sus precios.

En estas condiciones de equilibrio, sucederá que la recta de balance será: y^0 = 125 $\times$ 0'80 = 100 = 5x + 4y, siendo y^0 la renta disponible del consumidor. Además:

$$(RMS)_2^1 = \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{(1/2)y^{1/2} \cdot x^{-1/2}}{(1/2)y^{-1/2} \cdot x^{1/2}} = \frac{y}{x}, \text{ y entonces: } \frac{y}{x} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{4}, \text{ luego se obtiene:}$$

x = 10 ; y = 12'5 ; y el nivel de utilidad será:

$$U = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{10 \times 12'5} \cong 11'18,$$

con la siguiente representación gráfica:

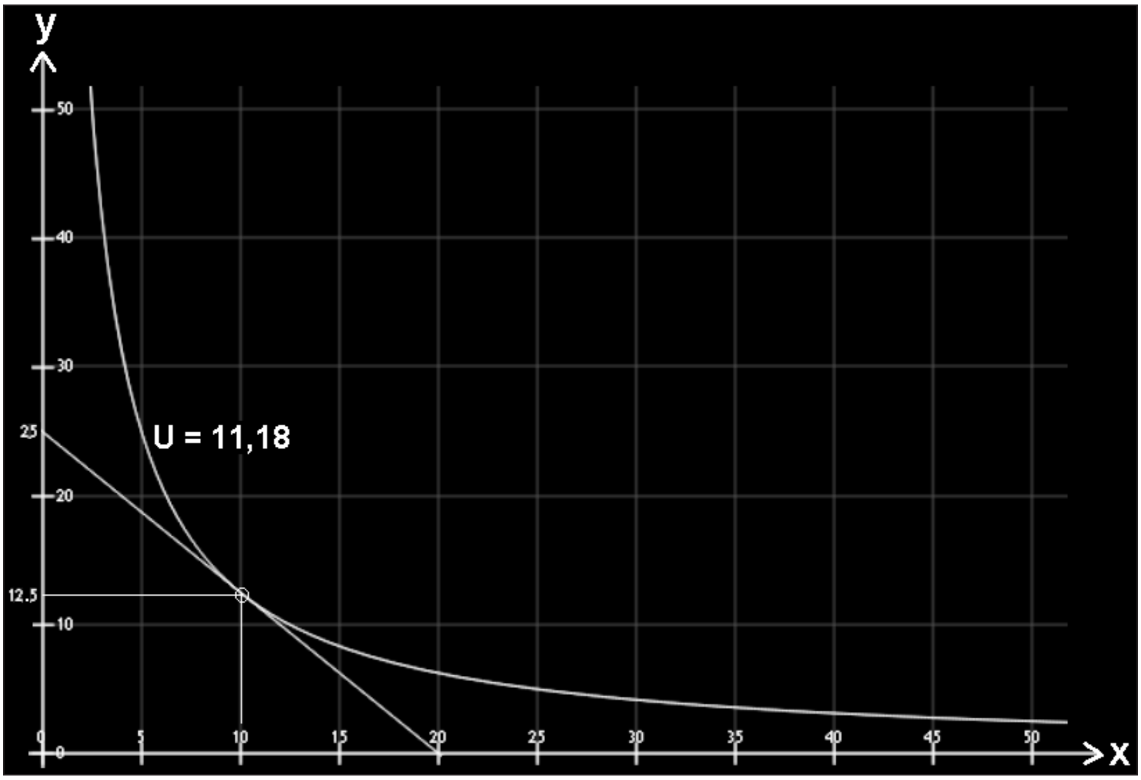


Fig. 8. Curva de utilidad y recta de balance (III).

El valor de la relación marginal de substitución (RMS) en el punto de equilibrio obtenido (se trata de una situación óptima), es el siguiente: $(RMS)_2^1 = \frac{12'5}{10} = 1'25$.

b) En estas condiciones de equilibrio, sucederá que la recta de balance será: 100 = 2x + 4y, y entonces: $\frac{y}{x} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, luego se obtiene:

x = 25 ; y = 12'5 ; y el nivel de utilidad será, ahora:

$$U = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{25 \times 12'5} \cong 17'68,$$

con la siguiente representación gráfica:

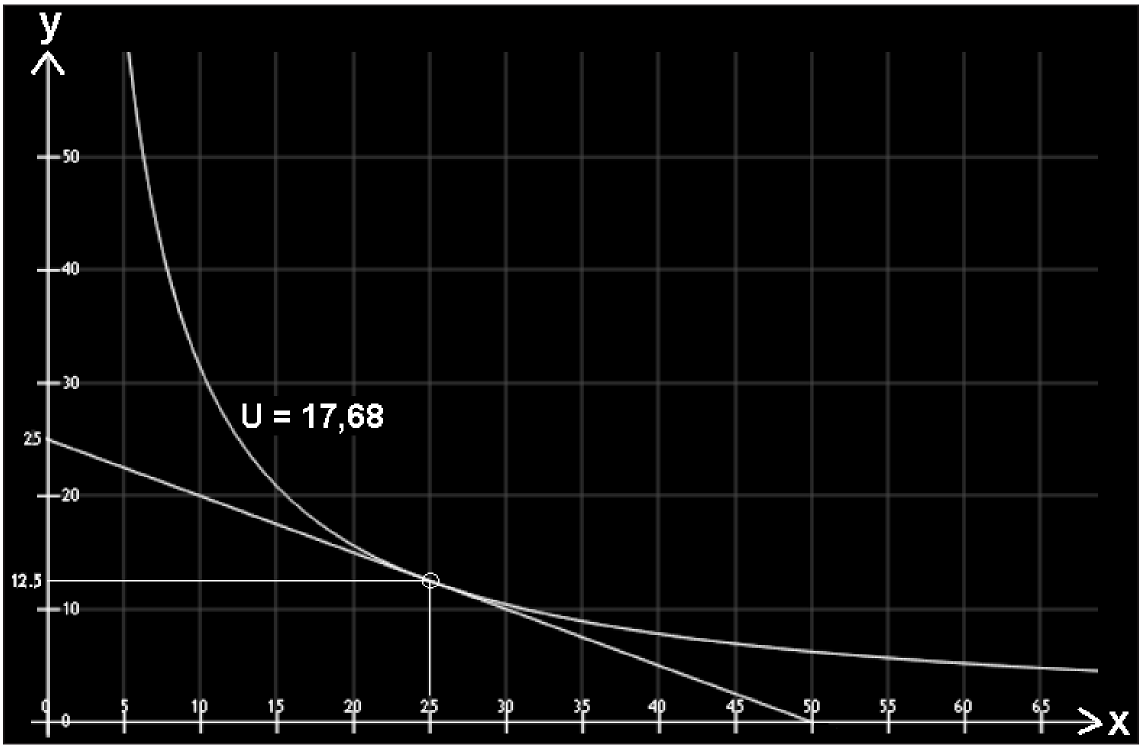


Fig. 9. Curva de utilidad y recta de balance (IV).

El valor de la RMS en el punto de equilibrio obtenido (situación óptima), es: $(RMS)_2^1 = \frac{12'5}{25} = 0'50$.

c) Considerando las dos situaciones de equilibrio anteriores y que la función de demanda debe ser recta, se tendrá que para el bien *x* la recta debe pasar por los puntos: (p,x) $\rightarrow$ (5,10) $\rightarrow$ (2,25) , o sea:

$$\frac{x-5}{2-5} = \frac{p-10}{25-10}; \frac{x-5}{-3} = \frac{p-10}{15} \text{ ; de donde: } p = 35 - 5x,$$

que constituye la función inversa de demanda, con la siguiente representación gráfica:

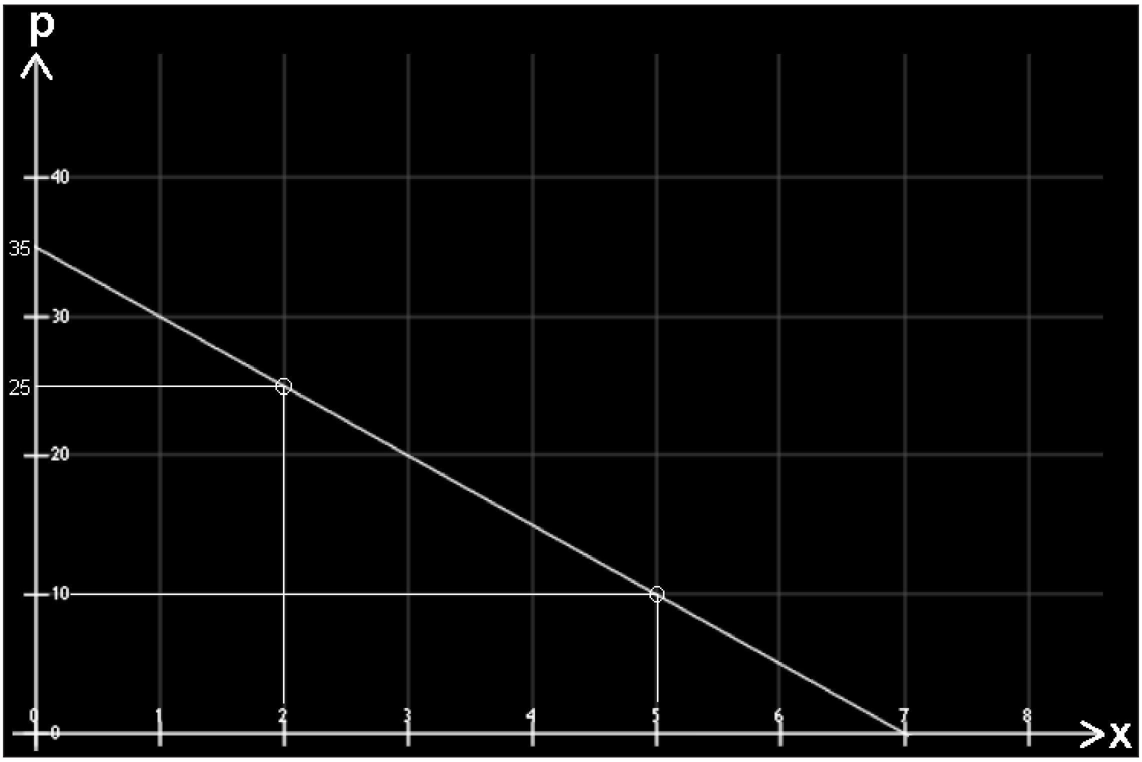


Fig. 10. Función inversa de demanda.

Ejercicio 6

En una economía simple con tres bienes (x_1, x_2, x_3) y un único consumidor, sus preferencias se reflejan en la siguiente función de utilidad: $U(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)\cdot x_3$, donde $h(x_1,x_2)$ es la superficie integral de la EDP: $h = p\cdot q$, que pasa por la recta: $x_1 = 1$, $h = x_2$. La relación de transformación de los bienes es:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - 10 + 16\iiint_A x_1 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = \Phi \text{ , siendo } \Phi \text{ el flujo del vector}$$

$$\vec{V} = \left(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\vec{i} + \left(2x_2^2 + x_3^2 + x_1^2\right)\vec{j} + \left(2x_3^2 + x_1^2 + x_2^2\right)\vec{k} \text{ ,}$$

que tiene lugar a través de la cara exterior de la superficie formada por:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z \\ 0 \le z \le 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = (z-3)^2 \\ 1 \le z \le 3 \end{cases} \text{ , y siendo el dominio de integración:}$$

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) / 0 \le x_1 \le 2\sin x_2 \text{ , } 0 \le x_2 \le \pi \text{ , } -\sqrt{4 - x_1^2} \le x_3 \le \sqrt{4 - x_1^2}\} \text{ .}$$

Se pide: a) La asignación óptimo paretiana, b) Ciertas restricciones institucionales provocan la violación de una de las condiciones de optimalidad, concretamente: $\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_3} = \frac{8}{9}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x_1 \cdot dx_1}{\sqrt[3]{\sin x_1}}$. Calcular el óptimo de segundo orden (adaptado de Martín y Sánchez, UNED, 2001, p.79).

Solución:

a) En primer lugar, habrá que resolver la ecuación de la relación de transformación de bienes dada. Esto es:

$$16\iiint_A x_1 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = 16\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\sin x_2}\left(\int_{-\sqrt{4-x_1^2}}^{\sqrt{4-x_1^2}} x_1 \cdot dx_3\right)dx_1\right]dx_2 = 16\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\sin x_2} 2x_1\sqrt{4-x_1^2}\,dx_1\right)dx_2 =$$

$$= 16\int_0^{\pi}\frac{4}{3}(1+\cos^3 x_2)dx_2 = \frac{64}{3}\left[x_2 + \frac{\sin x_2(\cos^2 x_2 + 2)}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{64\pi}{3}.$$

Por otra parte, el flujo Φ del vector será:

$$\Phi = \iint_\sigma \vec{V}\cdot\overrightarrow{d\sigma} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{V}\cdot dv \text{ , siendo: } \operatorname{div}\vec{V} = V'_x + V'_y + V'_z = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 .$$

$$\Phi = \iint_V (4x_1 + 4x_2 + 4x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \text{ ; se tiene:}$$

$$\begin{cases} \iiint_V 4x_1\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 0 & \text{por la simetría del recinto} \\ \iiint_V 4x_2\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 0 & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$

$$\iiint 4x_3\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + 4\int_0^1 x_3\,dx_3\iint_{\Omega_1} dx_1\,dx_2 + 4\int_1^3 x_3\,dx_3\iint_{\Omega_2} dx_1\,dx_2 .$$

$$\left.\begin{array}{l} \iint_{\Omega_1} dx_1\,dx_2 = \text{área de } \Omega_1 = \pi r_1^2 = \pi\,4x_3 \\ \iint_{\Omega_2} dx_1\,dx_2 = \text{área de } \Omega_2 = \pi r_2^2 = \pi(x_3-3)^2 \end{array}\right\} \text{Substituyendo:}$$

$$\Phi = 4\int_0^1 x_3\cdot\pi\,4x_3\,dx_3 + 4\int_1^3 x_3\cdot\pi(x_3-3)^2dx_3 = 16\pi\int_0^1 x_3^2dx_3 + 4\pi\int_0^3 x_3(x_3-3)^2dx_3 =$$

$$= 16\pi\left.\frac{x_3^3}{3}\right]_0^1 + 4\pi\left[\frac{x_3^4}{4} + 9\frac{x_3^2}{2} - 6\frac{x_3^3}{3}\right]_1^3 = \frac{16\pi}{3} +$$

$$+4\pi\left[\frac{81}{4} + \frac{9}{2}9 - 54 - \frac{1}{4} - \frac{9}{2} + 2\right] = \frac{16\pi}{3} + 16\pi = \frac{64\pi}{3}.$$

De este modo, la ecuación definitiva de la relación de transformación de bienes dada, quedará configurada así:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 .$$

Por lo que se refiere a la resolución de la EDP, como siempre, se ha hecho: $p = \frac{\partial h}{\partial x_1}, q = \frac{\partial h}{\partial x_2}$. Si ahora escribimos la ecuación de la recta dada en forma paramétrica, se tendrá que:

$$x_{10} = 1 \ ; \ x_{20} = s \ ; \ h_0 = s .$$

Determinemos $p_0(s)$ y $q_0(s)$ teniendo en cuenta que: $s = p_0 \cdot q_0$, y además: $1 - q_0 = 0$, con lo que: $p_0 = s$; $q_0 = 1$. Y se llega a la expresión:

$$\frac{dx_1}{q} = \frac{dx_2}{p} = \frac{dh}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = dt ,$$

$$p = c_1e^t,\ q = c_2e^t,\ x_1 = c_2e^t + c_3,\ x_2 = c_1e^t + c_4,\ h = c_1c_2e^{2t} + c_5 .$$

Tomando en cuenta, ahora, que para $t = 0$ se tiene que:

$$x_1 = 1;\ x_2 = s \ ; \ h = s \ ; \ p = s \ ; \ q = 1 \text{ , resulta:}$$

$$p = se^t \ ; \ q = e^t \ ; \ x_1 = e^t \ ; \ x_2 = se^t \ ; \ h = se^{2t} ,$$

y la superficie integral buscada será: $h(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2$.

De este modo, la función de utilidad dada se convierte en:

$U(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, que es homogénea, puesto que:

$$u(tx_1, tx_2, tx_3) = tx_1 \cdot tx_2 \cdot tx_3 = t^3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = t^3 \cdot u(x_1, x_2, x_3),$$

luego es una función homogénea de grado $m = 3$, que cumple el teorema de Euler, como puede comprobarse.

Para calcular la asignación OP con los datos del problema debe maximizarse la función de utilidad del consumidor sujeto a la restricción marcada por la curva de transformación, esto es:

$$[\text{Max}]\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \text{ , sujeto a: } 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10.$$

Para ello, en primer lugar, formaremos la función auxiliar lagrangiana:

$$\Phi = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - \lambda(2x_1 + x_2 + 3x_3 - 10).$$

- Condiciones necesarias o de primer grado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = x_2 \cdot x_3 - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = x_1 \cdot x_3 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} = x_1 \cdot x_2 - 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 10 = 0 \end{cases}$$

Una vez resuelto el sistema anterior con la restricción dada, resultan los siguientes valores:

$$x_1 = \frac{5}{3}; x_2 = \frac{10}{3}; x_3 = \frac{10}{9}; \lambda = \frac{50}{27};$$

luego en este punto crítico se supone la existencia de un extremo relativo y, como consecuencia, el valor de la función de utilidad será:

$$U = \frac{5}{3} \times \frac{10}{3} \times \frac{10}{9} = \frac{500}{81} = 6'17 .$$

- Condiciones suficientes o de segundo grado:

Se forma el determinante hessiano orlado relevante, esto es:

$$\begin{vmatrix} \Phi''_{x_1^2} = 0 & \Phi''_{x_2^2} = 0 & \Phi''_{x_3^2} = 0 & \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{x_1x_2} = x_3 & \Phi''_{x_2x_1} = x_3 & \Phi''_{x_3x_1} = x_2 & \Phi''_{\lambda x_1} = -2 \\ \Phi''_{x_1x_3} = x_2 & \Phi''_{x_2x_3} = x_1 & \Phi''_{x_3x_2} = x_1 & \Phi''_{\lambda x_2} = -1 \\ \Phi''_{x_1\lambda} = -2 & \Phi''_{x_2\lambda} = -1 & \Phi''_{x_3\lambda} = -3 & \Phi''_{\lambda x_3} = -3 \end{vmatrix}, \text{ y entonces:}$$

$$H(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 10/9 & 10/3 & -2 \\ 10/9 & 0 & 5/3 & -1 \\ 10/3 & 5/3 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{100}{3} < 0 \text{ (3 variables),}$$

luego puede tratarse de un máximo o un mínimo. Para resolver este problema probaremos el método de substitución (Franquet, 2014, y anexo nº: 3), con lo cual pasaremos a tener una función de 2 variables independientes (x_1,x_3) sin ecuación condicionante, a saber:

$$[Max]\ \Phi = x_1x_3(10 - 2x_1 - 3x_3) = 10x_1x_3 - 2x_1^2x_3 - 3x_1x_3^2\ ;$$

- Condiciones necesarias o de primer grado:

$$\begin{cases} \Phi'_{x_1} = 10x_3 - 4x_1x_3 - 3x_3^2 = 0 = 10 - 4x_1 - 3x_3 \\ \Phi'_{x_3} = 10x_1 - 2x_1^2 - 6x_1x_3 = 0 = 10 - 2x_1 - 6x_3 \end{cases}$$

Operando adecuadamente se obtienen los siguientes valores, ya conocidos:

$$x_1 = \frac{5}{3};\ x_2 = \frac{10}{3};\ x_3 = \frac{10}{9},\ \text{ c.s.q.d.}$$

- Condiciones suficientes o de segundo grado:

$$H(x_1, x_3) = \begin{vmatrix} \Phi''_{x_1^2} & \Phi''_{x_1x_3} \\ \Phi''_{x_1x_3} & \Phi''_{x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4x_3 & 10-6x_3 \\ 10-6x_3 & -6x_1 \end{vmatrix} = 24x_1x_3 - 100 - 36x_3^2 + 120x_3 = \frac{100}{3} > 0\,,$$

y como además: $\Phi''_{x_1^2} = -4x_3 = -\frac{40}{9} < 0$, resulta que nos hallamos, efectivamente, en presencia de un máximo.

b) Habrá que resolver, en primer lugar, la integral definida del segundo miembro de la restricción dada en el enunciado del problema, esto es:

$$\frac{8}{9}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x_1 \cdot dx_1}{\sqrt[3]{\sin x_1}} = \frac{8}{9}\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\cos x_1 \cdot dx_1}{\sqrt[3]{\sin x_1}} = \frac{8}{9}\lim_{\varepsilon \to 0^+}\left[\frac{3}{2}\sin^{2/3} x_1\right]_\varepsilon^{\pi/2} = \frac{8}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{4}{3}\ .$$

Si se viola alguna de las condiciones de optimalidad las demás no tienen porqué mantenerse. Para el cálculo del óptimo de segundo orden se resolverá el problema de optimización anteriormente planteado añadiéndole la nueva restricción dada, a saber:

$$\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_3} = \frac{4}{3} = \frac{x_2 \cdot x_3}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_3}{x_1}\,,\ \text{de donde: } x_3 = \frac{4x_1}{3}\,.$$

Substituyendo ello en la ecuación inicial, el problema a resolver se concreta ahora en:

$$[Max]\ \frac{4}{3}x_1^2 \cdot x_2\ ,\ \text{sujeto a: } 2x_1 + x_2 + 4x_1 = 10.$$

Para ello, en primer lugar, formaremos la función auxiliar lagrangiana:

$$\Phi = \frac{4}{3} x_1^2 \cdot x_2 - \lambda(6x_1 + x_2 - 10).$$

- Condiciones necesarias o de primer grado:

$$\begin{cases} \Phi'_{x_1} = \frac{8}{3} x_1 x_2 - 6\lambda = 0 \\ \Phi'_{x_2} = \frac{4}{3} x_1^2 - \lambda = 0 \\ \Phi'_{\lambda} = 6x_1 + x_2 - 10 = 0 \end{cases}$$

Una vez resuelto el sistema anterior con la restricción dada, resultan los siguientes valores:

$$x_1 = \frac{10}{9}; x_2 = \frac{10}{3}; x_3 = \frac{40}{27}; \lambda = \frac{400}{243};$$

luego en este punto crítico se supone la existencia de un extremo relativo cuyos volúmenes de producción son óptimos de segundo orden (*second best*) y, como consecuencia, el valor de la función de utilidad será, ahora:

$$U = \frac{10}{9} \times \frac{10}{3} \times \frac{40}{27} = \frac{4.000}{729} = 5'49 < 6'17 .$$

Empleando, así mismo, el método de substitución, se tendrá (ahora con una función real de una sola variable real, para evitar la posible prolijidad o indeterminación del procedimiento que se deriva de la aplicación de la condición suficiente):

$$[\text{Max}]\ \Phi = \frac{4}{3} x_1^2 (10 - 6x_1), \text{ de donde:}$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$\frac{d\Phi}{dx_1} = \frac{4}{3}(20x_1 - 18x_1^2) = 0$, y entonces se tiene, efectivamente, que:

$$x_1 = \frac{10}{9}; x_2 = \frac{10}{3}; x_3 = \frac{40}{27}.$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$\frac{d^2\Phi}{dx_1^2} = \frac{4}{3}(20 - 36x_1) = -\frac{80}{3} < 0$, luego corresponde a un máximo,

c.s.q.d.

Ejercicio 7

Las preferencias de un consumidor, que dispone para gastos, en un período determinado, de una renta personal de 520 u.m. estando sujeto a una fiscalidad directa del 25%, vienen reflejadas en la siguiente función de utilidad:

$$U(x,y,z) = -yz\cdot u_x - zx\cdot u_y - xy\cdot u_z,$$

con la condición lateral: $u(x,y,0) = u(x,y,0) = y^2 - \frac{x^2}{2}$, $\forall x > 0$, $\forall y > 0$.

La relación de transformación de los bienes x, y, z, viene dada por la expresión: $2x + y + 3z - 10 = \iint_{A_1} x\cdot dx\cdot dy - \iiint_{A_2} dx\cdot dy\cdot dz$, con los respectivos recintos de integración:

$$\begin{cases} A_1 = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \\ A_2 = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\} \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular la asignación óptima paretiana.

b) Ciertas restricciones institucionales provocan la violación de una de las condiciones de optimalidad; concretamente:

$$\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial z} = \frac{4}{3}.$$ Calcular el óptimo de 2º orden.

c) Dibujar las curvas de indiferencia correspondientes a los niveles de utilidad $U_1 = 360$ y $U_2 = 600$, y a una cantidad de bien *z* disponible igual a 16 ud.

d) Obtener las relaciones de sustitución entre los artículos x, y, z.

e) Calcular el nivel de consumo óptimo cuando los precios respectivos de los bienes son: $p_1 = 6$; $p_2 = 4$; $p_3 = 5$.

f) Determinar, en el punto de equilibrio obtenido, el valor de las relaciones de sustitución.

g) Resolver las mismas cuestiones c), d), e) y f) para otro consumidor que disponga de la misma renta, y cuya función de utilidad sea:

$$U(x,y,z) = 60\cdot x^{1/2}\cdot y^{1/3}\cdot z^{1/4}.$$

(adaptado de Martín y Sánchez, UNED, 2001, p. 79).

Solución:

a) El 2º miembro de la relación dada de transformación de los bienes x,y,z, exige la resolución de las dos integrales múltiples que en él figuran, por aplicación del teorema de Fubini. Y así:

$$\iint_{A_1} x\cdot dx\cdot dy = \int_0^1 x\cdot dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 x(1-x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\text{. También:}$$

$$\iiint_{A_2} dx\cdot dy\cdot dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dx\cdot dy\cdot dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\cdot dx\cdot dy = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - 2x + x^2 - \frac{1-2x+x^2}{2}\right)\cdot dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

De este modo, la relación de transformación en cuestión será:

$$2x + y + 3z = 10\ .$$

A continuación, trataremos, en principio, de resolver la EDP, que, como ya se ha visto, es: $u(x,y,z) = x\cdot y\cdot z$, que es una función homogénea de grado $m = 3$. Entonces:

$u_x = -x$; $u_y = 2y$; $u_z = -2z$, con lo que sustituyendo en la ecuación inicial:

$$U(x,y,z) = y\cdot z\cdot x - z\cdot x\cdot 2y + x\cdot y\cdot 2z = x\cdot y\cdot z\text{, c.s.q.d.}$$

Se cumple también la condición de lateralidad. Además, cuando *z* es igual a 0 $\Rightarrow U(x,y,z) = 0$.

Pues bien, para calcular la asignación OP con los datos del problema, se resuelve el problema de la maximización de la función de utilidad del consumidor sujeto a la curva de transformación, así:

$$[MAX]\ U(x,y,z) = x\cdot y\cdot z\text{, con la condición: } 2x + y + 3z = 10.$$

Para ello, montaremos la función auxiliar de Lagrange:

$$\Phi = x\cdot y\cdot z + \lambda(2x + y + 3z - 10);$$

-Condición de primer grado (necesaria):

$$\left.\begin{aligned} \Phi'_x &= yz + 2\lambda = 0 \\ \Phi'_y &= xz + \lambda = 0 \\ \Phi'_z &= xy + 3\lambda = 0 \\ \Phi'_\lambda &= 2x + y + 3z - 10 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Haciendo operaciones, se resuelve que:

$$x = \frac{5}{3};\; y = \frac{10}{3};\; z = \frac{10}{9}\text{, con lo que: } \lambda = -\frac{50}{27}\text{. Entonces:}$$

$$U = \frac{5}{3} \times \frac{10}{3} \times \frac{10}{9} = \frac{500}{81} = 6'17\,,$$

y sabemos que en el punto (5/3, 10/3, 10/9) hay un extremo relativo.

-Condición de segundo grado (suficiente):

$$\begin{vmatrix} \Phi''_{x^2} = 0 & \Phi''_{y^2} = 0 & \Phi''_{z^2} = 0 & \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{xy} = z & \Phi''_{yx} = z & \Phi''_{zx} = y & \Phi''_{\lambda x} = 2 \\ \Phi''_{xz} = y & \Phi''_{yz} = x & \Phi''_{zy} = x & \Phi''_{\lambda y} = 1 \\ \Phi''_{x\lambda} = 2 & \Phi''_{y\lambda} = 1 & \Phi''_{z\lambda} = 3 & \Phi''_{\lambda z} = 3 \end{vmatrix}$$

Formando el determinante hessiano orlado relevante, resulta:

$$H(x,y,z,\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & z & y & 2 \\ z & 0 & x & 1 \\ y & x & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 10/9 & 10/3 & 2 \\ 10/9 & 0 & 5/3 & 1 \\ 10/3 & 5/3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{100}{3} < 0\,,$$

luego se trata, efectivamente, de un máximo.

b) Si se viola alguna de las condiciones de optimalidad, las demás no tiene porqué mantenerse. Para el cálculo del óptimo de 2º orden ("second best") se resolverá el problema de optimización planteado añadiéndole la nueva restricción, a saber:

$$\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial z} = \frac{xz}{xy} = \frac{4}{3};\; \frac{z}{x} = \frac{4}{3};\; z = \frac{4x}{3};$$

por lo que deberá resolverse:

[MAX] U(x,y,z) = x·y·z = $\frac{4x^2y}{3}$, con la condición: 2x + y + 4x = 10.

La función lagrangiana, será:

$$\Phi = \frac{4x^2y}{3} + \lambda(6x + y - 10)\,.$$

-Condición de primer grado (necesaria):

$$\begin{cases} \Phi'_x = \frac{8xy}{3} + 6\lambda = 0\,;\ \lambda = -\frac{4xy}{9}\,; \\ \Phi'_y = \frac{4x^2}{3} + \lambda = 0\,;\ \lambda = -\frac{4x^2}{3}\,; \\ \Phi'_\lambda = 6x + y - 10 = 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que: 3x = y, entonces:

$$2x + 3x + 4x = 10 = 9x\,;\quad x = \frac{10}{9}\,;\ \lambda = -\frac{4}{3}\times\frac{100}{81} = -\frac{400}{243}\,.$$

$$y = \frac{10}{3}\,;\ z = \frac{4}{3}\times\frac{10}{9} = \frac{40}{27}\,;\ \text{entonces:}$$

$$U = \frac{10}{9}\times\frac{10}{3}\times\frac{40}{27} = \frac{4.000}{729} = 5'49\,,$$

y sabemos que en el punto (10/9, 10/3, 40/27) hay un extremo relativo.

-Condición de segundo grado (suficiente):

$$\begin{vmatrix} \Phi''_{x^2} = \frac{8y}{3} \\ \Phi''_{xy} = \frac{8x}{3} \\ \Phi''_{x\lambda} = 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi''_{y^2} = 0 \\ \Phi''_{yx} = \frac{8x}{3} \\ \Phi''_{y\lambda} = 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{\lambda x} = 6 \\ \Phi''_{\lambda y} = 1 \end{vmatrix}$$

y el hessiano orlado relevante resulta ser:

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 8y/3 & 8x/3 & 6 \\ 8x/3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 80/9 & 80/27 & 6 \\ 80/27 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{80}{3} > 0\,,$$

luego se trata, efectivamente, de un máximo.

c) Las curvas pedidas en el enunciado pueden verse representadas en la siguiente gráfica, habiéndose tenido en cuenta, en todo momento, el valor z = 16:

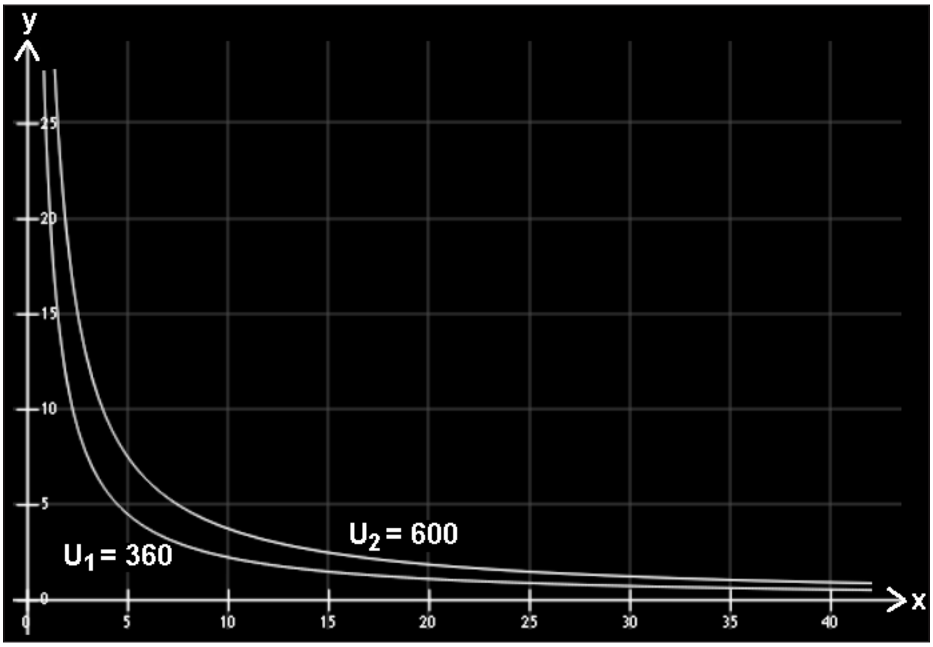


Fig. 11. Curvas de utilidad (IV).

d) Las relaciones pedidas son las siguientes:

$$\begin{cases} (RSB)_2^1 = \dfrac{f'_x}{f'_y} = \dfrac{yz}{xz} = \dfrac{y}{x} \\ (RSB)_3^1 = \dfrac{f'_x}{f'_z} = \dfrac{yz}{xy} = \dfrac{z}{x} \\ (RSB)_3^2 = \dfrac{f'_y}{f'_z} = \dfrac{xz}{xy} = \dfrac{z}{y} \end{cases},$$

siendo (RSB) = (RMS), las diferentes “relaciones marginales de sustitución” o “relaciones de sustitución de bienes”.

e) La ecuación de balance del consumidor es, siendo y^0 la renta disponible del consumidor:

$$y^0 = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot x_i = p_1 \cdot x + p_2 \cdot y + p_3 \cdot z \text{, o sea: } y^0 = 520 \cdot 0'75 = 390 = 6x + 4y + 5z \text{ ;}$$

por otra parte, deberá tenerse en cuenta que en un máximo la razón de las utilidades marginales debe igualarse a la de los precios. Ello nos indica que la utilidad marginal dividida por el precio debe ser la misma para todos los productos.

Esta razón nos ofrece la relación en que aumentará la satisfacción del consumidor si se gastase 1 € adicional en un producto concreto. De este modo, también:

$$\begin{cases} \dfrac{f'_x}{f'_y} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{3}{2};\ 2y = 3x; \\ \dfrac{f'_x}{f'_z} = \dfrac{z}{x} = \dfrac{p_1}{p_3} = \dfrac{6}{5};\ 5z = 6x; \end{cases}$$

de donde: $y^0 = 390 = 6x + 6x + 6x = 18x$; y de aquí se deduce el punto de equilibrio del consumidor, a saber:

$x = 65/3$, $y = 65/2$, $z = 26$, y su función de utilidad valdrá:

$$U(x,y,z) = \frac{65}{3} \times \frac{65}{2} \times 26 \cong 18.308 .$$

f) Los valores de las relaciones de sustitución son los siguientes, en el punto de equilibrio obtenido (situación óptima):

$$\left.\begin{array}{l} (RSB)_2^1 = \dfrac{y}{x} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{65/2}{65/3} = \dfrac{3}{2} = 1'50 \\ (RSB)_3^1 = \dfrac{z}{x} = \dfrac{p_1}{p_3} = \dfrac{26}{65/3} = \dfrac{6}{5} = 1'20 \\ (RSB)_3^2 = \dfrac{z}{y} = \dfrac{p_2}{p_3} = \dfrac{26}{65/2} = \dfrac{4}{5} = 0'80 \end{array}\right\}$$

g) Este otro consumidor posee la función de utilidad:

$$U(x,y,z) = 60 \cdot x^{1/2} \cdot y^{1/3} \cdot z^{1/4},$$

con las siguientes relaciones de sustitución de bienes:

$$(RSB)_2^1 = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{30 \cdot y^{1/3} \cdot z^{1/4} \cdot x^{-1/2}}{20 \cdot x^{1/2} \cdot z^{1/4} \cdot y^{-2/3}} = \frac{3y}{2x} .$$

Operando del mismo modo, obtendríamos los valores de:

$$(RSB)_3^1 = \frac{f'_x}{f'_z} = \frac{2z}{x}, \text{ y de } (RSB)_3^2 = \frac{f'_y}{f'_z} = \frac{4z}{3y} .$$

Por último, de la ecuación de balance y de la razón de precios y utilidades marginales, se obtendría que: $y^0 = 390 = 6x + 4y + 5z$, pero también:

$$\begin{cases} \dfrac{f'_x}{f'_y} = \dfrac{3y}{2x} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = y; \\ \dfrac{f'_x}{f'_z} = \dfrac{2z}{x} = \dfrac{p_1}{p_3} = \dfrac{6}{5} \Rightarrow 3x = 5z; \end{cases}$$

con lo que: 390 = 6x + 4x + 3x = 13x; de donde el punto de equilibrio de este segundo consumidor vendrá dado por:

$$x = 30 \; ; \quad y = 30 \; ; \quad z = 18 \; ;$$

y su función de utilidad valdrá:

$$U(x,y,z) = 60 \cdot 30^{1/2} \cdot 30^{1/3} \cdot 18^{1/4} \approx 2.103.$$

Ejercicio 8

Un individuo consume 2 bienes en cantidades *x* e *y* según la siguiente función de utilidad: $v(x,y) = \ln\left(\dfrac{u(x,y)}{x}\right)$, viniendo u(x,y) dada por la EDP:

$$\begin{cases} u_x^2 + y^2 u_y - 5yu = \iiint_A x^2 y z^3 \, dxdydz \\ u(x,1) = x^2, \forall x > 0 \end{cases},$$

donde el dominio de integración A es el sólido limitado por el plano: y = 0 y las superficies: $y^2 = x - x^2$, $z^2 = 4x$. Los precios de ambos bienes son: p = 10 u.m. y q = 5 u.m., respectivamente, y el ingreso bruto o renta personal del individuo es de 500 u.m., estando sujeto a una fiscalidad por impuestos directos del 30%. Supongamos que consumir una unidad del primer bien comporta 0'1 horas, mientras que una unidad del segundo bien implica 0'2 horas. Si el individuo dispone en total de 8 horas, como máximo, para consumir ambos bienes, ¿cuáles son sus niveles de consumo óptimos?

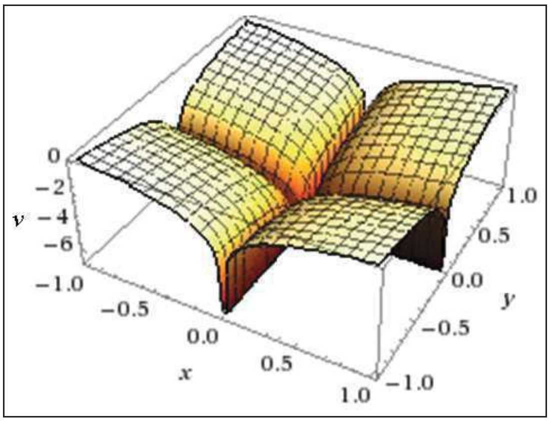
(adaptado de Sánchez, M., Madrid, 2014, p. 105)

Solución:

La EDP planteada ya ha sido resuelta en el ejercicio 4 de este mismo capítulo de nuestro libro, ofreciendo como solución: $u(x,y) = x^2 \cdot y$, con lo que, de acuerdo con el enunciado del problema se tiene la siguiente función de utilidad:

$$v(x,y) = \ln\left(\frac{u(x,y)}{x}\right) = \ln u - \ln x = 2\ln x + \ln y - \ln x = \ln x + \ln y = \ln(x \cdot y),$$

con la siguiente representación gráfica:



La renta disponible del individuo será: $y^0 = 500 \cdot 0'70 = 350$ u.m., y el problema se reduce, entonces, a resolver:

MAX [v(x,y)] = ln x + ln y , sujeta a las restricciones: $\begin{cases} 10x + 5y \leq 350 \\ 0'1x + 0'2y \leq 8 \end{cases}$,

que resolveremos por aplicación de la técnica KKT[8] (Karush-Kuhn-Tucker), y la correspondiente función lagrangiana es:

$$L(x,y) = \ln x + \ln y + \lambda_1(10x + 5y - 350) + \lambda_2(0'1x + 0'2y - 8) ,$$

con lo que la solución definitiva, después de operar adecuadamente, se obtiene en el punto: (x,y) = (20,30) en que se halla el máximo global estricto, y el valor de la función de utilidad en dicho punto será:

$$v(20,30) = \ln 20 + \ln 30 = 6'397 \cong 6'4.$$

[8] Las condiciones necesarias para la resolución de problemas de programación matemática con restricciones de desigualdad fueron publicadas, por primera vez, en la tesis de master de W. Karush, aunque fueron renombradas tras un artículo publicado en 1951 en una conferencia de los matemáticos americanos Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker. De hecho, se trata de una generalización del método de los multiplicadores u operadores de Lagrange empleado en el caso de ecuaciones condicionantes de igualdad. Los programas con restricciones de desigualdad tienen una historia bastante reciente. Las características y métodos de su resolución, se empiezan a dar a conocer en los años cincuenta del pasado siglo, mientras que los programas con restricciones de igualdad o sin restricciones conforman la optimización clásica, y han sido utilizados profusamente desde el siglo XVIII. Este tipo de programas representan, con más fidelidad, las circunstancias en las que se desenvuelve la actividad económica, ya que normalmente se dispone de cantidades limitadas de recursos -más de una vez habremos leído que la Economía es la ciencia de la escasez- pero sin la obligación de emplearlas en su totalidad, si ello no resulta estrictamente necesario.

CAPÍTULO 4

FUNCIONES DE PRODUCCIÓN

1. INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

En teoría microeconómica, la *función de producción* es la relación matemática existente entre los factores o insumos utilizados en un proceso productivo (*inputs*), y el producto obtenido (*outputs*), dada una cierta tecnología. Una forma de representar simplificadamente la tecnología disponible para llevar a cabo la producción de un bien o servicio es a través de la función de producción, que asocia a cada conjunto de insumos (servicios de los factores por período) el máximo nivel de producción por período alcanzable de acuerdo a las posibilidades técnicas.

A su vez, la producción se puede definir también como cualquier utilización de recursos que permita transformar uno o más bienes o servicios en otro(s) diferente(s). Estos pueden ser diferentes en términos de ciertas características físicas de los mismos, de su ubicación geográfica o de su ubicación temporal. Por ejemplo, es producción trasformar leche en queso (distintas características físicas), pero también es producción transportar queso desde un país a otro (distinta ubicación geográfica), y también es producción, en el sentido amplio, mantener ese queso desde el mes de enero hasta el mes de marzo (distinta ubicación temporal).

La producción es una variable *flujo*, que está medida en relación a un período de tiempo determinado. Así, se debe referir a la producción haciendo referencia a una medida del periodo; por ejemplo, la producción de kilos de queso por año. También, al analizar la función de producción del lado de los insumos, se habla en términos de *flujo*. Por ejemplo, si nos referimos al trabajo, se hace referencia a cierta cantidad de horas de trabajo (no a la cantidad de hombres o mujeres), el capital se puede medir en horas de servicio de la maquinaria (no en cantidad de máquinas) y la tierra puede medirse en hectáreas por año (no en superficie de terreno).

Usualmente, se agrupa a los insumos en capital y trabajo. Estos son sólo categorías creadas para simplificar en análisis; pero es posible agrupar a un gran número de insumos con características diferentes, por ejemplo, el trabajo puede agrupar a mano de obra calificada junto con mano de obra no calificada. Sin embargo, para ciertos análisis puede ser conveniente disgregar entre otras categorías de insumos. Y así, el trabajo se puede dividir en mano de obra calificada, no calificada, personal contable, personal administrativo, etc.; y el capital se puede dividir en distintos tipos de maquinaria, construcciones, mobiliario, capital humano, activos intangibles, ...

Es conveniente resaltar que la función de producción incorpora la eficiencia técnica desde el momento que nos referimos a la máxima cantidad de *output* (producto por unidad de tiempo) que se puede obtener a partir de un determinado conjunto de factores cuyo empleo se utiliza en una unidad de tiempo.

La función de producción permite saber cómo variará la producción si se alteran algunos de los factores de producción o todos. En la realidad, existen numerosos procesos productivos en los que no resulta posible alterar rápidamente las cantidades de algunos factores. El tiempo preciso para modificar las cantidades utilizadas de todos los *inputs*, en un determinado proceso productivo, es el que marca los límites existentes entre el *corto* y el *largo plazo*. Y así, este último es el período mínimo de tiempo necesario para alterar todos y cada uno de los factores que intervienen en la producción, con lo que, a largo plazo, todos los factores son variables. A *sensu contrario*, el corto plazo es un período de tiempo durante el cual no puede alterarse la cantidad de alguno de los factores intervinientes, con lo que existen factores fijos o constantes (Garín, 2011).

2. EJERCICIOS

Ejercicio 1

La función de producción de un establecimiento comercial, expresada en miles de ud., viene dada por:

$$\begin{cases} u_x + u \cdot u_y = \dfrac{4}{5}\displaystyle\int_{-2}^{1} |x+1| \cdot dx \ , \ \forall (x, y) \in \Re^2 \\ u(0, y) = y, \quad \forall y \in \Re \end{cases}$$

Se desea calcular su cifra de negocios si los “inputs” empleados son: x = 5, y = 31, y el precio de venta al público del producto final es de 50 € /ud., así como determinar la relación de transformación de productos (relación marginal de transformación) y el valor de las productividades marginales y medias con respecto a ambos *inputs* o factores de producción.

(adaptado de Leonori, T., UGR, p. 14).

Solución:

En primer lugar, hay que resolver la configuración analítica del segundo miembro de la EDP planteada, para lo que debe tenerse en cuenta que: $|x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ si } (x+1) > 0 \Rightarrow (x > -1) \\ -x-1, \text{ si } (x+1) < 0 \Rightarrow (x < -1) \end{cases}$. Por tanto, la integral del 2º miembro, de acuerdo con las propiedades de la integral definida (concretamente la de aditividad del intervalo de integración), se puede separar como suma de dos integrales, a saber:

$$\int_{-2}^{1} |x+1| \cdot dx = \int_{-2}^{-1} -(x+1) \cdot dx + \int_{-1}^{1} (1+x) dx = -\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} = \frac{5}{2},$$

y la EDP quedará configurada así: $u_x + u \cdot u_y = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} = 2$, que es una ecuación lineal de primer orden, inhomogénea y de coeficientes constantes. Observemos que el ejercicio propuesto constituye un problema de Cauchy de la forma:

$$\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \\ u(x_0(s), y_0(s)) = z_0(s), \qquad \forall s \in \Re, \end{cases}$$

con coeficientes $a(x, y, u) = 1$, $b(x, y, u) = u$, $c(x, y, u) = 2$ y con la curva inicial: $\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s)), z_0(s))$ dada por $x_0(s) = 0$, $y_0(s) = s$ y $z_0(s) = s$. Observemos también que este problema es *no característico* ya que:

$$\det\begin{pmatrix} a(x_0(s), y_0(s)) & x'_0(s) \\ b(x_0(s), y_0(s)) & y'_0(s) \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Además la curva $s \to (x_0(s), y_0(s)) = (0, s) = \Gamma(s)$ es inyectiva. Por tanto existe una superficie integral (o solución local) que contiene a la curva inicial $\Gamma(s)$. Para calcular dicha solución, consideramos el sistema característico:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = 1 \\ \dot{y}(s) = z(s) \\ \dot{z}(s) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0(\sigma) = 0 \\ y_0(\sigma) = \sigma \\ z_0(\sigma) = \sigma \end{cases}$$

Está claro que las primeras y las terceras ecuaciones nos dan:

$$\begin{cases} x(s, \sigma) = s \\ z(s, \sigma) = 2s + \sigma, \end{cases}$$

así que tenemos: $y(s,\sigma)-\sigma=\int_0^s(2\tau+\sigma)\cdot d\tau=\left[\tau^2+\sigma\tau\right]_0^s=s^2+s\sigma=s(s+\sigma)$.

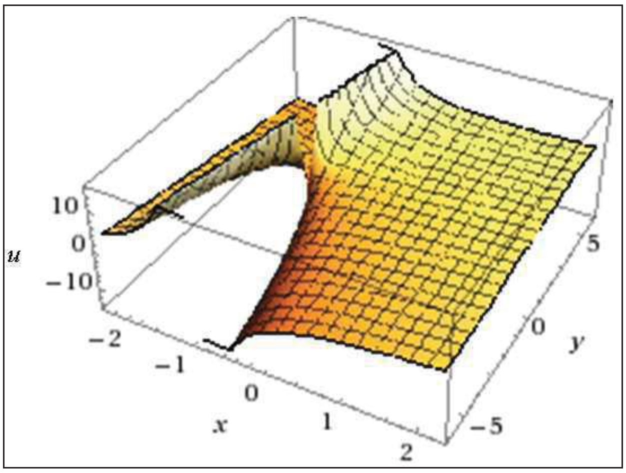
Podemos obtener una expresión para *s* y *t* en función de *x* e *y* del siguiente modo:

$$\begin{cases} x = s \\ \sigma = \dfrac{y-x^2}{1+x} \end{cases}, \text{ para } x \neq -1.$$

Consecuentemente, se tendrá la solución particular:

$$u(x,y)=\frac{y-x^2}{1+x}+2x \text{ , para } x \neq -1.$$

Es fácil comprobar que ésta es efectivamente una solución del problema planteado, y su representación gráfica viene dada por:



Pues bien, con los datos del problema, se tendrá un "output" total de:

$u=\dfrac{31-25}{1+5}+10$ = 11, y la cifra de negocios pedida es:

$$I = u \times p = 11.000 \text{ ud} \times 50 \text{ € /ud} = 550.000 \text{ €} .$$

Por último, la relación de transformación de productos vendrá dada por: $h(x,y)=\dfrac{y-x^2}{1+x}+2x$, y entonces, en (5,31):

$$\begin{cases} h_1=\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{x^2+2x-y+2}{(x+1)^2} \\ h_2=\dfrac{\partial h}{\partial y}=\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\frac{h_1}{h_2} = -\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2x-y+2}{x+1} = \frac{25+10-31+2}{6} = 1$.

Por último, las productividades pedidas pueden resumirse en el siguiente cuadro:

$$h_1 = \text{PMa de } x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+2x-y+2}{(x+1)^2} = \frac{1}{6}$$

$$h_2 = \text{PMa de } y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$$

$$\text{PMe de } x = \frac{u}{x} = \frac{y-x^2}{x(1+x)} + 2 = \frac{11}{5}$$

$$\text{PMe de } y = \frac{u}{y} = \frac{y-x^2}{y(1+x)} + \frac{2x}{y} = \frac{11}{31}$$

NOTA: El concepto de *relación marginal de transformación (RMT) o de substitución técnica*, o también *relación técnica de substitución* (RTS) similar al de la relación marginal de substitución en el estudio del consumo y la utilidad (ver cap. 3 anterior), hállase directamente relacionado con el de *isocuanta* y mide la variación necesaria de un factor para que, al aumentar o disminuir infinitesimalmente la cantidad aplicada de otro, el volumen de producto permanezca invariable, es decir, para mantenerse en la misma isocuanta.

Ejercicio 2

La función de producción de una empresa, en que los “inputs” empleados en el proceso productivo son: x = 10 e y = 20, viene dada por (en miles de ud.):

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x (y^3+y^2)dy}{2x^2-x^4}, \ \forall x,y \in \Re^2 \\ 2u(0,y) = 35\int_0^{\pi/2} \sin^4 y\cdot\cos^3 y\cdot dy + 2y^2, \ \forall y \in \Re \\ u_x(0,y) = -\sin y, \ \forall y \in \Re \end{cases}$$

Se desea calcular su cifra de negocios si el precio del producto final es de 100 € /ud., así como determinar la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

Solución:

En primer lugar, deber resolverse el 2º miembro de la primera condición lateral. Para resolver la integral definida que allí se encuentra, se propone el cambio de variable: sin y = t , de donde: dt = cos y · dy. Los nuevos extremos serán:

$$\begin{cases} \text{si } y = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \text{si } y = \pi/2 \Rightarrow t = 1 \end{cases} \text{ y entonces:}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 y \cdot \cos^3 y \cdot dy = \int_0^1 (t^4 - t^6)dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35},$$

y la primera condición de contorno quedará establecida así:

$$u(0,y) = 1 + y^2 .$$

En segundo lugar, habrá que resolver el 2º miembro de la EDP planteada, por aplicación de la regla de l'Hôpital. En efecto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (y^3 + y^2)dy}{2x^2 - x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2}{4x(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{4(1-x^2)} = \frac{0\cdot 1}{4\cdot 1} = 0,$$

y la EDP será: $u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0$.

Se trata de una ecuación lineal, homogénea, de segundo orden y coeficientes constantes. Como a = 1, b = 0 y c = -1, con el discriminante: $(b^2 - 4ac) = 4 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico.

Por lo que se refiere a esta EDP, se trata de un problema de Cauchy. Aplicando la fórmula de D'Alembert[1] la solución del problema está dada por:

[1] Recordamos la fórmula de D'Alembert. Dado el problema (homogéneo) siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & \forall x \in \Re, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & \forall x \in \Re \\ u_t(x,0) = h(x), & \forall x \in \Re \end{cases},$$

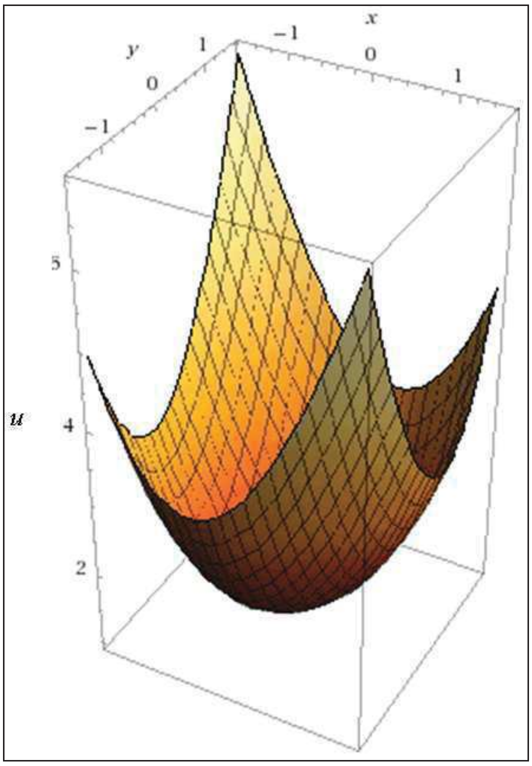
con $g \in C^2(\Re)$ y $h \in C^1(\Re)$, $c \neq 0$, la única solución $u \in C^2(\Re \times (0, \infty))$ está dada por la expresión:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}g(x-ct) + \frac{1}{2}g(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)ds.$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[1+(y-x)^2\right]+\frac{1}{2}\left[1+(y+x)\right]^2-\frac{1}{2}\int_{y-x}^{y+x}\sin(s)ds=1+x^2+y^2+\frac{1}{2}\left[\cos(s)\right]_{y-x}^{y+x}=$$

$$=1+x^2+y^2+\frac{1}{2}\left[\cos(y+x)-\cos(y-x)\right]=1+x^2+y^2-\sin x\cdot\sin y,$$

con la siguiente representación gráfica:



Pues bien, con los datos del problema se tendrá un "output" total de: u = 1 + 400 + 100 – sin 10 · sin 20 = 501 + 0'5 = 501'5, y la cifra de negocios pedida es:

I = u × p = 501.500 ud. × 100 € /ud. = 50.150.000 € .

Por último, la relación de transformación de productos vendrá dada por: $h(x,y)=1+x^2+y^2-\sin x\cdot\sin y;$ entonces, en (10,20):

$$\begin{cases} h_1=\dfrac{\partial h}{\partial x}=2x-\cos x\sin y \\ h_2=\dfrac{\partial h}{\partial y}=2y-\sin x\cos y \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2}=-\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-\cos x\sin y}{2y-\sin x\cos y}=$ 0'4936.

Ejercicio 3

Hallar: a) La función de producción de una empresa *u* que viene dada por la EDP siguiente:

$$\begin{cases} 2u_x + 3u_y = 2u \\ u(0,y) = 2y \end{cases}$$

si los "inputs" *x* e *y* son de precios respectivos, en un mercado de competencia perfecta, r_1 = 0'4 u.m. y r_2 = 0'3 u.m., y b) Las ecuaciones de costes variables y totales y de la trayectoria de expansión de la empresa, con unos costes fijos de 80 u.m.

(adaptado de Franco y Perán, UNED, p. 57).

Solución:

a) Supongamos que la función *u* buscada es de clase uno y que existe, y es también de clase uno su transformada de Laplace respecto de la variable *x*. *A posteriori* se podrán comprobar los expresados asertos. Se aplica la transformada de Laplace respecto de la variable *x* a la EDP dada, que es una ecuación lineal, homogénea, de primer grado y coeficientes constantes, teniendo en cuenta la propiedad de linealidad del operador L, con lo que:

$$2(sL[u](s,y) - u(0,y)) + 3L\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right](s,y) = 2L[u](s,y).$$

Derivando bajo el signo integral, se obtiene que:

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right](s,y) = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dx = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty e^{-sx}u(x,y)\cdot dx = \frac{\partial}{\partial y}L[u](s,y),$$

mientras que u(0,y) = 2y. En su consecuencia, definiendo para cada valor de *s* la función $v_s(y)$ = L[u](s,y), se obtiene la siguiente EDO de primer orden inhomogénea:

$$3v_s' + 2(s-1)v_s = 4y.$$

La ecuación característica o modular de la homogénea ofrece:

3r + 2(s-1) = 0, de donde: $r = \frac{2(1-s)}{3}$, y entonces la solución de la homogénea será: $v_s^* = M(s)\cdot e^{\frac{2y(1-s)}{3}}$. Para buscar una solución particular de la ecuación completa por el método de selección, consideraremos: $v_p(y)$ = Ay + B, y substituyendo: 3A + 2(s-1)(Ay + B) = 4y, de donde se deduce que:

$A = \frac{2}{s-1}; B = -\frac{3}{(s-1)^2}$. Con ello: L[u](s,y) = $v_p(y)$ = $\frac{2y}{s-1} - \frac{3}{(s-1)^2}$.

Por lo tanto, L[e^x](s) = $\frac{1}{s-1}$, y L[$x \cdot e^x$](s) = $\frac{1}{(s-1)^2}$, y se tiene que:

$$u(x,y) = 2ye^x - 3xe^x = e^x(2y - 3x).$$

Fácilmente se comprueba el resultado: u(0,y) = 2y·1 – 0 = 2y,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2ye^x - 3e^x - 3xe^x; \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2e^x. \text{ Entonces:}$$

$$2\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 3\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 4ye^x - 6e^x - 6xe^x + 6e^x = 2e^x(2y - 3x) = 2u(x,y).$$

Si en lugar de la solución particular anterior se hubiera seleccionado otra, debe tenerse en cuenta que la solución general de la EDO que ahora nos ocupa, o sea: $3v_s'(y) + 2(s-1)v_s(y) = 4y$, es:

$$v_s(y) = v_s^* + v_p(y) = M(s)\cdot e^{\frac{2y(1-s)}{3}} + \frac{2y}{s-1} - \frac{3}{(s-1)^2}.$$

Si suponemos que la función M posee una transformada inversa de Laplace *f*, esto es, L[f](s) = M(s), entonces sucederá que:

$$u_0(x,y) = L^{-1}\left[M(s)\cdot e^{\frac{2y(1-s)}{3}}\right](x,y) = e^{\frac{2y}{3}} \cdot L^{-1}\left[M(s)e^{-\frac{2sy}{3}}\right](x,y) = e^{\frac{2y}{3}} f(x - \frac{2y}{3})\Psi(x - \frac{2y}{3}),$$

en donde ψ es la función de salto unidad de Heaviside[2]: $\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

Para que se verificase la condición inicial del problema, sería necesario que se cumpliese: $u_0(x,y) = 0$ para todo *y*. Pero esto implicaría que $u_0(x,y) = 0$ para cualesquiera *x,y*. Por lo tanto, se confirma que la única solución del problema es: $u(x,y) = 2ye^x - 3xe^x = e^x(2y - 3x)$.

[2] La *función escalón de Heaviside*, también llamada *función escalón unitario*, debe su nombre al matemático inglés Oliver Heaviside. Es una función discontinua cuyo valor es 0 para cualquier argumento negativo, y 1 para cualquier argumento positivo. Existen varias maneras diferentes de definir la función de Heaviside, no todas ellas equivalentes. Las diferentes definiciones no equivalentes difieren sólo en el valor *H*(0), que es convencional. La mayoría de autores lo definen como *H*(0) = 1, otros *H*(0) = 0. Algunos que lo definen como *H*(0) = 1/2, ya que maximiza la simetría de la función y permite una representación de la misma a través de la función signo. La función de Heaviside puede utilizarse para expresar funciones continuas a trozos de una manera compacta.

b) Dichas ecuaciones son las siguientes:

- La ecuación de costes variables vendrá dada por:

$$CV = r_1 \cdot x + r_2 \cdot y = 0'4x + 0'3y.$$

- La ecuación de costes totales será:

$$CT = CV + CF = 0'4x + 0'3y + 80.$$

- La ecuación de la trayectoria de expansión de la empresa, será:

$$\frac{f_1'}{f_2'} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{0'4}{0'3} = \frac{4}{3}; \quad f_1' = e^x(2y - 3x - 3); \quad f_2' = 2e^x; \quad \text{luego:}$$

$\frac{e^x(2y-3x-3)}{2e^x} = \frac{4}{3}$, o bien: 6y - 9x - 17 = 0, de donde: $y = \frac{9x+17}{6}$.

NOTA: La trayectoria o senda de expansión (en este caso de trata de una recta) une los puntos de equilibrio asociados a cada nivel de gasto, y es una isoclina puesto que se caracteriza, precisamente, por unir diversos puntos de igual pendiente, aquéllos para los que el valor de ésta es: $-r_1/r_2 = -4/3$.

Ejercicio 4

En este ejercicio se presenta un ejemplo en el que el sistema característico no es lineal. A pesar de ello es posible obtener la solución explícita del mismo, si bien es necesario un análisis más sofisticado que el realizado en los ejercicios anteriores. Este problema pone de manifiesto la necesidad de desarrollar nuevos métodos de resolución de ecuaciones cuasilineales que permitan evitar el tener que resolver el sistema característico. Uno de estos métodos consistirá en la búsqueda de integrales primeras de la ecuación y se desarrollará en otra sección.

Se pide:

a) Calcular el "output" total de una factoría cuya función de producción viene dada por la expresión:

$(xy - u)u_x + (y^2 - 1)\, u_y = yu - x$, con $u^2(x,0) = (x+1)\cdot z(x)$, $z(x) = -w(x)$,

siendo w(x) tal que: $\int_0^x e^{x-t} w(t)dt = x$, si los "inputs" son: x = 500 e y = 700.

b) Determinar la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación), así como las diferentes productividades.

c) Comparar esta producción con la de otra factoría de la misma empresa, para idénticas cantidades de los "inputs", si la nueva función de producción es: $u = (x+5)^{\frac{2}{5}} \times (y+10)^{\frac{1}{2}}$.

d) Realizar un estudio comparativo de ambas factorías, si los precios de los "inputs" *x* e *y*, en mercados de competencia perfecta, son respectivamente r_1 = 10 u.m. y r_2 = 5 u.m.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 8).

Solución:

a) La función z(x) que aparece en la condición de contorno viene expresada como una ecuación integral homogénea de 2ª especie, con el parámetro λ = 1, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación planteada, se obtiene que:

$\frac{1}{p-1}\phi(p) = \frac{1}{p^2}$, de donde se deduce que la función generatriz Laplace es:

$$\phi(p) = \frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}; w(x) = L^{-1}[\phi(p)] = 1 - x\ .$$

Así pues, la función w(x) = 1 - x es la solución de la ecuación integral planteada, con lo que también: z(x) = x – 1, y entonces, la condición de contorno quedará establecida así:

$$u^2(x,0) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1.$$

La comprobación de este resultado puede realizarse sin más que substituirlo en la ecuación integral dada, con lo que tomando: w(x) = 1-x, se tiene:

$$\int_0^x e^{x-t}\cdot(1-t)\cdot dt = \left[t\cdot e^{x-t}\right]_0^x = x\ ,\text{ y entonces: } z(x) = x - 1,\text{ c.s.q.d.}$$

Procedamos, seguidamente, a resolver la EDP planteada. En este caso, dado que si x > 0, se tiene que:

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s),\alpha_2(s),\beta(s)) \equiv (\cosh s,\ 0,\ \sinh s)\ ,\ \forall s \in \Re.$$

es una parametrización de la hipérbola $\begin{cases} z^2 = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

La condición de transversalidad se verifica siempre que:

$$\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \sinh s \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \neq 0 .$$

El sistema característico viene dado por el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = xy - z, & x(0) = \cosh s, \\ y' = y^2 - 1, & y(0) = 0, \\ z' = yz - x, & z(0) = \sinh s. \end{cases}$$

De la segunda ecuación deducimos que:

$$t = \int_0^t 1 ds = \int_0^t \frac{y'(s)}{y^2(s) - 1} ds = \int_0^{y(t)} \frac{dr}{r^2 - 1} = \left[-\tan h^{-1}(r)\right]_0^{y(t)} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 - y(t)}{1 + y(t)}\right).$$

Por lo tanto, $y(t) = \dfrac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} = -\tanh t$, puesto que, efectivamente:

$-\tanh t = \dfrac{e^{-t} - e^{t}}{e^{t} + e^{-t}} = \dfrac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}$, ya que: $(e^{-t} - e^{t})(1 + e^{2t}) = (e^{t} + e^{-t})(1 - e^{2t})$.

Multiplicando las dos restantes ecuaciones por el factor integrante:

$$e^{-\int_0^t y(s) ds} = \cosh t ,$$

y denotando por $\overline{x}(t) = x(t)\cosh t$ y $\overline{z}(t) = z(t)\cosh t$, el sistema estudiado se transforma en:

$$\begin{cases} \overline{x}'(t) = -\overline{z}(t), & \overline{x}(0) = \cosh s \\ \overline{z}'(t) = -\overline{x}(t), & \overline{z}(0) = \sinh s \end{cases},$$

con lo cual $\overline{x}'' = -\overline{z}' = \overline{x}$. Por consiguiente $\overline{x}(t) = c_1(s)e^{t} + c_2(s)e^{-t}$, y:

$\overline{z}(t) = -\overline{x}'(t) = -c_1(s)e^{t} + c_2(s)e^{-t}$. Por lo tanto:

$$\begin{cases} \cosh s = \overline{x}(0) = c_1(s) + c_2(s), \\ \sinh s = \overline{z}(0) = -c_1(s) + c_2(s). \end{cases}$$

De este modo, probamos que la solución del problema considerado viene dada en forma paramétrica por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} x(t,s) = \dfrac{\cosh(t-s)}{\cosh t}, \\ y(t,s) = -\tanh t, \\ z(t,s) = -\dfrac{\sinh(t-s)}{\cosh t}. \end{cases}$$

Si x < 0, la condición inicial viene parametrizada por:

$$\gamma(s) = (-\cosh s,\ 0,\ \sinh s).$$

Repitiendo los mismos argumentos que en el caso anterior, llegamos a que la solución en forma paramétrica se escribe del siguiente modo:

$$\begin{cases} x(t,s) = -\dfrac{\cosh(t+s)}{\cosh t}, \\ y(t,s) = -\tanh t, \\ z(t,s) = \dfrac{\sinh(t+s)}{\cosh t}. \end{cases}$$

En ambos casos podemos obtener una expresión explícita de la solución. Realizaremos los cálculos para x > 0; como veremos, si *x* es negativo los razonamientos son análogos.

$$-z^2(t,s) + x^2(t,s) = \frac{\cosh^2(t-s) - \sinh^2(t-s)}{\cosh^2 t} = \frac{1}{\cosh^2 t} =$$

$$= \frac{y^2(t,s)}{\sinh^2 t} = \frac{y^2(t,s)}{-1+\cosh^2 t} = \frac{y^2(t,s)}{-1+\dfrac{1}{x^2(t,s)-z^2(t,s)}}.$$

Para ello hemos tenido en cuenta que siendo:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \text{y} \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \text{ con lo que:}$$

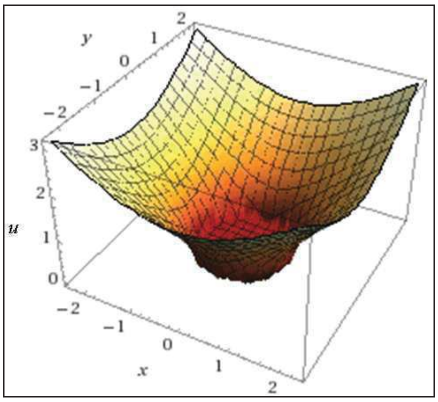
$$\sinh^2 t = \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4}; \quad \cosh^2 t = \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4}; \text{ y entonces:}$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{4}{4} = 1, \quad \text{c.s.q.d.}$$

Con lo cual, la solución viene dada, en forma implícita, por la expresión del hiperboloide parabólico de una hoja, a saber:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1; \quad \text{o sea: } z = u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},$$

cuya representación gráfica viene dada del siguiente modo, teniendo en cuenta que, para que exista un significado económico, al tratarse de una función de producción, necesariamente debe cumplirse que: $u \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, o sea, que la función en cuestión tiene como dominio de definición el octante positivo de la esfera:



, obteniéndose un mínimo global para: $x^2 + y^2 = 1$, con $u = 0$.

Para la conceptualización de esta cuádrica o superficie de 2º orden debe tenerse en cuenta que su matriz (A) es:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ y entonces: } |A| = 1 \neq 0 \text{ ; } A'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$, con $|A| > 0$ y $a_{11} \cdot A_{44} = -1 < 0$, luego se trata de un hiperboloide de una hoja. Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 0 \\ 0 & 0 & -1-s \end{vmatrix} = 0 \text{ ,}$$

de donde: $S_1 = 1 = S_2$, $S_3 = -1$. Se trata, pues, de una cuádrica de revolución, con la siguiente ecuación reducida:

$$S_1x^2 + S_2y^2 + S_3z^2 + I_4/I_3 = 0 \text{ , siendo:}$$

I_4 (invariante bicuadrático) = $|A| = 1$, y también:

I_3 (invariante cúbico) = $A_{44} = -1$.

Con ello resultará, como era esperable, que:

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0.$$

Con los datos del problema, en fin, se tendrá un "output" total de esta factoría de:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = \sqrt{500^2 + 700^2 - 1} \cong 860 .$$

b) La relación de transformación de productos vendrá dada por: $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, entonces, en (500,700):

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2} = -\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{500}{700} = 0'714$.

Por último, veamos que las productividades pedidas pueden resumirse en el siguiente cuadro:

$$\boxed{\begin{array}{c} h_1 = \text{PMa de } x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} = 0'58 \\ h_2 = \text{PMa de } y = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} = 0'81 \\ \text{PMe de } x = \dfrac{u}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x} = 1'72 \\ \text{PMe de } y = \dfrac{u}{y} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{y} = 1'23 \end{array}}$$

c) En este caso, el "output" total vendrá dado por:

$$u = (500 + 5)^{\frac{2}{5}} \cdot (700 + 10)^{\frac{1}{2}} \cong 321.$$

d) Lo dividiremos en cuatro partes, a saber:

d-1) Aplicando la ley de igualdad de las productividades marginales ponderadas, se tendrá:

Factoría 2: $\frac{f'_x}{f'_y}=\frac{\frac{2}{5}\times(x+5)^{-\frac{3}{5}}\times(y+10)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\times(x+5)^{\frac{2}{5}}\times(y+10)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{4}{5}\times\frac{y+10}{x+5}$, y entonces:

$$\frac{4}{5}\times\frac{y+10}{x+5}=\frac{10}{5}=2;\quad \frac{y+10}{x+5}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2},\qquad y=\frac{5(x+1)}{2};$$

que es la ecuación de la trayectoria de expansión de esta factoría, o sea, la combinación óptima de "inputs" *x* e *y* que se deben aplicar en el proceso de producción.

Factoría 1: $\frac{f'_x}{f'_y}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}}{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}}=\frac{x}{y}$, y entonces: $\frac{x}{y}=2$, luego x = 2y es la

trayectoria de expansión de esta factoría.

d-2) Se trata, v. gr., de calcular las cantidades de "inputs" *x* e *y* que deberían aplicarse para obtener la cantidad de "output" máxima, cuando el empresario debe limitarse a unos gastos totales de 10.025 u. m. en cada factoría.

Factoría 2: 2x + y = 2.005; y = 2.005 - 2x;

$\frac{2.015-2x}{x+5}=\frac{5}{2}\Rightarrow 4.030-4x=5x+25$; de donde:

$x=\frac{4.005}{9}=445$; y = 2.005 – 890 = 1.115.

Aplicando, ahora, estos valores en la correspondiente función de producción, se tiene que: $u_2=450^{\frac{2}{5}}\times 1.125^{\frac{1}{2}}=11'51\times 33'54\cong 386$.

Factoría 1: En este caso, el coste total, no habiendo gastos fijos, es:

c = 10x + 5y = 10.025, o sea, al igual que en el caso anterior, junto con la correspondiente trayectoria de expansión, se tendrá que:

y = 2.005 – 2x; x = 2(2.005 – 2x) = 4.010 – 4x;

$$x=\frac{4.010}{5}=802;\qquad y=\frac{802}{2}=401.$$

Aplicando, ahora, estos valores en la correspondiente función de producción, se tiene que: $u_1 = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = \sqrt{802^2 + 401^2 - 1} \cong 897$.

La determinación de la línea isocoste[3] que pasa por la intersección de la función de producción con la trayectoria de expansión de la empresa exige la deducción de la ecuación de la tangente a la curva:

$y = \sqrt{804.005 - x^2}$, en el punto (802,401), o sea, de expresión:

$y – y(x_0) = y'(x_0)\cdot(x – x_0)$, con $x_0 = 802$, con lo que:

$y'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{804.005 - x^2}}$; $y'(802) = -2$, y entonces resulta la recta isocoste:

$$y – 401 = -2(x – 802) \Rightarrow y = 2.005 – 2x .$$

Diferentes valores de los "inputs" *x* e *y* nos determinan otras tantas isocuantas de producción con la misma trayectoria de expansión.

Así, v. gr., para x = 1.200, y = 600, se tendrá que:

$$u_1 = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = \sqrt{1.200^2 + 600^2 - 1} \cong 1.342,$$

y la línea isocoste correspondiente será:

$y = \sqrt{1.800.000 - x^2}$, en el punto (1.200,600), o sea, de expresión:

$y – y(x_0) = y'(x_0)\cdot(x – x_0)$, con $x_0 = 1.200$, con lo que:

$y'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1.800.000 - x^2}}$; $y'(1.200) = -2$, y entonces resulta la recta

isocoste siguiente: $y – 600 = -2(x – 1.200) \Rightarrow y = 3.000 – 2x$, con la siguiente representación gráfica:

[3] El lugar geométrico de las combinaciones de *inputs* del proceso productivo que pueden comprarse por un coste total determinado se denomina "línea isocoste". Las pendientes de las líneas isocostes son iguales a la razón de los precios de los *inputs* con signo negativo. Cuanto mayor es el gasto total que corresponde a una línea isocoste, mayores son los segmentos limitados por las intersecciones sobre los ejes coordenados y, por tanto, más alejada se halla dicha línea del origen.

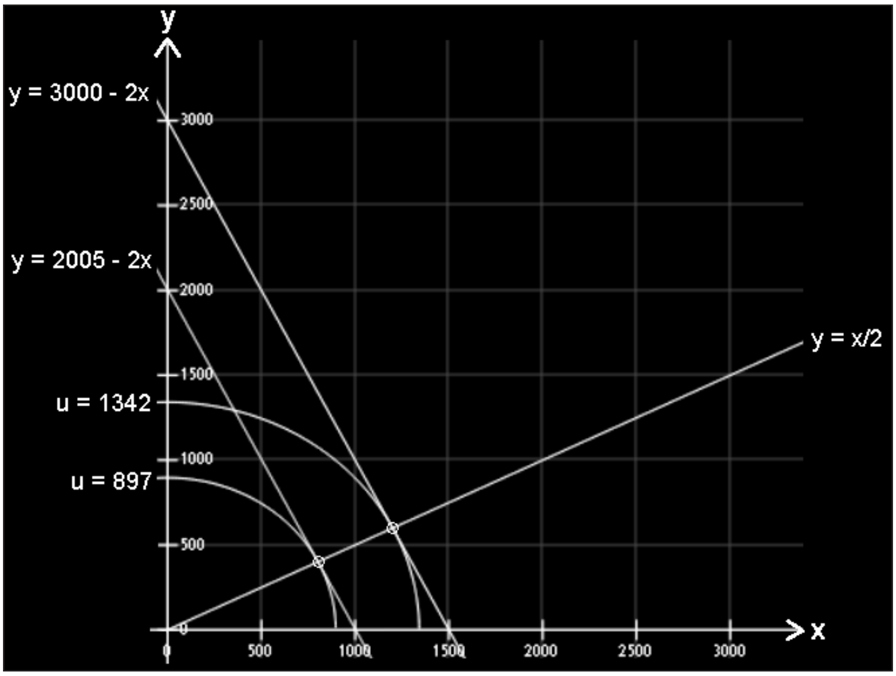


Fig. 1. Factoría 1: isocuantas, isocostes y trayectoria de expansión.

d-3) Si se pretendiera obtener la combinación de "inputs" que hace mínimo el coste del proceso productivo, cuando se pretende alcanzar en cada factoría una cantidad de "output" de u = 1.500 ud., las ecuaciones que nos darían la solución del problema serían la función de producción y la trayectoria de expansión correspondiente. Así:

Factoría 2: $\left.\begin{array}{r} 1.500 = (x+5)^{\frac{2}{5}} \times (y+10)^{\frac{1}{2}} \\ 2y + 20 = 5x + 25 \end{array}\right\}$ y entonces:

$$1.500 = (x+5)^{\frac{2}{5}} \times \left(\frac{5x+25}{2}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{de donde:} \quad x \cong 2.030, \quad y = \frac{5x+5}{2} \cong 5.077\,.$$

En este caso, nos hallaríamos en el punto (2.030,5.077), con una trayectoria de expansión: $y = \frac{5x+5}{2}$, y la recta isocoste (tangente a la isocuanta en dicho punto) será de ecuación:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)\cdot(x - x_0)\text{ , con } x_0 = 2.030\text{, con lo que:}$$

$$y(x_0) = y(2.030) = \frac{5 \times 2.030 + 5}{2} \approx 5.077\,;\ y(x) = \frac{2.250.000}{(x+5)^{4/5}} - 10 \ \text{(isocuanta);}$$

$$y'(x) = -\frac{1.800.000}{(x+5)^{9/5}}\ ;\ y'(2.030) \cong -2\text{ , o sea:}$$

$$y - 5.077 = -2(x - 2.030) = -2x + 4.060\text{, de donde resulta:}$$

$$y = 9.137 - 2x \ \text{(recta isocoste)}$$

con la siguiente representación gráfica:

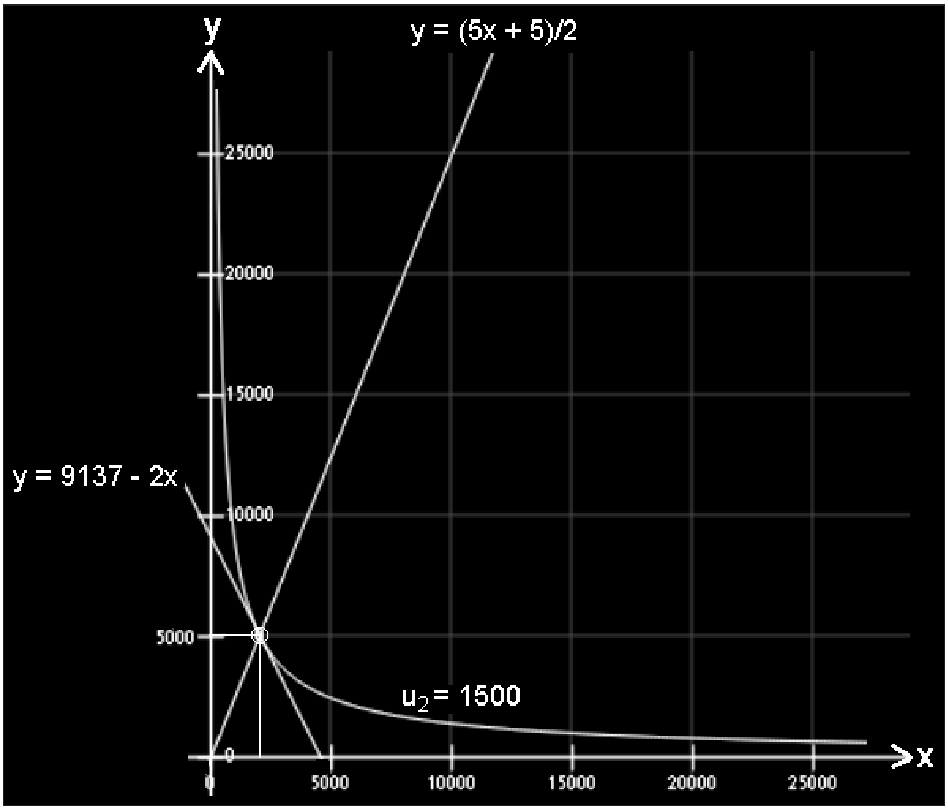


Fig. 2. Factoría 2: isocuanta, isocoste y trayectoria de expansión.

Factoría 1: $\left.\begin{array}{r} 1.500 = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \\ x = 2y \end{array}\right\}$ $1.500 = \sqrt{5y^2 - 1}$; de donde y $\cong$ 671, y también: x = 2 $\times$ 671 = 1.342. En este caso, nos hallaríamos en el punto (1.342,671), con una trayectoria de expansión: $y = \frac{x}{2}$, y la recta isocoste (tangente a la isocuanta en dicho punto, que nos ofrece la óptima combinación de *inputs*) será de ecuación:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)\cdot(x - x_0) \text{ , con } x_0 = 1.342\text{, con lo que:}$$

$$y(x_0) = y(1.342) = \frac{1.342}{2} = 671;\ y(x) = \sqrt{2.250.001 - x^2} \text{ (isocuanta);}$$

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2.250.001 - x^2}} \text{ ; } y'(1.342) \cong -2 \text{ , o sea:}$$

$$y - 671 = -2(x - 1.342) = -2x + 2.684\text{, de donde resulta:}$$

$$y = 3.355 - 2x \text{ (recta isocoste)}$$

con la siguiente representación gráfica:

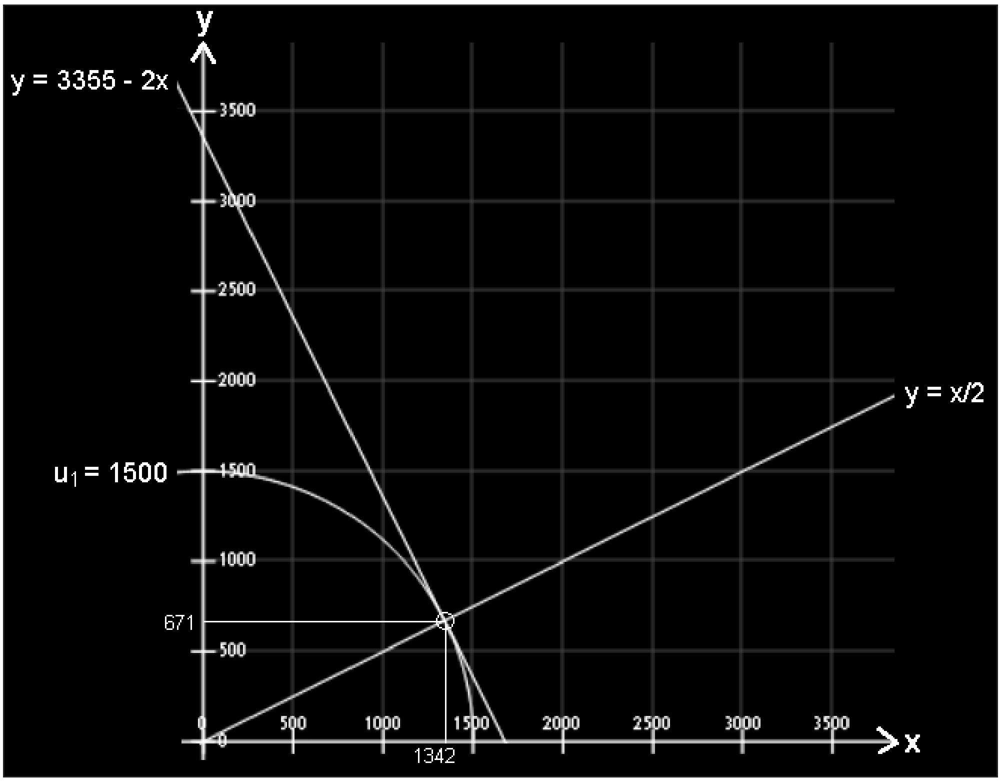


Fig. 3. Factoría 1: isocuanta, isocoste y trayectoria de expansión.

d-4) Dados los precios indicados en el enunciado de los "inputs" y del "output" se desea obtener la situación óptima de producción de cada factoría, es decir, aquella que maximiza el beneficio empresarial de cada una de ellas.

Dicha solución óptima deberá cumplir las condiciones siguientes:

$\left.\begin{array}{l} p \cdot f'_x = r_1 \\ p \cdot f'_y = r_2 \end{array}\right\}$, siendo p = 30 u.m. el precio al que se vende el "output" en un mercado de competencia perfecta, y r_1 = 10 u.m.; r_2 = 5 u.m.

Factoría 2: Se tendrá el siguiente sistema de ecuaciones:

$\left.\begin{array}{r} 12(x+5)^{-\frac{3}{5}} \times (y+10)^{\frac{1}{2}} = 10 \\ 15(x+5)^{\frac{2}{5}} \times (y+10)^{-\frac{1}{2}} = 5 \end{array}\right\}$ de aquí: $180(x+5)^{-\frac{1}{5}} = 50$; de donde resultan:

$$x \cong 600 \text{ e } y \cong 1.502.$$

En este caso, la cantidad de "output" correspondiente, es:

$$u_2 = 605^{\frac{2}{5}} \times 1.512^{\frac{1}{2}} = 12'96 \times 38'88 \cong 504 .$$

Factoría 1: Se tendrá el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{30x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}=10\\ \dfrac{30y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}=5\end{array}\right\}$$ lo que exige que x = 2y, con la siguientes soluciones en el campo complejo: $x=\frac{2i}{\sqrt{31}}\approx 0'359211i$; $y=\frac{i}{\sqrt{31}}\approx 0'179605\,i$, y la función de producción ofrece: $u_1=\sqrt{x^2+y^2-1}=\sqrt{\frac{5i^2-31}{31}}=i\sqrt{\frac{36}{31}}=1'0776318i.$

Ejercicio 5

La función de producción de una empresa viene dada por:

$$\begin{cases} u_x^2-u_y^2-2u=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^3}x^2y\,dy}{\sin^2 x^2} \\ u(0,y)=\iint_A \sin x\cdot\sin y\cdot dx\cdot dy+y^2+2y \end{cases}$$

en que el dominio A es el paralelogramo (cuadrado) $[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$. Se desea calcular: a) el "output" total de la empresa y la correspondiente relación marginal de transformación, si los dos "inputs" empleados son: x = 50, y = 35, de precios respectivos, en un mercado de competencia perfecta, r_1 = 4 u.m. y r_2 = 2 u.m., y b) las ecuaciones de costes variables y totales y de la trayectoria de expansión de la empresa, con unos costes fijos de 100 u.m.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 24).

Solución:

a) Procede, en primer lugar, resolver la configuración analítica de la ecuación de contorno dada, por lo que definiremos el dominio A de integración como:

$$A=\{(x,y)\in\Re^2\,/\,0\le x\le\pi/2,\ 0\le y\le\pi/2\}\ ,$$

que se representan en la figura adjunta:

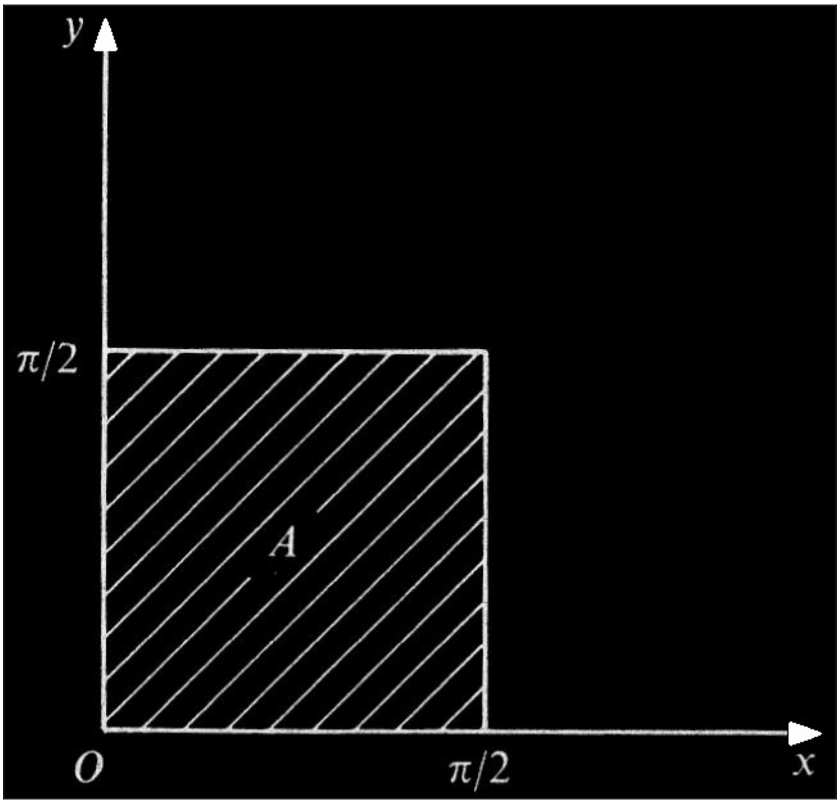


Fig. 4. Dominio de integración.

Aplicando el teorema de Fubini en el rectángulo, resulta:

$$\iint_A \sin x \cdot \sin y \cdot dx \cdot dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin y \cdot dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot dx = [1 - \cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

De este modo, la condición de contorno dada quedará explicitada así: $u(0,y) = 1 + y^2 + 2y = (1 + y)^2$.

El segundo miembro de la EDP dada ofrece:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^3} x^2 y dy}{\sin^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \int_0^{x^3} y \cdot dy + 3x^7}{\sin^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{6x^5}{\sin^2 x^2} + \frac{6x^6}{\sin^2 x^2} + \frac{3x^7}{\sin^2 x^2} \right) = 0,$$

habiéndolo resuelto por infinitésimos equivalentes. De este modo, la EDP queda configurada así: $u_x^2 - u_y^2 - 2u = 0$, tratándose de una ecuación no lineal, de primer orden, homogénea y de coeficientes constantes.

En este caso la función que define la EDP viene dada por la expresión: $F(x,y,z,p,q) = p^2 - q^2 - 2z$, donde *p* y *q* adquieren el mismo significado que en problemas anteriores.

La curva inicial está parametrizada por:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s),\alpha_2(s),\beta(s)) = [0,s,(1+s)^2],\ \forall s\in \Re.$$

El sistema característico será:

$$\begin{cases} x' = 2p, & x(0) = 0, \\ y' = -2q, & y(0) = s, \\ z' = 2p^2 - 2q^2, & z(0) = (1+s)^2, \\ p' = 2p, & p(0) = p_0(s), \\ q' = 2q, & q(0) = q_0(s). \end{cases} \qquad (1)$$

La condición de compatibilidad resulta ser:

$$p^2(t,s) - q^2(t,s) = 2z(t,s). \qquad (2)$$

La "condición de banda" nos dice que: $q_0(s) = 2(1+s)$.

Por consiguiente, será compatible si y sólo si:

$$p_0(s) = \pm\sqrt{6}(1+s).$$

Así pues, tenemos únicamente dos bandas iniciales compatibles con el problema considerado.

Veamos si cada una de ellas nos da lugar a una solución. Para ello, las bandas deben ser transversales al flujo. Pero esto ocurre si y sólo si:

$$0 \neq \det\begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2p_0(s) & 0 \\ -2q_0(s) & 1 \end{pmatrix} = 2p_0(s) = \pm 2\sqrt{6}(1+s).$$

Con lo cual, ambas bandas son transversales siempre que: $s \neq -1$ o, lo que es lo mismo, que la curva no pase por el punto (0,-1,0).

Para obtener la expresión de las soluciones debemos resolver los correspondientes sistemas asociados.

Tratemos, en un primer momento, el caso: $p_0(s) = \sqrt{6}(1+s)$.

De la igualdad anterior (2) y denotando por:

$$R(t,s)=\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \\ p(t,s) \\ q(t,s) \end{pmatrix}$$

deducimos que el sistema (1) es equivalente al siguiente problema lineal de valor inicial:

$$\frac{\partial}{\partial t}R(t,s)=BR(t,s)+b(t,s), \quad R(0,s) = C(s), \qquad (3)$$

siendo, en este caso:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t,s)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C(s)=\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ (1+s)^2 \\ \sqrt{6}(1+s) \\ 2(1+s) \end{pmatrix}.$$

Dado que la única solución del problema (3) viene dada por la fórmula de Lagrange:

$$R(t,s)=e^{Bt}\,C(s)+\int_0^t e^{B(t-r)}\,b(r,s)\,dr, \qquad (4)$$

obtenemos que la única solución de (1) viene dada por:

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t,s)=\sqrt{6}(1+s)(e^{2t}-1) \\ y(t,s) = s - 2\,(1+s)\,(e^{2t}-1) \\ z(t,s) = (1+s)^2 e^{4t} \\ p(t,s)=\sqrt{6}(1+s)\,e^{2t} \\ q(t,s) = 2(1+s)e^{2t} \end{array}}$$

Así, pues, la superficie solución particular viene dada, en forma paramétrica, por:

$$\Gamma\,(t,s)=\left(\sqrt{6}(1+s)\left(e^{2t}-1\right), s-2\,(1+s)\left(e^{2t}-1\right), (1+s)^2 e^{4t}\right).$$

Para obtener la expresión de esta solución en coordenadas cartesianas rectangulares, es suficiente tener en cuenta que:

$$s = \frac{2}{\sqrt{6}}x + y\,, \quad e^{2t} = \frac{x}{\sqrt{6}(1+s)} + 1.$$

De este modo, llegamos a la formulación:

$$u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y)) = \frac{\left(\sqrt{6}(1+y)+3x\right)^2}{6}.$$

La segunda solución se obtiene al considerar: $p_0(s) = -\sqrt{6}(1+s)$ en el sistema característico.

Siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior, deducimos que la superficie solución viene parametrizada por la expresión:

$$\Gamma(t,s) = \left(-\sqrt{6}(1+s)\left(e^{2t}-1\right), s-2(1+s)\left(e^{2t}-1\right), (1+s)^2 e^{4t}\right).$$

De donde se deduce que: $u(x,y) = \dfrac{\left(\sqrt{6}(1+y)-3x\right)^2}{6}$.

Se puede observar como ambas funciones, y sus derivadas parciales, respecto de *x*, coinciden a lo largo de la condición inicial. Además, los valores de las respectivas derivadas respecto de *y*, a lo largo de la curva, son opuestos.

En cualquier caso, al tratarse de una función de producción podría parecer que carece de sentido económico esta 2ª solución, que afecta con signo negativo la cantidad empleada del "input" *x* en el proceso productivo, por lo que adoptaremos la primera solución hallada como definitiva. De este modo, se tendrá que:

$$u = \frac{\left[\sqrt{6}(1+35)+3\cdot 50\right]^2}{6} = 9.455.$$

Entonces, la función (recta) isocuanta u = 9.455 será:

$u(x,y) = \dfrac{\left(\sqrt{6}(1+y)+3x\right)^2}{6} = 9.455$, de donde se deduce que:

$y = \dfrac{238'18-3x}{\sqrt{6}} - 1$, cuya representación gráfica es:

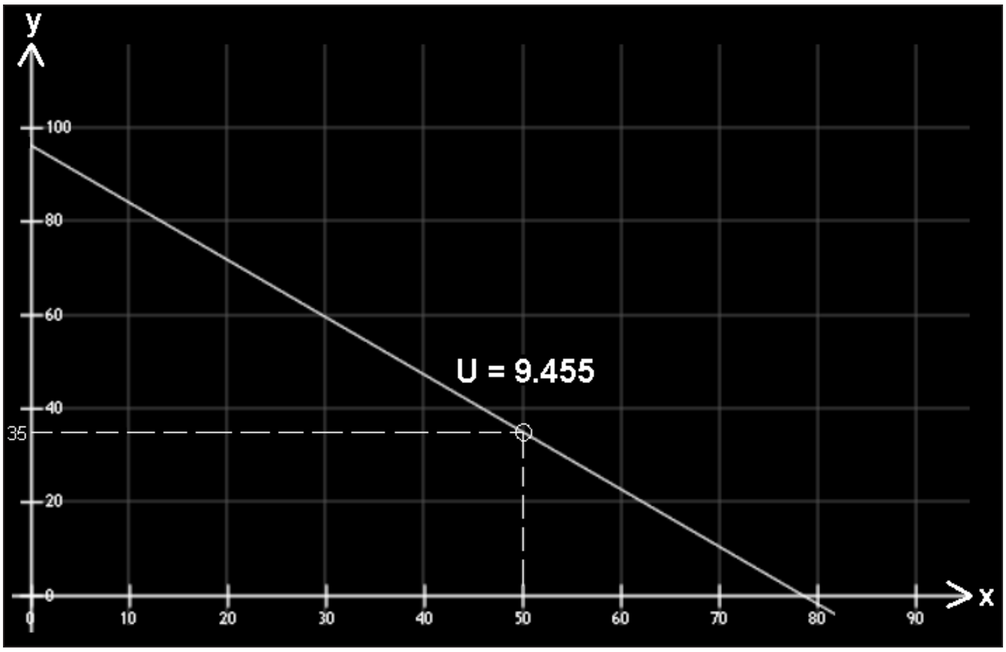


Fig. 5. Recta isocuanta.

La relación de transformación de productos vendrá dada por: $h(x,y) = \frac{\left(\sqrt{6}(1+y)+3x\right)^2}{6}$, entonces, en (50,35) se tiene:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{\partial h}{\partial x} = 3x + \sqrt{6}(y+1) \\ h_2 = \frac{\partial h}{\partial y} = x\sqrt{6} + 2y + 2 \end{cases}$$

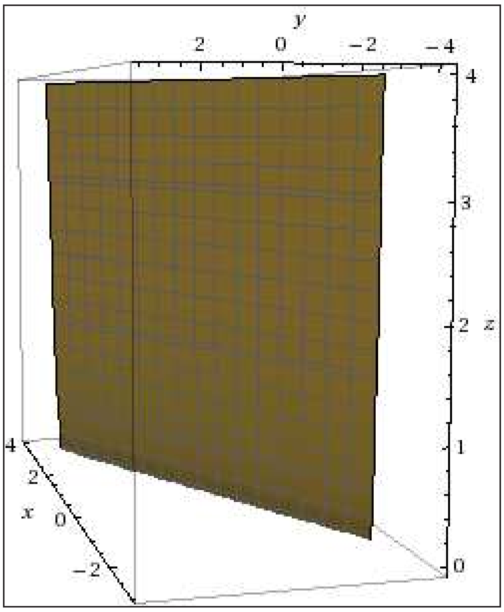
, de donde: RTP (RMT) = $\frac{h_1}{h_2} = -\frac{dy}{dx} = \frac{3x+\sqrt{6}(y+1)}{x\sqrt{6}+2y+2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1'2247$,

y ello es así, en este caso concreto, con independencia de las cantidades empleadas de los “inputs” del proceso productivo.

Debe tenerse en cuenta que, para que exista un significado económico, al tratarse de una función de producción, necesariamente debe cumplirse que: $u \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, o sea, que la función en cuestión tiene como dominio de definición el octante positivo de la esfera. La representación gráfica de dicha función de producción, cuya ecuación en coordenadas cartesianas rectangulares es:

$$\frac{3}{2}x^2 + y^2 - \sqrt{6}xy - \sqrt{6}x + 2y + 1 - z = 0,$$

y que es un cilindro parabólico con un mínimo absoluto cuando $x = \frac{-2y-2}{\sqrt{6}}$, u = 0, será:



Para la conceptualización de esta cuádrica o superficie de 2º orden, debe tenerse en cuenta que su matriz (A) es:

$$(A) = \begin{pmatrix} 3/2 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y entonces: } |A| = 0 .$$

$$\text{También: } A'_{33} = \begin{vmatrix} 3/2 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 3/2 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$ con $|A| = 0$ y: $a_{11} \cdot A_{44} = 0$, y como:

Rango o característica $\begin{cases} r(A) = k = 3 \\ r(A_{44}) = h = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Cilindro parabólico.

Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}-s & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & 1-s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0 \text{ ,}$$

de donde: $S_1 = 5/2$, $S_2 = S_3 = 0$. Se trata, pues, de una cuádrica de revolución, con la siguiente ecuación reducida:

$S_1x^2 \pm 2y\sqrt{\frac{-I'_3}{I_1}} = 0$, siendo el invariante especial de los cilindros:

$$I'_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33} \text{ , y también:}$$

I_1 (invariante métrico o lineal) $= a_{11} + a_{12} + a_{13} = 3/2 - \sqrt{6}/2 + 0 = \frac{3-\sqrt{6}}{2}$,

$$I'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} + 0 = -\frac{5}{8}.$$

Con ello resultará, que la ecuación reducida buscada es:

$$\frac{5x^2}{2} \pm y\sqrt{\frac{5}{3-\sqrt{6}}} .$$

b) La ecuación de costes variables vendrá dada por:

$$CV = r_1 \cdot x + r_2 \cdot y = 4x + 2y.$$

- La ecuación de costes totales será:

$$CT = CV + CF = 4x + 2y + 100.$$

- La ecuación de la trayectoria de expansión de la empresa, será:

$$\frac{f_1^{'}}{f_2^{1}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{2} = 2\,; \qquad f_1^{'} = \sqrt{6} + y\sqrt{6} + 3x\,; \qquad f_2^{'} = 2 + 2y + \sqrt{6}x\,;$$

$\frac{\sqrt{6} + y\sqrt{6} + 3x}{2 + 2y + x\sqrt{6}} = 2$, o bien: 1’55y + 1’90x + 1’55 = 0, o bien:

y = -1’226·x – 1.

Ejercicio 6

Las funciones de producción de sendas empresas pertenecientes al mismo *holding* vienen dadas, respectivamente y una vez efectuado el análisis econométrico pertinente, por las siguientes EDP’s:

$$\begin{cases} \text{Empresa 1} \rightarrow \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} \times \dfrac{\partial z}{\partial y} - 2\dfrac{\partial z}{\partial x} + 1\right) \cdot z = u(x,y) \\ \text{Empresa 2} \rightarrow \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} \times \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} + 1\right) \cdot z = u(x,y) \cdot e^{x-2y} \end{cases}$$

, donde u(x,y) cumple, a su vez, con la EDP:

$$\begin{cases} u_x^2 + y^2 u_y - 5yu = \lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \dfrac{xy + 3x - 2y - 6}{x - 2} \\ u(x,1) = x^2, \forall x > 0 \end{cases}$$

Si la cantidad total de “inputs” empleada por ambas empresas en su proceso productivo es de 6 ud., se pide: a) hallar las cantidades de “inputs” que igualan las producciones de ambas empresas, y b) calcular las diversas elasticidades de ambas funciones en dicho punto de igualdad.

Solución:

a) En primer lugar, habrá que resolver las tres EDP planteadas. Para ello, será necesario configurar analíticamente la función u(x,y) que, por cierto, ya ha sido resuelta en el ejercicio 4 del capítulo anterior 3, obteniéndose como resultado: u(x,y) = x^2·y, teniendo en cuenta que el límite doble del 2º miembro es nulo.

En efecto:

$$\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{xy + 3x - 2y - 6}{x - 2} = \lim_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{(y+3)\cdot(x-2)}{x-2} = -3 + 3 = 0\,,$$

y entonces resulta la EDP: $u_x^2 + y^2 u_y - 5yu = 0$, tratándose de una ecuación no lineal, de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

Ahora bien, en el caso de la empresa 1 y usando el operador D se tendrá que:

$(D_x \cdot D_y - 2D_x + 1) \cdot z = x^2 \cdot y$, para lo que ensayaremos:

$$z = ax^2y + bxy + dx + ey + g,$$

previéndose la inutilidad de añadir los términos en x^2, en y^2 y en xy^2, que no tendrían reducción posible.

Derivando y substituyendo, resulta:

$2ax + b - 2(2axy + by + d) + ax^2y + bxy + dx + ey + g = x^2y$, de donde:

$a = 1$, $b - 4a = 0$, $d + 2a = 0$, $e - 2b = 0$, $g - 2d + b = 0$, o sea:

$a = 1$, $b = 4$, $d = -2$, $e = 8$, $g = -8$, obteniéndose la solución particular:

$$z_1 = x^2y + 4xy - 2x + 8y - 8 .$$

En el caso de la empresa 2, veamos que las soluciones de la ecuación: $(D_x \cdot D_y - D_y + 1) \cdot z = x^2 y \cdot e^{x-2y}$ son las de:

$[(D_x + 1)(D_y - 2) - (D_y - 2) + 1] \cdot z = x^2y$, pero multiplicadas por e^{x-2y}.

De este modo, la expresión entre corchetes es: $[D_x \cdot D_y - 2D_x + 1]$, y la ecuación: $(D_x \cdot D_y - 2D_x + 1) \cdot z = x^2y$, posee como solución particular la hallada anteriormente para la empresa 1. Así pues, la función de producción de la empresa 2 admitirá, como solución particular:

$$z_2 = (x^2y + 4xy - 2x + 8y - 8) \cdot e^{x-2y} .$$

De la igualación de las soluciones particulares obtenidas para ambas empresas ($z_1 = z_2$), se deduce que:

$e^{x-2y} = 1 \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$; pero como: $x + y = 6$, se tiene que:

$3y = 6$, con lo que las cantidades de *inputs* pedidas son: $y = 2$, $x = 4$.

b) Se trata, pues, de hallar las diversas elasticidades de ambas funciones de producción en su punto de encuentro: $(x_0,y_0) = (4,2)$. Esto es:

b-1) Empresa 1 $\rightarrow \begin{cases} z = x^2y + 4xy - 2x + 8y - 8 \\ z'_x = 2xy + 4y - 2 \\ z'_y = x^2 + 4x + 8 \end{cases}$

- Elasticidades parciales:

$$E_x = \frac{x}{z} \times z'_x = \frac{2x^2y + 4xy - 2x}{x^2y + 4xy - 2x + 8y - 8} \Rightarrow (4{,}2) \Rightarrow \frac{11}{8} = 1'375 > 1$$

(función relativamente elástica)

$$E_y = \frac{y}{z} \times z'_y = \frac{x^2y + 4xy + 8y}{x^2y + 4xy - 2x + 8y - 8} \Rightarrow (4{,}2) \Rightarrow \frac{5}{4} = 1'25 > 1$$

(función relativamente elástica)

- Elasticidad total:

$$E_t = E_x + E_y = \frac{3x^2y + 8xy - 2x + 8y}{x^2y + 4xy - 2x + 8y - 8} = \frac{11}{8} + \frac{5}{4} = \frac{21}{8} = 2'625 > 1$$

(función relativamente elástica)

- Elasticidades direccionadas:

Con respecto a ambos ejes coordenados cartesianos rectangulares es decir, para 0º y 90º, en el punto: $(x_0, y_0) = (4, 2)$, son las siguientes:

$$\begin{cases} {}_xE_xz(x_0, y_0) = \dfrac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ {}_yE_yz(x_0, y_0) = \dfrac{E_y}{y_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{cases}$$; en $(x_0, y_0) = (4, 2)$, se tendrá:

$$\begin{cases} {}_xE_xz(4, 2) = \dfrac{1'375}{4} \times \sqrt{20} \cong 1'537 > 1 \\ {}_yE_yz(4, 2) = \dfrac{1'25}{2} \times \sqrt{20} \cong 2'795 > 1 \end{cases}$$

Así pues, en todos los casos estudiados, se trata de funciones relativamente elásticas.

b-2) Empresa 2 $\rightarrow \begin{cases} z = (x^2y + 4xy - 2x + 8y - 8)e^{x-2y} \\ z'_x = e^{x-2y}(x^2y + 6xy - 2x + 12y - 10) \\ z'_y = e^{x-2y}(x^2 - 2x^2y - 8xy + 8x - 16y + 24) \end{cases}$

- Elasticidades parciales:

$$E_x = \frac{x}{z} \times z'_x = \frac{e^{x-2y}(x^3y + 6x^2y - 2x^2 + 12xy - 10x)}{(x^2y + 4xy - 2x + 8y - 8)e^{x-2y}} \Rightarrow (4{,}2) \Rightarrow \frac{43}{8} = 5'375 > 1$$

(función relativamente elástica)

$$E_y = \frac{y}{z} \times z'_y = \frac{e^{x-2y}(x^2y - 2x^2y^2 - 8xy^2 + 8xy - 16y^2 + 24y)}{(x^2y + 4xy - 2x + 8y - 8)e^{x-2y}} \Rightarrow (4{,}2) \Rightarrow -\frac{11}{4} = -2'75 < -1$$

(función relativamente elástica)

- Elasticidad total:

$$E_t = E_x + E_y = \frac{43}{8} - \frac{11}{4} = \frac{21}{8} = 2'625 > 1$$

(función relativamente elástica)

- Elasticidades direccionadas:

Con respecto a ambos ejes coordenados cartesianos rectangulares es decir, para 0º y 90º, en el punto: $(x_0, y_0) = (4, 2)$, son las siguientes:

$$\begin{cases} {}_xE_xz(x_0, y_0) = \dfrac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ {}_yE_yz(x_0, y_0) = \dfrac{E_y}{y_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{cases}$$; en $(x_0, y_0) = (4, 2)$, se tendrá:

$$\begin{cases} {}_xE_xz(4, 2) = \dfrac{5'375}{4} \times \sqrt{20} \cong 6'01 > 1 \\ {}_yE_yz(4, 2) = -\dfrac{2'75}{2} \times \sqrt{20} \cong -6'15 < -1 \end{cases}$$

Así pues, en todos los casos estudiados, se trata también de funciones relativamente elásticas.

Ejercicio 7

En este ejercicio se considerará un modelo de crecimiento neoclásico, en que las cantidades de capital y trabajo necesarias para producir una unidad de *output* son variables, de acuerdo con la función de producción siguiente, del tipo Cobb-Douglas[4], donde Y es la raíz cuadrada de la inversa de la función Z que viene dada por la EDP:

$$K(Z^2 - L^2)Z_K + L(K^2 - Z^2)Z_L = Z(L^2 - K^2), \text{ con:}$$

$$Z(K,K) = \frac{1}{K^2}, \ \forall\, K > 1, \text{ siendo:}$$

$$\begin{cases} Y = \textit{Output} \text{ total} \\ K = \text{Capital insumo} \\ L = \text{Trabajo insumo} \end{cases}$$

Suponiendo que el aumento de población es del 2% anual, y que se ahorra un 20% de la Renta Nacional, se pregunta:

1º- Las condiciones que determinan el equilibrio de crecimiento de la Economía, así como la elasticidad de sustitución de los factores.

2º- Dibujar la función de producción "per capita", haciendo el cambio de variables $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, señalando el punto de equilibrio.

3º- Calcular la distribución de la renta entre el capital y el trabajo.

4º- Obtener el tipo de beneficio en esa Economía, así como el tipo de interés, si el nivel de los precios (inflación) aumenta un 2% todos los años, sistemáticamente.

[4] Una función del tipo Cobb-Douglas es una función matemática que se emplea frecuentemente para expresar tanto funciones de utilidad como funciones de producción, ya que reúne las condiciones que se le exigen tanto a los mapas de curvas de indiferencia, de la teoría del consumo, como a los mapas de curvas isocuantas de la teoría de la producción (convexidad, decrecimiento, continuidad, etc.). Las funciones de demanda obtenidas a través de una función de utilidad del tipo Cobb-Douglas presentan elasticidad cruzada cero (pues cada bien depende exclusivamente de su precio), elasticidad-renta positiva y unitaria, propia de bienes normales y elasticidad demanda- precio también unitaria. A la hora de obtener el equilibrio del productor, es decir, la combinación de factores K y L capaz de maximizar la producción Y del bien X, dados los costes que desea asumir el empresario, aplicamos el sistema de ecuaciones habitual del equilibrio: este tipo de condiciones de equilibrio tienen además la característica de cumplir la propiedad de homoteticidad, puesto que la pendiente de las isocuantas expresadas por la función de producción Cobb-Douglas, es una función del ratio k = K/L. Ésta es una propiedad importantísima, pues a partir de ella se demuestra que las combinaciones que minimizan los costes variando libremente la cantidad aplicada de factores (es decir, a largo plazo) pertenecen a isocostes más baratos que aquellos que tienen una cierta cantidad de capital constante (es decir, a corto plazo) y, por tanto, que los costes a largo plazo deben estar situados por debajo de los costes a corto (de hecho, constituyen la envolvente de aquellos).

Solución:

1º- Esta EDP ya ha sido resuelta en otro ejercicio de este mismo libro, arrojando como resultado: $Z = \frac{1}{K \cdot L}$. De este modo, se tendrá que:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{Z}} = \sqrt{K \cdot L} = K^{1/2} \cdot L^{1/2},$$

que es una función homogénea de grado m = 1 que posee, por tanto, rendimientos de escala constantes.

Al tratarse de una función de producción del tipo Cobb-Douglas generalizada, se caracteriza por tener una elasticidad de sustitución unitaria entre sus factores, con independencia del valor de ($\alpha + \beta = 1$). Por ello, en este caso, se tiene también que: $\sigma_{(L,K)} = 1$.

Haciendo el cambio de variables: $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$ obtenemos la función de producción "per capita": $y \times L = \sqrt{k} \times L \Rightarrow y = k^{1/2}$. Pero aquí:

$$\begin{cases} n = \text{Tipo de crecimiento natural} = 2\% \\ s = \text{Ahorro} = 20\% \\ v = \text{Relación capital-producto} = \frac{k}{y} = \frac{k}{\sqrt{k}} = k^{1/2} \\ g = \text{Tipo de crecimiento garantizado} = \frac{s}{v} = \frac{20}{v};\ 2 = \frac{20}{v} \end{cases}$$

De ello se deducen los valores siguientes:

$$\boxed{v = 10\ ; \quad k = 100\ ; \quad y = 10.}$$

También:

$$\rho = \frac{dy}{dk} = \frac{1}{2\sqrt{k}};\quad \pi = \frac{dy}{dk} \times k = \frac{1}{2} \times k^{-1/2} \times k = \frac{k^{1/2}}{2} = \frac{\sqrt{k}}{2};$$

$$\rho = \frac{\pi}{k} = \frac{\sqrt{k}}{2k}\text{; de donde: } \omega = k \cdot \rho.$$

2º- La representación gráfica correspondiente de la función de producción estudiada es la siguiente:

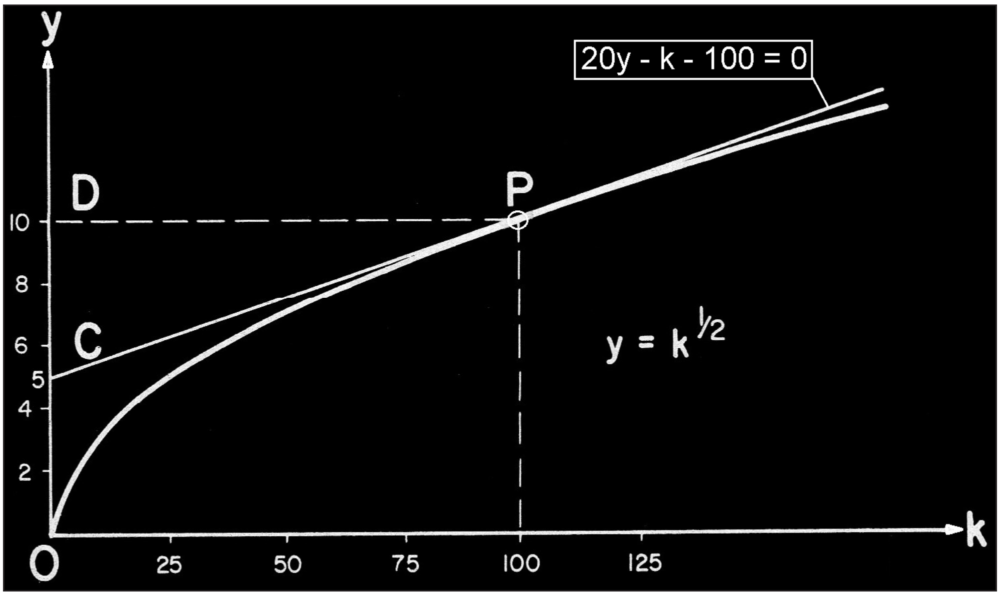


Fig. 6. Función de producción (I).

La función *y* tiene una rama parabólica o infinita de dirección kk'. Siendo:

$$\begin{cases} \overline{CD} = \text{Ingresos del capital} \\ \overline{OC} = \text{Ingresos del trabajo} \end{cases}$$

Para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto en que $k_0 = 100$, procederemos del siguiente modo:

$$y = f(k) = \sqrt{k}\ ;\ f(k_0) = f(100) = 10\ ;$$

La ecuación de la tangente será: $y - f(k_0) = f'(k_0)\cdot(k-k_0)$, o sea:

$$f'(k) = \frac{1}{2}\times k^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}\ ;\ f'(k_0) = f'(100) = 1/20\ ,\ \text{y entonces se tiene:}$$

$y - 10 = \frac{1}{20}(k-100)$, de donde se deduce la ecuación de la recta buscada:

$$20y - k - 100 = 0.$$

3º-

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial K} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L}{K}\right)^{1/2}, \text{Ingresos del capital} = K\dfrac{\partial Y}{\partial K} = \dfrac{1}{2}Y \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial L} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1/2}, \text{Ingresos del trabajo} = L\dfrac{\partial Y}{\partial L} = \dfrac{1}{2}Y \end{cases}$$

La renta, pues, se distribuye en partes iguales entre el capital y el trabajo.

En el diagrama anterior, el ingreso del capital es igual a $\overline{CD}$ ya que: $\overline{CD} = \overline{PD} \times \text{tg}\, C\hat{P}D = 5$, mientras que el ingreso del factor trabajo es: $\overline{OC} = \overline{OD} - \overline{CD} = 5$.

Veamos, en el siguiente cuadro, la variación de algunas magnitudes relevantes:

k	**y**	$\rho = \frac{dy}{dk}$	$\boldsymbol{\omega}$
100	10	5%	5
75	8’5	$\cong$ 6%	4’25
50	7	$\cong$ 7%	3’50
25	5	10%	2’50
4	2	25%	1

siendo: $\begin{cases} \rho \rightarrow \text{“tipo de beneficio”} \\ \omega \rightarrow \text{salario o ingresos del trabajo} \end{cases}$

Se cumple que: $\rho = \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\omega}{\rho}}} \Rightarrow \rho = \frac{1}{4\omega}$, con lo que: $\omega = \frac{1}{4\rho}$.

De hecho, partiendo de una función de producción del tipo Cobb-Douglas expresada así: $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, con $\beta = 1 - \alpha$, o sea, linealmente homogénea y consecuentemente también homotética, es posible deducir analíticamente la “ecuación del salario”, puesto que:

$y = A \cdot k^{\alpha} = \pi + \omega$ (1) ; $\rho = \frac{\pi}{k} = \frac{dy}{dk} = A \cdot \alpha \cdot k^{\alpha-1}$, además:

$$\omega = y - \pi = y - \rho \cdot k = A \cdot k^{\alpha} - A \cdot \alpha \cdot k^{\alpha} = A \cdot k^{\alpha}(1-\alpha), \text{ de donde:}$$

$$k = \sqrt[\alpha]{\frac{\omega}{A(1-\alpha)}} = \frac{\omega^{1/\alpha}}{A^{1/\alpha}(1-\alpha)^{1/\alpha}}, \text{ y entonces, en (1) se tiene que:}$$

$$\frac{\rho \cdot \omega^{1/\alpha}}{A^{1/\alpha}(1-\alpha)^{1/\alpha}} + \omega = \frac{A \cdot \omega}{a(1-\alpha)}; \frac{\rho}{A^{1/\alpha}(1-\alpha)^{1/\alpha} \cdot \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} + 1 = \frac{1}{1-\alpha}, \text{ o sea:}$$

$$\frac{\rho(1-\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{A^{1/\alpha} \cdot \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \alpha, \text{ de donde: } \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \frac{\rho(1-\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{A^{1/\alpha} \cdot \alpha}, \text{ o mejor aún:}$$

$$\omega = \frac{\rho^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(1-\alpha)}{A^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$, que constituye, en definitiva, la ecuación buscada.

En el caso concreto que nos ocupa en el presente ejercicio, substituyendo valores en la fórmula anterior, llegaríamos, con los valores de los parámetros: A = 1, $\alpha = \beta = ½$, a que:

$$\omega = \frac{\rho^{\frac{1/2}{-1/2}} \times (1/2)}{1^{\frac{1}{-1/2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1/2}{-1/2}}} = \frac{\frac{\rho^{-1}}{2}}{2} = \frac{1}{4\rho}, \quad \text{c.s.q.d.}$$

Veamos que cuando ρ aumenta, entonces ω disminuye. La representación gráfica de la llamada "ecuación del precio de los factores" (Samuelson[5]) o bien "ecuación del salario" (Hicks[6]), será, en fin, la siguiente:

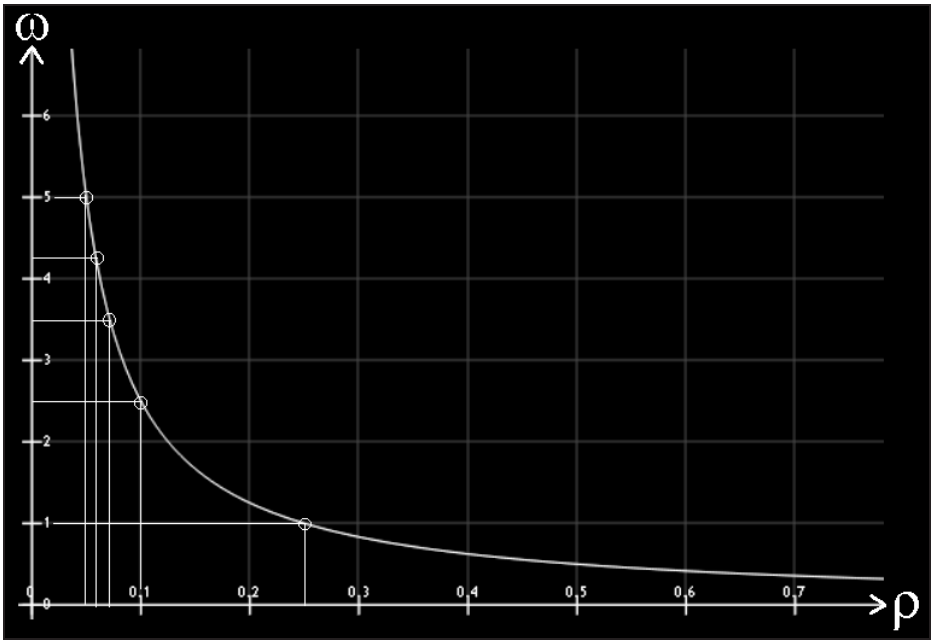


Fig. 7. Ecuación del salario (I).

5 Paul Anthony Samuelson (1915-2009) es un economista americano, nacido en Gary, Indiana. Obtuvo el Premio Nobel de Economía en 1970, por el trabajo científico a través del cual ha desarrollado la teoría económica estática y dinámica y contribuido activamente a elevar el nivel del análisis en la ciencia económica. Está especialmente interesado en los aspectos dinámicos de la economía. Su principal mérito es quizá haber realizado la llamada "síntesis neoclásica", es decir, la fusión en un conjunto coherente de la economía de Keynes con la de sus predecesores.

6 John Richard Hicks (1904-1989), fue un economista inglés, uno de los más influyentes del siglo XX. Recibió el Premio Nobel de economía en 1972. Hicks es uno de los principales contribuidores de la síntesis neoclásica. Situado en la óptica de la escuela neoclásica, reelabora la exposición del equilibrio general de Léon Walras y expresa las condiciones teóricas necesarias para mantenerlo estable, que resultan muy ayudadas del comportamiento real del mercado. En la obra *Value and Capital* (1939), se recogen las principales aportaciones teóricas, basadas en las ideas de Keynes.

Obsérvese que los propios ejes coordenados constituyen las asíntotas o ramas infinitas de la función hiperbólica equilátera que nos ocupa.

4º- Por último, la rentabilidad de la inversión es:

$$\rho = \frac{\text{Beneficios}}{\text{Capital}} = \frac{\pi}{k} = \frac{5}{100} = 5\%.$$

Si los precios aumentan un 2% anual, el tipo de interés en la economía deberá ser: i = 5% + 2% = 7% anual.

Ejercicio 8

La función de producción de un modelo similar al del ejercicio anterior, una vez resuelta la EDP correspondiente, es $Y = 6 \cdot K^{1/3}L^{2/3}$. La población aumenta un 2% anualmente.

En este modelo los trabajadores gastan toda su renta en consumo, mientras que los perceptores de beneficios ahorran una proporción del 25% de su renta. Se pregunta:

1º- Las condiciones que determinan el equilibrio de crecimiento de la Economía, así como la elasticidad de sustitución de los factores.

2º- Dibujar la función de producción "per cápita" y = f(k) donde: $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, señalando el punto de equilibrio.

3º- Obtener los ingresos respectivos del capital y el trabajo.

4º- Calcular la rentabilidad de la inversión así como el tipo de interés, si el nivel de los precios (inflación) aumenta un 1'5% todos los años, sistemáticamente.

Solución:

1º- Se trata de una función de producción del tipo Cobb-Douglas (con $\alpha + \beta = 1$) y, por consiguiente, con grado de homogeneidad unitario (m = 1) y rendimientos de escala constantes. En efecto:

$$Y(tK, tL) = 6 \cdot t^{1/3} \cdot K^{1/3} \cdot t^{2/3} \cdot L^{2/3} = t \cdot 6 \cdot K^{1/3} \cdot L^{2/3} = t \cdot Y(K, L),$$

luego es linealmente homogénea.

Al tratarse de una función de producción del tipo Cobb-Douglas generalizada, se caracteriza por tener una elasticidad de sustitución unitaria entre sus factores, con independencia del valor de ($\alpha + \beta = 1$). Por ello, en este caso, se tiene también que: $\sigma_{(L,K)} = 1$.

Haciendo el cambio: $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, obtenemos la función de producción "per cápita", a saber: $y = 6 \cdot k^{1/3}$.

Deben tenerse en cuenta los siguientes ítems:

π = beneficios "per cápita" $= \frac{dy}{dk} \times k = 2k^{1/3}$

I = Inversión = Ahorro = $0'25 \cdot 2k^{1/3} = 0'5 \cdot k^{1/3}$, es lo que se invierte, en realidad.

n = Tipo de crecimiento natural = 2%

g = Tipo de crecimiento garantizado $= \frac{I}{k} = \frac{0'5k^{1/3}}{k} = \frac{0'5}{k^{2/3}}$

Igualando: $\frac{2}{100} = \frac{0'5k^{1/3}}{k}$, de donde: k = 125. Entonces:

$y = 6 \times 125^{1/3} = 30$; $\pi = 2 \times 125^{1/3} = 10$; ω = rentas del trabajo = $y - \pi = 20$,

con la siguiente representación gráfica de la función de producción:

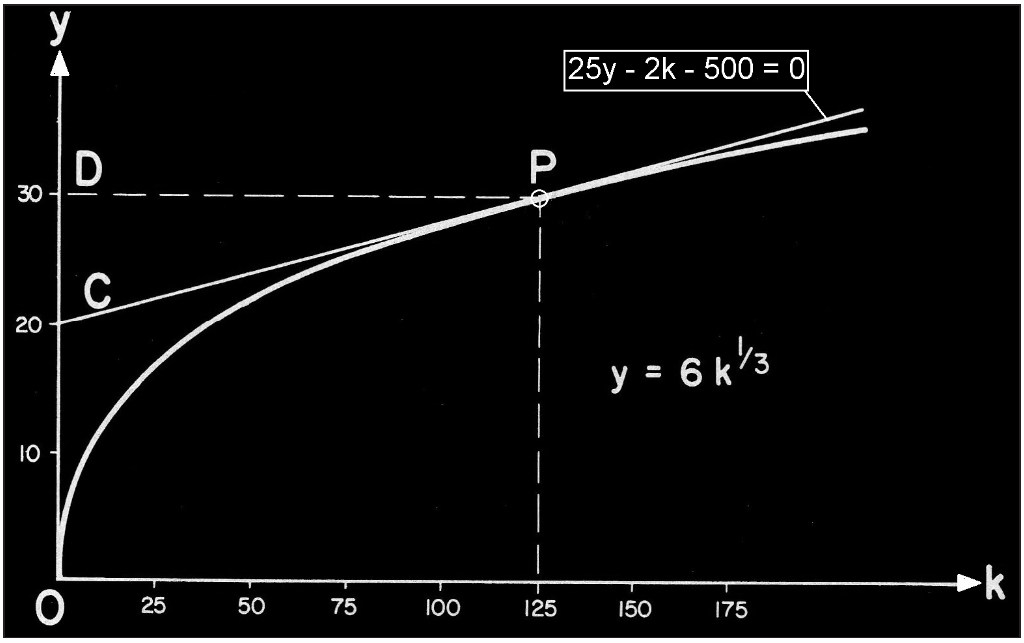


Fig. 8. Función de producción (II).

La función *y* tiene una rama parabólica o infinita de dirección kk'.

En el gráfico anterior, puede verse que:

$$\begin{cases} \pi = \text{Beneficio} = \overline{CD} = \overline{PD} \cdot \text{tang } C\hat{P}D = 10. \\ \omega = \text{Ingreso de los trabajadores} = \overline{OC} = \overline{OD} - \overline{CD} = 30 - 10 = 20. \end{cases}$$

Para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto en que $k_0 = 125$, procederemos del siguiente modo:

$$y = f(k) = 6\cdot\sqrt[3]{k} \;;\; f(k_0) = f(125) = 30 \;;$$

La ecuación de la tangente será: $y - f(k_0) = f'(k_0)\cdot(k-k_0)$, o sea:

$$f'(k) = \frac{2}{k^{2/3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{k^2}} \;;\; f'(k_0) = f'(125) = 2/25 \text{ , y entonces se tiene:}$$

$y - 30 = \frac{2}{25}(k-125)$, de donde se deduce la ecuación de la recta buscada, a saber:

$$25y - 2k - 500 = 0.$$

3º- Tratándose de una función de producción del tipo Cobb-Douglas, la distribución de la renta entre el capital y el trabajo, viene dada por los exponentes de K y L, es decir $\alpha = 1/3$ y $\beta = 2/3$, a partir de $y = 30$:

$$\begin{cases} \pi = \text{Beneficios} = \frac{1}{3} \times 30 = 10 \\ \omega = \text{Ingresos de los trabajadores} = \frac{2}{3} \times 30 = 20 \end{cases}$$

Ello nos permite la elaboración de la siguiente tabla:

k	**y**	$\rho = \frac{dy}{dk}$	**ω**
100	28	≅ 9’2%	18’67
75	25	≅ 11’5%	16’67
50	22	≅ 14’9%	14’67
25	17	≅ 24’9%	11’33

Siendo: $\omega = \frac{2}{3} y = \frac{12\cdot k^{1/3}}{3} = 4\cdot k^{1/3}$; $\rho = \frac{dy}{dk} = \frac{6}{3} \times k^{-2/3} = \frac{2}{k^{2/3}}$, entonces:

$\omega^3 = 64\cdot k$; $k^3 = \frac{\omega^9}{262.144}$; $\rho^3 = \frac{8}{k^2}$, de donde: $k = \left(\frac{8}{\rho^3}\right)^{1/2}$; entonces:

$$k^3 = \left(\frac{8}{\rho^3}\right)^{3/2} = \sqrt{\left(\frac{8}{\rho^3}\right)^3} = \sqrt{\frac{512}{\rho^9}} = \frac{\omega^9}{262.144} = \frac{22'63}{\rho^{4'5}}\text{; luego:}$$

$$\omega^9 \times \rho^{4'5} = 5.932.319\text{, de donde: } \omega = \frac{5.932.319^{1/9}}{\sqrt[9]{\rho^{4'5}}} = \frac{5'66}{\sqrt{\rho}} \text{ y } \rho = \frac{32}{\omega^2}\ .$$

En este caso, la representación gráfica de la "ecuación del salario" será:

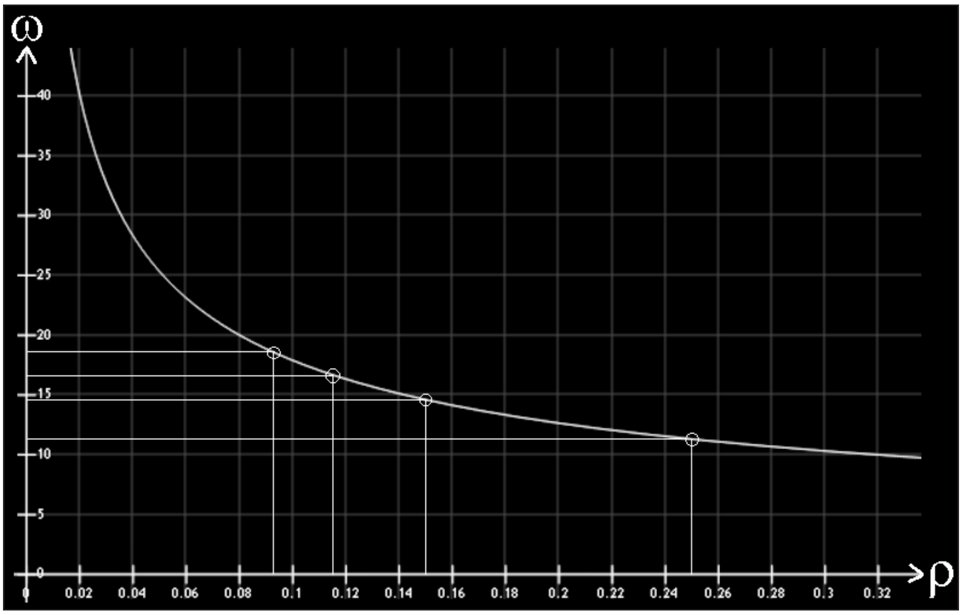


Fig. 9. Ecuación del salario (II).

Obsérvese que los propios ejes coordenados constituyen las asíntotas o ramas infinitas de la función hiperbólica equilátera que nos ocupa.

4º- Rentabilidad de la inversión $= \rho = \frac{10}{125} =$ 0'08 = 8%.

También se podría haber obtenido de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = n = \frac{I}{k} = \frac{s_\pi \cdot \pi}{k} = s_\pi \cdot \rho = \frac{2}{0'25} = 8\%\text{, siendo:}$$

s = proporción de renta ahorrada por los capitalistas.
ρ = tipo de beneficio.
π = beneficios.

Si los precios aumentan un 1'5% anual, el tipo de interés en la economía deberá ser: i = 8% + 1'5% = 9'5% anual.

Ejercicio 9

En un modelo de crecimiento similar a los de ejercicios anteriores, y una vez resuelta la EDP correspondiente, sabemos que la función de producción es $Y = 20 \cdot K^{1/4}L^{3/4}$, donde, como siempre, Y es el *output* total, K y L los *inputs* de capital y trabajo, y el crecimiento de la población es del 4%. El ahorro de la economía se hace según el supuesto clásico, es decir, todos los beneficios se invierten, mientras que los trabajadores gastan en bienes de consumo toda su renta. Se pregunta:

1º- Las condiciones que determinan el equilibrio de crecimiento de la Economía, así como la elasticidad de sustitución de los factores.

2º- Dibujar la función de producción y = f(k) donde: $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, señalando el punto de equilibrio.

3º- Calcular la distribución de la renta entre el capital y el trabajo.

4º- Calcular la rentabilidad de la inversión así como el tipo de interés, si el nivel de los precios (inflación) aumenta un 2'5% todos los años, sistemáticamente.

Solución:

1º- Se trata de una función de producción del tipo Cobb-Douglas (con $\alpha + \beta = 1$) y, por consiguiente, con grado de homogeneidad unitario. En efecto:

$$Y(tK, tL) = 20 \cdot t^{1/4} \cdot K^{1/4} \cdot t^{3/4} \cdot L^{3/4} = t \cdot 20 \cdot K^{1/4} \cdot L^{3/4} = t \cdot Y(K, L),$$

luego es homogénea (y por tanto también homotética) de grado m = 1, o sea, linealmente homogénea (con rendimientos de escala constantes). Al tratarse de una función de producción del tipo Cobb-Douglas generalizada, se caracteriza por tener una elasticidad de sustitución unitaria entre sus factores, con independencia del valor de ($\alpha + \beta = 1$). Por ello, en este caso, se tiene también que: $\sigma_{(L,K)} = 1$.

Haciendo el cambio: $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, obtenemos la función de producción "per capita" siguiente:

$$y = 20 \cdot k^{1/4} \; ; \; \pi = \frac{dy}{dk} \times k = 5k^{1/4} \; ;$$

$$\begin{cases} n = \text{Tipo de crecimiento natural} = 4\% \\ \rho = \text{Tipo de crecimiento garantizado} = \dfrac{\pi}{k} = \dfrac{5}{k^{3/4}} \end{cases}$$

(en el modelo clásico, todos los beneficios se invierten)

En equilibrio de crecimiento tendrá lugar que:

$$\frac{4}{100} = \frac{5}{k^{3/4}}\text{; de donde } \begin{cases} k = 625 \\ y = 100 \\ \pi = 5 \times 625^{1/4} = 25 \end{cases}$$

Entonces: $y = 20 \times 625^{1/4} = 100$; $\omega = y - \pi = 100 - 25 = 75$.

2º- Aquí, se tendrá:

k	**y**	$\rho = \frac{\pi}{k}$	**ω**
16	40	62’5%	30
81	60	18’5%	45
256	80	7’8%	60
625	100	4%	75

$$\omega = \frac{3}{4} y = 3\,k\rho\text{; puesto que, por definición: } \rho = \frac{dy}{dk} = \frac{\pi}{k};$$

con la siguiente representación gráfica de la función de producción:

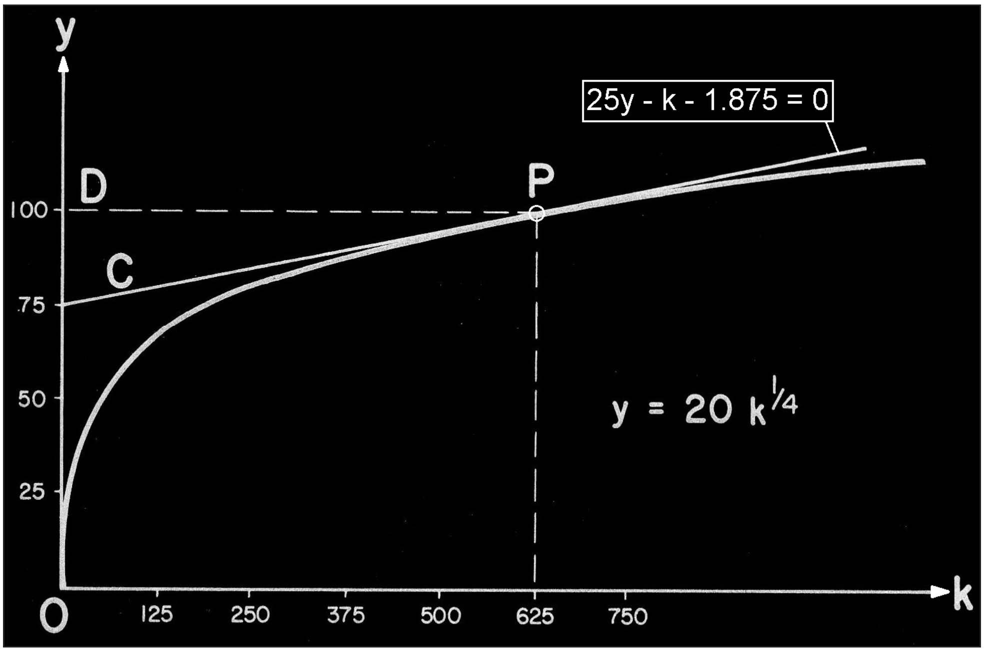


Fig. 10. Función de producción (III).

La función *y* tiene una rama parabólica o infinita de dirección kk’.

Para hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto en que $k_0 = 625$, procederemos del siguiente modo:

$$y = f(k) = 20\cdot\sqrt[4]{k}\ ;\ f(k_0) = f(625) = 100\ ;$$

La ecuación de la tangente será: $y - f(k_0) = f'(k_0)\cdot(k-k_0)$, o sea:

$f'(k) = \frac{20}{4}\times k^{-\frac{3}{4}} = \frac{5}{\sqrt[4]{k^3}}$; $f'(k_0) = f'(625) = 1/25$, y entonces se tiene:

$y - 30 = \frac{1}{25}(k-625)$, de donde se deduce la ecuación de la recta buscada, a saber: $25y - k - 1.875 = 0$.

3º- Se tendrá:

$$\begin{cases} \pi = \text{Ingresos de los capitales} = \overline{CD} = \frac{1}{4}y = 25 \\ \omega = \text{Ingresos de los trabajadores} = \overline{OC} = \frac{3}{4}y = 75 \end{cases}$$

Veamos que en este problema: $\pi = \frac{1}{4}y$; o sea:

$\rho = \frac{y}{4k} = \frac{5}{k^{3/4}} = \frac{\omega}{3k}$. Operando adecuadamente se obtiene que:

$$\rho = \frac{16.875}{\omega^3} \Rightarrow \omega = \sqrt[3]{\frac{16.875}{\rho}}\ ,$$

con la siguiente representación gráfica de la "ecuación del salario":

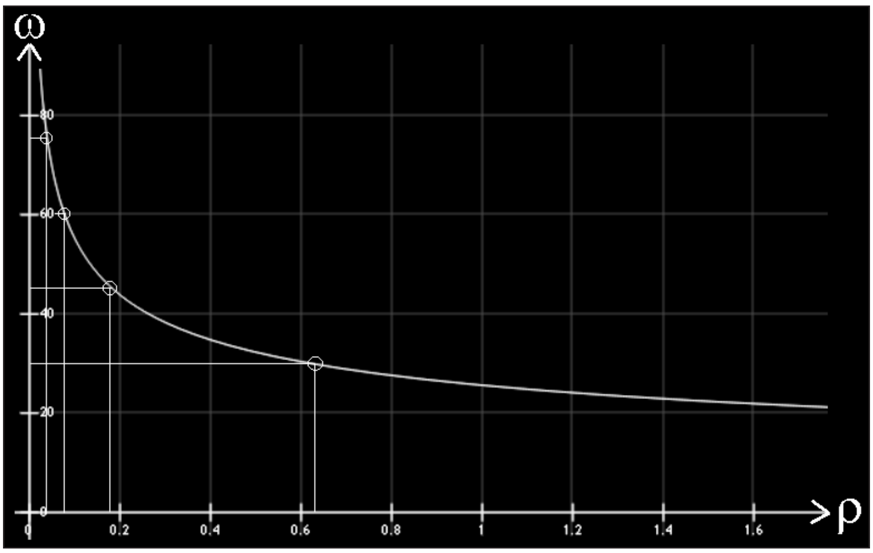


Fig. 11. Ecuación del salario (III).

Obsérvese que los propios ejes coordenados constituyen las asíntotas o ramas infinitas de la función hiperbólica equilátera que nos ocupa.

4º- Crecimiento garantizado $= \frac{I}{k} = \frac{\pi}{k} = \rho =$ rendimiento del capital.

$$\left(\rho = \frac{\pi}{k} = n = 4\%\right); \ \rho = \frac{\pi}{k} = \frac{25}{625} = \frac{1}{25} = 4\%, \text{ o sea:}$$

Con el supuesto de ahorro clásico, el tipo de beneficio es igual al tipo de crecimiento natural (4%). Si ahora los precios aumentan un 2’5% anual (inflación), el tipo de interés en la economía deberá ser el siguiente: i = 4% + 2’5% = 6’5% anual.

Ejercicio 10

La función de producción de una empresa viene dada por la superficie integral de la ecuación:

$$u = x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4} \times \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y},$$

que pasa por la curva: y = 0, $z = x^2$. Se desea saber la cifra de negocios de la empresa si x = 1.000 ud., y = 600 ud. y el precio de venta del único producto de la empresa es de 100 € /ud., así como la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

Solución:

La integral completa de la ecuación dada, que es homogénea, de primer orden y coeficientes variables, tiene la forma: $u = ax + by + \frac{ab}{4}$, y la ecuación de la curva dada se puede escribir, en forma paramétrica del siguiente modo: x = t; y = 0; $u = t^2$, siendo: $a = D_x$, $b = D_y$.

Para determinar la función b = b(a) escribimos un sistema de ecuaciones que, en nuestro caso, tiene la forma:

$$\begin{cases} t^2 = at + \frac{ab}{4} \\ 2t = a \end{cases}, \text{ de donde: } b = -a; \quad u = a(x - y) - \frac{a^2}{4}.$$

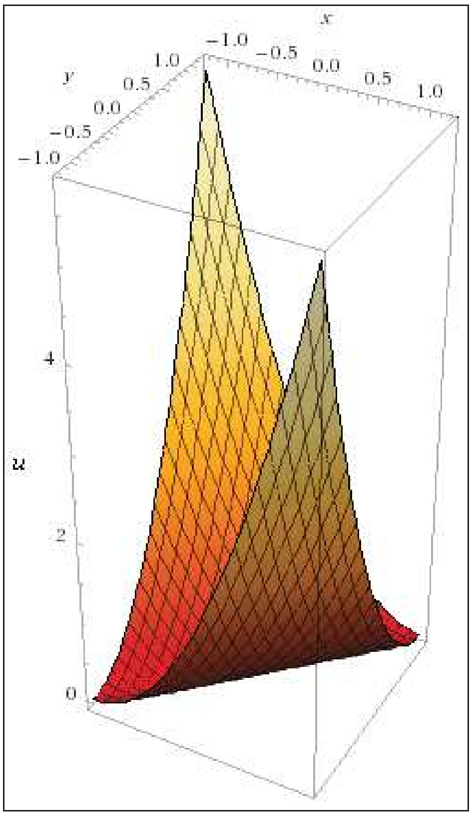
La envolvente de esta familia se determina por las ecuaciones:

$$\begin{cases} u = a(x-y) - \dfrac{a^2}{4} \\ x - y - \dfrac{a}{2} = 0 \end{cases} ;\; x - y = \frac{a}{2};\; (x-y)^2 = \frac{a^2}{4};$$

y eliminando *a* en el sistema anterior, resulta la integral particular buscada de la EDP planteada, a saber:

$$u = 2(x - y)\cdot(x - y) - (x - y)^2 = (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy,$$

con la siguiente representación gráfica como cilindro parabólico:



La función de producción obtenida es tal que: $u(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$, con lo que:

$$u(tx,ty) = t^2x^2 + t^2y^2 - 2tx\cdot ty = t^2(x^2 + y^2 - 2xy) = t^2\cdot u(x,y),$$

luego es una función homogénea (y homotética) de grado m = 2 > 1 (con rendimientos de escala crecientes), que cumple el teorema de Euler, como puede comprobarse.

Con los datos del problema, veamos que el "output" total de la empresa, será:

$$u = (1.000 - 600)^2 = 160.000 \text{ ud.},$$

y la cifra de negocios vendrá dada por:

$$I = u \cdot p = 160.000 \text{ ud.} \times 100 \text{ € /ud.} = 16.000.000 \text{ €}.$$

La relación de transformación de productos pedida vendrá dada por: $h(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$, entonces, en (1.000,600) se tendrá:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = 2x - 2y \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = 2y - 2x \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2} = -\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(x-y)}{2(y-x)} = -1$,

y ello es así, en este caso concreto, con independencia de las cantidades empleadas de los "inputs" del proceso productivo.

Ejercicio 11

Hallar la máxima función de producción que se deduce de la expresión:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 2 \lim_{y \to \sqrt{1/2}} \left(\lim_{x \to \sqrt{1/2}} \frac{x^2 - y^2}{1 - x^2 - y^2} \right),$$ con la condición: $u(\cos \pi/2, y) = y$.

Solución:

El 2º miembro de la EDP planteada es un límite lateral (reiterado o iterado a lo largo de una curva) de valor:

$$\lim_{y \to \sqrt{1/2}} \left(\lim_{x \to \sqrt{1/2}} \frac{x^2 - y^2}{1 - x^2 - y^2} \right) = \lim_{y \to \sqrt{1/2}} \frac{1/2 - y^2}{1 - 1/2 - y^2} = 1,$$ y la EDP será:

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 2$, luego se trata de una ecuación no lineal, de primer orden, inhomogénea y de coeficientes constantes.

En forma paramétrica, se tiene: $x_0 = 0$; $y_0 = s$; $u_0 = s$.

Se determinan $p_0(s)$ y $q_0(s)$ así:

$$p_0^2 + q_0^2 = 2; \quad 1 - q_0 = 0, \text{ de donde: } q_0 = 1, \quad p_0 = \pm\sqrt{1} = \pm 1.$$

Resulta, entonces, el sistema de ecuaciones:

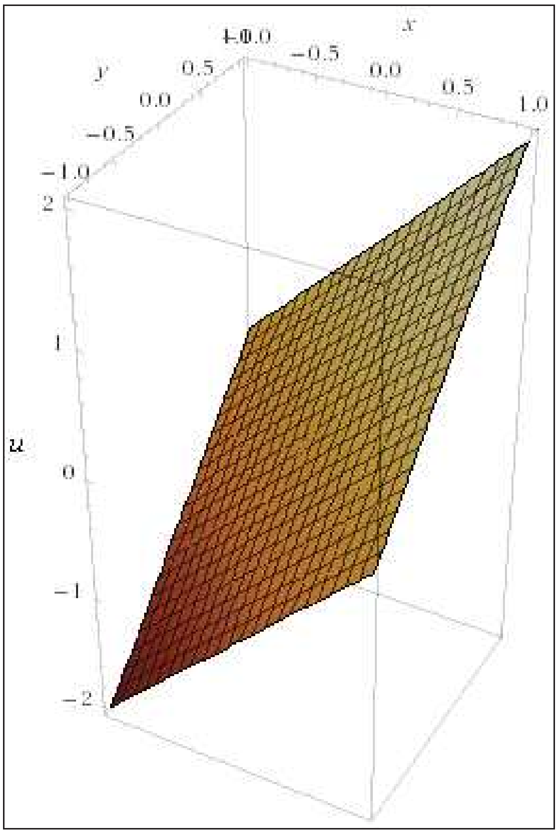
$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{du}{4} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = dt \text{, y se obtiene:}$$

$p = c_1$, $q = c_2$, $x = 2c_1 t + c_3$, $y = 2c_2 t + c_u$, $u = 4t + c_5$.

Utilizando las condiciones iniciales: $p_0 = \pm 1$, $q_0 = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = s$, $u_0 = s$, se obtiene: $p = \pm 1$, $q = 1$, $x = \pm 2t$, $y = 2t + s$, $u = 4t + s$.

Eliminando los parámetros *t* y *s*, se obtiene, en fin: $u = y \pm x$.

Obviamente, la máxima función de producción, para $x > 0$ e $y > 0$, será el plano: $u = x + y$, cuya representación gráfica es la siguiente:



Ejercicio 12

Se considera un modelo de crecimiento del tipo neoclásico, en que las cantidades de capital y trabajo necesarios para producir una unidad de "output" son variables, de acuerdo con la siguiente función de producción:

$$Y_K^2 + L^2 \cdot Y_L - 5L \cdot Y = 0, \quad \text{con } Y(K,1) = K^2, \quad \forall K > 0 \text{, siendo:}$$

$$\begin{cases} Y = \text{Output total} \\ K = \text{Capital insumo} \\ L = \text{Trabajo insumo} \end{cases}$$

Suponiendo que el aumento de población es del 2% anual, y que se ahorra un 20% de la Renta Nacional, se pregunta:

a) Las condiciones que determinan el equilibrio de crecimiento de la Economía, así como la elasticidad de sustitución de los factores.

b) Dibujar la función de producción tridimensional resultante.

Solución:

a) Se observa que la función de producción planteada es la misma que la del ejercicio 4 del capítulo anterior 3, sin más que considerar: Y = u; K = x; L = y; y cuya solución es: $Y = K^2 \cdot L$, que se trata de una función de producción del tipo Cobb-Douglas de la forma genérica: $Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$, con: A = 1, $\alpha = 2$, $\beta = 1$; siendo A el "factor de productividad" y mide la escala de producción, o sea, la producción que se obtiene cuando se utiliza una unidad de cada factor. α y β son las elasticidades producto del capital y del trabajo, respectivamente, y son valores constantes determinados por la tecnología disponible. Como sucede aquí que: $m = \alpha + \beta = 3 > 1$, los rendimientos de escala son crecientes.

Dicha función, pues, resulta ser homogénea de grado m = 3 > 1, cumpliéndose el teorema de Euler, puesto que:

$$K \cdot f'_K + L \cdot f'_L = m \cdot Y(K,L). \text{ En efecto, substituyendo:}$$

$$K \times 2KL + L \times K^2 = 3 \cdot K^2 \cdot L = 3 \cdot Y(K,L), \text{ c.s.q.d.}$$

Al tratarse de una función de producción del tipo Cobb-Douglas generalizada, se caracteriza por tener una elasticidad de sustitución unitaria entre sus factores, con independencia del valor de ($\alpha + \beta = 3$). Por ello, en este caso, se tiene también que: $\sigma_{(L,K)} = 1$.

Haciendo el cambio de variables: $y = \frac{Y}{L}, k = \frac{K}{L}$, obtendremos la función de producción "per cápita", así:

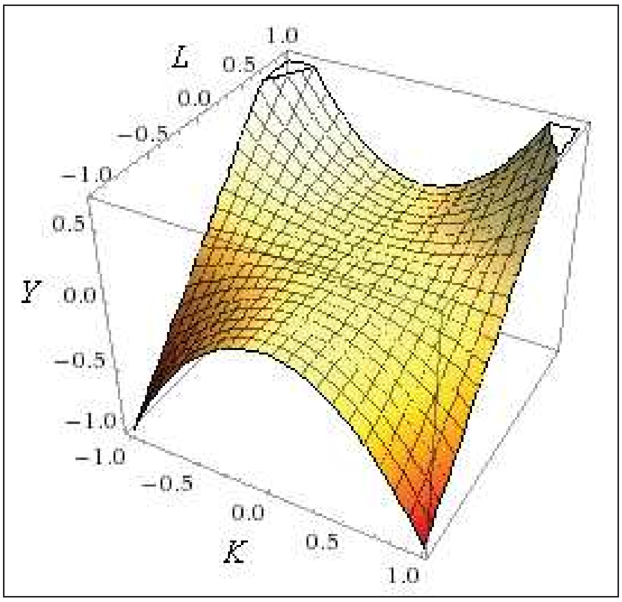
$$\frac{Y}{L} = K^2 = y = k^2 \times L^2; \text{ con los siguientes valores:}$$

$$\begin{cases} n = \text{tipo de crecimiento natural} \\ s = \text{ahorro de la renta} = 20\% \\ v = \dfrac{k}{y} = \text{relación capital-producto} = \dfrac{k}{k^2 \times L^2} = \dfrac{1}{k \times L^2} \\ g = \text{tipo de crecimiento garantizado} = \dfrac{S}{v} = \dfrac{20}{v} = 2\,; \end{cases}$$

De aquí se deduce que:

$$v = 10,\ \text{y entonces:}\ y = \frac{k}{10}.$$

b) La representación gráfica pedida es la siguiente:



Los 3 siguientes ejercicios son del mismo tipo que el presente, pero con diferentes funciones de producción del tipo Cobb-Douglas, linealmente homogéneas, tales que sus parámetros respectivos son:

$$\begin{cases} A = 1, & \alpha = 1/2, & \beta = 1/2. \\ A = 6, & \alpha = 1/3 & \beta = 2/3. \\ A = 20, & \alpha = 1/4, & \beta = 3/4. \end{cases}$$

y, en todos los casos, $m = \alpha + \beta = 1$, con lo que tendremos rendimientos constantes de escala.

El parámetro A mide, aproximadamente, la escala de producción, es decir, el volumen de producción que se obtiene si se utiliza una unidad de cada factor. Los parámetros α y β miden la respuesta de la cantidad producida a las variaciones de los factores.

Las características esenciales de la función de producción de Cobb-Douglas pueden verse reflejadas en el cuadro siguiente:

Tipos de rendimientos de escala	Aumento de los factores productivos en la misma proporción	Variación en las productividades marginales de los factores	Variación en la función de producción
· Rendimientos de escala crecientes.	Aumento	Aumentos exactamente proporcionales.	Aumento más que proporcional.
· Rendimientos de escala constantes.	Aumento	Invariables.	Aumento exactamente proporcional.
· Rendimientos de escala decrecientes.	Aumento	Disminuciones más que proporcionales.	Disminución exactamente proporcional.

Fuente: "Fundamentos matemáticos para la administración y dirección de empresas" (Guzmán *et alt*, 1999).

Fig. 12. Características de la función de Cobb-Douglas.

Ejercicio 13

La función de producción de una empresa fabricante de electrodomésticos satisface a la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + \lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x^2 y + 2x^2 + y^2 + 2y}{y+2}, \qquad (1)$$

y es tangente al paraboloide de ecuación: $a = x^2 - 2y^2$, a lo largo de la sección producida en él por el plano: $y = 2x - 2$. Se pide:

a) Determinar el "output" total de la empresa cuando x = 10 ud. e y = 5 ud. así como la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

b) Los beneficios netos, para un precio de venta del producto de 2.000 € /ud, unos costes respectivos de los "inputs" de r_1 = 8.000 € y r_2 = 3.000 € y unos costes fijos de 50.000 € , considerando una fiscalidad del 25%.

Solución:

a) En primer lugar, debe tenerse en cuenta que el valor del límite doble que aparece en el 2º miembro de la expresión de la EDP dada, es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x^2 y + 2x^2 + y^2 + 2y}{y+2} = \lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{(y+2)\cdot(x^2+y)}{y+2} = -2,$$

con lo que la EDP dada será: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, tratándose de una ecuación lineal, de segundo orden, homogénea y de coeficientes constantes. Como: a = 0, b = 1 y c = -2, con el siguiente discriminante: $(b^2 - 4ac) = 1 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico.

Escribamos ahora la ecuación en derivadas parciales (1) utilizando el operador D, en la forma:

$$(D_x - 2D_y)D_y u = 0. \qquad (2)$$

Si u(x,y) verifica la ecuación: $D_y u = 0$, evidentemente verificará la expresión (2). Luego todas las funciones de la forma: u = f(x), donde *f* es una función arbitraria, son soluciones de la ecuación propuesta (1).

Escribamos ahora la ecuación en derivadas parciales (1) en la forma:

$$D_y(D_x u - 2D_y u) = 0. \qquad (3)$$

Si u(x,y) verifica la ecuación de primer orden:

$$D_x u - 2D_y u = 0,$$

coincidentemente verificará la (3), es decir, la ecuación propuesta (1). La solución general de esta ecuación diferencial en derivadas parciales, de primer orden, se obtiene sin mayor dificultad, resultando:

u = g(2x + y), donde *g* es una función arbitraria.

Como la ecuación (1) es lineal y homogénea la suma:

$$u = f(x) + g(2x + y), \qquad (4)$$

de las soluciones halladas, será una nueva solución (con *f* y g como funciones arbitrarias).

Ahora se trata de determinar las funciones f y *g* de forma que la superficie S pedida verifique la condición geométrica del enunciado del problema planteado.

La curva de intersección del paraboloide con el plano:

$$\begin{cases} u = x^2 - 2y^2 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \qquad (5)$$

tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x \\ y = 2x - 2 \\ u = x^2 - 2(2x - 2)^2 = -7x^2 + 16x - 8 \end{array}} \qquad (5')$$

Como la superficie S tiene una ecuación de la forma (4) y pasa por la curva (5), al substituir en (4) las ecuaciones paramétricas (5') debe obtenerse una identidad. Así tendremos:

$$-7x^2 + 16x - 8 = f(x) + g(2x + 2x - 2) = f(x) + g(4x - 2) \qquad (6)$$

Igualdad válida para todo *x*.

Las derivadas parciales de la función $u = x^2 - 2y^2$, correspondiente a la ecuación del paraboloide, son:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -4y \end{cases}$$

El valor de estas derivadas en los puntos de la curva (5) es:

$$2x, \quad \text{y} \quad -4(2x - 2) = -8x + 8.$$

Luego un vector perpendicular al plano tangente al paraboloide, en los puntos de la citada curva, es:

$$(p,q,-1) = (2x, -8x + 8, -1).$$

Por otra parte, las derivadas parciales de la función u(x,y) que buscamos, calculadas en (4), son:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(x) + 2g'(2x + y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = g'(2x + y) \end{cases}$$

El valor de estas derivadas en los puntos de la curva (5) es:

$$\begin{cases} f'(x) + 2g'(2x + 2x - 2) = f'(x) + 2q'(4x - 2) \\ g'(2x + 2x - 2) = g'(4x - 2) \end{cases}$$

Luego un vector perpendicular al plano tangente a la superficie S, en los puntos de la citada curva, es:

$$(p,q,-1) = f'(x) + 2g'(4x - 2),\ g'(4x - 2),\ -1.$$

Los dos vectores obtenidos deben ser colineales, ya que se exige que coincidan los planos tangentes mencionados, luego será:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x) + 2g'(4x - 2) = 2x \\ g'(4x - 2) = -8x + 8 \end{array}\right. \qquad (7)$$

Las condiciones (6) y (7) de tal suerte obtenidas nos van a permitir determinar las funciones *f* y *g*.

Multiplicando por 2 la segunda ecuación de (7) y restando de la primera, se obtiene: $f'(x) = 18x - 16$, de donde:

$$f(x) = 9x^2 - 16x + C, \text{ con C constante.} \qquad (8)$$

Haciendo el cambio de variable: $t = 4x - 2$ en la segunda ecuación de (7), se tiene: $g'(t) = -2t + 4g'(t) = -2t + 4$, de donde:

$$g(t) = -t^2 + 4t + k \quad (9), \text{ con K constante.}$$

Llevando estos resultados a la expresión (6), tendremos:

$$-7x^2 + 16x - 8 = 9x^2 - 16x + C - (4x - 2)^2 + 4(4x - 2) + k.$$

Identificando coeficientes se deduce que: $C + K = 20$ (10)

Substituyendo en la igualdad (4) las funciones *f* y *g* dadas por (8) y (9) y teniendo en cuenta (10), se obtiene la ecuación de la superficie pedida.

$$\left\{\begin{array}{l} u = 9x^2 - 16x + C - (2x + y)^2 + 4(2x + y) + K \\ u = 9x^2 - 16x + C - (2x + y)^2 + 4(2x + y) + K\ , \end{array}\right.$$

es decir, que la solución particular buscada será:

$$u(x,y) = 5x^2 - y^2 - 4xy - 8x + 4y + 20.$$

El "output" total será, entonces:

$$u = 500 - 25 - 200 - 80 + 20 + 20 = 235 \text{ ud.}$$

La relación de transformación de productos vendrá dada por:

$$h(x,y) = 5x^2 - y^2 - 4xy - 8x + 4y + 20, \text{ en } (10,5), \text{ esto es:}$$

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = 10x - 4y - 8 \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = -2y - 4x + 4 \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2} = -\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10x-4y-8}{-4x-2y+4} = -\dfrac{36}{23} = -1'565$.

b) Los costes totales vendrán dados por:

CT = CV + CF = $r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot y$ + CF = 8·10 + 3·5 + 50 = 145 (145.000 €),

y entonces:

π = I – CT = 2 $\times$ 235 – 145 = 325; y después de impuestos será:

B = 0’75 $\times$ 325 = 243’75 $\equiv$ 243.750 € .

Ejercicio 14

Hallar la cifra de negocios de una empresa fabricante de motocicletas cuya función de producción viene dada por:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, determinada por las condiciones: $\begin{cases} u(x,0) = 6z(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 6[z(x)+1] \end{cases}$

, en que se cumple que: z’(x) – 2x = 0, con z(0) = 0, si los “inputs” del proceso son: x = 5 ud. e y = 7 ud., y el precio medio ponderado del único “output” es 10.000 € /ud., así como la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

Solución:

Procede, en primer lugar, hallar la expresión de la función z(x) que aparece en las ecuaciones condicionantes. Esta función se resuelve mediante una sencilla EDO de primer orden, puesto que:

$\dfrac{dz}{dx} = 2x$, e integrando resultará que:

z(x) = $\int dz = 2\int x \cdot dx = x^2 + C$; pero según la condición inicial dada: y(0) = C = 0, y se tiene la integral particular: z(x) = x^2.

De este modo, las condiciones de la EDP quedarán nuevamente establecidas así:

$$\begin{cases} u(x,0) = 6x^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 6x^2 + 6 \end{cases}$$

Se trata de una ecuación lineal, homogénea, de segundo orden y coeficientes constantes. Como: a = 1, b = 0 y c = -1, con el discriminante: $(b^2 – 4ac) = 4 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico.

Poniendo, ahora, la ecuación en derivadas parciales en la forma siguiente, usando el operador D:

$$(D_x^2 - D_y^2)u = (D_x + D_y)(D_x - D_y)u = 0\,,$$

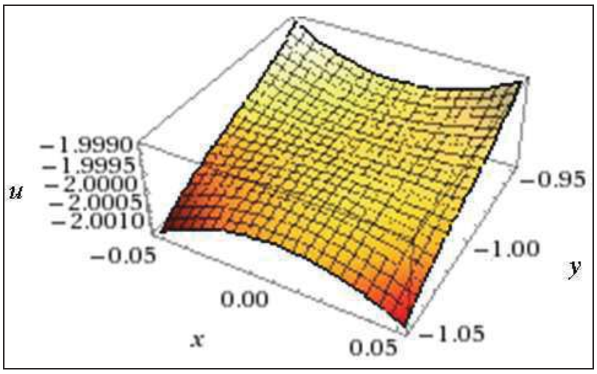
se encuentra inmediatamente su solución general:

u = f(x + y) + g(x – y), donde *f* y *g* son funciones arbitrarias.

Se imponen ahora las condiciones geométricas y se obtiene como solución de nuestro problema:

$$u(x,y) = (x + y)^3 + 3(x + y)^2 + 3(x + y) – (x – y)^3 + 3(x – y)^2 – 3(x – y) =$$
$$= 2(3x^2y + 3x^2 + y^3 + 3y^2 + 3y),$$

cuya representación gráfica es la siguiente:



Ello puede comprobarse sin más que haciendo:

$$u(x,0) = 6x^2;\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 6x^2 + 6\,,\ \text{c.s.q.d.}$$

De este modo, el “output” total anual será:

$$u = 2(3 \times 25 \times 7 + 3 \times 25 + 343 + 3 \times 49 + 21) = 2.222 \text{ ud.},$$

y los ingresos totales o cifra de negocios del ejercicio será:

$$I = u \times p = 2.222 \text{ ud.} \times 10.000 \text{ € /ud.} = 22.220.000 \text{ €} .$$

Por último, la relación de transformación de productos vendrá dada por: $h(x,y) = 2(3x^2y + 3x^2 + y^3 + 3y^2 + 3y)$ en (5,7), esto es:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = 12x(y+1) \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = 6x^2 + 6(y+1)^2 \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2} = -\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x(y+1)}{6x^2+6(y+1)^2} = \dfrac{80}{89} \approx 0'90$.

Ejercicio 15

Hallar la forma analítica de la función de producción u(x,y):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 - \int_1^e \ln x \cdot dx ,$$

que pasa por la recta: $\begin{cases} x = 0 \\ y = u \end{cases}$, y por la parábola: $\begin{cases} y = 0 \\ u = x \cdot z(x) \end{cases}$, siendo z(x) la suma de las extremales de la funcional:

$$F[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^1 (y'^2_1 + 2y'^2_2 + y'_1 \cdot y'_2) \cdot dx \text{, con las condiciones:}$$

$$y_1(0) = 0 \text{ ; } y_1(1) = 1 \text{ ; } y_2(0) = 0 \text{ ; } y_2(1) = 2 ,$$

así como averiguar el "output" total de esta empresa, si las cantidades de los "inputs" son: x = 10 e y = 8, y la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

Solución:

El 2º miembro de la EDP planteada resulta ser:

$1 - \int_1^e \ln x \cdot dx = 1 - [x \cdot \ln x - x]_1^e = 1 - 1 = 0$, y su expresión quedará así:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

Se trata de una ecuación lineal, homogénea, de segundo orden y coeficientes constantes. Como a = 1, b = 6 y c = 9, con el discriminante: $(b^2 – 4ac) = 0$, es una ecuación del tipo parabólico.

Habremos de resolver, en segundo lugar, la determinación analítica de la ecuación de la parábola dada, lo que constituye un problema de cálculo variacional.

El problema planteado consiste en determinar los extremales de F, teniendo en cuenta las condiciones dadas.

Como resulta que la función: $\varphi = y_1'^2 + 2y_2'^2 + y_1'y_2'$, por lo que en este caso en el integrando figuran varias funciones, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0 \ ; \ \frac{\partial\varphi}{\partial y_1'} = 2y_1' + y_2' \ ; \ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} = 0 \ ; \ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2'} = 4y_2' + y_1' .$$

En su consecuencia, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange-Poisson siguiente:

$$\begin{cases} 2y_1'' + y_2'' = 0 \\ 4y_2'' + y_1'' = 0 \end{cases}$$

, del que se deduce que: $y_1'' = y_2'' = 0$ y, por tanto, las integraciones son inmediatas, con lo que:

$$\begin{cases} y_1 = c_1x + c_2 \\ y_2 = c_3x + c_4 \end{cases}$$

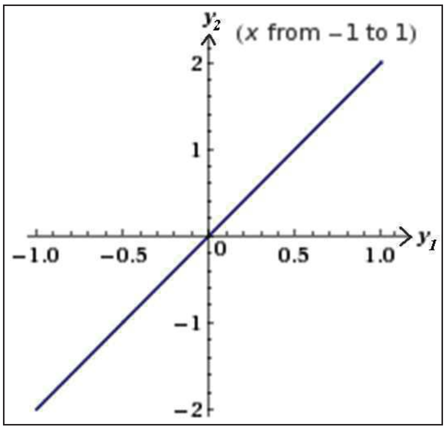
, y teniendo ahora en cuenta las condiciones dadas, resultará que:

$$\begin{cases} y_1(0) = c_2 = 0 \\ y_1(1) = c_1 + c_2 = 1 \\ y_2(0) = c_4 = 0 \\ y_2(1) = c_3 + c_4 = 2 \end{cases}$$

, por lo que: $c_2 = c_4 = 0$; $c_3 = 2$; $c_1 = 1$. Y entonces se tienen las extremales:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1 = x \\ y_2 = 2x \end{array}}$$

, con la siguiente representación paramétrica gráfica:



Consecuentemente se tendría: $y_1' = 1$; $y_2' = 2$, con lo que el funcional que nos ocupa alcanzará el valor siguiente:

$F(y_1,y_2) = \int_0^1 (y'^2_1 + 2y'^2_2 + y'_1 \cdot y'_2)\cdot dx = \left[11x\right]_0^1 = 11$, y la suma de ambos extremales será: $z(x) = y_1(x) + y_2(x) = x + 2x = 3x$, por lo que la ecuación de la parábola quedará definitivamente establecida así:

$$\begin{cases} y = 0 \\ u = x \cdot z(x) = 3x^2 \end{cases}$$

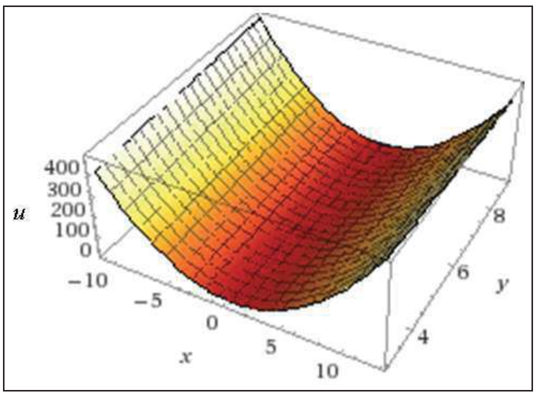
Obsérvese que usando adecuadamente el operador D, podemos escribir, ahora, la EDP así: $(D_x^2 + 6D_xD_y + 9D_y^2)u = (D_x + 3D_y)(D_x + 3D_y)u$, encontrándonos en la situación de factores simbólicos iguales. Se resuelve la ecuación de primer orden: $(D_x + 3D_y)u = 0$, obteniéndose que: $u = f(3x – y)$. La solución general de la ecuación propuesta es:

$u = xf(3x – y) + g(3x – y)$, con *f* y *g* funciones arbitrarias.

Imponiendo ahora las condiciones geométricas resulta:

$$u(x,y) = x(3x – y + 3) + y – 3x = 3x^2 – xy + y,$$

que es la ecuación de la superficie pedida, a la que corresponde la siguiente representación gráfica tridimensional de un paraboloide hiperbólico:



Ello puede comprobarse sin más que haciendo:

$$u(0,y) = y;\ \text{y también: } u(x,0) = 3x^2,\ \text{c.s.q.d.}$$

Entonces, el "output" total de la empresa será:

$$u = 3 \times 10^2 - 10 \times 8 + 8 = 228.$$

Por último, la relación de transformación de productos pedida vendrá dada por: $h(x,y) = 3x^2 - xy + y$ en (10,8), esto es:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = 6x - y \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = 1 - x \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2} = -\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x-y}{1-x} = -\dfrac{52}{9} \approx -5'777$.

Ejercicio 16

La función de producción de una empresa, expresada en miles de ud., viene dada por la superficie integral de la ecuación:

$$z = px + qy + \frac{pq}{4}\text{, que pase por la curva } y = 0,\ z = x^2.$$

Se desea calcular su cifra de negocios si los "inputs" empleados en el proceso productivo (expresados en miles de ud.) son: x = 1, y = 2, y el precio de venta al público del producto final resultante es de 60 € /ud, considerando unas mermas del 3%, así como la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

Solución:

Como siempre, se considerará que: $p = \dfrac{\partial z}{\partial x},\quad q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

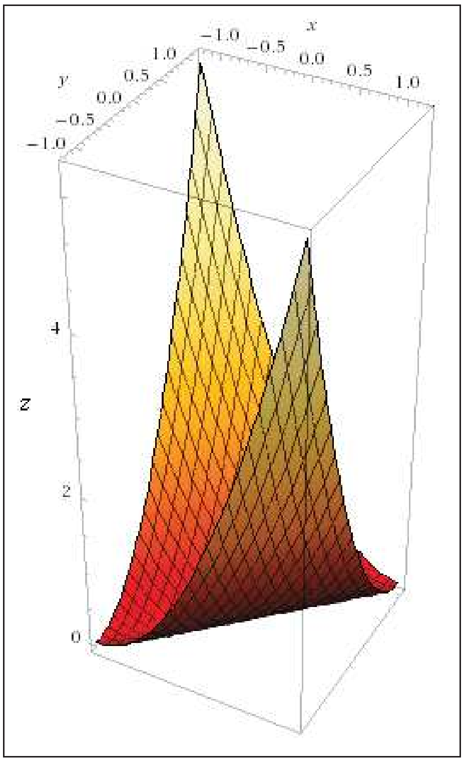
La integral completa de la ecuación tiene la forma $z = ax + by + \dfrac{ab}{4}$. La ecuación de la curva dada en el enunciado se puede escribir en forma paramétrica: $x = t$, $y = 0$, $z = t^2$.

Para determinar la función b = b(a), escribimos el sistema de ecuaciones correspondientes que, en el caso dado, tienen la forma

$t^2 = at + \frac{ab}{4}$ y 2t = a, de donde b = -a, $z = a(x-y) - \frac{a^2}{4}$. La envolvente de esta familia se determina por las ecuaciones:

$$z = a(x-y) - \frac{a^2}{4}, \quad \text{y:} \quad x - y - \frac{a}{2} = 0.$$

Eliminando *a* se obtiene: $z = (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, que es un cilindro parabólico, cuya representación gráfica viene dada por:



Se trata, ahora, de una función de producción homotética y homogénea, de grado m = 2 > 1, que posee rendimientos de escala crecientes, tal como se ha deducido en el anterior ejercicio 10 de este mismo capítulo de nuestro libro. En efecto, se cumple que:

$$z(tx,ty) = t^2x^2 + t^2y^2 - 2txty = t^2(x^2 + y^2 - 2xy) = t^2 \cdot z(x,y).$$

Pues bien, con los datos del problema, se tendrá un "output" total de: u = 1.000.000 + 4.000.000 – 4.000.000 = 1.000.000 ud., que, considerando unas mermas del 3% quedan reducidas a u = 970.000 ud.

Entonces, la cifra de negocios pedida será:

$$I = u \times p = 970.000 \text{ ud} \times 60 \text{ € /ud} = 58.200.000 \text{ €}.$$

Por último, la relación de transformación de productos pedida vendrá dada por: $h(x,y) = (x - y)^2$, en (1.000,2.000), esto es:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = 2(x-y) \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = 2(y-x) \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2} = -\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{y-x} = -1$, y ello es así, en este caso concreto, con independencia de las cantidades empleadas de los "inputs" del proceso productivo.

Ejercicio 17

Las funciones de producción de sendas empresas pertenecientes al mismo *holding*, que emplean las mismas cantidades de "inputs" *x* e *y* en sus procesos productivos, vienen dadas por las EDP's siguientes:

- Empresa 1 $\rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, con las condiciones: $\begin{cases} u(x,0) = 6x^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 6x^2 + 6 \end{cases}$

- Empresa 2 $\rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{5}{6} - \int_0^1 [(2-x) - \sqrt{x}]\cdot dx$, que pasa por la recta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = u \end{cases}, \text{ y por la parábola: } \begin{cases} y = 0 \\ u = 3x^2 \end{cases}$$

Se desea averiguar la cantidad empleada de ambos "inputs", sabiendo que el "output" total de cada empresa, en un ejercicio económico determinado, fue, respectivamente, de: $u_1 = 600$; $u_2 = 100$.

Solución:

a) Empresa 1 $\rightarrow$

Se trata de una ecuación de 2º orden, lineal, homogénea y de coeficientes constantes. Su clasificación exige la formación del discriminante: $(b^2 - 4ac)$, teniendo en cuenta que: a = 1 , b = 0, c = 1, con lo que: $(b^2 - 4ac) = -4 < 0$, luego es del tipo elíptico.

Poniendo la EDP en la forma siguiente (usando el operador D):

$$(D^2_x - D^2_y)u = (D_x + D_y)(D_x - D_y)u = 0,$$

se encuentra inmediatamente la solución general:

$$u = f(x + y) + g(x - y),$$

donde *f* y *g* son funciones arbitrarias.

Se imponen ahora las condiciones de contorno, obteniéndose como solución la integral particular:

$$u = (x + y)^3 + 3(x + y)^2 + 3(x + y) - (x - y)^3 + 3(x - y)^2 - 3(x - y) =$$

$$= 2(3x^2y + 3x^2 + y^3 + 3y^2 + 3y).$$

Ello puede fácilmente comprobarse haciendo:

$$u(x,0) = 6x^2 \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 6x^2 + 6, \text{ c.s.q.d.}$$

Otra comprobación puede realizarse partiendo de la ecuación inicialmente dada, así:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[2(6xy + 6x)\right] = 12y + 12 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[2(3x^2 + 3y^2 + 6y + 3\right] = 12y + 12 \end{cases}$$

que pone de manifiesto la igualdad de dichas segundas derivadas parciales.

b) Empresa 2 $\rightarrow$

Se trata, como se verá, de una ecuación de 2º orden, lineal, homogénea y de coeficientes constantes. Su clasificación exige la formación del discriminante: $(b^2 - 4ac)$, teniendo en cuenta que, en este caso: a = 1 , b = 6, c = 9, con lo que:

$(b^2 - 4ac) = 36 - 36 = 0$, luego es del tipo parabólico.

Procede, en principio, resolver el 2º miembro de esta EDP, o sea:

$$\frac{5}{6} - \int_0^1 [(2 - x) - \sqrt{x}]\cdot dx = \frac{5}{6} - \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0\,.$$

Obsérvese, entonces, que la EDP propuesta es:

$$(D^2_x + 6D_xD_y + 9D^2_y)u = (D_x + 3D_y)(D_x + 3D_y)u = 0;$$

tratándose de una situación de factores simbólicos iguales.

Se resuelve la ecuación de primer orden: $(D_x + 3D_y)u = 0$, obteniéndose: $u = f(3x - y)$.

La solución general de la ecuación propuesta es:

$$u = x \cdot f(3x - y) + g(3x - y),$$

siendo *f* y *g* funciones arbitrarias.

Imponiendo, ahora, las condiciones geométricas del enunciado del problema planteado, resultará:

$$u(x,y) = x(3x - y + 3) + y - 3x = 3x^2 - xy + y,$$

que es la integral particular pedida.

Ello puede comprobarse sin más que haciendo: $u(0,y) = y$; y también: $u(x,0) = 3x^2$, c.s.q.d.

Así mismo, partiendo de la ecuación inicial, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(6x - y) = 6 \\
6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6\dfrac{\partial}{\partial x}(1 - x) = -6 \\
9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 9\dfrac{\partial}{\partial y}(1 - x) = 0
\end{array}\right\}$$

y la suma de estas 3 cantidades es igual a 0, c.s.q.d.

c) Para averiguar las cantidades de “inputs” será, pues, necesario resolver el sistema:

$$\begin{cases} 600 = 2(3x^2y + 3x^2 + y^3 + 3y^2 + 3y) \\ 100 = 3x^2 - xy + y \end{cases}$$

que ofrece las soluciones reales positivas siguientes:

$$x \cong 6'00 \; ; \quad y \cong 1'62.$$

Ejercicio 18

La función de producción *u* de una empresa viene dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \int_3^5 \frac{2x \cdot dx}{\sqrt{x^2 - 9}}, \text{ u(0,y) = sin 0, } u_x(x,0) = x^2. \text{ Se desea:}$$

a) Hallar su "output" cuando sus "inputs" son: x = 3 e y = 2 y la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

b) Determinar sus resultados netos para un precio medio de venta del producto de 2.500 € /ud. y unos gastos totales de 200.000 € , considerando una fiscalidad aplicable del 26% y un 10% de mermas en el proceso productivo.

Solución:

a) Conviene resolver, en primer lugar, la integral definida del 2º miembro de la EDP dada, teniendo en cuenta que la función subintegral no está definida para x = ± 3, con lo que haciendo el cambio de variable: $z = x^2 - 9 \Rightarrow dz = 2x \cdot dx$, se tiene que:

$$\int_3^5 \frac{2x \cdot dx}{\sqrt{x^2 - 9}} = \int_3^5 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \left[2\sqrt{z}\right]_3^5 = \left[2\sqrt{(x^2 - 9)}\right]_3^5 = 8.$$

Para una mejor comprensión, pues, escribamos la EDP de 2º orden, inhomogénea y de coeficientes constantes, así:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y} - u\right] = 8 \Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y} - u\right]dx = \int 8dx \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} - u = 8x + \phi(y).$$

Esta ecuación es una ecuación lineal con factor integrante e^{-y}. Por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-y}u\right] = 8xe^{-y} + e^{-y}\phi(y).$$

De aquí: $u(x,y) = -8x + e^y \int e^{-y}\phi(y)dy + e^y\varphi(x)$, siendo $\varphi(x)$ arbitraria. Si escribimos: $\xi(y) = e^y \int e^{-y}\phi(y)dy$, se tiene:

$$u(x,y) = -8x + \xi(y) + e^y\varphi(x).$$

Como u(0,y) = 0 (1ª condición de contorno), se tiene que:

$\xi(y) = -e^y\varphi(0)$. Por lo tanto: $u(x,y) = -8x - e^y\varphi(0) + e^y\varphi(x)$.

Diferenciando ahora con respecto a *x* y haciendo y = 0 (2ª condición de contorno) resultará:

$$\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right]_{y=0} = -8 + \varphi'(x) = x^2 \Rightarrow \varphi'(x) = x^2 + 8 \Rightarrow$$

$$\varphi(x) = \int (x^2+8)dx = \frac{1}{3}x^3 + 8x + K \text{. De donde:}$$

$$u(x,y) = -8x - e^y\varphi(0) + e^y\left[\frac{1}{3}x^3 + 8x + K\right]$$

Puesto que $\varphi(0)$ es una constante igual a K, $\varphi(0) = \frac{1}{3}0^3 + 8\cdot 0 + K$, y será:

$$u(x,y) = -8x - e^yK + \frac{1}{3}x^3e^y + 8xe^y + e^yK$$

En definitiva: $u(x,y) = \frac{1}{3}x^3e^y + 8xe^y - 8x = \frac{x^3\cdot e^y}{3} + 8x(e^y - 1)$,

entonces, se tendrá un *output* total de:

$$u = \frac{27\times e^2}{3} + 24(e^2-1) = 9e^2 + 24e^2 - 24 = 33e^2 - 24 \cong 220 \text{ ud. de producto.}$$

Por último, la relación de transformación de productos pedida vendrá dada por: h(x,y) = $\frac{x^3\cdot e^y}{3} + 8x(e^y - 1)$, en (3,2), esto es:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = (x^2+8)e^y - 8 \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{x}{3}(x^2+24)e^y \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\frac{h_1}{h_2} = -\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+8)e^y - 8}{\frac{x}{3}(x^2+24)e^y} = \frac{1}{33}(17 - \frac{8}{e^2}) = 0'482$.

b) El resultado antes de impuestos, será, considerando un 10% de mermas:

π = I – CT = p × u – CT = 2.500 × (220 × 0’9) – 200.000 = 295.000 € ,

y después de impuestos se tendrá: B = 0’74 × 295.000 = 218.300 € .

Ejercicio 19

La función de producción *u* de una pequeña empresa, cuyo precio de venta de su único *output* es de p = 70 € /ud, viene expresada en miles de unidades por la siguiente EDP no lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}=\int_0^1 x\cdot\ln x\cdot dx\,.$$

Se pide hallar: a) la cifra de negocios de esta empresa teniendo en cuenta que los "inputs" son x = 5 e y = 8 y que al final del proceso productivo se computa un 1'5% de mermas, b) la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

Solución:

a) Procede, en primer lugar, resolver la integral definida del 2º miembro en la ecuación de la EDP. Entonces:

$\int_0^1 x\cdot\ln x\cdot dx=\left[\frac{x^2}{2}(\ln x)-\frac{x^2}{4}\right]_0^1=-\frac{1}{4}$, quedando la EDP homogénea, de primer orden y coeficientes variables, configurada analíticamente así:

$$\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=0\,.$$

Para resolver la EDP planteada, emplearemos el método de Darboux-Cauchy (alternativo del de Lagrange-Charpit para obtener una integral completa) que proporciona una interpretación muy clara del problema planteado y de su solución aunque exija conocer la solución completa del sistema característico, que será un conjunto de 5 funciones de la variable auxiliar *t* que representa una "banda característica", es decir, una curva junto con un plano tangente en cada uno de sus puntos: {x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)} . Se han de verificar, además, las denominadas "condiciones de banda". El problema de Cauchy, pues, consistirá en encontrar la superficie integral que contiene una cierta curva: $\Gamma \equiv$ {f(s), g(s), h(s)}; para ello, se resuelve el sistema característico siguiente, que es un sistema no lineal asociado a la EDP, y cuyas curvas-solución se denominan "líneas características":

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{du}{pF_p+qF_q}=-\frac{dp}{F_x+pF_u}=-\frac{dq}{F_y+qF_u}=dt\ .$$

Geométricamente la solución es clara. Puesto que el plano tangente a la superficie integral buscada tiene que contener la tangente a la curva en cada punto de ella, trazaremos los planos tangentes al cono correspondiente a cada punto, que pasan por la tangente a la curva dada en él, y éstos serán planos tangentes a otras tantas superficies integrales que pasan por dicho punto. Cada uno de ellos individualizará, con el punto, una banda característica que pasa por él. Al mover el punto sobre la curva, la sucesión de planos tangentes determinará la superficie integral como lugar geométrico de las curvas características individualizadas por cada uno de dichos planos. Tendremos, pues, tantas superficies integrales como planos tangentes al cono podamos trazar por cada tangente (Puig, 1962).

Debe tenerse en cuenta que la superficie buscada u(x,y) ha de contener la curva, obteniéndose la superficie solución en forma paramétrica: [x(t,s), y(t,s), u(t,s)] .

Pongamos esta EDP en la forma F(x,y,u,p,q) = 0, esto es:

px + qy – pq = 0, y la solución pasando por la curva:

$$\Gamma \equiv \{x = \alpha(s) = 0,\ y = \beta(s) = s,\ u = \gamma(s) = s\}, \qquad (1)$$

es obviamente la bisectriz del plano (y,u). Para determinar si existe una solución única, veamos si existen dos funciones $\sigma(s)$ y $\tau(s)$ satisfaciendo las debidas condiciones. En nuestro caso, estas condiciones son:

$$\begin{cases} 0\cdot\sigma(s) + 1\cdot\tau(s) = 1 \\ 0\cdot\sigma(s) + s\tau(s) - \sigma(s)\tau(s) = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones tienen una única solución que es:

$\tau(s) = 1$, $\sigma(s) = s$. Tenemos, por consiguiente, una sola banda integral:

$$B \equiv (0,s,s,s,1).$$

Vamos ahora a comprobar que se verifica la condición de transversalidad. Como $F_p = x - q$ y $F_q = y - p$, tenemos: $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, lo cual demuestra que la solución está bien definida. Para calcularla, consideremos el sistema característico siguiente:

$$dt = \frac{dx}{x-q} = \frac{dy}{y-p} = \frac{du}{px+qy-2pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q}. \qquad (2)$$

Nuestro objetivo, como se ha dicho, es encontrar una solución del tipo:

$$\{x = x(s,t),\ y = y(s,t),\ u = u(s,t),\ p = p(s,t),\ q = q(s,t)\},$$

que satisfaga las siguientes condiciones iniciales del problema planteado:

$$\{x(s,0) = \alpha(t),\ y(s,0) = \beta(s),\ u(s,0) = \gamma(s),\ p(s,0) = \sigma(s),\ q(s,0) = \tau(s)\}.$$

De esta manera, encontramos una superficie de $\Re^5$. Su proyección a $\Re^3$ mediante sus tres primeras coordenadas nos dará la superficie solución. Ésta será:

$$\{x = x(s,t),\ y = y(s,t),\ u = u(s,t)\}\ ,$$

en función de los parámetros *s* y **t**. Para encontrarla, vamos a integrar el sistema, paso a paso, escribiendo las constantes que surgen en función del parámetro *s*:

$$\begin{cases} dt = -\dfrac{dp}{p} \Rightarrow p(s,t) = a(s)\cdot e^{-t}, \quad p(s,0) = a(s) = \sigma(s) = s \Rightarrow p(s,t) = s\cdot e^{-t} \\ dt = -\dfrac{dq}{q} \Rightarrow q(s,t) = b(s)\cdot e^{-t}, \quad q(s,0) = b(s) = \tau(s) = 1 \Rightarrow q(s,t) = e^{-t} \end{cases}$$

Éstas son las ecuaciones más sencillas de resolver del sistema (2). Tenemos también:

$$dt = \frac{dx}{x-q} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x - e^{-t} \Rightarrow x' - x = -e^{-t} \Rightarrow x^* = A(s)\cdot e^{t} \Rightarrow \text{si } x_p = h\cdot e^{-t} \Rightarrow x'_p = -h\cdot e^{-t}$$

$$\text{y resulta: } -2h\cdot e^{-t} = -e^{-t} \Rightarrow h = 1/2 \Rightarrow x(s,t) = A(s)e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}, \quad x(s,0) = A(s) + \frac{1}{2} = \alpha(s) = 0$$

lo que implica que: $x(s,t) = \dfrac{1}{2}(e^{-t} - e^{t})$.

La ecuación: $dt = \dfrac{dy}{y-p}$ se resuelve de una manera similar y da como solución: $y(s,t) = \dfrac{s}{2}(e^{-t} + e^{t})$, como puede comprobarse con facilidad.

Resolvamos ahora la ecuación: $dt = \dfrac{du}{px + qy - 2pq}$.

Substituyendo adecuadamente en la ecuación anterior, se obtiene:

$$dt = -\frac{du}{s \cdot e^{-2t}} \text{ , e integrando resulta:}$$

$$u(s,t) = -\int s \cdot e^{-2t} \cdot dt = -\frac{s}{2}e^{-2t} + C = \frac{s}{2}(1 + e^{-2t}) .$$

Las ecuaciones anteriores nos ofrecen, de forma paramétrica, la solución de nuestro problema.

Aunque no siempre es posible, en este caso concreto se pueden eliminar los dos parámetros (s,t) entre estas tres ecuaciones, para dar la solución al problema de Cauchy en forma implícita, siendo ésta la siguiente:

$$u^2 = y^2 + 2xyu .$$

Un cálculo sencillo permite demostrar que ésta es efectivamente una solución de la EDP planteada y que la curva dato (1) está contenida en esta superficie.

Esta función se puede expresar así: $u = \frac{u^2 - y^2}{2xy}$, y explícitamente:

$$u = xy \pm \sqrt{(x^2 + 1)y^2} = xy \pm y\sqrt{x^2 + 1} = y(x \pm \sqrt{x^2 + 1}) .$$

Tratándose de una función de producción, con lo que necesariamente u > 0, será necesario adoptar el valor, $u = y(x + \sqrt{x^2 + 1})$, y en este caso, el “output” total valdrá, con x = 5 e y = 8:

$$u = 8(5 + \sqrt{26}) = 80'792 \equiv 80.792 \text{ ud.,}$$

y restando las mermas (1’5%), se tendrá una producción neta de:

$$80.792 \times 0'985 = 79.580 \text{ ud.}$$

De este modo, la cifra de negocios pedida vendrá dada por:

$$I = u \times p = 79.580 \text{ ud.} \times 70 \text{ € /ud.} = 5.570.600 \text{ €} .$$

<u>NOTA:</u> Obsérvese que la ecuación inicial dada se ha expresado abreviadamente en la forma: F(x,y,u,p,q) = 0, esto es:

$$p \cdot x + q \cdot y - p \cdot q = 0,$$

donde, como siempre, se ha considerado que: $p = u'_x$; $q = u'_y$.

b) Por último, la relación de transformación de productos pedida vendrá dada por: h(x,y) = $y(x+\sqrt{x^2+1})$, en (5,8), esto es:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+1}} + y \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = x + \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2} = -\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+1}} + y}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}} = 4\sqrt{\dfrac{2}{13}} = 1'569$.

Ejercicio 20

Sea la EDP: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y^3$, donde u(x,y) es una función de producción. Resolverla si dicha ecuación está sometida a las condiciones siguientes:

$$u(1,y) = 2y^2 - 4y \; ; \quad u(x,-2) = x + 2\int_0^2 \int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx \cdot dy \; .$$

Solución:

Procede, en primer lugar, resolver la segunda condición lateral dada, esto es:

$$u(x,-2) =$$

$$= x + 2\int_0^2 \int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx \cdot dy = x + 2\int_0^2 [(4-y^2) - (1-\frac{y^2}{4})] \cdot dy = x + 6\int_0^2 (1-\frac{y^2}{4}) \cdot dy = x + 8 \, .$$

La EDP planteada, inhomogénea y de 2º orden, quedará expresada así:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = x + y^3 \Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] dx = \int (x+y^3)dx = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + y^3 x + \phi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int (\frac{x^2}{2} + y^3 x + \phi(y))dy \Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{4}xy^4 + \int \phi(y)dy + \varphi(x).$$

De aquí que, como se ha indicado en la teoría, se llega a que:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{4}xy^4 + \xi(y) + \varphi(x) \, ,$$

siendo: $\xi(y) = \int \phi(y)dy$, que es la solución general de la ecuación planteada.

Substituyendo x = 1 en la expresión anterior, se tendrá:

$$u(1,y) = \frac{1}{2}1^2 y + \frac{1}{4}1y^4 + \xi(y) + \varphi(1) = 2y^2 - 4y \Rightarrow \xi(y) = 2y^2 - 4y - \frac{y}{2} - \frac{y^4}{4} - \varphi(1),$$

y ordenando, se tiene: $\xi(y) = -\frac{1}{4}y^4 + 2y^2 - \frac{9}{2}y - \varphi(1)$.

De modo que se llega a que:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{4}xy^4 - \frac{1}{4}y^4 + 2y^2 - \frac{9}{2}y - \varphi(1) + \varphi(x).$$

Usando la condición u(x,-2) = x + 8 se tiene que:

$$u(x,-2) = \frac{1}{2}x^2(-2) + \frac{1}{4}x(-2)^4 - \frac{1}{4}(-2)^4 + 2(-2)^2 - \frac{9}{2}(-2) - \varphi(1) + \varphi(x).$$

Realizando las operaciones indicadas obtenemos:

$$u(x,-2) = -x^2 + 4x - 4 + 32 + 9 - \varphi(1) + \varphi(x) =$$
$$= -x^2 + 4x + 37 - \varphi(1) + \varphi(x) = x + 8.$$

De donde: $\varphi(x) = x + 8 + x^2 - 4x - 37 + \varphi(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x) = x^2 - 3x - 29 + \varphi(1)$, que si substituimos en la solución general nos queda:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{4}xy^4 - \frac{1}{4}y^4 + 2y^2 - \frac{9}{2}y - \varphi(1) + x^2 - 3x - 29 + \varphi(1), \text{ es decir:}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{4}xy^4 - \frac{1}{4}y^4 + 2y^2 - \frac{9}{2}y + x^2 - 3x - 29,$$

que es la solución particular buscada.

Se puede utilizar la primera terminología de problemas de valor inicial y de frontera para las EDP's. Sin embargo, debido a que generalmente hay una combinación de condiciones de frontera e iniciales, con frecuencia nos referimos a tales problemas como Problemas de Valor de Frontera (PDVF). (Véase el concepto detallado en el capítulo 1).

Ejercicio 21

En este ejercicio se considerará un modelo de crecimiento neoclásico, en que las cantidades de capital y trabajo necesarias para producir una unidad de *output* son variables, de acuerdo con la función de producción siguiente, del tipo Cobb-Douglas, donde Y es la raíz cuadrada de la inversa de la función Z que viene dada por la EDP:

$$K(Z^2 - L^2)Z_K + L(K^2 - Z^2)Z_L = Z(L^2 - K^2), \text{ con:}$$

$$Z(K,K) = \frac{1}{K^2}, \ \forall\ K > 1, \text{ siendo:}$$

$$\begin{cases} Y = \textit{Output} \text{ total} \\ K = \text{Capital insumo} \\ L = \text{Trabajo insumo} \end{cases}$$

Suponiendo que el aumento de población es del 2% anual, y que se ahorra un 20% de la Renta Nacional, se pregunta:

1º- Las condiciones que determinan el equilibrio de crecimiento de la Economía.

2º- Dibujar la función de producción "per cápita", haciendo el cambio de variables $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, señalando el punto de equilibrio.

3º- Calcular la distribución de la renta entre el capital y el trabajo, dibujando la ecuación del salario.

4º- Obtener el tipo de beneficio en esa Economía, así como el tipo de interés, si el nivel de los precios (inflación) aumenta un 2% todos los años, sistemáticamente.

Solución:

1º- Esta EDP ya ha sido resuelta en otro ejercicio de este mismo libro, arrojando como resultado: $Z = \frac{1}{K \cdot L}$. De este modo, se tendrá que:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{Z}} = \sqrt{K \cdot L} = K^{1/2} \cdot L^{1/2}.$$

Haciendo el cambio de variables $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$ obtenemos la función de producción "per cápita".

$$y \times L = \sqrt{K} \times L \Rightarrow y = k^{1/2}$$

$$\begin{cases} u = \text{Tipo de crecimiento natural} = 2\%;\ s = 20\% \\ v = \text{Relación capital-producto} = \dfrac{k}{y} = \dfrac{k}{\sqrt{k}} = k^{1/2} \\ g = \text{Tipo de crecimiento garantizado} = \dfrac{20}{v} = \dfrac{s}{v};\ 2 = \dfrac{20}{v} \end{cases}$$

$$\boxed{v = 10 \qquad k = 100 \qquad y = 10}$$

2º-

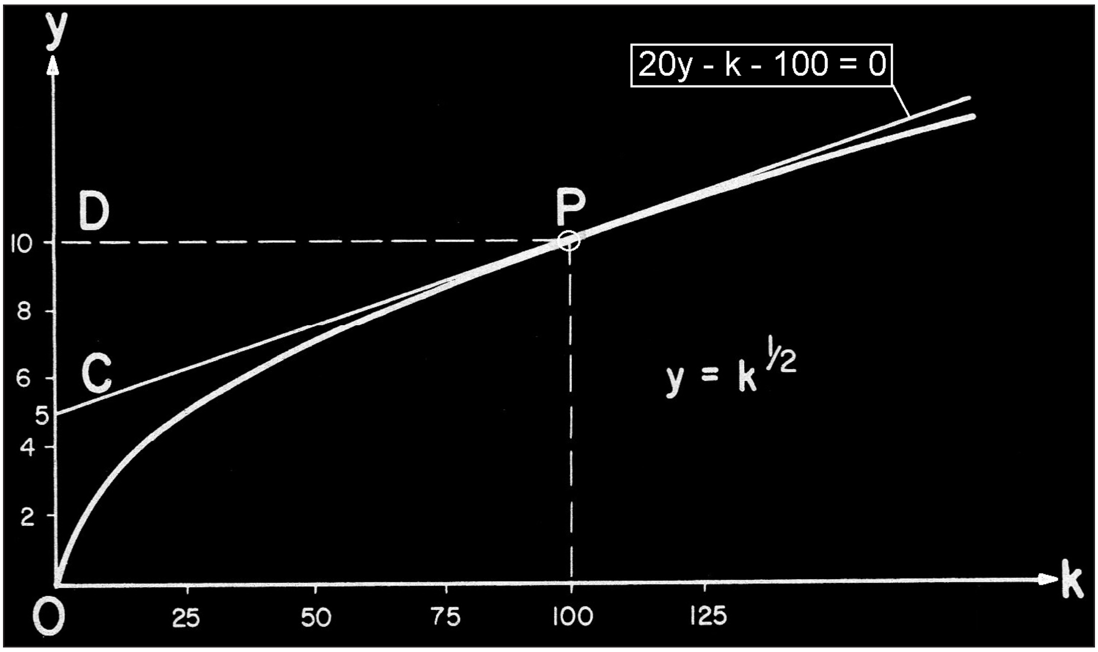


Fig. 13. Función de producción (IV).

$$\begin{cases} CD = \text{Ingresos del capital} \\ OC = \text{Ingresos del trabajo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial K} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L}{K}\right)^{1/2}, \text{Ingresos del capital} = K\dfrac{\partial Y}{\partial K} = \dfrac{1}{2}Y \\ \dfrac{\partial Y}{\partial L} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1/2}, \text{Ingresos del trabajo} = L\dfrac{\partial Y}{\partial L} = \dfrac{1}{2}Y \end{cases}$$

3º- La renta se distribuye en partes iguales entre el capital y el trabajo.

En el diagrama anterior, el ingreso del capital es igual a CD ya que:

CD = PD $\times$ tg CPD = 5, el ingreso del trabajo es OC = OD – CD = 5.

Veamos, en este problema, la variación de algunas magnitudes:

K	**y**	$\rho = \dfrac{dy}{dK}$	$\boldsymbol{\omega}$
100	10	5%	5
75	8'5	$\cong$ 6%	4'25
50	7	$\cong$ 7%	3'50
25	5	10%	2'50
4	2	25%	1

siendo: $\begin{cases} \rho \rightarrow \text{“tipo de beneficio”} \\ \omega \rightarrow \text{salario o ingresos del trabajo} \end{cases}$

Veamos que cuando $\rho\uparrow \Rightarrow \omega\downarrow$.

Veamos la llamada "ecuación del precio de los factores" (Samuelson) o "ecuación del salario" (Hicks), a saber:

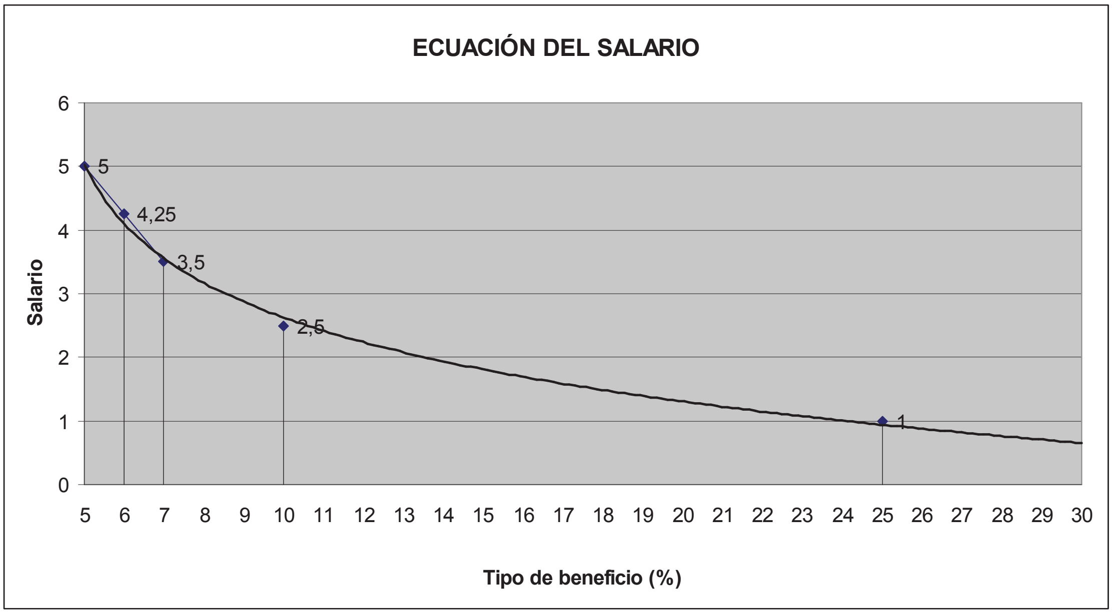


Fig. 14. Ecuación del salario (IV).

4º- La rentabilidad de la inversión es: $\rho = \dfrac{\text{Beneficios}}{\text{Capital}} = \dfrac{\Pi}{\alpha} = \dfrac{5}{100}$ = **5 %**.

Si los precios aumentan un 2% anual, el tipo de interés en la economía deberá ser: **i** = 5 + 2 = **7 % anual**.

Ejercicio 22

La función de producción de un modelo similar al del ejercicio anterior, una vez resuelta la EDP correspondiente, es $Y = 6K^{1/3}L^{2/3}$. La población aumenta un 2% anualmente.

En este modelo los trabajadores gastan toda su renta en consumo, mientras que los preceptores de beneficios ahorran una proporción del 25% de su renta. Se pregunta:

1º- Las condiciones que determinan el equilibrio de crecimiento de la Economía.

2º- Dibujar la función de producción "per cápita" y = f(k) donde: $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, señalando el punto de equilibrio.

3º- Obtener los ingresos respectivos del capital y el trabajo.

4º- Calcular la rentabilidad de la inversión, dibujando la ecuación del salario.

Solución:

1º- Haciendo el cambio: $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, obtenemos la función de producción "per cápita".

$$y = 6 \cdot k^{1/3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi = \text{beneficios "per cápita"} = \frac{dy}{dk} \times k = 2k^{1/3} \\ \text{Inversión = Ahorro} = 0'25 \cdot 2k^{1/3} = 0'5K^{1/3}\text{, es lo que se invierte, en realidad.} \\ u = \text{Tipo de crecimiento natural} = 2\% \\ g = \text{Tipo de crecimiento garantizado} = \frac{I}{k} = \frac{0'5k^{1/3}}{k} = \frac{0'5}{k^{2/3}} \end{array} \right.$$

Igualando: $\frac{2}{100} = \frac{0'5k^{1/3}}{k}$, de donde: k = 125

$y = 6 \times 125^{1/3} = 30$; $\Pi = 2 \times 125^{1/3} = 10$; rentas de trabajo = 20

2º-

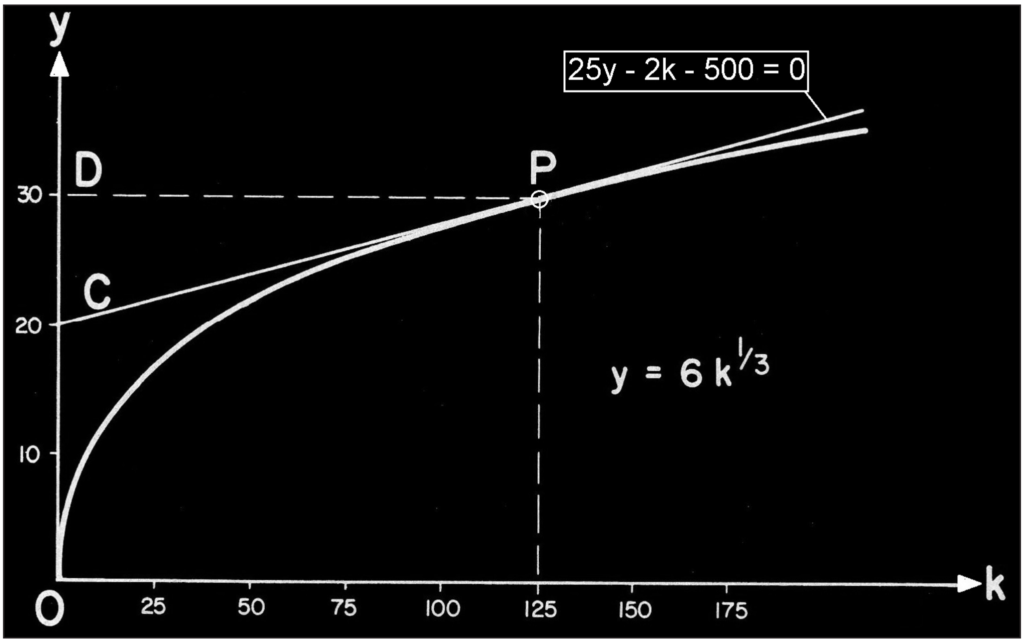


Fig. 15. Función de producción (V).

$$\begin{cases} \text{Beneficio} = CD = PD \cdot \text{tang } CPD = 10 \\ \text{Ingreso de los trabajadores} = OC = OD - CD = 30 - 10 = 20 \end{cases}$$

3º- Tratándose de una función de producción Cobb-Douglas, linealmente homogénea, la distribución de la renta entre el capital y el trabajo, viene dada por los exponentes de K y L, es decir 1/3 y 2/3:

$$\begin{cases} \text{Beneficios} = \frac{1}{3} \times 30 = 10 \\ \text{Ingresos de los trabajadores} = \frac{2}{3} \times 30 = 20 \end{cases}$$

4º- Rentabilidad de la inversión $= \rho = \frac{10}{125} =$ 8%.

También se podría haber obtenido de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = n = \frac{I}{K} = \frac{s_{\Pi} \cdot \Pi}{K} = s_{\Pi} \cdot \rho = n = \frac{2}{0'25} = 8\,.$$

$$\begin{cases} s = \text{proporción de renta ahorrada por los capitalistas.} \\ \rho = \text{tipo de beneficio.} \\ \Pi = \text{beneficios.} \end{cases}$$

K	y	$\rho = \frac{dy}{dK}$	ω
100	28	$\cong$ 9'3%	19
75	25	$\cong$ 11'2%	17
50	22	$\cong$ 14'7%	15
25	17	$\cong$ 23'4%	11

$$\omega = \frac{2}{3}y\,;\quad \rho = {}^{2/3}\sqrt[3]{K^2}\,.$$

La representación gráfica de la "ecuación del salario", obtenida por ajuste minimocuadrático polinomial, será:

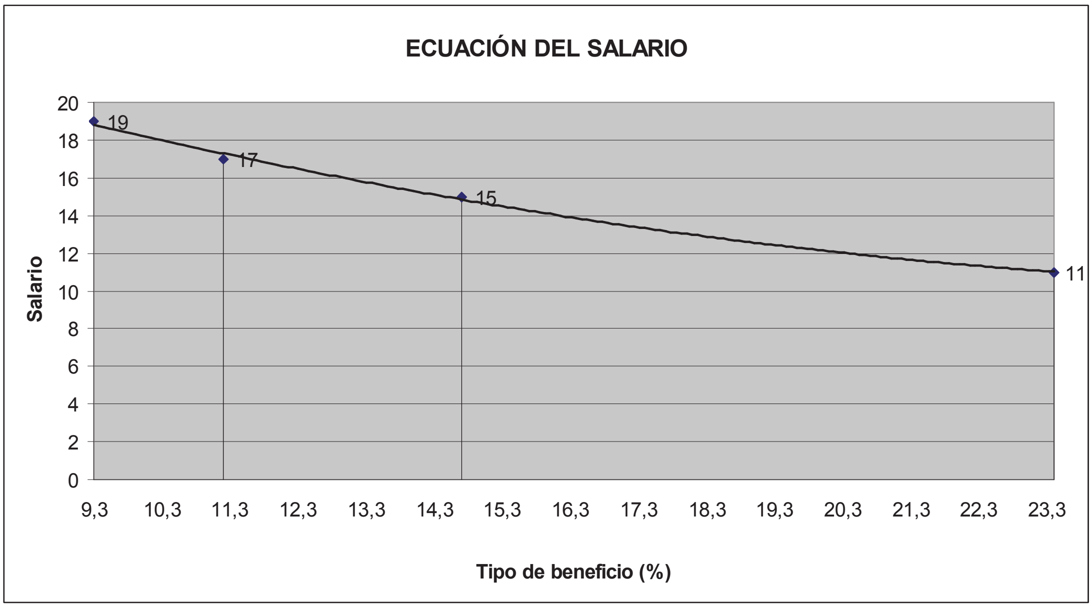


Fig. 16. Ecuación del salario (V).

Ejercicio 23

En un modelo de crecimiento similar a los anteriores, una vez resuelta la EDP correspondiente, la función de producción viene dada por: $Y = 20K^{1/4}L^{3/4}$, donde, como siempre, Y es el output total, K y L los *inputs* de capital y trabajo y el crecimiento de la población es de 4%.

El ahorro de la economía se hace según el supuesto clásico, es decir, todos los beneficios se invierten, mientras que los trabajadores gastan en bienes de consumo toda su renta. Se pregunta:

1º- Las condiciones que determinan el equilibrio de crecimiento, así como su elasticidad de sustitución.

2º- Dibujar la función de producción y = f(k) donde: $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, señalando el punto de equilibrio.
3º- Calcular la distribución de la renta entre el capital y el trabajo.

4º- Calcular la rentabilidad de la inversión y dibujar la ecuación del salario.

Solución:

1º- Al tratarse de una función de producción del tipo Cobb-Douglas generalizada, se caracteriza por tener una elasticidad de sustitución unitaria entre sus factores, con independencia del valor de ($\alpha + \beta = 1$). Por ello, en este caso, se tiene también que: $\sigma_{(L,K)} = 1$.

Haciendo el cambio: $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, obtenemos la función de producción "per cápita":

$$y = 20 \cdot k^{1/4} \; ; \; \Pi = \frac{dy}{dk} \times k = 5k^{1/4} \; ;$$

$$\begin{cases} u = \text{Tipo de crecimiento natural} = 4\% \\ \rho = \text{Tipo de crecimiento garantizado} = \dfrac{\Pi}{k} = \dfrac{5}{k^{3/4}} \end{cases}$$

($\Pi \rightarrow$ puesto que, en el modelo clásico, todos los beneficios se invierten)

En equilibrio de crecimiento: $\frac{4}{100} = \frac{5}{k^{3/4}}$; $\begin{cases} k = 625 \\ y = 100 \\ \Pi = 5 \times 625^{1/4} = 25 \end{cases}$

Entonces: $y = 20 \times 625^{1/4} = 100$.

2º- Aquí, se tendrá:

K	**y**	$\rho = \frac{\Pi}{dK}$	$\boldsymbol{\omega}$
16	40	62'5%	30
81	60	18'5%	45
256	80	7'8%	60
625	100	4%	75

Y resulta: $\omega = \frac{3}{4} y = 3K\rho$, puesto que, por definición: $\rho = \frac{dy}{dK} = \frac{\Pi}{K}$; en este problema: $\Pi = \frac{1}{4} y$; o sea: $\boxed{\rho = \frac{y}{4K}}$.

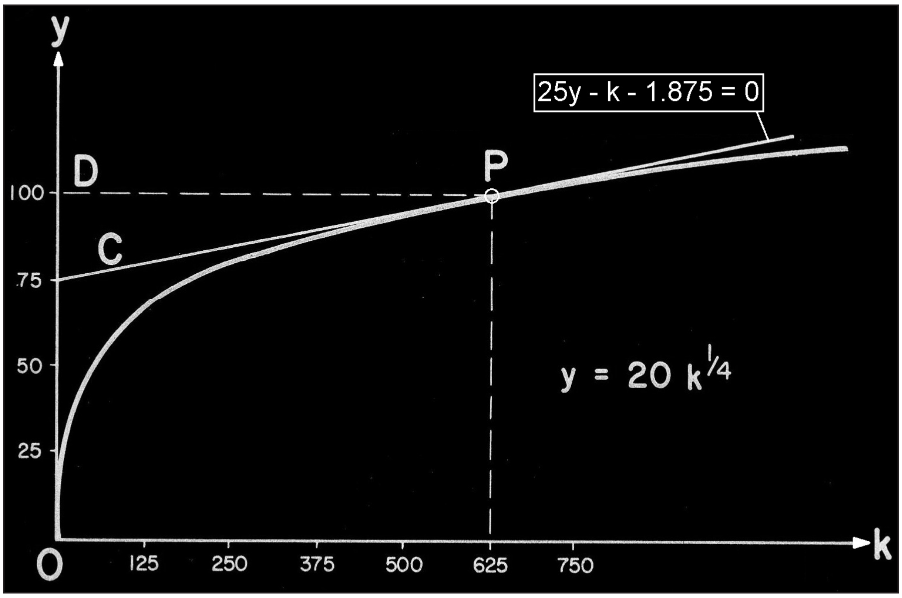


Fig. 17. Función de producción (VI).

3º- $\begin{cases} \text{Ingresos de los capitales} = CD = \dfrac{1}{4}y = 25 \\ \text{Ingresos de los trabajadores} = OC = \dfrac{3}{4}y = 75 \end{cases}$

4º- Crecimiento garantizado $= \dfrac{I}{K} = \dfrac{\Pi}{K} = \rho =$ rendimiento del capital.

$$\left(\rho = \frac{\Pi}{K} = \frac{\Pi}{4} = n = 4\%\right);\ \boldsymbol{\rho} = \frac{\Pi}{K} = \frac{25}{625} = \frac{1}{25} = \mathbf{4\%},$$

y la representación gráfica de la "ecuación del salario" con su ajuste minimocuadrático logarítmico será:

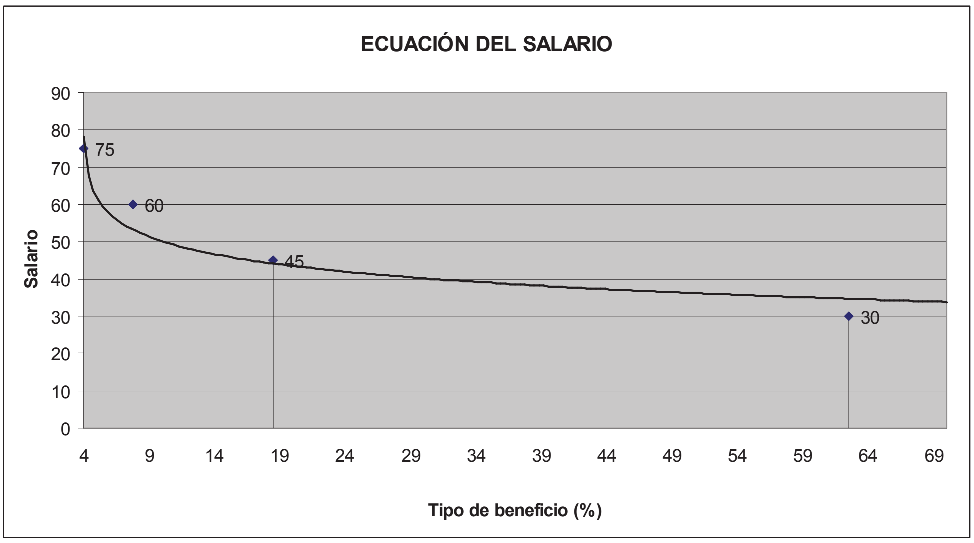


Fig. 18. Ecuación del salario (VI).

Debe tenerse en cuenta que, con el supuesto de ahorro clásico, el tipo de beneficio es igual al tipo de crecimiento.

Ejercicio 24

Hallar el valor de la función de producción *u* dada por la solución de la ecuación: $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = \int_0^{\pi}(\cos x + 1)dx - \frac{4}{3}\int_{\pi/2}^{2\pi}\sin^2 y\cdot dy$, que cumple la condición que u(0,y) = y^2 para todo *y*, cuando los "inputs" del proceso productivo son x = 2 e y = 3. Se pide hallar el valor de las productividades marginales y medias con respecto a ambos *inputs* o factores de producción, así como la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

(adaptado de Moreno, C., UNED, 1999)

Solución:

Habrá que resolver, en primer lugar, el 2º miembro de la EDP planteada. Esto es:

$$\int_0^{\pi}(\cos x + 1)dx - \frac{4}{3}\int_{\pi/2}^{2\pi}\sin^2 y\cdot dy = [\sin x + x]_0^{\pi} - \frac{4}{3}\left[\frac{y}{2} - \frac{\sin y\cdot\cos y}{2}\right]_{\pi/2}^{2\pi} = \pi - \frac{4}{3}(\pi - \frac{\pi}{4}) = 0.$$

Las líneas de campo verifican las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \\ \frac{dz}{dt} = 0. \end{cases}$$

Si se multiplica la primera ecuación por *x* y la segunda por *y*, y se suman, se deduce que:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0\text{, o bien su equivalente: } \frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) = 0\text{,}$$

que es una EDP lineal de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

De aquí se concluye la relación: $x^2 + y^2 = c$, donde c es constante en cada línea de campo. La expresión $x^2 + y^2$ es una integral primera del campo ya que permanece constante en el flujo. Es decir, se verifica que:

$$x(t,s)^2 + y(t,s)^2 = x(0,s)^2 + y(0,s)^2, \text{ para todo } t.$$

Si se impone la condición inicial se obtiene la expresión:

$$x(t,s)^2 + y(t,s)^2 = y(0,s)^2 = z(0,s).$$

Esta relación tiene el siguiente significado geométrico: las curvas características de la ecuación son circunferencias de centro el origen de coordenadas.

De modo similar, de la segunda ecuación diferencial, se deduce que: $z = c$, con c constante, es otra integral primera y por consiguiente:

$$z(t,s) = z(0,s).$$

Esta relación indica que el valor de la solución permanece constante a lo largo de una curva característica.

De las dos relaciones anteriores se desprende, en definitiva, que:

$z = u(x,y) = x^2 + y^2$, es la función cuya gráfica es la superficie buscada. Se trata de una función de producción homogénea, ya que:

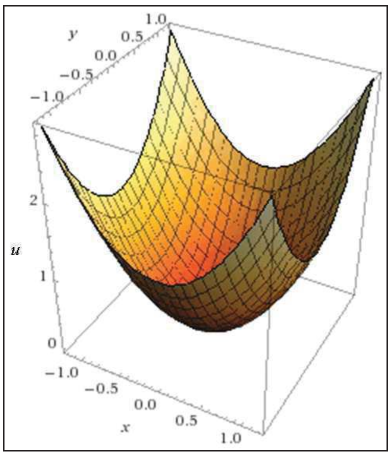
$$u(tx, ty) = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 \cdot u(x, y),$$

luego es homogénea de grado $m = 2 > 1$, con rendimientos de escala crecientes, cumpliéndose el teorema de Euler, puesto que:

$x \cdot f'_x + y \cdot f'_y = m \cdot u(x,y)$. En efecto, substituyendo se tiene que:

$$x \cdot 2x + y \cdot 2y = 2(x^2 + y^2) = 2 \cdot u(x,y) \text{ , c.s.q.d.}$$

La representación gráfica corresponde a un paraboloide infinito, con un mínimo global en el punto $(x,y) = (0,0)$. Así:



Las productividades pedidas pueden resumirse en el siguiente cuadro:

$$\text{PMa de x} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 4$$
$$\text{PMa de y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 6$$
$$\text{PMe de x} = \frac{u}{x} = \frac{x^2 + y^2}{x} = \frac{4+9}{2} = 6'5$$
$$\text{PMe de y} = \frac{u}{y} = \frac{x^2 + y^2}{y} = \frac{4+9}{3} = 4'\widehat{3}$$

Las productividades marginales referidas a ambos *inputs* pueden verse gráficamente a continuación:

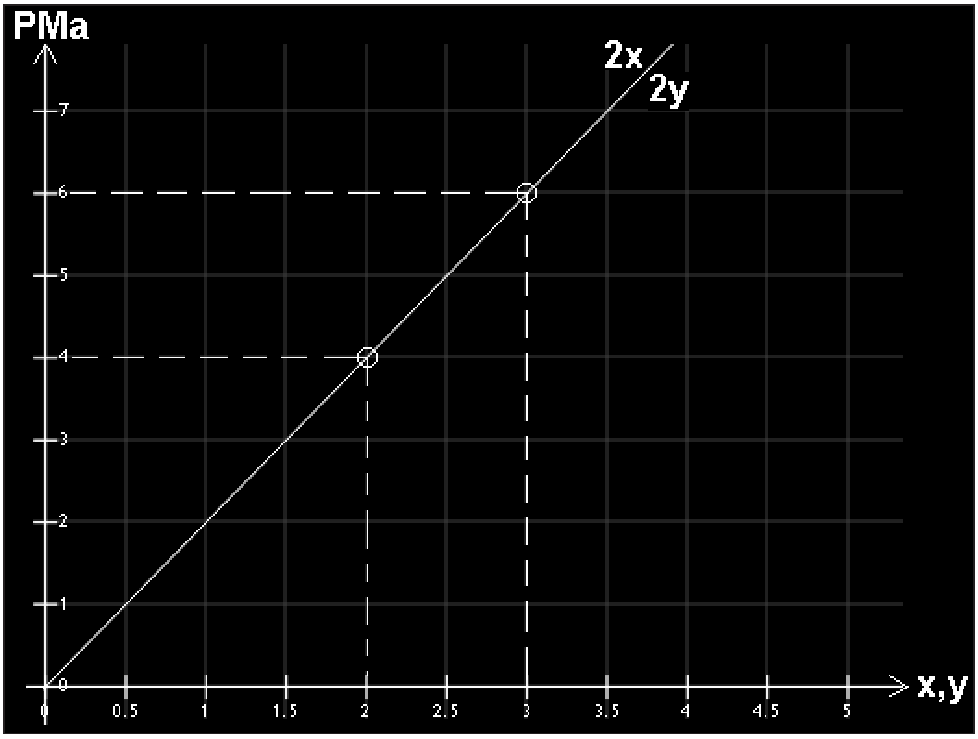


Fig. 19. Productividades marginales.

Para la conceptualización de esta cuádrica o superficie de 2º orden debe tenerse en cuenta que su matriz (A) es:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y entonces: } |A| = -1/4 < 0.$$

$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$ luego se trata de un paraboloide elíptico, con centro impropio. Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0 \text{ ,}$$

de donde: $S_1 = 1 = S_2$, $S_3 = 0$. Se trata, pues, de una cuádrica de revolución, con la siguiente ecuación reducida:

$$S_1x^2 + S_2y^2 \pm 2\sqrt{\frac{-I_4}{I_2}}z = 0 \text{ , siendo:}$$

I_4 (invariante bicuadrático) = $|A|$ = -1/4 , y también:
I_2 (invariante cuadrático) = $A_{11} + A_{22} + A_{33}$.

Si ahora calculamos estos determinantes adjuntos o cofactores en A_{44}, o sea:

$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, con lo que su ecuación reducida será:

$$x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{\frac{1/4}{1}}z = x^2 + y^2 \pm z = 0.$$

Veamos, en fin, que en el punto (2,3) se tendrá que la función de producción que nos ocupa valdrá: u = 4 + 9 = 13.

Por último, la relación de transformación de productos pedida vendrá dada por: $h(x,y) = x^2 + y^2$, en (2,3), esto es:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = 2x \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2} = -\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} = 0'\widehat{6}$.

Ejercicio 25

Sea la función de producción *u* dada por la solución de la EDP:

$q_2 \frac{\partial u}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial u}{\partial q_2} = I_1 - I_2$, que cumple la condición que $u(0,q_2) = q_2^2$ para todo q_2, cuando los "inputs" del proceso productivo son $q_1 = 3$ y $q_2 = 4$, siendo:

$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dq_1}{1+q_1^2}$; $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_2}{(q_2^2+1)(q_2+1)}$. Se pide calcular la relación de transformación de productos así como el valor de las productividades marginales y medias con respecto a ambos *inputs* o factores de producción.

Solución:

Procede, en primer lugar, despejar el 2º miembro de la EDP planteada por diferencia de sendas integrales definidas que resolveremos como aplicación en el campo complejo.

En efecto, estudiaremos la integral curvilínea: $I_1 = \int_C \frac{dz}{1+z^2}$ a lo largo del contorno de la figura correspondiente, por el método de los residuos, con un único polo dentro del recinto: z = i. Entonces:

$$\text{Residuo} = R = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2i}.$$

$$\text{Podemos escribir: } \int_{-R}^{R} \frac{dq_1}{1+q_1^2} + \int_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i R = \pi.$$

Cuando $R \to \infty$ la segunda integral es nula, ya que:

$$\left| \int_C \frac{dz}{1+z^2} \right| \le \underset{R\to\infty}{\frac{\pi R}{R^2}} \to 0, \text{ obteniéndose: } 2I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_1}{1+q_1^2} = \pi, \text{ luego: } I_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)}, \quad \text{siendo los polos} \begin{cases} z = i \\ z = -i \\ z = -1 \end{cases}$$

Como hemos se rodea al polo z = -1 con un semicírculo de radio r sólo cae dentro del recinto el polo z = i. Entonces:

$$R_1 = \frac{1}{3z^2 + 2z + 1} = \frac{1}{-2 + 2i} = -\frac{1+i}{4}.$$

$$\int_{-R}^{-1-r} \frac{dq_2}{(q_2^2+1)(x+1)} + \int \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)} + \int_{-1+r}^{R} \frac{dq_2}{(q_2^2+1)(q_2+1)} +$$
$$+ \int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)} = 2\pi i\left(-\frac{1+i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}(1-i). \qquad (1)$$

La segunda integral, cuando $r \to 0$, o sea $z \to -1$ vale:

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)} = \left[\text{ya que } \underset{z\to -1}{(z+1)f(z)} = \frac{1}{2}\right] = -\pi i \frac{1}{2},$$

y la cuarta integral se anula cuando $R \to \infty$, ya que:

$$\left|\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)}\right| \leq \frac{\pi R}{R^3} \to 0,$$

obteniéndose al sustituir en (1) y hacer $r \to 0$, $R \to \infty$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_2}{(q_2^2+1)(q_2+1)} - \frac{1}{2}\pi i = \frac{\pi}{2}(1-i), \text{ de donde: } I_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Como consecuencia de ello, la EDP será:

$$q_2 \frac{\partial u}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial u}{\partial q_2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

que es una EDP lineal de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

Puede verse que la EDP aquí planteada ya ha sido resuelta en el ejercicio anterior sin más que considerar: $x = q_1$ e $y = q_2$. De este modo, se llega a la solución particular: $u = q_1^2 + q_2^2 = h(q_1,q_2)$, que, como se ha visto, es una función homogénea de grado $m = 2 > 1$, con rendimientos de escala crecientes. Entonces:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial q_1} = 2q_1 \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial q_2} = 2q_2 \end{cases} \text{, de donde: RTP} = \frac{h_1}{h_2} = -\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = \frac{2q_1}{2q_2} = \frac{3}{4} = 0'75,$$

y el valor de la función de producción es: $u = 9 + 16 = 25$.

Por último, las productividades pedidas pueden resumirse en el siguiente cuadro:

$$h_1 = \text{PMa de } q_1 = \frac{\partial u}{\partial q_1} = 2q_1 = 6$$
$$h_2 = \text{PMa de } q_2 = \frac{\partial u}{\partial q_2} = 2q_2 = 8$$
$$\text{PMe de } q_1 = \frac{u}{q_1} = \frac{q_1^{\,2} + q_2^{\,2}}{q_1} = \frac{9+16}{3} = 8'\widehat{3}$$
$$\text{PMe de } q_2 = \frac{u}{q_2} = \frac{q_1^{\,2} + q_2^{\,2}}{q_2} = \frac{9+16}{4} = 6'25$$

Ejercicio 26

Una fábrica especializada en productos lácteos utiliza como materia prima la leche (x_1), cuyo precio es de r_1 = 2'50 u.m. Se vende un solo *output* a un precio de p = 10 u.m. y se considera el resto de los factores productivos como un solo agregado (x_2) cuyo precio es el doble del precio del otro factor, siendo los costes fijos de 15 u.m. y viniendo la función de producción $u(x_1,x_2)$ dada por la EDP siguiente:

$$x_1\left(v^2 - x_2^{\,2}\right)v_{x_1} + x_2\left(x_1^{\,2} - v^2\right)v_{x_2} = v\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right), \text{ con } v(x_1, x_1) = \frac{1}{x_1^{\,2}}, \forall x_1 > 1,$$

donde $u(x_1,x_2)$ es la raíz cuadrada de la inversa de la función $v(x_1,x_2)$. Se desea obtener: a) las cantidades consumidas de los *inputs* x_1 y x_2 si el máximo beneficio neto que puede alcanzar la fábrica es de 18'75 u.m. (con una fiscalidad del 25%) y si, en esta situación, se igualan las cantidades consumidas de ambos factores productivos, b) los costes variables, la cifra de negocios de la empresa, las diferentes productividades, la relación marginal de sustitución de los factores productivos y su elasticidad de sustitución, y c) la elasticidad cruzada de la demanda de dichos factores, si un aumento del precio de la leche de 0'50 u.m. provoca un aumento del consumo de los factores productivos agregados del 20% (adaptado de Martín y Sánchez, UNED, 2001, p.145).

Solución:

a) La solución de la EDP planteada ya ha sido hallada en algún otro ejercicio de este mismo libro, obteniéndose como solución:

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}, \text{ de donde: } u(x_1,x_2) = \sqrt{\frac{1}{v(x_1, x_2)}} = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = x_1^{\,1/2} \cdot x_2^{\,1/2}.$$

Los beneficios brutos (antes de impuestos) de la empresa vienen dados por la expresión:

$\pi = p\sqrt{x_1 \cdot x_2} - r_1 x_1 - r_2 x_2$, pero como $x_1 = x_2$ y $r_2 = 2 \cdot r_1 = 2(2'5) = 5$ u.m. se

tiene que: $\pi = 10\sqrt{x_1 \cdot x_2} - 2'5x_1 - 5x_2 = \frac{B}{1-0'25} = \frac{18'75}{0'75} = 25$ u.m., con lo que:

$\pi = 10x_1 - 2'5x_1 - 5x_1 = 2'5x_1 = 25$, de donde se deduce que:

$$x_1 = x_2 = 10 \text{ ud.}$$

b) El *output* total de la empresa será, pues:

$$u = x_1^{0'5} \cdot x_2^{0'5} = \sqrt{10 \times 10} = 10 \text{ ud.}$$

y la cifra de negocios correspondiente:

$$I = u \times p = 10 \times 10 = 100 \text{ u.m.}$$

Los costes totales serán: CT = I - π = 100 – 25 = 75 u.m., con lo que habrán unos costes variables de: CV = CT – CF = 75 – 15 = 60 u.m.

Las productividades marginales y medias son las siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{c} h_1 = \text{PMa respecto a } x_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = 0'5 \\ h_2 = \text{PMa respecto a } x_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = 0'5 \\ \text{PMe respecto a } x_1 = \frac{u}{x_1} = \frac{\sqrt{x_1 \cdot x_2}}{x_1} = 1 \\ \text{PMe respecto a } x_2 = \frac{u}{x_2} = \frac{\sqrt{x_1 \cdot x_2}}{x_2} = 1 \end{array}}$$

Por último, la relación marginal de transformación (o "relación técnica de sustitución") vendrá dada por:

$$RMT = \frac{h_1}{h_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{0'5}{0'5} = 1.$$

Obsérvese que, en este caso, la función de producción que nos ocupa es del tipo Cobb-Douglas, con A = 1, $\alpha = \beta = ½$, o sea, linealmente homogénea y homotética. Pues bien, así como la RMT mide la pendiente de la isocuanta, la "elasticidad de sustitución" pedida mide su curvatura, o más concretamente, da idea de la variación relativa del cociente entre los factores de producción x_1, x_2, dividida por la variación relativa de la RMT, manteniéndose fijo el nivel de producción. Es decir, esta medida ofrece cómo varía el cociente entre las cantidades de los factores cuando varía la pendiente de la isocuanta. Cuanto mayor sea esta expresión, más fácil resulta sustituir un factor por otro, en el sentido de que hace falta una menor variación en la RMT para acomodar un cambio habido en la proporción de los factores actuantes.

De una forma intuitiva, una elevada elasticidad de sustitución, que representaremos por $\sigma_{(x_2,x_1)}$, supone una escasa sensibilidad de las productividades marginales ante cambios en las proporciones de los factores. Por el contrario, una baja elasticidad de sustitución supone una importante sensibilidad de las PMa ante cambios en las proporciones de los factores (Guzmán *et alt*., 1999).

La función de Cobb-Douglas generalizada se caracteriza por tener una elasticidad de sustitución unitaria entre sus factores, con independencia del valor de (α + β). Por ello, en este caso, se tiene también que: $\sigma_{(x_2,x_1)} = 1$.

c) La elasticidad cruzada de la demanda es una medida de la sensibilidad de la demanda de un bien ante el cambio en el precio de un bien *sustituto* (sustitutivo) o un *complementario*, *ceteris paribus*. Esta elasticidad cruzada va a ser positiva cuando se trata de bienes sustitutos, va a ser negativa cuando se trata de bienes complementarios (que tienden a utilizarse conjuntamente) o valdrá 0 cuando se trate de bienes *independientes* (en este caso, las variaciones en el precio de un bien no alteran la cantidad demandada del otro). El coeficiente de elasticidad correspondiente se calcula como la variación porcentual en la cantidad del bien x_2 con respecto a la variación en el precio del bien x_1, o sea:

$$E_c = \frac{\Delta\% Q_{x_2}}{\Delta\% P_{x_1}} = \frac{\dfrac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q_1}}{\dfrac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}}.$$

El precio de la leche pasa de P_1 = 2’50 u.m. a P_2 = 3’00 u.m. y, como consecuencia, el consumo del factor agregado x_2 pasa de Q_1 = 10 ud. a Q_2 = 12 ud. Esto es:

$$E_c = \frac{\dfrac{12-10}{12+10}}{\dfrac{3'00-2'50}{3'00+2'50}} = \frac{2/22}{0'50/5'50} = \frac{11}{11} = 1 > 0,$$

luego, al tratarse de una E_c positiva, nos hallamos en presencia de sendos bienes sustitutos.

Ejercicio 27

Sea la función de producción *u* dada por la solución de la EDP:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 2x\cdot \sin y \text{, con: } \begin{cases} u(x,0) = -x^2 \\ u(0,y) = y^2 \end{cases}$$

Si los "inputs" del proceso productivo son x = 2'5 e y = 3'5, se pide: a) calcular la relación de transformación de productos así como el valor de las productividades marginales y medias con respecto a ambos *inputs* o factores de producción, y b) hallar las diferentes elasticidades de la función de producción en dicho punto.

Solución:

a) Puesta la ecuación en la forma: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2x \sin y$,

e integrando con respecto a *x*, suponiendo *y* constante, se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \sin y + f(y),$$

donde f(y) es una función arbitraria, que se supone continua.

Integrando ahora esta última ecuación con respecto a *y*, con *x* constante, resulta:

$$u(x,y) = \int [x^2 \sin y + f(y)]dy = -x^2\cos y + g(y) + h(x),$$

donde g(y) es una función primitiva de f(y), y h(x) una función arbitraria.

Aplicando las condiciones de contorno se tiene:

$$\begin{cases} u(x,0) = -x^2 \Rightarrow g(0) + h(x) = 0 \\ u(0,y) = y^2 \Rightarrow g(y) + h(0) = y^2 \end{cases}$$

De la primera ecuación condicionante se deduce:

h(x) = - g(0), y con ello: h(0) = - g(0).

De la segunda ecuación condicionante:

$$g(y) = y^2 – h(0), \text{ es decir: } g(y) = y^2 + g(0).$$

Por lo tanto, la solución particular del problema es:

$$u(x,y) = -x^2\cos y + g(y) + h(x) = -x^2\cos y + y^2 = h(x,y). \text{ Entonces:}$$

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = -2x\cdot\cos y \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = 2y + x^2\cdot\sin y \end{cases}, \text{ de donde: RTP } = \frac{h_1}{h_2} = -\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2x\cdot\cos y}{2y + x^2\cdot\sin y} = 0'97,$$

en el punto (2’5,3’5), y el valor de la función de producción es:

u = 18’1029.

Por último, veamos que las productividades pedidas pueden resumirse en el siguiente cuadro:

$$\boxed{\begin{array}{c} h_1 = \text{PMa de } x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4’68 \\ h_2 = \text{PMa de } y = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 4’81 \\ \text{PMe de } x = \dfrac{u}{x} = \dfrac{y^2 - x^2\cdot\cos(y)}{x} = 7’24 \\ \text{PMe de } y = \dfrac{u}{y} = \dfrac{y^2 - x^2\cdot\cos(y)}{y} = 5’17 \end{array}}$$

b) Se tiene que, según se ha visto:

$$\begin{cases} u'_x = -2x\cdot\cos y \\ u'_y = 2y + x^2\cdot\sin y \end{cases}$$

- Elasticidades parciales:

- $E_x = \dfrac{x}{u} \times u'_x = \dfrac{-2x^2\cdot\cos y}{y^2 - x^2\cdot\cos y} = \dfrac{2'5}{18'1029} \times 4'68 = 0'65 < 1$

- $E_y = \dfrac{y}{u} \times u'_y = \dfrac{2y^2 + x^2\cdot y\cdot\sin y}{y^2 - x^2\cdot\cos y} = \dfrac{3'5}{18'1029} \times 4'81 = 0'93 < 1$

, y ambas funciones son relativamente inelásticas.

- Elasticidad total:

$$E_t = E_x + E_y = 0'65 + 0'93 = 1'58 > 1,$$

y en este caso se trata de una función relativamente elástica.

- Elasticidades direccionales:

Las elasticidades direccionadas con respecto a ambos ejes coordenados cartesianos rectangulares, es decir, para 0º y 90º, en el punto: $(x_0, y_0) = (2'5, 3'5)$, son las siguientes:

$$\begin{cases} {}_xE_xu(x_0, y_0) = \dfrac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \dfrac{0'65}{2'5} \times \sqrt{18'5} = 1'12 > 1 \\ {}_yE_yu(x_0, y_0) = \dfrac{E_y}{y_0} \times \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \dfrac{0'93}{3'5} \times \sqrt{18'5} = 1'14 > 1 \end{cases}$$

, luego ambas funciones son relativamente elásticas.

CAPÍTULO 5

FUNCIONES DE INGRESOS Y COSTES

1. INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

Con frecuencia, se considera resuelto el problema de la determinación de la óptima combinación de factores productivos, llevándose a efecto el análisis de la empresa en términos de ingresos y costes como funciones del *output*. En estas condiciones, el problema del empresario estriba en seleccionar el *output* que maximice su beneficio.

Una empresa estrictamente maximizadora de ingresos elegirá aquel volumen de producción que anula el ingreso marginal (o que anula la derivada de la función de ingresos totales); es decir, debería llevar la producción hasta el punto de que si vendiera una unidad más de producto ello le produjese una disminución de sus ingresos totales. Sin embargo, si se pretende maximizar los ingresos sin prestar atención a los costes ni a los beneficios se puede estar incurriendo en pérdidas que comprometan el futuro empresarial. Por lo tanto, es más realista suponer que el empresario trata de maximizar sus ingresos pero obteniendo, al mismo tiempo, un mínimo nivel de beneficios (Garín, 2011).

El empresario puede querer minimizar la cantidad de *inputs* necesaria para obtener unos ingresos determinados. Geométricamente, el empresario desea alcanzar la curva de transformación de productos más baja entre las que poseen un punto en común con una determinada línea de igual ingreso. En el caso de la maximización condicionada del ingreso, desea alcanzar la línea de igual ingreso más elevada, entre las que tienen en común con una curva dada de transformación de productos. Si esas curvas son cóncavas hacia el origen de coordenadas, cada punto de tangencia de una línea de isoingreso con una curva de transformación de productos representa la solución de los dos problemas planteados, a saber: maximización condicionada del ingreso y minimización condicionada del *input*. El lugar geométrico de todos estos puntos de tangencia constituye la "senda o trayectoria de expansión del *output*", concepto de interpretación similar a la trayectoria de expansión de los *inputs* empresariales en la producción simple.

El término "función de coste" se usa para denotar el coste expresado como función del *output*. El término "ecuación de coste" se usará preferentemente para calificar el coste expresado en términos de los niveles de *inputs* y sus precios. El coste de los *inputs* fijos (CF) hay que pagarlo independientemente de cuanto produzca la empresa, o de si ni siquiera produce o vende. La función de coste expresa el coste mínimo para producir cada *output* y se obtiene bajo el supuesto de que el empresario actúa racionalmente. Dichas funciones pueden adoptar configuraciones analíticas diferentes, considerándose, normalmente, que el coste total (CT) es función cúbica del nivel de *output*, aunque ello no siempre es así, como tendremos ocasión de comprobar en algunos de los ejercicios aquí propuestos.

En el supuesto anteriormente expresado, las funciones CTMe (coste total medio), CVMe (coste variable medio) y CMa (coste marginal) son todas curvas de 2º grado que, a medida que se aumenta el nivel del *output*, al principio disminuyen y luego aumentan. La curva CMa alcanza su mínimo antes que CTMe y CVMe, y CVMe alcanza su mínimo antes que CTMe. La curva CMa pasa por los puntos mínimos de CTMe y CVMe. La curva CFMe (coste fijo medio) es una hipérbola equilátera, independientemente de las formas de las otras curvas de coste, ya que cuando aumenta el *output* el coste fijo se reparte entre un número mayor de unidades y, por tanto, decrece monótonamente. El CF es una recta paralela al eje de abscisas y la distancia vertical existente entre las curvas CTMe y CVMe es igual a CFMe, de aquí que disminuya cuando aumenta el *output*.

Generalmente, el nivel del CF del empresario no afecta en sus decisiones de optimización a corto plazo, puesto que hay que pagarlo independientemente del nivel de *output* y su única influencia consiste en añadir un término sumatorio constante a la función de costes totales y desaparece al derivar la función. Por esta razón, el CMa resulta independiente del CF, y el análisis matemático de la optimización se puede formular en términos exclusivos de la función de costes variables. A largo plazo, la función de coste total ofrece el mínimo coste de producción de cada nivel de *output* cuando el empresario es libre de variar el tamaño de su empresa; para un nivel dado del *output*, el decisor calcula el coste total para cada posible tamaño de su empresa y escoge aquel en que el coste sea mínimo (Henderson y Quandt, 1962).

2. EJERCICIOS

Ejercicio 1

En un mercado de duopolio, con un producto diferenciado, una empresa quiere mantener una participación fija en las ventas totales, independientemente de los efectos de su actuación, sobre los beneficios a corto plazo. La otra empresa es líder del mercado, en el sentido de que sus acciones serán siempre seguidas por la empresa primera.

La función de costes de la empresa segunda, líder, es la siguiente:

$C_2 = ¼·q_2^2 + 10q_2 + 100$, y su función inversa de demanda es:

$$p_2 = 50 – q_2 – 0'25q_1.$$

La empresa primera desea mantener una participación del 25% en las ventas totales. Se pide:

a) Determinar las cantidades de producto que ofrecería cada empresa, el precio de venta del producto de la empresa segunda, líder, y sus beneficios.

b) Si la función de demanda de la empresa líder viene dada ahora por la EDP:

$$\begin{cases} q_1\cdot(p_2)_{q_1} + q_2\cdot(p_2)_{q_2} + \frac{1}{2}\left[(p_2)^2_{q_1} + (p_2)^2_{q_2}\right] - p_2 = 0, \\ \text{con}: p_2(q_1,0) = \frac{1-q_1^2}{2} \end{cases}$$

resolver el problema con los mismos datos pero considerando unos costes fijos CF = 25 y variables: $CV = \frac{q_2}{5}$.

Solución:

a) $\frac{q_1}{q_1+q_2} = \frac{25}{100}$; $q_1 = \frac{1}{3}q_2$; el beneficio será:

$$B_2 = I_2 - C_2 = (50 - q_2 - \frac{q_2}{12})q_2 - (\frac{1}{4}q_2^2 + 10q_2 + 100),$$

y su maximización exige que:

$\frac{\delta B_2}{\delta q_2} = 0$, $q_2 = 15$, $q_1 = 5$, $p_2 = 33'75$, $B_2 = 200$ u.m. , con:

$$\begin{cases} I_2 = p_2·q_2 = 33'75 \times 15 = 506'25 \text{ u.m.} \\ C_2 = I_2 – B_2 = 506'25 – 200 = 306'25 \text{ u.m.} \end{cases}$$

b) En este caso, sabemos por la resolución de un problema anterior que la solución particular de la nueva función inversa de demanda es:

$$p_2(q_1,q_2) = \frac{1-q_1^2}{2} - q_2.$$

Entonces, el beneficio vendrá dado por:

$$B_2 = I_2 - C_2 = \left(\frac{9-q_2^2}{18} - q_2\right)q_2 - \left(\frac{q_2}{5} + 25\right) = -\frac{5q_2^3 + 90q_2^2 - 27q_2 + 2250}{90}.$$

Su maximización exige que (condición de primer grado o necesaria):

$\frac{\delta B_2}{\delta q_2} = \frac{3}{10} - \frac{q_2^2}{6} - 2q_2 = 0$, de donde se deduce la existencia de un punto crítico en: $q_2 = 3\sqrt{\frac{21}{5}} - 6 \cong 0'148$. Pero como (condición de 2º grado o suficiente): $\frac{\delta^2 B}{\delta q_2^2} = -\frac{q_2 + 6}{3} < 0$, luego se trata, efectivamente, de un máximo local. Entonces:

$$q_1 = \frac{q_2}{3} \cong 0'049\,,\quad p_2 = \frac{1 - 0'049^2}{2} - 0'148 \cong 0'35\,;\quad B_2 \cong -25.$$

Así pues, en este segundo caso, se producirían pérdidas, con:

$$I_2 = p_2 \cdot q_2 = 0'35 \times 0'148 \approx 0'052 \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{q_2}{5} + 25 \approx 25'052.$$

Ejercicio 2

La función de producción de una empresa viene dada por:

$$\begin{cases} -xu_x - yu_y + \frac{1}{2}\left(u_x^2 - u_y^2\right) + u + 2 = \int_0^{\pi} \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| \cdot dx, \\ u(x,0) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right). \end{cases}$$

y los precios de los “inputs” *x* e *y*, en un mercado de competencia perfecta, son respectivamente r_1 = 2 u.m. y r_2 = 8 u.m. Se desea: a) Determinar la ecuación de los costes totales en función del volumen de producción *u*, si los costes fijos ascienden a 200 u.m. b) Con los mismos datos, estimar la correspondiente ecuación de costes totales para otra empresa, competidora de la anterior, cuya función de producción es:

$$u = (x+5)^{\frac{1}{6}} \times (y+6)^{\frac{1}{6}} + (4 \cdot c).$$

c) Determinar las funciones de costes medios y marginales en ambos casos, con las correspondientes representaciones gráficas.
(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 32).

Solución:

a) El 2º miembro de la EDP planteada será:

$$\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|\cdot dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\cdot dx=2\text{ , y la EDP será:}$$

$$-xu_x-yu_y+\frac{1}{2}\left(u_x^2-u_y^2\right)+u=0\,,$$

que es una EDP no lineal de primer orden, homogénea y de coeficientes variables. En este caso, la ecuación viene definida por la función:

$F(x,y,z,p,q)=-xp-yq+\frac{1}{2}\left(p^2-q^2\right)+z$, y la condición inicial queda parametrizada del siguiente modo:

$$\gamma(s)\equiv(\alpha_1(s),\alpha_2(s),\beta(s))=\left(s,0,\frac{1}{2}\left(s^2+1\right)\right),\ \forall s\in\Re.$$

Se comprueba con facilidad que las condiciones de banda y compatibilidad se verifican siempre que:

$$p_0(s)=s \qquad y \qquad q_0(s)=\pm 1.$$

Dado que la condición de transversalidad se satisface siempre que:

$$\det\begin{pmatrix}F_p & \alpha_1^{'}\\ F_q & \alpha_2^{'}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q_0 & 0\end{pmatrix}=q_0\neq 0\,,$$

deducimos que este problema tiene únicamente dos soluciones. Éstas vendrán dadas al resolver los sistemas característicos asociados a cada banda inicial, los cuales siguen la siguiente expresión:

$$\begin{cases} x^{'}=-x+p, & x(0)=s,\\ y^{'}=-y-q, & y(0)=0,\\ z^{'}=-xp+p^2-yq-q^2, & z(0)=\frac{1}{2}\left(1+s^2\right),\\ p^{'}=0, & p(0)=s,\\ q^{'}=0, & q(0)=q_0(s),\end{cases}$$

conjuntamente con la ecuación adicional siguiente:

$$z=xp+yq-\frac{1}{2}\left(p^2-q^2\right).\quad (1)$$

Consideremos en un primer momento el caso q_0 = 1. De las dos últimas ecuaciones, es evidente que:

$$p(t,s) = s, \text{ y } q(t,s) = 1.$$

Usando ahora la expresión (1) sabemos que las tres primeras variables son la única solución de la ecuación, tomando:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b(t,s) = \begin{pmatrix} s \\ -1 \\ \dfrac{s^2-1}{2} \end{pmatrix}, \qquad C(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \dfrac{s^2+1}{2} \end{pmatrix}.$$

Con lo cual se tiene que:

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t,s) = s, \\ y(t,s) = e^{-t} - 1 \\ z(t,s) = e^{-t} + \dfrac{1}{2}\left(s^2 - 1\right) \end{array}}$$

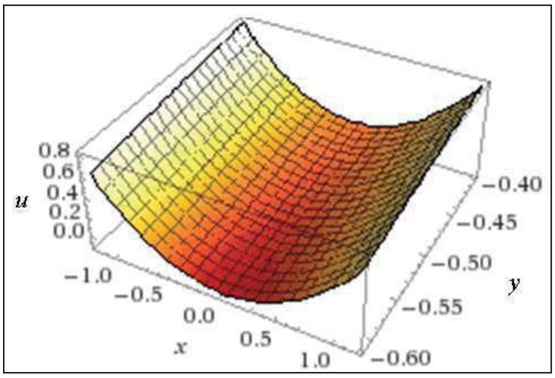
La solución vendrá dada por la expresión:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right) + y\,.$$

Considerando ahora q_0 = -1, obtenemos que:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right) - y\,,$$

es la otra solución buscada. En cualquier caso, al tratarse de una función de producción carece de sentido económico esta 2ª solución, que afecta con el signo negativo la cantidad del “input” y, por lo que adoptaremos la 1ª solución hallada como definitiva, cuya representación gráfica, como cilindro parabólico, viene dada por (x^2 + 2y – 2z + 1 = 0):



Para la conceptualización de esta cuádrica o superficie de 2º orden, debe tenerse en cuenta que su matriz (A) es:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y entonces: } |A| = 0 .$$

$$\text{También: } A'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ con } |A| = 0 \text{ y: } a_{11} \cdot A_{44} = 0, \text{ y como:}$$

$$\text{Rango o característica } \begin{cases} r(A) = k = 3 \\ r(A_{44}) = h = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Cilindro parabólico.}$$

Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0 ,$$

de donde: $S_1 = 1$, $S_2 = S_3 = 0$. Se trata, pues, de una cuádrica de revolución, con la siguiente ecuación reducida:

$$S_1x^2 \pm 2y\sqrt{\frac{-I'_3}{I_1}} = 0 \text{ , siendo el invariante especial de los cilindros:}$$

$$I'_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33} \text{ , y también:}$$

I_1 (invariante métrico o lineal) = $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1 + 0 + 0 = 1$,

$$I'_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 - 1 = -2 .$$

Con ello resultará, que la ecuación reducida buscada es:

$$x^2 \pm 2y\sqrt{2} .$$

Debe tenerse en cuenta que, para que exista un significado económico, al tratarse de una función de producción, necesariamente debe cumplirse que: $u \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, o sea, que la función en cuestión tiene como dominio de definición el octante positivo de la esfera. Cuando x = y = 0, *u* alcanza un mínimo de valor ½ = 0'5.

La ecuación de la trayectoria de expansión de la empresa vendrá dada por:

$$\frac{f_1'}{f_2'} = \frac{r_1}{r_2}. \text{ Esto es: } \frac{x}{1} = \frac{2}{8}; \qquad x = \frac{1}{4}; \qquad u = \frac{x^2+1}{2} + y = \frac{17}{32} + y.$$

Por otra parte, los costes variables serán:

$$CV = r_1 \cdot x + r_2 \cdot y = 2x + 8y = \frac{1}{2} + 8y = \frac{1}{2} + 8\left(u - \frac{17}{32}\right), \text{ y los costes totales serán:}$$

$$CT = CV + CF = \frac{1}{2} + 8u - \frac{17}{4} + 200 = 8u + \frac{785}{4}.$$

b) En el caso de la segunda empresa analizada, se tendrá que:

$$f_1' = \frac{1}{6} \times (x+5)^{-\frac{5}{6}} \times (y+6)^{\frac{1}{6}}; \qquad f_2' = \frac{1}{6}(x+5)^{\frac{1}{6}} \times (y+6)^{-\frac{5}{6}}; \text{ entonces:}$$

$$\frac{f_1'}{f_2'} = \frac{(x+5)^{-\frac{5}{6}} \times (y+6)^{\frac{1}{6}}}{(x+5)^{\frac{1}{6}} \times (y+6)^{-\frac{5}{6}}} = (x+5)^{-1} \times (y+6) = \frac{y+6}{x+5}; \text{ con lo que: } \frac{y+6}{x+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

siendo esta última la ecuación de la trayectoria de expansión de esta empresa, o también: x – 4y = 19.

Pues bien, eliminando *x* e *y* en las ecuaciones de producción y costes variables, resulta que:

$$CV = 8(u - 4)^3 - 58, \text{ y los costes totales serán:}$$

$$CT = CV + CF = 8(u - 4)^3 - 58 + 200 = 8(u - 4)^3 + 142.$$

c) Las ecuaciones de costes pedidas son las siguientes:

$$\textit{Primera empresa}: \begin{cases} CVMe = \dfrac{CV}{u} = 8 - \dfrac{15}{4u} \\ CTMe = \dfrac{CT}{u} = 8 + \dfrac{785}{4u}; \\ CMa = \dfrac{dCT}{du} = 8 \end{cases}$$

Segunda empresa:

$$\begin{cases} CVMe = \dfrac{CV}{u} = \dfrac{8u^3 - 96u^2 + 384u - 570}{u} = 8u^2 - 96u + 384 - \dfrac{570}{u} \\ CTMe = \dfrac{CT}{u} = \dfrac{8u^3 - 96u^2 + 384u - 370}{u} = 8u^2 - 96u + 384 - \dfrac{370}{u} \\ CMa = \dfrac{dCT}{du} = 24(u-4)^2 = 24u^2 - 192u + 384. \end{cases}$$

Las representaciones gráficas correspondientes serán las siguientes:

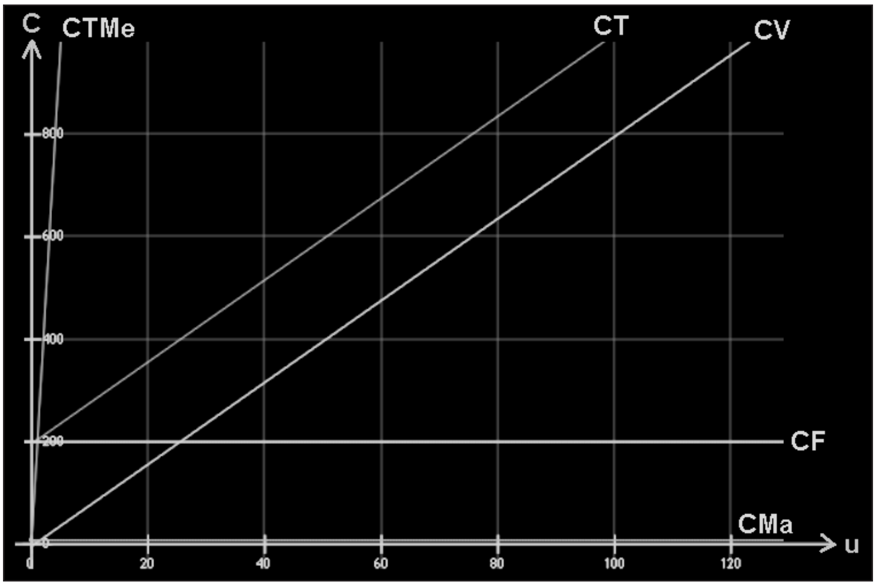


Fig. 1. Funciones de Costes. Primera empresa.

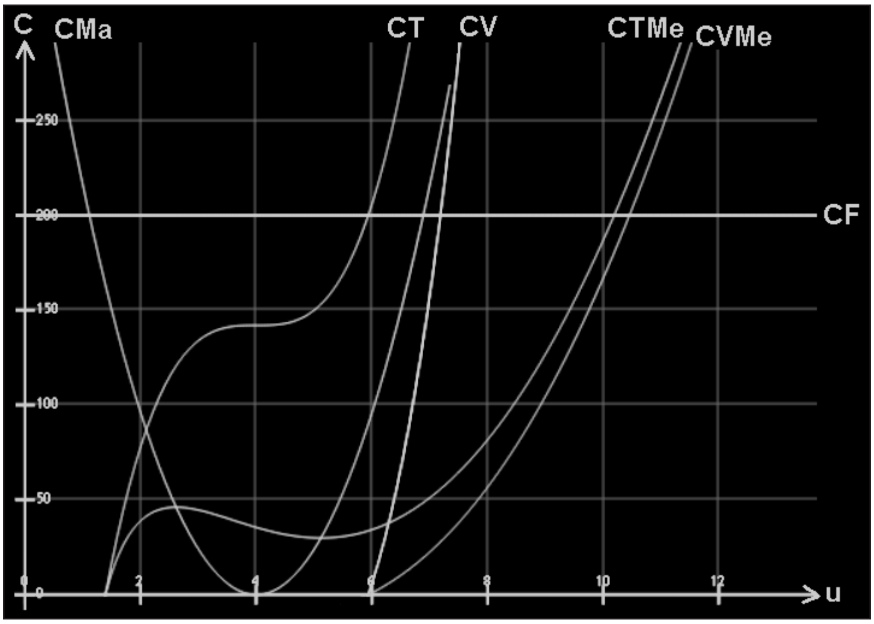


Fig. 2. Funciones de Costes. Segunda empresa.

Ejercicio 3

La cifra de negocios *u* de una empresa viene dada por la siguiente ecuación parabólica unidimensional:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = e^t, \quad \forall\, t > 0, \forall x \in \Re, \\ \qquad \text{con}: \ u(x,0) = \cos[z(x)], \forall x \in \Re. \end{cases}$$

, donde z(x) = $x + \int_{-1}^{1} x \cdot t \cdot z(t) \cdot dt$. Se pide: a) calcular la cifra de negocios en los cinco primeros ejercicios de su actividad económica, viniendo el tiempo *t* expresado en años y siendo *x* el beneficio bruto o pérdida estimados para cada ejercicio, según la siguiente tabla:

t	x
1	-0'03
2	-0'10
3	0'20
4	0'50
5	0'60

, viniendo *u* y *x* expresados en millones de € y considerando una fiscalidad aplicable del 26%. b) Estimar, también para cada ejercicio, el importe de los gastos variables, considerando unos gastos fijos de 1.500.000 € , y su porcentaje en relación a los gastos totales. c) Calcular las elasticidades parciales, total y direccionadas de la función u(x,t) en el 4º ejercicio de la actividad económica de la empresa.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 67).

Solución:

a) Procede, en primer lugar, resolver la ecuación integral que nos define la función z(x) que se halla en la condición de contorno. Se trata de una ecuación inhomogénea de Freedholm de 2ª especie, con λ = 1, que ya ha sido resuelta en otro ejercicio de este mismo libro, ofreciendo como resultado: z(x) = 3x, lo que puede comprobarse fácilmente por substitución en la ecuación integral dada. De este modo, la expresada condición de contorno será: u(x,0) = cos 3x.

Nos hallamos en presencia de una EDP de 2º orden, parabólica, puesto que: $(b^2 - 4ac) = 0$ (con a = -1, b = 0, c = 0).

Definiendo, ahora, para todo $x \in \Re$ y t > 0, el núcleo integral K del siguiente modo:

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad \text{y denotando por:}$$

$$u_1(x,t) \equiv \int_0^t \int_{\Re} K(x-y,t-s) e^s dy\, ds \ \ (1); \quad u_2(x,t) \equiv \int_{\Re} K(x-y,t) \cos 3y \cdot dy\,, \ (1')$$

sabemos que la única solución buscada viene dada por la expresión:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t).$$

Por otro lado, dado que: $\int_{\Re} K(z,r) dz = 1$, para todo $r > 0$,

deducimos que: $u_1(x,t) = \int_0^t e^s \left(\int_{\Re} K(x-y,t-s)\, dy \right) ds = \left[e^s \right]_0^t = e^t - e^0 = e^t - 1.$

Sin embargo, resolver la integral (1') es mucho más complicado. Para ello debemos tener en cuenta que u_2 es la única solución del siguiente problema:

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0,\ t > 0 \text{ ; con la condición: } v(x,0) = \cos 3x. \quad (2)$$

Este problema puede resolverse buscando una solución dada en variables separadas: $v(x,t) = X(x)T(t)$, con lo cual la ecuación (2) se transforma en

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0, \quad X(x)T(0) = \cos 3x.$$

De la segunda igualdad, deducimos que, en caso de existir solución de este tipo, necesariamente se ha de verificar que:

$$X(x) = \frac{\cos 3x}{T(0)} \equiv c \cdot \cos 3x\,; \ X'(x) = -3c \cdot \sin 3x\,,$$

por consiguiente: $X''(x) = -9c \cdot \cos 3x = -9X(x)$.

Así pues, deducimos que la primera de las ecuaciones se transforma en:

$$X(x)[T'(t) + 9T(t)] = 0, \quad \text{para todo } x \in \Re \ \text{ y } \ t > 0.$$

Al no ser la función X idénticamente nula en $\Re$, obtenemos que forzosamente se ha de verificar que:

$$T(t) = T(0) e^{-9t} \equiv \frac{e^{-9t}}{c}\,,$$

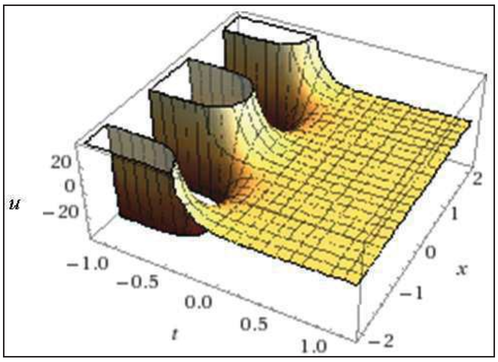
con lo cual, la única solución del problema (2) viene dada por la expresión:

$$u_2(x,t) = v(x,t) = e^{-9t}\cdot\cos 3x\ ,$$

y, como consecuencia, la única solución del problema estudiado resulta ser:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = e^t - 1 + e^{-9t}\ \cos 3x,$$

con la siguiente representación gráfica:



b) En base a la solución hallada, podremos elaborar la siguiente tabla que nos ofrece la cifra de negocios anual, teniendo en cuenta que el beneficio neto (después de impuestos) queda definido así:

$$\begin{cases} B = x, & \forall x \le 0 \\ B = 0'74\cdot x, & \forall x > 0 \end{cases}$$

t (años)	B (10^6 €)	u (€)
1	- 0'030	1.718.400
2	- 0'100	6.389.060
3	0'148	19.085.500
4	0'370	53.598.200
5	0'444	147.413.000

Los resultados correspondientes pueden verse en la siguiente tabla, siendo: $\begin{cases} G_t = \text{gastos totales}\,(u - B) \\ G_f = \text{gastos fijos} \\ G_v = \text{gastos variables}\,(G_t - G_f) \end{cases}$. Esto es:

t	G_t (€)	G_f (€)	G_v (€)	$(G_v/G_t)\times 100$
1	1.748.400	1.500.000	248.400	14'21%
2	6.489.060	1.500.000	4.989.060	76'88%
3	18.937.500	1.500.000	17.437.500	92'08%
4	53.228.200	1.500.000	51.728.200	97'18%
5	146.969.000	1.500.000	145.469.000	98'98%

El porcentaje representado en la última columna puede verse así:

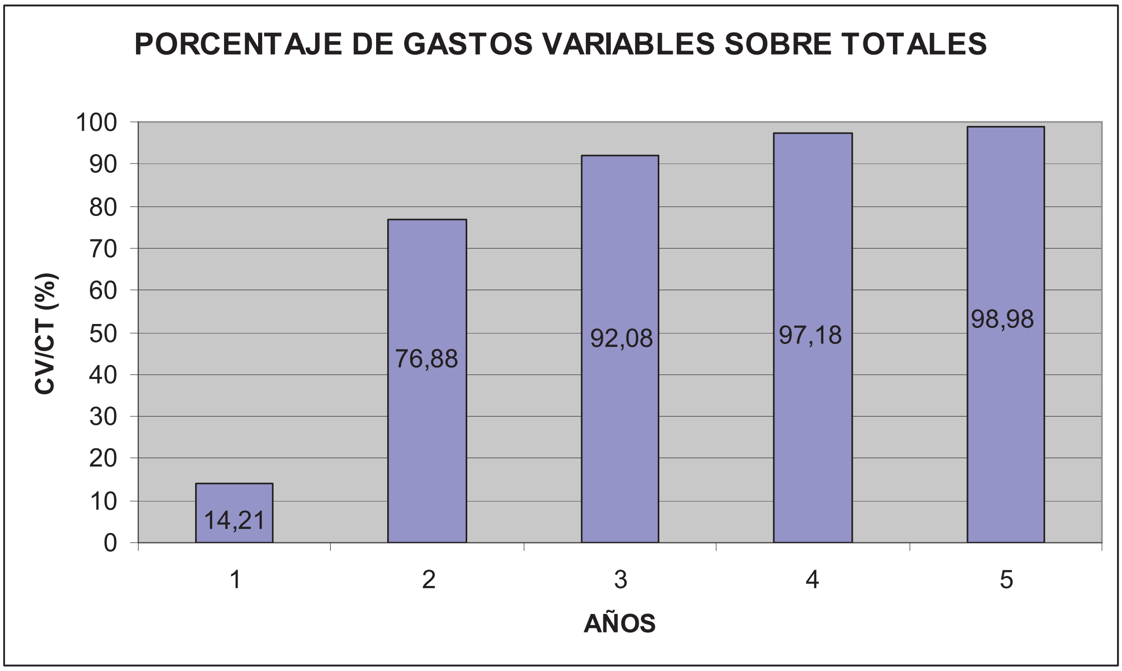


Fig. 3. Porcentaje de gastos variables sobre gastos totales.

c) Procederemos, seguidamente, al cálculo de las diferentes elasticidades solicitadas. Así, teniendo en cuenta que:

$$u(x,t) = e^t - 1 + e^{-9t}\cdot\cos 3x \text{ , resultan: } \begin{cases} u'_x = -3\cdot e^{-9t} \times \sin 3x \\ u'_t = e^t - 9\cdot e^{-9t} \times \cos 3x \end{cases} \text{; y así:}$$

- Elasticidades parciales:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{x}{u} \times u'_x = \dfrac{-3x \cdot e^{-9t} \times \sin 3x}{e^t - 1 + e^{-9t} \times \cos 3x}; \\ E_t = \dfrac{t}{u} \times u'_t = \dfrac{t \cdot e^t - 9t \cdot e^{-9t} \times \cos 3x}{e^t - 1 + e^{-9t} \times \cos 3x}; \end{cases}$$

- Elasticidad total:

$$E_T = E_x + E_t = \frac{t \cdot e^t - e^{-9t} \overbrace{(3x \cdot \sin 3x + 9t \times \cos 3x)}^{3\sqrt{x^2+9t^2}\cdot\sin\left(3x+\text{arc tg}\frac{3t}{x}\right)}}{e^t - 1 + e^{-96} \times \cos 3x}.$$

En el punto $(x_0, t_0) = (0'50, 4)$, se tendrán, respectivamente, los siguientes valores:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{-1'5 \times e^{-36} \times \sin 1'5}{e^4 - 1 + e^{-36} \times \cos 1'5} \approx 0, \\ \\ E_t = \dfrac{4 \times e^4 - 36 \times e^{-36} \times \cos 1'5}{e^4 - 1 + e^{-36} \times \cos 1'5} \approx 4'07, \end{cases}$$

y una elasticidad total de: $E_T = E_x + E_t = 0 + 4'07 = 4'07$.

Por último, las elasticidades direccionadas, con respecto a ambos ejes coordenados, es decir, para 0º y 90º, en el punto $(x_0, t_0) = (0'50, 4)$, esto es, con u = 53.598.200 € , son las siguientes:

$$\begin{cases} {}_xE_x\, u(x_0, t_0) = \dfrac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + t_0^2} = 0 \\ {}_tE_t\, u(x_0, t_0) = \dfrac{E_t}{t_0} \times \sqrt{x_0^2 + t_0^2} = \dfrac{4'07}{4} \times \sqrt{0'25 + 16} = 4'1 \end{cases}$$

Como vemos, la elasticidad de la cifra de negocios de la empresa en cuestión, con respecto a su beneficio bruto, es nula (perfectamente inelástica) mientras que, con respecto al tiempo, se trata de una función económica relativamente elástica.

Ejercicio 4

Sea una economía donde coexisten dos empresas turísticas (1 y 2) que ofrecen, respectivamente, los servicios x e y, con las siguientes funciones de coste:

$$\begin{cases} C_1\,(x,y) = x^2 + 10x - u(x,y) \\ C_2\,(y) = y^2 + 20y \end{cases}$$

, siendo u(x,y) la inversa de la función v(x,y) que, a su vez, cumple con la EDP siguiente:

$$x(v^2 - y^2)v_x + y(x^2 - v^2)v_y = v(y^2 - x^2), \text{ con } v(x,x) = \frac{1}{x^2}, \forall x > 1.$$

Supóngase una fiscalidad del 25% y que el mercado absorbe toda la cantidad de ambos servicios a unos precios de: $p_1 = p_2 = 120$ u.m. Se pide: a) Determinar los volúmenes de servicio de equilibrio en el supuesto de que ambas empresas tengan en cuenta únicamente los costes marginales privados, b) ¿La asignación de equilibrio del apartado anterior es un óptimo de Pareto?, c) Calcular los volúmenes de prestación de ambos servicios, resultantes de considerar el coste marginal social, y d) Representar gráficamente las ecuaciones de ingresos y costes de la segunda empresa.

Solución:

a) En primer lugar, habrá que resolver la EDP planteada en el enunciado. En este caso, los datos del problema son los siguientes:

$$\begin{cases} f_1\,(x, y, z) = x\,(z^2 - y^2) \\ f_2\,(x, y, z) = y\,(x^2 - z^2) \\ f\,(x, y, z) = z\,(y^2 - x^2), \end{cases}$$

y entonces la condición inicial queda parametrizada del siguiente modo:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = \left(s, s, \frac{1}{s^2}\right), \ \forall s \in \Re.$$

Dado que por aplicación de la regla de Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s\left(\frac{1}{s^4} - s^2\right) & 1 \\ -s\left(\frac{1}{s^4} - s^2\right) & 1 \end{pmatrix} = 2s\left(\frac{1}{s^4} - s^2\right),$$

tenemos que este problema tiene solución única.

La transformada de Jacobi será:

$$x\,(z^2 - y^2)\,w_x + y\,(x^2 - z^2)\,w_y + z\,(y^2 - x^2)w_z = 0.$$

En un primer momento elegimos los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = x, \qquad a_2 = y, \qquad a_3 = z.$$

La integral primera asociada a estos valores se obtiene teniendo en cuenta que $x = w_x$, con lo cual $w = \frac{x^2}{2} + f(y,z)$ y, como consecuencia, la igualdad $y = w_y = \frac{\partial f}{\partial y}(y,z)$ implica que: $f(y,z) = \frac{y^2}{2} + g(z)$. Finalmente, con: $z = w_z = g'(z)$ implica que:

$$w(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$, es una integral primera de esta ecuación.

Dado que: $w(\gamma(s)) = s^2 + \frac{1}{2s^4}$, no es una función constante, debemos encontrar una segunda integral primera funcionalmente independiente de ésta. Para ello consideramos los siguientes factores integrantes:

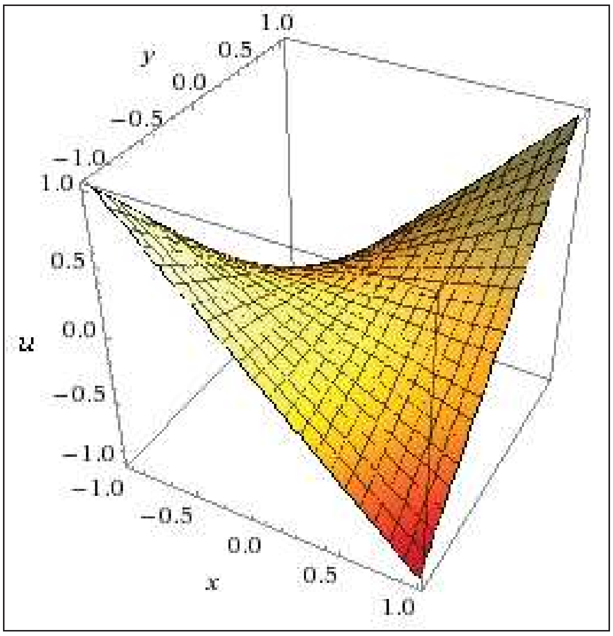
$$a_1 = \frac{1}{x}, \qquad a_2 = \frac{1}{y}, \qquad a_3 = \frac{1}{z}.$$

La solución del sistema se obtiene para estos valores del siguiente modo: Al ser $\frac{1}{x} = w_x$, deducimos que $w = \log|x| + f(y,z)$. De la segunda igualdad obtenemos que $f(y,z) = \log|y| + g(z)$. De la última expresión concluimos que: $w(x,y,z) = \log(|xyz|)$.

Ahora bien, dado que: w(γ(s)) = log 1 = 0, resulta que la función definida implícitamente al igualar esta segunda función a cero nos da la solución particular buscada, es decir:

$$v(x,y) = \frac{1}{xy}\text{, de donde: } u(x,y) = x \cdot y,$$

con la siguiente representación gráfica de un paraboloide hiperbólico:



De este modo, la función de coste de la primera empresa turística relacionada quedará definitivamente configurada así:

$$C_1(x,y) = x^2 + 10x - x \cdot y.$$

Dicha empresa maximizará sus beneficios del siguiente modo:

$$[\text{Max}]\ \pi_1 = I_1 - C_1 = p_1x - C_1 = 120\cdot x - x^2 - 10x + xy\ .$$

- Condición necesaria o de primer grado:

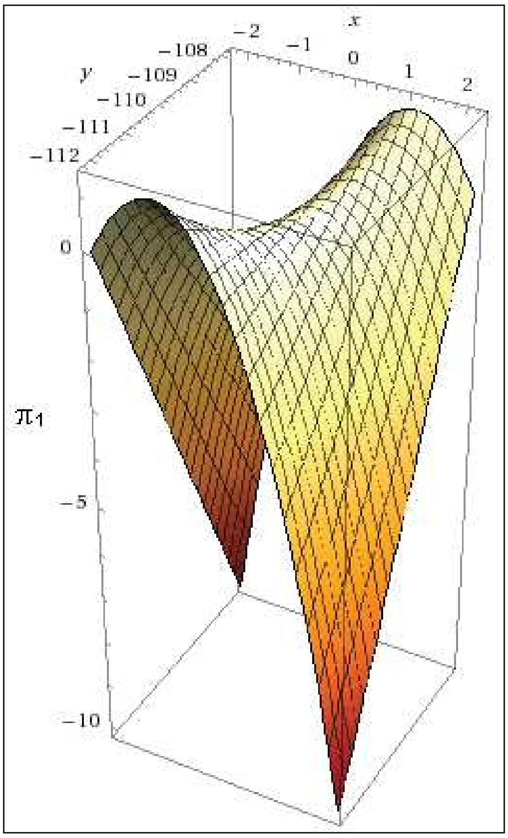
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial x} = 120 - 2x - 10 + y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{110 + y}{2} \text{ (función de oferta de x)} \\ \dfrac{\partial \pi_1}{\partial y} = x = 0 \end{cases}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$H_1(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial x \cdot \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial x \cdot \partial y} & \dfrac{\partial^2 \pi_1}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \ \Rightarrow \text{punto de silla,}$$

por lo que no existen extremos relativos.

La representación gráfica de la función π_1, que es un paraboloide hiperbólico, viene dada por:



Por lo que se refiere a la optimización de la empresa 2, se tiene que: $\pi_2(y) = I_2 - C_2 = 120y - y^2 - 20y = 100y - y^2$. La condición de primer grado es: $\frac{d\pi_2}{dy} = 100 - 2y = 0$, de donde: y = 50 ud., y la de segundo grado $\frac{d^2\pi_2}{dy^2} = -2 < 0$, luego se trata, efectivamente, de un máximo relativo que constituye el valor de equilibrio del servicio *y*.

Por otra parte, se tendrá un beneficio bruto de:

$$\pi_2 = 6.000 - 3.500 = 2.500 \text{ u.m.}$$

Substituyendo este valor en la función de oferta del servicio *x* se obtiene su valor de equilibrio, a saber: x = 80 ud. Así pues, los beneficios de equilibrio netos (después de impuestos) individuales y conjunto de ambas empresas, serán:

$$\begin{cases} B_1 = 0'75 \times (120 \cdot 80 - 80^2 - 10 \cdot 80 + 80 \cdot 50) = 4.800 \text{ u.m.} \\ B_2 = 0'75 \times (120 \cdot 50 - 50^2 - 20 \cdot 50) = 1.875 \text{ u.m.} \\ B = B_1 + B_2 = 6.675 \text{ u.m.} \end{cases}$$

b) La asignación alcanzada en el apartado anterior no será un óptimo paretiano puesto que nos hallamos en presencia de efectos externos. Para conocer el signo de dicho efecto externo es suficiente con ver el signo de la siguiente derivada parcial: $\frac{\partial C_1}{\partial x} = -x < 0$. La prestación del servicio *y* genera un efecto externo positivo sobre la producción de *x* ya que reduce sus costes de prestación.

En estos casos, la asignación de EGC (equilibrio general competitivo) no es una asignación óptimo paretiana y conducirá a una provisión insuficiente del servicio que provoca el efecto externo y, ya que la segunda empresa no tiene en cuenta el efecto externo positivo que genera su actividad. Elevando la prestación de este servicio es posible aumentar los beneficios globales de esta economía.

c) Se tiene en cuenta el coste marginal social si, v. gr., ambas empresas turísticas se fusionasen. En este caso, el problema a resolver es el de la maximización de su beneficio conjunto, esto es:

$$[\text{Max}]\ \pi = I - C = p_1x + p_2y - C_1 - C_2 = 120(x + y) - x^2 - 10x + xy - y^2 - 20y.$$

Procederemos como resulta habitual en estos casos:

- Condiciones de primer grado (necesarias):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x} = 120 - 2x - 10 + y = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial y} = 120 + x - 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

de donde se deducen los valores del nuevo equilibrio:

$$\begin{cases} y = \dfrac{310}{3} = 103'\widehat{3}\ \text{ud.} \\ x = \dfrac{620}{3} - 100 = 106'\widehat{6}\ \text{ud.} \end{cases}$$

, y el beneficio conjunto debe ser superior al del apartado anterior. En efecto, se tendrá que:

$$\pi = 120\left(\frac{320}{3} + \frac{310}{3}\right) - \frac{102.400}{9} - \frac{9.600}{9} + \frac{99.200}{9} - \frac{96.100}{9} - \frac{18.600}{9} =$$
$$= 25.200 - \frac{127.500}{9} = 11.033'\widehat{3}\ \text{u.m.} > 8.900\ \text{u.m.},$$

con un beneficio neto de: B = 0'75 $\times$ 11.033'33 = 8.275 > 6.675 u.m.

- Condiciones de segundo grado (suficientes):

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x \cdot \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x \cdot \partial y} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \text{ y además: } \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = -2 < 0\,,$$

luego se trata, efectivamente, de un máximo.

d) Las diferentes funciones de costes de la empresa 2 son:

$$\begin{cases} C_2(y) = CT_2 = y^2 + 20y \\ C_2Me = \dfrac{y^2 + 20y}{y} = y + 20 \\ C_2Ma = \dfrac{\partial C_2}{\partial y} = 2y + 20 \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica:

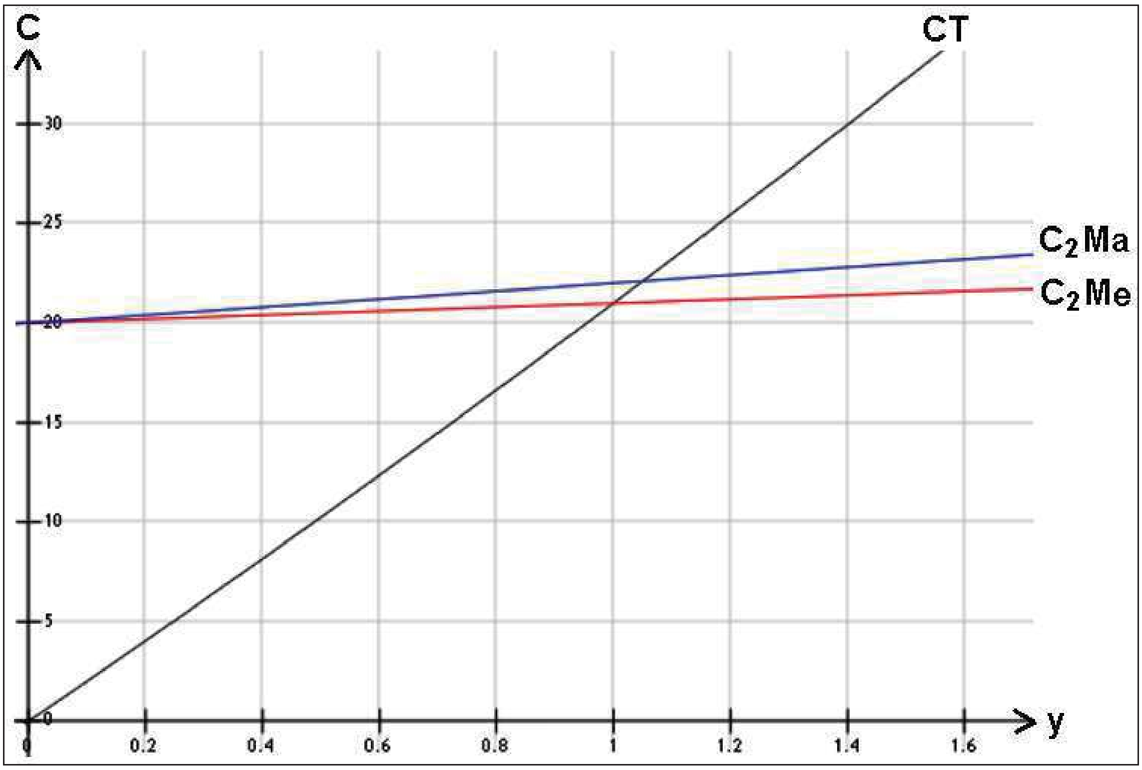


Fig. 4. Funciones de costes (I).

Así mismo, puede verse el siguiente gráfico:

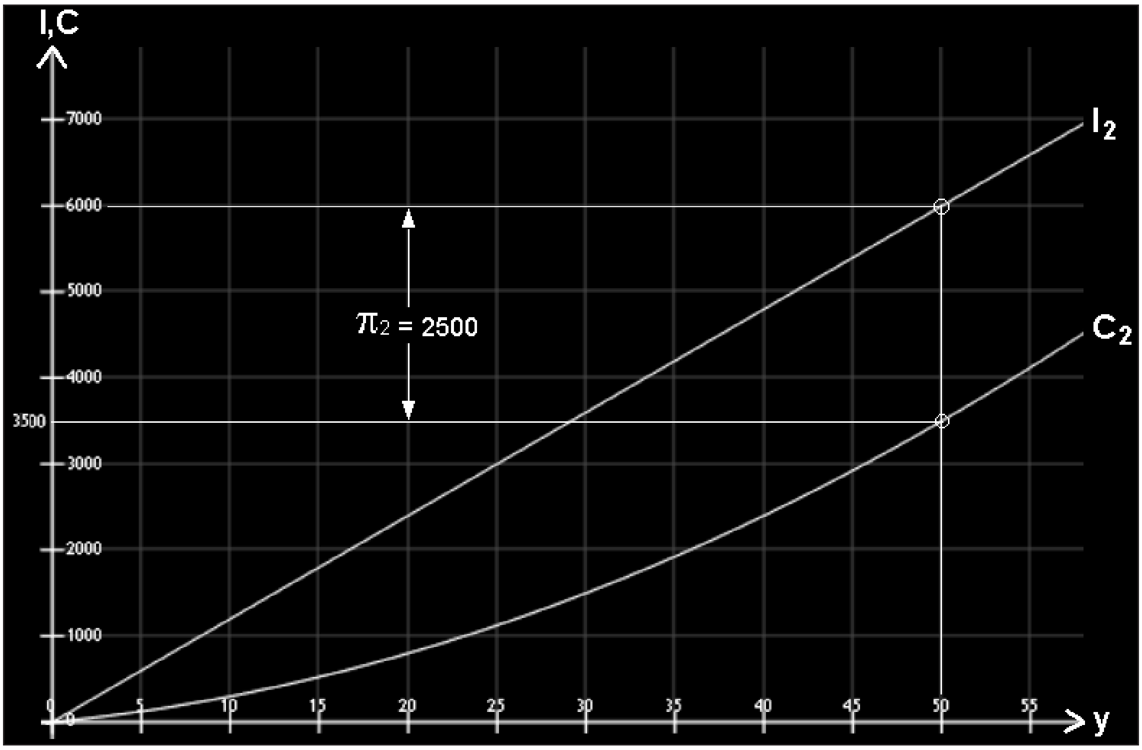


Fig. 5. Ingresos, costes y beneficio.

Ejercicio 5

Sea una empresa A que produce una determinada cantidad de plástico (x_1) pero genera, a la vez, una cierta cantidad de residuos tóxicos (x_2) que vierte a un río cercano. Su función de costes viene dada por: $C_A(x_1,x_2) = z - 4x_2 + 6$, cumpliéndose que *z* es la superficie integral de la ecuación: $x_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + 2\iint_A \sin^2 x_1 \cdot \sin^2 x_2 \cdot dx_1 \cdot dx_2 = \int_0^1 \frac{\arcsin x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1$,

que pasa por la curva: $x_1 = 0$, $z = x_2^2$, siendo el dominio A el cuadrado:

$$[0,\pi/2] \times [0,\pi/2] \ .$$

Aguas abajo del río está instalada otra empresa agraria B dedicada a la producción de hortalizas, que se ve perjudicada por los vertidos contaminantes de la empresa A. Este perjuicio se refleja así en su función de costes: $C_B(x_3, x_2) = 2x_3^2 + 3x_2$. Se desea:

a) Deducir las funciones de oferta de los productos de ambas empresas y el nivel de residuos tóxicos vertidos si cada empresa maximiza su beneficio privado. Considérese una fiscalidad aplicable del 25%.

b) Si la ley obligara a la empresa A a adquirir el derecho a contaminar el río, calcular el precio al que la empresa B "vendería" la posibilidad de verter al río a la empresa A.

c) ¿Qué ocurriría si ambas empresas se fusionan?

d) Analizar las situaciones alcanzadas en los apartados anteriores.

e) ¿Qué sucedería si z pasase por la circunferencia z = 1; $x_1^2 + x_2^2 = 4$?

(adaptado de Martín y Sánchez, UNED, 2001, p. 52).

Solución:

a) La EDP posee un 2º miembro (pasando previamente a él la integral doble dada del primer miembro) que debe resolverse en primer lugar. Así:

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 - 2\iint_A \sin^2 x_1 \cdot \sin^2 x_2 \cdot dx_1 \cdot dx_2 \text{ , que ahora resolveremos}$$

separadamente, por comodidad. La función subintegral del primer sumando (minuendo) es discontinua en x = 1, un punto del intervalo de integración que, a su vez, es finito, luego se trata de una integral impropia de 2ª especie y convergente, como se verá. Así:

$$\int_0^1 \frac{\text{arc}\sin x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}dx_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\text{arc}\sin x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}dx_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\text{arc}\sin^2 x_1\right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\text{arc}\sin^2(1-\varepsilon) = \frac{\pi^2}{8}.$$

A su vez, la integral múltiple del segundo sumando (sustraendo) se resolverá por aplicación del teorema de Fubini en el rectángulo, tal que:

$$A = \{(x_1,x_2)\in\Re^2 \;/\; 0 \le x_1 \le \pi/2 \;,\; 0 \le x_2 \le \pi/2\} \text{ , o sea:}$$

$$\iint_A \sin^2 x_1\cdot\sin^2 x_2\cdot dx_1\cdot dx_2 = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2 x_1\cdot\sin^2 x_2\cdot dx_2\right)dx_1 = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2 x_1\cdot\frac{1-\cos 2x_2}{2}\cdot dx_2\right)dx_1 =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin^2 x_1\left[\frac{x_2}{2}-\frac{\sin 2x_2}{4}\right]_0^{\pi/2}dx_1 = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x_1}{2}dx_1 = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x_1}{2}-\frac{\sin 2x_1}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{16}.$$

De este modo, la EDP dada quedará establecida así:

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\pi^2}{8} - 2\times\frac{\pi^2}{16} = 0,$$

tratándose de una ecuación lineal de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

Ahora, para resolver *z* debemos integrar el sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx_1}{-x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dz}{0}\text{, de donde: } x_1\cdot dz = 0;\ z = c_1;$$

$\int x_1\cdot dx_1 = -\int x_2\cdot dx_2;\quad x_1^2 + x_2^2 = c_2$. Eliminando x_1, x_2 y z de las ecuaciones anteriores y, además, de las condiciones geométricas dadas en el enunciado del problema planteado, se tiene que: $c_1 = c_2$, de donde: $z = x_1^2 + x_2^2$.

De este modo, se tendrá que:

$C_A = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 + 6$, y la empresa A maximizará así sus beneficios:

$$[\text{MAX}]\pi_A = I_A - C_A = p_1x_1 - x_1^2 - x_2^2 + 4x_2 - 6\,.$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_A}{\partial x_1} = p_1 - 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = p_1/2 \,(\text{función de oferta de } x_1) \\ \dfrac{\partial \pi_A}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \,(\text{nivel de residuos tóxicos de equilibrio}) \end{cases}$$

- Condición suficiente o de 2º grado:

$$H(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi_A}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \pi_A}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 \pi_A}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 x_A}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

y además, $\dfrac{\partial^2 \pi_A}{\partial x_1^2} = -2 < 0$, luego se trata de un máximo en ($p_1/2$, 2), y allí:

$\pi_A = \dfrac{p_1^2}{2} - \dfrac{p_1^2}{4} - 4 + 8 - 6 = \dfrac{p_1^2}{4} - 2$, y un beneficio neto de:

$$B_A = 0'75 \times \pi_A = \frac{3}{4}\left(\frac{p_1^2}{4} - \frac{8}{4}\right) = \frac{3p_1^2 - 24}{16}.$$

Por lo que se refiere a la empresa hortofrutícola B, se tendrá:

$$[\text{MAX}]\pi_B = I_B - C_B = p_3 \cdot x_3 - 2x_3^2 - 3x_2.$$

- Condición necesaria o de primer grado:

- $\dfrac{\partial \pi_B}{\partial x_3} = p_3 - 4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \dfrac{p_3}{4}$ (función de oferta de x_3)
- $\dfrac{\partial \pi_B}{\partial x_2} = -3$

- Condición suficiente o de 2º grado:

$$H(x_3, x_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi_B}{\partial x_3^2} & \dfrac{\partial^2 \pi_B}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 \pi_B}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 \pi_B}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

con $\frac{\partial^2 \pi_B}{\partial x_3^2} = -4 < 0$, luego se trata de un “quasi-máximo” (caso dudoso o punto parabólico).

b) Sea p_R el precio por unidad de residuo tóxico vertido que la empresa A debe pagar a la empresa B. Para calcular su cuantía se debe resolver el nuevo problema de maximización de la empresa B, que es ahora:

$$\text{Max } \pi^B = p_3 x_3 - 2x_3^2 - 3x_2 + p_R x_2 .$$

La empresa B tiene ahora unos ingresos adicionales de p_R por unidad producida de residuos tóxicos. Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \pi^B}{\partial x_3} = p_3 - 4x_3 = 0 \rightarrow x_3 = \frac{p_3}{4} .$$

La oferta de x_3 es igual que la del apartado anterior.

$$\frac{\partial \pi^B}{\partial x_2} = -3 + p_R = 0 \rightarrow p_R = 3 .$$

Las condiciones de 2º grado son:

$$H(x_3, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi_B}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 \pi_B}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \pi_B}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 \pi_B}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

y volvemos a encontrarnos con un “quasi-máximo”.

Por su parte la empresa A ha sufrido un incremento de sus costes en una cuantía de $3x_2$. Por tanto ahora:

$$\text{Max } \pi^A = p_1 x_1 - x_1^2 - x_2^2 + 4x_2 - 6 - 3x_2 = p_1 x_1 - x_1^2 - x_2^2 + x_2 - 6 .$$

Las condiciones (necesarias) de primer orden son:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi^A}{\partial x_1} = p_1 - 2x_1 = 0 \\ \frac{\partial \pi^A}{\partial x_2} = -2x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

De la primera c.p.o. se obtiene la función de oferta del bien x_1 que es igual que en el apartado anterior: $x_1 = p_1/2$. De la segunda c.p.o. se deriva el nivel de residuos tóxicos de equilibrio en esta nueva situación, que es $x_2 = 1/2$.

Se observa que, con la introducción de la norma descrita en el enunciado del problema, se ha reducido el nivel de producción del bien que genera el efecto externo.

Las condiciones (suficientes) de 2º grado son:

$$H(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi_A}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \pi_A}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \pi_A}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \pi_A}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

con $\frac{\partial^2 \pi_A}{\partial x_1^2} = -2 < 0$, y se trata, efectivamente, de un máximo en $(p_1/2, 1/2)$ y allí: $\pi_A = \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_1^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 6 = \frac{p_1^2 - 23}{4}$, y un beneficio neto de: $B_A = 0'75 \times \pi_A = \frac{3p_1^2 - 69}{16}$.

c) Si las empresas se fusionan el problema se resuelve maximizando el beneficio conjunto, esto es:

$$\text{Max } \pi^T = p_1 x_1 + p_3 x_3 - x_1^2 - x_2^2 + 4x_2 - 6 - 2x_3^2 - 3x_2.$$

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi^T}{\partial x_1} = p_1 - 2x_1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{p_1}{2} \rightarrow \text{oferta de } x_1. \\ \frac{\partial \pi^T}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 - 3 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \text{nivel de residuos tóxicos vertidos.} \\ \frac{\partial \pi^T}{\partial x_3} = p_3 - 4x_3 = 0 \rightarrow x_3 = \frac{p_3}{4} \rightarrow \text{oferta de } x_3. \end{cases}$$

Se observa que el nivel de producción del bien que genera el efecto externo se ha reducido respecto a la situación descrita en a) y es igual a la situación del apartado b).

En este caso se trata de una función de 3 variables, x_1, x_2 y x_3, y la condición suficiente o de 2º grado, será:

$$H(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\pi_T}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\pi_T}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2\pi_T}{\partial x_1\partial x_3} \\ \frac{\partial^2\pi_T}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2\pi_T}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2\pi_T}{\partial x_2\partial x_3} \\ \frac{\partial^2\pi_T}{\partial x_3\partial x_1} & \frac{\partial^2\pi_T}{\partial x_3\partial x_2} & \frac{\partial^2\pi_T}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -16 < 0, \text{ y además}$$

los menores principales: $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, y $\frac{\partial^2\pi_T}{\partial x_1^2} = -2 < 0$, luego se trata, efectivamente, de un máximo en el punto ($p_1/2$, 1/2, $p_3/4$), y en este punto el beneficio conjunto de ambas empresas, será:

$$\pi_T = \pi_A + \pi_B = p_1x_1 + p_3x_3 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_2 - 6 =$$
$$= \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_3^2}{4} - \frac{p_1^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{p_3^2}{8} + \frac{1}{2} - 6 = \frac{p_1^2}{4} + \frac{p_3^2}{8} - \frac{23}{4},$$

y un beneficio neto de: $B_T = 0'75 \times \pi_T = \frac{3p_1^2}{16} + \frac{3p_3^2}{32} - \frac{69}{16} = \frac{3(2p_1^2 + p_3^2 - 46)}{32}$.

d) El enunciado plantea un caso de existencia de un efecto externo en la producción. El proceso productivo de la empresa A provoca un efecto externo sobre la producción de la empresa B. El efecto externo es negativo porque:

$$\frac{\partial C_B}{\partial x_2} = 3 > 0 .$$

Es decir, que la producción de residuos tóxicos de la empresa A da lugar a un aumento de los costes de la empresa B.

En la situación descrita en el apartado a) se observa que la empresa que provoca el efecto externo negativo no asume sus costes sino que los hace recaer en la empresa que "sufre" el efecto externo. Por tanto, la empresa A realiza una maximización de beneficios donde sólo está teniendo en cuenta sus costes privados que son, en el caso de un efecto externo negativo, inferiores a los sociales. En esta situación se va a producir una cantidad del bien que genera el efecto externo (x_2) excesiva en términos de optimalidad de esta economía en su conjunto.

Por otra parte, tanto en el apartado b) como en el c) se interniza el efecto externo negativo. En la maximización de beneficios se tienen en cuenta los costes sociales y, por tanto, la cantidad producida del bien en cuestión será óptima en el sentido de Pareto[1].

---

[1] Profundizando los análisis de las curvas de indiferencia y de la caja de Edgeworth, el economista, político y sociólogo italiano Vilfredo Pareto (1848-1923) desarrolló el concepto de *óptimo* para aquella situación en la cual se cumple que no es posible beneficiar a una persona sin perjudicar a otra. En la

e) Se trata de una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 2. Puesto que la línea dada es vectorial (característica) el problema es indeterminado. En efecto, cualquier superficie de revolución $z = \Phi(x^2 + y^2)$, cuyo eje de rotación coincida con el eje Oz, es superficie integral de la ecuación considerada. Evidentemente, existe un conjunto infinito de tales superficies, que pasan por la circunferencia citada, por ejemplo, los paraboloides de revolución $z = z^2 + y^2 – 3$, $4z = x^2 + y^2$, $z = -x^2 – y^2 + 5$, la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, etc.

Si la ecuación de la curva por la cual se exige trazar la superficie integral de la ecuación se da en la forma paramétrica:

$$x_0 = x_0(s), \quad y_0 = y_0 (s), \quad z_0 = z, (s), \qquad (1)$$

entonces es también conveniente buscar la solución en forma paramétrica:

$$x = x (t, s), \quad y = y (t, s), \quad z = z (t, s).$$

Introduzcamos un parámetro *t* en el sistema que determina las características, haciendo:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} = dt. \qquad (2)$$

Para que las características pasen por la curva dada, se busca la solución del sistema anterior que satisface, para t = 0 (ó $t = t_0$), las condiciones iniciales siguientes:

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s).$$

Para estas condiciones iniciales y para *s* fija, obtenemos una característica que pasa por un punto fijo de la curva (1). Cuando *s* es variable, obtenemos la familia de características:

$$x = x (t,s), \quad y = y (t,s), \quad z = z (t,s), \qquad (3)$$

búsqueda de un equilibrio con mejor bienestar, ambos agentes aceptan el intercambio hasta el punto en que éste deja de generar beneficios. El óptimo de Pareto se basa en criterios de utilidad: si algo genera o produce provecho, comodidad, fruto o interés sin perjudicar a otro, despertará un proceso natural de optimización que permitirá alcanzar un punto óptimo. Ese punto óptimo, en el análisis económico, constituye aquel punto de equilibrio en el que ninguno de los agentes afectados puede mejorar su situación sin reducir el bienestar de cualquier otro agente. Por lo tanto, si un individuo que forme parte del sistema de distribución, producción y consumo puede mejorar su situación sin perjudicar a otro nos encontraremos en situaciones no óptimas en el sentido paretiano. Y esta situación no óptima, puede alcanzar un óptimo, dentro de ciertos márgenes.

que pasan por los puntos de la curva dada (1) (en este caso se considera que la curva dada (1) no es característica). El conjunto de puntos que pertenecen a esta familia de características (3) forma, precisamente, la curva integral buscada.

Otra función que ofrece el mismo resultado es, v. gr. la superficie integral z, de ecuación: $4z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2$, con la condición $z(0, x_2) = x_2^2$, que ofrece también como integral particular: $z = x_1^2 + x_2^2$, y que viene expresada como una EDP no lineal de primer orden, inhomogénea y de coeficientes constantes.

La solución antedicha es una función homotética y homogénea de grado m = 2, puesto que:

$$z(tx_1,tx_2) = t^2x_1^2 + t^2x_2^2 = t^2(x_1^2 + x_2^2) = t^m \cdot z(x_1, x_2),$$

y cumple, lógicamente, el preceptivo teorema de Euler para este tipo de funciones.

Ejercicio 6

La función de producción de una empresa viene dada por:

$$u(x, y) = \frac{3x^2y}{2} + \frac{8xy^3}{3} + y^3 + x^2 - \int_0^1 \ln x \cdot dx \text{, cuando } u_{xy} = 3x + 8y^2,$$

siendo los precios de los "inputs", en un mercado de competencia perfecta, respectivamente: $r_1 = 2$ y $r_2 = 8$.

Se pide:

a) Comprobar la expresión de la EDP de la función de producción dada.

b) Con los mismos precios, determinar la trayectoria de expansión y las diferentes funciones de costes de otra empresa competidora, en función del volumen de producción, si los costes fijos ascienden a 200 u.m. y su función de producción viene dada por la expresión: $u(x,y) = (x + 5)^{1/6} \cdot (y + 6)^{1/6} + 4$.

Solución:

a) La integral definida que aparece en el enunciado del problema ofrece, como resultado: $\int_0^1 \ln x \cdot dx = [x \cdot \ln x]_0^1 = -1$, por lo que la expresión de la EDP planteada será: $u(x,y) = \frac{3x^2y}{2} + \frac{8xy^3}{3} + y^3 + x^2 + 1$.

Vamos, ahora, a partir de la expresión propuesta, la EDP de 2º orden:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 3x + 8y^2$. Integrando respecto a *x*, se tendrá:

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] \cdot dx = \int (3x + 8y^2) \cdot dx = \frac{3x^2}{2} + 8xy^2 + \phi(y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Integrando ahora respecto de y: $\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int \left(\frac{3}{2}x^2 + 8xy^2 + \phi(y)\right) dy \Rightarrow$

$$u(x,y) = \frac{3}{2}x^2y + \frac{8}{3}xy^3 + \int \phi(y)dy + \varphi(x).$$

De aquí que como la integral de una función arbitraria de la variable *y* es otra función arbitraria de la variable *y* se tiene que: $\int \phi(y)dy = \xi(y)$, y por tanto:

$$u(x,y) = \frac{3}{2}x^2y + \frac{8}{3}xy^3 + y^3 + x^2 + 1, \text{ c.s.q.d.}$$

b) La ecuación de la trayectoria de expansión de esta segunda empresa vendrá dada por:

$$\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{r_1}{r_2}; \quad \begin{cases} f'_1 = \frac{1}{6}(x+5)^{-5/6} \cdot (y+6)^{1/6} \\ f'_2 = \frac{1}{6}(x+5)^{1/6} \cdot (y+6)^{-5/6} \end{cases}$$

Entonces: $\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{y+6}{x+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, por lo que: x + 5 = 4(y + 6), o también: $y = \frac{x-19}{4}$, que será la ecuación de la trayectoria de expansión de esta empresa.

Como también: u = $(x + 5)^{1/6} \cdot (y + 6)^{1/6}$ + 4, eliminando *x* e *y* en las dos ecuaciones anteriores, y teniendo en cuenta que las diferentes funciones de costes son:

$$\begin{cases} CV = 2x + 8y = 8(u-4)^3 - 58 = 8u^3 - 96u^2 + 384u - 570 \\ CT = CV + CF = 8(u-4)^3 - 58 + 200 = 8(u-4)^3 + 142 \\ CMa = \dfrac{dCT}{du} = 24(u-4)^2 = 24u^2 - 192u + 384 \\ CVMe = 8u^2 - 96u + 384 - \dfrac{570}{u} \\ CTMe = 8u^2 - 96u + 384 - \dfrac{370}{u} \\ CFMe = 200/u \end{cases}$$

con las siguientes representaciones gráficas:

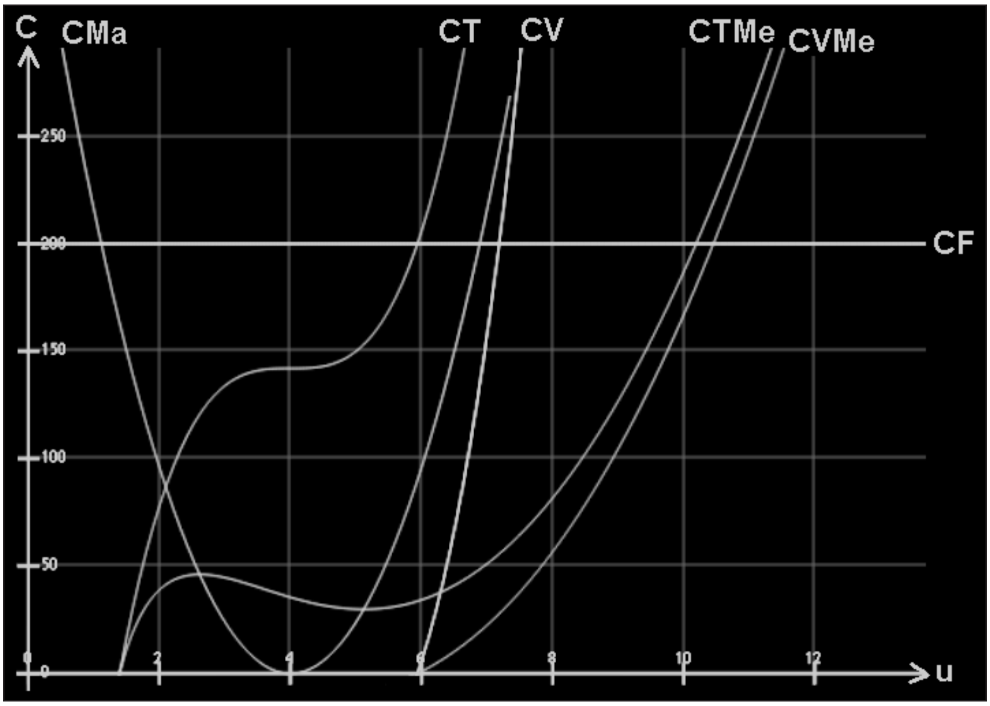


Fig. 6. Funciones de costes (II).

Ejercicio 7

Una empresa monopolística vende su producto en dos mercados separados, cuyas funciones de demanda son las siguientes:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - \dfrac{p_1}{2} \\ x_2 = 10 - p_2 \end{cases}$$, siendo sus costes de producción:

$C(x_1, x_2) = 4u(x_1, x_2) + \dfrac{u(x_1, x_2)^2}{2} + 7$, viniendo $u(x_1,x_2)$ dada por la EDP:

$x_2 \frac{\partial v}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial v}{\partial x_2} = \sin 0$, que cumple la condición que $v(0,x_2) = x_2^2$, para todo x_2, siendo: $u(x_1,x_2) = \sqrt{v(x_1,x_2) + 2x_1x_2}$. Se desea obtener el beneficio neto de la empresa si puede discriminar precios entre los dos mercados, considerando una fiscalidad del 25%, así como las diversas funciones de costes y su representación gráfica (adaptado de Martín y Sánchez, UNED, 2001, p.128).

Solución:

En primer lugar habrá que resolver la EDP dada, que es lineal, de primer orden, homogénea y de coeficiente variables, para obtener la correspondiente función de costes. Las líneas de campo verifican las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1, \\ \frac{dx_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Si se multiplica la primera ecuación por x_1 y la segunda por x_2, y se suman, se deduce que:

$$x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = 0 \text{, o bien su equivalente: } \frac{d}{dt}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 0.$$

De aquí se concluye la relación: $x_1^2 + x_2^2 = c$, donde *c* es constante en cada línea de campo. La expresión $x_1^2 + x_2^2$ es una integral primera del campo ya que permanece constante en el flujo. Es decir, se verifica que:

$$x_1(t,s)^2 + x_2(t,s)^2 = x_1(0,s)^2 + x_2(0,s)^2, \text{ para todo } t.$$

Si se impone la condición inicial se obtiene la expresión:

$$x_1(t,s)^2 + x_2(t,s)^2 = x_2(0,s)^2 = x_3(0,s).$$

Esta relación tiene el siguiente significado geométrico: las curvas características de la ecuación son circunferencias de centro en el origen de coordenadas.

De modo similar, de la segunda ecuación diferencial, se deduce que: $x_3 = c$, con *c* constante, es otra integral primera y por consiguiente:

$$x_3(t,s) = x_3(0,s).$$

Esta relación indica que el valor de la solución permanece constante a lo largo de una curva característica.

De las dos relaciones anteriores se desprende, en definitiva, que:

$x_3 = v(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$, es la función cuya gráfica es la superficie buscada. Se trata de un paraboloide infinito, con un mínimo global en el punto $(x_1,x_2) = (0,0)$. Al cabo, de la solución particular obtenida de la EDP se deduce que:

$$u(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2} = x_1 + x_2 = x,$$

y la función de costes totales quedará configurada así:

$$C(x_1,x_2) = 4(x_1 + x_2) + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + 7 .$$

La empresa en cuestión tenderá, como siempre, a maximizar sus beneficios. Si no se le prohíbe discriminar permitiéndole vender su producto a precios distintos en los diferentes mercados separados, la función de beneficio a maximizar será:

$$p_1 = 20 - 2x_1 \;\; ; \;\; p_2 = 10 - x_2 .$$

$$\pi = I - C = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - C(x_1,x_2) = (20 - 2x_1)x_1 + (10 - x_2)x_2 - 4(x_1 + x_2) - \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} - 7.$$

Procederemos como resulta habitual en estos casos:

- Condiciones necesarias o de primer grado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = 20 - 4x_1 - 4 - x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow 5x_1 + x_2 = 16 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} = 10 - 2x_2 - 4 - x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Se trata de resolver, pues, un simple sistema lineal no homogéneo, de dos ecuaciones con 2 incógnitas, compatible y determinado, a saber:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{42}{14} = 3\,\text{ud.} \;\; ; \;\; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 16 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1\,\text{ud.}$$

- Condiciones suficientes o de segundo grado:

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial x_1^2} = -4 - 1 = -5\,;\ \frac{\partial^2\pi}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = -1;\ \frac{\partial^2\pi}{\partial x_1^2} = -2 - 1 = -3\,,$$

y el determinante funcional hessiano ofrece:

$$H(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 1 = 14 > 0\text{ , y además: -5 < 0 ,}$$

luego se trata, efectivamente, de un máximo.

Consecuentemente, los precios a los que vende la empresa en cuestión su producto en cada uno de los dos mercados separados, son los siguientes:

$$\begin{cases} p_1 = 20 - 2x_1 = 14\text{ u.m.} \\ p_2 = 10 - x_2 = 9\text{ u.m.} \end{cases}$$, y entonces se tiene un beneficio bruto de:

π = (14 $\times$ 3) + (9 $\times$ 1) – (4 $\times$ 4) – 8 - 7 = 20 u.m. y un beneficio neto de:

B = 0’75 $\times$ π = 0’75 $\times$ 20 = 15 u.m.

Las diversas funciones de costes pedidas serán:

$$\begin{cases} CT = \dfrac{x^2}{2} + 4x + 7 \\ CF = 7 \\ CV = \dfrac{x^2}{2} + 4x \\ CMa = x + 4 \\ CMeT = \dfrac{x}{2} + 4 + \dfrac{7}{x} \\ CMeV = \dfrac{x}{2} + 4 \\ CMeF = \dfrac{7}{x} \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica:

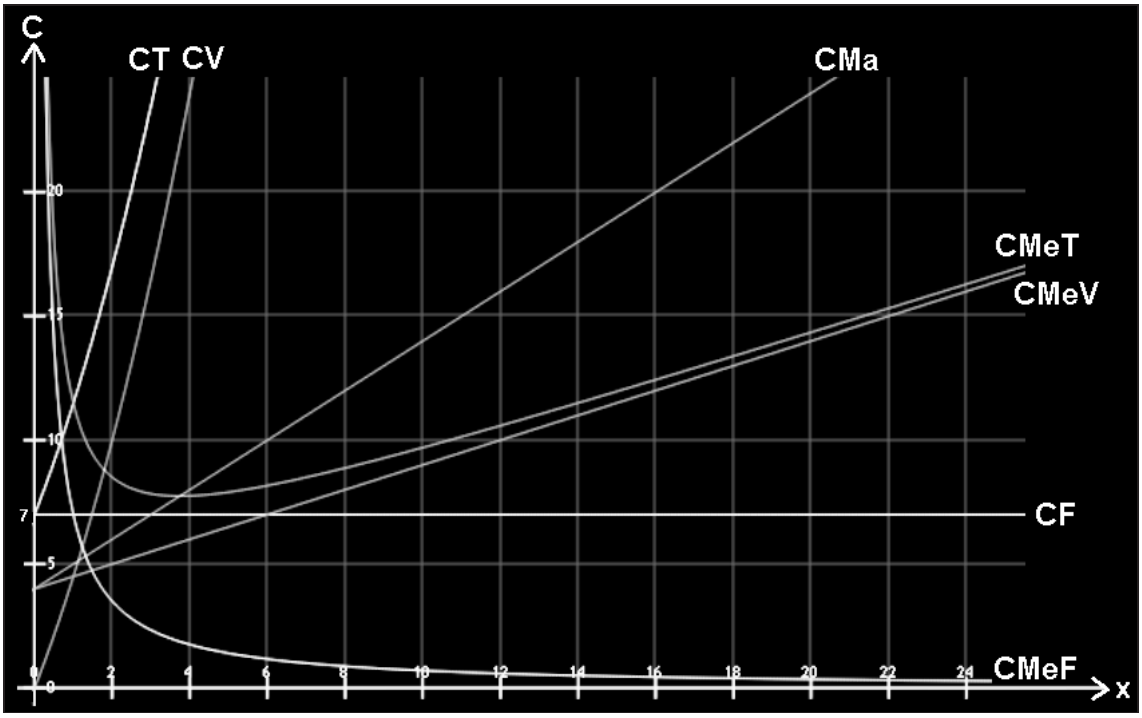


Fig. 7. Curvas de coste.

CAPÍTULO 6

FUNCIONES DE BENEFICIOS

1. INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

El supuesto de que la empresa busca obtener el máximo beneficio posible posee una larga tradición en la literatura económica. Ello se debe a dos motivos fundamentales: 1) constituye una hipótesis razonable del comportamiento de la empresa, y 2) genera resultados teóricos interesantes que son capaces de explicar las decisiones reales tomadas por las empresas. Pero estos asertos también pueden resultar discutibles por dos razones: 1) las empresas no siempre persiguen la maximización del beneficio, aunque ello sea importante, y 2) las causas pueden hallarse en que la mayoría de las grandes empresas (que representan un elevado porcentaje de la actividad económica en los países desarrollados) son regidas por directivos a sueldo cuyos intereses pueden diferir -siquiera eventualmente- de los de los accionistas. La empresa moderna típica, salvando la familiar, está gobernada por un grupo de dirigentes (consejo de administración y *staff* directivo) y no por un solo empresario.

El beneficio económico de la empresa (π) es la diferencia entre los ingresos totales (cifra de negocios) derivados de la actividad (I) y los costes totales de producción (CT), hallándose todas estas magnitudes en función del nivel del *output* (q). El objetivo de la empresa es el de maximizar esta diferencia que se alcanza en el punto en que la pendiente de la curva de ingresos totales se iguala a la pendiente de la curva de costes totales. Como sea que dichas pendientes lo que representan es el coeficiente angular de la tangente (o sea, la derivada en dicho punto), la maximización del beneficio está exigiendo que el CMa (coste marginal) se iguale al ingreso marginal (IMa).

Así pues, la empresa maximizará su beneficio total en aquel punto en que ya no es posible obtener ningún beneficio adicional incrementando la producción, y esto ocurre cuando la última unidad producida de *output* añade lo mismo al ingreso total que al coste total. Además, la empresa incrementa el beneficio total siempre que el ingreso adicional generado por la última unidad vendida (y cobrada) resulte ser mayor que su coste marginal. Alternativamente, siempre que IMa < CMa será posible aumentar π reduciendo el nivel de producción. En consecuencia, la empresa maximizará su beneficio en aquel nivel de producción en el que se equilibran el IMa y el CMa (Mochón, 1998).

2. EJERCICIOS

Ejercicio 1

El resultado contable bruto de una microempresa, expresado en millones de € , viene dado por la siguiente EDP, donde el tiempo *t* se expresa en siglos y los gastos variables *x* en millones de € :

$$\begin{cases} u_t - u_x - u^2 = I_1 + I_2 \,, & \forall x \in \Re,\ \forall t > 0 \\ u(x, 0) = (½)\, e^{-x}, & \forall x \in \Re \end{cases}$$

siendo: $I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$; $I_2 = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx$. Se pide hallar el resultado contable neto del duodécimo ejercicio económico en que los gastos totales han sido de 600.000 € y los costes fijos de 250.000 € , considerando una fiscalidad aplicable del 20% para los primeros 300.000 € de base imponible y del 25% para el resto.

(adaptado de Leonori, T., UGR, p. 13).

Solución:

Procede, en primer lugar, hallar el 2º miembro de la EDP planteada, por diferencia de sendas integrales definidas que resolveremos por aplicación de la integración en el campo complejo. Así:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}\text{, siendo el polo: } z = i \text{ (doble).}$$

$$\Phi(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}\,.$$

Residuo: $\frac{\Phi^{(n-1)}(z)}{\lfloor n-1} = \frac{\Phi'(z)}{1} = \frac{-2}{(z+i)^2} = \frac{1}{4i}$, y podemos escribir:

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_C \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{2\pi i}{4i} = \frac{\pi}{2}\,,$$

pero la segunda integral se anula cuando $R \to \infty$, ya que:

$\left| \int_C \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| \le \frac{\pi R}{R^4} \to 0$, obteniéndose $2 I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$, de donde $I_1 = \frac{\pi}{4}$.

Del mismo modo, la I_2 se resolverá aplicando la teoría de los residuos.

Estudiaremos para ello la integral $\int \frac{\ln z}{\left(1+z^2\right)^2} dz$ en el entorno de la figura correspondiente, en la que hemos rodeado el origen z = 0 con una semicircunferencia (γ) de radio r que haremos tender hacia cero.

El único polo interior al recinto es z = i (doble). Entonces:

$$\Phi(z) = (z-i)^2 \cdot \frac{\ln z}{\left(z^2+1\right)^2} = \frac{\ln z}{(z+i)^2} .$$

$$\text{Residuo} = \Phi'(z) = \frac{\frac{z+i}{z} - 2\ln z}{(z+i)^3} = (\text{para } z = i) = \frac{\pi i - 2}{8i} = R .$$

Podemos escribir:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} dx + \int_{\gamma} \frac{\ln z}{\left(1+z^2\right)^2} dz + \int_{r}^{R} \frac{\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} dx + \int_{C} \frac{\ln z}{\left(1+z^2\right)^2} dz =$$

$$= 2\pi i R = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i . \qquad (1)$$

La primera integral de la expresión anterior (1), haciendo x = -y, resulta:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\ln x}{\left(1+x^2\right)^2} dx = \int_{r}^{R} \frac{\ln(-y)}{\left(1+y^2\right)^2} dy = \int_{r}^{R} \frac{\ln y + \pi i}{\left(1+y^2\right)^2} dy =$$

$$= \int_{r}^{R} \frac{\ln y}{\left(1+y^2\right)^2} dy + \pi i \int_{r}^{R} \frac{dy}{\left(1+y^2\right)^2} . \qquad (2)$$

La segunda y cuarta integral de la expresión (1) cuando $r \to 0$, entonces $R \to \infty$, valen, respectivamente:

- $\int_{\gamma} \frac{\ln z}{\left(1+z^2\right)^2} dz = \left(\text{como } z \cdot \underset{z\to 0}{f}(z) \to 0\right) = 0 . \qquad (3)$
- $\left| \int_{C} \frac{\ln z}{\left(1+z^2\right)^2} dz \right| \le \frac{\pi R \cdot \ln R}{R^4} \to 0 . \qquad (4)$

Substituyendo, ahora, las expresiones (2), (3) y (4) en (1) se obtiene, cuando $r \to 0$, $R \to \infty$:

$2I_2 + \pi i\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} i$, e igualando partes reales se obtiene: $2I_2 = -\frac{\pi}{2}$, de donde $I_2 = -\frac{\pi}{4}$. Si alternativamente hubiéramos igualado las partes imaginarias, obtendríamos: $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$.

De este modo, la EDP planteada, no lineal, de primer orden, homogénea y de coeficientes constantes, tendrá la siguiente configuración analítica:

$$u_t - u_x - u^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0 .$$

Aplicamos, a continuación, el método de las características para la resolución de esta EDP y, por lo tanto, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = 1 \\ \dot{x}(s) = -1 \\ \dot{z}(s) = z^2(s) \end{cases} \qquad \begin{cases} t_0(\sigma) = 0 \\ x_0(\sigma) = \sigma \\ z_0(\sigma) = \frac{1}{2}e^{-\sigma} \end{cases} \text{. Entonces:}$$

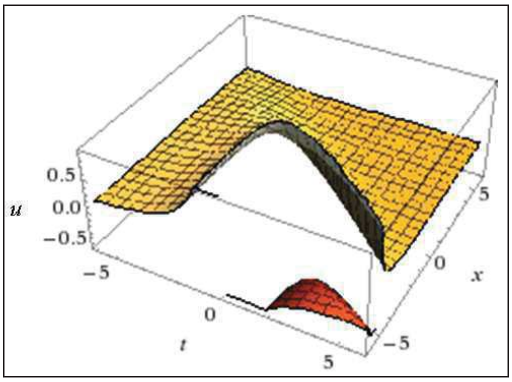
$$\begin{cases} t(s,\sigma) = s \\ x(s,\sigma) = -s + \sigma \\ \frac{1}{z_0(\sigma)} - \frac{1}{z(s,\sigma)} = 2e^{\sigma} - \frac{1}{z(s,\sigma)} = s \end{cases} \text{, y consecuentemente:}$$

$$\begin{cases} s = t(s,\sigma) \\ \sigma = x(s,\sigma) + t(s,\sigma) \\ u(x(s,\sigma), t(s,\sigma)) = z(s,\sigma) = \frac{1}{2e^{\sigma} - s} = \frac{1}{2e^{x(s,\sigma)+t(s,\sigma)} - t(s,\sigma)} \end{cases}$$

y finalmente deducimos que:

$$u(x,t) = \frac{1}{2e^{x+t} - t},$$

con la siguiente representación gráfica:



Es fácil comprobar que ésta es, efectivamente, una solución del problema planteado. Con los datos del mismo, se tendrá que:

x = CV = CT – CF = 0’60 – 0’25 = 0’35; entonces:

$$u = \frac{1}{2e^{0'35+0'12} - 0'12} = 0'324676 \equiv 324.676 \text{ € },$$

y los resultados contables, después de impuestos, serán:

$$u_B = 300.000 \times 0'80 + 24.676 \times 0'75 = 258.507 \text{ € },$$

lo que supone un tipo impositivo medio de:

$$\frac{324.676 - 258.507}{324.676} \times 100 = 20'38\%.$$

Ejercicio 2

El resultado contable bruto de una microempresa, expresado en millones de € , viene dado por la siguiente EDP, donde el tiempo *t* se expresa en siglos y los gastos variables *x* en millones de € :

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = \int_C xt^2 \cdot dx + x^2 t \cdot dt, & (x, t) \in \Re \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x), & \forall x \in \Re \end{cases} \quad (1)$$

en que la integral curvilínea lo es a lo largo de la circunferencia de ecuación: $x^2 + t^2 - 2ax - 2bt = 0$, y con *g* tal que :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Se pide hallar el resultado contable neto del duodécimo ejercicio económico en que los gastos totales han sido de 600.000 € y los costes fijos de 250.000 € , considerando una fiscalidad aplicable del 20% para los primeros 300.000 € de base imponible y del 25% para el resto.

Solución:

Este problema constituye una variación del ejercicio anterior en el que se ha modificado la EDP y su condición de contorno.

En primer lugar, habrá que resolver el 2º miembro de la EDP planteada, que es una integral curvilínea o de trayectoria. La función potencial exige:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(xt^2) = 2xt \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 t) = 2xt \end{cases},$$

y se cumple la condición o lema de Schwarz de las derivadas cruzadas, luego la integral en cuestión no depende del camino que, al ser cerrado, provoca que la integral sea nula. En su consecuencia, la EDP queda configurada así: $u_t + u \cdot u_x = 0$, que es de primer orden, homogénea y de coeficientes constantes.

A continuación, notamos que en principio el método de las características no se puede aplicar a este problema siendo el dato inicial de la clase C^1 a trozos pero no $C^1(\Re)$. A pesar de esto, podemos pensar en aplicar dicho método en las regiones del semiplano correspondientes a las zonas donde el dato inicial es regular e intentar, luego, de pegar las soluciones encontradas.

La ecuación diferencial que aparece en (1) es muy bien conocida en otras disciplinas científicas (Mecánica de Fluidos) como Ecuación de Burges (con coeficiente de viscosidad = 0). Sin embargo, éste es un ejemplo sencillo de una ley de conservación, también aplicable en Economía, es decir, de ecuaciones que tienen la forma:

$u_t + F(u)_x = 0$, siendo F una función regular [$F(s) = ½\, s^2$ en (1)].

Escribimos el sistema asociado, es decir:

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = 1 \\ \dot{x}(s) = z(s) \\ \dot{z}(s) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_0(\sigma) = 0 \\ x_0(\sigma) = \sigma \\ z_0(\sigma) = g(\sigma) \end{cases}$$

Siendo: $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, el sistema es compatible, así que tiene sentido buscar una solución alrededor de la curva Γ(s) = (t(σ), x(σ), g(σ)). Por lo tanto:

$$\begin{cases} t(s) = s \\ z(s) = g(\sigma) \\ x(s) = \sigma + sg(\sigma) \end{cases} \qquad (3)$$

Entonces: u(x(s,σ), t(s,σ)) = z(s,σ) = g(σ), así que ahora sólo tenemos que encontrar una expresión explícita para g(σ) en función de *x* y de *t*.

Siendo t = s, deducimos que x(s) = σ + tg(σ); además, aprovechando (2), podemos escribir la solución de la tercera ecuación en (3) explícitamente:

$$\begin{cases} x = \sigma + t & \text{si } \sigma \leq 0 \\ x = \sigma + t(1-\sigma) & \text{si } 0 < \sigma \leq 1 \\ x = \sigma + t & \text{si } \sigma > 1 \end{cases} \text{, por lo tanto:}$$

$$\begin{cases} \sigma = x - t & \text{si } x \leq t \\ \sigma = \dfrac{x-t}{1-t} & \text{si } 0 < \dfrac{x-t}{1-t} \leq 1, \\ \sigma = x & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{es decir } t < x \leq 1,\ 0 < t < 1.$$

Consecuentemente la solución particular de (1) está dada, acordando la definición de *g* dada en (2), por:

$$u(x,t) = \begin{cases} x - t & \text{si } x \leq t \\ \dfrac{1-x}{1-t} & \text{si } t < x \leq 1,\ \ 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como ya hemos observado, la solución encontrada no es de clase $C^1(\Re \times (0,1))$ siendo el dato inicial sólo continuo (y C^1 a trozos pero no $C^1(\Re)$) y por no tener, la ecuación considerada, un efecto de regularización en las soluciones.

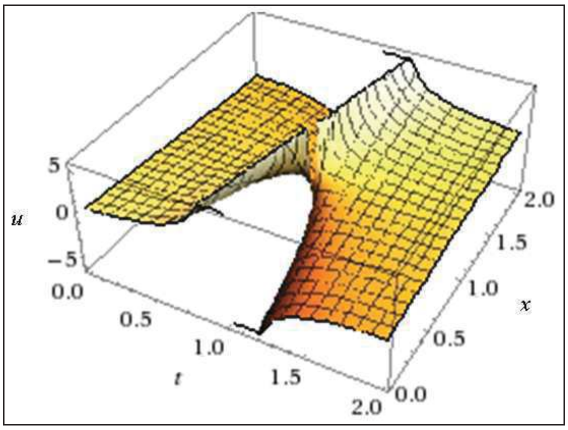
Pues bien, con los datos del problema, se tendrá, en este caso concreto (t < x) que:

x = CV = CT – CF = 0’60 – 0’25 = 0’35,

y la solución particular a adoptar será:

$$u = \frac{1-x}{1-t} = \frac{1-0'35}{1-0'12} = 0'738636 \equiv 738.636\ €\ ,$$

con la siguiente representación gráfica:



y los resultados contables, después de impuestos, serán:

$$u_B = 300.000 \times 0'80 + 438.636 \times 0'75 = 568.977\ €\ ,$$

lo que supone un tipo impositivo medio de:

$$\frac{738.636 - 568.977}{738.636} \times 100 = 22'97\%.$$

Ejercicio 3

El resultado contable bruto de una empresa, expresado en millones de € , viene dado por la siguiente EDP, donde el tiempo *t* se expresa en siglos y los ingresos totales *x* en millones de € . Hallar sus resultados netos en el undécimo año, con una cifra de negocios de 450.000 € y una fiscalidad aplicable del 25%.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = I_1 + I_2, & \forall\, x \in (0,1), \forall\, t > 0 \\ u(x,0) = \sin \pi x, & \forall x \in (0,1) \\ u_t(x,0) = 0, & \forall x \in (0,1) \\ u(t,0) = 0, & \forall t > 0, \\ u(t,1) = 0, & \forall t > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

, siendo I_1 la integral curvilínea: $\int_C \frac{x \cdot \arcsin x}{t} dx$ a lo largo de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio unidad, situada sobre el eje OX y comprendida entre los puntos de abscisa x = -1 y x = 1, y siendo I_2 la integral curvilínea: $\int_C \left[(x^2 - t^2)dx + x \cdot dt\right]$ desde los puntos A(0,2) hasta el B(2,0) siguiendo la recta $\overline{AB}$.

(adaptado de Leonori, T., UGR, p. 32).

Solución:

Procede, en primer lugar, resolver el 2º miembro de la EDP propuesta, para lo que calcularemos separadamente las dos integrales curvilíneas dadas. Así, por lo que se refiere a la primera de ellas, pasando a ecuaciones paramétricas, se tiene que:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi = \cos\varphi \\ t = r \cdot \sin\varphi = \sin\varphi \end{cases}, \text{ de donde: } dx = -\sin\varphi \cdot d\varphi \text{ , y entonces:}$$

$$I_1 = \int_C \frac{x \cdot \arcsin x}{t} dx = \int_{-\pi}^{0} \frac{\cos\varphi \cdot \arcsin(\cos\varphi)}{\sin\varphi}(-\sin\varphi) \cdot d\varphi,$$

que haciendo la sustitución: cos φ = sin τ y resolviendo por partes, se llega a: $I_1 = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} \tau \cdot \sin\tau \cdot d\tau = \left[-\tau \cdot \cos\tau + \int \cos\iota \cdot d\tau\right]_{3\pi/2}^{\pi/2} = 1 - (-1) = 2$.

Por lo que se refiere a la segunda integral, veamos que la recta $\overline{AB}$ es de ecuación: $\frac{x}{t-2} = \frac{2}{-2} = -1$, de donde: t = 2 – x ; dt = -dx , y entonces:

$$I_2 = \int_C \left[(x^2 - t^2)dx + x \cdot dt\right] = \int_0^2 [x^2 - (2-x)^2] \cdot dx - x \cdot dx = \int_0^2 (3x - 4) \cdot dx =$$

$$= \left[3\frac{x^2}{2} - 4x\right]_0^2 = 6 - 8 = -2, \text{con lo que}: I_1 + I_2 = 2 - 2 = 0.$$

De este modo, la EDP quedará configurada así: $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$, que es lineal de 2º orden, homogénea y de coeficientes constantes. Como a = - 1, b = 0 y c = 1, con el discriminante: $(b^2 - 4ac) = 4 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico.

A continuación, proponemos dos maneras alternativas de resolver el ejercicio así planteado.

Método 1. Las soluciones de esta ecuación tienen la forma:

$$u(x,t) = F(x + t) + G(x - t),$$

con F, G: $\Re \to \Re$ funciones de clase $C^2(\Re)$. Nuestro objetivo es hallar una expresión explícita para F y G de forma que la solución cumpla además las condiciones en la frontera. Entonces, desde (1), F y G tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \sin \pi x, & \forall x \in (0,1) \\ F'(x) - G'(x) = 0, & \forall x \in (0,1) \\ F(t) + G(-t) = 0, & \forall t > 0, \\ F(1+t) + G(-t) = 0, & \forall t > 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación resulta que, en (0, 1), F y G coinciden (a menos de una constante que puede ser elegida 0) y de la primera ecuación; entonces deducimos que $F(x) \equiv G(x) = ½ \sin \pi x$, $\forall x \in (0, 1)$.

Finalmente, de la tercera y la cuarta ecuaciones nos sale que F y G tienen que ser impares y 2-periódicas, así que:

$F(s) \equiv G(s) = (½) \sin \pi s$, $\forall s \in \Re$. Por lo tanto:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sin[\pi(x-t)] + \frac{1}{2}\sin[\pi(x+t)],$$

es la única solución de (1). Aprovechando que para cada $\alpha,\beta \in \Re$, se tiene, por identidades trigonométricas, que:

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha - (\sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha) =$$

$= 2 \sin\alpha\cdot\cos\beta$, y deducimos que: $u(x,t) = \sin \pi x\cdot\cos \pi t$.

Método 2. Otra forma de resolver el problema es la siguiente. Como el problema está definido en un subconjunto de $(0, +\infty) \times \Re$, la fórmula de D'Alembert no se puede aplicar directamente. Entonces queremos encontrar un problema definido en todo $(0, +\infty) \times \Re$, cuya solución $\tilde{u}(x,t)$ restringida al dominio $(0,1) \times (0, +\infty)$, sea solución de (1).

Por eso resolveremos el problema:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) - \tilde{u}_{xx}(x,t) = 0 & \forall x \in \Re, \forall t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = f(x), & \forall x \in \Re, \\ \tilde{u}_t(x,0) = g(x), & \forall x \in \Re, \end{cases} \qquad (2)$$

con *f* y *g* funciones regulares tales que: $f(x) \equiv \sin(\pi x)$ si $x \in (0,1)$ y también: $g(x) \equiv 0$ si $x \in (0,1)$.

La solución de (1) será, entonces, $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)\big|_C$ donde C = [0,1] × [0,+∞]. Gracias a la fórmula de D'Alembert (véase ejercicio 2 del cap. 4), la solución de (2) está dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds.$$

Nótese que tanto *f* como *g* tienen que ser elegidas de forma que se cumplan las condiciones: u(0,t) = 0 y u(1,t) = 0, ∀t > 0.

Por lo tanto, por un lado notamos que la primera condición nos da que:

$$u(0,t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}f(-t) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} g(s)ds \equiv 0 \quad \forall t > 0.$$

Por eso se ve que tanto la *f* como la *g* tienen que ser funciones impares.

Por otro lado, cuando calculamos la condición a lo largo de la recta x = 1 deducimos que:

$$u(1,t) = \frac{1}{2}f(1+t) + \frac{1}{2}f(1-t) + \frac{1}{2}\int_{1-t}^{1+t} g(s)ds \equiv 0 \quad \forall t > 0.$$

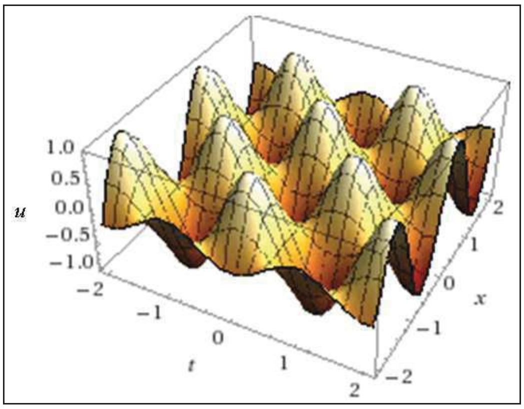
Esta expresión lleva consigo (con el cambio 1 – t = t', si es necesario) a la segunda condición sobre *f* y *g,* es decir, que tanto *f* como *g* tienen que ser funciones 2-periódicas.

Siendo los datos iniciales ya funciones impares y 2-periódicas, sólo tenemos que aplicar la fórmula de D'Alembert a (2) con f(x) = sin πx y también: g = 0, $\forall x \in \Re$, así que:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sin[\pi(x-t)] + \frac{1}{2}\sin[\pi(x+t)] = \sin\pi x \cdot \cos\pi t\text{, c.s.q.d.,}$$

que ofrece, lógicamente, el mismo resultado que el obtenido por el procedimiento anterior.

La correspondiente representación gráfica será:



Pues bien, con los datos del problema se tendrá un resultado contable, antes de impuestos, de:

$$u = \sin(0'45\cdot\pi)\cdot\cos(0'11\cdot\pi) = 0'988 \times 0'941 = 0'929590 \equiv 929.590 \text{ €} ,$$

y, entonces, el resultado neto de la empresa, en el año 11º, será:

$$u_B = 929.590 \times 0'75 = 697.192'50 \text{ €} .$$

Ejercicio 4

Si el resultado contable bruto de una empresa u(x,t), expresado en millones de € , es la solución de la EDP dada por:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \lim\limits_{(x,t)\to(0,0)} \dfrac{xt}{\sqrt{x^2+t^2}}, & 0 \le x \le 1, \forall\, t \ge 0 \\ u(x,0) = 0, & \text{si } \ 0 \le x \le 1 \\ u_t(x,0) = x(1-x), & \text{si } \ 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0 = u(1,t), & \forall\, t \ge 0 \end{cases}$$

donde *x* es la cifra de ventas en millones de € y *t* el tiempo expresado en décadas, determinar el valor de su resultado neto considerando una fiscalidad del 25%, en el decimoquinto año y para una cifra de negocios de 500.000 € .

(adaptado de Leonori, T., UGR, p. 47).

Solución:

El límite doble que figura en el 2º miembro de la expresión de la EDP planteada tiene como solución:

$$\lim_{(x,t)\to(0,0)} \frac{xt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{\sqrt{1+m^2}} = 0 \text{, con lo que la EDP dada será:}$$

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0\,,$$

que resulta ser la misma que la del ejercicio anterior aunque con diferentes condiciones de contorno.

Primero extendemos el dato inicial de forma que sea impar en el punto (-1,1) (o en (0,2), que es lo mismo). Además los extendemos a todo el eje, de forma que se pueda aplicar la fórmula de D'Alembert. Así que definimos $\tilde{u}(x,t)$ como la solución del problema definido en todo el eje.

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) - \tilde{u}_{xx}(x,t) = 0 & \forall x \in \Re, \forall t \geq 0 \\ \tilde{u}(x,0) = 0, & \forall x \in \Re, \\ \tilde{u}_t(x,0) = g(x), & \forall x \in \Re, \end{cases}$$

donde:

$$g(x) = \begin{cases} x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ x(1+x) & -1 \leq x \leq 0 \\ 2-\text{periódica} & \end{cases}$$

Gracias a la fórmula de D'Alembert tenemos una representación de u(x,t) en todo $\Re \times (0,+\infty)$: $\tilde{u}(x,y) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy$.

Para determinar el valor pedido de u en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ sólo nos hace falta conocer *g* en el cono de influencia de $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, es decir por debajo de las rectas características que, en este caso, están dadas por las expresiones: x – t = -1 y x + t = 2.

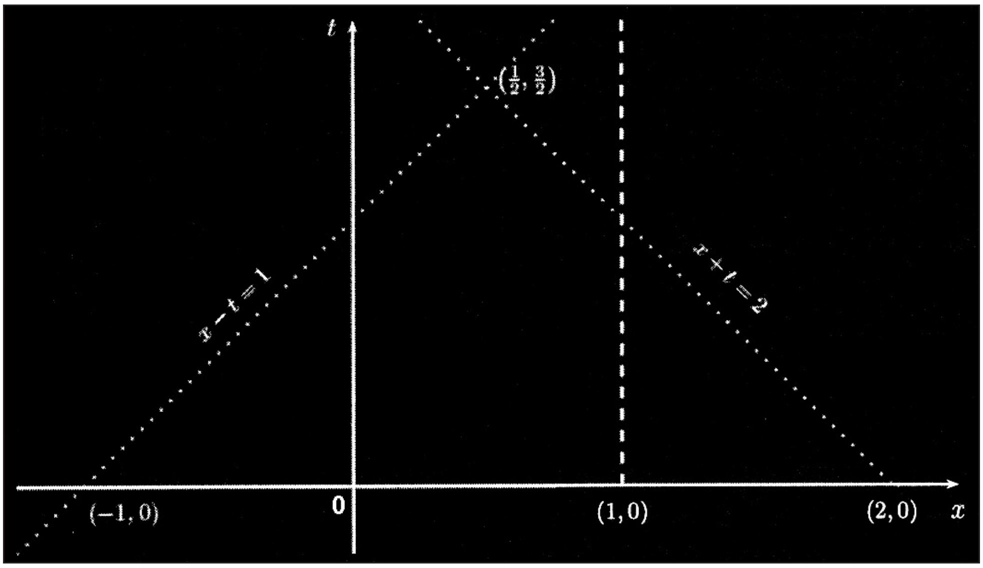


Fig. 1. Cono de influencia (I).

Entonces, se trata de determinar:

$$u\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\tilde{u}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}g(y)dy=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}y(1+y)dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}y(1-y)dy}^{=\ 0\,\text{por ser g impar}}+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}(y-2)(y-1)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y\right]_1^2=-\frac{1}{12}=-0'083333\equiv-83.333\ €$$

Así pues, el resultado contable empresarial es de 83.333 € de pérdidas cuando t = 15 años.

Ejercicio 5

Si el resultado contable de un establecimiento comercial u(x,t), expresado en miles de € , es la solución de la EDP dada por:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=3x^2-2x^3, & 0\leq x\leq 1, \forall t>0 \\ u(x,0)=0, & 0\leq x\leq 1 \\ u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq 1 \\ u_x(0,t)=0, & \forall t\geq 0. \\ u_x(1,t)=0, & \forall t\geq 0. \end{cases}$$

donde *x* es la cifra de ventas en millones de € y *t* el tiempo expresado en décadas, determinar el valor de su resultado contable en el decimoquinto año y para una cifra de negocios de 250.000 € .

(adaptado de Leonori, T., UGR, p. 49).

Solución:

La idea es parecida a la del ejercicio anterior. Pero, en este caso, hay dos dificultades más: primero, la ecuación no es homogénea y segundo, en la frontera lateral hay condiciones del tipo Newmann (es decir, que involucran la derivada de la solución).

El principio de Duhamel[1] nos da una solución del problema definida en todo $\Re \times [0,+\infty)$. Así que tenemos que elegir el dato f(x,t) = f(x)

[1] El mencionado principio de Duhamel (1797-1872) nos da una fórmula de representación para soluciones de ecuaciones no homogéneas. De hecho, es el equivalente de la variación de parámetros en las EDO para las EDP no homogéneas. Consideramos el problema:

definido para cada x ∈ $\Re$ de forma que coincida con $3x^2 - 2x^3$ en (0,1) y de forma que la función cumpla las condiciones en la frontera del dominio (0,1) × (0,+∞). Por lo tanto, definimos $\tilde{u}(x,t)$ como la solución de:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) - \tilde{u}_{xx}(x,t) = f(x) & \forall x \in \Re, \forall t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = 0, & \forall x \in \Re, \\ \tilde{u}_t(x,0) = 0, & \forall x \in \Re, \end{cases} \text{, es decir:}$$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y)dyds \text{, así que:}$$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left[f(x+(t-s)) - f(x-(t-s))\right]ds.$$

Entonces las condiciones en la frontera del cilindro (0,1) × (0,+∞) son:

$$\begin{cases} \tilde{u}_x(t,0) = \frac{1}{2}\int_0^t \left[f(t-s) - f(-(t-s))\right]ds = 0, \\ \tilde{u}_x(t,1) = \frac{1}{2}\int_0^t \left[f(1+(t-s) - f(1-(t-s))\right]ds = 0, \end{cases} \quad \forall t > 0,$$

que gracias a efectuar un cambio de variable (t – s = σ en la primera expresión y σ = 1 + (t – s) en la segunda) quedan así:

$$\begin{cases} \int_0^t \left[f(\sigma) - f(-\sigma)\right]d\sigma = 0, \\ \int_0^{1+t} \left[f(\sigma) - f(2-\sigma)\right]d\sigma = 0, \end{cases} \quad \forall t > 0$$

Consecuentemente, desde la primera condición deducimos que la función *f* tiene que ser par mientras que la segunda implica que es además 2-periódica.

Finalmente, en base a los datos del enunciado del problema planteado, podemos calcular:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2u_{xx}(x,t) = f(x,t), & \forall x \in \Re, \forall t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \forall x \in \Re, \\ u_t(x,0) = 0, & \forall x \in \Re, \end{cases}$$

con f de clase $C^2(\Re \times \Re^+)$, la única solución de dicho problema tiene la siguiente forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)dy \cdot ds.$$

$$u\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)=\tilde{u}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}}\int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}-s} f(y)dyds\,.$$

Definiendo: $F(s)=\int_0^s f(\sigma)d\sigma$, para $-2 \le s \le 2$, sólo nos hace falta dar la definición de F al interior del cono de influencia, que puede verse en la siguiente figura:

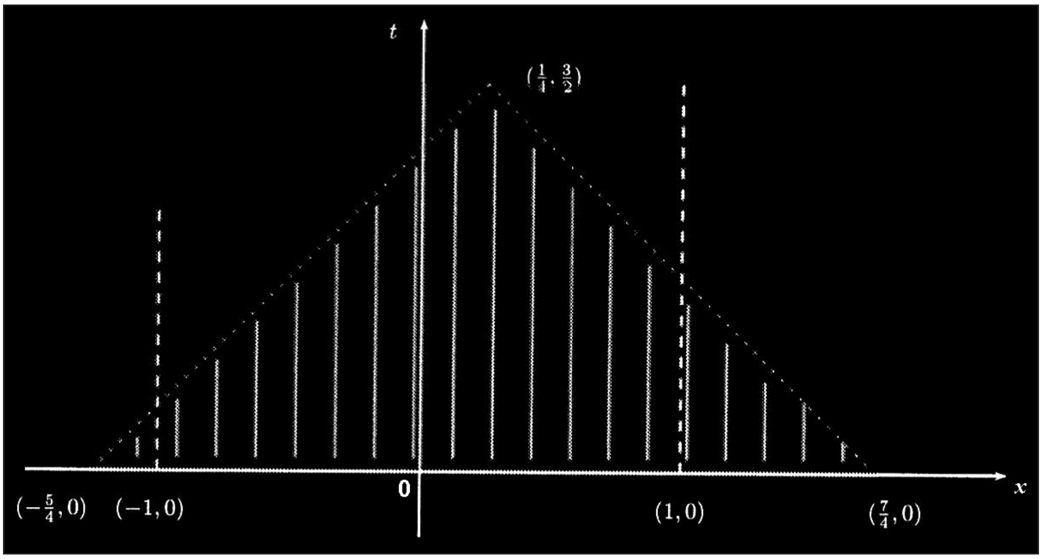


Fig. 2. Cono de influencia (II).

Tenemos que:

$$F(s)=\begin{cases}-\frac{1}{2}s^4+s^3-\frac{1}{2} & \text{si } -2\le s\le -1,\\ \frac{1}{2}s^4+s^3 & \text{si } -1\le s\le 0,\\ -\frac{1}{2}s^4+s^3 & \text{si } 0\le s\le 1,\\ \frac{1}{2}s^4+s^3+\frac{1}{2} & \text{si } 1\le s\le 2.\end{cases}$$

Por lo tanto, hallando la integral, deducimos que:

$$u\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}}\int_{-\frac{5}{4}+s}^{\frac{7}{4}-s} f(y)dyds=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}}\left[F-(\frac{5}{4}+s)-F(\frac{7}{4}-s)\right]ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}}F(-\frac{5}{4}+s)ds-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}}F(\frac{7}{4}-s)ds.$$

Calculamos las dos integrales definidas por separado:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} F(-\frac{5}{4}+s)ds = \int_0^{\frac{1}{4}} F(-\frac{5}{4}+s)ds + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} F(-\frac{5}{4}+s)ds + \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}} F(-\frac{5}{4}+s)ds =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} [-\frac{1}{2}+(-\frac{5}{4}+s)^3 - \frac{1}{2}(-\frac{5}{4}+s)^4]ds + \int_{1/4}^{\frac{5}{4}} [(-\frac{5}{4}+s)^3 + \frac{1}{2}(-\frac{5}{4}+s)^4]ds +$$

$$+ \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}} [(-\frac{5}{4}+s)^3 - \frac{1}{2}(-\frac{5}{4}+s)^4]ds =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}(-\frac{5}{4}+s)^4 - \frac{1}{10}(-\frac{5}{4}+s)^5\right]_0^{\frac{1}{4}} + \left[\frac{1}{4}(-\frac{5}{4}+s)^4 + \frac{1}{10}(-\frac{5}{4}+s)^5\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} +$$

$$+ \left[\frac{1}{4}(-\frac{5}{4}+s)^4 - \frac{1}{10}(-\frac{5}{4}+s)^5\right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\right] - \left[\frac{1}{4}.\frac{5^4}{4^4}+\frac{1}{10}.\frac{5^5}{4^5}\right] - \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{10}.\frac{5^5}{4^5}\right] + \left[\frac{1}{4^5}-\frac{1}{10}.\frac{1}{4^5}\right] =$$

$$= -\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{5^4}{4^5}+\frac{9}{10}.\frac{1}{4^5}.$$

Por el otro lado, se tendrá que:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} F(\frac{7}{4}-s)ds = \int_0^{\frac{3}{4}} F(\frac{7}{4}-s)ds + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} F(\frac{7}{4}-s)ds =$$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} [\frac{1}{2}+(\frac{7}{4}-s)^3 - \frac{1}{2}(\frac{7}{4}-s)^4]ds + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} [(\frac{7}{4}-s)^3 + \frac{1}{2}(\frac{7}{4}-s)^4]ds =$$

$$= \left[\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}(\frac{7}{4}-s)^4 + \frac{1}{10}(\frac{7}{4}-s)^5\right]_0^{\frac{3}{4}} + \left[-\frac{1}{4}(\frac{7}{4}-s)^4 - \frac{1}{10}(\frac{7}{4}-s)^5\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \left[\frac{3}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\right] - \left[-\frac{1}{4}(\frac{7}{4})^4+\frac{1}{10}(\frac{7}{4})^5\right] + \left[-\frac{1}{4^5}-\frac{1}{10}.\frac{1}{4^5}\right] - \left[-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}+\frac{3}{8}+\frac{3}{10}.\frac{7^5}{4^5}-\frac{11}{10}.\frac{1}{4^5}.$$

Por lo tanto, resulta:

$$u\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} F(-\frac{5}{4}+s)ds - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} F(\frac{7}{4}-s)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{5}+\frac{2-5^4}{4^5}-\frac{3}{10}.\frac{7^5}{4^5}\right] = -3'066 \equiv -3.066€.$$

Así pues, el resultado contable pedido será de 3.066 € de pérdidas cuando t = 15 años.

Ejercicio 6

Si el resultado contable de un establecimiento comercial, representado por la función u(x,t), expresado en millones de € , es la solución de la EDP dada por:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sin(\pi x), & 0 < x < 1, \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t > 0. \end{cases}$$

donde *x* es la cifra de ventas en millones de € y *t* el tiempo expresado en décadas, se trata de determinar el valor de su resultado contable en el décimo año de su actividad económica y para una cifra de ventas de 150.000 € .

(adaptado de Leonori, T., UGR, p. 53).

Solución:

Método 1. Razonamos como en el ejercicio anterior. El primer miembro de la EDP es el mismo y la ecuación tampoco es homogénea.

Extendemos el problema a uno definido en todo el semiplano con un dato impar y 2-periódico (nótese que la extensión de sin(πx) impar y 2-periódica es la función misma), con lo que:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) - \tilde{u}_{xx}(x,t) = \sin(\pi x), & \forall x \in \Re, \forall t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0, & \forall x \in \Re. \end{cases}$$

Calculamos ahora su solución utilizando la formulación de Duhamel que ya hemos visto en el anterior ejercicio, así:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \sin(\pi y) \cdot dy \cdot ds \,.$$

Por lo tanto la solución del problema planteado será $\tilde{u}(x,t)\big|_{C'}$, es decir:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^t [\cos(\pi x + \pi(t-s) - \cos(\pi x - \pi(t-s))]ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^t [\cos(\pi x + \pi(t-s) - \cos(\pi x - \pi(t-s))]ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\int_0^t \sin(\pi(t-s))ds = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\left[\frac{\sin(\pi s)\cdot\sin(\pi t)}{\pi} + \frac{\cos(\pi s)\cdot\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^t =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)[1-\cos(\pi t)].$$

Método 2. Notamos primero que $(\sin(\pi x))'' = -\pi^2\sin(\pi x)$; es decir, dándole la vuelta, que $z(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$ cumple que:

$$\begin{cases} -z_{xx}(x) = \sin(\pi x), & 0 < x < 1, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto si definimos $v(x,t) = u(x,t) + z(x)$, entonces $v(x,t)$ es solución de la EDP siguiente, que ya es una ecuación homogénea y lineal, de 2º orden y coeficientes constantes, con sus correspondientes condiciones de contorno:

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 1, \forall t > 0 \\ v(x,0) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x), & 0 \le x \le 1 \\ v_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & \forall t > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Al igual que la anterior, se trata de una EDP en la que a = -1, b = 0, c = 1, por lo que el discriminante: $(b^2 - 4ac) = 4 > 0$, luego son ecuaciones de tipo hiperbólico.

Razonando como antes, tenemos que encontrar una $\tilde{v}$ que resuelva el problema (1) en todo $\Re \times [0,+\infty)$ con un dato inicial que coincide con $z(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$ para $0 \le x \le 1$. Ya hemos visto que la elección que hay que hacer es la extensión de $\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$ de forma impar y 2-periódica, es decir, la función misma en todo el eje.

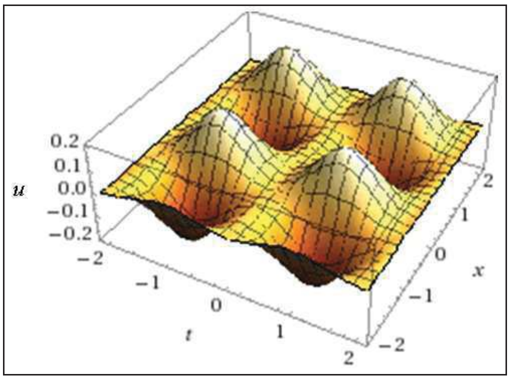
Por lo tanto, gracias a la fórmula de D'Alembert, deducimos que:

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi^2}\sin(\pi(x+t)) + \frac{1}{2\pi^2}\sin(\pi(x-t)) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\cos(\pi t).$$

Finalmente, deshaciendo el cambio, se obtiene la solución pedida:

$$u(x,t) = v(x,t) - z(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\cos(\pi t) - \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}[\cos(\pi t) - 1],$$

con la siguiente representación gráfica:



De este modo, según los datos del problema, se tendrá que:

$$u = \frac{\sin(\pi \cdot 0'15)}{\pi^2}[\cos(\pi \cdot 0'1) - 1] = 0'046 \cdot (-0'049) = -0'002251 = \text{-2.251€ (pérdidas).}$$

Ejercicio 7

Determinar la trayectoria temporal de los resultados contables cooperativos de una sociedad cooperativa fiscalmente protegida, dedicada a central hortofrutícola, u(x,t), expresados en millones de € , que vienen dados por la siguiente EDP, donde *x* es la cifra de ventas (en millones de €) y *t* el tiempo expresado en décadas, a los 5 años del inicio de su actividad económica:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = t + e^t, & \forall x \in \Re, \forall t > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^4 - 5x^2 + 4)\cdot dx, & \forall x \in \Re. \end{cases}$$

Determinar, para el mismo ejercicio, la cuota íntegra a ingresar, en su caso, del Impuesto de Sociedades, teniendo en cuenta que:

- La cifra de ventas ha sido de 47.650.000 € .
- La sociedad se halla sujeta a unos tipos del 20% para los resultados cooperativos y del 30% para los extra-cooperativos.
- Se han producido resultados extra-cooperativos (básicamente por relaciones comerciales con terceros no socios y otras actividades económicas ajenas) por importe de 300.000 € .

- La retribución del gerente excede en 10.000 € del valor de mercado de un puesto de trabajo de la misma naturaleza.

- Los excedentes cooperativos se destinan en un 20% al FRO (Fondo de Reserva Obligatorio) y en un 5% al FEP (Fondo de Educación y Promoción).

Solución:

La condición lateral dada ofrece como solución:

$$u(x,0) = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(x^4 - 5x^2 + 4)\cdot dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = 2.$$

Para resolver este ejercicio no necesitamos aplicar la fórmula de Poisson. En efecto, observamos, de la contemplación de los datos del problema, que u(x,t) es independiente de la variable *x*, así que la solución buscada es de la forma:

$$u(x,t) = z(t) \text{ , con z resolviendo } \begin{cases} z'(t) = t + e^t \\ z(0) = 2. \end{cases}$$

Entonces se obtiene la solución:

$$u(x,t) = 2 + \int_0^t (s + e^s)ds = 2 + \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t + \left[e^s\right]_0^t = \frac{t^2}{2} + e^t + 1,$$

con la siguiente representación gráfica:

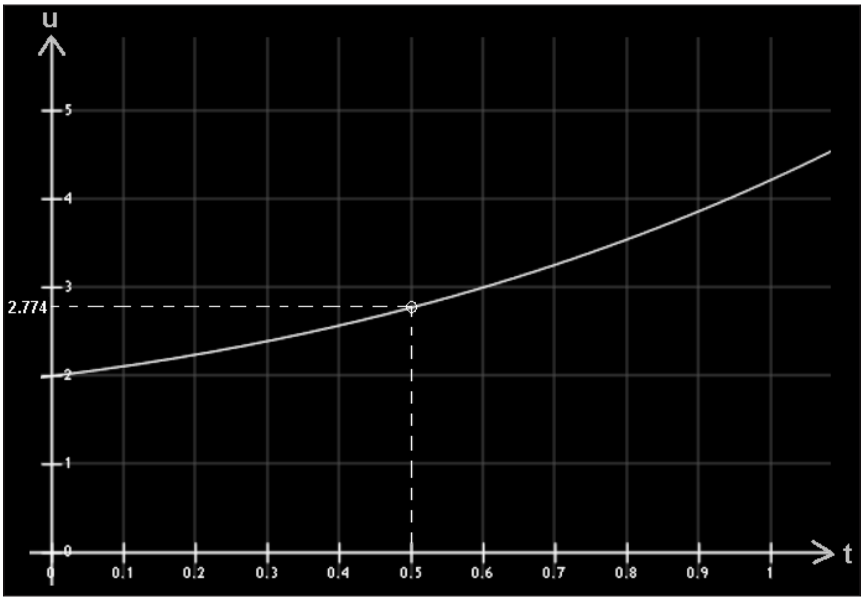


Fig. 3. Trayectoria temporal de los resultados contables cooperativos.

Como puede comprobarse, la trayectoria temporal no depende de la cifra de ventas, y al 5º año del inicio de la actividad económica se tendrán unos resultados contables cooperativos de:

$$u = \frac{0'5^2}{2} + e^{0'5} + 1 = 2'774 \equiv 2.774.000\ €\ .$$

De este modo, de acuerdo con los datos del enunciado del problema planteado, se tendrá la siguiente base imponible de los resultados cooperativos:

-Resultados contables cooperativos:	+2.774.000 €
-Ajustes por valoración de mercado:	+10.000 €
-Dotación FRO: 50% × 20% × 2.774.000 € =	-277.400 €
-Dotación FPE: 5% × 2.774.000 € =	-138.700 €
Base Imponible:	+2.367.900 €

De este modo, la cuota íntegra a ingresar del Impuesto de Sociedades vendrá determinada por:

- De resultados cooperativos: 20% s/ 2.367.900 € =	+473.580 €
-De resultados extra-cooperativos: 30% s/ 300.000 € =	+90.000 €
CUOTA ÍNTEGRA:	+563.580 €

En su caso, por último, deberían practicarse las deducciones y bonificaciones que procedan según la legislación vigente, como por ejemplo las deducciones por doble imposición (interna y/o internacional), retornos cooperativos, creación de empleo, reinversión de beneficios extraordinarios por plusvalía obtenidos en la enajenación de elementos del inmovilizado material, etc.

Ejercicio 8

Determinar la trayectoria temporal de los resultados contables cooperativos de una pequeña sociedad cooperativa que se halla fiscalmente protegida, dedicada a molino aceitero, u(x,t) expresados en millones de € , que vienen dados por la siguiente EDP, donde *x* es la cifra de ventas (en millones de €) y *t* el tiempo en décadas, a los 5 años del inicio de su actividad económica:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = e^t \cdot \cos(x)\ , & \forall x \in \mathfrak{R},\ \forall t > 0, \\ u(x,0) = \sqrt{1 - \sin^2 x}\ , & \forall x \in \mathfrak{R}. \end{cases}$$

Determinar, para el mismo ejercicio, la cuota íntegra a ingresar, en su caso, del Impuesto sobre Sociedades, teniendo en cuenta que:

- La cifra de ventas ha sido de 7.400.000 € .
- La sociedad se halla sujeta a unos tipos del 20% para los resultados cooperativos y del 30% para los extra-cooperativos.
- Se han producido algunos resultados extra-cooperativos (básicamente por relaciones comerciales con terceros no socios y otras actividades económicas ajenas) por importe de 80.000 € .
- La retribución del gerente excede en 8.000 € del valor de mercado de un puesto de trabajo de la misma naturaleza.
- Los excedentes cooperativos se destinan en un 20% al FRO (Fondo de Reserva Obligatorio) y en un 5% al FEP (Fondo de Educación y Promoción).

Solución:

Se trata de la misma EDP que en el ejercicio anterior por lo que se refiere a su primer miembro. Vamos, ahora, buscando una solución de la forma: $u(x,t) = A(t)\cdot\cos x$, y entonces A tiene que cumplir:

$$\begin{cases} A'(t) + A(t) = e^t, & \forall t > 0, \\ A(0) = 1. \end{cases}$$

La solución de esta EDO no homogénea o completa exige la formación de la ecuación característica de la homogénea: $\lambda + 1 = 0$, con lo que: $\lambda = -1$, y entonces: $A^* = c\cdot e^{-t}$.

Para obtener la solución particular de la no homogénea, se hará:

$$\begin{cases} A_p = h\cdot e^t \\ A'_p = h\cdot e^t \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

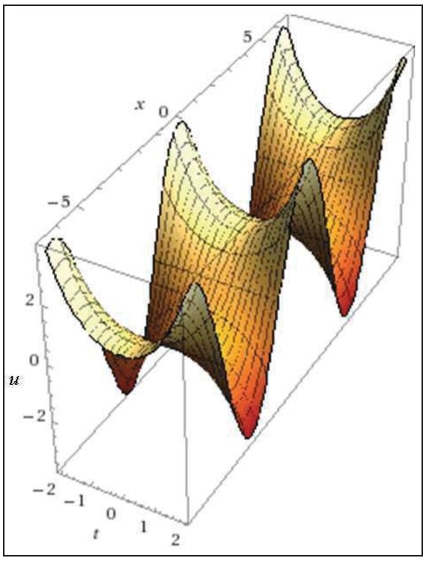
$h\cdot e^t + h\cdot e^t = e^t = 2h\cdot e^t$, de donde : $h = ½$; pero como $A(0) = 1$, se tendrá:

$A = A^* + A_p = c\cdot e^{-t} + e^t/2 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow A = c + ½ = 1$, de donde $c = ½$,

y la solución es: $A(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$. Por lo tanto se tendrá que:

$$u(x,t) = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}\cos x = \cosh t \cdot \cos x\ ,$$

con la siguiente representación gráfica:



Es sencillo verificar que las soluciones encontradas cumplen los problemas propuestos. Al 5º año de su actividad económica, y con una cifra de ventas de 7.400.000 € , se tendrán unos resultados contables cooperativos de:

u = cosh(0’5) × cos(7’4) = 1’128 × 0’439 = 0’494517 ≅ 495.000 € .

De este modo, de acuerdo con los datos del enunciado del problema, se tendrá la siguiente base imponible de los resultados cooperativos:

-Resultados contables cooperativos:	+495.000 €
-Ajustes por valoración de mercado:	+8.000 €
-Dotación FRO: 50% × 20% × 495.000 € =	-49.500 €
-Dotación FPE: 5% × 495.000 € =	-24.750 €
Base Imponible:	+428.750 €

Así pues, la cuota íntegra a ingresar vendrá determinada por:

- De resultados cooperativos: 20% s/ 428.750 € =	+85.750 €
-De resultados extra-cooperativos: 30% s/ 80.000 € =	+24.000 €
CUOTA ÍNTEGRA:	+109.750 €

Por lo que se refiere a las posibles bonificaciones y deducciones de la cuota anteriormente calculada, valgan aquí también las mismas consideraciones efectuadas en el ejercicio anterior.

Ejercicio 9

a) Hallar la trayectoria temporal de los resultados contables *v* de una empresa en función también de su cifra de negocios *x*, expresados ambos en millones de € y el tiempo *t* en décadas, si se cumple la siguiente EDP:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = \lim_{t\to\infty}\left[\cos x + (1-2e^{-t})\cdot \sin x + \frac{2x}{t} + \frac{3}{\sqrt{t^3}}\right]$$, con las condiciones de contorno siguientes: $\begin{Bmatrix} v(0,t) = -v(\pi,t) = \cos 0 \\ v(x,0) = y(x) - z(x) \end{Bmatrix}$ $\forall t > 0$, y además:

y(x) viene dada por la EDO: $y^{(4)} - y = 0$, con las condiciones iniciales:

$$y(0) = 1 \text{ , } y'(0) = 0 \text{ , } y''(0) = -1 \text{ , } y'''(0) = 0 \text{ ,}$$

mientras que z(x) viene dada por la ecuación integral:

$$z(x) + \int_0^x (x-\nu)\cdot z(\nu)\cdot d\nu = x \text{ .}$$

b) Determinar el resultado neto esperable en el 5º ejercicio de su actividad económica, si la cifra de negocios se prevé de 30 millones de euros, considerando una fiscalidad aplicable del 24%.

(adaptado de Franco y Perán, UNED, p. 53).

Solución:

a) Habrá que empezar considerando, en el enunciado, que:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\cos x + (1-2e^{-t})\cdot \sin x + \frac{2x}{t} + \frac{3}{\sqrt{t^3}}\right] = \operatorname{sen} x + \cos x \text{ .}$$

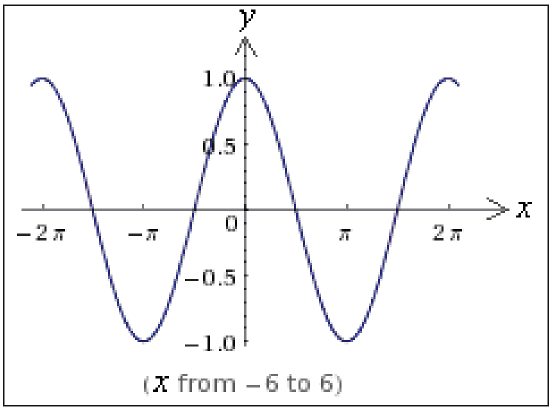
Además, es preciso resolver el siguiente PVI: $y^{(4)} - y = 0$, con las condiciones iniciales: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$.

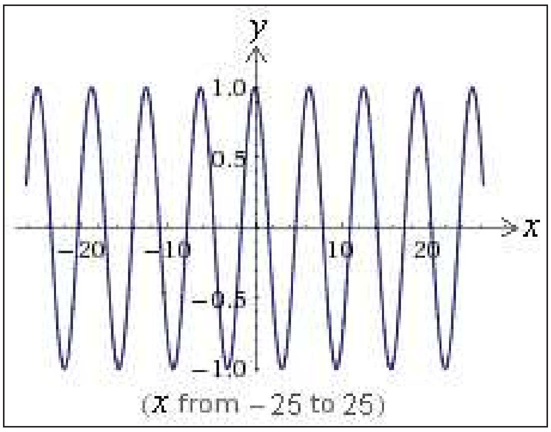
Entonces, aplicando las transformadas de Laplace (véase anexo nº: 1):

$$\begin{cases} S^4 y_s - S^3 y(0) - S^2 y'(0) - S y''(0) - y'''(0) - y_S = 0 \\ S^4 y_s - S^3 + S - y_s = 0 \\ y_S (S^4 - 1) = S^3 - S \\ y_S = \dfrac{S(S^2 - 1)}{(S^4 - 1)} = \dfrac{S(S^2 - 1)}{(S^2 + 1)(S^2 - 1)} = \dfrac{S}{S^2 + 1} \end{cases}$$

Y se tendrá la integral particular buscada: $y(x) = L^{-1}\left\{\dfrac{S}{S^2 + 1}\right\} = \cos x$.

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

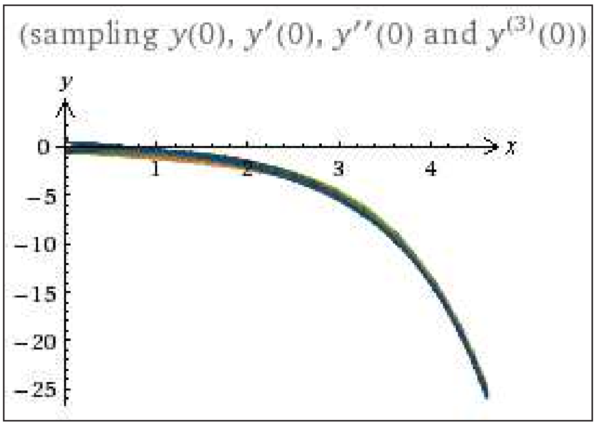




El resultado anteriormente obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, considerando, como siempre, la ecuación característica o modular: λ^4 - 1 = 0; con lo que resultan las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$, y entonces, aplicando las fórmulas correspondientes, se tendrá la integral general:

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot \cos x + c_4 \cdot \text{sen } x .$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Procede ahora aplicar las condiciones iniciales del enunciado, con lo que se obtendrá:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 1 \; ; \\ y'(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} - c_3 \cdot \text{sen } x + c_4 \cdot \cos x \; ; \\ y'(0) = c_1 - c_2 + c_4 = 0 \; ; \\ y''(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} - c_3 \cdot \cos x - c_4 \cdot \text{sen } x \; ; \\ y''(0) = c_1 + c_2 - c_3 = -1 \; ; \\ y'''(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot \text{sen } x - c_4 \cdot \cos x \; ; \\ y'''(0) = c_1 - c_2 - c_4 = 0 \; ; \end{cases}$$

, de lo que resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 - c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = -1 \\ c_1 - c_2 - c_4 = 0 \end{cases}$$

con los correspondientes valores de las constantes:

$$c_1 = 0 \; ; c_2 = 0 \; ; c_3 = 1 \; ; c_4 = 0 \; ,$$

y resultará, efectivamente, una vez substituidos dichos valores en la integral general anteriormente obtenida, la solución particular al PVI buscada, a saber:

$$y(x) = \cos x, \quad \text{c.s.q.d.}$$

Obsérvese que, en este caso, la resolución del problema planteado resulta harto más laboriosa empleando este segundo procedimiento en contraposición al método aquí propugnado basado en la aplicación de las transformadas de Laplace. De ahí se pone de manifiesto su utilidad en un elevado número de casos.

Por otra parte, se trata de resolver una ecuación integral de Volterra (inhomogénea, de 2ª especie, con $\lambda = -1$). Para ello, emplearemos también el método de las transformadas de Laplace. Tomando las transformadas y recordando la definición dada de "convolución de funciones" (*vide* nuestra anterior monografía, citada en la bibliografía), se obtiene que:

$$L[f(x)] + L[x * f(x)] = L[x] \text{, con lo que: } L[f(x)] + L[x]L[f(x)] = L[x].$$

Entonces, si F(s) = L[f(x)] se tendrá que:

$$F(s) + \frac{1}{s^2}F(s) = \frac{1}{s^2}; \quad F(s)\left(\frac{1+s^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2} \text{; de donde resultará:}$$

$$F(s) = \frac{1}{1+s^2}; \quad z(x) = L^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right] = \sin x\,.$$

Ello puede comprobarse sin más que substituir en la ecuación inicial, puesto que:

$$z(x) = x - \int_0^x (x-\nu)\cdot\sin\nu\cdot d\nu = x - \big[(\nu - x)\cos\nu - \sin\nu\big]_0^x = x + \sin x - x = \sin x\,,$$

c.s.q.d.

De este modo, el enunciado del problema queda explicitado así:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = \sin x + \cos x \text{, con las condiciones de contorno:}$$

$$\left\{\begin{matrix} v(0,t) = -v(\pi,t) = 1 \\ v(x,0) = \cos x - \sin x \end{matrix}\right\} \quad \forall t > 0$$

Se trata, pues, de una ecuación lineal de 2º orden, inhomogénea y de coeficientes constantes. Denotemos por L al operador "transformada de Laplace" respecto de la variable *t*, esto es, L[v](x,s) = $\int_0^\infty e^{-st}\cdot v(x,t)\cdot dt$.

Transformamos la EDP teniendo en cuenta que: $L\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right](x,s) = s\cdot L[v](x,s) - v(x,0)$, y que también: L[1](x,s) = 1/s , para obtener: $s\cdot L[v](x,s) - v(x,0) - \frac{\partial^2 L[v]}{\partial x^2}(x,s) = \frac{\sin x + \cos x}{s}$.

Aplicando la condición inicial del enunciado, resulta:

$$sL[v](x,s) - (\cos x - \sin x) - \frac{\partial^2 L[v]}{\partial x^2}(x,s) = \frac{\sin x + \cos x}{2}.$$

Simplificando, poniendo $L[v](x,s) = y_s(x)$, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, resulta el siguiente problema de una ecuación diferencial ordinaria en *x*, lineal y de segundo orden, con valores de contorno. Esto es:

$$y_s''(x,s) - s\cdot y_s(x,s) = \frac{s-1}{s}\sin x - \frac{s+1}{s}\cos x \quad (1),$$
$$y_s(0,s) = -y_s(\pi,s) = 1/s \quad (2).$$

Formando la ecuación característica o modular de la homogénea, o sea: $r^2 - s = 0$, resulta que su solución general es: $y^* = A\cdot e^{-\sqrt{s}x} + B\cdot e^{\sqrt{s}x}$, en donde A y B son funciones arbitrarias de *s* (constantes respecto de *x*). La integral particular puede hallarse por el método de selección (véase nuestra anterior monografía titulada “Aplicaciones a la Economía…”), substituyendo $y_p = C\cdot\sin x + D\cdot\cos x$ en la ecuación inicial, resultando:

$$(-C - Cs)\sin x + (-D - Ds)\cos x = \frac{s-1}{s}\sin x - \frac{s+1}{s}\cos x,$$

por lo que escogemos: $C = \frac{1-s}{s(1+s)}$, $D = \frac{1}{s}$. En su consecuencia, la solución general de (1) viene formulada así:

$$y_s = y^* + y_p = A(s)\cdot e^{-\sqrt{s}x} + B(s)\cdot e^{\sqrt{s}x} + \frac{1-s}{s(1+s)}\sin x + \frac{1}{s}\cos x.$$

Aplicando, ahora, las condiciones de contorno (2), resultará:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow A + B + 1/s = 1/s \Rightarrow A + B = 0 \\ x = \pi \Rightarrow A\cdot e^{-\sqrt{s}\pi} + B\cdot e^{\sqrt{s}\pi} - 1/s = -1/s \Rightarrow A\cdot e^{-\sqrt{s}\pi} + B\cdot e^{\sqrt{s}\pi} = 0 \end{cases}$$

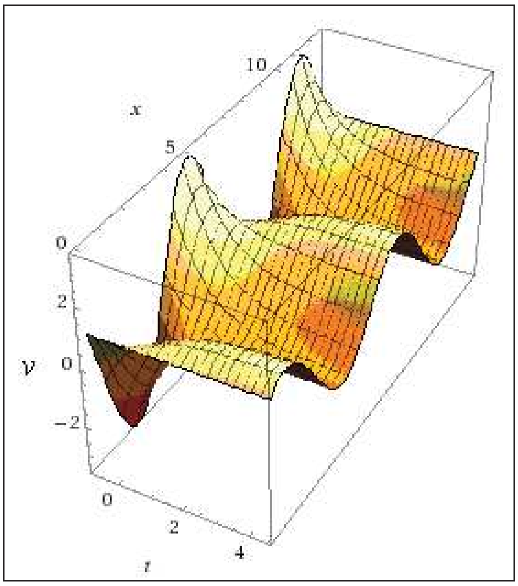
luego A = B = 0. Por lo tanto, $L[v](x,s) = y_s(x) = \frac{1-s}{s(1+s)}\sin x + \frac{1}{s}\cos x$.

Para hallar la transformada inversa de Laplace (ver Anexo nº: 1) descomponemos la fracción $\frac{1-s}{s(1+s)}$ en fracciones simples, así:

$\frac{1-s}{s(1+s)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{1+s}$, de manera que la integral particular buscada de la EDP planteada es la siguiente:

$$v(x,t) = \left(L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 2L^{-1}\left[\frac{1}{1+s}\right]\right)\sin x + L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]\cos x = (1 - 2e^{-t})\sin x + \cos x,$$

cuya representación gráfica tridimensional viene dada por:



b) Con los datos suministrados en el enunciado, el resultado contable en el 5º ejercicio se espera de un importe:

$$v = (1 - 2e^{-0'5})\sin 30 + \cos 30 = 0'364763 \equiv 364.763'00 \text{ €},$$

mientras que el beneficio neto (después de impuestos) será:

$$B = (1 - 0'24)\cdot v = 0'76 \times 364.763 = 277.219'88 \text{ €}.$$

Ejercicio 10

El beneficio bruto anual *u* de una empresa, expresado en miles de € , cuyos precios de los dos *inputs* que emplea son *x* e *y*, viene dado por la siguiente ecuación:

$x(u^2 - y^2)u_x + y(x^2 - u^2)u_y = u(y^2 - x^2)$, con $u(x,y) = \frac{1}{x^2}, \forall x > 1$, tal que la variable *y* en esta condición de contorno viene dada por la ecuación integral: $\int_0^x y(t)y(x-t)dt = \frac{x^3}{6}$. Se desea conocer el beneficio neto de la misma, cuando x = 0'10 € /kg e y = 0'20 € /kg, considerando una fiscalidad aplicable del 25%.

Solución:

Habrá que resolver, en primer lugar, la ecuación integral planteada en el enunciado, que es del tipo Volterra y homogénea de 2ª especie, con $\lambda = 1$. Para ello, sea: $y(x) = L^{-1}[\phi(p)]$. Aplicando a ambos miembros de la ecuación integral anterior la transformación de Laplace se obtiene que: $\phi^2(p) = \frac{1}{p^4}$, de donde se deduce que la función generatriz Laplace es: $\phi(p) = \sqrt{\frac{1}{p^4}} = \pm\frac{1}{p^2}$.

Las funciones: $y_1(x) = L^{-1}[\frac{1}{p^2}] = x$, e $y_2(x) = L^{-1}[-\frac{1}{p^2}] = -x$, serán ambas teóricamente soluciones de la ecuación integral planteada (dicha solución no es única) y aquí tomaremos en consideración únicamente la primera de ellas $y_o(x) = x$ (recta bisectriz del primer cuadrante del círculo), por carecer la segunda acepción de significación económica.

La comprobación de este resultado puede realizarse sin más que substituirlo en la ecuación integral dada, con lo que:

$$\int_0^x y(t)\cdot y(x-t)\cdot dt = \int_0^x t(x-t)\cdot dt = x\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{6}, \text{ c.s.q.d.}$$

En este caso los datos del problema son:

$$\begin{cases} f_1\,(x, y, z) = x\,(z^2 - y^2) \\ f_2\,(x, y, z) = y\,(x^2 - z^2) \\ f\,(x, y, z) = z\,(y^2 - x^2) \end{cases}$$

y entonces la condición inicial queda establecida así: $u(x,x) = \frac{1}{x^2}, \forall\, x > 1$, y parametrizada del siguiente modo:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = \left(s, s, \frac{1}{s^2}\right),\ \forall s \in \Re.$$

Dado que por aplicación de la regla de Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s\left(\frac{1}{s^4} - s^2\right) & 1 \\ -s\left(\frac{1}{s^4} - s^2\right) & 1 \end{pmatrix} = 2s\left(\frac{1}{s^4} - s^2\right),$$

tenemos que este problema tiene solución única.

La transformada de Jacobi será:

$$x\,(z^2 - y^2)\,w_x + y\,(x^2 - z^2)\,w_y + z\,(y^2 - x^2)w_z = 0.$$

En un primer momento elegimos los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = x, \qquad a_2 = y, \qquad a_3 = z.$$

La integral primera asociada a estos valores se obtiene teniendo en cuenta que $x = w_x$, con lo cual $w = \frac{x^2}{2} + f(y,z)$ y, como consecuencia, la igualdad $y = w_y = \frac{\partial f}{\partial y}(y,z)$ implica que: $f(y,z) = \frac{y^2}{2} + g(z)$. Finalmente, $z = w_z = g'(z)$ implica que:

$$w(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$, es una integral primera de esta ecuación.

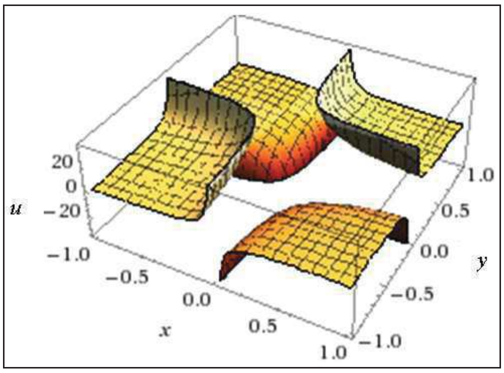
Dado que: $w(\gamma(s)) = s^2 + \frac{1}{2s^4}$, no es una función constante, debemos encontrar una segunda integral primera funcionalmente independiente de ésta. Para ello consideramos los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = \frac{1}{x}, \qquad a_2 = \frac{1}{y}, \qquad a_3 = \frac{1}{z}.$$

La solución del sistema se obtiene para estos valores del siguiente modo: Al ser $\frac{1}{x} = w_x$, deducimos que $w = \log|x| + f(y,z)$. De la segunda igualdad obtenemos que $f(y,z) = \log|y| + g(z)$. De la última expresión concluimos que: $w(x,y,z) = \log(|xyz|)$.

Ahora bien, dado que: $w(\gamma(s)) = \log 1 = 0$, resulta que la función definida implícitamente al igualar esta segunda función a cero nos da la solución particular buscada, es decir:

$$u(x,y) = \frac{1}{xy}$$, con la siguiente representación gráfica:



El beneficio neto anual de la empresa, será, pues, para los valores dados:

$$B = \frac{3}{4xy} = \frac{3}{4 \times 0'1 \times 0'2} = 37'50 \equiv 37.500\ €$$

Ejercicio 11

El beneficio anual bruto *u* de una gran empresa se expresa, en millones de € , por la siguiente ecuación, siendo *t* el tiempo en años y *x* el precio de un "input" del proceso productivo en € :

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = \lim_{(x,t)\to(0,0)} (xt \cdot \sin\frac{\pi}{x} \cdot \sin\frac{\pi}{t})$, con las condiciones: u(x,0) = - z(x),

u(0,t) = t , tal que la función *z*, en la primera condición de contorno dada, viene dada por la ecuación infinitesimal: z'(x) – 2x = $\int_0^{2\pi} \sin x \cdot dx$, con la condición inicial: z(0) = ln(cos 0). Hallar el beneficio neto anual de la empresa al cabo de 10 años, con un precio del "input" de 1'20 € , considerando una fiscalidad aplicable del 25%.

Solución:

El límite doble direccional que aparece en el 2º miembro de la expresión de la EDP dada ofrece un valor de:

$\lim_{(x,t)\to(0,0)} (xt \cdot \sin\frac{\pi}{x} \cdot \sin\frac{\pi}{t}) = \lim_{x\to 0} (mx^2 \cdot \sin\frac{\pi}{x} \cdot \sin\frac{\pi}{mx}) = 0$, y nos queda: $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 0$.

Por otra parte, en la primera condición de contorno dada, aparece la integral: $\int_0^{2\pi} \sin x \cdot dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0$.

A su vez, la función z(x) debe hallarse teniendo en cuenta que se trata de una sencilla EDO de primer orden, puesto que: z' – 2x = 0; dz/dx = 2x, e integrando resultará que:

z(x) = $2\int x \cdot dx = x^2 + C$; pero según la condición inicial:

z(0) = C = ln 1 = 0, y se tiene la integral particular:

z(x) = x^2, con lo que la primera condición de contorno quedará establecida así: u(x,0) = $-x^2$.

Se trata, pues, de una ecuación de 2º orden, lineal, homogénea y de coeficientes constantes. Como a = 0, b = 1 y c = 0, con el discriminante: $(b^2 - 4ac) = 1 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico.

Expresando la ecuación del problema en la forma: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$, e integrando respecto a *x*, se obtiene: $\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función arbitraria que se supone continua.

Integrando ahora respecto a *t* se obtiene la solución general.

$$u = \int \varphi(t)dt + g(x), \; u = f(t) + g(x),$$

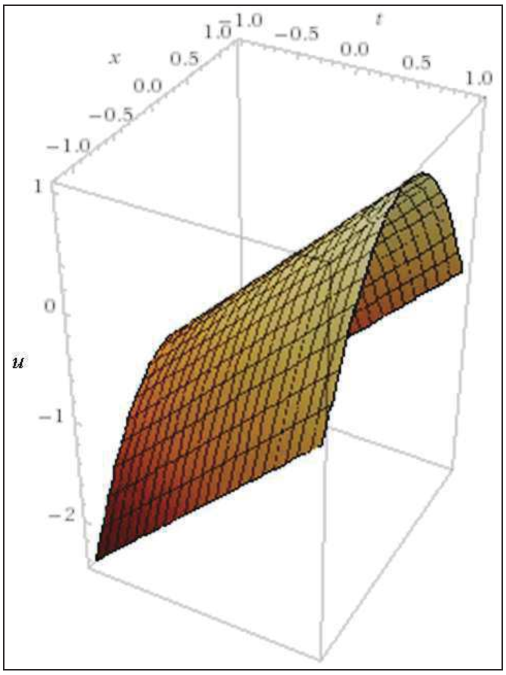
donde f(t) es una función primitiva de $\varphi(t)$.

Aplicando ahora a esta solución general las condiciones particulares dadas, se obtiene que:

$$u(x,0) = -x^2; \;\; -x^2 = f(0) + g(x); \;\; g(x) = -f(0) - x^2, \text{ y con ello } g(0) = -f(0) \;;$$
$$u(0,t) = t \;; \;\; t = f(t) + g(0); \;\; f(t) = t - g(0); \;\; f(t) = t + f(0).$$

Y por último, substituyendo f(t), g(x) en la expresión general, resulta la solución particular buscada siguiente:

$u(x,t) = t - x^2$, con la siguiente representación gráfica de un cilindro parabólico:



De este modo, el beneficio neto anual, descontando la fiscalidad, con los datos suministrados y al cabo de 10 años será:

$$B = 0'75 \times u = 0'75\ (t - x^2) = 0'75 \times (10 - 1'2^2) = 6'42 \equiv 6.420.000\ € .$$

Ejercicio 12

El beneficio bruto anual *u* de una empresa se expresa, en miles de € , por la siguiente ecuación, siendo *t* el tiempo en decenas de años y *x* el precio del "output" del proceso productivo expresado en € , de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2t{\cdot}z(x)\text{ , con las condiciones: } u(0,t) = t^2 \text{ y } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t) = t\,,$$

viniendo z(x) dada por la ecuación integral: $z(x) = h(x) + \int_0^1 (xy)^{-1/2} z(y) dy$.

Se desea hallar el beneficio neto anual de la empresa al cabo de 5 años de funcionamiento, con un precio del "output" estimado en 20'00 € , considerando una fiscalidad aplicable del 24%.

Solución:

La función z(x) es una ecuación integral inhomogénea de Freedholm de 2ª especie, con λ = 1, que habrá que resolver en primer lugar. En ese caso la integral:

$K_{11} = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = \ln \frac{1}{0} = +\infty$, diverge y no podemos formar z(x) por el procedimiento normal. Ahora bien, esto no quiere decir que la ecuación integral propuesta no tenga solución. En efecto, una solución de la ecuación integral propuesta es: z(x) = x, esto es:

$$z(y) = y \quad \text{para} \quad h(x) = x - x^{-1/2} \int_0^1 \sqrt{y}{\cdot}dy\,.$$

Ello puede comprobarse substituyendo en la ecuación inicial del siguiente modo:

$z(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot dy + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot y \cdot dy = x - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{y}} \right) dy$, por la propiedad aditiva del integrando. O sea, debe cumplirse que: $\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{y}} \right) dy = 0$. Veamos que, en efecto, se cumple que: $\int_0^1 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{y}} \right) dy = 0$. Así pues, la solución de esta ecuación es, efectivamente: z(x) = x.

Se trata, pues, por lo que se refiere al primer miembro, de una ecuación de 2º orden, lineal, inhomogénea y de coeficientes constantes. Como a = 1, b = 0 y c = 0, con el discriminante: $(b^2 - 4ac) = 0$, es una ecuación del tipo parabólico.

Así pues, puesta la EDP dada en la forma $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2xt$, e integrando respecto a *x* dos veces, se obtiene:

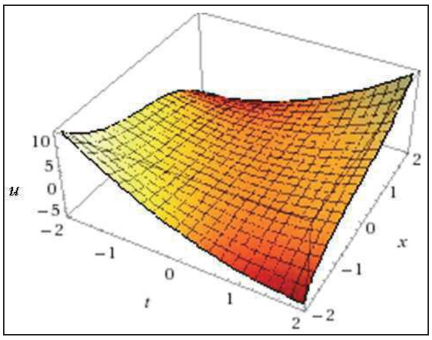
$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 t + f(t)$, $u(x,t) = \frac{x^3}{3} t + xf(t) + g(t)$, que es la solución general de la EDP planteada.

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas, se tiene:

- De $u(0,t) = t^2$ se deduce que $g(t) = t^2$.
- De $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t) = t$, al ser $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 t + f(t)$, entonces $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t) = f(t) = t$.

Así pues, el beneficio bruto anual viene dado por la solución particular siguiente:

$u(x,t) = \frac{x^3}{3} t + xt + t^2$, con la siguiente representación gráfica:



De este modo, el beneficio neto anual, descontando la fiscalidad, con los datos suministrados y al cabo de 5 años, será:

$$B = 0'76 \times u = 0'76 \times \left(\frac{tx^3}{3} + xt + t^2 \right) = 0'76 \left(\frac{0'5 \times 8.000}{3} + 20 \times 0'5 + 0'5^2 \right) =$$

$$= 1.021'123 \equiv 1.021.123 \text{ €}.$$

Ejercicio 13

El beneficio bruto anual *u* de una empresa, expresado en millones de € , cuyos precios de los dos "inputs" que emplea son *x* e *y*, viene dado por la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$(6x - 2y - 3u)\, u_x - 9u \cdot u_y - 4y = 2I_1 + I_2 \text{ , siendo:}$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot dx \text{ , } I_2 = 16 \int_0^{\pi/2} \sin y(-\sin y) \cdot dy \text{ ,}$$

teniendo en cuenta que si el precio del segundo "input" es nulo (gratuito), el beneficio bruto (antes de impuestos) es de un millón de euros. Se desea conocer el beneficio neto de dicha empresa cuando x = 0'08 € /kg e y = 0'10 € /kg, considerando una fiscalidad aplicable del 26'5%.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 1).

Solución:

Habrá que resolver, en primer lugar, las integrales definidas que figuran en la expresión dada de esta EDP de primer orden y coeficientes variables, por lo que, respectivamente:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot dx = \left[-\frac{\sin^2 x}{x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{2x} dx = 2\pi \text{ ,}$$

en base a las condiciones de la regla de Leibnitz aplicable para las integrales impropias. Del mismo modo, se tendrá:

$$I_2 = 16 \int_0^{\pi/2} \sin y(-\sin y) \cdot dy = -16 \int_0^{\pi/2} \sin^{2\cdot} y \cdot dy = -16 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2y}{2} dy =$$

$$= -16 \left[\frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right]_0^{\pi/2} = -16 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = -4\pi.$$

Y la expresión de la EDP dada quedará, definitivamente, así:

$$(6x - 2y - 3u)\, u_x - 9u \cdot u_y - 4y = 4\pi - 4\pi = 0 \text{ .}$$

En este caso, se tendrá que:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 6x - 2y - 3z, \\ f_2(x,y,z) = -9z, \\ f(x,y,z) = 4y \end{cases}$$

, y la condición inicial queda parametrizada del siguiente modo:

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv (s,0,1), \ \forall s \in \Re.$$

Dado que: $\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6s-3 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$,

sabemos que hay una única solución en torno a la condición inicial.

El sistema característico resulta ser el siguiente:

$$\begin{cases} x' = 6x - 2y - 3z, & x(0) = s, \\ y' = -9z, & y(0) = 0, \\ z' = 4y, & z(0) = 1, \end{cases}$$

y su solución viene dada por: $\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con: $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Es decir:

$$\begin{cases} x(t,s) = se^{6t} - \dfrac{1}{2}\sin 6t, \\ y(t,s) = -\dfrac{3}{2}\sin 6t, \\ z(t,s) = \cos 6t. \end{cases}$$

A partir de esta expresión vemos que la superficie solución está sobre el cilindro elíptico de ecuación: $9z^2 + 4y^2 = 9$.

De la condición inicial: u(x,0) = 1, deducimos que:

$$u(x,y) \equiv z(t(x,y), s(x,y)) = \sqrt{1 - 4y^2/9},$$

con la siguiente representación gráfica:

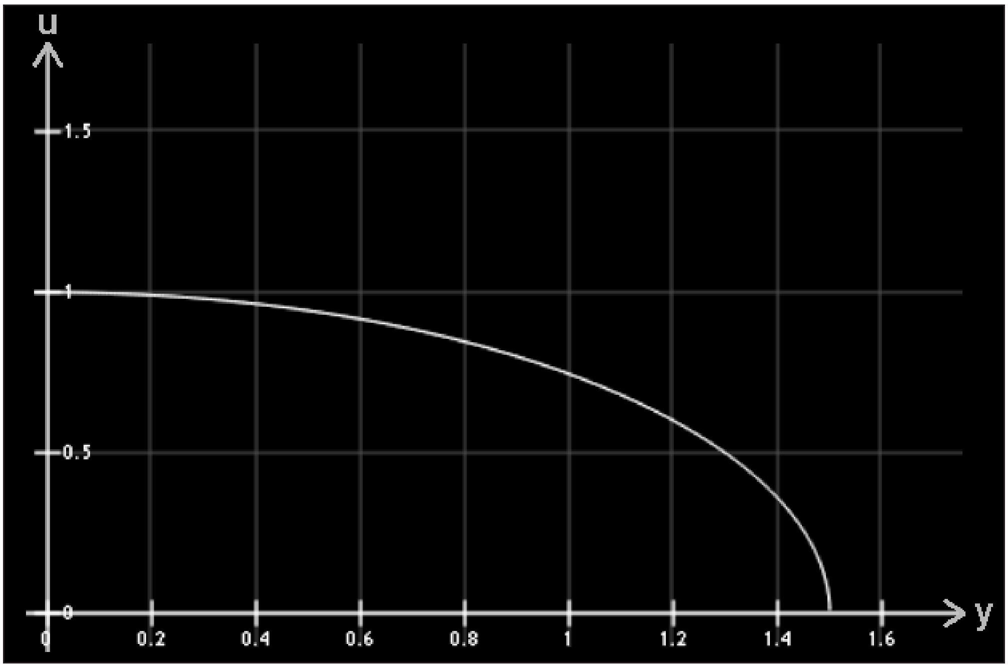


Fig. 4. Función del beneficio bruto anual.

Se trata, al parecer, de una sección cónica de ecuación:

$$4y^2 + 9u^2 - 9 = 0 \ ,$$

por lo que procede averiguar su naturaleza. Ello se pone de manifiesto formando la matriz de los coeficientes:

$(A) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}$; $|A| = -324 \neq 0$, luego se trata de una sección cónica no degenerada. También se cumple que:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36 > 0 \text{, luego se trata del género elipse.}$$

Como: $a_{11} \cdot |A| = 4 \times (-324) = -1.296 < 0$, es una elipse real que, en nuestro caso, sólo tiene significado económico en el primer cuadrante del círculo. Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$S^2 - I_1 S + I_2 = 0$, siendo el invariante métrico (lineal):

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 4 + 9 = 13,$$

y el invariante afín (cuadrático): $I_2 = A_{33} = 36$, con lo que:

$S^2 - I_1 S + I_2 = 0$, o sea: $S^2 - 13S + 36 = 0$, de donde se deduce:

$S = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 9 = S_1 \\ 4 = S_2 \end{matrix} \right.$, y la ecuación reducida correspondiente será: $S_1 x^2 + S_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$, siendo I_3 el invariante proyectivo (cúbico): $|A|$ = - 324. Entonces: $9y^2 + 4u^2 - 9 = 0$, es la ecuación reducida buscada.

Por último, el centro de la elipse vendrá dado por el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= a_{11}y + a_{12}u + a_{13} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= a_{12}y + a_{22}u + a_{23} = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &4y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ &9u = 0 \Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

o sea, el centro buscado es el centro de coordenadas (0,0), como puede comprobarse gráficamente en la figura adjunta.

Con los datos del problema planteado, pues, el beneficio neto anual de la empresa en cuestión será:

$$B = (1 - 0'265)\sqrt{1 - \frac{4y^2}{9}} = 0'735 \times \sqrt{1 - \frac{0'04}{9}} = 0'733365 \equiv 733.365 \text{ €}.$$

Nota. El problema anterior, al igual que todos aquellos en los que el sistema característico es un sistema lineal, puede ser resuelto directamente mediante programación en lenguajes de cálculo simbólico como, por ejemplo, en MAPLE[2].

Ejercicio 14

Analizar la viabilidad de un comercio que vende dos productos cuyos precios de venta al público vienen dados por *x* e *y* € , teniendo en cuenta que su beneficio anual, antes de impuestos, viene dado por la ecuación: $(y - x)\, u_x + 2y \cdot u_y = 3x - y + 2u$; con $u(0,x) = z(x)$, tal que la función $z(x)$ viene dada por la solución negativa de la ecuación integral siguiente:

[2] **Maple** es un programa orientado a la resolución de problemas matemáticos, capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional. Fue desarrollado originalmente en 1981 por el Grupo de Cálculo Simbólico en la Universidad de Waterloo en Waterloo, Ontario, Canadá. Desde 1988 ha sido mejorado y vendido comercialmente por Waterloo Maple Inc. (también conocida como Maplesoft), compañía canadiense con sede en la misma localidad. La última versión es Maple 2016. Maple se basa en un pequeño núcleo escrito en C, que proporciona el lenguaje Maple. Maple es un lenguaje de programación interpretado. Las expresiones simbólicas son almacenadas en memoria como grafos dirigidos sin ciclos. La mayoría de funcionalidades son proporcionadas por librerías: unas escritas en lenguaje Maple, con acceso a su código fuente; pero también hace uso de otras librerías bien conocidas como las NAG, ATLAS o GMP.

$$\int_0^x z(t) \cdot z(x-t)dt = \frac{x^3}{6}.$$

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 3).

Solución:

La EDP dada, de primer orden, no homogénea y de coeficientes variables, exigirá, previamente, la resolución de la ecuación integral que proporcione el valor de la función z(x). Se trata de una ecuación integral homogénea de 2ª especie, del tipo Volterra, con $\lambda = 1$.

Para ello, sea la función: $z(x) = L^{-1}[\phi(p)]$. Aplicando a ambos miembros de la ecuación integral anterior la transformación de Laplace se obtiene que:

$\phi^2(p) = \frac{1}{p^4}$, de donde se deduce que la función generatriz Laplace es:

$$\phi(p) = \sqrt{\frac{1}{p^4}} = \pm\frac{1}{p^2}.$$

Las funciones: $z_1(x) = L^{-1}[\frac{1}{p^2}] = x$, y $z_2(x) = L^{-1}[-\frac{1}{p^2}] = -x$, serán ambas teóricamente soluciones de la ecuación integral planteada (dicha solución no es única) y aquí tomaremos en consideración únicamente la segunda de ellas $z_2(x) = -x$ (recta bisectriz del segundo cuadrante del círculo), con lo que la condición de contorno dada quedará establecida así: $u(0,x) = -x$.

La comprobación de este resultado puede realizarse sin más que substituirlo en la ecuación integral dada, con lo que:

$$\int_0^x z(t) \cdot z(x-t) \cdot dt = \int_0^x t(x-t) \cdot dt = x\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{6}, \text{ c.s.q.d.}$$

Los datos del problema considerado son: $\begin{cases} f_1(x,y,z) = y - x, \\ f_2(x,y,z) = 2y, \\ f(x,y,z) = 3x - y + 2z \end{cases}$

, y la condición inicial queda parametrizada del siguiente modo:

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv (0, s, -s),\ \forall s \in \Re.$$

Dado que: $\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s & 0 \\ 2s & 1 \end{pmatrix} = s$,

la condición de transversalidad se verifica siempre que $s \neq 0$.

El sistema característico a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x' = -x + y, & x(0) = 0, \\ y' = 2y, & y(0) = s, \\ z' = 3x - y + 2z, & z(0) = -s, \end{cases}$$

y la solución viene dada por la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{pmatrix}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con lo cual:}$$

$$\begin{cases} x(t,s) = \left(e^{2t} - e^{-t}\right)\dfrac{s}{3}, \\ y(t,s) = e^{2t}s, \\ z(t,s) = \left(-4e^{2t} + e^{-t}\right)\dfrac{s}{3}. \end{cases}$$

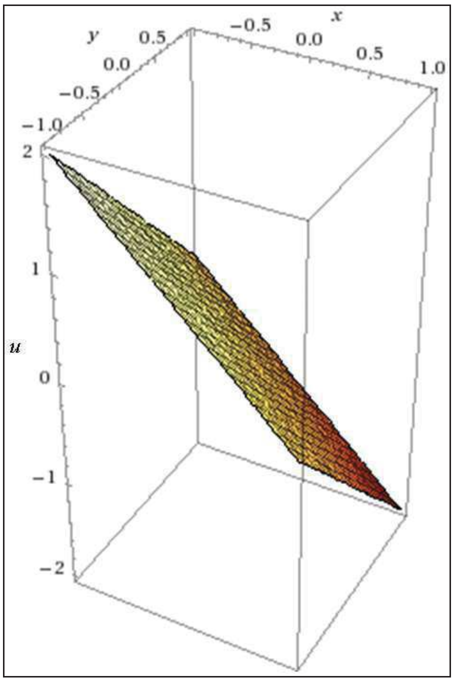
Nótese que la parametrización de la superficie solución se reduce al origen cuando s = 0. Ello se debe a que la curva inicial no es transversal al flujo en (0,0,0), con lo cual el método de las curvas características no permite garantizar la existencia de solución en ese punto.

Sin embargo, usando es misma expresión, no es difícil comprobar que la solución del problema considerado viene dada explícitamente por la expresión:

$$u(x,y) \equiv z(t(x,y),s(x,y)) = - x - y,$$

lo cual pone de manifiesto que la condición de transversalidad es una condición suficiente como para garantizar la existencia y unicidad de solución, que no ha de verificarse necesariamente en todos los puntos de la curva inicial.

Se trata, en definitiva, de un plano con la siguiente representación gráfica:



Ahora bien, lo que queda claro desde el punto de vista del análisis económico es que el beneficio bruto anual del comercio en cuestión, al ser x > 0 e y > 0, siempre será negativo, lo que hace inviable *de facto* la actividad económica de dicho comercio.

Ejercicio 15

El beneficio bruto anual de una empresa, expresado en millones de € , cuyos precios de los dos "inputs" que emplea *x* e *y*, viene dado por la siguiente ecuación:

$$x(u^2 - y^2)u_x + y(x^2 - u^2)u_y = u(y^2 - x^2), \text{ con: } u(x,x) = \frac{1}{x^2}, \forall x > 1.$$

Se desea conocer el beneficio neto de la misma, así pues, cuando x = 1'10 € /kg e y = 0'20 € /kg, considerando una fiscalidad aplicable del 25%.

Solución:

En este caso los datos del problema son:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x(z^2 - y^2), \\ f_2(x,y,z) = y(x^2 - z^2), \\ f(x,y,z) = z(y^2 - x^2) \end{cases} \text{ o sea: } \gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = \left(s, s, \frac{1}{s^2}\right), \ \forall s \in \Re.$$

Dado que:

$$\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s\left(\dfrac{1}{s^4} - s^2\right) & 1 \\ -s\left(\dfrac{1}{s^4} - s^2\right) & 1 \end{pmatrix} = 2s\left(\dfrac{1}{s^4} - s^2\right),$$

tenemos que la condición inicial es transversal al flujo siempre que:

$s \neq 0, \pm 1$, con lo cual este problema tiene solución única.

La transformada de Jacobi será:

$$x(z^2 - y^2)w_x + y(x^2 - z^2)w_y + z(y^2 - x^2)w_z = 0.$$

En un primer momento elegimos los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = x, \quad a_2 = y, \quad a_3 = z.$$

La integral primera asociada a estos valores se obtiene teniendo en cuenta que $x = w_x$, con lo cual $w = \frac{x^2}{2} + f(y,z)$ y, como consecuencia, la igualdad: $y = w_y = \frac{\partial f}{\partial_y}(y,z)$ implica que $f(y,z) = \frac{y^2}{2} + g(z)$. Finalmente, debe tenerse en cuenta que: $z = w_z = g'(z)$ implica que:

$$w(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2},$$

es una integral primera de esta ecuación. Dado que:

$$w(\gamma(s)) = s^2 + \frac{1}{2s^4},$$

no es una función constante, debemos encontrar una segunda integral primera funcionalmente independiente de ésta.

Para ello, consideramos los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = \frac{1}{x}, \quad a_2 = \frac{1}{y}, \quad a_3 = \frac{1}{z}.$$

La solución del sistema se obtiene, para estos valores, del siguiente modo:

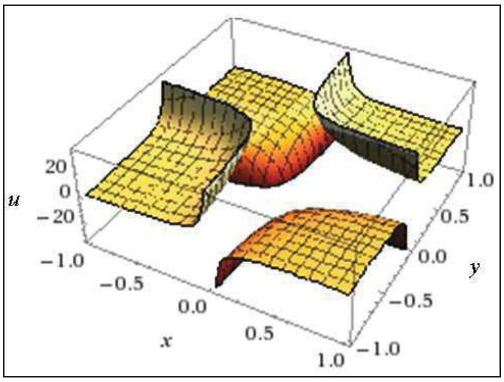
Al ser $\frac{1}{x} = w_x$, deducimos que $w = \log|x| + f(y,z)$.

De la segunda igualdad obtenemos que: $f(y,z) = \log|y| + g(z)$. De la última expresión concluimos que: $w(x,y,z) = \log(|xyz|)$. Ahora bien, dado que:

$$w(\gamma(s)) = \log 1 = 0,$$

resulta que la función definida implícitamente, al igualar esta segunda función a cero, nos da la solución particular buscada, es decir:

$u(x,y) = \frac{1}{xy}$, que es una función homogénea (y por ello homotética) de grado m = -2, puesto que: u(tx,ty) = $\frac{1}{tx \cdot ty} = t^{-2} \cdot \frac{1}{xy} = t^m \cdot u(x,y)$, cuya representación gráfica es la siguiente:



El beneficio neto anual de la empresa, será pues (representando por π el beneficio bruto o antes de impuestos):

$$B = 0'75 \times \pi = \frac{3}{4xy} = \frac{3}{4 \times 1'1 \times 0'2} = 3'409091 \equiv 3.409.091€ .$$

Obsérvese que, *ceteris paribus*, un aumento del 10% en el coste de los "inputs" supondría una disminución del beneficio neto anual del orden de:

$$B' = \frac{3}{4 \times 1'1 \times 0'2 \times 1'1^2} = \frac{B}{1'21} \cong 0'83 \cdot B,$$

o sea, resultaría una disminución aproximada del 17%.

Ejercicio 16

El beneficio anual bruto de una empresa, expresado en millones de € , cuyos precios en el mercado libre de los dos “outputs” que vende son *x* e *y*, viene dado por la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$x^2\, u_x + y^2\, u_y - u^2 = I_1/2 + I_2$, con: $u(x,y) = 1,\ \forall x > 0$, tal que la variable *y* de la condición de contorno, a su vez, viene dada por la ecuación integral:

$y(x) = \lambda \cdot \int_0^1 x \cdot t \cdot y^2(t) \cdot dt$, con el parámetro $\lambda = 2$, y además:

$I_1 = \iint_{A_1} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\, dx \cdot dy\, ; I_2 = \iint_{A_2} \frac{dx \cdot dy}{(1+x^2+y^2)^2}$, con los siguientes dominios de integración:

$$\begin{cases} A_1 = \{(x,y)\, /\, 0 \le x < \infty\, , 0 \le y \le x\} \\ A_2 = \{(x,y) \in \Re^2\, /\, x \ge 0\, , 0 \le y \le 1\} \end{cases}$$

Se desea conocer: a) El beneficio neto de la misma, cuando los precios de venta de ambos *outputs* son x = 0’20 € /kg e y = 0’30 € /kg, considerando una fiscalidad aplicable del 26%. b) ¿Cuánto se incrementa el beneficio si aumentan un 50% los precios de venta y la fiscalidad disminuye un 0’5%?

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 18).

Solución:

a) Habida cuenta de la naturaleza de ambas funciones subintegrales, para resolver las integrales dobles que figuran en la expresión de la EDP propuesta, pasaremos a coordenadas polares, así:

$$\begin{cases} I_1 = \iint_{A_1} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\, dx \cdot dy = \iint_{A_1} e^{-\rho} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta = \int_0^\infty \left(\int_0^{\pi/4} e^{-\rho} \cdot \rho \cdot d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \rho \cdot e^{-\rho} \cdot d\rho = \frac{\pi}{4} \\ I_2 = \iint_{A_2} \frac{dx \cdot dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{1/\sin\theta} \frac{\rho \cdot d\rho}{(1+\rho^2)^2} \right] d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}(1+\rho^2)^{-1} \right]_0^{1/\sin\theta} = \frac{-1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

, con las siguientes representaciones gráficas de los respectivos dominios o recintos de integración:

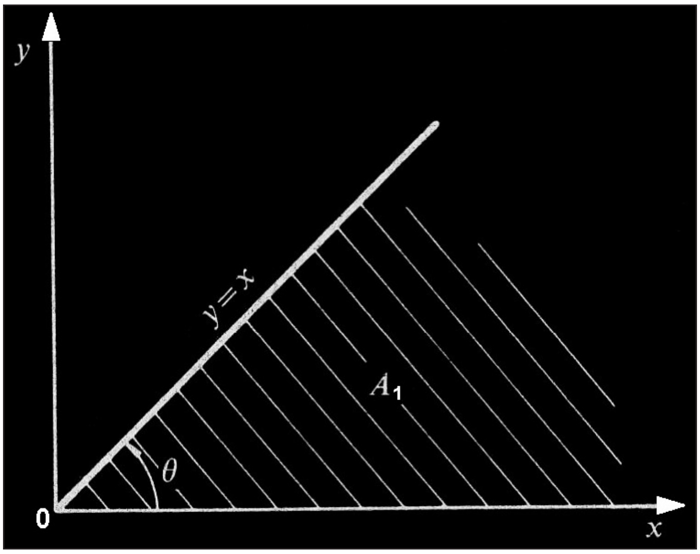


Fig. 5. Dominio de integración A_1.

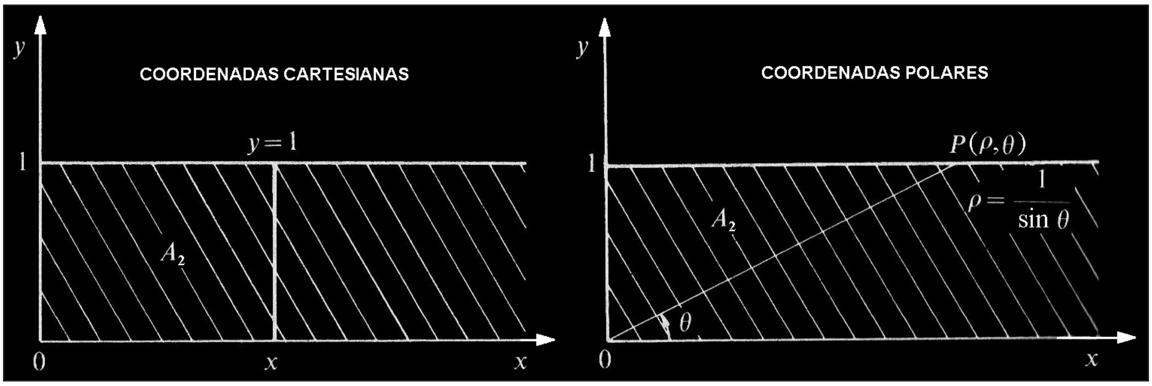


Fig. 6. Dominio de integración A_2.

y la EDP tendrá la siguiente configuración analítica:

$$x^2 u_x + y^2 u_y - u^2 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = 0 \, ,$$

por lo que resulta ser una ecuación lineal de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

Habrá que resolver, en segundo lugar, el valor de *y* en la condición de contorno expresado mediante una ecuación integral no lineal de Hammerstein. Haciendo:

$$c = \int_0^1 t \cdot y^2(t) \cdot dt \; . \qquad (1)$$

Entonces resultará que: $y(x) = c \cdot \lambda \cdot x$. (2)

Substituyendo y(x) por el segundo miembro de (2) en la relación (1), se tendrá:

$$c = \int_0^1 t \cdot \lambda^2 \cdot c^2 \cdot t^2 \cdot dt = \lambda^2 c^2 \cdot \int_0^1 t^3 \cdot dt = \lambda^2 c^2 \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\lambda^2 c^2}{4}.$$

La ecuación anterior tiene dos posibles soluciones, a saber:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{4}{\lambda^2}.$$

Por lo tanto, la ecuación integral problema tiene también dos soluciones para cualquier $\lambda \neq 0$, esto es:

$y_1(x) = 0, y_2(x) = \frac{4}{\lambda} x$. Adoptando la segunda solución, con $\lambda = 2$, se tiene que: $y(x) = 2x$, es la función buscada, y la condición de contorno es, pues: $u(x,2x) = 1, \forall x > 0$.

La comprobación de este resultado puede realizarse sin más que substituirlo en la ecuación integral dada, con lo que:

$$x = 4x \int_0^1 t^3 \cdot dt; \frac{1}{4} = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}, \text{ c.s.q.d.}$$

En este caso los datos del problema vienen dados por:

$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x^2, \\ f_2(x,y,z) = y^2, \\ f(x,y,z) = -z^2. \end{cases}$ y la condición inicial queda parametrizada así:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (s, 2s, 1), \forall s \in \Re.$$

Dado que: $\det \begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} s^2 & 1 \\ 4s^2 & 2 \end{pmatrix} = -2s^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \neq 0,$

tenemos que la condición inicial es transversal al flujo, con lo cual este problema tiene solución única.

La transformada de Jacobi viene dada por la siguiente expresión:

$$x^2 w_x + y^2 w_y + z^2 w_z = 0.$$

La primera elección de factores integrantes es:

$$a_1 = \frac{1}{x^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{z^2}.$$

La solución del sistema se obtiene del siguiente modo:

Al ser $\frac{1}{x^2} = w_z$, tenemos que $w = -\frac{1}{x} + f(y,z)$. De la ecuación 0 = w_y deducimos que f(y,z) = g(z). Finalmente, $-\frac{1}{z^2} = w_z$ implica que $g(z) = \frac{1}{z}$, con lo cual tenemos la integral primera:

$$w_1(x,y,z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

Dado que $w_1(\gamma(s))$ no es constante debemos encontrar otra integral primera funcionalmente independiente de w_1. Para ello tomamos:

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = \frac{1}{y^2}, \qquad a_3 = -\frac{1}{z^2},$$

con lo cual, dado que 0 = w_x, sabemos que w = f(y,z). De la segunda igualdad $\frac{1}{y^2} = w_y$, deducimos que: $f(y,z) = -\frac{1}{y} + g(z)$. Con lo cual, al ser $-\frac{1}{z^2} = w_z$, obtenemos la segunda integral primera: $w_2(x,y,z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$.

Claramente se ve que w_2 no es constante a lo largo de la curva inicial γ, por lo tanto debemos encontrar la solución general de la ecuación de Jacobi. Para ello, dado que:

$$\text{rango}\left(\frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x,y,z)}\right) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 2, \text{ siempre que: } x \cdot y \cdot z \neq 0,$$

la solución general viene dada por una combinación funcional de ambas funciones.

La solución única vendrá dada por la que sea constante a lo largo de la curva inicial. Así pues, dado que

$$w_1(\gamma(s)) - 2w_2(\gamma(s)) = -1,$$

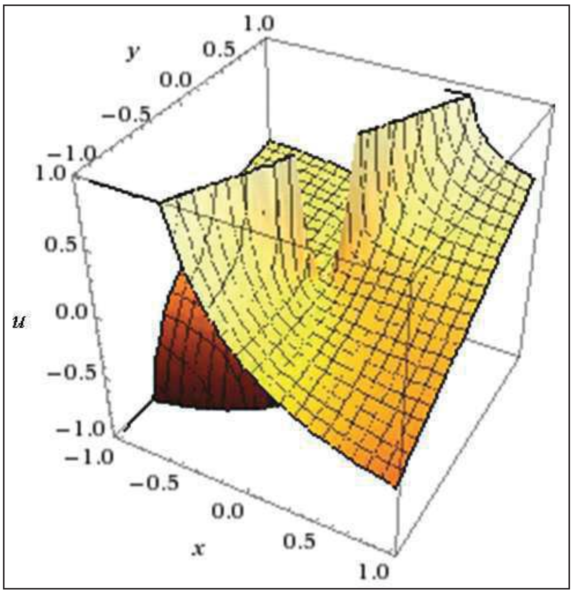
obtenemos que la solución de la ecuación de Jacobi viene dada por:

$$w(x,y,z) = w_1(x,y,z) - 2w_2(x,y,z) + 1 = -\frac{1}{z} - \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + 1,$$

de la que deducimos la expresión de la solución del problema considerado como:

$$u(x,y) = \frac{xy}{xy - y + 2x},$$

y que se representa en la figura siguiente:



El beneficio neto anual de la empresa será, pues:

$$B = 0'74 \times \frac{0'2 \times 0'3}{0'2 \times 0'3 - 0'3 + 0'4} = 0'2775 \equiv 277.500 \text{ €} .$$

b) Si los precios de venta experimentan un incremento del 50% y el impuesto de sociedades disminuye un 0’5%, se tendrá:

$$B = 0'745 \times \frac{0'3 \times 0'45}{0'3 \times 0'45 - 0'45 + 0'6} = 0'427979 \equiv 427.979 \text{ €} ,$$

luego el beneficio se incrementará en:

$$\Delta B = \frac{427.979 - 277.500}{277.500} \times 100 = 54'23\% .$$

Ejercicio 17

El beneficio bruto anual de un pequeño negocio familiar, expresado en miles de € , cuyos precios de los “inputs” que emplea *x* y *z* son, respectivamente, de 2’00 € /ud. y 1’00 € /ud., y el precio de venta de su único “output” es de 6’00 € /ud., viene dado por la siguiente ecuación:

$$yzu_x + zxu_y + xyu_z + xyz + 3 = I, \text{ con: } u(x,y,0) = y^2 - \frac{x^2}{2}, \forall x > 0, \forall y > 0 ,$$

siendo $I = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (2yzdx + zxdy + 4xydz)$ la integral curvilínea a lo largo de la recta que une los puntos: (0,0,0) y (1,1,1). Se desea: a) conocer el resultado anual neto del negocio, considerando una fiscalidad aplicable del 25%. b) ¿A partir de qué precio de venta comenzarán a experimentarse pérdidas en el negocio?

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 20).

Solución:

a) La recta mencionada en el enunciado de problema tendrá de ecuación: $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} = t \Rightarrow x = y = z = t \Rightarrow dx = dy = dz = dt$, y substituyendo:

$$I = \int_0^1 (2t^2 + 3t^2 + 4t^2)dt = \int_0^1 9t^2 \cdot dt = \left[3t^3\right]_0^1 = 3 .$$

Entonces, la expresión de la EDP dada será:

$$yzu_x + zxu_y + xyu_z + xyz = 0 ,$$

y se trata, pues, de una ecuación de primer orden, lineal, inhomogénea y de coeficientes variables.

En este caso debemos encontrar una función económica con una variable explicativa más (3 variables independientes y una funcional). Esto es:

$$u : D \subset \left\{(x,y,z) \in \Re^3;\ \forall x > 0, \forall y > 0\ \right\} \subset \Re^3 \to \Re ,$$

siendo D un entorno del plano z = 0.

Los datos del problema vienen dados por:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z,p) = yz, \\ f_2(x,y,z,p) = xz, \\ f_3(x,y,z,p) = xy, \\ f(x,y,z,p) = -xyz \end{cases}$$

y la condición inicial se parametriza del siguiente modo:

$$\gamma(s_1,s_2) \equiv (\alpha_1(s_1,s_2), \alpha_2(s_1,s_2), \alpha_3(s_1,s_2), \beta(s_1,s_2)) = \left(s_1, s_2, 0, s_2^2 - \frac{s_1^2}{2}\right),\ \forall s \in \Re.$$

Dado que: $\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s_1,s_2)) & \frac{\partial\alpha_1}{\partial s_1}(s_1,s_2) & \frac{\partial\alpha_1}{\partial s_2}(s_1,s_2) \\ f_2(\gamma(s_1,s_2)) & \frac{\partial\alpha_2}{\partial s_1}(s_1,s_2) & \frac{\partial\alpha_2}{\alpha s_2}(s_1,s_2) \\ f_3(\gamma(s_1,s_2)) & \frac{\partial\alpha_3}{\partial s_1}(s_1,s_2) & \frac{\partial\alpha_3}{\partial s_2}(s_1,s_2) \end{pmatrix} = s_1 s_2$,

la superficie es transversal al flujo siempre que: $x{\cdot}y \neq 0$, con lo cual este problema tiene solución única.

La Transformada de Jacobi sigue la expresión:

$$yzw_x + zxw_y + xyw_z - xyzw_p = 0.$$

Buscamos una función w: $\Re^4 \to \Re$ que resuelva la ecuación anterior y que se anule a lo largo de la condición inicial γ. Para ello, debemos encontrar la solución general de la ecuación. Ésta vendrá dada como combinación funcional de tres integrales primeras funcionalmente independientes. En un primer momento, elegimos los factores integrantes siguientes:

$$a_1 = x, \quad a_2 = -y, \quad a_3 = z, \quad a_4 = 1.$$

Para calcular, si existe, la integral primera asociada, debemos resolver el sistema:

$$w_x = a_1, \quad w_y = a_2, \quad w_z = a_3, \quad w_p = a_4. \qquad (1)$$

Para ello, de la expresión $w_x = x$ deducimos que $w = \frac{x^2}{2} + f(y,z,p)$. Dado que: $-y = w_y = \frac{\partial f}{\partial y}(y,z,p)$, sabemos que $f(y,z,p) = -\frac{y^2}{2} + g(z,p)$. La tercera igualdad nos dice que: $g(z,p) = \frac{z^2}{2} + h(p)$. Por último, veamos que al ser $1 = w_p = h'(p)$, obtenemos la expresión de una integral primera como:

$$w_1(x,y,z,p) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + p\,.$$

Debido a que $w_1(\gamma(s_1,s_2)) = \frac{s_2^2}{2}$ no es una función constante, debemos encontrar una segunda solución de la ecuación de Jacobi. En este caso, probamos con los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = -x, \quad a_2 = y, \quad a_3 = z, \quad a_4 = 1.$$

Procediendo como en el caso anterior, llegamos a que:

$$w_2(x,y,z,p) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + p,$$

es una integral primera de la ecuación de Jacobi.

Al igual que w_1, tenemos que $w_2(\gamma(s_1,s_2)) = -s_1^2 + \frac{3}{2}s_2^2$ no es una función constante y, por consiguiente, necesitamos una tercera solución de la ecuación de Jacobi. Para ello tomamos como factores integrantes:

$$a_1 = x, \quad a_2 = y, \quad a_3 = -z, \quad a_4 = 1.$$

La solución del sistema (1) viene dada por:

$$w_3(x,y,z,p) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} + p,$$

que tampoco es constante a lo largo de γ.

Teniendo en cuenta que:

$$\text{rango}\left(\frac{\partial(w_1,w_2,w_3)}{\partial(x,y,z,p)}\right) = \text{rango}\begin{pmatrix} x & -y & z & 1 \\ -x & y & z & 1 \\ x & y & -z & 1 \end{pmatrix} = 3 \ ,$$

siempre que $x > 0$ e $y > 0$.

La solución general de la ecuación de Jacobi será:

$$w(x,y,z,p) = Z(w_1(x,y,z,p),\ w_2(x,y,z,p),\ w_3(x,y,z,p)),$$

siendo $Z: \Re^3 \to \Re$ una función de clase C^1.

No resulta difícil verificar que la única solución de la ecuación de Jacobi que se anula en γ se obtiene definiendo:

$$Z(a,b,c) \equiv c - 3a, \text{ es decir: } w(x,y,z,p) = -x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 2p.$$

Dado que $w_p \neq 0$, al igualar esta expresión a cero obtenemos la expresión de la solución buscada:

$$u(x,y,z) = \frac{-x^2 + 2y^2 - 2z^2}{2},$$

cuya representación gráfica teórica tendrá lugar en el hiperespacio tetradimensional $\Re^4$.

El resultado neto será, entonces:

$$B = 0'75 \times \frac{2(y^2 - z^2) - x^2}{2} = 0'75 \times \frac{70 - 4}{2} = 24'75 \equiv 24.750 \text{ €}.$$

b) La anulación de los beneficios tendrá lugar cuando se anule el numerador de la expresión anterior, que sucede para $y = \sqrt{3} = 1'73$ € /ud. Por debajo de ese precio de venta al público, se producirán pérdidas en el negocio.

Ejercicio 18

Si la ecuación de primer orden no es cuasilineal no tenemos garantizada la unicidad de solución. Por supuesto las técnicas que han resultado tan útiles en las dos secciones anteriores no pueden ser ahora aplicadas con lo cual debemos usar la herramienta desarrollada por Monge y la construcción del cono que lleva su nombre. En lo que sigue se resuelven algunos problemas de ecuaciones no lineales con esta técnica, como el que sigue:

El beneficio bruto anual de una empresa, expresado en millones de € , cuyos precios de los dos “inputs” que emplea son *x* e *y*, viene dado por la siguiente ecuación: $u_x^2 - u_y^2 = k$, viniendo k dada por la ecuación integral siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \cdot k(t) \cdot dt + \int_0^1 \ln x \cdot dx = 0,$$

teniendo en cuenta que si el precio del segundo “input” es nulo (gratuito), el beneficio es de un millón de € . Se desea conocer el beneficio neto de dicha empresa cuando x = 0’08 € /kg e y = 0’10 € /kg, considerando una fiscalidad aplicable del 26’5%.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 23).

Solución:

En primer lugar habrá que resolver la ecuación integral planteada, teniendo en cuenta que, tal como ya se ha visto en un problema anterior, el segundo sumando del primer miembro de dicha ecuación es una integral convergente que ofrece el valor:

$$\int_0^1 \ln x \cdot dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x \cdot dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left([x \cdot \ln x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx \right) = 0 - 0 - 1 = -1,$$

y de este modo, la ecuación integral reseñada quedará configurada así:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \cdot k(t) \cdot dt = 1.$$

Se trata ahora de hallar el valor de *k* mediante esta ecuación integral inhomogénea de 1ª especie. Sea k(t) = $L^{-1}[\phi(p)]$. Aplicando a ambos miembros de la ecuación integral planteada la transformación de Laplace, de acuerdo con la fórmula correspondiente del teorema de Erfros (ver introducción teórica en nuestra anterior monografía titulada "Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes"), se obtiene que:

$\frac{\phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p}$, de donde $\frac{\phi(p)}{p} = \frac{1}{p^2}$, o bien: $\phi(p) = \frac{1}{p}$, y entonces se tendrá la función generatriz Laplace siguiente: k(t) = $L^{-1}[\frac{1}{p}]$ = 1, con lo que la EDP planteada será: $u_x^2 - u_y^2 = 1$, tratándose de una ecuación no lineal de primer orden, no homogénea y de coeficientes constantes.

La comprobación del resultado así obtenido puede realizarse sin más que substituirlo en la ecuación integral dada, con lo que debe cumplirse que:

$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \cdot dt = \sqrt{\pi \cdot x}$, como puede comprobarse con facilidad.

Por otra parte, la función que define la EDP planteada es, en este caso: F(x,y,z,p,q) = $p^2 - q^2$ -1, siendo: $p = \frac{\partial u}{\partial x}; q = \frac{\partial u}{\partial y}$.

La condición inicial viene parametrizada por la expresión:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (s,0,1), \ \forall s \in \Re.$$

El sistema característico correspondiente viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} x' = F_p = 2p, & x(0) = \alpha_1(s) = s, \\ y' = F_q = -2q, & y(0) = \alpha_2(s) = 0, \\ z' = pF_p + qF_q = 2p^2 - 2q^2, & z(0) = \beta(s) = 1, \\ p' = -F_x - pF_z = 0, & p(0) = p_0(s), \\ q' = -F_y - qF_z = 0, & q(0) = q_0(s), \end{cases}$$

junto con la condición adicional: u(x,0) = 1 que se deduce del enunciado del problema. Así:

$$F(x(t,s), y(t,s), z(t,s), p(t,s), q(t,s)) = 0 = p^2(t,s) - q^2(t,s) - 1.$$

Para la elección de $p_0(s)$ y $q_0(s)$ necesitamos completar la curva dato a una banda inicial. Para ello se debe verificar, en un primer momento, la condición de banda siguiente:

$$p_0(s)\,\alpha_1'(s) + q_0(s)\,\alpha_2'(s) = \beta'(s),$$

la cual, obviamente, se reescribe como $p_0(s) = 0$.

Por lo tanto, la condición de compatibilidad se reduce a $q_0^2(s) = -1$. lo cual es imposible. Por consiguiente esta curva nunca puede completarse a una banda y, como consecuencia, el problema no tiene ninguna solución.

Ejercicio 19

El resultado contable bruto de una empresa viene dado, en el tiempo, por la EDP siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \displaystyle\int_3^5 (x^2 - 2x - 3)\cdot dx - 2\int_0^2 (4 - x^2)\cdot dx, \ \forall t > 0, \\ u(x,t)\big|_{t=0} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \end{cases}$$

con *t* expresado en años y siendo *x* el coste total (en millones de €). Se desea conocer: a) El resultado neto de la empresa al 4º ejercicio de su actividad económica, teniendo en cuenta unos costes fijos de 100.000 € y unos costes variables de 900.000 € , considerando una fiscalidad aplicable del 25%. b) La representación gráfica correspondiente.

Solución:

a) El segundo miembro de la EDP planteada será:

$$\int_3^5 (x^2 - 2x - 3)\cdot dx - 2\int_0^2 (4 - x^2)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_3^5 - 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3} - \frac{32}{3} = 0.$$

Se trata, pues, de una ecuación lineal de 2º orden, homogénea y de coeficientes constantes. Como a = -1, b = 0 y c = 0, con el discriminante: (b^2 – 4ac) = 0, es una ecuación del tipo parabólico.

Aprovechándose de la fórmula de Poisson, obtenemos: $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, a = 1. Entonces: $u(x,t) = \frac{2}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda$. (1)

La integral del segundo miembro la resolvemos de la misma forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}+\frac{x\lambda}{2t}-\frac{\lambda^2}{4t}} d\lambda = e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(1+2t)}{2t}\left(\lambda-\frac{x}{1+2t}\right)^2} d\lambda. \quad (2)$$

Llamando $\frac{\sqrt{1+2t}}{\sqrt{2t}} = \left(\lambda - \frac{x}{1+2t}\right) = \alpha$, la integral del segundo miembro de (2) tomará la forma:

$$\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{1+2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+2t}}.$$

(Hemos utilizado la igualdad $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \sqrt{2\pi}$). Por eso de (1) se obtiene: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda = \frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}$.

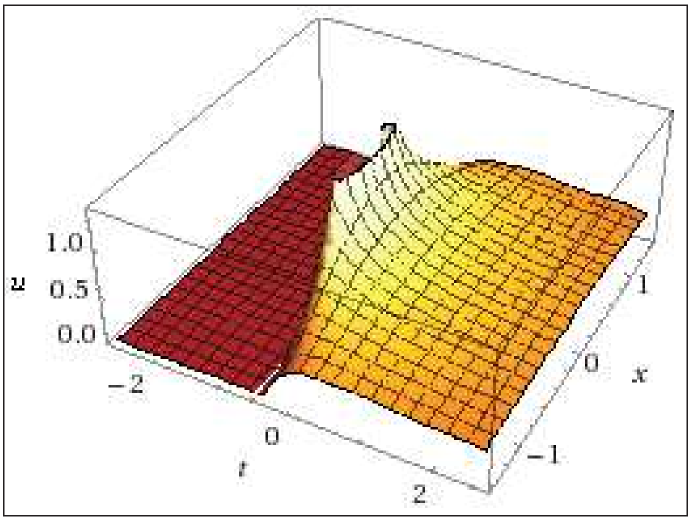
Así, la solución particular u(x,t) del problema dado se determina por la expresión: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}, \forall t > 0$.

Pues bien, con los datos del problema, se tendrá en el 4º ejercicio:

x = CT = CF + CV = 0’1 + 0’9 = 1’0; t = 4;

$u(1,4) = \frac{1}{3 \cdot e^{1/18}} = 0'31532$ ≡ 315.320 € , y B = 0’75 × 315.320 = 236.490 € .

b) La representación gráfica pedida correspondiente será la siguiente:



Ejercicio 20

Se considera la siguiente ecuación en derivadas parciales de segundo orden que nos da el resultado bruto *z* de un ejercicio empresarial, expresado en 10^6 € , en función de los precios de venta de sus dos “outputs” *x* e *y*:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos x \cdot dx \text{ , y se pide:}$$

a) Clasificar dicha EDP.
b) Determinar sus curvas características.
c) Reducirla a la forma canónica.
d) Hallar una solución general de la misma.
e) Resolver para dicha ecuación el problema de Cauchy, hallando el beneficio neto de la empresa, con una fiscalidad aplicable del 25%, y las condiciones siguientes: $\begin{cases} z(1,y) = 1 \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1,y) = 0 \end{cases}$.

Solución:

a) El segundo miembro de la EDP ofrece un valor:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{2\pi} = 0 \text{ , y la EDP será:}$$

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ ,}$$

Se trata, pues, de una ecuación de 2º orden, lineal, homogénea y de coeficientes variables. De acuerdo con la notación empleada, tenemos que:

$$a = x^2,\ b = 0,\ c = -y^2, \text{ por tanto: } (b^2 - 4ac) = 4x^2y^2 > 0,$$

luego la ecuación planteada es de tipo hiperbólico.

b) La ecuación diferencial de las características, en el plano X0Y, es la siguiente:

$$a\cdot dy^2 - b\cdot dx\cdot dy + c\cdot dx^2 = 0,$$

luego, en nuestro caso:

$$x^2dy^2 - y^2dx^2 = 0, \text{ o sea: } (xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0,$$

que se desdobla en las dos ecuaciones de primer orden:

$$xdy + ydx = 0,\quad xdy - ydx = 0.$$

Las soluciones generales de estas ecuaciones son, respectivamente:

$$\begin{cases} xy = C_1 \\ \dfrac{y}{x} = C_2 \end{cases}$$

con C_1, C_2 siendo constantes arbitrarias.

Las ecuaciones anteriores representan los dos haces de curvas características.

c) A la vista de las ecuaciones de las características procede hacer el cambio de variables:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Derivando en estas igualdades, se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} y - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{y}{x^2}\ ;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} x + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} y^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{2y}{x^3}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{1}{x^2}.$$

Substituyendo las dos últimas expresiones en la ecuación propuesta, se obtiene, después de simplificar adecuadamente:

$$2u\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}=0 \text{, que es la forma canónica buscada.}$$

d) Para integrar esta última ecuación introduciremos como incógnita auxiliar:

$$\omega=\frac{\partial z}{\partial v} \text{, la ecuación se escribe entonces: } 2u\frac{\partial \omega}{\partial u}-\omega=0,$$

que es una ecuación lineal de primer orden que se integra inmediatamente, cuya solución general es:

$\omega=\sqrt{u}C(v)$, donde C(v) es una función arbitraria de la variable *v*.

Se tiene entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\sqrt{u}C(v) \text{, de donde, integrando respecto de } v\text{:}$$

$$z(u,v)=\sqrt{u}\int C_1(v)dv+C_2(u) \text{, es decir: } z(u,v)=\sqrt{u}\,C_1(v)+C_2(u),$$

donde $C_1(v)$ y $C_2(u)$ son dos funciones arbitrarias.

Regresando ahora a las antiguas variables, encontramos:

$$z(x,y)=\sqrt{xy}\,C_1\left(\frac{y}{x}\right)+C_2(xy) \qquad (1)\ ,$$

como solución general de la ecuación propuesta.

e) Derivando respecto de *x* en la igualdad anterior, se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-x^{-1/2}y^{1/2}C_1\left(\frac{y}{x}\right)-x^{-3/2}y^{3/2}C'_1\left(\frac{y}{x}\right)+yC'_2(xy).$$

Impongamos ahora las condiciones del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} z(1,y)=\sqrt{y}\,C_1(y)+C_2(y)=1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,y)=\dfrac{1}{2}\sqrt{y}\,C_1(y)-y^{3/2}C'_1(y)+yC'_2(y)=0 \end{cases}$$

Derivando la primera de estas igualdades, resulta:

$$½\, y^{-1/2}C_1(y) + y^{1/2}C'_1(y) + C'_2(y) = 0.$$

y multiplicando ambos miembros por *y*:

$$½\, y^{1/2}C_1(y) + y^{3/2}C'_1(y) + yC'_2(y) = 0.$$

Restando de esta igualdad la que expresa la segunda condición del problema de Cauchy, resulta:

$$2y^{3/2}C'_1(y) = 0, \text{ de donde se deduce que: } C'_1(y) = 0,$$

$$\text{y, por tanto: } C_1(y) = K, \text{ con K constante.}$$

Llevando este resultado a la primera condición del problema de Cauchy se despeja: $C_2(y) = 1 - K\sqrt{y}$.

Ahora substituimos en la expresión (1) de la solución general las funciones $C_1(y)$ y $C_2(y)$ que acabamos de determinar y se obtiene:

$$z(x,y) = K\sqrt{xy} + 1 - K\sqrt{xy} = 1, \text{ luego:}$$

$$z(x,y) = 1 \equiv 1.000.000 \text{ € (resultado antes de impuestos),}$$

que es la solución del problema de Cauchy propuesto.

Así pues, el beneficio neto (después de impuestos) será:

$$B = 0'75 \times 1.000.000 = 750.000 \text{ € .}$$

Ejercicio 21

Hallar el resultado neto del ejercicio económico de una empresa cuyo resultado bruto viene dado, en miles de € , por:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin x$, viniendo determinada por las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} z(x,0) = 2 + x \\ z(0,y) = \displaystyle\int_0^4 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+9}} \end{cases}$$

siendo x = 200 e y = 150 los precios de venta de sus dos “outputs”, expresados en miles de € , considerando una fiscalidad aplicable del 24%.

Solución:

Se trata de una EDP lineal, de 2º orden, inhomogénea y de coeficientes constantes. Como a = 0, b = 1 y c = 0, con el discriminante: $(b^2 - 4ac) = 1 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico.

La 2ª condición de contorno quedará establecida así:

$$z(0,y) = \int_0^4 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+9}} = \left[\sqrt{x^2+9}\right]_0^4 = 5 - 3 = 2\,.$$

La solución general de la ecuación homogénea:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, es: z = f(x) + g(y), donde *f* y *g* son funciones arbitrarias.

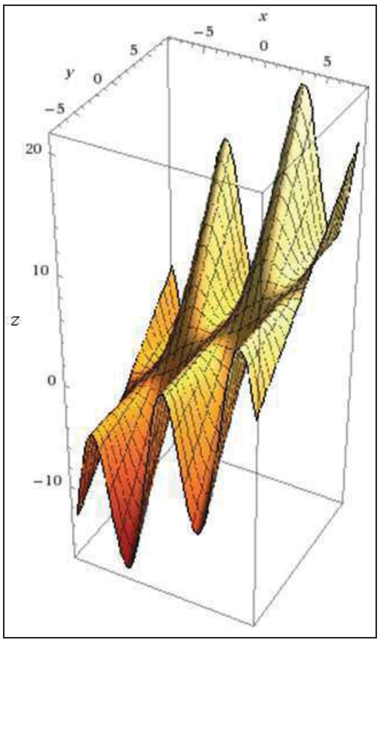
Una solución particular de la ecuación propuesta es: $z_1 = -y\cdot\cos x$, luego: $z = f(x) + g(y) - y\cdot\cos x$, es una solución general de la ecuación propuesta.

Imponiendo aquí las condiciones de contorno, tendremos:

$$\begin{cases} f(x) + g(0) = 2 + x \\ f(0) + g(y) - y = 2 \end{cases}$$

Si tomamos: f(x) = 2 + x, y: g(y) = y, las dos condiciones anteriores quedarán satisfechas. Por lo tanto, una solución a nuestro problema es:

$z(x,y) = 2 + x + y - y\cdot\cos x$, con la siguiente representación gráfica:



y el resultado bruto, será:

$$z = 2 + 200 + 150 - 150 \cdot \cos 200 = 278'922 \text{ (278.922 €).}$$

$$\text{Resultado neto: } B = 0'76 \times 278.922 = 211.981 \text{ € .}$$

Ejercicio 22

La trayectoria temporal y(x,t) de la cifra de negocios de una cierta empresa viene dada por la EDP siguiente:

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 25\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ y(x,0) = 2[x + m(x)\cdot n(x)] \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) - 2 = 2(I_1 - I_2) \end{cases}$$

siendo *x* su resultado contable antes de impuestos (expresado en 10^6 €), *t* el tiempo expresado en años, y además m(x) viene dada por:

$$m(x) + \int_0^x (x - \nu)\cdot m(\nu)\cdot d\nu = x,$$

mientras que n(x) es una función tal que: $n^{(4)} - n = 0$, con las condiciones iniciales dadas por: n(0) = 1, n'(0) = 0, n''(0) = -1 y n'''(0) = 0. Además, $I_1 = \int_1^2 (x^3 + 1)\cdot dx$, $I_2 = \iiint_A (xy + z)dx\cdot dy\cdot dz$, siendo A el paralelepípedo cúbico: $A = \{[0,1] \times [1,2] \times [2,3]\}$. Se desea saber: a) la cifra de negocios previsible en el sexto ejercicio y los costes totales de la empresa, considerando una fiscalidad del 25% y unos beneficios netos de 15 millones de € , b) la elasticidad total de dicha trayectoria en aquel ejercicio económico, y c) representar gráficamente la trayectoria temporal de la cifra de negocios necesaria para obtener, cada año del primer decenio de la actividad económica, unos beneficios netos mínimos de 12 millones de € .

(adaptado de Franco y Perán, UNED, p. 33).

Solución:

a) Se trata de una EDP de 2º orden, lineal, homogénea y de coeficientes constantes. Como a = - 25, b = 0 y c = 4, con el discriminante: $(b^2 - 4ac) = 100 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico.

En primer lugar, habrá que resolver la primera condición lateral dada. Para hallar la función m(x) se trata de calcular una ecuación integral de Volterra (inhomogénea, de 2ª especie, con λ = -1). Para ello, emplearemos el método de las transformadas de Laplace, por lo que tomando las transformadas y recordando la definición de "convolución de funciones" (véase cap. 7 de nuestra anterior monografía), se obtiene que:

$L[m(x)] + L[x * m(x)] = L[x]$, con lo que: $L[m(x)] + L[x]L[m(x)] = L[x]$.

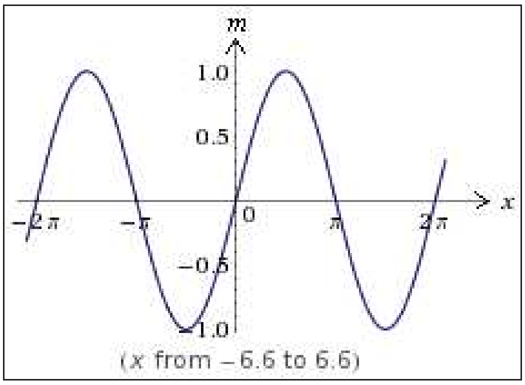
Entonces, si F(s) = L[m(x)] se tendrá que:

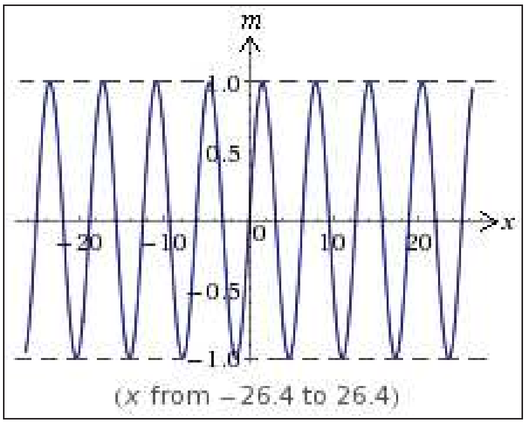
$$F(s) + \frac{1}{s^2}F(s) = \frac{1}{s^2}; \quad F(s)\left(\frac{1+s^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2};$$

de donde resultará la función generatriz Laplace siguiente:

$$F(s) = \frac{1}{1+s^2}; \quad m(x) = L^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right] = \sin x\,.$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



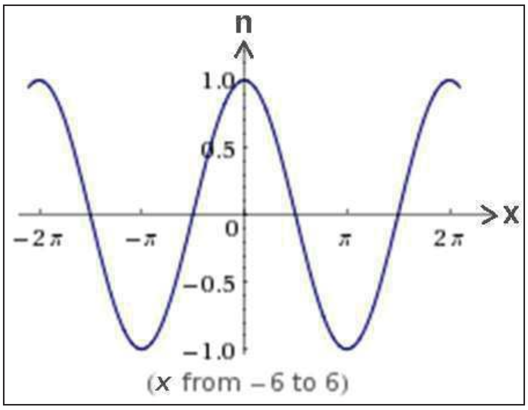


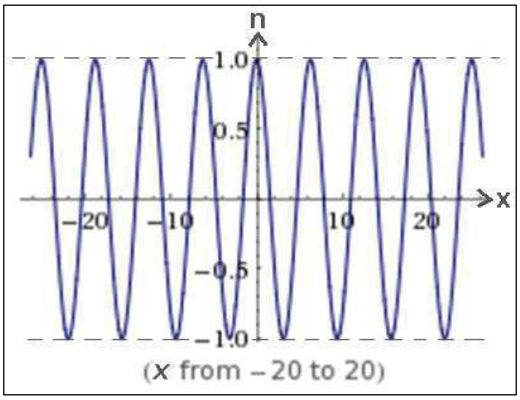
Del mismo modo, para hallar la función n(x) se trata de resolver la EDO dada aplicando el mismo método de las transformadas laplacianas, con lo que:

$$\begin{cases} S^4 n_s - S^3 n(0) - S^2 n'(0) - Sn''(0) - n'''(0) - n_S = 0 \\ S^4 n_s - S^3 + S - n_s = 0 \\ n_S(S^4 - 1) = S^3 - S \\ n_S = \dfrac{S(S^2-1)}{(S^4-1)} = \dfrac{S(S^2-1)}{(S^2+1)(S^2-1)} = \dfrac{S}{S^2+1} \end{cases}$$

Y se tendrá la integral particular buscada: $n(x) = L^{-1}\left\{\dfrac{S}{S^2+1}\right\} = \cos x$.

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

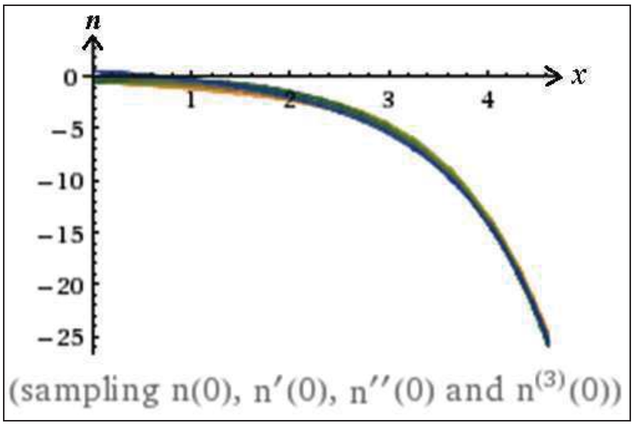




El resultado anteriormente obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, considerando, como siempre, la ecuación característica o modular: $\lambda^4 - 1 = 0$; con lo que resultan las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$, y entonces, aplicando las fórmulas correspondientes, se tendrá la integral general:

$$n(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot \cos x + c_4 \cdot \sin x$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Procede ahora aplicar las condiciones iniciales del enunciado, con lo que se obtendrá:

$$\begin{cases} n(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 1 \ ; \\ n'(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} - c_3 \cdot \sin x + c_4 \cdot \cos x \ ; \\ n'(0) = c_1 - c_2 + c_4 = 0 \ ; \\ n''(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} - c_3 \cdot \cos x - c_4 \cdot \sin x \ ; \\ n''(0) = c_1 + c_2 - c_3 = -1 \ ; \\ n'''(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot \sin x - c_4 \cdot \cos x \ ; \\ n'''(0) = c_1 - c_2 - c_4 = 0 \ ; \end{cases}$$

, de lo que resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 - c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = -1 \\ c_1 - c_2 - c_4 = 0 \end{cases}$$

con los correspondientes valores de las constantes:

$$c_1 = 0 \ ; \ c_2 = 0 \ ; \ c_3 = 1 \ ; \ c_4 = 0$$

y resultará, efectivamente, una vez substituidos dichos valores en la integral general anteriormente obtenida, la solución particular al PVI buscada:

$$n(x) = \cos x, \text{ c.s.q.d.}$$

Obsérvese que, en este caso, la resolución del problema planteado resulta harto más laboriosa empleando este segundo procedimiento en contraposición al método anterior basado en la aplicación de las transformadas de Laplace. De ahí se pone de manifiesto su considerable utilidad en un elevado número de casos.

Como consecuencia de todo ello, la primera condición lateral dada de la EDP se configurará del siguiente modo:

$$y(x,0) = 2x + 2\cdot m(x)\cdot n(x) = 2x + 2\cdot \sin x\cdot \cos x = 2x + \sin 2x \,.$$

El conocimiento de la segunda condición lateral exige la previa determinación de las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_1^2 (x^3+1)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{4}+x\right]_1^2 = \frac{19}{4}$$

$$I_2 = \iiint_A (xy+z)dx\cdot dy\cdot dz = \int_0^1\left[\int_1^2\left(\int_2^3 (xy+z)dz\right)dy\right]\cdot dx = \int_0^1\left[\int_1^2\left(xyz+\frac{z^2}{2}\right)_2^3\cdot dy\right]\cdot dx =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{5y}{2}\right)_1^2\cdot dx = \left[\frac{3x^2}{4}+\frac{5x}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{4}+\frac{5}{2} = \frac{13}{4}$$

De este modo, la segunda condición lateral dada quedará configurada así:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) - 2 = 2(I_1 - I_2) = 2\left(\frac{19}{4}-\frac{13}{4}\right) = 3 \;;\; \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 5\,.$$

Observando, ahora, los coeficientes constantes de la EDP, se propone su resolución mediante el cambio de variables:

$$\begin{cases} u = 2x+5t \\ v = 2x-5t \end{cases},\text{ con lo que: } u^2 - v^2 = (u + v)\cdot(u - v) = 4x\cdot 10t = 40xt \,,$$

y en la EDP resultará: $\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} = 0.$ Integrando dos veces, primero respecto de *u* y luego respecto de *v*, se obtiene: $y(u,v) = F(u) + G(v)$, en donde F y G son funciones arbitrarias de clase dos. De la primera condición dedúcese que: $F(u) + G(u) = u + \sin u$, pues $t = 0 \Leftrightarrow u = v = 2x$, mientras que de la segunda: $F'(u) - G'(u) = 1$, ya que por la "regla de la cadena":

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = 5\frac{\partial y}{\partial u} - 5\frac{\partial y}{\partial v} = 5F'(u) - 5G'(v)\,.$$

Al derivar en $F(u) + G(u) = u + \sin u$, y tras resolver el sistema correspondiente, se obtiene: $F'(u) = 1+\frac{\cos u}{2}$; $G'(u) = \frac{\cos u}{2}$, luego:

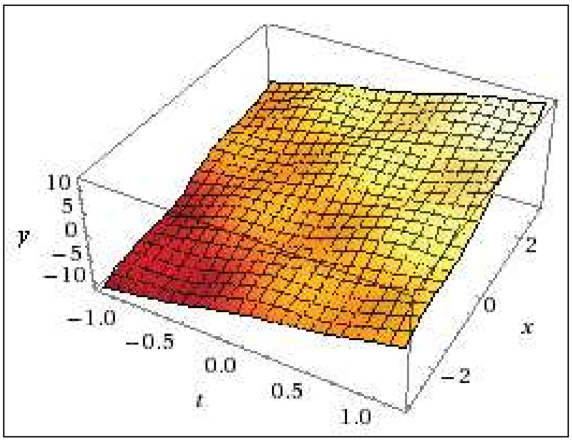
$$F(u) = \int (1+\frac{\cos u}{2})du = u + \frac{\sin u}{2} + C;\quad G(u) = \int \frac{\cos u}{2}du = \frac{\sin u}{2} + C\,.$$

Deshaciendo el cambio, en fin, se tendrá:

$$y(x,t) = F(u) + G(v) = F(2x + 5t) + G(2x - 5t) =$$

$$= 2x + 5t + \frac{\sin(2x+5t)}{2} + \frac{\sin(2x-5t)}{2} = 2x + 5t + (\sin 2x)(\cos 5t),$$

con la siguiente representación gráfica:



De este modo, en el 6º ejercicio de la actividad económica de la empresa, con un beneficio bruto de: $\pi = \frac{B}{1-0'25} = \frac{15\times10^6}{0'75} = 20\times10^6$ € , resultará una cifra de negocios de:

$$I = y(20,6) = 40 + 30 + (\sin 40)(\cos 30) = 70 + (0'7451131)(0'1542514) =$$

$$= 70'114935 \equiv 70.114.935 \text{ €} , \text{ con unos costes totales de:}$$

$$C = I - \pi = 70.114.935 – 20.000.000 = 50.114.935 \text{ €} .$$

b) Procederemos, ahora, al cálculo de la elasticidad total solicitada. Así:

$$\begin{cases} y'_x = 2 + 2(\cos 5t)(\cos 2x) \\ y'_t = 5 - 5(\sin 5t)(\sin 2x) \end{cases}$$

- Elasticidades parciales:

$$E_x = \frac{x}{y} \times y'_x = \frac{2x + 2x(\cos 5t)(\cos 2x)}{2x + 5t + (\sin 2x)(\cos 5t)}; \; E_t = \frac{t}{y} \times y'_t = \frac{5t - 5t(\sin 5t)(\sin 2x)}{2x + 5t + (\sin 2x)(\cos 5t)}.$$

En el punto: $(x_0, t_0) = (20, 6)$, se tendrán, respectivamente:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{40(1+\cos 30 \cdot \cos 40)}{70+\sin 40 \cdot \cos 30} = 0'512 < 1 \text{ (función relativamente inelástica)} \\ \\ E_t = \dfrac{30(2-\cos 10+\cos 70)}{140+\sin 10+\sin 70} = 0'384 < 1 \text{ (función relativamente inelástica)} \end{cases}$$

y una elasticidad total de: $E_T = E_x + E_t = 0'512 + 0'384 = 0'896$.

c) La consecución, en cada ejercicio económico, de unos beneficios netos mínimos de 12 millones de € , exige un beneficio bruto de: $\pi = \frac{B}{1-0'25} = \frac{12\times 10^6}{0'75} = 16\times 10^6$€ , con lo que para conseguir tal objetivo, la trayectoria temporal de la cifra de negocios deberá ser:

$$y(16,t) = 32 + 5t + (\sin 32)(\cos 5t) ,$$

cuya representación gráfica puede verse a continuación, junto con las correspondientes curvas de costes y beneficios:

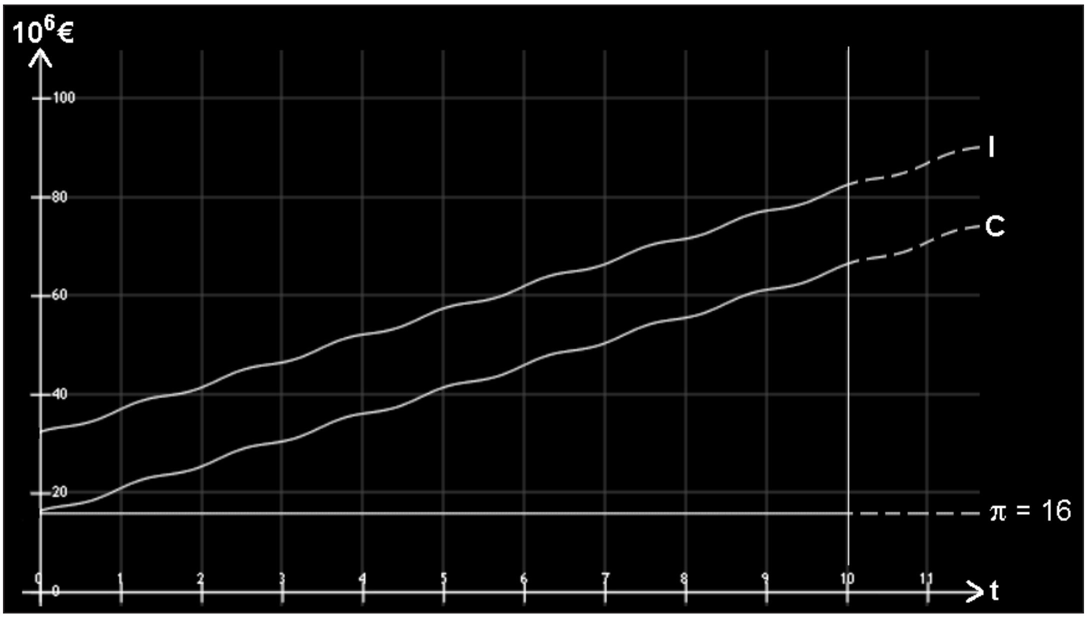


Fig. 7. Trayectorias temporales de la cifra de negocios, costes y beneficios (I).

Ejercicio 23

El resultado contable bruto de una empresa u(x,t) viene dado por la EDP siguiente: $u_t + u\cdot u_x = I_1/2 - I_2$, con la condición: $u(x,0) = h(x)$, donde h(x) se deduce de la ecuación: $\int_0^x h(t)\cdot h(x-t)dt = \frac{x^3}{6}$, y además:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \; ; \; I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} ,$$

siendo *x* la cifra de negocios expresada en 10^6 € y *t* el tiempo en décadas. Se pide: a) hallar el beneficio neto (después de impuestos) a los 8 años de su actividad económica, en el que se prevé alcanzar una cifra de negocios de 50 millones de euros, así como los costes totales, considerando una fiscalidad aplicable del 25%, y b) representar gráficamente la trayectoria temporal de la cifra de negocios necesaria para obtener, cada año del primer decenio de la actividad económica, unos beneficios netos mínimos de 18 millones de € .

Solución:

a) En primer lugar, para hallar la configuración analítica de la función h(x), habrá que resolver la ecuación integral de Volterra que figura en la condición lateral dada en el enunciado, esto es: $\int_0^x h(t)\cdot h(x-t)dt = \frac{x^3}{6}$, por lo que sea h(x) = $L^{-1}[\phi(p)]$. Aplicando a ambos miembros de la ecuación integral anterior la transformación de Laplace se obtiene que:

$$\phi^2(p) = \frac{1}{p^4}, \quad \text{de donde:} \quad \phi(p) = \sqrt{\frac{1}{p^4}} = \pm\frac{1}{p^2}.$$

Las funciones: $h_1(x) = L^{-1}[\frac{1}{p^2}] = x$, y $h_2(x) = L^{-1}[-\frac{1}{p^2}] = -x$, serán ambas teóricamente soluciones de la ecuación integral planteada (dicha solución no es única) y aquí tomaremos en consideración únicamente la primera de ellas $h_o(x) = x$ (recta bisectriz del primer cuadrante), por carecer la segunda de significación económica clara.

Por otra parte, las dos integrales definidas que se hallan en el 2º miembro de la EDP planteada ofrecen, respectivamente, los siguientes valores:

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \text{arc sec}\,(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2} \\ I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\text{arc tg}\, x]_0^1 = \text{arc tg}\,1 - \text{arc tg}\,0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

De este modo, la EDP en cuestión quedará configurada así:

$$u_t + u\cdot u_x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0.$$

Seguidamente, para resolver la EDP dada, de primer orden y homogénea, que se plantea como un problema de valores iniciales de una ecuación cuasilineal, veamos que nos están dando el dato inicial a lo largo del eje de abscisas, por lo que tomamos como parámetro *s* la propia coordenada *x*, o sea:

$x(s,\tau) = f(s) = s$, $t(s,\tau) = g(s) = 0$, $z(s,\tau) = h(s)$, y los coeficientes de la ecuación son: $a = z$, $b = 1$, $c = 0$.

A continuación, formamos el sistema característico:

$$\dot{x} = z\,, \qquad \dot{t} = 1\,, \qquad \dot{z} = 0\,,$$

del cual podemos resolver inmediatamente las dos últimas ecuaciones,

$$t(s,\tau) = \tau + \beta(s), \qquad z(s,\tau) = \gamma(s),$$

e imponerles las condiciones iniciales,

$$0 = t(s,0) = \beta(s), \qquad h(s) = z(s,0) = \gamma(s) \Rightarrow t(s,\tau) = \tau, \quad z(s,\tau) = h(s),$$

y substituyendo en la primera obtenemos:

$$\dot{x} = h(s) \Rightarrow x(s,\tau) = h(s)\tau + \alpha(s)\,,$$

mientras que la condición inicial nos permite despejar $\alpha(s)$, así:

$$s = x(s,0) = \alpha(s) \Rightarrow x(s,\tau) = h(s)\tau + s,$$

con lo cual ya tenemos la solución de todos los problemas de valores iniciales y, por tanto, la solución general de la ecuación, en forma paramétrica, será:

$$x(s,\tau) = h(s)\tau + s, \qquad t(s,\tau) = \tau, \qquad z(s,\tau) = h(s).$$

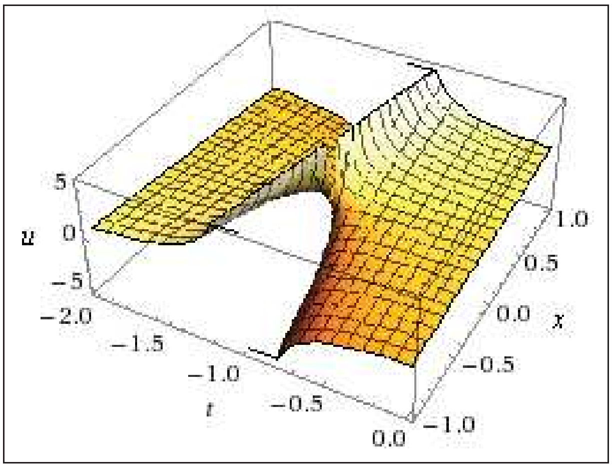
Podemos eliminar ahora los parámetros s,τ, así:

$$\tau = t, \qquad s = x - zt,$$

y obtener la solución en función de las siguientes coordenadas, x, t, $u(s,y) = z$, exclusivamente, o sea: $u = h(x - ut)$, que, en este caso, queda expresada en forma implícita, al no poder despejarse, en general, *u* en función de x, t.

En el caso que nos ocupa, en el que el dato inicial es, según se ha visto, $u(x,0) = h(x) = x$, es decir, $h(s) = s$, la solución del problema de valores iniciales es:

$$u(x,t) = x - ut \Rightarrow u(x,t) = \frac{x}{1+t}$$, con la siguiente representación gráfica:



De este modo, en el ejercicio económico octavo y con la cifra de negocios esperable dada, se tendrá que:

$$\pi = u(50,0'8) = \frac{50}{1'8} = 27'\widehat{7} \equiv 27.777.778 \text{ €} ,$$

mientras que el beneficio neto será:

$$B = \pi\,(1 - 0'25) = 27.777.778 \times 0'75 = 20.833.333 \text{ €} ,$$

y los costes totales serán:

$$C = I - \pi = 50.000.000 – 27.777.778 = 22.222.222 \text{ €} .$$

b) La consecución, en cada ejercicio económico, de unos beneficios netos mínimos de 18 millones de € , exige un beneficio bruto de: $\pi = \frac{B}{1-0'25} = \frac{18\times10^6}{0'75} = 24\times10^6$ € , con lo que para conseguir tal objetivo, la trayectoria temporal de la cifra de negocios deberá ser:

$$\pi = u(x,t) = \frac{x}{1+t} = 24 \text{ , de donde: } x = 24 + 24t ,$$

cuya representación gráfica puede verse a continuación, junto con las correspondientes funciones (rectas) de costes y beneficios:

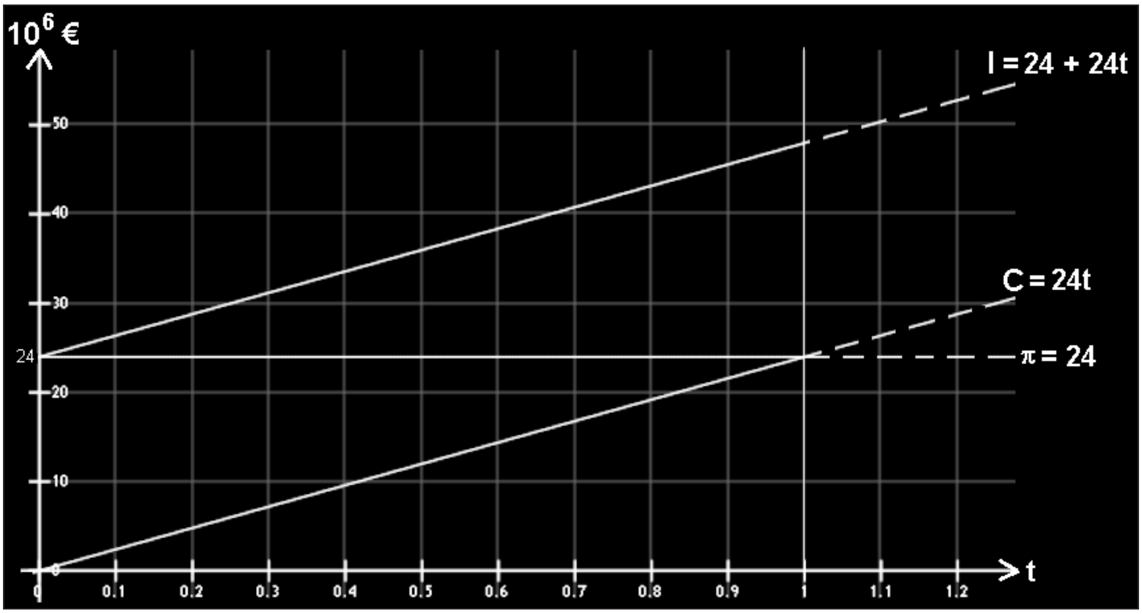


Fig. 8. Trayectoria temporal de la cifra de negocios, costes y beneficios (II).

Justamente en el décimo año, al final de la década, se igualarían los beneficios antes de impuestos con los costes totales empresariales.

Ejercicio 24

La cifra de negocios de una empresa *u*, expresada en millones de € , viene dada por la siguiente EDP, donde el tiempo *t* se expresa en décadas y el resultado contable *x* en millones de € . Se pide: a) hallar la cifra de negocios, en el octavo año, necesaria para conseguir un resultado contable de 800.000 € , así como los costes variables en dicho ejercicio, sabiendo que los costes fijos ascienden a 200.000 € , y b) hallar las diferentes elasticidades de la función que representa la cifra de negocios en el ejercicio estudiado, siendo la EDP relacionada:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 2\,(x+1)\cdot\varphi(t)\text{, con las condiciones: } \begin{cases} u(x,0) = -x^2 \\ u(0,t) = t \end{cases},$$

y siendo: $\varphi(t) = 1 - \int_0^t (t-\tau)\cdot\varphi(\tau)\cdot d\tau$.

(adaptado de Franco y Perán, UNED, p. 59).

Solución:

a) En primer lugar, habrá que resolver la configuración analítica de la función $\varphi(t)$, que viene expresada por una ecuación integral de Volterra que, resuelta por el método de las aproximaciones sucesivas, tomando $\varphi_0(t) \equiv 0$, conduce a la solución: $\varphi(t) = \cos t$, como puede comprobarse siguiendo el procedimiento establecido en nuestra anterior monografía (ver cap. 8a, p. 283). De este modo, la EDP dada queda configurada así:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 2\,(x+1)\cdot\cos t\,,$$

que se trata de una EDP de 2º orden, lineal, inhomogénea y de coeficientes constantes. Como a = 0, b = 1 y c = 0, con el discriminante: $(b^2 - 4ac) = 1 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico.

Denotemos, a continuación, por L_1 a la transformada de Laplace respecto de la primera variable y por L_2 a la correspondiente transformada respecto de la segunda variable. Se tiene:

$$\begin{aligned}
&L_1\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right](\omega,t) = L_1[2(x+1)\cos t] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(L_1\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\omega,t)\right) = 2L_1[x+1](\omega,t)\cos t \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\omega L_1[u](\omega,t) - u\,(0,t)) = 2\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\right)\cos t \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\omega L_1[u](\omega,t) - t) = 2\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\right)\cos t \Rightarrow \\
&\Rightarrow \omega\frac{\partial L_1[u](\omega,t)}{\partial t} - 1 = 2\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\right)\cos t.
\end{aligned}$$

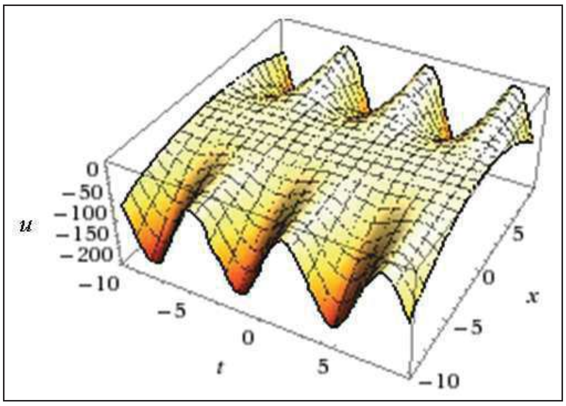
Transformando ahora respecto de la segunda variable, se tiene:

$$\begin{aligned}
&L_2\left[\omega\frac{\partial L_1[u](\omega,t)}{\partial t} - 1\right](\omega,s) = L_2\left[2\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\right)\cos t\right](\omega,s) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \omega L_2\left[\frac{\partial L_1[u](\omega,t)}{\partial t}\right](\omega,s) - L_2[1] = 2\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\right)L_2[\cos t](\omega,s) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \omega\,(sL_2L_1[u](\omega,s) - L_1[u(\omega,0)]\,) - \frac{1}{s} = 2\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\right)\frac{s}{1+s^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \omega\,(sL_2L_1[u](\omega,s) + L_1[\omega^2]\,) - \frac{1}{s} = 2\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\right)\frac{s}{1+s^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \omega\left(sL_2L_1[u](\omega,s) + \frac{2}{\omega^3}\right) - \frac{1}{s} = 2\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\right)\frac{s}{1+s^2}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, veamos que:

$$L_2L_1[u](\omega,s)=\frac{2\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\right)\frac{s}{1+s^2}+\frac{1}{s}}{s\omega}-\frac{2}{s\omega^3}=\left(\frac{2}{\omega^3}+\frac{2}{\omega^2}\right)\frac{1}{1+s^2}+\frac{1}{\omega}\frac{1}{s^2}-\frac{2}{\omega^3}\frac{1}{s},$$

de donde: $L_1[u](\omega,t)=\left(\frac{2}{\omega^3}+\frac{2}{\omega^2}\right)\sin t+\frac{1}{\omega}t-\frac{2}{\omega^3}$, y la solución buscada es: $u(x,t) = (x^2 + 2x) \sin t + t - x^2$, con la siguiente representación gráfica:



En el octavo año de actividad económica, con x = 0'8, será necesario alcanzar una cifra de negocios de:

$$I = u(0'8, 0'8) = (0'8^2 + 1'6) \cdot \sin 0'8 + 0'8 - 0'64 =$$

$$= 2'24 \times 0'717 + 0'16 = 1'766878 \equiv 1.766.878 \text{ €} .$$

Con ello, los costes totales serán:

$$CT = I - \pi = 1.766.878 - 800.000 = 966.878 \text{ €} ,$$

y los costes variables serán:

$$CV = CT - CF = 966.878 - 200.000 = 766.878 \text{ €} .$$

b) Se tiene que: $\begin{cases} u'_x = (2x+2)\cdot\sin t - 2x \\ u'_t = (x^2+2x)\cdot\cos t + 1 \end{cases}$

- Elasticidades parciales:

- $E_x = \frac{x}{u}\times u'_x = \frac{(2x^2+2x)\cdot\sin t - 2x^2}{(x^2+2x)\cdot\sin t + t - x^2} \Rightarrow (0'8,0'8) \Rightarrow \cong 0'44 < 1$

- $E_t = \frac{t}{u}\times u'_t = \frac{(x^2t+2xt)\cdot\cos t + t}{(x^2+2x)\cdot\sin t + t - x^2} \Rightarrow (0'8,0'8) \Rightarrow \cong 1'16 > 1$

, y resulta ser la primera función relativamente inelástica y la segunda relativamente elástica.

- Elasticidad total:

$$E_T = E_x + E_t = 0'44 + 1'16 = 1'60 > 1,$$

y en este caso se trata de una función relativamente elástica.

- Elasticidades direccionales:

Las elasticidades direccionadas con respecto a ambos ejes coordenados cartesianos rectangulares, es decir, para 0º y 90º, en el punto: $(x_0, t_0) = (0'8, 0'8)$, son las siguientes:

$$\begin{cases} {}_xE_xu(x_0, t_0) = \dfrac{E_x}{x_0} \times \sqrt{x_0^2 + t_0^2} = \dfrac{0'44}{0'8} \times \sqrt{1'28} = 0'62 < 1 \\ {}_tE_tu(x_0, t_0) = \dfrac{E_t}{t_0} \times \sqrt{x_0^2 + t_0^2} = \dfrac{1'16}{0'8} \times \sqrt{1'28} = 1'64 > 1 \end{cases}$$

, y resulta ser la primera función relativamente inelástica y la segunda relativamente elástica.

CAPÍTULO 7

FUNCIONES DE OFERTA Y DEMANDA

1. INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

La ley de la oferta y demanda es un modelo económico básico postulado para la formación de precios de mercado de los bienes dentro de la escuela neoclásica y otras afines, usándose para explicar una gran variedad de fenómenos y procesos, tanto macro como microeconómicos. Además, sirve como base para la explicación de otras teorías y modelos económicos.

El modelo se basa en la relación entre el precio de un bien y las ventas del mismo y asume que, en un mercado de competencia perfecta, el precio de mercado se establecerá en un punto —llamado *punto de equilibrio*— en el cual se produce un "vaciamiento del mercado", es decir, que todo lo producido se vende y no queda demanda insatisfecha.

El postulado de la oferta y la demanda implica tres leyes, a saber:

- Cuando, al precio corriente, la demanda excede a la oferta, aumenta el precio. Inversamente, cuando la oferta excede la demanda, disminuye el precio.
- Un aumento en el precio disminuye, más tarde o más temprano, la demanda y aumenta la oferta. Inversamente, una disminución en el precio aumenta, más tarde o más temprano, la demanda y disminuye la oferta.
- El precio tiende a establecerse al nivel en el cual la demanda iguala la oferta.

En economía el modelo generalmente se usa en conjunto con el tanteo walrasiano. El modelo establece que, en un mercado libre, la cantidad de productos ofrecidos por los productores y la cantidad de productos demandados por los consumidores dependen del precio de mercado del producto. La *ley de la oferta* indica que la oferta es directamente proporcional al precio; cuanto más alto sea el precio del producto, más unidades se ofrecerán a la venta. Por el contrario, la *ley de la demanda* indica que la demanda es inversamente proporcional al precio; cuanto más alto sea el precio, menos demandarán los consumidores. Por tanto, la oferta y la demanda hacen variar el precio del bien o servicio en cuestión.

Según las expresadas leyes de la oferta y la demanda, y asumiendo esa competencia perfecta, el precio de un bien se sitúa en la intersección de las curvas (o superficies n-dimensionales, en el caso de varias variables) de oferta y demanda. Si el precio de un bien está demasiado bajo y los consumidores demandan más de lo que los productores pueden poner en el mercado, se produce una situación de escasez, y por tanto los consumidores estarán dispuestos a pagar más. Los productores subirán los precios hasta que se alcance el nivel al cual los consumidores no estén dispuestos a comprar más si sigue subiendo el precio. En la situación inversa, si el precio de un bien o servicio resulta demasiado alto y los consumidores no están dispuestos a pagarlo, la tendencia será a que baje el precio, hasta que se llegue al nivel al cual los consumidores acepten el precio y se pueda vender todo lo que se produce mejor.

2. EJERCICIOS

Ejercicio 1

En un mercado de duopolio con un producto diferenciado, se tiene que la función de demanda de una de las empresas viene dada por la EDP:

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - u = 2\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} - \int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-|x|}}, \\ \text{con}: u(x,0) = \frac{1-x^2}{2}. \end{cases}$$

, mientras que su función de oferta correspondiente viene dada por la siguiente EDP: $y \cdot u_x - x \cdot u_y = 0$, con $u(x,x) = z(x)$, donde el segundo miembro de la condición de contorno viene dado, a su vez, por la ecuación integral: $z(x) = x^2 + x\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + 1 - x \cdot \text{arc tg}\left(\frac{1}{x}\right) + \int_1^x \frac{z(s)}{x^2 + s^2} ds$.

Hallar, en el equilibrio del mercado, el precio del producto *u* cuando la cantidad *x* es de 0’5.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 28).

Solución:

En primer lugar, veamos que el 2º miembro de la EDP planteada de demanda, formada por la suma algebraica de sendas integrales impropias de 2ª especie, se puede resolver del siguiente modo:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-2\sqrt{2-x}\right]_0^{2-\varepsilon} = 2\sqrt{2}$$. Así mismo:

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-|x|}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-2+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-|x|}} + \lim_{\delta\to 0^+} \int_0^{2-\delta} \frac{dx}{2-|x|} = 4\sqrt{2} .$$

En su consecuencia, la EDP dada de demanda ofrece:

$$xu_x + yu_y + \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - u = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0 ,$$

que es una ecuación no lineal de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

En segundo lugar, resolveremos la condición de contorno de la función de oferta dada, que es una ecuación integral de Volterra, inhomogénea de 2ª especie, con λ = 1. El núcleo es $k(x,s) = \frac{1}{x^2+s^2}$, con x_0 = 1, y tomaremos que $\phi(x) = x^{-2}$, y todas las condiciones del teorema correspondiente (ver nuestra anterior monografía "Aplicaciones…", citada en la bibliografía) son satisfechas con $l^* = \frac{1}{2}$, mientras que la solución exacta de esta ecuación integral es la parábola cuadrática: $z(x) = x^2$.

Como comprobación, habrá que demostrar que se cumple que:

$$x - \frac{\pi\cdot x}{4} - 1 + x\cdot\text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{z(s)}{x^2+s^2} ds.$$ En efecto:

$$\int_1^x \frac{z(s)}{x^2+s^2} ds = \int_1^x \frac{s^2}{x^2+s^2} ds = \left[s - x\cdot\text{arc.tg}\left(\frac{s}{x}\right)\right]_1^x = (x - x\cdot\text{arc.tg}1) - (1 - x\cdot\text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right)) =$$

$$= x - \frac{\pi}{4}x - 1 + x\cdot\text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right), \text{c.s.q.d.}$$

En tercer lugar, resolveremos la ecuación diferencial de demanda en derivadas parciales de tal suerte planteada, a saber:

$$F(x,y,z,p,q) = xp + yq + \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) - z ,$$

y la curva inicial se parametriza del siguiente modo:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = \left(s, 0, \frac{1-s^2}{2} \right), \quad \forall s \in \Re,$$

que son los datos del problema planteado.

El sistema característico a considerar será, en este caso:

$$\begin{cases} x' = x + p, & x(0) = s \\ y' = y + q, & y(0) = 0 \\ z' = px + qy + p^2 + q^2, & z(0) = \frac{1}{2}(1 - s^2), \\ p' = 0, & p(0) = p_0(s), \\ q' = 0, & q(0) = q_0(s), \end{cases} \qquad (1)$$

conjuntamente con la ecuación adicional:

$$x(t,s)\,p(t,s) + y(t,s)\,q(t,s) + \frac{1}{2}\left(p^2(t,s) + q^2(t,s)\right) = z(t,s). \qquad (2)$$

La condición de banda se verifica si y sólo si: $p_0(s) = -s$. Con lo cual, la condición de compatibilidad es equivalente a que: $q_0(s) = \pm 1$.

La condición de transversalidad se verifica siempre que:

$$0 \neq \det\begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_0(s) & 0 \end{pmatrix} = -q_0(s).$$

Por consiguiente, el problema considerado tiene dos soluciones. Cada una de ellas se obtiene resolviendo el sistema (1) junto con la ecuación (2) para cada banda inicial correspondiente.

Es evidente que la solución asociada al valor $q_0(s) = 1$ verifica que $p(t,s) = -s$, y $q(t,s) = 1$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la igualdad (2), para obtener el valor de las restantes variables es suficiente con usar la expresión para el caso tridimensional en el que:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b(t,s) = \begin{pmatrix} -s \\ 1 \\ \frac{1+s^2}{2} \end{pmatrix}, \qquad C(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \frac{1-s^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, obtenemos que:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t,s) &= s \\ y(t,s) &= e^t - 1 \\ z(t,s) &= e^t - \frac{(1+s^2)}{2} \end{aligned}}$$

La superficie parametrizada viene dada por la expresión:

$$\Gamma(t,s) = \left(s, e^t - 1, e^t - \frac{1+s^2}{2} \right),$$

con lo cual, la solución en coordenadas cartesianas es igual a:

$$u(x,y) = \frac{1-x^2}{2} + y\,.$$

Cuando $q_0(s) = -1$, haciendo los mismos razonamientos que en el caso anterior, obtenemos que la superficie solución viene parametrizada por la expresión:

$\Gamma(t,s) = \left(s, 1-e^t, e^t - \frac{1+s^2}{2} \right)$, de donde deducimos que:

$u(x,y) = \frac{1-x^2}{2} - y$, es la segunda solución al problema considerado.

En este caso adoptaremos esta solución particular: $u(x,y) = \frac{1-x^2}{2} - y$, considerando que, por la propia naturaleza de función de demanda, es la que posee significado económico. Debe tenerse en cuenta que, para que exista un significado económico, al tratarse de una función de demanda (decreciente), necesariamente debe cumplirse que: $u \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, o sea, que la función en cuestión tiene como dominio de definición el octante positivo de la esfera, y el precio se anulará cuando: $y = \frac{1-x^2}{2}$.

Por otra parte, la función inversa dada de oferta, que es lineal, de primer orden, homogénea y de coeficientes variables, tiene como solución particular: $u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$, como puede comprobar el amable lector/a haciendo la sustitución pertinente. En efecto, en la condición de contorno: $u(x,x) = \frac{x^2+x^2}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2$. Y en la ecuación dada, siendo:

$u_x = x$; $u_y = y$; $y \cdot u_x - x \cdot u_y = yx - xy = 0$, c.s.q.d.

Para ello, en el equilibrio de mercado, se producirá: $u_D = u_O$, o sea:

$$\frac{1-x^2}{2} - y = \frac{x^2+y^2}{2}\text{; de donde:}$$

$$1 - x^2 - 2y = x^2 + y^2\ ;\ \ 2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0,\ \text{si } x = 0'5,\ \text{resulta:}$$

$$y^2 + 2y - 0'5 = 0;\quad 2y^2 + 4y - 1 = 0;$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2} = \left\langle \begin{array}{c} 0'225 \\ -2'225 \end{array} \right.,$$

luego el único valor (positivo) con significado económico es: $y = 0'225$.

Con ello, el precio de equilibrio será:

$$u = u_D = u_O = \frac{0'5^2 + 0'225^2}{2} \cong 0'15 \text{ u. m.}$$

Obsérvese que la función de equilibrio ($2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$) es una sección cónica, con la siguiente representación gráfica:

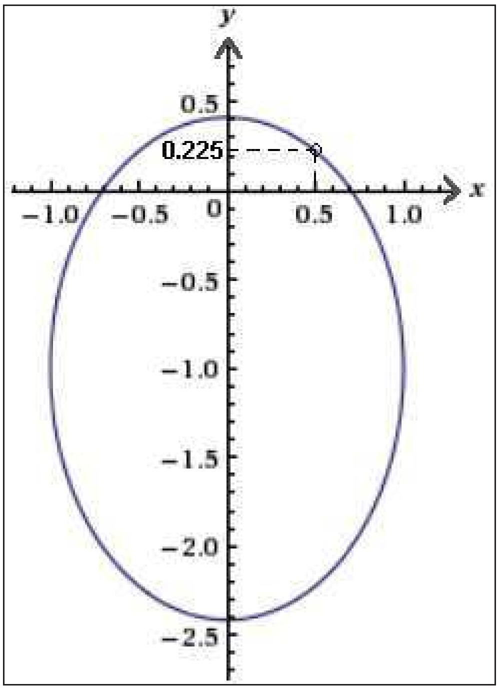


Fig. 1. Función de equilibrio.

Ello se pone de manifiesto formando la matriz de los coeficientes:

$(A)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; $|A| = -2 - 2 = -4 \neq 0$, luego se trata de una sección cónica no degenerada. También se cumple que:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0 \text{, luego se trata de una elipse.}$$

Como: $a_{11} \cdot |A| = 2 \times (-4) = -8 < 0$, es una elipse real que, en nuestro caso, sólo tiene significado económico en el primer cuadrante del círculo. Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$S^2 - I_1 S + I_2 = 0$, siendo el invariante métrico (lineal):

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 2 + 1 = 3,$$

y el invariante afín (cuadrático): $I_2 = A_{33} = 2$, con lo que: $S^2 - I_1 S + I_2 = 0$, o sea: $S^2 - 3S + 2 = 0$, de donde: $S = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 = S_1 \\ 1 = S_2 \end{matrix} \right.$, y la ecuación reducida será: $S_1x^2 + S_2y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$, siendo I_3 el invariante proyectivo (cúbico) $= |A| = -4$. Entonces, $2x^2 + y^2 - 2 = 0$ es la ecuación reducida buscada.

Por último, el centro de la elipse vendrá dado por el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &2x = 0 \Rightarrow x = 0; \\ &y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ ,} \end{aligned}$$

o sea, el centro buscado es el punto (0, –1), como también puede comprobarse gráficamente en la figura adjunta.

Ejercicio 2

En un mercado de duopolio, la función de demanda de una de las empresas oferentes viene dada por la EDP:

$$\begin{cases} xu_x - 2yu_y + u_x^2 - u_y^2 + 2u = \int_0^1 x \cdot e^x \cdot dx - \int_1^e \ln x \cdot dx, \\ u(x,0) = 1 - x^2. \end{cases}$$

, viniendo el precio *u* expresado en € /kg. Si las cantidades de producto que ofrece cada empresa son (expresadas en millones de toneladas métricas): x = 0'012 e y = 0'016, se desea conocer la cifra de negocios de aquella empresa.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 30).

Solución:

Procede, en primer lugar, calcular el 2º miembro de la EDP de demanda planteada, formado por la diferencia de sendas integrales definidas que se pueden resolver por partes, esto es:

$$\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx = \left[x\cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\cdot dx = e-(e-1)=1,$$ y también:

$$\int_1^e \ln x\cdot dx = \left[x\cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e dx = e-(e-1)=1,$$ con lo que la EDP quedará así:

$$xu_x - 2yu_y + u_x^2 - u_y^2 + 2u = 1\text{-}1 = 0.$$

Se trata, pues, de una EDP no lineal y de primer orden, homogénea y de coeficientes variables. Así pues, la función que define la ecuación anterior viene dada por:

$$F(x,y,z,p,q) = xp - 2yq + p^2 - q^2 + 2z.$$

La curva inicial se parametriza del siguiente modo:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s),\alpha_2(s),\beta(s)) = (s,0,1-s^2),\ \forall s\in\Re.$$

Por consiguiente, debemos resolver las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = x+2p, & x(0)=s, \\ y' = -2y-2q, & y(0)=0, \\ z' = px+2p^2-2yq-2q^2, & z(0)=1-s^2, \\ p' = -3p, & p(0)=p_0(s), \\ q' = 0, & q(0)=q_0(s), \end{cases} \qquad (1)$$

conjuntamente con la siguiente ecuación de compatibilidad:

$$x(t,s)p(t,s) - 2y(t,s)q(t,s)+p^2(t,s) - q^2(t,s)+2z(t,s) = 0. \qquad (2)$$

En este caso p_0 y q_0 deben verificar las siguientes propiedades:

(i) Condición de banda inicial:

$$p_0(s)\alpha_1'(s)+q_0(s)\alpha_2'(s)=\beta'(s) \quad \Leftrightarrow \quad p_0(s)=-2s\,.$$

(ii) Condición de compatibilidad:

$$F(\alpha_1(s),\alpha_2(s),\beta(s),p_0(s),q_0(s))=0 \Leftrightarrow sp_0(s)+p_0^2(s)-q_0^2(s)=2(s^2-1).$$

(iii) Condición de transversalidad:

$$0\neq \det\begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} s+2p_0(s) & 1 \\ -2q_0(s) & 0 \end{pmatrix}=2q_0(s)\,.$$

Por lo tanto, sabemos que este problema tiene exactamente dos soluciones que vienen dadas para los siguientes valores:

$$p_0(s) = -2s, \qquad q_0(s)=\pm\sqrt{2}\,.$$

Calculemos, en un primer momento, la solución asociada al valor $q_0(s)=\sqrt{2}$. De las dos últimas ecuaciones del sistema (1) obtenemos de inmediato que:

$$q(t,s)=\sqrt{2}\,,\ \text{y}\ p(t,s) = -2se^{-3t}.$$

Por consiguiente, sin más que tener en cuenta la ecuación (2), las restantes variables se calculan como la solución obtenida de problemas anteriores para el caso particular de:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b(t,s)=\begin{pmatrix} -4se^{-3t} \\ -2\sqrt{2} \\ 4s^2e^{-6t}-2 \end{pmatrix}, \qquad C(s)=\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 1-s^2 \end{pmatrix}.$$

Así pues, obtenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t,s)=se^{-3t} \\ y(t,s)=\sqrt{2}\left(e^{-2t}-1\right) \\ z(t,s) = -s^2e^{-6t}-1+2e^{-2t} \end{array}}$$

Por lo tanto, la superficie solución está parametrizada por la expresión:

$$\Gamma(t,s)=\left(se^{-3t},\sqrt{2}\left(e^{-2t}-1\right),-s^2e^{6t}-1+2e^{-2t},-2se^{-3t},\sqrt{2}\right).$$

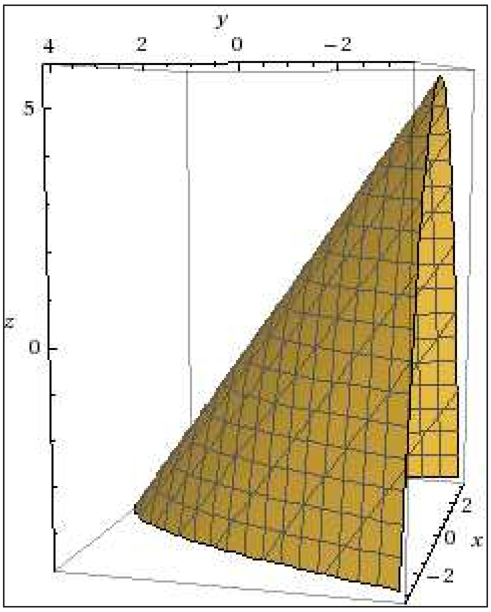
De las expresiones de *x* e *y* no es difícil comprobar que una solución particular buscada es:

$$u(x,y) = z(t(x,y),s(x,y)) = -x^2 + 1 + \sqrt{2}y\ .$$

Cuando $q_0(s) = -\sqrt{2}$, haciendo similares argumentaciones, obtenemos que:

$$u(x,y) = -x^2 + 1 - \sqrt{2}y\ ,$$

y esta segunda solución buscada es la correcta desde el punto de vista de su interpretación microeconómica, puesto que se trata de una función de demanda, de ecuación: $x^2 + y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, con la siguiente representación gráfica como cilindro parabólico:



Debe tenerse en cuenta que, para que exista un significado económico, al tratarse de una función de demanda (decreciente), necesariamente debe cumplirse que: $u \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, o sea, que la función en cuestión tiene como dominio de definición el octante positivo de la esfera.

El precio se anulará ($u = z = 0$) en la sección cónica de ecuación: $x^2 + y\sqrt{2} - 1 = 0$, con:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix}\ ;\ |A| = -1/2 < 0\ ;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ,$$

luego se trata de una parábola real, cuyo centro es impropio.

Para la conceptualización de esta cuádrica o superficie de 2º orden, debe tenerse en cuenta que su matriz (A) es:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ y entonces: } |A| = 0 .$$

$$\text{También: } A'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, con $|A| = 0$ y: $a_{11} \cdot A_{44} = 0$, y como:

Rango o característica $\begin{cases} r(A) = k = 3 \\ r(A_{44}) = h = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Cilindro parabólico.

Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0 ,$$

de donde: $S_1 = 1$, $S_2 = S_3 = 0$. Se trata, pues, de una cuádrica de revolución, con la siguiente ecuación reducida:

$S_1 x^2 \pm 2y\sqrt{\frac{-I'_3}{I_1}} = 0$, siendo el invariante especial de los cilindros:

$$I'_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33} \text{ , y también:}$$

I_1 (invariante métrico o lineal) = $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1 + 0 + 0 = 1$,

$$I'_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} .$$

Con ello resultará, que la ecuación reducida buscada es:

$$x^2 \pm y\sqrt{3} .$$

Por último, si entendemos que estamos analizando, v. gr., la segunda empresa, se tendrá:

$$u = 1 - x^2 - \sqrt{2}y = 1 - 0'012^2 - 0'016 \times \sqrt{2} \cong 0'98 \text{ € /kg},$$

y la cifra de negocios pedida, será:

$$I_2 = p_2 \times q_2 = u \cdot y = 0'98 \times 0'016 = 0'01568 \equiv 15.680.000 \text{ €} .$$

Ejercicio 3

La función inversa de demanda de una empresa monopolista viene dada por la expresión: p(q) = 28 – 2q, su función de oferta por la ecuación integral siguiente: $p = f(q) = q^3 + \int_0^q 4 \cdot f(\tau) \cdot d\tau$, mientras que su función de producción es: $q = u(y_1,y_2)$, siendo y_1 e y_2 las cantidades de factores que emplea en el proceso. Si el coste unitario de dichos factores es, para ambos "inputs", de $r_1 = r_2 = 6$ u.m. y la función *q* es la raíz cuadrada de la inversa de la función $v(y_1,y_2)$ que, a su vez, satisface la siguiente EDP:

$$y_1\left(v^2 - {y_2}^2\right)v_{y_1} + y_2\left(y_1^2 - v^2\right)v_{y_2} = v\left(y_2^2 - y_1^2\right), \text{ con } v(y_1, y_1) = \frac{1}{y_1^2}, \forall y_1 > \cos 0 ,$$

se pide: a) hallar la trayectoria de expansión de la empresa, b) las cantidades de "inputs" necesarias para maximizar sus ganancias, c) el equilibrio del mercado, y d) las elasticidades de las funciones de oferta y demanda en el punto de equilibrio del mercado, así como los ingresos empresariales.

Solución:

a) La solución particular de la EDP dada ya ha sido obtenida en otro ejercicio de este mismo libro, por lo que obviaremos aquí su resolución pormenorizada, ofreciendo que: $v(y_1, y_2) = \dfrac{1}{y_1 \cdot y_2}$, de tal suerte que también: $q = \sqrt{\dfrac{1}{v(y_1, y_2)}} = \sqrt{y_1 \cdot y_2} = y_1^{1/2} \cdot y_2^{1/2}$, que es una función de Cobb-Douglas, homotética y homogénea de grado m = 1.

Aplicando la ley de la igualdad de las productividades marginales ponderadas, resultará que: $\dfrac{q_1'}{q_2'} = \dfrac{r_1}{r_2}$, esto es:

$$\frac{(1/2)y_1^{-1/2} \cdot y_2^{1/2}}{(1/2)y_2^{-1/2} \cdot y_1^{1/2}} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow y_1 = y_2 \ ,$$

que es la trayectoria de expansión de la empresa, lo cual resulta lógico habida cuenta de la simetría de las variables en la función de producción, así como la igualdad del precio de los "inputs" del proceso productivo.

b) Se puede expresar el máximo beneficio esperable, en función de los "inputs", del siguiente modo:

$$\pi = I - C = p \cdot q - (6y_1 + 6y_2) = (28 - 2\sqrt{y_1 y_2})\sqrt{y_1 y_2} - 6y_1 - 6y_2 \, .$$

- Condiciones necesarias o de primer grado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial y_1} = \left(0'5 \dfrac{y_2^{0'5}}{y_1^{0'5}} \right) [28 - 2\sqrt{y_1 y_2}] + \sqrt{y_1 y_2}(-2) \left(0'5 \dfrac{y_2^{0'5}}{y_1^{0'5}} \right) - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial y_2} = \left(0'5 \dfrac{y_1^{0'5}}{y_2^{0'5}} \right) [28 - 2\sqrt{y_1 y_2}] + \sqrt{y_1 y_2}(-2) \left(0'5 \dfrac{y_1^{0'5}}{y_2^{0'5}} \right) - 6 = 0 \end{cases}$$

Simplificando y ordenando las expresiones anteriores, resulta:

$$\begin{cases} 7 \dfrac{y_2^{0'5}}{y_1^{0'5}} - y_2 - 6 = 0 \end{cases} ; \ \begin{cases} 7 \dfrac{y_1^{0'5}}{y_2^{0'5}} - y_1 - 6 = 0 \end{cases} ,$$

por lo que en base a las simetrías expresadas ($y_1 = y_2$) podremos escribir:

$$\begin{cases} 7 - y_1 = 3 \\ 7 - y_2 = 3 \end{cases} , \text{ entonces: } y_1 = y_2 = 4.$$

- Condiciones suficientes o de segundo grado:

Habrá que formar el determinante hessiano: $H(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \Phi''_{y_1^2} & \Phi''_{y_1 y_2} \\ \Phi''_{y_1 y_2} & \Phi''_{y_2^2} \end{vmatrix}$

para comprobar la condición de máximo, cuestión que dejamos en manos de nuestros amables lectores. De este modo, el beneficio esperable será:

$$\pi = I - C = p \cdot q - 6(y_1 + y_2) = (28 - 8) \cdot 4 - 6 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = 80 - 48 = 32.$$

Así pues, el *output* total será: $q = \sqrt{y_1 \cdot y_2} = \sqrt{16} = 4$. Nos hallamos, pues, en el punto (4,4), con una trayectoria de expansión de la empresa de $y_2 = y_1$ (bisectriz del primer cuadrante) y la recta isocoste será de ecuación:

$$y_2 - y_2(y_{10}) = y'_2(y_{10})\cdot(y_1 - y_{10}).$$

Como: $y_2(y_{10}) = y_2(4) = 4$, y la curva isocuanta es: $y_2 = \frac{16}{y_1}$;

$y'_2(y_1) = -\frac{16}{y_1^2}$; $y'_2(4) = -1$, o sea que la recta de isocoste será:

$$y_2 - 4 = -(y_1 - 4) = 4 - y_1 \text{ ; de donde: } y_2 = 8 - y_1 .$$

La representación gráfica correspondiente, será:

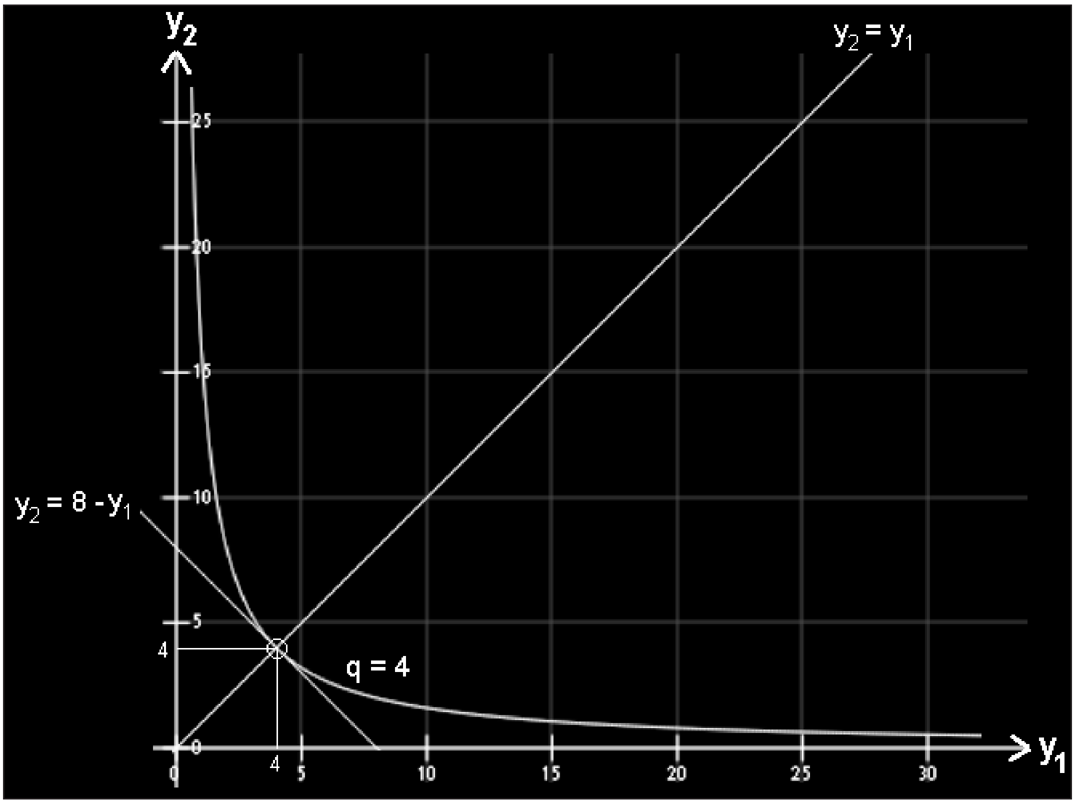


Fig. 2. Curva isocuanta y rectas de isocoste y expansión.

c) La función de oferta ahora viene expresada como una ecuación integral del tipo de convolución, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace.

Se trata de una función de oferta creciente, correspondiente a un bien normal.

En efecto, aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación en cuestión, y aplicando el teorema de convolución (Franquet, 2013), tenemos que: $p(q) = q^3 + 4 * p(q)$.

Y entonces:

$$L(p) = L(q^3) + L(4)\cdot L(p) = \frac{3!}{S^4} + L(p)\cdot\frac{4}{S};$$

$$L(p) = \frac{6}{S^4} + \frac{4\cdot L(p)}{S} = \frac{6 + 4\cdot S^3\cdot L(p)}{S^4}, \text{ de donde: } L(p)\cdot S^4 = 6 + 4\cdot S^3\cdot L(p);$$

$$L(p)\cdot(S^4 - 4S^3) = 6;\ L(p) = \frac{6}{S^4 - 4S^3}, \text{ lo que ofrece la solución buscada:}$$

$$p(q) = L^{-1}\left(\frac{6}{S^4 - 4S^3}\right) = \frac{3}{32}(e^{4q} - 8q^2 - 4q - 1).$$

Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \to p = 28 - 2q \\ O \to p = \dfrac{3}{32}(e^{4q} - 8q^2 - 4q - 1) \end{cases}$$

$$28 - 2q = \frac{3}{32}(e^{4q} - 8q^2 - 4q - 1), \text{ de donde se deduce que:}$$

$$q = 1'41848 \approx 1'42.$$

En este caso, p = 28 – 2·1'42 = 25'16, o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 25'16 u.m. y una cantidad aproximada de 1'42 de producto.

Por otra parte, se presume también en el caso de la función de oferta que nos ocupa la posible existencia de ramas parabólicas, puesto que si $q \to \infty$ también sucede que $p \to \infty$.

Esto es: $m = \lim\limits_{q \to +\infty} \frac{p}{q} = \lim\limits_{q \to +\infty} \frac{3(e^{4q} - 8q^2 - 4q - 1)}{32q} = +\infty$, luego existe, en este caso, una rama parabólica según el eje Op (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación (con detalle suficiente en las proximidades del origen de coordenadas):

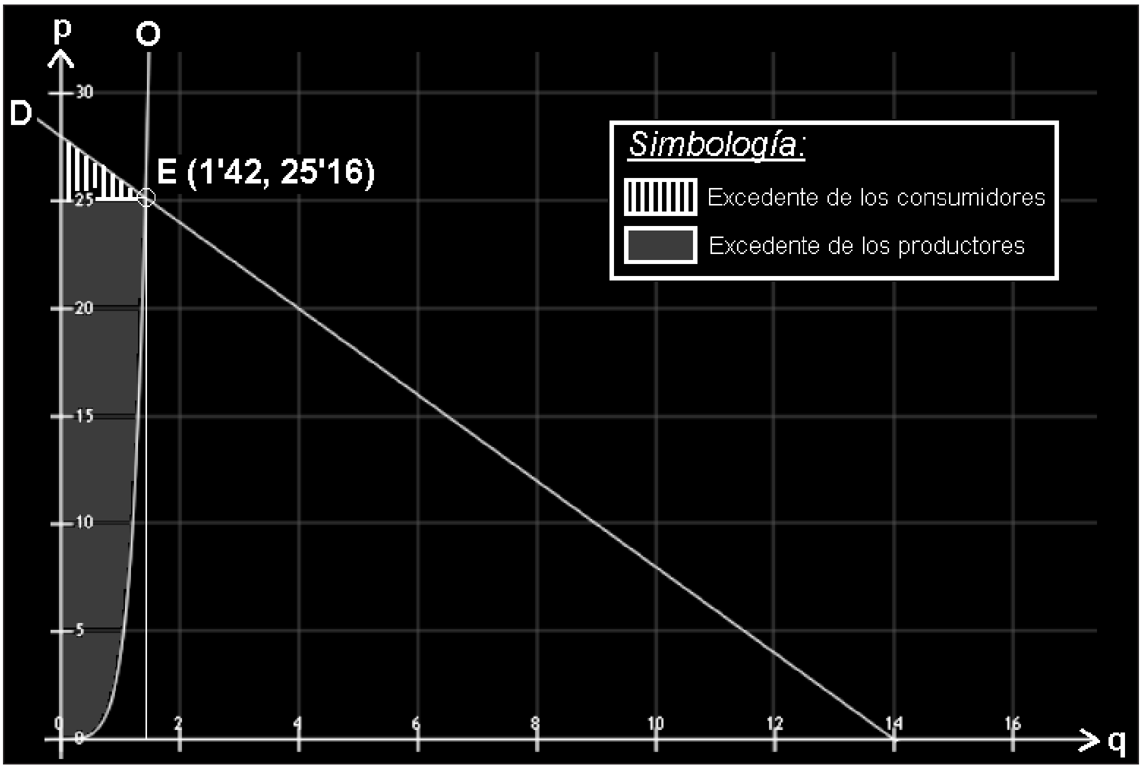


Fig. 3. Equilibrio del mercado.

d) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado E(1'42, 25'16), se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

$$D \Rightarrow p = 28 - 2q;\ dp/dq = -2;\ \frac{dq}{dp} = -\frac{1}{2}.$$

$$e_d = \frac{dq}{dp} \times \frac{p}{q} = -\frac{1}{2} \times \frac{28-2q}{q} = \frac{q-14}{q} = \frac{1'42-14}{q} = -8'86 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica. Del mismo modo:

$$O \Rightarrow p = \frac{3}{32}(e^{4q} - 8q^2 - 4q - 1);\quad dp/dq = \frac{3}{32}(4 \cdot e^{4q} - 16q - 4) = \frac{3e^{4q} - 12q - 3}{8};$$

$\frac{dq}{dp} = \frac{8}{3e^{4q} - 12q - 3}$. Y entonces, la elasticidad buscada de la oferta será:

$$e_o = \frac{dq}{dp} \times \frac{p}{q} = \frac{8}{3e^{4q} - 12q - 3} \times \frac{25'16}{1'42} = \frac{141'75}{3 \cdot e^{5'68} - 17'04 - 3} = \frac{141'75}{858'81} = 0'16 < 1,$$

luego se trata de una oferta relativamente inelástica.

Por último, los ingresos brutos estimados de la empresa, en dicho punto de equilibrio, vendrán dados por:

$$I = p \times q = 25'16 \times 1'42 = 35'73,$$

que resultan inferiores a los I = 80 anteriormente obtenidos en el apartado b) al maximizar el beneficio en función de los *inputs* del proceso productivo. En este caso, de mantenerse la misma cantidad de factores productivos, el resultado empresarial produce pérdidas, puesto que:

$$\pi = I - C = p \cdot q - 6(y_1 + y_2) = 35'73 - 6y_1 - 6y_2 = 35'73 - 48 = -12'27.$$

Ejercicio 4

Aprovechando la resolución del ejercicio anterior, emplearemos la misma EDP para resolver el siguiente, adaptado del libro "Problemas resueltos de Microeconomía IV", citado en la bibliografía (Martín y Sánchez, 2001, p. 141 y ss.).

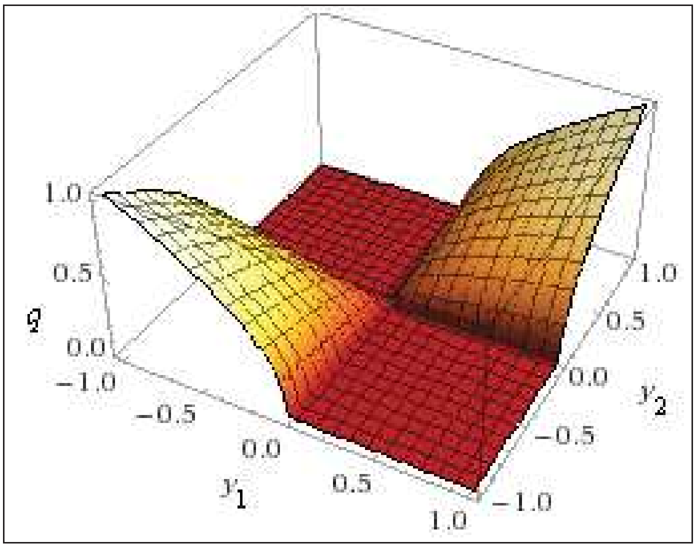
Una empresa generadora de energía eléctrica utiliza como *input* carbón (y_1) de explotaciones mineras en régimen de monopsonio. Su función de producción, simplificativamente, se reduce a 2 factores, y_1 e y_2, y dicha función *q* es la raíz cuadrada de la inversa de la función $u(y_1,y_2)$ que, a su vez, satisface la siguiente EDP:

$$y_1\left(u^2 - {y_2}^2\right)u_{y_1} + y_2\left(y_1^2 - u^2\right)u_{y_2} = u\left(y_2^2 - y_1^2\right), \text{ con } u(y_1, y_1) = \frac{1}{y_1^2}, \forall y_1 > 1.$$

La función de oferta de las explotaciones mineras viene dada por la expresión: $r_1 = 0'5 + 0'01 \cdot y_1$, donde r_1 es el precio unitario del combustible. El precio unitario del *output* (electricidad) es de p = 1 u.m. y el *input* agregado y_2 tiene un coste de $r_2 = 0'25$ u.m. Se desea: a) Obtener la expresión de la curva isobeneficio respecto del *input* y_1 correspondiente al máximo beneficio; b) Obtener y representar la trayectoria de expansión de la empresa con la representación gráfica correspondiente.

Solución:

a) La solución particular de la EDP dada ya ha sido obtenida en otros ejercicios de este mismo libro, por lo que obviaremos aquí su resolución pormenorizada, ofreciendo que: $u(y_1, y_2) = \frac{1}{y_1 \cdot y_2}$, de tal suerte que también: $q = \sqrt{\frac{1}{u(y_1, y_2)}} = \sqrt{y_1 \cdot y_2} = y_1^{1/2} \cdot y_2^{1/2}$, con la siguiente representación gráfica:



La central eléctrica es la única demandante del combustible, que tiene una oferta de elasticidad infinita.

El beneficio de la empresa en función de los factores productivos viene dado por la expresión:

$$\pi = I - C_1 - C_2 = p{\cdot}q - r_1{\cdot}y_1 - r_2{\cdot}y_2 = 1{\cdot}\sqrt{y_1{\cdot}y_2} - (0'5 + 0'01{\cdot}y_1)y_1 - 0'25{\cdot}y_2 =$$
$$= \sqrt{y_1{\cdot}y_2} - 0'5{\cdot}y_1 - 0'01{\cdot}y_1^2 - 0'25{\cdot}y_2 \, .$$

Las condiciones de primer orden (necesarias) para que el beneficio sea máximo son, como es sabido:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial y_1} = \left(\dfrac{y_2^{0'5}}{2y_1^{0'5}} \right) - (0'5 + 0'02y_1) = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial y_2} = \left(\dfrac{y_1^{0'5}}{2y_2^{0'5}} \right) - 0'25 = 0 \end{cases}$$

La solución de equilibrio se obtiene resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Por ejemplo, se puede despejar y_2 de la primera ecuación y substituirla en la segunda, con lo que:

$$y_2^{0'5} = 2y_1^{0'5}(0'5 + 0'02y_1)$$
$$\frac{y_1^{0'5}}{4y_1^{0'5}(0'5 + 0'02y_1)} = 0'25 \Rightarrow y_1 = 25 \, ; y_2 = 100 \, .$$

La condición suficiente o de segundo grado exige que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\pi}{\partial y_1^2} = -\dfrac{0'353553\cdot\sqrt{\dfrac{y_2}{y_1}}}{y_1} - 0'02 = -0'048 \\[2ex] \dfrac{\partial^2\pi}{\partial y_1 \cdot \partial y_2} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{y_2}{y_1}}}{2y_2\sqrt{2}} = 0'007 \\[2ex] \dfrac{\partial^2\pi}{\partial y_2^2} = -\dfrac{\sqrt{\dfrac{y_1}{y_2}}}{2y_2\sqrt{2}} = -0'002 \end{cases}$$

y formando el determinante funcional hessiano resultará que:

$$H(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\pi}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2\pi}{\partial y_1 \cdot \partial y_2} \\ \dfrac{\partial^2\pi}{\partial y_1 \cdot \partial y_2} & \dfrac{\partial^2\pi}{\partial y_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0'048 & 0'007 \\ 0'007 & -0'002 \end{vmatrix} = 0'000096 - 0'000049 = 0'000047 > 0,$$

y además: $\dfrac{\partial^2\pi}{\partial x^2} = -0'048 < 0$, luego se trata, efectivamente, de un máximo.

Una vez se conocen las cantidades de *inputs* utilizados en la producción, con sencillas substituciones, se obtiene el valor de equilibrio del precio del carbón, así:

$$r_1 = 0'5 + 0'01y_1 = 0'5 + (0'01)(25) = 0'75 ,$$

y la cantidad producida de energía eléctrica será (*output* total):

$$q = y_1^{0'5} y_2^{0'5} = 25^{0'5} 100^{0'5} = 50 ,$$

mientras que los beneficios de equilibrio de la central térmica son:

$$\pi = (25^{0'5}100^{0'5}) - [0'5 + (0'01)(25)]\cdot 25 - (0'25)(100) = 6'25 \text{ u.m.}$$

Para obtener la función de isobeneficio en función del *input* 1 para un beneficio igual a 6’25, se expresa la función anterior respecto de la cantidad consumida del *input* 1 y de su precio. A saber:

$$\pi(y_1) = 10y_1^{0'5} - r_1 y_1 - 25 = 6'25 \Rightarrow r_1 = \frac{10y_1^{0'5} - 31'25}{y_1} = 0'75.$$

Obsérvese que la solución de monopsonio no es una asignación eficiente. Para que la central térmica se comportara eficientemente, debería ser:

$$r_1 = 0'5 + 0'02 \cdot y_1 = 0'5 + (0'02)(25) = 1'00.$$

Aplicando, entonces, la ley de la igualdad de las productividades marginales ponderadas, resultará que: $\frac{q_1'}{q_2'} = \frac{r_1}{r_2}$, esto es:

$$\frac{(1/2)y_1^{-1/2} \cdot y_2^{1/2}}{(1/2)y_2^{-1/2} \cdot y_1^{1/2}} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1'00}{0'25} = 4 \Rightarrow y_2 = 4y_1 \ ,$$

que es la trayectoria de expansión de la empresa.

b) Así pues, el *output* total será: $q = \sqrt{y_1 \cdot y_2} = \sqrt{25 \cdot 100} = 50$. Nos hallamos, pues, en el punto (25,100), y la trayectoria de expansión de la empresa será una recta que pasa por los puntos (0,0) y (25,100). Esto es:

$$\frac{y_1}{25} = \frac{y_2}{100}, \text{ de donde se deduce que: } y_2 = 4y_1,$$

y la recta isocoste será de ecuación: $y_2 - y_2(y_{10}) = y'_2(y_{10}) \cdot (y_1 - y_{10})$.

Como: $y_2(y_{10}) = y_2(25) = 100$, y la curva isocuanta es: $y_2 = \frac{2.500}{y_1}$;

$y_2'(y_1) = -\frac{2.500}{y_1^2}$; $y_2'(25) = -\frac{2.500}{625} - 4$, o sea que la recta de isocoste será:

$$y_2 - 100 = -4(y_1 - 25) = 100 - 4y_1 \ ; \text{ de donde: } y_2 = 200 - 4y_1 \ .$$

La representación gráfica correspondiente, será:

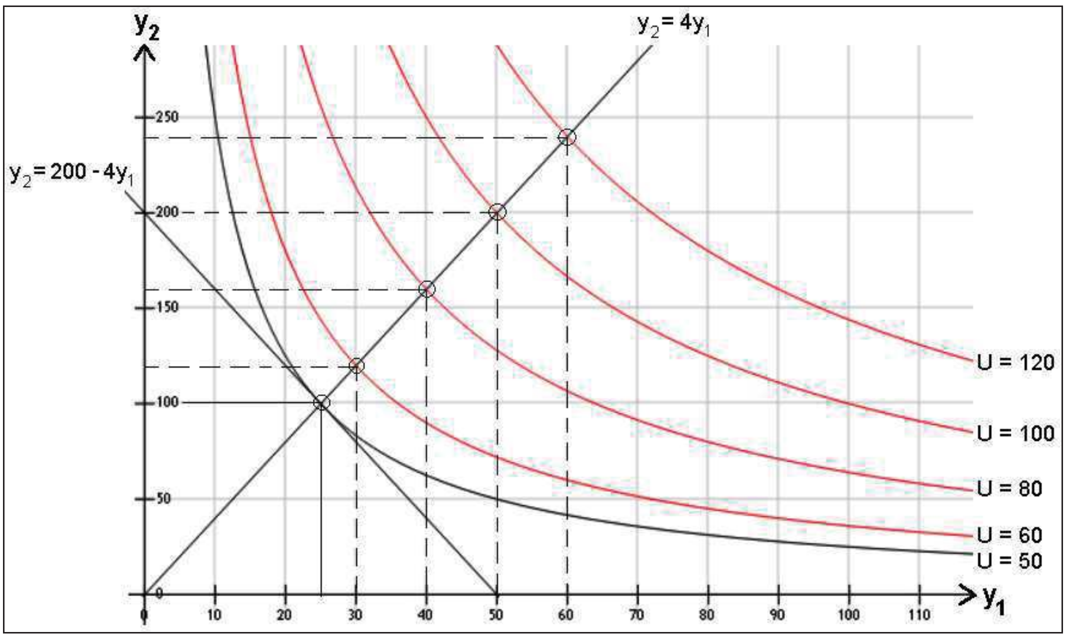


Fig. 4. Trayectoria de expansión de la empresa.

Los diferentes niveles de *output* graficados son:

- $U=\sqrt{y_1 \cdot y_2}=\sqrt{25 \cdot 100}=50$
- $U=\sqrt{y_1 \cdot y_2}=\sqrt{30 \cdot 120}=60$
- $U=\sqrt{y_1 \cdot y_2}=\sqrt{40 \cdot 160}=80$
- $U=\sqrt{y_1 \cdot y_2}=\sqrt{50 \cdot 200}=100$
- $U=\sqrt{y_1 \cdot y_2}=\sqrt{60 \cdot 240}=120$

Ejercicio 5

En un mercado de duopolio, con producto diferenciado, una empresa quiere mantener una participación fija en las ventas totales, independientemente de los efectos de su actuación, sobre los beneficios a corto plazo. La otra empresa es líder del mercado, en el sentido de que sus acciones siempre serán seguidas por la empresa primera. La función de costes marginales de la empresa segunda, líder, es la siguiente: $\frac{q_2}{2}+10$, siendo sus costes fijos de 100 u.m., y su función inversa de demanda viene dada por: $p_2=50-q_2-\frac{q_1}{4}$.

Si la empresa primera desea mantener una participación del 25% de las ventas totales, se pide:

a) Determinar las cantidades de producto que ofrecería cada empresa, el precio de venta del producto de la empresa líder, sus diferentes curvas de coste, y su beneficio neto, considerando una fiscalidad aplicable del 25%.

b) Comparar los resultados obtenidos en a) si en un período posterior se estima que la función inversa de demanda *u* de la empresa líder viene dada por la EDP:

$$\text{b-1)}\quad \begin{cases} x \cdot u_x + y \cdot u_y + \dfrac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)-u=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin x \cdot \cos x \cdot dx \\ \text{con}: u(x,0)=\dfrac{1-x^2}{2} \end{cases}$$

o bien en otro período:

$$\text{b-2)}\quad \begin{cases} (y-x)u_x+2yu_y=3x-y+2u \\ \text{con}: u(0,x)=-x \end{cases}$$

, y en este último caso resulta ser la función inversa de demanda: p_2 = 100 + u, en que, para mayor simplicidad operativa, se han efectuado las siguientes sustituciones:

$$x = q_1;\ y = q_2;\ u(x,y) = p_2(q_1,q_2).$$

Solución:

a) La función de costes totales de la empresa líder, será:

$$CT_2 = \int (\frac{q_2}{2} + 10)\cdot dq_2 = \frac{q_2^2}{4} + 10q_2 + CF.$$

Deberá cumplirse que: $\frac{q_1}{q_1 + q_2} = \frac{25}{100}$; luego: $q_1 = \frac{q_2}{3}$.

Los beneficios brutos de la empresa líder, serán:

$$B_2 = I - CT = p_2 \cdot q_2 - (\frac{q_2^2}{4} + 10q_2 + 100) =$$

$$= (50 - q_2 - \frac{q_2}{12})q_2 - \frac{q_2^2}{4} - 10q_2 - 100.$$

La maximización de beneficios exige que (condición necesaria o de primer grado):

$$\frac{dB_2}{dq_2} = (-1 - \frac{1}{12})q_2 + 50 - q_2 - \frac{q_2}{12} - \frac{q_2}{2} - 10 = 0;$$

de donde resulta: $q_2 = \frac{480}{32} = 15$.

Condición suficiente o de 2º grado:

$\frac{d^2B_2}{(dq_2)^2} = -\frac{8}{3} < 0$, luego se trata, efectivamente, de un máximo.

$$q_1 = \frac{q_2}{3} = \frac{15}{3} = 5;\quad p_2 = 50 - 15 - 0'25 \times 5 = 33'75 \text{ u.m.};$$

$B_2 = 33'75 \times 15 - \frac{225}{4} - 150 - 100 = 200$ u.m., y un beneficio neto de:

$$B'_2 = 200 \times 0'75 = 150 \text{ u.m.}$$

Las diferentes funciones de costes de la empresa líder, son:

$$\begin{cases} CT = \dfrac{q_2^2}{4} + 10q_2 + 100 \\ CV = \dfrac{q_2^2}{4} + 10q_2 \\ CMa = \dfrac{q_2}{2} + 10 \\ CTMe = \dfrac{q_2^2}{4} + 10 + \dfrac{100}{q_2} \\ CVMe = \dfrac{q_2}{4} + 10 \\ CF = 100\,;\ CFMe = \dfrac{100}{q_2} \end{cases}$$

, cuyas representaciones gráficas pueden verse a continuación:

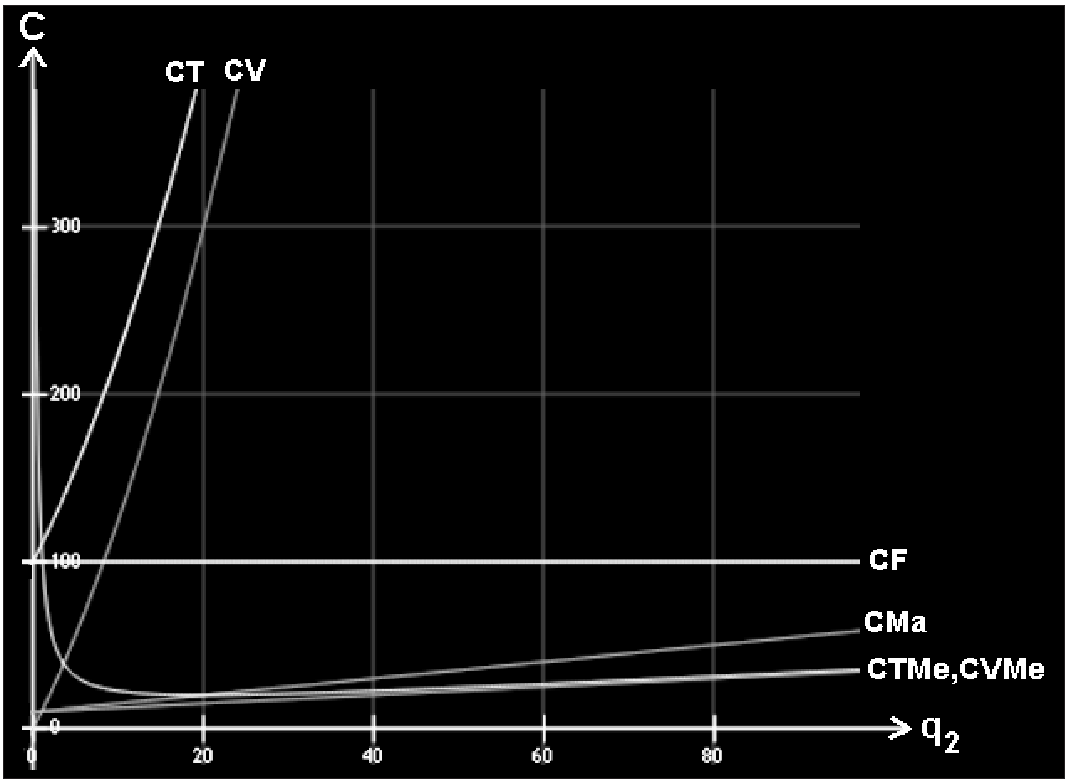


Fig. 5. Diferentes curvas de coste.

Del mismo modo, se tendrán los siguientes ingresos y costos totales de la empresa líder:

$$\begin{cases} I_2 = p_2 \times q_2 = 33'75 \times 15 = 506'25 \text{ u.m.} \\ C_2 = I_2 - B_2 = 506'25 - 200 = 306'25 \text{ u.m.} \end{cases}$$

b)

b-1) Habrá que resolver dicha EDP, para lo cual hay que empezar hallando su 2º miembro, dado por la integral definida:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{2\pi} = 0 .$$

En este caso, la solución de la EDP $\begin{cases} xu_x + yu_y + \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - u = 0, \\ \text{con} : u(x,0) = \frac{1 - x^2}{2}. \end{cases}$,

ya ha sido obtenida en el primer ejercicio del presente capítulo, ofreciendo como resultado (puesto que se trata también de una función de demanda): $p_2(q_1, q_2) = \frac{1 - q_1^2}{2} - q_2$.

O sea, que la nueva función inversa de demanda es:

$$p_2 = \frac{1 - q_1^2}{2} - q_2 = \frac{9 - q_2^2}{18} - q_2 ,$$ (puesto que $3q_1 = q_2$).

Los beneficios brutos serán, ahora:

$$B_2 = I - CT = p_2 \cdot q_2 - (\frac{q_2^2}{4} + 10q_2 + 100) =$$
$$= \frac{9q_2 - q_2^3}{18} - q_2^2 - \frac{q_2^2}{4} - 10q_2 - 100.$$

Entonces, se tiene que: $\frac{dB_2}{dq_2} = \frac{9 - 3q_2^2}{18} - 2q_2 - \frac{q_2}{2} - 10 = 0$,

o lo que es lo mismo:

$$q_2^2 + 15q_2 + 57 = 0 ,$$

de donde resulta que q_2 no tiene raíces reales, por lo que la función de demanda resultante de la resolución de la EDP planteada carece de significado real. Si se adoptara como solución de la EDP la segunda posible, esto es,

$$p_2 = \frac{1 - q_1^2}{2} + q_2 = \frac{9 - q_2^2}{18} + q_2 ,$$

y los beneficios brutos serán, ahora:

$$B_2 = I - CT = p_2 \cdot q_2 - (\frac{q_2^2}{4} + 10q_2 + 100) =$$

$$= \frac{9q_2 - q_2^3}{18} + q_2^2 - \frac{q_2^2}{4} - 10q_2 - 100.$$

Entonces: $\frac{dB_2}{dq_2} = \frac{9 - 3q_2^2}{18} + 2q_2 - \frac{q_2}{2} - 10 = 0$, o lo que es lo mismo:

$q_2^2 - 9q_2 + 57 = 0$, que tampoco ofrece raíces en el campo real.

b-2) En este segundo caso, la solución de la EDP correspondiente también ha sido hallada con motivo de un ejercicio anterior de este mismo libro (véase ejercicio 14 del cap. 6), con lo que la nueva función de demanda será:

$$p_2(q_1, q_2) = 100 + u(q_1, q_2) = 100 - q_1 - q_2 = \frac{300 - 4q_2}{3}.$$

Los beneficios brutos serán, ahora:

$$B_2 = I - CT = p_2 \cdot q_2 - (\frac{q_2^2}{4} + 10q_2 + 100) = 90q_2 - \frac{19q_2^2}{12} - 100.$$

La maximización de beneficios exige que (condición necesaria o de primer grado): $\frac{dB_2}{dq_2} = 90 - \frac{19q_2}{6} = 0$, de donde: $q_1 \cong 9'47$ y $q_2 \cong 28'42$.

La condición suficiente o de 2º grado exige que:

$\frac{d^2B_2}{dq_2^2} = -\frac{19}{6} < 0$, luego se trata, efectivamente, de un máximo.

El precio resultante será: p_2 = 100 – 9’47 – 28’42 = 62’11 u.m.;

$$B_2 = I - CT = 90q_2 - \frac{19q_2^2}{12} - 100 = 90 \times 28'42 - \frac{19 \times 807'7}{12} - 100 = 1.179 \text{ u.m.},$$

y se obtendrá, en definitiva, un beneficio neto de:

$$B'_2 = 1.179 \times 0'75 = 884'25 \text{ u.m.}$$

Del mismo modo, se tendrán, en este último caso, los siguientes ingresos y costos totales de la empresa líder:

$$\begin{cases} I_2 = p_2 \times q_2 = 62'11 \times 28'42 = 1.765'17 \text{ u.m.} \\ C_2 = I_2 - B_2 = 1.765'17 - 1.179'00 = 586'17 \text{ u.m.} \end{cases}$$

CAPÍTULO 8

SISTEMAS DE EDP

1. INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

A continuación, se presentan tres ejemplos de sistemas de EDP de primer orden condicionados, de funciones económicas diversas u_1, u_2, v. Los dos primeros son homogéneos y todos ellos son de coeficientes constantes. Para simplificar, en lo sucesivo nos referiremos únicamente a sistemas de dos ecuaciones (y dos funciones). Esto es:

$$\text{a)} \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 4\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{con: } u_1(x,0) = f(x),\ u_2(x,0) = g(x).$$

(restando ambas ecuaciones se obtendría: $3\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = 0$)

$$\text{b)} \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 8\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{con: } u_1(x,0) = f(x),\ u_2(x,0) = g(x).$$

$$\text{c)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = h_1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = h_2 \end{cases} \quad \text{con: } u(0,y) = f(y),\ v(0,y) = g(y);\ \text{con } h_1, h_2 \text{ ctes.}$$

2. SISTEMAS HIPERBÓLICOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Consideraremos ahora sistemas hiperbólicos espacialmente unidimensionales, $\vec{x} = x \in \Re$, con coeficientes constantes. La variable $\vec{U}$ es un vector de dimensión d:

$$\vec{U} = \vec{U}(x,t) = [u_1(x,t), \ldots, u_d(x,t)] \in \Re^d,\ \forall d \geq 2\,.$$

Un sistema de la forma: $\vec{U}_t + [A]\vec{U}_x + [B]\vec{U} = \vec{F}(x,t)$, se dice que es *hiperbólico* si la matriz $[A]$ es diagonalizable con autovalores reales. Los autovalores a_i de $[A]$ se denominan generalmente, empleando términos físicos, *velocidades características* del sistema.

Recuérdese que si $[A]$ es diagonalizable entonces existe una matriz (regular) no singular $[P]$, llamada de "paso" o "modal", tal que: $[\Lambda] = [P^{-1}][A][P]$, siendo $[\Lambda]$ una matriz diagonal.

En el caso particular de que $[B] \equiv 0$, definiendo entonces el cambio de variables $\vec{W} = [P^{-1}]\vec{U}$ se tiene:

$$\vec{W}_t + [\Lambda]\vec{W}_x = [P^{-1}]\vec{F}(x,t) = \vec{G}(t,x), \text{ es decir:}$$

$$w_t^i + \lambda_i w_x^i = g^i(t,x),\ \forall i = 1,...,d\,,$$

que es de la forma hiperbólica más general, para las componentes de los vectores $\vec{W} = (w^1,...,w^d), \vec{G} = (g^1,...,g^d)$ y los autovalores λ_i, $\forall$i = 1, …, d, de la matriz del sistema $[A]$.

Por tanto, cuando $[B] \equiv 0$ el sistema hiperbólico se reduce a un sistema desacoplado de ecuaciones hiperbólicas escalares independientes que se resuelven por separado (Schiavi y Muñoz, 2006-07). Consideraremos precisamente esta situación en el siguiente ejemplo, donde supondremos $[B] \equiv 0$ y $\vec{F}(x,t) \equiv 0$ (caso homogéneo).

Ejemplo

Se considera el PVI dado por el sistema hiperbólico:

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + v_x = 0 \\ v_t + u_x + 2v_x = 0 \end{cases}, \text{ y las condiciones iniciales:}$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \le 1 \\ 0 \text{ si } |x| > 1 \end{cases},\ v(x,0) = v_0(x) = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx - \int_{-3}^{1}(3 - 2x - x^2)dx\,,$$

en que las funciones **u** y **v** representan la trayectoria temporal de los resultados antes de impuestos de sendas empresas pertenecientes al mismo "holding", viniendo la cifra de negocios **x** expresada en millones de € y el tiempo **t** en siglos. Se desea conocer la trayectoria temporal de los resultados netos de dichas empresas, considerando una fiscalidad aplicable del 25% y una cifra de negocios, en ambos casos, de 1 millón de € . ¿Cuáles serán dichos resultados en el vigésimo ejercicio económico?

Solución:

Procede resolver, en primer lugar, la 2ª condición inicial dada, a saber:
$\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx - \int_{-3}^{1}(3-2x-x^2)dx = \frac{32}{3} - \frac{32}{3} = 0$, por lo que: v(x, 0) = $v_0(x)$ = 0.

Para la resolución del sistema planteado, se utiliza la teoría matricial, concretamente la técnica de diagonalización de matrices cuadradas. El sistema anterior se puede escribir en la forma:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x = 0,$$ siendo $\vec{U} = (u, v)$. Es decir, que:

$$\vec{U}_t + [A]\vec{U}_x = 0, \quad [A] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que la matriz $[A]$ (que es simétrica) tiene como autovalores o raíces características:

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. En efecto: $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}$,

entonces, si desarrollamos la ecuación característica o secular:

$$|\lambda \cdot I_2 - A| = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 - 1 = 0; \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$ o sea:

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 = \lambda_1 \\ 1 = \lambda_2 \end{matrix} \right. .$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, su forma diagonal será: $\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y al ser $[A]$ simétrica, sus valores propios son números reales. En efecto: $(3, 1) \in \{\Re\}$. Para obtener los autovectores o vectores propios debe cumplirse (por la derecha) que: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$, o sea:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 3} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix};$$ o sea: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3x_1 \\ x_1 + 2x_2 = 3x_2 \end{cases};$

de donde: $x_1 = x_2$, y una solución cualquiera será del tipo: $k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{\lambda_2 = 1} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$$ o sea: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = x_1 \\ x_1 + 2x_2 = x_2 \end{cases};$

de donde: $x_1 = -x_2$, y una solución cualquiera será del tipo: $k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Los autovectores son, pues, para k = 1, $\vec{\mu}_1 = (1,1)$ y $\vec{\mu}_2 = (1,-1)$. La matriz es diagonalizable y el sistema se puede desacoplar mediante el cambio $\vec{W} = [P^{-1}]\vec{U}$. Nótese que la matriz de "paso" o "modal" $[P]$ viene dada del siguiente modo (escribiendo en columna las componentes de los autovectores $\vec{\mu}_1$ y $\vec{\mu}_2$):

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [P^{-1}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ luego: } \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u+v) \\ \frac{1}{2}(u-v) \end{pmatrix}.$$

Puede comprobarse que se cumple: $[A] = [P]\cdot[\Lambda]\cdot[P^{-1}]$. En efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = [A], \text{ c.s.q.d.}$$

Un simple razonamiento nos confirma que el cambio de coordenadas a efectuar es el anterior. En efecto, sumando y restando las dos ecuaciones dadas resulta que:

$$u_t + 2u_x + v_x = 0, \quad v_t + u_x + 2v_x = 0 .$$

El sistema anterior se puede reescribir en la forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,[(u + v)_t + 3(u + v)_x] = 0, \text{ con } 0 < x < \infty \\ \frac{1}{2}\,[(u - v)_t + (u - v)_x] = 0, \text{ con } 0 < x < \infty \end{cases}$$

y definiendo $w^1 = u + v$, $w^2 = u - v$ se tienen los dos PVI para las componentes (w^1, w^2):

$$\begin{cases} w_t^1 + 3w_x^1 = 0 \\ w^1(0,x) = \frac{1}{2}u_0(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} w_t^2 + w_x^2 = 0 \\ w^2(0,x) = \frac{1}{2}u_0(x) \end{cases}$$

donde las condiciones de contorno se deducen observando que $v_0(x) = 0$. La solución es, por tanto: $w^1(t, x) = w_0{}^1(x - 3t)$, $\quad w^2(t, x) = w_0{}^2(x - t)$.

En términos de las componentes originales $[u(x, t), v(x, t)]$ se tiene la solución particular siguiente:

$$\begin{cases} u(x,t) = w^1 + w^2 = \tfrac{1}{2}\,[u_0(x-3t) + u_0(x-t)] \\ v(x,t) = w^1 - w^2 = \tfrac{1}{2}\,[u_0(x-3t) - u_0(x-t)] \end{cases}$$

Como consecuencia de ello, los resultados netos de ambas empresas serán, considerando la fiscalidad:

- 1ª empresa:

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\,[(1-3t) + (1-t)] = 1 - 2t\ ;\ u_B = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}t\,.$$

- 2ª empresa:

$$v(x,t) = \tfrac{1}{2}\,[(1-3t) - (1-t)] = -t\ ;\ v_B = -\frac{3t}{4}\,.$$

Las correspondientes representaciones gráficas de dichas trayectorias temporales son las siguientes:

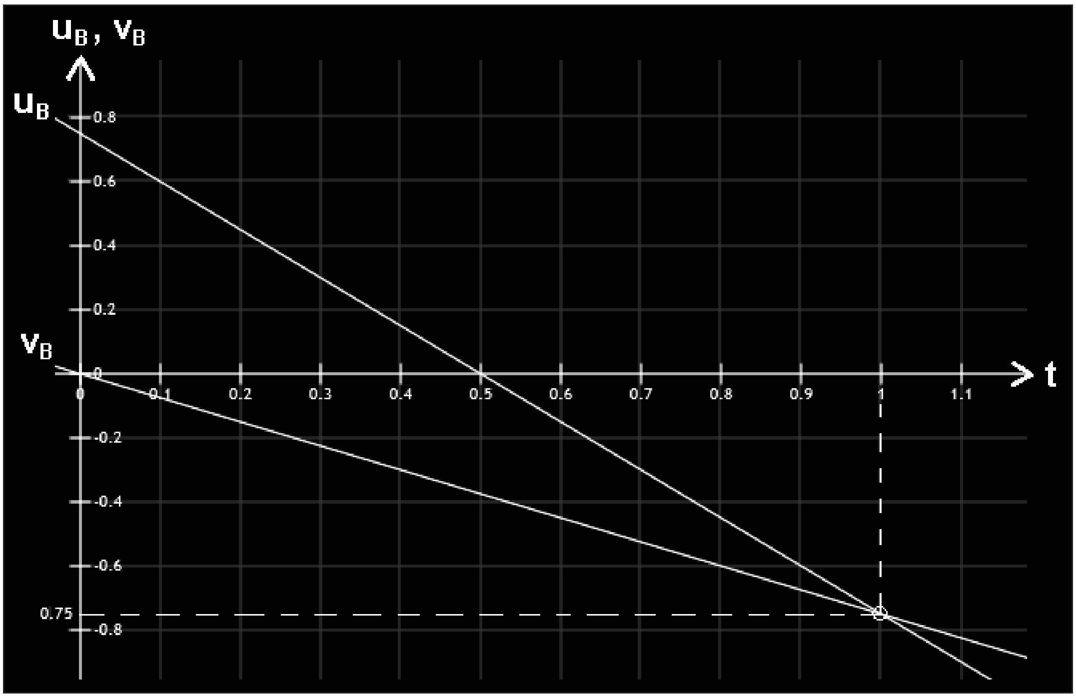


Fig. 1. Trayectorias temporales de ambas empresas.

Al cabo de 20 años (t = 0’2), se tendrá que:

$$\begin{cases} u_B = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{9}{20} = 0'45 \cong 450.000\ € \text{ (beneficios)} \\ v_B = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = -\frac{3}{20} = -\ 0'15 \cong -150.000\ € \text{ (pérdidas)} \end{cases}$$

Así pues, la primera empresa experimentará ganancias en dicho ejercicio, aunque se anularán cuando t = 50 años, y la segunda siempre experimentará pérdidas, aunque el conjunto del "holding" tendrá 300.000 € de beneficios aquel año. Obsérvese que ambas trayectorias temporales coinciden justamente cuando t = 1 (a los 100 años de inicio de su actividad económica) y entonces, en ambos casos, se espera que:

$$u_B = v_B = -750.000 \text{ € (pérdidas)}.$$

3. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL Y DE CONTORNO PARA SISTEMAS DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos ahora el sistema hiperbólico:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x = 0, \quad \text{con } 0 \le x \le 1, \ \forall t \ge 0 , \qquad (1)$$

que también puede escribirse así: $\begin{cases} u_t^1 + au_x^1 + bu_x^2 = 0 \\ u_t^2 + bu_x^1 + au_x^2 = 0 \end{cases}$.

Los autovalores (o "raíces características") del sistema son:

$\lambda_1 = a + b$, $\lambda_2 = a - b$. En efecto:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - a \end{bmatrix};$$

entonces, desarrollando la ecuación característica o secular, se tiene:

$$|\lambda \cdot I_2 - A| = 0 \Rightarrow (\lambda - a)^2 - b^2 = 0; \quad \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0; \text{ de donde:}$$

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2 - b^2)}}{2} = \frac{2a \pm 2b}{2} = \left\langle \begin{matrix} a + b = \lambda_1 \\ a - b = \lambda_2 \end{matrix} \right. .$$

Al tratarse $[A]$ de una matriz simétrica, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, su forma diagonal será:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{bmatrix}, \ \forall (a, b) \in \{\Re\}.$$

Consideremos sólo el caso donde *a* y *b* son positivos. Si 0 < b < a, entonces los autovalores son ambos positivos y las dos familias de características se propagan de izquierda a derecha. Esto significa que la solución (vector) $\vec{U} = (u^1,u^2)^T$ se debe prefijar en x = 0 y ningún dato se debe especificar en x = 1. Nótese que la pendiente de las características es (a^{-1}), luego las características más lentas serán aquellas con mayor pendiente. El caso más interesante se da cuando 0 < a < b. Los autovalores son de signo contrario y las familias de características se propagan en direcciones opuestas. Escribimos el sistema en la forma de ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} u^1+u^2 \\ u^1-u^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^1+u^2 \\ u^1-u^2 \end{pmatrix}_x = 0 \,,$$

cuyo desarrollo ofrece: $\begin{cases} u_t^1 + u_t^2 + au_x^1 + au_x^2 + bu_x^1 + bu_x^2 = 0 \\ u_t^1 - u_t^2 + au_x^1 - au_x^2 - bu_x^1 + bu_x^2 = 0 \end{cases}$,

donde las ecuaciones se tienen que verificar para $0 \leq x \leq 1$ y $t \geq 0$. Ciertamente, una forma de determinar una única solución consiste en prescribir ($u^1 + u^2$) en x = 0 y prescribir ($u^1 - u^2$) en x = 1. Sin embargo, existen otras posibilidades. Por ejemplo, cualquier condición de la forma:

$$\begin{cases} u^1 + u^2 = \alpha_0(u^1 - u^2) + \beta_0(t)\,, \quad \text{en } x = 0 \\ u^1 - u^2 = \alpha_1(u^1 + u^2) + \beta_1(t)\,, \quad \text{en } x = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

determinará (únicamente) la solución del problema. Los coeficientes α_0, α_1 pueden ser funciones de *t* o constantes. Las condiciones de contorno que determinan una única solución se dicen *bien puestas* y el problema se dice *bien planteado*. Las condiciones (2) están bien puestas para el sistema (1). Además son las únicas condiciones bien puestas posibles para el sistema (1). Las condiciones de contorno (2) expresan el valor de las variables características en la característica *entrante*[1] en términos de la variable característica *saliente*. Por tanto, si especificamos u^1 o u^2 en x = 0 el problema está bien planteado y las condiciones bien puestas. Especificar u^1 o u^2 en x = 1 también genera un problema bien planteado con condiciones bien puestas. Sin embargo, especificar ($u^1 - u^2$) en x = 0 o especificar ($u^1 + u^2$) en x = 1 origina un problema mal planteado pues las condiciones están mal puestas.

Para que un problema hiperbólico de valores iniciales y de contorno esté bien puesto, en definitiva, el número de condiciones de contorno debe ser igual al número de características *entrantes* en el dominio (Schiavi y Muñoz, 2006-07).

[1] Por característica “entrante” se entiende una característica que entra en el dominio en la frontera considerada. Por el contrario, una característica “saliente” es una que deja el dominio.

Ejemplo

Considérese el sistema hiperbólico (1) en el intervalo [0, 1], con los valores: a = 0 y b = $\int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot dx$, y las condiciones de contorno $u^1(0, t) = 0$ (en la frontera lateral izquierda) y $u^1(1, t) = 1$ (en la frontera lateral derecha). Determinar: a) su solución siendo $u^1(x, 0) = x$ y $u^2(x, 0) = 1$ los datos iniciales del problema, y b) si en este sistema, $u^1(u)$ y $u^2(v)$ representan los resultados brutos de sendas empresas expresados en millones de € , **t** es el tiempo en siglos y **x** el volumen de ventas en millones de € , se pide hallar los resultados netos de ambas empresas, considerando una fiscalidad aplicable del 25%, al decimoquinto año del inicio de su actividad económica, cuando el volumen de ventas de la primera empresa es de 950.000 € .

(adaptado de Schiavi y Muñoz, 2006-07, p. 68)

Solución:

a) Las condiciones de contorno están bien puestas pues son del tipo (2) para los valores paramétricos $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = -1$ y se tiene las funciones: $\beta_0(t) \cong 0$, $\beta_1(t) \cong 2$. A su vez, se tiene que:

$$b = \int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot dx = \lim_{h \to -\infty} \int_{h}^{0} e^{x} \cdot dx = \lim_{h \to -\infty} (1 - e^{h}) = 1.$$

Los autovalores (o velocidades características) del sistema son:

$$\lambda_1 = a + b = 1, \qquad \lambda_2 = a - b = -1.$$

Escribimos el sistema en la forma:

$$\begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}_x = 0,$$

donde las ecuaciones se tienen que verificar para: $0 \leq x \leq 1$ y $t \geq 0$. Introduciendo, como antes, las componentes $w^1 = ½(u^1 + u^2)$ y también: $w^2 = ½(u^1 - u^2)$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_x = 0,$$

y nos hemos reconducido a resolver los dos PVI para las componentes (w^1, w^2), esto es:

$$\begin{cases} w_t^1 + w_x^1 = 0 \\ w^1(x,0) = \dfrac{1}{2}(u_0^1(x) + u_0^2(x)) = \dfrac{1}{2}(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_t^2 - w_x^2 = 0 \\ w^2(x,0) = \dfrac{1}{2}(u_0^1(x) - u_0^2(x)) = \dfrac{1}{2}(x-1) \end{cases}$$

donde las condiciones de contorno se deducen a partir de los datos del problema. La solución es, por tanto:

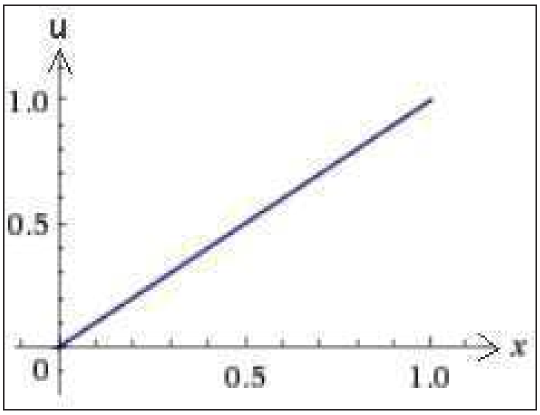
$$w^1(x,t) = w_0^1(x - t) = \tfrac{1}{2}(x - t + 1)\,, \qquad w^2(x,t) = w_0^2(x + t) = \tfrac{1}{2}(x + t - 1).$$

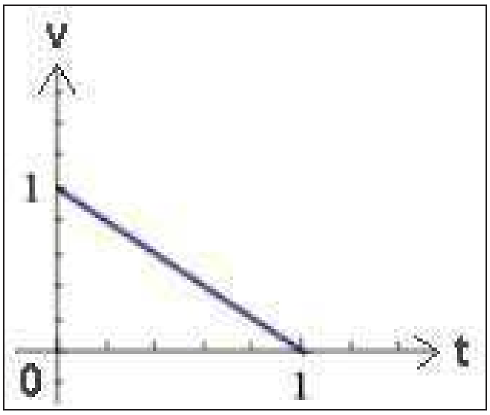
En términos de las componentes originales [u(x, t), v(x, t)] se tiene que:

$$\begin{cases} u(x, t) = w^1 + w^2 = w_0^1(x - t) + w_0^2(x + t) = x \\ v(x, t) = w^1 - w^2 = w_0^1(x - t) - w_0^2(x + t) = 1 - t \end{cases}$$

Se comprueba directamente que las condiciones de contorno para la componente u^1 en las fronteras laterales están satisfechas.

b) Las representaciones gráficas correspondientes, rectas en ambos casos, son las siguientes:





y los resultados netos (después de impuestos), serán:

$$\begin{cases} u = \dfrac{3x}{4} = \dfrac{3 \times 0'95}{4} = 0'7125 \cong 712.500\ € \\ v = \dfrac{3(1-t)}{4} = \dfrac{3(1-0'15)}{4} = 0'6375 \cong 637.500\ € \end{cases}$$

Obsérvese que los resultados de la primera empresa sólo dependen del volumen de ventas (son crecientes e independientes del tiempo), mientras que los de la segunda empresa son sólo dependientes del tiempo y decrecientes, anulándose a partir de los 100 años de actividad económica.

CAPÍTULO 9

COMPLEMENTOS

1. SERIES DE FOURIER

1.1. FUNCIONES PERIÓDICAS

En diversos problemas se presenta el estudio de los llamados "fenómenos periódicos", esto es, aquellos fenómenos cuya cuantificación produce series de valores que se repiten a intervalos iguales de tiempo, lo que sucede frecuentemente en Economía. La representación de estos fenómenos viene definida por las denominadas *funciones periódicas* que son aquellas funciones que para todo valor de x, verifican:

$$f(x + p) = f(x),$$

donde *p* es una constante, llamada *período*. Es evidente, de la definición anterior, que:

$$f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = \ldots = f(x + np), \forall x,$$

o sea, todo múltiplo de *p* es también un período. El menor número positivo que sea período de una función, recibe el nombre de *período propio o fundamental* de la referida función y cuando no se indique lo contrario, será al que denominaremos simplemente "período".

En nuestro anterior libro titulado "Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes" aparecían diversos ejemplos de este tipo de funciones periódicas o trigonométricas.

La función y = sin x es tal que cumple (véase el ejercicio 19, pág. 492 del texto citado):

$$\sin x = \sin (x + 2\pi) = \sin (x + 4\pi) = \ldots$$

es una función que admite como períodos a 2π, 4π, 6π.

El valor 2π = 6'2832, es el "período propio" o simplemente "período".

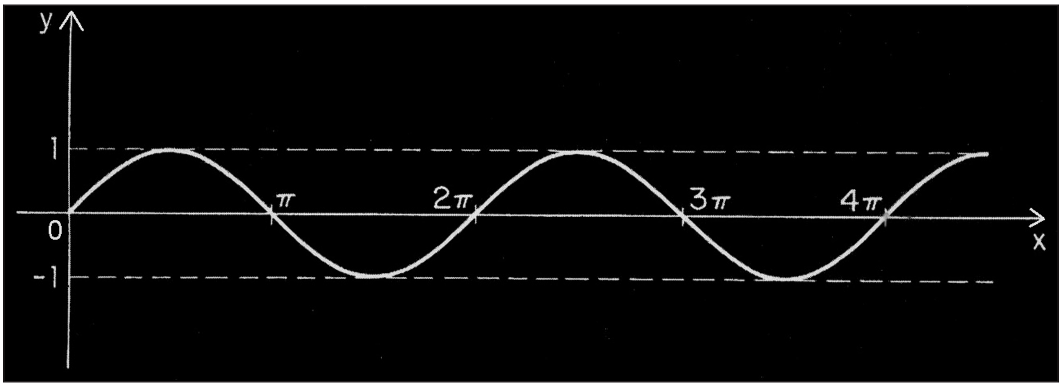


Fig. 1. Función y = sin x (I).

Que también puede representarse así:

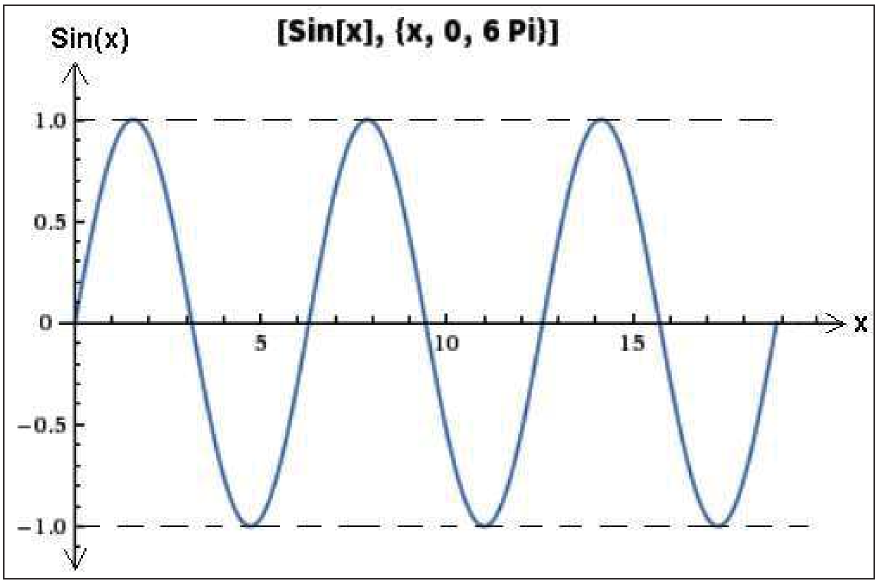


Fig. 2. Función y = sin x (II).

También es de período 2π la función y = cos x (ejercicio 23, pág. 428 del texto citado); por tanto, toda función de la forma:

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x,$$

también será periódica, de período 2π. Otras funciones estudiadas en nuestra anterior publicación, que tienen como período 2π son, entre otras, las siguientes:

- $\cos t - 8 \sin t$ y $2 \cos t - 3 \sin t$ (ej. 1, pág. 578).
- $\sin x \left(1 - \frac{x}{2}\right)$ (ej. 2, pág. 431).
- $\frac{1}{4} - \frac{\cos t}{3} + \frac{25}{12} \times \cos 2t$ (ej. 9, pág. 456).

La función y = sin nx, también es periódica; su período p, se puede calcular como sigue:

$$\sin nx = \sin n(x + p),$$

y como el seno tiene como período 2π, $nx + 2\pi = nx + np$, de donde:

$$p = \frac{2\pi}{n}.$$

Las representaciones gráficas correspondientes para $n \in (1,2,3)$, serán:

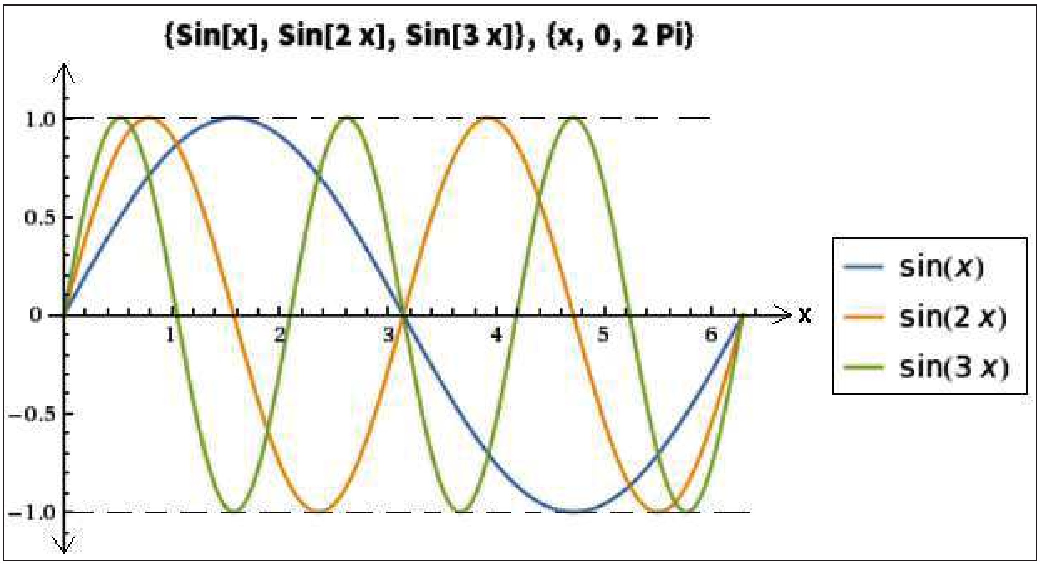


Fig. 3. Funciones y = sin x, sin 2x, sin 3x.

Análogamente, toda función de la forma b·sin (nx + k) o a·cos (nx + k), es también –como fácilmente se comprueba- una función periódica de período $2\pi/n$. Todas las funciones indicadas reciben el nombre genérico de *armónicos*. Es muy importante observar que todo armónico de período *p*, se puede, mediante un adecuado cambio variable, transformar en un armónico de período 2π y viceversa. En efecto, sea la función: y = sin nx de período $p = \frac{2\pi}{n}$, de donde: $n = \frac{2\pi}{p}$. Haciendo nx = t, resulta: $\frac{2\pi x}{p} = t$, o bien: $x = \frac{pt}{2\pi}$, que transforma sin nx en sin t, de período, evidentemente 2π.

En lo que sigue, para mayor sencillez de las deducciones y salvo indicación expresa en sentido contrario, supondremos que todas las funciones tienen período 2π, lo cual siempre se puede conseguir, teniendo en cuenta el párrafo anterior. En nuestra publicación anteriormente mencionada, no obstante, se estudian algunas funciones trigonométricas en que p = π, como las siguientes, en las que se cita su ubicación en el texto:

- sin 2x (ej. 21, pág. 496).
- sin (2x) – 1 (ej. 20, pág. 494)
- $\cos(2t)\left(1-\frac{5t}{4}\right)$ (ej. 6, pág. 269)

1.2. FÓRMULAS DE EULER

Formemos ahora una suma de armónicos de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad [I]$$

y admitiendo que dicha suma defina una función f(x), o sea, que la serie sea convergente y que dicha función sea continua en [0,2π], vamos a encontrar las relaciones existentes entre la función y los a_i y los b_i.

Integrando en los dos miembros de la expresión anterior entre 0 y 2π, se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} \sin nx\,dx .$$

Observando que: $\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} = 0$, y análogamente: $\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx = -\left.\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} = 0$, resulta: $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot\int_0^{2\pi} dx = \pi \cdot a_0$,

$$\text{de donde: } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx . \qquad [II]$$

Multiplicando los dos miembros de [I] por cos mx e integrando entre 0 y 2π, se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \cos mx\,dx +$$
$$+ a_n \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\,dx + b_n \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\,dx .$$

Para m $\neq$ n, las integrales del segundo miembro se reducen a:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n+m)\, x \, dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)\, x \, dx = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n+m)x \, dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n-m)x \, dx = 0 \end{cases}$$

y para m = n, resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \cdot \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{2\pi} = \pi. \\ &\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2nx \, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2nx}{2n}\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}}$$

Por tanto, se obtiene: $\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_n \pi$, de donde se deduce que (pues m = n):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx . \quad [III]$$

Finalmente, multiplicando ambos miembros de [I] por ser mx y procediendo de modo análogo, se obtiene:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx . \quad [IV]$$

El conjunto de las fórmulas [II], [III] y [IV] recibe el nombre de *fórmulas de Euler*, que resuelven el problema de determinar los coeficientes de los armónicos que figuran en la serie [I]. Un desarrollo en serie de tal tipo se conoce con la denominación de "desarrollo en serie de Fourier[1]", que veremos en el siguiente apartado.

1.3. DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

En el estudio de algunos problemas económicos que conducen a EDP se necesitan series trigonométricas como las estudiadas en el expositivo anterior. Una importante ventaja de estas series es que son capaces de representar funciones económicas muy generales, con muchas discontinuidades, del tipo de las funciones discontinuas de

[1] J. Fourier (1765-1830), matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor. La transformada de Fourier recibe su nombre en su honor Las series e integrales de Fourier constituyen un tema clásico del análisis matemático. Desde su aparición en el siglo XVIII en el estudio de las vibraciones de una cuerda, las series de Fourier han sido una piedra de toque para el desarrollo de los conceptos básicos del análisis –función, integral, serie, convergencia...–, y la evolución de estos conceptos ha ido abriendo, a su vez, nuevos rumbos en el análisis de Fourier.

"impulso", mientras que las series de potencias sólo pueden representar funciones continuas con derivadas de todo orden.

Aparte del gran valor práctico que atribuimos de las series trigonométricas a la hora de resolver ciertos problemas de la Economía, su faceta puramente teórica ha influido profundamente en el desarrollo general del análisis matemático durante los últimos 250 años. En concreto, proporcionó la principal fuerza impulsora en la evolución del concepto de función, que en sus diversas ramificaciones es, sin duda, central en matemáticas; condujo a Riemann[2] y Lebesgue[3] a crear sus cada vez más potentes teorías de integración, y a Cantor[4] su teoría de conjuntos, empujó a Weierstrass hacia su estudio critico del sistema de los números reales y de las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de funciones; y sugirió el contexto en el que la idea geométrica de ortogonalidad (perpendicularidad) logró desarrollarse como una de las nociones con mayor poder unificador del análisis moderno.

Muchas ecuaciones de las ciencias económicas se formulan con derivadas parciales, como queda ejemplificado en el presente libro, y se resuelven, en ocasiones, descomponiendo la incógnita en series (sumas infinitas). Las series más interesantes son las de potencias y por supuesto las de Fourier. Dado el carácter periódico de tales sumas, las series de Fourier se aplican, por ejemplo, donde surgen procesos oscilantes, como ocurre en las series temporales de naturaleza económica. Los problemas teóricos relacionados con la convergencia de las series de Fourier han impulsado avances fundamentales en distintos ámbitos de las matemáticas y siguen siendo considerados hoy como problemas muy difíciles de resolver. Tal vez una de las propiedades más importantes de las series de Fourier y, en particular, de las integrales de

---

[2] B. Riemann (1826-1866), matemático alemán. Realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la hipótesis de Riemann, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

[3] Matemático francés (1875-1941), que introdujo la *integral de Lebesgue* y que, junto con Borel, construyó la *teoría moderna de funciones de variable real*. A partir de los resultados de Borel y Jordan, en 1901 Lebesgue formuló la *teoría de la medida* y un año después, en su tesis presentada en Nancy "Intégrale, longueur, aire", introdujo una nueva herramienta que supuso un avance muy importante en el análisis moderno y especialmente en el análisis de Fourier*: la integral de Lebesgue*, que generalizaría el concepto de *integral de Riemann* y solucionaría las inconsistencias que ésta poseía. Además, Lebesgue contribuyó de manera decisiva en la *teoría de potenciales* y son también destacables sus aportaciones en topología.

[4] Georg Cantor (1845-1918) fue un matemático nacido en Rusia, aunque de ascendencia alemana y judía. Fue inventor, junto con con Dedekind y Frege, de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de *formalizar* la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales).

Fourier se presenta en la solución de ecuaciones diferenciales, ya que transforman operadores diferenciales con coeficientes constantes en multiplicación por polinomios, de más sencilla resolución.

Las series de Fourier resultan de gran importancia en el estudio de los ciclos económicos. La idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica de periodo *p* puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo periodo *p*.

Entendemos por "variaciones cíclicas" las variaciones regulares que se producen en las series temporales con periodo superior a un año. De hecho una serie temporal puede estar originada por diversos ciclos: un ciclo de medio plazo, otro ciclo de largo plazo, etc. Un ciclo económico tiene dos componentes básicos: la *amplitud* o la distancia que media entre el cero y el máximo valor que alcanza el ciclo, y el *periodo* o el tiempo que tarda en ocurrir un ciclo completo. En teoría, cabe entender una serie temporal como una suma de un número indeterminado de ciclos de amplitud y período diferentes, y puede demostrarse que la varianza que muestra en el tiempo una serie temporal se obtiene a partir de la suma de las amplitudes de los diferentes ciclos en que se descompone la serie temporal (relación de Parseval[5]).

El problema del análisis armónico, que interesa al estudioso de las funciones económicas, consiste en que, dada *a priori* la función periódica f(x), se trata de hallar una serie de Fourier que la represente. En el apartado anterior se ha supuesto que la serie formada definía una función continua, o al menos integrable en $[0, 2\pi]$. El problema inverso será el siguiente: dada f(x), ¿qué condiciones debe cumplir tal función para que su desarrollo de Fourier, mediante las fórmulas de Euler, represente dicha función?

Este problema, de gran dificultad, fue resuelto por Dirichlet que demostró que toda función continua o con número finito de discontinuidades no evitables de primera especie[6] en $[0, 2\pi]$ y con

---

[5] La **Relación de Parseval** demuestra que la Transformada de Fourier es unitaria; es decir, que la suma (o la integral) del cuadrado de una función es igual a la suma (o a la integral) del cuadrado de su transformada. Esta relación procede de un teorema del año 1799 sobre series, cuyo creador fue Marc Antoine Parseval y que se aplicó más tarde a las Series de Fourier. Aunque la Relación de Parseval se suele usar para indicar la unicidad de cualquier transformada de Fourier, la forma generalizada de este teorema es la denominada "Relación de Plancherel".

[6] Recordemos que una función presenta "discontinuidad evitable" en un cierto punto **a**, si tiene límite en el punto, pero la función en ese punto tiene un valor distinto o no existe. Por el contrario, se dice que una función presenta una "discontinuidad esencial o inevitable" cuando se produce algunas de las siguientes situaciones:

- *Discontinuidad de primera especie*: si los límites laterales (por la derecha y por la izquierda) son distintos (de tipo finito o infinito), o al menos uno de ellos diverge.

número finito de extremos relativos en dicho intervalo, admite desarrollo en serie de Fourier, tal que en todo punto x = a, donde la función sea continua, la suma de la serie es igual a f(a) y para todo punto x = b donde la función es discontinua, la suma de la serie es igual a la semisuma de los límites a derecha e izquierda del punto x = b.

A continuación, se desarrollan varios ejemplos para mejor comprensión de la teoría expuesta. Aconsejamos al amable lector/a que desarrolle todos los cálculos, que intencionadamente no se han incluido, pues resultarán, sin duda, un provechoso repaso de cálculo integral.

Veamos, por último, que para evitar confusiones al aplicar las fórmulas anteriores cuando el período de la función no es 2, deberá tenerse en cuenta que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \,,$$

donde $\omega = 2\pi/p$, para un período *p* cualquiera.

1.4. EJEMPLOS

Ejemplo 1º:

Desarrollar en serie de Fourier la función económica: $f(x) = x^2$, en:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} < x < 2\pi \,.$$

Solución:

En primer lugar, habrá que resolver el extremo inferior del intervalo de definición de la función. Para ello, veamos que:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[2 \cdot \lim_{b\to\infty} \text{arc tg}\, x\right]_0^b = \pi$, y también realizando sucesivos

cambios de variable, se obtiene:

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \int_{1/2}^{\infty} \frac{dy}{y\sqrt{2y-1}} = \int_0^{\infty} \frac{2dt}{1+t^2} = \left[2 \cdot \text{arc tg}\, t\right]_0^{\infty} = \pi$. De este modo, el

- *Discontinuidad de segunda especie*: si la función, al menos en uno de los lados del punto, no existe o no tiene límite.

intervalo de existencia de la variable independiente quedará definido así: $0 < x < 2\pi$. Aplicando las fórmulas de Euler, se tiene que:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 dx = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{8\pi^2}{3} \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{2x\cos nx}{n^2} + \dfrac{(n^2x^2-2)\sin nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{4}{n^2} \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{2x\sin nx}{n^2} - \dfrac{(n^2x^2-2)\cos nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = -\dfrac{4\pi}{n} \end{cases}$$

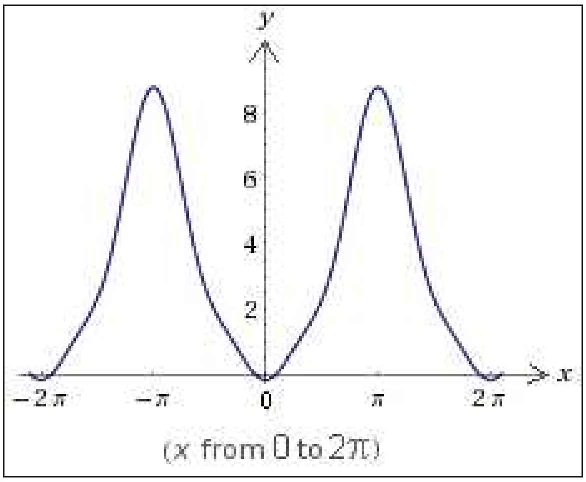
Por lo tanto, el desarrollo pedido será:

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right),$$

que hasta el orden 3 resulta ser:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x\,,$$

con la siguiente representación gráfica:



Las sucesivas sumas parciales son:

$$y = \frac{\pi^2}{3},\quad y = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x,\quad y = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x, \ldots$$

A veces, resulta conveniente, debido a las características de la función a desarrollar, tomar el intervalo $[-\pi, \pi]$ en vez del $[0, 2\pi]$; las fórmulas no sufren variación, bastando con cambiar los límites de integración.

Ejemplo 2º:

Desarrollar en serie de Fourier la función económica siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2\int_0^1 \int_x^1 (x+y)dx \cdot dy, & \text{para } 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Solución:

Habrá que comenzar resolviendo el valor de la función en el 2º intervalo de definición. Esto es:

$$2\int_0^1 \int_x^1 (x+y)dx \cdot dy = 2\int_0^1 \left[\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\right]_{y=x}^{y=1} \cdot dx = 2\int_0^1 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)\right] \cdot dx = \frac{2}{2} = 1.$$

Aplicando las fórmulas de Euler, resulta:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2dx + \int_0^{\pi} 1dx\right] = 2 + 1 = 3 \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2\cos nx\, dx + \int_0^{\pi} \cos nx\, dx\right] = 0 \\ b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2\sin nx\, dx + \int_0^{\pi} \cos nx\, dx\right] = \frac{(-1)^{\pi} - 1}{n\pi} \end{cases}$$

o sea: $b_1 = -\frac{2}{\pi}$; $b_2 = 0$; $b_3 = \frac{-2}{3\pi}$; $b_4 = 0\ldots$;

de donde: $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{2} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$.

Las sucesivas sumas parciales son:

$$y = \frac{3}{2},\quad y = \frac{3}{2} - \frac{2\sin x}{\pi},\quad y = \frac{3}{2} - \frac{2\sin x}{\pi} - \frac{\sin 3x}{\pi}, \ldots$$

En ciertas ocasiones, resulta que la misma forma de la función simplifica el desarrollo, como en el ejemplo anterior.

Así, por ejemplo, para las funciones impares, esto es, para las funciones tales que: f(-x) = -f(x), todos los a_i son nulos, quedando el desarrollo reducido a una serie de senos.

Ejemplo 3º:

Desarrollar en serie de Fourier, en: $-\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \leq x \leq \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$, la función económica f(x) = x.

Solución:

Los extremos del intervalo de definición vendrán dados por (aplicando el concepto de las funciones β y Γ de Euler[7]):

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{(1+x)}dx = \beta(1/2,1/2) = \frac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \pi \text{, luego: } -\pi < x < \pi \text{ .}$$

Nos bastará calcular únicamente los b_i, pues se trata de una función impar. Así:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = (-1)^{n-1}\frac{2}{n} \text{ .}$$

Luego la serie quedará establecida del siguiente modo:

$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right] \text{ ,}$$

que hasta el orden 3 resulta ser:

$$f(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x = 2\sin x(1-\cos x) + \frac{2\sin 3x}{3} \text{ .}$$

Las sucesivas sumas parciales son:

$$y = 2\sin x, \quad y = 2\sin x - \sin 2x, \quad y = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x, \ldots$$

Debe tenerse en cuenta que una función "par", esto es, una función tal que f(-x) = f(x), carece de término en seno.

[7] Estas funciones especiales fueron estudiadas, originalmente, por Euler y Legendre. No obstante, su nombre les fue dado por Jacques Binet. De hecho, la función gamma extiende el concepto de factorial a cualquier valor complejo de *z*. La función gamma aparece en varias funciones de distribución de probabilidad, por lo que es bastante usada tanto en la teoría de la probabilidad y estadística como en combinatoria.

Ejemplo 4º:

Sea desarrollar en serie de Fourier la función económica siguiente: $f(x) = |x|$, en: $-\pi < x < \iiint_A dx \cdot dy \cdot dz + \frac{32}{9}$, siendo el dominio de integración:

$$A = \{(x,y,z) / 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2}\ ,\ 0 \leq z \leq 1-\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

Solución:

El extremo superior del intervalo de definición de *x* será, resolviendo la integral triple mediante cambios sucesivos a coordenadas cilíndricas y polares, el siguiente:

$$\iiint_A dx \cdot dy \cdot dz + \frac{32}{9} = \int_0^2 \left[\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dy \right] dx + \frac{32}{9} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos\theta} \left(\int_0^{1-\rho} dz \right) \rho \cdot d\rho \right] d\theta + \frac{32}{9} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} (1-\rho) \cdot \rho \cdot d\rho \right) d\theta + \frac{32}{9} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2\cos^2\theta - \frac{8\cos^3\theta}{3} \right) d\theta + \frac{32}{9} = \pi - \frac{32}{9} + \frac{32}{9} = \pi .$$

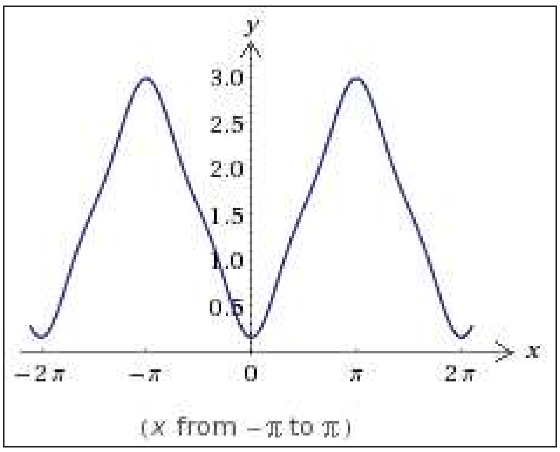
Entonces, dicho intervalo queda configurado así: $-\pi < x < \pi$.

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} |-x|\, dx + \int_0^{\pi} x\, dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} \right] = \pi \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} \left[(-1)^n - 1 \right] \end{cases}$$

o sea, $a_n = 0$ para *n* par y $a_n = -\frac{4}{\pi \cdot n^2}$ para *n* impar. Por tanto, se tiene:

$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots \right)$, que hasta el orden 3 resulta ser:

$\frac{9\pi^2 - 72\cos x - 8\cos 3x}{18\pi}$, con la siguiente representación gráfica:



Las sucesivas sumas parciales son:

$$y=\frac{\pi}{2},\quad y=\frac{\pi}{2}-\frac{4\cos x}{\pi},\quad y=\frac{\pi}{2}-\frac{4\cos x}{\pi}-\frac{4\cos 3x}{9\pi},...$$

Ejemplo 5º:

Desarrollar en serie Fourier en -π < x < π, la función económica:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{para} \quad 0<x<2\iiint_A z\cdot dx\cdot dy\cdot dz \\ -x^2 & \text{para} \quad -\pi<x<0 \end{cases}$$

siendo el dominio de integración el cilindro:

$$A=\{(x,y,z)/-1\le x\le 1,-\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2},0\le z\le 1\}.$$

Solución:

El extremo superior del intervalo de definición que contiene una integral triple debe resolverse por los procedimientos habituales, o sea:

$$2\iiint_A z\cdot dx\cdot dy\cdot dz=2\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^1 z\cdot dz\right)dy\right]dx=2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{2}\right)dx=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\cdot d\theta=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=2\times\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Por tratarse de una función impar, sólo tendrá términos en senos; por tanto:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-x^2\sin x\right)dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[2x\sin x-(x^2-2)\cos x\right]_0^{\pi}=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{n}+\frac{4}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right].$$

Luego hasta el orden 3, se tendrá:

$$f(x)=\sin x\left(2\pi-\frac{8}{\pi}\right)-\pi\sin 2x+\sin 3x\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{27\pi}\right).$$

Ejemplo 6º:

Desarrollar en serie Fourier la función económica siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{para} \quad 0<x<1 \\ -x & \text{para} \quad \iint_A (x+y-2)dx\cdot dy < x < 0 \end{cases},$$

siendo el dominio de integración doble el rectángulo: $A=\{(x,y)\,/\,0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

Solución:

El extremo inferior del intervalo de definición que contiene una integral doble debe resolverse por los procedimientos habituales, o sea:

$$\iint_A (x+y-2)dx\cdot dy=\int_0^2\left[\int_0^1 (x+y-2)dx\right]dy=\int_0^2\left[\left(\frac{x^2}{2}+xy-2x\right)\right]_0^1 dy=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{1}{2}+y-2\right)dy=\left[\frac{y^2}{2}-\frac{3y}{2}\right]_0^2=2-3=-1.$$

Como la función tiene período 2, se empezará efectuando el cambio de variable: $x=\frac{2t}{2\pi}=\frac{t}{\pi}$, para convertir el período en 2.

Por tanto la función será: $f(t)=\begin{cases} \frac{t}{\pi} & \text{para} \quad 0<t<\pi \\ -\frac{t}{\pi} & \text{para} \quad -\pi<t<0 \end{cases}$

Por otra parte, por ser par la función sólo tendrá términos en coseno, luego:

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t}{\pi}dt=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=1 \\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt=\begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ par} \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2} \text{ si } n \text{ impar} \end{cases} \end{cases}$$

y deshaciendo el cambio, resulta:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left[\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\ldots\right].$$

Las sucesivas sumas parciales son:

$$y=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{2}-\frac{4\cos\pi x}{\pi^2},\quad y=\frac{1}{2}-\frac{4\cos\pi x}{\pi^2}-\frac{4\cos 3\pi x}{9\pi^2},\ldots$$

Ejemplo 7º:

Desarrollar en serie Fourier la función económica siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} -\int_{-\infty}^{0} e^x \cdot dx & \text{para} \quad -2<x<0 \\ +1 & \text{para} \quad 0<x<2 \end{cases}$$

Solución:

La integral (convergente) que define el valor de la función económica en el primer intervalo de existencia, ofrece:

$$f(x)=-\int_{-\infty}^{0} e^x \cdot dx=-\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x \cdot dx=-\lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0=-1.$$

Esta función periódica cumple las condiciones suficientes del teorema de Dirichlet, y como es impar, bastará con calcular:

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 \sin\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}dx=\left[-\frac{2}{n\cdot\pi}\cos\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\right]_0^2=\frac{2(1-\cos n\cdot\pi)}{n\cdot\pi}$$, de donde:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right).$$

Las sucesivas sumas parciales son:

$$y=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2},\quad y=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2},\quad y=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{4}{5\pi}\sin\frac{5\pi x}{2},\ldots$$

Ejemplo 8º:

Hallar la serie de Fourier de la función económica definida por:

$$\begin{cases} f(x)=\iint_A (x-y)dx\cdot dy\,, & \text{para } -\pi\le x<0\,; \\ f(x)=\dfrac{2\pi+1}{2}-\int_0^{\pi/4}\cos 2x\cdot dx\,, & \text{para } 0\le x\le\pi\,. \end{cases}$$

siendo el dominio de integración: $A=\{(x,y)/0\le x\le 1, x^2\le y\le\sqrt{x}\}$.

(adaptado de Simmons. G.F., Madrid, 1998, p. 259).

Solución:

El valor de la función en el primer dominio de definición, será:

$$f(x)=\iint_A (x-y)dx\cdot dy=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x-y)dy\right]dx=\int_0^1\left[\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}=$$

$$=\int_0^1\left(x^{3/2}-\frac{x}{2}-x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=0\,.$$

El valor de la función en el segundo intervalo de definición, será:

$$f(x)=\frac{2\pi+1}{2}-\int_0^{\pi/4}\cos 2x\cdot dx=\frac{2\pi+1}{2}-\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4}=\pi+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\pi\,.$$

Tenemos, entonces:

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_0^{\pi}\pi dx\right]=\pi; \\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\cos nxdx=\left[\dfrac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}=0,\forall n\geq 1; \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\sin nxdx=\left[-\dfrac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}=\dfrac{1}{n}(1-\cos n\pi)=\dfrac{1}{n}[1-(-1)^n]. \end{cases}$$

Como el n-ésimo número par es 2n y el n-ésimo número impar es 2n – 1, la última de esas fórmulas nos dice que:

$$b_{2n}=0,\ \ b_{2n-1}=\frac{2}{2n-1}\,.$$

Substituyendo en la expresión:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,,$$

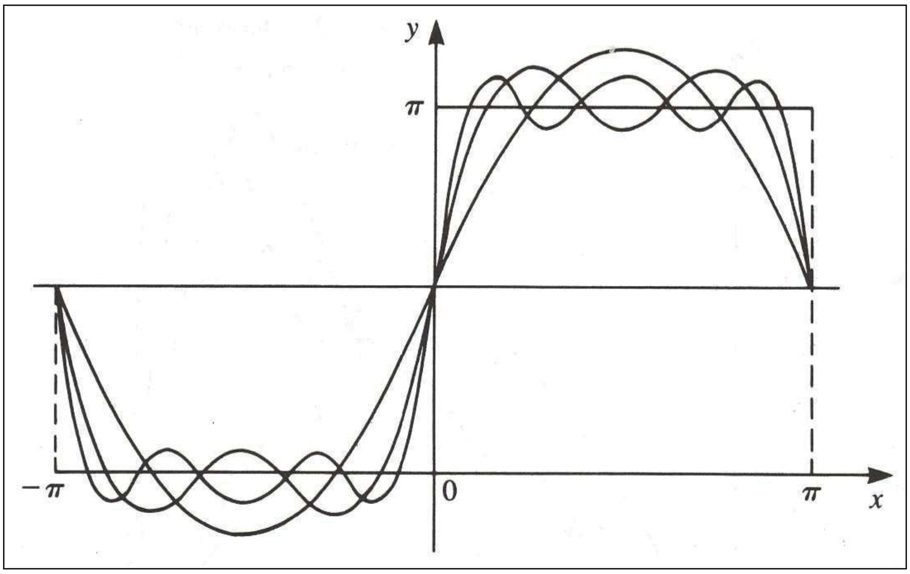
obtenemos la requerida serie de Fourier, a saber:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+2\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right).$$

Las sucesivas sumas parciales son:

$$y=\frac{\pi}{2},\ \ y=\frac{\pi}{2}+2\sin x,\ \ y=\frac{\pi}{2}+2\sin x+\frac{2}{3}\sin 3x,\ldots$$

La correspondiente representación gráfica será:



Ejemplo 9º:

Hallar la serie de Fourier de la función económica definida por:

$$\begin{cases} f(x) = -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot dx, & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 ; \\ f(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot dx, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi . \end{cases}$$

(adaptado de Simmons G.F., Madrid, 1998, p. 260).

Solución:

Los valores que adopta la función vienen determinados por la integral (que resolveremos mediante el cambio de variable: $x = \sin \theta$, de donde: $dx = \cos \theta \cdot d\theta$):

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} .$$

Ésta es la función del ejemplo anterior a la que se ha restado la constante $\pi/2$; en consecuencia, su serie de Fourier se puede obtener restando simplemente $\pi/2$ de aquella serie, lo que lleva a:

$$f(x) = 2\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ... \right).$$

Las sucesivas sumas parciales son:

$$y = 2\sin x,\quad y = 2\sin x + \frac{2}{3}\sin 3x,\quad y = 2\sin x + \frac{2\sin 3x}{3} + \frac{2\sin 5x}{5},\ldots$$

El gráfico de su suma es simplemente la onda cuadrada de la Figura 4 descendida hasta ser simétrica respecto del eje Ox, tal como muestra la Figura 5.

La correspondiente representación gráfica será:

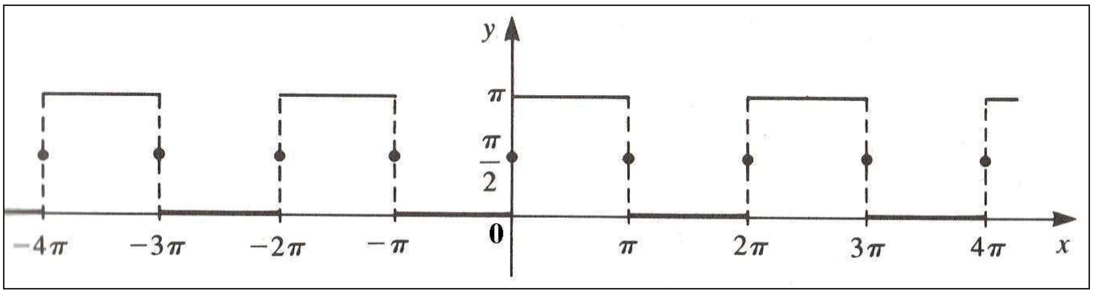


Fig. 4. Onda cuadrada.

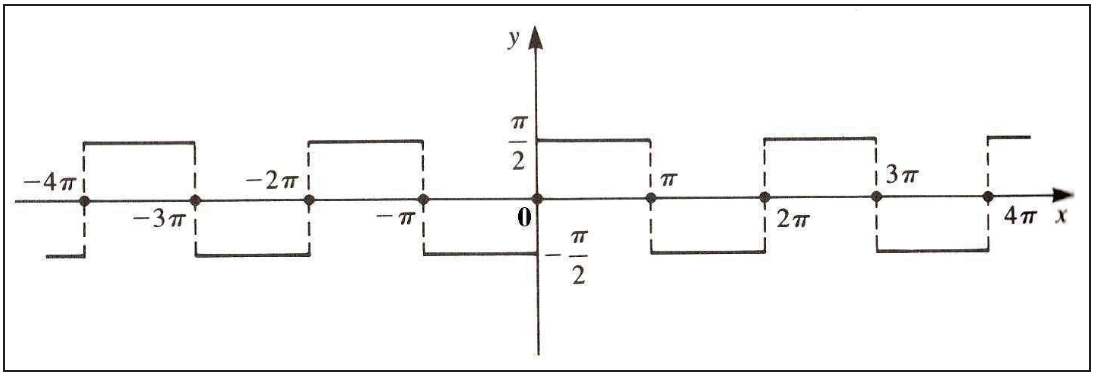


Fig. 5. Onda cuadrada descendida π/2.

Ejemplo 10º:

Hallar la serie de Fourier de la función económica definida por:

$$\begin{cases} f(x) = -\Phi - \frac{1}{2}x, & -\pi \le x < 0\ ; \\ f(x) = \Phi - \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le \pi\ . \end{cases}$$

donde Φ es el flujo del vector $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sobre la cara exterior de la superficie $x^2 + y^2 = z$ comprendida entre z = 0 y z = 1.

(adaptado de Simmons G.F., Madrid, 1998, p. 261).

Solución:

Cerrando la superficie del paraboloide, tendremos, aplicando el conocido teorema de Gauss[8]:

$$\Phi_T = \iint_\sigma \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{V} \cdot dv \text{, siendo:}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = V'_x + V'_y + V'_z = 1 + 1 + 1 = 3 \text{. Luego:}$$

$$\Phi_T = 3\iiint dx\, dy\, dz = 3\int_0^1 dz \iint dx\, dy = 3\int_0^1 \pi\, z\, dx = 3\pi \left.\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2},$$

ya que: $\iint dx\, dy = \pi\left(x^2 + y^2\right) = \pi\, z$. El flujo que atraviesa a σ_1 es:

$$\Phi_1 = \iint_{\sigma_1} X\, dx\, dz + Y\, dx\, dz + Z\, dx\, dy \text{, como } \sigma_1 \equiv z = 1.$$

$$\Phi_1 = \iint_{\sigma_1} Z\, dx\, dy = \iint_{\sigma_1} z\, dx\, dy = \iint_R dx\, dy = \pi .$$

Luego: $\Phi = \Phi_T - \Phi_1 = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$, con lo que quedará definida la función f(x) en los dos subintervalos dados.

Por otra parte, obsérvese que ésta es la función del ejemplo anterior menos un medio de la función del Ejemplo 3º. De modo que la serie de Fourier se puede deducir restando término a término un medio de una serie a la otra, esto es:

$$f(x) = 2\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right) - \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right) =$$

$$= \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Las sucesivas sumas parciales son:

$$y = \sin x, \quad y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}, \quad y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}, \ldots$$

La correspondiente representación gráfica será:

[8] Junto a Arquímedes y Newton, Gauss (1777-1855), matemático, físico, astrónomo y geodesta alemán es, sin duda, uno de los tres grandes genios de la historia de las Matemáticas. Sus aportaciones en todos los campos matemáticos fueron increíbles, aunque algunos de sus descubrimientos tuvieran que esperar más de un siglo para ser valorados debidamente. Cualquier gran descubrimiento matemático, a lo largo de este siglo, encuentra detrás la alargada sombra de Gauss. Sólo en Francia otra figura es capaz de hacerle sombra, Cauchy, dando paso, o mejor obstaculizando, a dos jóvenes genios: Abel y Galois.

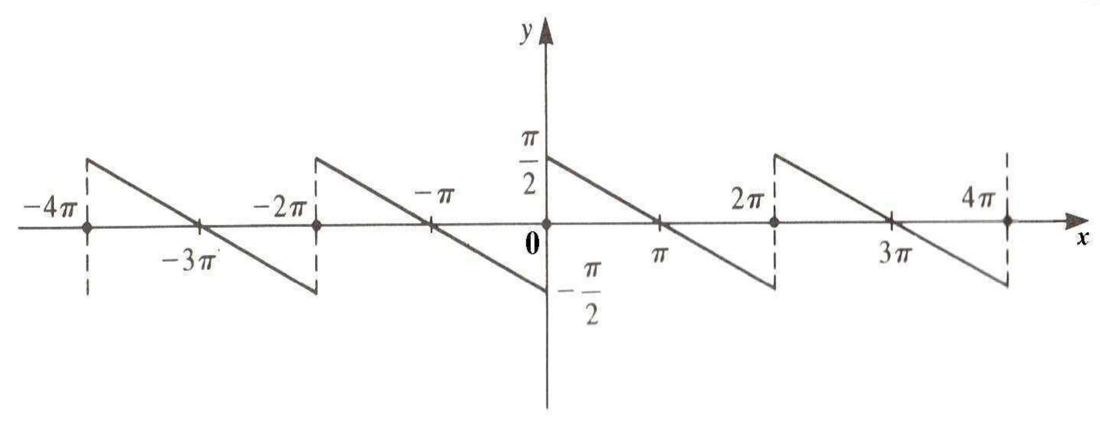


Fig. 6. Onda en diente de sierra.

Ejemplo 11º:

Hallar la serie de Fourier de la función periódica definida por:

$$\begin{cases} f(x) = \iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy \ , \text{ si } \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx \leq x < 0 \ ; \\ f(x) = x, \text{ si } \ 0 \leq x < \pi \ . \end{cases}$$

donde el dominio de integración A está definido por la intersección de dos círculos, a saber: $A = \{(x,y) / [x^2 + y^2 \leq 1] \cap [(x - 1)^2 + y^2 \leq 1]\}$.

(adaptado de Simmons G.F., Madrid, 1998, p. 268).

Solución:

El extremo inferior del primer subintervalo dado, será:

$\int_0^{\infty} x^{-2} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma(p)$ siendo p tal que $2p - 1 = -2 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}$; entonces:

$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$. Por la fórmula: $\Gamma(S+1) = S \cdot \Gamma(S)$. Pero:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right); \ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \text{ , luego:}$$

$$\int_0^{\infty} x^{-2} e^{-x^2} dx = -\left(\frac{1}{2}\right) 2\sqrt{\pi} = -\pi \ .$$

Además, el dominio de integración A se puede representar en la figura siguiente:

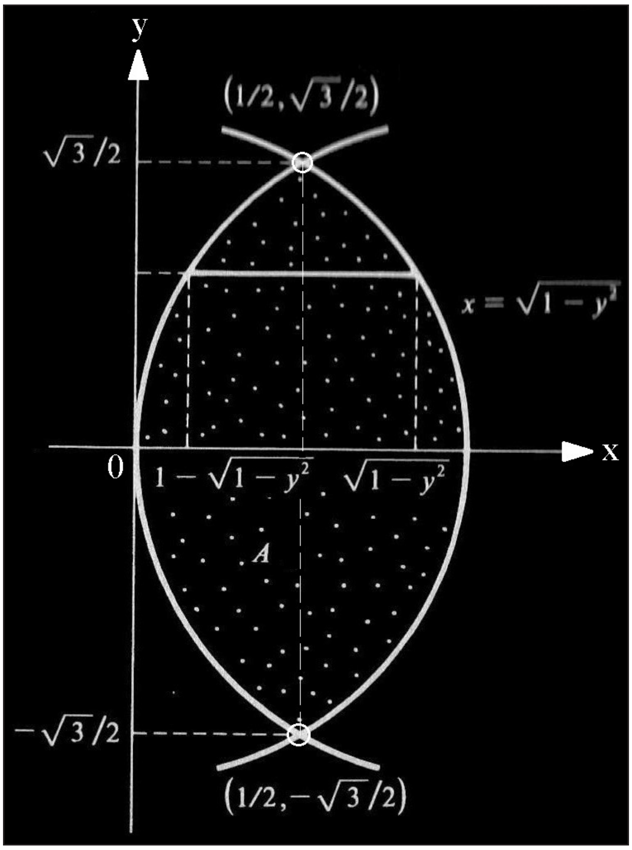


Fig. 7. Dominio de integración A.

Entonces, se tendrá que:

$$f(x)=\iint_A x\cdot y\cdot dx\cdot dy=\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\cdot y\cdot dx\right)dy=\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\left[y\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\cdot dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} y\left[(1-y^2)-(1-\sqrt{1-y^2})^2\right]dy=-\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}+\frac{2}{3}(1-y^2)^{3/2}\right]_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}=0.$$

En primer lugar, se tendrá que:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot dx=\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

Para $n \geq 1$, integrando por partes se obtiene:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin x}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n-1],$$

luego: $a_{2n} = 0$ y $a_{2n-1} = -\dfrac{2}{\pi(2n-1)}$. Análogamente:

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Por tanto, la serie de Fourier requerida es:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

La correspondiente representación gráfica será:

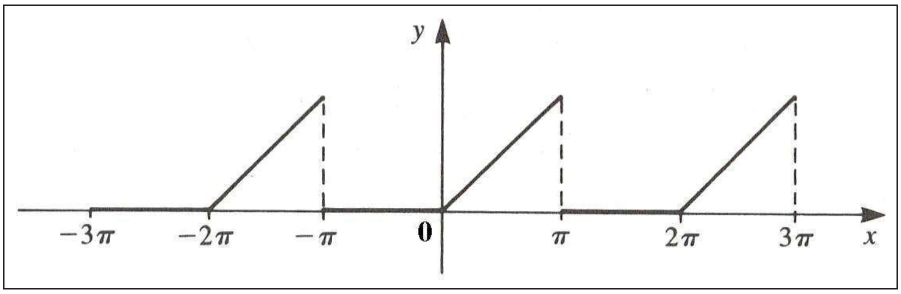


Fig. 8. Onda triangular.

Ejemplo 12º:

Hallar la serie de Fourier de tipo seno y la serie de Fourier de tipo coseno de la función económica y = f(x) tal que, $0 \leq x \leq \pi$. Además, se cumple que: $y^{(4)} - y = 0$, con las condiciones iniciales: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$.

(adaptado de Simmons G.F., Madrid, 1998, p. 277).

Solución:

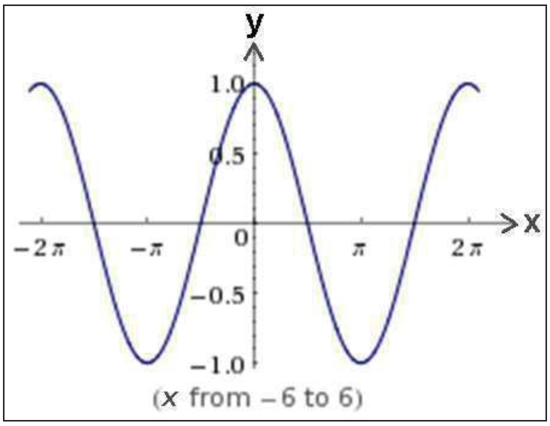
La función económica a desarrollar vendrá dada por una EDO que resolveremos por el método de las transformadas de Laplace, con lo que:

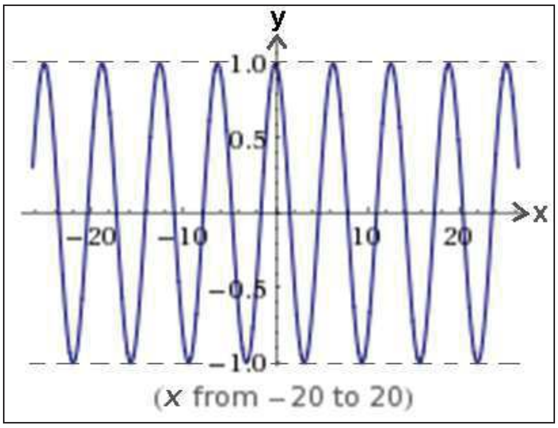
$$\begin{cases} S^4 y_s - S^3 y(0) - S^2 y'(0) - S y''(0) - y'''(0) - y_S = 0 \\ S^4 y_s - S^3 + S - y_s = 0 \\ y_S\left(S^4 - 1\right) = S^3 - S \\ y_S = \dfrac{S\left(S^2 - 1\right)}{\left(S^4 - 1\right)} = \dfrac{S\left(S^2 - 1\right)}{\left(S^2 + 1\right)\left(S^2 - 1\right)} = \dfrac{S}{S^2 + 1} \end{cases}$$

Y se tendrá la integral particular buscada, a saber:

$$y = f(x) = L^{-1}\left\{\frac{S}{S^2+1}\right\} = \cos x\,.$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Para la serie de Fourier de tipo seno, se tiene que:

$$a_n = 0 \text{ y } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x \sin nx + n\cos x \cos nx}{1-n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2n(\cos \pi n + 1)}{\pi(n^2-1)}.$$

Para n = 1 se tiene $b_1 = 0$, y para n > 1 un sencillo cálculo muestra que:

$$b_n = \frac{2n}{\pi}\left[\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\right].$$

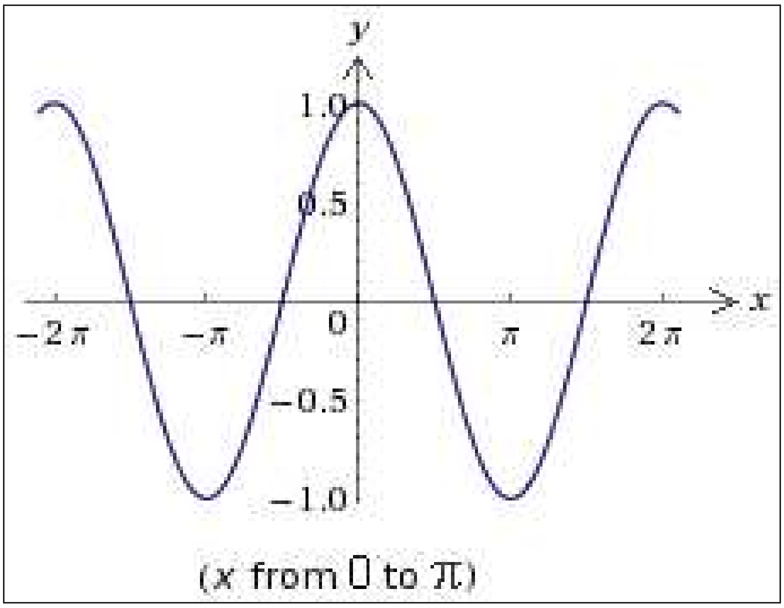
Por tanto, tenemos: $b_{2n-1} = 0$ y $b_{2n} = \dfrac{8n}{\pi(4n^2-1)}$, y en consecuencia la serie de senos es la siguiente:

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}, \quad \forall x \,/\, 0 < x < \pi\,.$$

Para hallar la serie de Fourier de tipo coseno, observemos que da $b_n = 0$ y:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\cdot\sin nx\cdot dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x\sin nx + n\cos x\cos nx}{1-n^2}\right]_0^{\pi} = \begin{cases}1 & \text{para } n = 1\\ 0 & \text{para } n \neq 1.\end{cases}$$

Por tanto, la serie de Fourier de tipo coseno para cos x es simplemente cos x, como cabía esperar, y su representación gráfica, como ya se ha visto, vendrá dada por:



Ejemplo 13º:

Desarrollar la función económica f(x) en serie de Fourier sobre el intervalo $-2 \leq x < 2$, si $f(x) = I_1 - I_2$ para: $-2 \leq x < 0$, y $f(x) = \iint_A 8xy\cdot dx\cdot dy$ para el subintervalo: $0 \leq x < 2$, siendo:

$$\begin{cases} A = \{(x,y) \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\} \\ A_1 = \{(x,y,z) \,/\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, z \geq 0\,,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \end{cases}$$

$I_1 = \iiint_{A_1}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot dx\cdot dy\cdot dz$; $I_2 = \iiint_V z\cdot dx\cdot dy\cdot dz$, siendo V el sólido definido por las desigualdades siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq z^2 \\ z \geq 0 \end{array}\right\}$$, que es un volumen común a una semiesfera y a un cono de revolución de semiángulo en el vértice 45º.

(adaptado de Simmons G.F., Madrid, 1998, p. 282).

Solución:

El dominio de integración A aparece representado en la figura siguiente, y es el primer cuadrante del círculo de radio unidad y centro en el origen de coordenadas, o sea:

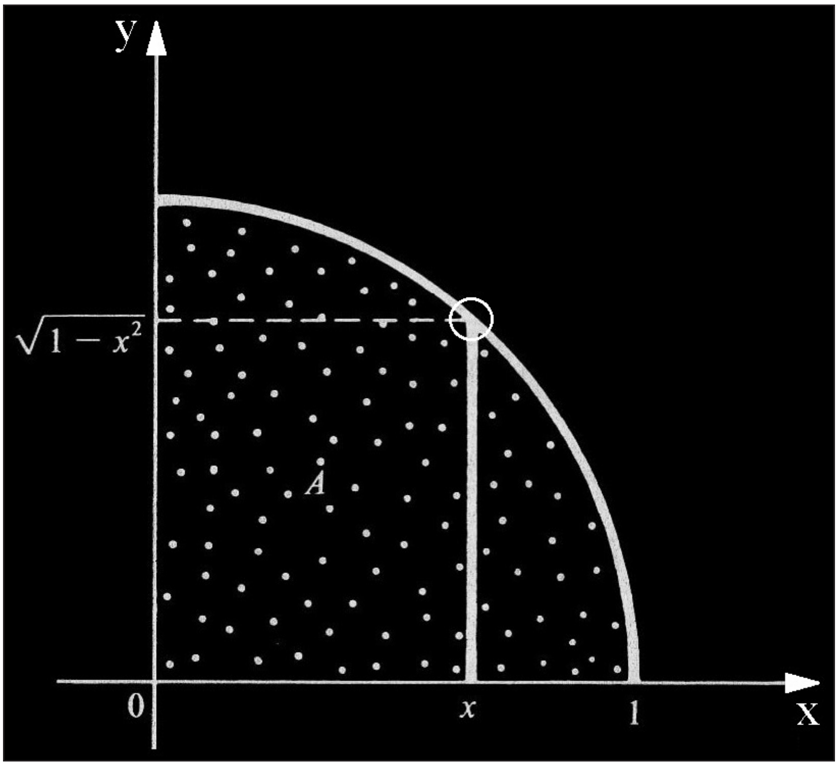


Fig. 9. Dominio de integración.

La función económica a desarrollar vendrá dada por una integral doble, en el segundo subintervalo, que habrá que calcular, esto es:

$$f(x)=\iint_A 8xy\cdot dx\cdot dy=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 8xy\cdot dy\right)dx=\int_0^1 \left[4xy^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\int_0^1 4x(1-x^2)\cdot dx=1.$$

Del mismo modo, el dominio volumétrico de integración A_1 aparece representado por el sólido de la figura siguiente, y es el primer octante de la esfera de radio unidad, o sea:

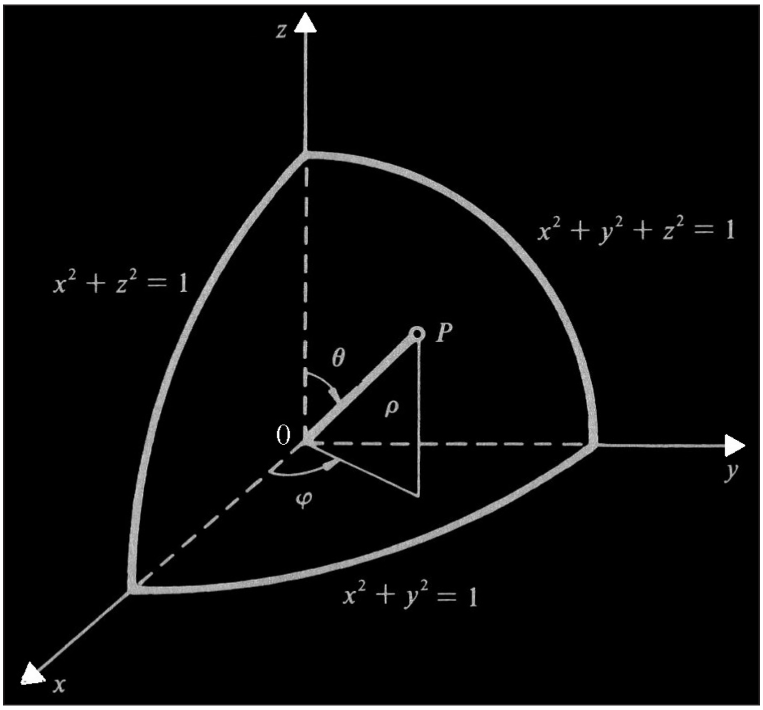


Fig. 10. Dominio de integración.

Ahora, será necesario hallar el valor de la función económica en el primer subintervalo por diferencia de las dos integrales múltiples dadas, por lo que procederemos separadamente a resolverlas pasando, en ambos casos, a coordenadas esféricas, así:

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{array}\right\}$$

$$I_1 = \iiint_{A_1} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot dx\cdot dy\cdot dz = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 \rho\cdot\rho^2\cdot\sin\theta\cdot d\rho\right)\cdot d\varphi\right]d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cdot d\varphi\cdot d\theta = \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cdot d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

Del mismo modo, se tendrá que para la segunda integral I_2, los nuevos límites de integración son:

$$\rho\begin{cases}1\\0\end{cases}\qquad \theta\begin{cases}\frac{\pi}{4}\\0\end{cases}\qquad \varphi\begin{cases}2\pi\\0\end{cases}$$, entonces: $dv = \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$.

Substituyendo, se tiene el valor de la integral buscada, o sea:

$$I_2 = \iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \iiint \rho\cos\theta\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/4} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \left.\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} \left.\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4}\times\frac{2}{8}2\pi = \frac{\pi}{8}.$$

De esta manera, en el primer subintervalo se tendrá el siguiente valor de la función económica en estudio:

$$f(x) = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = 0.$$

Se trata, ya inmersos en el proceso de resolución del desarrollo en serie de Fourier pedido, de una extensión de la forma canónica estudiada en los ejemplos anteriores a intervalos arbitrarios. Aquí introducimos la nueva variable *t* haciendo: $\frac{t}{\pi} = \frac{x}{2}$, es decir: $t = \frac{\pi x}{2}$ y $x = \frac{2t}{\pi}$. Ello equivale a un cambio de escala sobre el eje de abscisas. Entonces: g(t) = 0 para -π ≤ t < 0 y g(t) = 1 para 0 ≤ t < π, y se tiene que:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dt + \int_0^{\pi} 1dt\right] = 1; \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} = 0, \quad \forall n \geq 1; \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]. \end{cases}$$

La última de estas fórmulas nos dice que:

$b_{2n} = 0$ y $b_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)\pi}$. Tenemos, por tanto: $g(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$,

de modo que el desarrollo requerido es:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi x}{2}.$$

Ejemplo 14º:

Desarrollar la función económica constante f(x) = 100 en serie de Fourier sobre el intervalo: 0 < x < π .

Solución:

Procede hallar la serie de senos de esta función por los procedimientos ya ensayados en ejercicios anteriores, resultando la expresión:

$$f(x) = \frac{400}{\pi}(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots).$$

Las sucesivas sumas parciales son:

$$y = \frac{400 \cdot \sin x}{\pi}, \quad y = \frac{400 \cdot \sin x}{\pi} + \frac{400 \cdot \sin 3x}{3\pi}, \quad y = \frac{400 \cdot \sin x}{\pi} + \frac{400 \cdot \sin 3x}{3\pi} + \frac{400 \cdot \sin 5x}{5\pi}, \ldots$$

Ejemplo 15º:

Resuélvase la función económica dada por la EDP:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;, \; 0 < x < \pi \;, \forall t > 0$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(2x) & \forall x \,/\, 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3\sin x & \forall x \,/\, 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(tomado de Bargueño y Alonso, UNED, 2012, p. 441).

Solución:

Obviaremos aquí su resolución completa, que por su extensión puede consultarse en el libro relacionado.

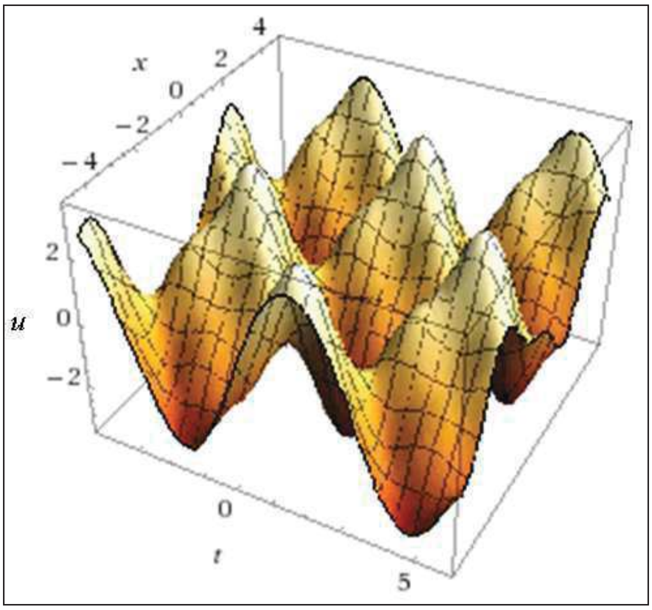
Utilizando el método de separación de variables, el presente problema de contorno presenta como solución general:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

que una vez aplicadas las condiciones de contorno conduce a la solución particular:

$$u(x,t) = (\sin 2x)(\cos 2t) + 3\sin x \cdot \sin t \;,$$

con la siguiente representación gráfica:



Ejemplo 16º:

Resuélvase la función económica dada por la EDP:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \ \forall\, t > 0,$$

con las condiciones siguientes: $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t > 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t > 0,$

y si para t = 0, la función es:

a) u(x,0) = 6 + 4·cos(3πx)

b) u(x,0) = x

Nota: en el caso b) expresar la solución en forma de sumatorio.

(tomado de Bargueño y Alonso, UNED, 2012, p. 446).

Solución:

a) Obviaremos aquí también su resolución completa, que por su extensión puede consultarse en el libro relacionado. Utilizando el método de separación de variables, el presente problema de contorno presenta como solución general:

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \cdot e^{-n^2\pi^2 t}.$$

Con la condición de contorno dada, resultará que:

$$u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = 6 + 4\cdot\cos(3\pi x) \text{, es decir:}$$

$$a_0 = 6,\ n = 3,\ a_3 = 4,\ \forall a_i = 0\ .$$

Por lo tanto, la solución particular buscada será:

$$u(x,t) = 6 + 4\cdot\cos(3\pi x)\cdot e^{-9\pi^2 t}\ .$$

b) En este caso, con la condición u(x,0) = x, se tendrá que:

$$u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = x,\ \forall x / 0 < x < 1.$$

Los distintos coeficientes a_n pueden identificarse observando que la expresión anterior constituye un desarrollo en serie coseno de Fourier. La substitución de los coeficientes hallados de tal modo supondrá la expresión de la solución particular del problema planteado.

Ejemplo 17º:

Encontrar la serie de Fourier de la función económica definida así:

$$f(x) = \begin{cases} (I/2) + x.......-\pi \le x \le 0 \\ x......................0 \le x \le \pi \end{cases},$$

siendo I el valor de la integral curvilínea:

$$I = \int_C \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy\ ,$$

extendida a lo largo de una curva cerrada que rodea al origen de coordenadas.

(adaptado de Martínez, Silva y Villalobos, 2011).

Solución:

La función subintegral reseñada admite función potencial, pero en este caso no podemos aprovecharnos de esa ventaja, pues en el punto (0,0) no están definidos ni X ni Y ni U(xyz). La integral tomará un valor debido solamente al punto (0,0) y los demás puntos comprendidos en el recinto que limita la curva contribuyen con un valor 0 al valor de la integral. Esto implica que el valor de la integral sea independiente de la curva C con tal que esta curva rodee al origen (libertad que nos admite también el enunciado al no fijarnos la ecuación de la curva C). Por eso, en aras a la simplificación, calcularemos su valor siendo C una circunferencia. Hagamos un cambio a coordenadas polares:

$$x = a\cdot\cos\theta \; ; \; dx = -\, a\cdot\sin\theta\cdot d\theta \; ; \; y = a\cdot\sin\theta \; ; \; dy = a\cdot\cos\theta\cdot d\theta$$

Los límites de integración serán de 0 a 2π y entonces:

$$I = \int_0^{2\pi}\left(a\cos\theta - \frac{a\sin\theta}{a^2}\right)(-a\sin\theta\, d\theta) + \left(a\sin\theta + \frac{a\cos\theta}{a^2}\right)(a\cos\theta\, d\theta) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-a^2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + a^2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\,.$$

Como vemos, el resultado de tal suerte obtenido resulta independiente de la circunferencia, lo que está de acuerdo con lo dicho anteriormente sobre la independencia del resultado de la curva a la que extendamos la integral.

Así pues, en el primer subintervalo dado la función económica será: $f(x) = \pi + x$.

Se trata de una función par, por lo que su serie será:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos nx, \text{con } a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi\,. \text{ Así mismo:}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos nx\cdot dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\cdot\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi n\cdot\sin\pi n + \cos\pi n - 1}{n^2} =$$

$$= \frac{2\pi n\cdot\sin\pi n + 2\cos\pi n - 2}{\pi n^2} = \frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots \forall n \text{ par} \\ \frac{-2}{n^2} \ldots\ldots \forall n \text{ impar} \end{cases}$$

Ello puede verse, con mayor claridad, en el siguiente cuadro:

n	1	2	3	4	5
$\frac{\pi n \sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1}{n^2}$	-2	0	$-\frac{2}{9}$	0	$-\frac{2}{25}$
approximation	-2	0	-0.222222	0	-0.08

La serie pedida será, en definitiva: $\frac{\pi}{2}-2\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

Ejemplo 18º:

Sea la función económica f(x) = x (sin x), si -π < x < π, entonces:

a) Determinar la serie de esta función.

b) Probar la convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}=\frac{1}{4}$.

(adaptado de Martínez, Silva y Villalobos, 2011, p. 3).

Solución:

a) La función f(x) es par, es decir f(x) = f (-x), $\forall x\in(-\pi,\pi)$, entonces: $b_n = 0$. Además:

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\cdot dx=\frac{1}{\pi}\left[[x(-\cos x)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx\right]=1 \\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos(nx)\,dx=\frac{4n\cdot\sin\pi n-2\pi(n^2-1)\cos\pi n}{\pi(n^2-1)^2}\end{cases}$$

- Para $n \neq 1$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\left[\sin((n+1)x)-\sin((n-1)x)\right]dx=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}.$$

- Para n = 1:

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la serie buscada es:

$$f(x)=x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(nx).$$

b) En x = 0 hay un punto de continuidad de la función, entonces la serie converge a f(0). O sea:

$$f(0)=0=1-\frac{1}{2}\cos 0+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(0);\ \frac{1}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}=0$$, de donde:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}=-\frac{1}{4}\text{, y entonces: }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2-1}=\frac{1}{4}\text{ . c.s.q.d.}$$

Ejemplo 19º:

a) Para la función económica: $f(x) = e^{-[x]}$, $0 \le x \le 2$ obtener su serie de Fourier en cosenos, periódica de período 4.

b) Del resultado anterior determinar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

(adaptado de Martínez, Silva y Villalobos, 2011, p. 4).

Solución:

a) Evaluando la función parte entera tenemos que:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ e^{-1} & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ e^{-2} & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$$

Con extensión par $f_p(x)$ de $f(x)$ se obtiene la serie:

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}\text{, en que:}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 1dx+\int_1^2 e^{-1}dx\right]=\frac{1}{2}\left[1+e^{-1}\right] \\ a_n &= \left[\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2 e^{-1}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right]=\left.\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right|_0^1=e^{-1}\left.\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right|_1^2= \\ &=2\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}+2e^{-1}\frac{\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}=2\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\left[1-e^{-1}\right].\end{aligned}}$$

Finalmente, la serie buscada es:

$$f(x)=\frac{1+e^{-1}}{2}+2\left(1-e^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ .$$

b) Convergencia de x_0 = 2 punto de discontinuidad, con límites laterales e^{-1} se tiene convergencia:

$$e^{-1}=\frac{1+e^{-1}}{2}+2\left(1-e^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos n\pi\ \text{, de donde:}$$

$$\frac{e^{-1}-1}{2}=2\left(1-e^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos n\pi\text{, y entonces: }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}\ .$$

Ejemplo 20º:

Se considera la función económica f(x) periódica, de periodo 2 que viene dada en el intervalo [-π, π] por las igualdades:

$$\begin{cases} f(x)=0 & \text{si} \quad -\pi\le x<-\int_0^{\infty}\frac{\sin}{x}dx \\ f(x)=1 & \text{si} \quad -\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx\le x\le\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx \\ f(x)=0 & \text{si} \quad \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx<x\le\pi \end{cases}$$

Obtener su desarrollo en serie de Fourier y estudiar la suma de la serie en los puntos de discontinuidad de la función.

(tomado de Fernández, J.A., Madrid, 1975, p. 45 y ss).

Solución:

Procede, en primer lugar, resolver el extremo integral de los subintervalos dados en el enunciado del problema. Para ello, resolveremos la integral definida I en cuestión como aplicación de la integración en el campo complejo. Esto es:

Podemos escribir: $$\left.\begin{aligned} 2I&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx \\ 0&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx \end{aligned}\right\} 2\cdot I\cdot i=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{xi}}{x}dx\ .$$

El polo es: z = 0; $R = \frac{e^{zi}}{I} = e^0 = 1$. Con el polo incluido en el recinto, rodearemos el polo con una semicircunferencia de radio r , y entonces:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{xi}}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{zi}}{z} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{xi}}{x} dx + \int_{C} \frac{e^{zi}}{z} dz = 2\,\pi\, i. \qquad (1)$$

Los valores de la segunda integral cuando r $\to$ 0 y de la cuarta cuando R $\to \infty$, son:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{zi}}{z} \underset{r\to 0}{dz} = \left[\text{como} \lim_{z\to 0} z \cdot f(z) = 1\right] = \pi\, i, \text{ por el teorema de acotación.}$$

$$\left|\int_{c} \frac{e^{zi}}{z} dz\right| = \left|\int \frac{e^{R(\cos\theta + i\sin\theta)i}}{z} dz\right| \leq \frac{e^{-R\sin\theta}}{R} \pi R = \frac{\pi}{e^{R\sin\theta}} \to 0.$$

luego al sustituir en (1), cuando R $\to \infty$, se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{xi}}{x} dx + \pi\, i = 2\,\pi\, i; \text{ entonces: } 2\cdot I\cdot i = \pi\cdot i; \text{ y resulta: } I = \frac{\pi}{2}.$$

Si se dibuja la gráfica de esta función en el intervalo considerado prolongándosela después por periodicidad, se observa inmediatamente que es una función par, luego $b_n = 0$ para todo *n* y la serie pedida sólo va a tener términos en cosenos.

Los coeficientes a_n, como siempre, se calculan así:

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 0\cdot dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0\cdot dx\right] = 1$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} 0\cdot dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0\cdot dx\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Así pues:

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{2}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es de la forma } (4k+1) \\ -\dfrac{2}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es de la forma } (4k+3) \end{cases}$$

Por consiguiente, se tendrá el desarrollo pedido:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos x-\frac{2}{3\pi}\cos 3x+\frac{2}{5\pi}\cos 5x-\frac{2}{7\pi}\cos 7x+\cdots+$$

$$+\frac{2}{(4k+1)\pi}\cos(4k+1)x-\frac{2}{(4k+1)\pi}\cos(4k+3)x+\cdots,$$ es decir, que:

$$(1)\qquad f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{2}{4k+1}\cos\ (4k+1)x-\frac{1}{4k+3}\cos(4k+3)x\right].$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}+\frac{2\cos x}{\pi},\ y=\frac{1}{2}+\frac{2\cos x}{\pi}-\frac{2\cos 3x}{3\pi}.$$

Esta igualdad (1) resulta válida en todos los puntos donde la función *f* es continua. Como sea que los puntos de discontinuidad (véase la gráfica de la función) son los de la forma:

$$x=(2m+1)\frac{\pi}{2};\qquad m = 0, \pm1,\ \pm2,\ ...$$

sólo en estos puntos deja de ser cierta la igualdad (1). En estos puntos la suma de la serie que figura en el segundo miembro de (1) no es f(x) sino:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Son puntos de discontinuidad local $x = \pm\ \pi/2$. En efecto, si calculamos, por ejemplo, los límites laterales para $x = \pi/2$, se obtiene:

$$\lim_{x\to\pi/2^-} f(x)=1\ ;\ \lim_{x\to\pi/2^+} f(x)=0\ ,$$

luego se trata de una discontinuidad de 1ª especie del tipo finito, con un salto de 1 – 0 = 1, y entonces, tendremos que:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4k+1}\cos(4k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4k+3}\cos(4k+3)\frac{\pi}{2}\right],$$

(igualdad por otra parte trivial si nos fijamos en que todos los términos que figuran entre corchetes son iguales a 0).

Ejemplo 21º:

La función económica f(x) es periódica, de período p = 6, y en el intervalo [0, 6] está definida por las igualdades siguientes:

$$\begin{cases} f(x) = 4x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ f(x) = 12 & \text{si} \quad 3 \leq x < 6 \end{cases}$$. Obtener su desarrollo en serie de Fourier.

(tomado de Fernández, J.A., Madrid, 1975, p. 46 y ss).

Solución:

Si se dibuja la gráfica de esta función se observan las discontinuidades existentes. De hecho, en x = 3 la función es continua, puesto que está definida en dicho punto y además se produce la coincidencia del valor de los límites laterales (por la derecha y por la izquierda), esto es:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 12 \ ; \lim_{x \to 3^+} f(x) = 12 \ .$$

De acuerdo con las fórmulas anotadas para los coeficientes en el caso de periodo *p* cualquiera y eligiendo como es natural a = 0 para tomar las integrales en el intervalo [0, 6], descompondremos estas integrales en dos, relativas a los intervalos [0, 3] y [3, 6] en los cuales la expresión que define la función económica es distinta. Tendremos así:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{6}\left(\int_0^3 4x\, dx + \int_3^6 12 dx \right) = 18 \\ a_n = \frac{2}{6}\left(\int_0^3 4x \cos\frac{2\pi n x}{6} dx + \int_3^6 12 \cos\frac{2\pi n x}{6} dx \right) = \frac{12}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - 1) \end{cases}$$

de modo que, teniendo en cuenta los valores del cos n según la paridad de *n*, tendremos:

$$\begin{cases} a_n = \begin{cases} 0 \ , & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{24}{\pi^2 n^2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \\ b_n = \frac{2}{6}\left(\int_0^3 4x \sin\frac{\pi n x}{3} dx + \int_3^6 12 \sin\frac{\pi n x}{3} dx \right) = -\frac{12}{\pi n} . \end{cases}$$

Por consiguiente el desarrollo pedido es:

$$f(x) = \frac{18}{2} - \frac{24}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{3} - \frac{12}{\pi}\sin\frac{\pi x}{3} - \frac{12}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{3} - \frac{24}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{3} - \frac{12}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{3} - \cdots$$

es decir,

$$f(x) = 9 - \frac{24}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{3} + \frac{1}{3^2}\cos \pi x + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{3} + \cdots\right) -$$
$$-\frac{12}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{3} + \frac{1}{3}\sin \pi x + \cdots\right).$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y = 9\,;\; y = 9 - \frac{24}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{3}\,;\; y = 9 - \frac{24}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{3} - \frac{12}{\pi}\sin\frac{\pi x}{3}.$$

La igualdad anterior es válida en todos los puntos x donde la función dada *f* es continua, o sea, para todo $x \neq 6k$ (con k entero positivo o negativo). En los puntos de discontinuidad, la suma de la serie no es f(x) sino el promedio:

$$\frac{f(x+0)+(x-0)}{2} = \frac{0+12}{2} = 6.$$

Ejemplo 22º:

a) Desarrollar en serie de Fourier la función económica f(x) periódica, de periodo 2π, que está definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ por la integral:

$$f(x) = \int_0^\infty (e^{-x^2} - e^{-x}\sqrt{x})\cdot dx \begin{cases} \text{si} & -\pi \le x \le 0 \\ \text{si} & 0 < x \le 6(I_1 - I_2) \end{cases},$$

siendo: $I_1 = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} z\cdot\rho\cdot dz\cdot d\rho\cdot d\theta$; $I_2 = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} \rho\cdot dz\cdot d\rho\cdot d\theta$.

b) Deducir, del desarrollo obtenido, la fórmula:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(adaptado de Fernández, J.A., Madrid, 1975, p. 47 y ss).

Solución:

a) La función económica viene dada por la diferencia de sendas integrales definidas que calcularemos separadamente. En efecto:

$$f(x) = \int_0^\infty (e^{-x^2} - e^{-x}\sqrt{x})\cdot dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\cdot dx - \int_0^\infty \sqrt{x}\cdot e^{-x}\cdot dx = I_1 - I_2 \text{, donde:}$$

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^\infty e^{-x^2}\cdot dx = (\text{haciendo } x^2 = t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}\cdot dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ I_2 = \int_0^\infty \sqrt{x}\cdot e^{-x}\cdot dx = \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}$$

De este modo, resultará: $f(x) = I_1 - I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$.

Por otra parte, habrá que resolver el extremo superior del intervalo de definición de la función económica en cuestión, calculando también separadamente las dos integrales que lo componen, expresadas en coordenadas cilíndricas, con lo que:

$$\begin{cases} I_1 = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} z\cdot\rho\cdot dz\cdot d\rho\cdot d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^2\cdot d\rho\cdot d\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\cdot d\theta = \frac{5\pi}{3} \\ I_2 = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} \rho\cdot dz\cdot d\rho\cdot d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\cdot d\rho\cdot d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\cdot d\theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Con ello, resultará que: $6(I_1 - I_2) = 6\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{3\pi}{2}\right) = \pi$.

Si se dibuja, como siempre, la gráfica de la función observando sus puntos de discontinuidad local, los coeficientes de Fourier de la función f(x) se calculan sin dificultad, así:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_0^{\pi} x\, dx\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_0^{\pi} x\cos nx\, dx\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_0^{\pi} x\sin nx\, dx\right) = -\frac{n}{n\pi}\cos n\pi = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ -\frac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

De hecho, en x = 0 la función es continua, puesto que se produce la coincidencia del valor de los límites laterales (por la derecha y por la izquierda):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \ ; \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \ .$$

El desarrollo pedido será por consiguiente:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\ .$$

Esta igualdad deja de ser válida en los puntos x de la forma siguiente: x = (2k+1)π (con k entero positivo o negativo), que son los puntos de discontinuidad de la función.

En estos puntos, la suma de la serie del segundo miembro vale:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{\pi}{2}\ .$$

b) Para obtener la fórmula pedida en la segunda parte de este ejercicio observamos el desarrollo anterior, y vemos que basta hacer en él x = 0 para que en el segundo miembro aparezca la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

(mientras que la serie de senos desaparece al hacer x = 0). Como por otra parte f(0) = 0, se tendrá que:

$$0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\ ,$$

de donde resulta inmediatamente la fórmula pedida.

Nota.- Es curioso cómo de las series de Fourier de ciertas funciones, particularizando convenientemente la variable *x*, se pueden obtener las sumas de muchas series numéricas notables como la que acabamos de encontrar. Ello puede revestir singular importancia para la obtención y resolución de ciertas series de funciones económicas.

Ejemplo 23º:

Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de período 2π definida por:

$$\boxed{\begin{array}{ll} y=x, \ \text{si} & -\pi\le x\le 0 \\ y=-x, \ \text{si} & 0\le x\le 2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)}\rho\cdot d\rho\cdot d\theta-8 \end{array}}$$

Solución:

El extremo superior del intervalo de definición de esta función económica viene dado, en su primer sumando, por una integral doble expresada en coordenadas polares, con lo que dicho extremo será:

$$2\int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} \rho\cdot d\rho\cdot d\theta - 8 = 2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_2^{2(1+\cos\theta)}\cdot d\theta - 8 = 4\int_0^{\pi/2}(2\cos\theta + \cos^2\theta)\cdot d\theta - 8 =$$

$$= 4\left[2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} - 8 = \pi + 8 - 8 = \pi.$$

La función es par pues f(x) = f(-x), luego: $b_n = 0$, $\frac{a_0}{2} = -\frac{2\frac{1}{2}\pi\pi}{2\pi} = -\frac{\pi}{2}$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{-2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{-2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right], \text{ entonces:}$$

$$\begin{cases} a_n = 0 \text{ para } n \text{ par.} \\ a_n = \dfrac{4}{\pi n^2} \text{ para } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Y el desarrollo pedido será:

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right).$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y = -\frac{\pi}{2};\ y = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\cos x}{\pi};\ y = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\cos x}{\pi} + \frac{4\cos 3x}{9\pi}.$$

Ejemplo 24º:

a) Obtener el desarrollo en serie de Fourier, en el intervalo dado por: [-I/10, I/10], de la función económica: $y = e^x$, siendo:

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_2^{4\cos\theta} \rho^3\cdot d\rho\cdot d\theta.$$

b) Encontrar los desarrollos, en el mismo intervalo, de las funciones hiperbólicas directas: Sh x y Ch x.

Solución:

a) Los extremos del intervalo de definición de la función que nos ocupa vendrán determinados por la integral doble (expresada en coordenadas polares) siguiente:

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_2^{4\cos\theta} \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_2^{4\cos\theta} \cdot d\theta = \int_0^{\pi/2}(64 \cdot \cos^4\theta - 4) \cdot d\theta =$$

$$= \left[64\left(\frac{3\theta}{8} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32}\right) - 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 10\pi .$$

De este modo, el intervalo de definición buscado será:

$$[-I/10, I/10] = [-\pi, \pi] .$$

Como siempre:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi} e^x \Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right];\ \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\mathrm{Sh}\,\pi .$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx ;$$

$$\int e^x \cos nx\, dx = \left\{ \begin{array}{c} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{array} \right\} = e^x \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{n}\int e^x \sin nx\, dx ;$$

$$\int e^x \sin nx\, dx = \left\{ \begin{array}{c} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin nx\, dx \Rightarrow v = \dfrac{\cos nx}{n} \end{array} \right\} = -\frac{e^x \cos nx}{n} + \int \frac{e^x \cos nx\, dx}{n} ;$$

$$\int e^x \cos nx\, dx = \frac{e^x \sin nx}{n} + \frac{e^x \cos nx}{n^2} - \frac{1}{n^2}\int e^x \cos nx\, dx ;$$

$$\left(n^2 + 1\right)\int e^x \cos nx\, dx = n\, e^x \sin nx + e^x \cos nx :$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx = \frac{e^x}{n^2+1}(n \sin nx + \cos nx)\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi}}{n^2+1}(-1)^n - \frac{e^{-\pi}}{n^2+1}(-1)^n =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^2+1}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{2(-1)^n \mathrm{Sh}\,\pi}{n^2+1} .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\, dx\,.$$

De forma análoga a la anterior, integrando dos veces por partes queda:

$$b_n = \frac{e^x}{\pi\left(1+n^2\right)}\left[\sin nx - n\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi}}{\pi\left(1+n^2\right)}\left(-n(-1)^n\right) - \frac{e^{-\pi}(-n)}{\pi\left(1+n^2\right)}(-1)^n$$

$$b_n = \frac{-n(-1)^n}{\pi\left(1+n^2\right)}\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] = \frac{-2n(-1)^n}{\pi\left(1+n^2\right)}\,\mathrm{Sh}\,\pi\,.$$

La serie pedida sería, entonces:

$$y = e^x = \frac{2\,\mathrm{Sh}\,\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2}\cos x + \frac{1}{1+2^2}\cos 2x - \frac{1}{1+3^2}\cos 3x + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1+1^2}\sin x - \frac{2}{1+2^2}\sin 2x + \frac{3}{1+3^2}\sin 3x + \cdots \right].$$

b) Para obtener el desarrollo de e^{-x} cambiamos simplemente, en el desarrollo anterior, x por –x, cambiándonos también de signos los sin. Así sería:

$$e^{-x} = \frac{2\,\mathrm{Sh}\,\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2}\cos x + \frac{1}{1+2^2}\cos 2x - \frac{1}{1+3^2}\cos 3x + \cdots \right.$$
$$\left. - \frac{1}{1+1^2}\sin x + \frac{2}{1+2^2}\sin 2x - \frac{3}{1+3^2}\sin 3x + \cdots \right].$$

Como: $\mathrm{Sh}\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, desaparecerán los componentes “coseno” y el valor 1/2, con lo que:

$$\mathrm{Sh}\,x = \frac{2\,\mathrm{Sh}\,\pi}{\pi}\left[\frac{1}{1+1^2}\sin x - \frac{2}{1+2^2}\sin 2x + \frac{3}{1+3^2}\sin 3x - \cdots \right].$$

Como: $\mathrm{Ch}\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, desaparecerán los armónicos “seno”, con lo que:

$$\mathrm{Ch}\,x = \frac{2\,\mathrm{Sh}\,\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2}\cos x + \frac{1}{1+2^2}\cos 2x - \frac{1}{1+3^2}\cos 3x + \cdots \right].$$

Ejemplo 25º:

a) Calcular el desarrollo en serie de Fourier de la función definida por:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 - x, \text{si} \quad 0 \le x \le I \\ y = x - 6, \text{si} \quad I \le x \le 8 \end{array}\right\} \text{ de período 8, siendo } I = \frac{3}{4}\int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right)dx .$$

b) Calcular la suma de la serie para los puntos x = 0, x = 4 y x = 8.

Solución:

a) Resulta fácil comprobar que: $I = \frac{3}{4} \times \frac{16}{3} = 4$. Además, se tiene: $\omega = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$; entonces, se tendrá que:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,dx = \frac{1}{8}\left[\int_0^4 (2-x)\,dx + \int_4^8 (x-6)\,dx\right] = \frac{1}{8}\left[\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 + \left[\frac{x^2}{2} - 6x\right]_4^8\right] = 0 ,$$

que constituye un resultado lógico, pues el área situada por encima del eje Ox es igual al área que se halla por debajo del mismo eje coordenado. También:

$$a_n = \frac{1}{p/2}\int_0^p f(x)\cos n\,\omega x\,dx = \frac{1}{4}\left[\int_0^4 (2-x)\cos n\omega x\,dx + \int_4^8 (x-6)\cos n\omega x\,dx\right];$$

$$\int x\cos n\,\omega\,x\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos n\,\omega\,x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{\sin n\,\omega x}{n\,\omega} \end{array}\right\} = \frac{x\sin n\,\omega x}{n\,\omega} -$$

$$-\int \frac{\sin n\,\omega\,x}{n\,\omega}dx = \frac{x\sin n\,\omega\,x}{n\,\omega} + \frac{\cos n\,\omega x}{n^2\omega^2}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{4}\left[\left.\dfrac{2\sin n\,\omega\,x}{n\,\omega} - \dfrac{x\sin n\,\omega\,x}{n\,\omega} - \dfrac{\cos n\,\omega\,x}{n^2\omega^2}\right|_0^4 + \dfrac{x\sin n\,\omega\,x}{n\,\omega} + \dfrac{\cos n\,\omega\,x}{n^2\omega^2} - \right. \\ \left. -\left.\dfrac{6\sin n\,\omega\,x}{n\,\omega}\right|_0^8\right] = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{-(-1)^n + 1}{n^2\omega^2} + \dfrac{1-(-1)^n}{n^2\omega^2}\right] = \dfrac{1}{2n^2\omega^2}\left[1-(-1)^n\right] = \dfrac{8}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right] \\ a_n = 0 \text{ para } n \text{ par} \\ a_n = \dfrac{16}{n^2\,\pi^2} \text{ para } n \text{ impar} \end{array}\right.$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$\begin{cases} b_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^p f(x)\sin n\,\omega\,x\,dx = \dfrac{1}{4}\left[\int_0^4 (2-x)\sin n\,\omega\,x\,dx + \int_4^8 (x-6)\sin n\,\omega\,x\,dx\right]; \\ \displaystyle\int x\sin n\,\omega\,x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = -\dfrac{\cos n\,\omega\,x}{n\,\omega} \end{matrix}\right\} = \\ = -\dfrac{x\cos n\,\omega\,x}{n\,\omega} + \displaystyle\int \dfrac{\cos n\,\omega\,x}{n\,\omega}dx = \dfrac{-x\cos n\,\omega\,x}{n\,\omega} + \dfrac{\sin n\,\omega\,x}{n^2\omega^2} \\ b_n = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{-2\cos n\,\omega\,x}{n\,\omega} + \dfrac{x\cos n\,\omega\,x}{n\,\omega} - \dfrac{\sin n\,\omega\,x}{n^2\omega^2}\Big|_0^4 + \dfrac{\sin n\,\omega\,x}{n^2\omega^2} - \dfrac{x\cos n\,\omega\,x}{n\,\omega} + \right. \\ \left. + 6\dfrac{\cos n\,\omega\,x}{n\,\omega}\Big|_4^8\right] = 0 \end{cases}$$

Su desarrollo sería, en definitiva:

$$y = \frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{4}x + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{4}x + \cdots\cdots\cdots\right].$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y = \frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{4};\ y = \frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{4} + \frac{16}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{4};$$

$$y = \frac{16}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{4} + \frac{16}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{4} + \frac{16}{25\pi^2}\cos\frac{5\pi x}{4}.$$

b) Según el teorema de Dirichlet, como f(x) es continua en todos los puntos la suma de la serie coincide con el valor de f(x) en ese punto. Luego, para:

x = 0 la suma de la serie es 2.
x = 4 “ “ “ “ “ “ -2.
x = 8 “ “ “ “ “ “ 2.

Ejemplo 26º:

Desarrollar en serie de cosenos, en [0, π], la siguiente función económica: y = $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x(e^{\pi x}+1)}\right] - x$.

Solución:

La función económica dada será:

$$y = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{x} - \frac{4}{x(e^{\pi x}+1)}\right] - x = 2\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{\pi x}+1)-2x}{x^2(e^{\pi x}+1)} - x = 2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi x}-1}{x(e^{\pi x}+1)} - x =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\pi e^{\pi x}}{2(e^{\pi x}+1)+2\pi x e^{\pi x}} - x = \pi - x\ .$$

Para que contenga solamente términos en cosenos, tendremos que completar la función con otra función de forma que la nueva función sea par, esto es, que cumpla que: f(x) = f(-x). Entonces:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\frac{1}{2}2\pi\pi}{2\pi} = \frac{\pi}{2}\,.$$

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos n\,x\,dx = 2\left.\frac{\sin nx}{n} - \frac{2}{\pi}\frac{x\sin nx}{n} - \frac{2\cos nx}{\pi n^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} = 0 & \text{para n par} \\ = \dfrac{4}{\pi n^2} & \text{" n impar} \end{cases}$$. Luego se tendrá:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right].$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y = \frac{\pi}{2};\ y = \frac{\pi}{2} + \frac{4\cos x}{\pi};\ y = \frac{\pi}{2} + \frac{4\cos x}{\pi} + \frac{4\cos 3x}{9\pi}\,.$$

Ejemplo 27º:

Desarrollar en serie de Fourier la función económica: y = $|\sin x|$ en el intervalo [0, 2π].

Solución:

Representemos la función y = $|\sin x|$

$$y = |\sin x| \equiv \begin{cases} \sin x, \text{si} & 0 \le x \le \pi \\ -\sin x, \text{si} & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

Se verifica: f(x) = f(x+π) luego la función es alternada par.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin n\,x \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi} = 0 \text{. También:}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos n\,x \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right].$$

$$\begin{cases} a_n = 0 \text{ para } n \text{ impar} \\ a_n = \dfrac{-4}{\pi(n^2-1)} \text{ para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Luego el desarrollo pedido será:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[1 - \frac{1}{2^2-1}\cos 2x - \frac{1}{4^2-1}\cos 4x - \frac{1}{6^2-1}\cos 6x \cdots\right].$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y = \frac{4}{\pi}; y = \frac{4}{\pi} - \frac{4\cos 2x}{3\pi}; y = \frac{4}{\pi} - \frac{4\cos 2x}{3\pi} - \frac{4\cos 4x}{15\pi}.$$

Ejemplo 28º:

a) Desarrollar en serie de Fourier, entre (I + 8/3) y (-I - 8/3), la función económica: $y = \frac{\pi x}{4} \times \lim_{x\to\pi/2}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\operatorname{tg} x$, siendo I la integral curvilínea: I = $\int_C \left[(x^2 - y^2)dx + xdy\right]$, desde los puntos A(0,2) hasta B(2,0), siguiendo el arco AB de 90º, en el primer cuadrante del círculo, de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 4$.

b) Hacer aplicación a la suma de la serie: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Solución:

a) Será preciso hallar, en primer lugar, el intervalo de definición de dicha función, para lo que habrá que calcular la integral I. La ecuación de la circunferencia descrita sería, pasando a la forma paramétrica:

$\left\langle \begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{array} \right.$, (siendo $\hat{t}$ el ángulo que forman para cada punto el argumento $\rho = 2$, y el eje 0X); entonces $\begin{array}{l} dx = -2\sin t \cdot dt \\ dy = 2\cos t \cdot dt \end{array}$, o sea:

$$I = \int_{\pi/2}^{0} [(4\cos^2 t - 4\sin^2 t)(-2\sin t \cdot dt) + (2\cos t)(2\cos t \cdot dt)] =$$

$$= \int_{\pi/2}^{0} \left(8\sin^3 t - \overbrace{8\cos^2 t \sin t}^{(8/3)\cos^3 t} + \overbrace{4\cos^2 t}^{4\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\frac{\pi}{2}} \right) dt.$$

Debe tenerse en cuenta que:

$$\int \sin^3 t \cdot dt = \int \sin t (1 - \cos^2 t) dt = \int \sin t \cdot dt - \int \sin t \cdot \cos^2 t \cdot dt =$$

$$= -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + C, \text{ con lo que:}$$

$$I = \left[-8\cos t + \frac{8\cos^3 t}{3} + \frac{8}{3}\cos^3 t + 2t + \sin 2t \right]_{\pi/2}^{0} =$$

$$= -8 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - \pi = -\pi - \frac{8}{3}.$$

De este modo, el intervalo buscado de la recta real será:

$$[(I + 8/3),(-I - 8/3)] = [-\pi,\pi] .$$

La función dada será:

$$y = \frac{\pi x}{4} \times \lim_{x\to\pi/2} \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \mathrm{tg}\, x = \frac{\pi x}{4} \times \lim_{x\to\pi/2} \frac{1 - \frac{2x}{\pi}}{\mathrm{ctg}\, x} = \frac{\pi x}{4} \times \lim_{x\to\pi/2} \frac{2/\pi}{1/\sin^2 x} = \frac{x}{2}.$$

Se cumple que f(x) = -f(-x) luego es una función impar.

$$a_n = 0 \;;\quad a_0 = 0 \;;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2} \sin n x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{-(-1)^n}{n\pi}.$$

Su desarrollo sería, pues:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots \right].$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y=\frac{\sin x}{\pi};y=\frac{\sin x}{\pi}-\frac{\sin 2x}{2\pi};y=\frac{\sin x}{\pi}-\frac{\sin 2x}{2\pi}+\frac{\sin 3x}{3\pi}.$$

b) Si ahora hacemos $x=\frac{\pi}{2}$, nos queda:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\pi}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right], \text{ y entonces: } \frac{\pi^2}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

Ejemplo 29º:

Desarrollar en serie de Fourier la función económica definida por:

$$y = u\ (\sin x)\ ,\ \text{siendo} \begin{cases} u(t)=0 & \forall t<0 \\ u(t)=t & \forall t>0 \end{cases},\ \text{en el intervalo } [-\pi,\ \pi].$$

Solución:

y = sin x en el intervalo en que sin x es positivo. Entonces:

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}(-\cos x)_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\right].$$

$$\begin{cases} a_n = 0 \text{ para } n \text{ impar.} \\ a_n=\dfrac{2}{\pi\left(n^2-1\right)} \text{ para } n \text{ par.} \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\sin n\,x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin n\,x\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-1)x-$$

$$-\cos(n+1)\,x]dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\,x}{n-1}-\frac{\sin(n+1)\,x}{n+1}\right]_0^{\pi}=0.$$

La representación buscada de *y* sería la siguiente:

$$y=\frac{2}{\pi}\left[1-\frac{1}{2^2-1}\cos 2x-\frac{1}{4^2-1}\cos 4x-\frac{1}{6^2-1}\cos 6x+\cdots\right].$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y = \frac{2}{\pi}; y = \frac{2}{\pi} - \frac{2\cos 2x}{3\pi}; y = \frac{2}{\pi} - \frac{2\cos 2x}{3\pi} - \frac{2\cos 4x}{15\pi}.$$

Ejemplo 30º:

Dada la función $\begin{cases} u(t) = 0 & t \leq 0 \\ u(t) = 1 & t \geq 0 \end{cases}$, desarrollar en serie de Fourier la función económica: y = sin x · u (cos x) en el intervalo [-π, π].

Solución:

Si representamos la función, resultará que:

$$\begin{cases} y = 0 & \text{cuando} \quad \cos x < 0 \\ y = \sin x & \text{"} \qquad \cos x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) \equiv \begin{cases} y = 0 \begin{cases} -\pi \leq x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases} \\ y = \sin x \text{ - } \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vemos que f(x) = - f(-x). luego se trata de una función impar,

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1}\right].$$

$$\begin{cases} b_n = 0 \text{ para } n \text{ impar.} \\ b_n = \dfrac{2n}{n^2-1} \text{ para } n = 2,6,10\ldots \\ b_n = -\dfrac{2n}{n^2-1} \text{ para } n = 4,8,12\ldots \end{cases}$$

Se desarrollaría, en fin, del siguiente modo:

$$f(x) = 2\left[\frac{2}{2^2-1}\sin 2x - \frac{4}{4^2-1}\sin 4x + \frac{6}{6^2-1}\sin 6x - \frac{8}{8^2-1}\sin 8x + \cdots\right].$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y = \frac{4\sin 2x}{3};\ y = \frac{4\sin 2x}{3} - \frac{8\sin 4x}{15};\ y = \frac{4\sin 2x}{3} - \frac{8\sin 4x}{15} + \frac{12\sin 6x}{35}.$$

Ejemplo 31º:

Desarrollar en serie de Fourier, en el intervalo [0,I], la función económica definida por: y = u(2-x)·u(x-1), donde $\begin{cases} u(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ u(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$, siendo I la integral curvilínea: $\int_C \frac{x \arcsin x}{y} dx$, extendida a lo largo de la semicircunferencia de centro el origen y radio = 1, situada sobre el eje 0X y comprendida entre los puntos x = -1 y x = 1.

Solución:

Pasando a ecuaciones paramétricas, se tiene, con r = 1:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = \cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = \sin\varphi \end{cases};$$ dx = -sin φ·dφ; y entonces:

$$I = \int_C \frac{x\, \text{arc}\cdot\sin x}{y} dx = \int_{-\pi}^{0} \frac{\cos\varphi\cdot \text{arc}\cdot\sin(\cos\varphi)}{\sin\varphi}(-\sin\varphi)\,d\varphi;$$

haciendo ahora la sustitución: $\begin{cases} t = \text{arc}\cdot\sin(\cos\varphi) \\ \cos\varphi = \sin t; \end{cases}$, se tiene que:

-sinφ·dφ = cost·dt ; $-\sqrt{1-\cos^2\varphi}\,d\varphi = \cos t{\cdot}dt$,

$\sqrt{1-\sin^2 t}\,d\varphi = \cos t{\cdot}dt\ ; -\cos t{\cdot}d\varphi = \cos t{\cdot}dt$; luego : dφ = -dt;

(resolviéndola por partes: u = t; du = dt; v = - cost; dv = sint·dt), resulta, en definitiva:

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} t\sin t\,dt = = \left[-t\cdot\cos t + \int \cos t\,dt\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} = [\sin t - t\cos t]_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi/2} = 2,$$

o sea, se trata del intervalo: [0,2] .

Si representamos la función económica, resultará que:

$$\begin{cases} u(2\text{-}x) = 1 \text{ si } 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ u(x\text{-}1) = 1 \text{ si } x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

Es decir, $\begin{cases} y = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ y = 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$; $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} = \text{valor medio. } \omega = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

$$a_n = \int_1^2 \cos n\,\omega\, x\, dx = \left.\frac{\sin n\,\omega\, x}{n\,\omega}\right]_1^2 = \frac{\sin 2n\,\pi}{n\,\omega} - \frac{\sin n\,\pi}{n\,\omega} = 0.$$

$$b_n = \int_1^2 \sin n\,\omega\, x\, dx = -\left.\frac{\cos n\,\omega\, x}{n\,\omega}\right]_1^2 = \frac{-\cos 2n\,\pi}{n\,\omega} + \frac{\cos n\,\pi}{n\omega} = \frac{-1}{n\,\omega} + \frac{(-1)^n}{n\,\omega}.$$

$$\begin{cases} b_n = 0 \text{ para } n \text{ par.} \\ b_n = -\frac{2}{n\omega} = -\frac{2}{n\pi} \text{ para } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Y el desarrollo pedido será:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right).$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2} - \frac{2\sin x}{\pi}; y = \frac{1}{2} - \frac{2\sin x}{\pi} - \frac{2\sin 3x}{3\pi}.$$

Ejemplo 32º:

Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de período 2π tal que:

$$\begin{cases} y = \pi, \text{si } & -\pi \leq x \leq 0 \\ y = x, \text{si } & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Solución:

Si representamos la función económica, resultará que:

$$\frac{a_0}{2} = \text{ valor medio } = \frac{\pi \cdot \pi + \frac{1}{2}\pi \cdot \pi}{2\pi} = \frac{3\pi}{4}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi \cos n\,x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos n\,x\,dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right].$$

$$\begin{cases} a_n = 0 \text{ para } n \text{ par.} \\ a_n = -\dfrac{2}{\pi n^2} \text{ para } n \text{ impar.} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi \sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx = \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \left[\frac{-1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right] + \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right] = -\frac{1}{n}.$$

Su desarrollo sería, entonces, de la forma:

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi 1^2}\cos x - \frac{2}{\pi 3^2}\cos 3x - \frac{2}{\pi 5^2}\cos 5x + \cdots -$$
$$-\frac{1}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x \cdots$$

Las sucesivas sumas parciales, hasta el orden 3, son:

$$y = \frac{3\pi}{4}; y = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\cos x}{\pi}; y = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\cos x}{\pi} - \frac{2\cos 3x}{9\pi}.$$

Ejemplo 33º:

Dada la función económica: y = $|\sin x|$ desarrollarla en serie de Fourier en la forma compleja.

Solución:

Sabemos que: $C_n = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\,e^{-jnx}dx$ (empleando la notación de la unidad imaginaria: i = j). Entonces:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin x\, e^{-jnx}dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\, e^{-jnx}dx\right];$$

$$\int \sin x\, e^{-jnx}dx = \frac{e^{-jnx}}{1-n^2}(-jn\sin x - \cos x)\ ;$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-jnx}}{1-n^2}(-jn\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi} + \frac{e^{-jnx}}{1-n^2}(jn\sin x + \cos x)\Big|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-jn\pi}}{1-n^2} + \frac{1}{1-n^2} + \frac{e^{-2jn\pi}}{1-n^2} + \frac{e^{-jn\pi}}{1-n^2}\right).$$

Pero se cumple que:

$$\begin{cases} e^{-jn\pi} = \cos n\pi - j\sin n\pi = \cos n\pi, & \text{pues n es entero.} \\ e^{-2jn\pi} = \cos 2n\pi - j\sin 2n\pi = 1, & \text{" n " "} \end{cases}$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\cos n\pi}{1-n^2} + \frac{2}{1-n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{1-n^2} + \frac{1}{1-n^2}\right].$$

$$\begin{cases} C_n = 0 \text{ para } n \text{ impar} \\ C_n = \dfrac{2}{\pi(1-n^2)} \text{ para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Luego el desarrollo pedido será:

$$|\sin x| = y = \cdots - \frac{2}{15\pi}e^{-j4x} - \frac{2}{3\pi}e^{-2jx} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi}e^{2jx} - \frac{2}{15\pi}e^{4jx} + \cdots$$

2. AMPLIACIÓN DEL CÁLCULO VARIACIONAL

2.1. INTRODUCCIÓN. CÁLCULO DE VARIACIONES Y CONTROL ÓPTIMO

La economía dinámica permite los cambios en las variables económicas en el tiempo, incluyendo los sistemas dinámicos. El problema de encontrar soluciones óptimas para estos cambios se estudia en el cálculo variacional y en la teoría del control interno. Con anterioridad a la segunda guerra mundial (1939-1945), Frank P. Ramsey[9] y Harold Hotelling[10] ya usaron el cálculo de variaciones para ese fin.

[9] Frank P. Ramsey (1903-1930) fue un matemático y filósofo inglés cuyos estudios y actividad docente tuvieron lugar en la Universidad de Cambridge. Hizo importantes contribuciones teóricas a la matemática, la estadística y la economía. Sus preocupaciones intelectuales principales eran, sin embargo, de orden filosófico. En este sentido, yendo en contra del intuicionismo y el formalismo de Hilbert, buscó continuar el programa logicista de Russell y Whitehead, tal como fue planteado en los *Principia Mathematica*.

[10] Harold Hotelling (1895-1973) fue un matemático, estadístico e influyente economista. Fue Profesor Asociado de Matemáticas en la Universidad de Stanford desde 1927 hasta 1931, miembro de la facultad de la Universidad de Columbia desde 1931 hasta 1946, y Profesor de Estadística Matemática en la Universidad de Carolina del Norte en Chapel Hill, desde 1946 hasta su muerte. Hotelling es conocido en estadística por la distribución T cuadrado de Hotelling y su uso en el contraste de hipótesis estadístico y

Siguiendo el trabajo de Richard Bellman acerca de la programación dinámica y la traducción al inglés del 1962 del trabajo anterior de L. Pontryagin *et alt*, la teoría del control óptimo fue usada más extensamente en la economía para resolver los problemas dinámicos, especialmente en aquellos relacionados con el equilibrio del crecimiento económico y la estabilidad de los sistemas económicos del cual, un ejemplo de los libros de texto, es el consumo óptimo y el ahorro: una diferencia crucial entre los modelos deterministas y estocásticos. Otras aplicaciones a la teoría del control óptimo incluyen las presentadas en las finanzas, los inventarios y la producción.

En nuestro anterior libro titulado "Aplicación a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes", citado en la bibliografía, se trataba la aplicación del cálculo de variaciones a las funciones económicas de una sola variable. Ello constituye, sin duda, una simplificación de la problemática real, habida cuenta de que suelen ser varias –a menudo numerosas- las variables explicativas que aparecen en la casuística económica, tanto micro como macroeconómica.

Por ello hemos creído conveniente realizar una breve exposición teórica dando idea de la determinación de funciones extremales de varias variables independientes, que hacen estacionarios los valores de integrales múltiples, problema éste de aplicación frecuente en la técnica matemática del equilibrio elástico.

Si Ω es una región limitada en el plano x0y por una curva cerrada C, y u (x, y) es una función real definida sobre Ω que toma valores prefijados sobre el contorno C, siendo por lo demás arbitraria (excepto las hipótesis conocidas de derivabilidad), podemos pensar que tal función define una superficie variable en el espacio con su contorno fijo.

2.2. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA CON FRONTERAS FIJAS

Analizaremos, ahora, el caso de varias variables explicativas de un fenómeno económico, concretamente de dos, por su mayor simplicidad en la notación. El caso n-dimensional no es más que una extensión o generalización directa del mismo. Consideremos un funcional de la forma:

$$A(u) = \iint_{\Omega} L(x, y, u, u_x, u_y)\, dx \cdot dy \,,$$

y nos planteamos el problema de hallar una función *u* estacionaria que asigne un valor estacionario a esta integral doble, con u: $\Omega \rightarrow \Re$, siendo

en las regiones de confianza. También introdujo el análisis de la correlación canónica. Al comienzo de su carrera en estadística, Hotelling estuvo influenciado por R.A. Fisher, cuyos *Statistical Methods for Research Workers* tuvieron "una importancia revolucionaria", de acuerdo al propio Hotelling.

$\Omega \subset \Re^2$. Supondremos, de nuevo, que la función *u* es un mínimo de A, con $u \in C^1(\Omega)$ tal que $u(x,y) = u_D(x,y)$ en $\partial\Omega$. Definiendo, para $v \in C_0^1(\Omega)$, por lo que Ω es un dominio finito del plano. Entonces:

$$F(t) = A(u + tv) = \iint_\Omega L(x,y,u+tv,u_x + tv_x,u_y + tv_y)\,dxdy \text{ , obtenemos:}$$

$$F'(t) = \iint_\Omega \left(L_u(x,y,u+tv,u_x + tv_x,u_y,+tv_y)v + L_{u_x}(x,y,u+tv,u_x + tv_x,u_y + tv_y)v_x + \right.$$
$$\left. + L_{u_y}(x,y,u+tv,u_x + tv_x,u_y + tv_y)v_y\right)dxdy \text{ ,}$$

de modo que en t = 0 se tiene:

$$0 = \delta_u J(v) = F'(0) = \iint_\Omega \left(L_u(x,y,u,u_x,u_y)v + L_{u_x}(x,y,u,u_x,u_y)v_x + \right.$$
$$\left. + L_{u_x}(x,y,u_x,u_y)v_y\right)dxdy \text{ .}$$

Usando el teorema de la divergencia deducimos que:

$$\iint_\Omega \left(L_u(x,y,u,u_x,u_y) - \frac{\partial}{\partial x}L_{u_x}(x,y,u,u_x,u_y) - \frac{\partial}{\partial y}L_{u_y}(x,y,u_x,u_y)\right) v\,dxdy = 0 \text{ ,}$$

para toda $v \in C_0^1(\Omega)$. Finalmente, una extensión a dos dimensiones nos permite obtener la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson correspondiente para una extremal, a saber:

$$L_u(x,y,u,u_x,u_y) - \frac{\partial}{\partial x}L_{u_x}(x,y,u,u_x,u_y) - \frac{\partial}{\partial y}L_{u_y}(x,y,u_x,u_y) = 0 \text{ ,}$$

que es una EDP de segundo orden a la que tiene que satisfacer la función *u*, y que resulta análoga a la de Euler-Lagrange-Poisson en el caso de la integral simple y de una sola variable independiente. Desarrollándola, resulta:

$L_{u_x^2} \cdot r + 2L_{u_x u_y} \cdot s + L_{u_y^2} \cdot t + L_{u_x u} \cdot u_x + L_{u_y \cdot u} \cdot u_y + L_{u_x \cdot x} + L_{u_y \cdot y} - L_u = 0$, que es una ecuación lineal en las derivadas segundas r, s, y t pero, en general, no en las primeras. Se trata de una ecuación del tipo Monge, llamada, también, “quasi-lineal”. Puede integrarse esta ecuación buscando una “integral primera o intermedia” de ella, es decir, una ecuación de primer orden como $\varphi(x,y,z,u_x,u_y) = 0$.

Para la integral doble: $A(u) = \iint_\Omega L(x,y,u,u_x,u_y)\,dx{\cdot}dy$, las condiciones naturales sobre el contorno son:

$L'_{u'_x} \dfrac{dy}{ds} - L'_{u'_y} \dfrac{dx}{ds} = 0$, siendo *s* la longitud del referido contorno.

El problema, en fin, puede generalizarse al espacio afín tridimensional euclídeo, con u(x,y,z): $\Omega \to \Re$, siendo $\Omega \subset \Re^3$. Entonces, con tres variables:

$$A(u) = \iiint_{\Omega} L(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

o bien al espacio n-dimensional; con $\Omega \subset \Re^n$, $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y:

$$A(u) = \int \ldots \overset{n}{\cup} \int_{\Omega} L(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}) \cdot \prod_{i=1}^{n} \cdot dx_i .$$

Ejemplo: Sería el caso de optimizar una función económica E = f(A), siendo A el funcional dado por: $A(u) = \iint (u_x'^2 + u_y'^2) \cdot dx \cdot dy$.

Habría, pues, que determinar los extremales de A, teniendo en cuenta que: $\varphi = u_x'^2 + u_y'^2$. Entonces:

$$\varphi'_u = 0;\ \varphi'_{u'_x} = 2 \cdot u'_x;\ \varphi'_{u'_y} = 2 \cdot u'_y;\ \text{de donde: } \frac{\partial}{\partial x} \varphi'_{u'_x} = 2 \cdot u''_{x^2};\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi'_{u'_y} = 2 \cdot u''_{y^2},$$

y por tanto, la condición necesaria buscada será:

$$\varphi'_u - \frac{\partial}{\partial x} \varphi'_{u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \varphi'_{u'_y} = 0;\ \text{ esto es: } -2u''_{x^2} - 2u''_{y^2} = 0;\ \text{ o también: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

que resulta ser la conocida ecuación diferencial lineal de Laplace, de 2º orden y homogénea de coeficientes constantes.

El discriminantes ofrece: $(b^2 - 4ac) = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$, luego se trata de un problema elíptico bidimensional que admite como solución a cualquier función u(x,y) armónica. Una vez hallada u, se resuelve la integral A(u) y se obtiene el valor de la función económica E = f(A).

Por lo que se refiere a la ecuación de Laplace, se obtienen las soluciones: $u(x,y) = (A_1 \cdot e^{Kx} + B_1 \cdot e^{-Kx}) (A_2 \cdot \cos Ky + B_2 \cdot \sin Ky)$, con A_1, B_1, A_2, B_2 y K como constantes arbitrarias, y también:

$u(x, y) = (A'_1 \cdot \cos K'x + B'_1 \cdot \sin K'x)(A'_2 \cdot e^{K'y} + B'_2 e^{-K'y})$, considerando también a A'_1, B'_1, A'_2, B'_2 y K' como constantes arbitrarias.

2.3. CONDICIONES SUFICIENTES DE EXTREMO

2.3.1. Consideraciones previas

En el capítulo 8 de nuestro anterior libro titulado “Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes”, se realiza una aplicación a las funciones económicas del cálculo de variaciones, desarrollándose el tema tanto desde el punto de vista teórico como mediante la resolución de numerosos ejercicios. Convendría, ahora, ampliar lo anteriormente expuesto especificando los criterios teóricos existentes para delimitar las condiciones de suficiencia de extremos “débiles” y “fuertes”.

En los epígrafes siguientes vamos a indicar las condiciones generales de suficiencia para que una cierta función sea extremal de una funcional dada. Pero antes resulta preciso fijar una noción, de gran importancia, que se conoce con el nombre de *campo de extremales*.

2.3.2. Campo de extremales

Si por cada punto de una región D del plano pasa una y sólo una curva de la familia y = y(x,C), se dice que esta familia forma un “campo propio” en D. El coeficiente angular de la tangente p(x,y) a la curva de la familia considerada en (x,y) se llama inclinación del campo en el punto (x,y).

Si todas las curvas de la familia y = y(x,C) pasan por un cierto punto (x_0, y_0) entonces es claro que si $(x_0, y_0) \in$ D, la familia no forma un campo propio. Sin embargo, si la familia y = y(x,C) cubre una cierta región D y sólo se cortan –en su interior- en el centro del haz, se dice que las curvas de dicha familia forman un “campo central” en D.

Si un campo central o propio está formado por una familia de extremales, se dice que es un “campo de extremales”.

Sea y(x) una extremal de la funcional

$$F[y(x)] = \int_a^b \varphi(x, y, y')\,dx \,,$$

con puntos frontera A(a,c) y B(b,d) fijos. Por definición, se dice que la extremal y = y(x) está incluida en un campo de extremales, si existe una familia de extremales y = y(x,C) que forma un campo, contiene a la extremal y = y(x), esto es y = y(x) se obtiene dando un valor particular a C, y dicha extremal no pertenece a la frontera de D, donde y = y(x,C) formaba un campo.

2.3.3. Condición de Jacobi

Dada la familia de curvas f(x,y,C) = 0, se denomina curva C-discriminante de dicha familia a la curva que se obtiene eliminando el parámetro C, entre las dos ecuaciones:

$$f(x,y,C) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial C} = 0 \ .$$

La curva C-discriminante incluye, en particular, la envolvente de la familia y los lugares geométricos de los puntos múltiples de dichas familias. Si f(x,y,C) = 0 es la ecuación de un haz de curvas, su centro pertenece también a la curva C-discriminante. Si el arco AB de la extremal y = y(x) no tiene puntos comunes distintos de A, con la curva C-discriminante del haz de extremales que incluye a la dada, las extremales del haz suficientemente próximas a AB, no se cortan y forman por tanto un campo central, que incluye el arco AB en un cierto entorno; pero si el arco AB de y = y(x) tiene en común con la curva C-discriminante otro punto A* $\neq$ A, entonces, las curvas del haz próximas a y = y(x) pueden cortarse entre sí en las proximidades de A* y, por tanto, las curvas del haz no forman campo.

El resultado anterior, que se conoce con el nombre de "condición de Jacobi[11]" se puede resumir como sigue:

"Para construir un campo central de extremales con centro en el punto A y que contenga el arco AB de la extremal, es suficiente que el punto A*, conjugado de A, no pertenezca al arco AB".

Para obtener la expresión analítica de dicha condición, basta observar que y = y(x,C) son soluciones de la ecuación de Euler, luego:

$$\varphi'_y\left[x, y(x,C), y'_x(x,C)\right] - \frac{d}{dx}\varphi'_{y'}\left[x, y(x,C), y'_x(x,C)\right] = 0 \ .$$

Derivando esta igualdad con respecto a C y haciendo: $\frac{\partial y(x,C)}{\partial C} = u$,

se obtiene, después de agrupar los términos convenientemente:

$$\left(\varphi''_{y^2} - \frac{d}{dx}\varphi''_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}\left(\varphi''_{y'^2} \cdot u'\right) = 0 \ .$$

[11] C. J. Jacobi (1804-1851), matemático alemán. Autor muy prolífico, contribuyó en varios campos de la matemática, principalmente en el área de las funciones elípticas (junto con Abel), el álgebra, la teoría de números y las ecuaciones diferenciales. También destacó en su labor pedagógica, por la que se le ha considerado el profesor más estimulante de su tiempo. Fue el primer matemático judío en ocupar el cargo de profesor en una universidad alemana.

Si la solución *u* de esta ecuación que se anula en el centro del haz, para x = a, se anula en algún otro punto de [a,b], el conjugado de A pertenece al arco AB.

Por el contrario, si existe una solución de la ecuación que se anula para x = a y no se anula en ningún otro punto de [a,b], se cumple la condición de Jacobi y se puede incluir el arco AB de la extremal en un campo central de extremales, con centro en A.

Veamos, al respecto, el siguiente ejemplo:

Se trata de formar la ecuación de Jacobi para la funcional: $F[y(x)] = \int_0^{\frac{n}{2}} \left(y'^2 - y^2\right)dx$, y verificar si se cumple la condición de Jacobi para la extremal que pasa por los puntos $A(0,0)$ y $B\left(\frac{\pi}{2},0\right)$. A partir del funcional F dado, optimizar la función económica que representa los costes variables, expresados en millones de € , de un establecimiento comercial, dada por la expresión: $E_c = 4 - 3F^2 - e^{2F}$.

Solución:

Como $\varphi = y'^2 - y^2$, se tendrá:

$$\varphi'_y = -2y\,; \quad \varphi'_{y'} = 2y'\,; \quad \varphi''_{y^2} = -2\,; \quad \varphi''_{yy'} = 0\,; \quad \varphi''_{y'^2} = 2\,.$$

Luego la ecuación de Jacobi adoptará la forma: $-2u - \frac{d}{dx}\left(2u'\right) = 0$

de donde u'' + u = 0 , que es una EDO homogénea cuya solución general será: $u = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, y como u(0) = 0, $0 = C_1$ y las curvas del haz son la solución particular: $u = C_2 \sin x$, que no se anulan en ningún punto distinto de la recta x = 0 (eje de ordenadas) y, por lo tanto, se cumple la condición de Jacobi.

Por otra parte, las condiciones de contorno dadas son:

$$y(0) = 0\ ,\ y(\pi/2) = 0.$$

El extremo sólo se puede alcanzar en y = 0. Calculemos $\varphi''_{'2} = 2 > 0$, para valores cualesquiera de y'. Se puede comprobar que en esta recta (eje de abscisas) existe un mínimo débil.

Como sea que: y = 0 , y' = 0 , tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$F(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) \cdot dx = 0$, y la función económica en cuestión valdrá:

$$[OPT]\ E_c = 4 - 3F^2 - e^{2F} = 4 - 1 = 3\ ,$$

lo que supone unos costes variables del comercio antedicho de:

CV = 3.000.000 € , para el ejercicio económico de que se trate.

2.3.4. La función de Weierstrass

Sea ahora la funcional: $F[y(x)] = \int_a^b \varphi(x, y, y')\,dx$,

con y(a) = c, y(b) = d y supongamos que cumple la condición de Jacobi y por tanto la extremal C que pasa por (a, c), (b, d) se puede incluir en un campo con inclinación p(x, y).

Se puede probar que el ΔF, que experimenta la funcional al pasar de la extremal C a otra curva próxima, se puede escribir así:

$$\Delta F = \int \left[\varphi(x, y, y') - \varphi(x, y, p) - (y' - p)\varphi'_p(x, y, p)\right] dx\ .$$

La función de Weierstrass[12] es la función subintegral (integrando) y se representa del siguiente modo:

$$E\,(x, y, p, y') = \varphi(x, y, y') - \varphi(x, y, p) - (y' - p)\varphi'_p(x, y, p)\ .$$

Es evidente que una condición suficiente para que la funcional F tenga un mínimo es que $E \geq 0$ y para que tenga un máximo, deberá cumplirse análogamente $E \leq 0$. Si el extremo es débil bastará que $E \geq 0$ (o $E \leq 0$ en el caso de máximo) se cumpla para valores de *x* e *y* próximos a la extremal investigada y para valores de y’ cercanos a p(x, y); para que exista un extremo fuerte se deben cumplir análogas condiciones y además cumplirse para y’ cualquiera.

Veamos ahora el siguiente ejemplo:

[12] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) fue un matemático alemán conocido como “el padre del análisis moderno”. A pesar de haber dejado la universidad, estudió matemáticas y se entrenó como profesor, dando clases de matemáticas, física y botánica. Weierstrass formalizó la definición de la continuidad de una función, demostrando el teorema del valor medio y el teorema de Bolzano-Weierstrass usado después para estudiar las propiedades de las funciones continuas en intervalos cerrados.

Sea la funcional: $F[y(x)] = \int_0^1 y'^3 dx$, con las condiciones de frontera: y(0) = 0, y(1) = 1. Como $\varphi = y'^3$, sólo depende de y' (ver nuestra anterior monografía, cap. 8a), resultará que, por aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, resulta: $\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 3y'^2 ; \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} = 6y' \Rightarrow y'' = 0$, y la ecuación característica de la homogénea: $\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, con lo que la solución general de la EDO será: $y = C_1x + C_2$.

Aplicando ahora las condiciones de frontera dadas, veamos que:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0 \\ y(1) = C_1 + C_2 = 1 \end{cases}, \text{ entonces } C_1 = 1.$$

Resulta la recta: y = x (bisectriz del primer cuadrante del círculo).

Las extremales, pues, son las rectas de ecuación: $y = C_1x + C_2$; el extremo sólo puede alcanzarse sobre la recta de ecuación: y = x. El haz de rectas $y = C_1x$, forma un campo central, que evidentemente incluye a la extremal, cumpliéndose la condición de Jacobi; la función E, toma la forma:

$$E = y'^3 - p^3 - (y' - p) \cdot 3p^2 = (y' - p)^2 (y' + 2p).$$

Si y' toma valores próximos a p = 1, la función E es positiva, luego se cumplen las condiciones de mínimo débil, un mínimo fuerte, no existe, puesto que si y' toma valores cualesquiera y' + 2p puede tener cualquier signo.

Si ahora, por ejemplo, a partir del funcional dado, se pretende optimizar la función económica que representa los costes totales de una empresa determinada (expresados en millones de €) y viene dada por la expresión: $E_c = 6 + 3 \cdot e^F$, se tendrá que (con y = x , y' = 1):

$F(y) = \int_0^1 y'^3 \cdot dx = 1$, y la función económica en cuestión valdrá:

$$[OPT]\ E_c = 6 + 3 \cdot e^F = 14'154845 \equiv 14.154.845 \text{ € (CT)}.$$

2.3.5. Condición de Legendre

Si en la función de Weierstrass se sustituye $\varphi(x,y,y')$, por su desarrollo mediante la fórmula de Taylor, se puede escribir la igualdad aproximada siguiente:

$$E(x,y,p,y') = \frac{(y' - p)^2}{2!} \varphi''_{y'^2}(x,y,q),$$

siendo q un número intermedio entre y’ y p.

Veamos como ejemplo de ello la misma funcional del ejemplo anterior. Se tendrá que: $\varphi = y'^3$; $\varphi'_{y'} = 3y'^2$; $\varphi''_{y'^2} = 6y'$.

Como $\varphi''_{y'^2}$, para valores de y’ próximos a p = 1, se tiene $\varphi''_{y'^2} > 0$, luego existe mínimo débil; para y’ cualquiera no se puede afirmar nada, luego no existe mínimo fuerte.

A continuación, vamos a resumir en los siguientes cuadros las condiciones de extremo débil y de extremo fuerte, indicando las distintas formas de combinar las condiciones de suficiencia:

EXTREMO DÉBIL

1ª	$\varphi'_Y - \frac{d}{dx}\varphi'_{y'} = 0$		
2ª	Condición de Jacobi	Condición de Jacobi	Existe un campo de extremales que incluye a la dada
3ª	Se estudia $\varphi''_{y'^2}$ en la extremal dada. Si > 0 mínimo, si < 0 máximo	Se estudia E para los puntos próximos a la extremal y para y’ próxima a p(x,y). Si E ≥ 0 mínimo, si E ≤ 0 máximo	Se estudia E para los puntos próximos a la extremal y para y’ próxima a p(x,y). Si E ≥ 0 mínimo, si E ≤ 0 máximo

EXTREMO FUERTE

1ª	$\varphi'_Y - \frac{d}{dx}\varphi'_{y'} = 0$		
2ª	Condición de Jacobi	Condición de Jacobi	Existe un campo de extremales que incluye a la dada
3ª	Se estudia $\varphi''_{y'^2}$ para los puntos (x,y) próximos a los puntos de la extremal y para valores cualesquiera de y’. Si $\varphi''_{y'^2} \geq 0$ mínimo, si ≤ 0 máximo	Se estudia E para los puntos próximos a la extremal y para y’ cualquiera. Si E ≥ 0 mínimo, si E ≤ 0 máximo	Se estudia E para los puntos próximos a la extremal y para y’ cualquiera. Si E ≥ 0 mínimo, si E ≤ 0 máximo

2.4. MÉTODOS DIRECTOS EN LOS PROBLEMAS DE CÁLCULO DE VARIACIONES

La idea directriz de los llamados “métodos directos” es considerar los problemas variacionales como el límite de un problema sobre el extremo de una función con un número finito de variables. Sólo nos detendremos a exponer someramente el llamado de diferencias finitas, aunque existen otros, como el de Ritz o el de Kantorovich, mucho más potentes, pero que rebasan el carácter práctico de este libro.

Sea la funcional: $F[y(x)] = \int_a^b \varphi(x, y, y')dx$. Dividamos el segmento [a,b] en n partes iguales, mediante las abscisas: $a = x_0$, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$, …$x_0 + (n-1)\Delta x$, $x_n = b$, siendo:

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y así, la funcional se transforma en una función $\Psi(y_0, y_1, y_2 \dots y_n)$ de las (n-1) variables y_1, y_2,… y_{n-1}. Eligiendo las ordenadas y_i, $\forall i = 1, 2, \dots n-1$ que hagan que la función Ψ tenga extremo, para lo cual bastará:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} = 0, \dots \frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}} = 0 \;,$$

y haciendo después $n \to \infty$, se obtiene la solución del problema planteado.

2.5. EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio 1º.

Hallar la condición de transversalidad para la funcional: $F[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$, con la condición: $y(0) = I_1 + I_2$, siendo I la integral: $I = \iint_\sigma \left(xz\cos\alpha + yz\cos\beta - z^2 \cdot \cos\gamma\right)d\sigma$, tal que: a) si se extiende al casquete superior, en su cara externa, de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ limitado por la curva del contorno $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 1 \end{matrix}\right\}$ (caso I_1), b) En este caso, se extiende sobre el casquete del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$, con el mismo contorno (caso I_2).

Solución:

a) Sobre el casquete de esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

$$\cos\alpha = \frac{x}{R} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{y}{R} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{z}{R} \quad ; \quad d\sigma = \frac{dx \cdot dy}{|\cos\gamma|} = \frac{R \cdot dx \cdot dy}{z}.$$

Obsérvese que γ es siempre positivo ya que z es siempre positiva (por eso en $|\cos\gamma|$ tomamos $\left.\frac{z}{R}\right)$. cos α y cos β cambian de signo cuando lo hacen *x* e *y* respectivamente.

$$I_1 = \iint_\sigma \left(xz\frac{x}{R} + yz\frac{y}{R} - z^2\frac{z}{R} - z^2\frac{z}{R} \right)\frac{R\,dx\,dy}{z} = \iint_\sigma \left(x^2 + y^2 - z^2\right)dx\,dy =$$
$$= \iint_R \left(x^2 + y^2 - 4 + x^2 + y^2\right)dx\,dy = \iint_R \left(2x^2 + 2y^2 - 4\right)dx\,dy.$$

Pasando a coordenadas polares: $\left.\begin{matrix} x = \rho\cdot\cos\theta \\ y = \rho\cdot\sin\theta \end{matrix}\right\} \frac{\partial(xy)}{\partial(\rho\theta)} = \rho$, entonces:

$$I_1 = \iint \left(2\rho^2\cos^2\theta + 2\rho^2\sin^2\theta - 4\right)\rho d\rho d\rho = \iint \left(2\rho^2 - 4\right)\rho\cdot d\rho\cdot d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \left(2\rho^3 - 4\rho\right)d\rho = 2\pi\left[\frac{2\rho^4}{4} - 2\rho^2\right]_o^{\sqrt{3}} = 2\pi\left[\frac{9}{2} - 6\right] = -\frac{2\pi 3}{2} = -3\pi.$$

b) Sobre el casquete del paraboloide: $x^2 + y^2 = 3z$. En este caso:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \dfrac{2x}{\pm\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 9}} \\ \cos\beta = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \dfrac{2y}{\pm\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 9}} \\ \cos\gamma = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \dfrac{-3}{\pm\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 9}} \end{cases}$$

Obsérvese que cos α y cos β son positivos cuando *x* e *y* son positivos y negativos cuando $x < 0$ e $y < 0$.

El signo nos lo da, pues, la *x* y la *y*, por eso tomamos el signo + de la raíz. El cos γ es siempre negativo, por eso tomamos el valor + de la raíz.

Entonces:

$$d\sigma = \frac{dx{\cdot}dy}{|\cos\gamma|} = \frac{dx{\cdot}dy}{\dfrac{-3}{-\sqrt{4x^2+4y^2+9}}} = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+9}}{3}\,dx{\cdot}dy\,,$$

ya que siempre dσ es positivo. Entonces:

$$I_2 = \iint_\sigma \left(xz\cos\alpha + yz\cos\beta - z^2\cos\gamma\right)d\sigma = \iint_\sigma \left(xz\,2x + yz\,2y + 3z^2\right)\frac{dx\,dy}{3} =$$

$$= \iint_R \left[\frac{x^2+y^2}{3}\left(2x^2+2y^2+x^2+y^2\right)\right]\frac{dx\,dy}{3} = \iint_R \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{3}dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{3}\iint_R \left(x^2+y^2\right)^2 dx\,dy.$$

Pasando, en fin, a coordenadas polares, se alcanza la solución:

$$I_2 = \frac{1}{3}\iint \rho^4\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^5 d\rho = \frac{1}{3}2\pi\left.\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\cdot 27}{3\cdot 6} = 3\pi\,.$$

El resultado es el mismo salvo la diferencia de signo, pero ello es debido a que al tomar las caras exteriores las normales son opuestas (sobre la esfera es hacia arriba y sobre el paraboloide es hacia abajo).

Esta igualdad de resultados absolutos nos dice que la integral de superficie no depende de la superficie a la que se extienda, sino que sólo depende del contorno.

Por último, se tendrá que la condición expresada en el enunciado del problema quedará establecida así:

$$y(0) = I_1 + I_2 = -3\pi + 3\pi = 0\,.$$

Como resulta que: $\varphi + \left(\lambda' - y'\right)\varphi'_{y'} = 0$, se tendrá:

$\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y} + \left(\lambda' - y'\right)\dfrac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = 0$, de donde: $1 + y'^2 + (\lambda' - y')y' = 0$,

o bien: $1 + \lambda' y' = 0$, que nos dice que la condición de transversalidad se reduce a la de ortogonalidad.

Ejercicio 2º.

Se define la familia de sinusoides: y = C·sin x. Decir si forma campo propio o campo central en las regiones siguientes:

a) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
b) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$
c) $0 \leq x \leq 2\pi$

Solución:

En el caso a) forma un campo central; en el b) es un campo propio; en el c) el referido haz, no forma campo.

Ejercicio 3º.

a) ¿Cumple la condición de Jacobi la extremal de la funcional siguiente:

$F[y(x)] = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + x^2\right)dx$, que pasa por los puntos A(0,0) y B(1,0)?

b) Hallar el valor de la susodicha funcional.

Solución:

a) La ecuación de Jacobi, adopta la forma homogénea: u'' – u = 0, cuya ecuación característica es: $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$.

Así pues, se trata de una ecuación diferencial ordinaria que tiene como solución general: $u = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Como sea que: u(0) = 0, se tendrá: $0 = C_1 + C_2$ y $C_2 = - C_1$,

y las curvas del haz adoptan la forma: $u = C_1(e^x - e^{-x})$, solución particular que sólo se anula en x = 0 y, por tanto, se cumple la condición de Jacobi.

b) Por otra parte, en la búsqueda de la curva extremal de F(y), tendremos que: $\varphi = y'^2 + y^2 + x^2$, con lo que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2y';\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = 2y'',$$

y la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson será, en este caso:

$$2y - 2y'' = 0 \text{ , o sea: } y'' - y = 0 \text{ ,}$$

cuya ecuación característica es: $\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, y resulta la solución general: $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$, que con las condiciones iniciales prefijadas:

$$y(0) = 0 \text{ ; } y(1) = 0 \text{ , se tendrá que:}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 e + \dfrac{C_2}{e} \end{cases}$$

de donde: $C_1(e^2 - 1) = 0$, y entonces: $C_1 = C_2 = 0$, con lo que la curva extremal, que verifica las condiciones de extremo, sólo puede alcanzarse en la integral particular: $y = 0$ (eje de abscisas).

Entonces, la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$$F(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + x^2) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ .}$$

Ejercicio 4º.

Mediante el método de las diferencias finitas obtener la ecuación de Euler para la funcional: $F[y(x)] = \int_a^b \varphi(x, y, y')\, dx$.

Solución:

La función Ψ, adoptará la forma:

$$\Psi(y_1, y_2, \ldots y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right) \Delta x \text{ .}$$

Calculemos ahora: $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0$. Esto es:

$$\varphi'_y\left(x_i, y_i \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right) \Delta x + \varphi'_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right)\left(-\frac{1}{\Delta x} \right) +$$

$$+ \varphi'_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = 0 \text{ , que también se puede escribir así:}$$

$$\varphi'_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x} \right) - \frac{\varphi'_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x} \right) - \varphi'_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = 0 \text{ , o bien:}$$

$$\varphi'_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta \varphi'_{y'}}{\Delta x} = 0,$$

que en el límite, cuando $\Delta x \to 0$, constituye la conocida ecuación de Euler:

$$\varphi'_y - \frac{d}{dx}\varphi'_{y'} = 0.$$

ANEXO 1

TABLA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace (1780), que es un operador lineal como tendremos ocasión de comprobar seguidamente, toma su nombre en honor de aquel gran matemático francés. Constituye una herramienta útil para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que aparecen de forma natural en diversos campos de la ciencia, la técnica y la economía. También resulta particularmente útil para la resolución de las EDP como las que se tratan en la presente monografía, por lo que, a continuación, se incluye un extensa tabla con las funciones generatrices Laplace más usuales y sus correspondientes transformadas.

Para una información más extensa acerca de esta herramienta matemática, puede consultarse el capítulo 7 de nuestra anterior monografía titulada “Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes”, citada en la bibliografía.

Conviene observar que en muchos manuales se utiliza la notación *S* (mayúscula) o *s* (minúscula) por la *p*. Aquí las podremos utilizar indistintamente, especialmente en la resolución de problemas y ejercicios de aplicación, como se puede comprobar en el texto, aunque emplearemos mayoritariamente la *p* en la resolución de las ecuaciones integrales.

Pues bien, la función η del parámetro p (que es una variable real arbitraria) que esta integral define en tal campo:

$$\eta(p) = L[y(x)] = \int_0^{\infty} e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx \quad , \forall\, x / 0 \le x < \infty ,$$

se denomina *transformada Laplace* de y(x), siendo **L** el llamado *operador de la transformada de Laplace* y siempre y cuando la integral esté definida, mientras que la función **y** se llamará “función generatriz Laplace de η”, y escribiremos: $\eta(p) = L[y(x)]$; o recíprocamente, la transformada inversa: $y(x) = L^{-1}[\eta(p)]$. A veces, especialmente en el estudio de las ecuaciones integrales, se utiliza la notación: $\eta = \phi$. La técnica más simple para identificar las transformadas inversas de Laplace consiste en reconocerlas, ya sea de memoria o bien mediante una tabla más o menos extensa como la que se adjunta posteriormente. Si no se halla en una forma reconocible, entonces ocasionalmente se puede convertir en tal forma mediante una manipulación algebraica, de tal modo que, como sea que casi todas las transformadas de Laplace son cocientes, el procedimiento más adecuado consiste en convertir primero el denominador a una forma que aparezca en la tabla correspondiente y luego el numerador de la fracción en cuestión. Ello sucede, en fin, para todos los valores de *p* para los cuales la integral impropia converja. La convergencia ocurre cuando existe el límite:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-px}\cdot y(x)\cdot dx \ .$$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
K	$\frac{K}{p}\quad(p>0)$	Sh ωx	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}\quad(p>\lvert\omega\rvert)$
$x^n(n>-1)$, $(p>0)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$	Ch ωx	$\frac{p}{p^2-\omega^2}\quad(p>\lvert\omega\rvert)$
x	$\frac{1}{p^2}\quad(p>0)$	x·sin ωx	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}\quad(p>0)$
$K\cdot e^{ax}\quad(p>-a)$	$\frac{K}{p-a}$	sin ωx · Sh ωx	$\frac{2\omega^2 p}{p^4+4\omega^4}$
sin Kx	$\frac{K}{p^2+K^2}\quad(p>0)$	cos ωx · Ch ωx	$\frac{p^3}{p^4+4\omega^4}$
cos Kx	$\frac{p}{p^2+K^2}\quad(p>0)$	$x^n\,e^{ax}$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}\quad(n>-1)\ (p>a)$
$\frac{1}{2}(e^{Kx}-e^{-Kx})$	$\frac{K}{p^2-K^2}$	$\frac{1-e^{-x}}{x}$	$l\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)$
$\frac{1}{2}(e^{Kx}+e^{-Kx})$	$\frac{p}{p^2-K^2}$	lx	$\frac{\Gamma'(1)}{p}-\frac{lp}{p}$
$x^n e^{ax}\ (n>-1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$	$\frac{\cos\alpha\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
e^{ax} sin Kx	$\frac{K}{(p-a)^2+K^2}\quad(p>a)$	$\frac{\sin\alpha\sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}p^{3/2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
e^{ax} cos Kx	$\frac{p-a}{(p-a)^2+K^2}\quad(p>a)$	$\frac{Ch\alpha\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}}e^{\frac{\alpha^2}{4p}}$
cos (ωx + K)	$\frac{p\cdot\cos K-\omega\sin K}{p^2+\omega^2}$	$\frac{Sh\alpha\sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}p^{3/2}}e^{\frac{\alpha^2}{4p}}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función η(p)	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función η(p)

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
sin (ωx + K)	$\frac{p\cdot\sin K+\omega\cdot\cos K}{p^2+\omega^2}$	$\sqrt[n]{x}$ (p > 0)	$p^{-(n+1)/n}\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right)$
$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$ $(p>0)$	$\frac{x^q}{\Gamma(q+1)}$	$\frac{1}{p^{q+1}}$ $(p>0)$
$\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}$ $(p>-\alpha)$	$e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{p+\alpha}$ $(p>-\alpha)$
$1-e^{-\alpha x}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$ $(p>0)$	$\frac{1}{b-a}(e^{-ax}-e^{-bx})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$ (p>-a) (p>-b)
$\ln\frac{x}{x_0}$ (p > 0)	$-\frac{x_0}{p}\left[\ln(x_0\cdot p)+\gamma\right]$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cdot\cos at)$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$
x^{n-1} (n = 1, 2, …)	$\frac{(n-1)!}{p^n}$ $(p>0)$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}p^{-3/2}$ $(p>0)$
$1\sqrt{x}$	$\sqrt{\pi}p^{-1/2}$ $(p>0)$	$x^{n-1/2}$ (n = 1, 2, …)	$\frac{(1)(3)(5)\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}p^{-n-1/2}$ $(p>0)$
x·cos ax	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$ $(p>0)$	$x^{n-1}e^{ax}$ (n = 1, 2, …)	$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n}$ $(p>a)$
sin ax – ax·cos ax	$\frac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$ $(p>0)$	$\frac{1}{a}e^{-x/a}$	$\frac{1}{1+ap}$
$\frac{1}{a}(e^{ax}-1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$	$1-e^{-x/a}$	$\frac{1}{p(1+ap)}$
$\frac{1}{a^2}$ x 3 $e^{-x/a}$	$\frac{1}{(1+ap)^2}$	$\frac{e^{ax}-e^{bx}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{e^{-x/a}-e^{-x/b}}{a-b}$	$\frac{1}{(1+ap)(1+bp)}$	$(1+ax)e^{ax}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
$\frac{1}{a^3}(a-x)e^{-x/a}$	$\frac{p}{(1+ap)^2}$	$\frac{ae^{ax}-be^{bx}}{a-b}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{ae^{-x/b}-be^{-x/a}}{ab(a-b)}$	$\frac{p}{(1+ap)(1+bp)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{ax}-1-ax)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función η(p)	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función η(p)

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$\sin^2 ax$	$\frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\sinh^2 ax$	$\frac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}$
$\sin\frac{ax}{\sqrt{2}}\sinh\frac{ax}{\sqrt{2}}$	$\frac{a^2p}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\frac{ax}{\sqrt{2}}\sin\frac{ax}{\sqrt{2}}-\sinh\frac{ax}{\sqrt{2}}\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{a^3}{p^4+a^4}$
$\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\cosh\frac{ax}{\sqrt{2}}$	$\frac{p^3}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\sinh\frac{ax}{\sqrt{2}}+\sin\frac{ax}{\sqrt{2}}\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{ap^2}{p^4+a^4}$
$\frac{1}{2}(\sinh ax-\sin ax)$	$\frac{a^3}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh ax-\cos ax)$	$\frac{a^2p}{p^4-a^4}$
$\frac{1}{2}(\sinh ax+\sin ax)$	$\frac{as^2}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh ax+\cos ax)$	$\frac{p^3}{p^4-a^4}$
$\cos ax\cdot\sinh ax$	$\frac{a(p^2-2a^2)}{p^4+4a^4}$	$\sin ax\cdot\cosh ax$	$\frac{a(p^2+2a^2)}{p^4+4a^4}$
$\frac{1}{2}(\sin ax+ax\cos ax)$	$\frac{ap^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\cos ax-\frac{ax}{2}\sin ax$	$\frac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{2}(ax\cdot\cosh ax-\sinh ax)$	$\frac{a^3}{(p^2-a^2)^2}$	$\frac{x}{2}\sinh ax$	$\frac{ap}{(p^2-a^2)^2}$
$\frac{1}{2}(\sinh ax+ax\cosh ax)$	$\frac{ap^2}{(p^2-a^2)^2}$	$\cosh ax+\frac{ax}{2}\sin ax$	$\frac{p^3}{(p^2-a^2)^2}$
$\frac{a\cdot\sin bx-b\cdot\sin ax}{a^2-b^2}$	$\frac{ab}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{\cos bx-\cos ax}{a^2-b^2}$	$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
$\frac{a\cdot\sin ax-b\cdot\sin bx}{a^2-b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{a^2\cdot\cos ax-b^2\cdot\cos bx}{a^2-b^2}$	$\frac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
$\frac{b\cdot\sinh ax-a\cdot\sinh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{ab}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\frac{\cos ax-\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{p}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
$\frac{a\cdot\sinh ax-b\cdot\sin bx}{a^2-b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\frac{a^2\cos ax-b^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{p^3}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$x-\frac{1}{2}\sin ax$	$\frac{a^2}{p^2(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a}\sinh ax - x$	$\frac{a^2}{p^2(p^2-a^2)}$
$1-\cos ax-\frac{ax}{2}\sin ax$	$\frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$	$1-\cosh ax+\frac{ax}{2}\sinh ax$	$\frac{a^4}{p(p^2-a^2)^2}$
$1+\frac{b^2\cos ax-a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{a^2b^2}{p(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$1+\frac{b^2\cos ax-a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{a^2b^2}{p(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
$\frac{x}{8}[\sin ax-ax\cdot\cos ax]$	$\frac{a^3p}{(p^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{8}[(3-a^2x^2)\sin ax-3ax\cdot\cos ax]$	$\frac{a^5}{(p^2+a^2)^3}$
$\frac{x}{8}(ax\cdot\cosh ax-\sinh ax)$	$\frac{a^3p}{(p^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{8}[(1+a^2x^2)\sin ax-ax\cdot\cos ax]$	$\frac{a^3p^2}{(p^2+a^2)^3}$
$\frac{1}{n!}(1-e^{-x/a})^n$	$\frac{1}{p(ap+1)(ap+2)...(ap+n)}$	$\frac{1}{8}[(3+a^2x^2)\sinh ax-3ax\cdot\cosh ax]$	$\frac{a^5}{(p^2-a^2)^3}$
$\sin(ax+b)$	$\frac{p\cdot\sin b+a\cdot\cos b}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{8}[ax\cdot\cosh ax-(1-a^2x^2)\sinh ax]$	$\frac{a^3p^2}{(p^2-a^2)^3}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{p\cdot\cos b-a\cdot\sin b}{p^2+a^2}$	$e^{-ax}-e^{ax/2}\left[\cos\frac{ax\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\sin\frac{ax\sqrt{3}}{2}\right]$	$\frac{3a^2}{p^3+a^3}$
$\frac{1+2ax}{\sqrt{\pi x}}$	$\frac{p+a}{p\sqrt{p}}$	$e^{-ax}/\sqrt{\pi x}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
$\frac{1}{2x\sqrt{\pi x}}(e^{bx}-e^{ax})$	$\sqrt{p-a}-\sqrt{p-b}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cos 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cosh 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{a/p}$	$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\sin 2\sqrt{ax}$	$p^{-3/2}e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\sinh 2\sqrt{ax}$	$p^{-3/2}e^{a/p}$	$J_0(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{p}e^{-a/p}$
$\sqrt{x/a}\cdot J_1(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{p^2}e^{-a/p}$	$(x/a)^{(s-1)/2}\cdot J_{s-1}(2\sqrt{ax})\ (s>0)$	$p^{-s}e^{-a/p}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$J_0(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$J_1(x)$	$\dfrac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$
$J_s(x) \quad (s > -1)$	$\dfrac{(\sqrt{p^2+1}-p)^s}{\sqrt{p^2+1}}$	$x^s J_s(ax) \quad \left(s > -\dfrac{1}{2}\right)$	$\dfrac{(2a)^s\,\Gamma\left(s+\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(p^2+a^2)^{s+(1/2)}}$
$\dfrac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} \quad (s>0)$	$\dfrac{1}{p^s}$	$\dfrac{4^n n!}{(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot x^{n-(1/2)}$	$\dfrac{1}{p^n\sqrt{s}}$
$\dfrac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} e^{-ax} \quad (s>0)$	$\dfrac{1}{(p+a)^s}$	$\dfrac{1-e^{ax}}{x}$	$\ln\dfrac{p-a}{p}$
$\dfrac{e^{bx}-e^{ax}}{x}$	$\ln\dfrac{p-a}{p-b}$	$\dfrac{2}{x}\sinh ax$	$\ln\dfrac{p+a}{p-a}$
$\dfrac{2}{x}(1-\cos\cdot ax)$	$\ln\dfrac{p^2+a^2}{p^2}$	$\dfrac{2}{x}(\cos bx-\cos ax)$	$\ln\dfrac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$
$\dfrac{\sin ax}{x}$	$\arctan\dfrac{a}{p}$	$\dfrac{2}{x}\sin ax\cdot\cos bx$	$\arctan\dfrac{2ap}{p^2-a^2+b^2}$
$\sin\lvert ax\rvert$	$\left(\dfrac{a}{p^2+a^2}\right)\left(\dfrac{1+e^{-(\pi/a)p}}{1-e^{-(\pi/a)p}}\right)$	---	---
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Fig. A-1.1. Transformadas de Laplace más usuales.

NOTAS EXPLICATIVAS DE LA TABLA PRECEDENTE:

1. γ es la constante de Euler-Mascheroni. La **constante de Euler-Mascheroni**, (también conocida *como constante de Euler*), a la que ya nos hemos referido con anterioridad, es una constante matemática que aparece principalmente en la teoría de números, y se denota con la letra griega minúscula γ (Gamma). Se define como el límite de la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural o neperiano, a saber:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right] = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{\lfloor x\rfloor} - \frac{1}{x}\right)dx$$

Su valor aproximado es:

$$\gamma \approx 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606\ \ldots$$

Esta constante apareció por primera vez en el año 1734, en un artículo escrito por Leonhard Euler, denominado *De Progressionibus harmonicis observationes*, calculando los 6 primeros dígitos para la constante y llamándola *C*. En 1781 calcularía otros 10 decimales más. En 1790, Lorenzo Mascheroni calcularía los primeros 19 decimales y la denotaría como *A*. Ya más tarde se denotaría de la forma moderna como γ, debido a su conexión con la función gamma, a la que nos referiremos inmediatamente.

El número γ no se ha probado que sea algebraico o transcendente; de hecho, ni siquiera se conoce si γ es irracional o no. El análisis de fracciones continuas revela que, de ser racional, su denominador debe ser muy elevado (actualmente del orden de $10^{242.080}$). Debido a que está presente en un gran número de ecuaciones y relaciones, la racionalidad o irracionalidad de γ se halla, sin duda, entre los problemas abiertos más importantes de las matemáticas.

2. $\Gamma(q)$ representa la función gamma o integral euleriana de segunda especie. Integrando por partes en dicha función, se obtiene: $\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx$; $u = x^{q-1}$; $dv = e^{-x} \cdot dx$; $du = (q-1) \cdot x^{q-2} \cdot dx$; $v = -e^{-x}$; con lo que:

$$\Gamma(q) = \left[-e^{-x} \cdot x^{q-1}\right]_0^\infty + (q-1)\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-2} \cdot dx = (q-1)\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-2} \cdot dx = (q-1) \cdot \Gamma(q-1)\,.$$

Reiterando el procedimiento, se tendrá que:

$$\Gamma(q) = (q-1)(q-2) \ldots (q-k) \cdot \Gamma(q-k).$$

En el caso particular de que *q* sea un número natural (o sea, entero positivo), la aplicación de la expresión anterior conduce a la siguiente:

$$\Gamma(q) = (q-1)! \quad (\forall q \in \mathbf{N}),$$

puesto que: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot dx = 1$. Una expresión que se presenta con frecuencia, es la que se obtiene mediante el cambio de variable: $x = t^2$. En efecto:

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot t^{2q-2} \cdot 2t = 2\int_0^\infty e^{-t^2} \cdot t^{2p-1} \cdot dt\,.$$

Así mismo, el cambio $x = mt$, conduce análogamente a:

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-mt} \cdot (mt)^{q-1} \cdot m \cdot dt = m^q \int_0^\infty e^{-mt} \cdot t^{q-1} \cdot dt\,.$$

3. Las funciones de Bessel de primera especie y orden α que aparecen en la tabla anterior son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen ($x = 0$) para enteros no negativos α y divergen en el

límite $x \to 0$ para α negativo no entero. El tipo de solución y la normalización de $J_\alpha(x)$ están definidos por sus propiedades. Es posible definir la función $J_\alpha(x)$ por su expansión en serie de Taylor en torno a x = 0. Las **funciones de Bessel**, primero definidas por el matemático Daniel Bernouilli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas *y(x)* de la ecuación diferencial de Bessel, a saber:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\alpha^2)y=0$$

, donde α es un número real o complejo. El caso más común es cuando α es un número entero *n*, aunque la solución para α no entero es similar. El número α se denomina *orden* de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación. Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y coeficientes variables, tiene dos soluciones linealmente independientes. Aunque α y $-\alpha$ dan como resultado la misma función, es conveniente definir diferentes funciones de Bessel para estos dos parámetros, pues las funciones de Bessel en función del parámetro α son funciones suaves casi doquiera. Las funciones de Bessel se denominan también *funciones cilíndricas*, o bien *armónicos cilíndricos* porque son solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

* * * * *

Para su aplicación a la resolución de las ecuaciones diferenciales, resulta fundamental la obtención de L[y'(x)] expresada en función de L[y(x)], o sea:

$$L[y'(x)]=\int_0^\infty e^{-px}y'(x)dx=y(x)\cdot e^{-px}\Big]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-px}y(x)dx=$$
$$=-y(0)+p\cdot L[y(x)]=-y(0)+p\cdot\eta(p)$$

, después de integrar por partes.

Análogamente se obtiene que:

$$L\left[\int_0^x y(x)dx\right]=\int_0^\infty e^{-px}dx\int_0^x y(x)dx=\frac{\int_0^\infty e^{-px}y(x)dx}{p}=\frac{L[y(x)]}{p}$$

, que resulta de gran utilidad en la resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales que veremos en el siguiente capítulo de nuestro libro.

Un teorema de la máxima importancia es el correspondiente al producto de transformadas o de "convolución".

Sean, en efecto, dos funciones $y_1(x)$, $y_2(x')$, tales que:

$$\left.\begin{aligned}\eta_1(p) = L[y_1(x)] = \int_0^\infty e^{-px}\cdot y_1(x)\cdot dx\\ \eta_2(p) = L[y_2(x')] = \int_0^\infty e^{-px'}\cdot y_2(x')\cdot dx'\end{aligned}\right\}$$

El producto de las transformadas será:

$$\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(x+x')} y_1(x)\cdot y_2(x')\cdot dx\cdot dx'.$$

Mediante el cambio de variable: u = x, v = x + x', es decir, que resulta: x = u; x' = v – u; cuyo determinante funcional jacobiano de la transformación es la unidad, puesto que:

$$J = \frac{\partial\,(x\cdot x')}{\partial\,(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

En cuanto al recinto o dominio de integración (cuadrante positivo del círculo, x>0, x'>0) se transforma en el u>0, v>u (véanse a continuación los recintos de las figuras anexas), que es el ángulo de 45º sexagesimales = 50^g centesimales = $\pi/4$ radianes, rayado en la figura correspondiente. A saber:

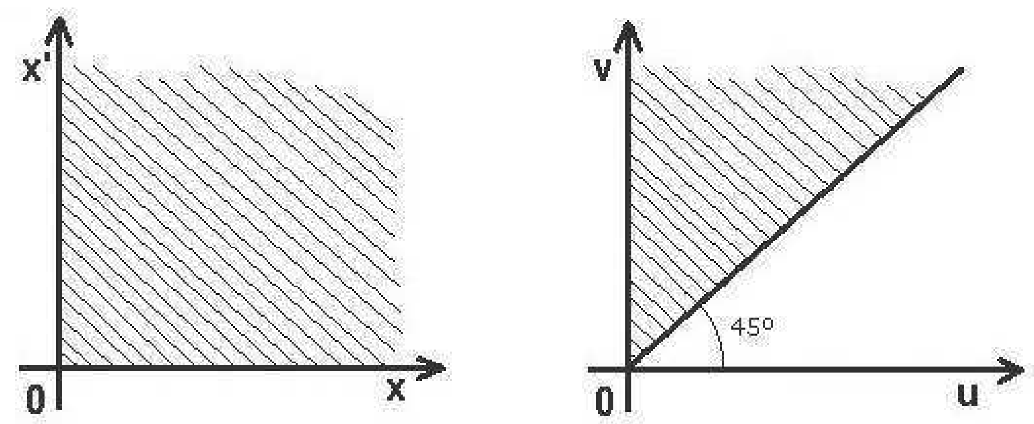


Fig. A-1.2. Dominios de integración.

Por lo tanto, se obtiene que:

$$\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = \int_0^\infty e^{-pv}\left[\int_0^v y_1(u)\cdot y_2(v-u)\cdot du\right]\cdot dv\,.$$

A la integral combinada entre ambas funciones, $\int_0^v y_1(x)\cdot y_2(v-x)\cdot dx$, se le llama "producto de convolución" (plegamiento o *faltung* en idioma alemán), “convolución” o bien “producto compuesto” de las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ y se representa por $y_1(x)*y_2(x)$, esto es:

$$\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = L[y_1(x) * y_2(x)], \text{ de donde:}$$
$$y_1(x) * y_2(x) = L^{-1}[\eta_1(p)\cdot\eta_2(p)] = y_2(x) * y_1(x)\,.$$

Si una de las dos convoluciones en la ecuación anterior es más simple de calcular, entonces se elige esa convolución cuando se determina la transformada inversa de Laplace de un producto. En definitiva, veamos que el “producto de convolución” de sendas funciones es el producto ordinario de sus transformadas. Por lo tanto, la generatriz del producto ordinario de dos funciones es el producto de convolución de sus generatrices.

ANEXO 2

SUPERFICIES CUÁDRICAS

1. CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS SUPERFICIES CUADRÁTICAS O CUÁDRICAS

Las secciones cónicas, elipse, parábola e hipérbola, que se estudian en el plano bidimensional R^2 tienen su generalización respectiva al espacio afín tridimensional euclídeo R^3 en elipsoide, paraboloide e hiperboloide, que son superficies de segundo orden. Obviamente, la generalización de la circunferencia (caso concreto de la elipse de semiejes iguales) es la esfera.

El ajuste minimocuadrático por regresión no lineal múltiple (triple, en nuestro caso), para efectuar la nivelación o explanación de ciertos terrenos de características especiales (parques de atracciones, jardines, campos de golf, ...), o a los que se desea dar forma de acabado diferente a la estrictamente plana, conduce al tratamiento o manejo de este tipo de formas geométricas amén de otras varias (superficies alabeadas, toroidales, esféricas, etc.). De ahí el interés de su consideración aquí, aunque sea elemental.

Se denomina *cuádrica* o *superficie cuadrática* al lugar geométrico de los puntos del espacio, reales o imaginarios, cuyas coordenadas homogéneas satisfacen la siguiente ecuación de segundo grado con tres variables (x, y, z):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

Debe observarse que en la anterior ecuación de segundo grado deliberadamente no hemos incluido los términos mixtos o cuadráticos (rectangulares) **xy**, **xz** e **yz**, pues la presencia de éstos genera superficies con rotación. De hacerse ello, nos encontramos con que la ecuación general de una cuádrica también puede expresarse así, de modo completo:

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2B_1xy+2B_2xz+2B_3yz+A_2y^2+2C_1x+2C_2y+2C_3z+D=0$$

En términos matriciales, dicha expresión puede venir dada por la siguiente ecuación:

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 & B_3 \\ B_2 & B_3 & A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(C_1, C_2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + D = 0$$

Entre los diferentes tipos que podemos encontrar de cuádricas destacamos los paraboloides, elipsoides e hiperboloides, que veremos a continuación con mayor detenimiento. Éstas son cuádricas no degeneradas, a saber:

- **Elipsoide**

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

corresponde a un elipsoide. Es simétrico con respecto a cada uno de los tres planos coordenados y tiene intersección con los ejes coordenados en (±a,0,0), (0,±b,0) y (0,0,±c). Se ve, pues, que el elipsoide es una superficie finita contenida en el paralelepípedo determinado por los planos: x = ±a; y = ±b; z = ±c. La traza del elipsoide sobre cada uno de los planos coordenados es un único punto o una elipse. La figura A-2.1 siguiente muestra su gráfica.

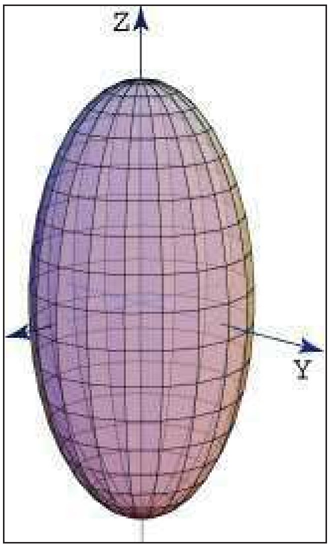


Fig. A-2.1. Elipsoide.

Como la ecuación anterior (1) no se altera por el cambio de x, y, z, en -x, -y, -z, al estar dichas variables elevadas al cuadrado, bien para una sola de las variables, o bien para dos o para las tres, se deduce que los planos coordenados, los ejes y el origen son respectivamente planos, ejes y centros de simetría de la superficie, y reciben los nombres de *planos principales, ejes* y *centro* de la misma. Los valores *a*, *b* y *c* se llaman *semiejes*, y *vértices* los puntos de intersección de los ejes con el elipsoide. Si dos semiejes son iguales, la superficie es un elipsoide de revolución con respecto al tercer eje.

Cuando a > b > c, el elipsoide en cuestión se denomina *escaleno*; cuando es a = b > c, el elipsoide es de revolución y se llama *alargado*, por engendrarse por la elipse φ girando alrededor del eje mayor; cuando es a > b = c, es de revolución *achatado* y se engendra por la elipse ψ girando en torno de su eje menor. Finalmente, cuando es a = b = c, la superficie obtenida es una esfera, puesto que la ecuación (1) se reduce a la: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, siendo *a* el radio de la misma. En este caso, el valor de la superficie esférica es de: $S = 4·\pi·a^2$, mientras que el volumen será:

$V = \frac{4}{3}\pi a^3$, que en el caso del elipsoide se convierte en: $V = \frac{4}{3}\pi·a·b·c$.

Así mismo, una ecuación aproximada de la superficie del elipsoide, dada por el danés Knud Thomsen, es la siguiente:

$$S \cong 4\pi \cdot [(a^p b^p + a^p c^p + b^p c^p)/3]^{1/p} ,$$

donde p ≈ 1'6075. Con esta expresión se obtiene un error máximo de ±1,061%, en función de los valores de a, b y c. El valor *p* = 8/5 = 1'6 es óptimo para elipsoides cuasi esféricos, con un error relativo máximo de 1,178%.

Por lo que se refiere a las secciones planas, veamos que considerando un plano paralelo al XOY, de ecuación z = h, su intersección con el elipsoide, referida en su plano a las trazas de éste con los planos XOZ e YOZ, es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad , \qquad (2)$$

que representa una elipse real, cuando $h^2 < c^2$, o sea, $-c < h < c$; y como los semiejes de esta elipse son:

$$a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \quad \text{y} \quad b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \quad ,$$

a medida que $|h|$ crece la elipse va disminuyendo.

Cuando es $|h| = c$, la ecuación (2) se reduce a la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ , o sea, } \quad y = \pm \frac{b}{a} x\sqrt{-1} \text{ ,}$$

que representa dos rectas imaginarias con el punto real (0,0,±c); y cuando $|h| > c$, la ecuación (2) representa una curva totalmente imaginaria.

Paraboloide elíptico

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

es un paraboloide elíptico. Sus trazas sobre planos horizontales: z = k, son elipses:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$$

Sus trazas sobre planos verticales, ya sean x = k o bien y = k, son parábolas.

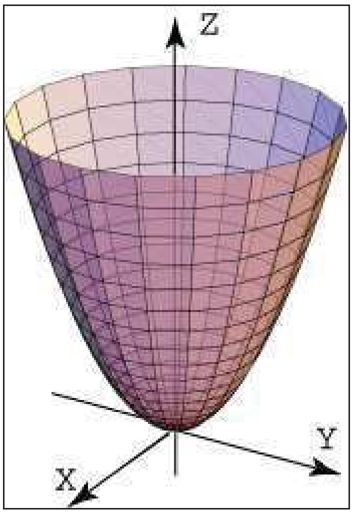


Fig. A-2.2. Paraboloide elíptico.

Se deduce inmediatamente que los únicos planos de simetría son el XOZ y el YOZ; por tanto, sólo hay un eje de simetría, que es el OZ.

Asimismo, se ve que las secciones determinadas por planos horizontales z = k son elipses.

- **Paraboloide hiperbólico**

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

es un paraboloide hiperbólico o superficie reglada. Sus trazas sobre planos horizontales z = k son hipérbolas o bien dos rectas (z = 0). Sus trazas sobre planos verticales paralelos al plano OXZ son parábolas que abren hacia abajo, mientras que las trazas sobre planos verticales paralelos al plano OYZ son parábolas que abren hacia arriba. Su gráfica tiene la forma de una silla de montar, como se observa en la figura siguiente A-2.3.

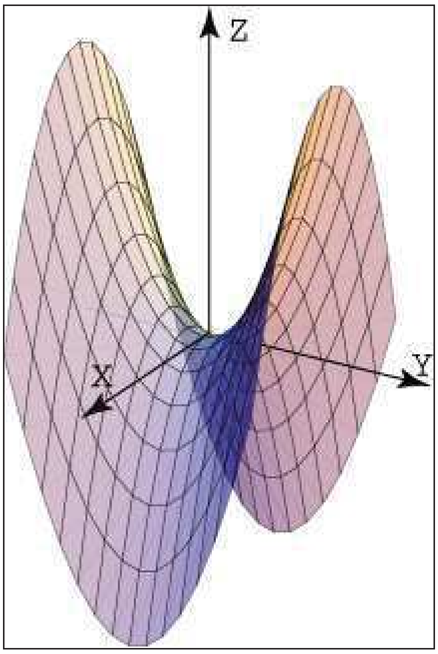


Fig. A-2.3. Paraboloide hiperbólico.

- **Cono elíptico**

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

es un cono elíptico. Sus trazas sobre planos horizontales z = k son elipses. Sus trazas sobre planos verticales corresponden a hipérbolas o un par de rectas. Su gráfica en forma de diábolo se muestra en la figura siguiente A-2.4.

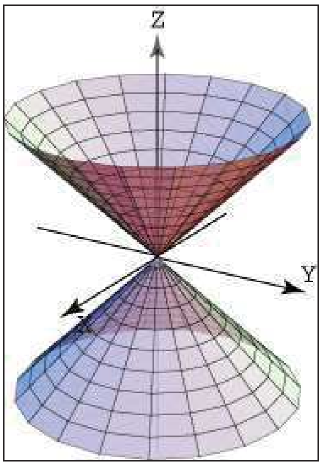


Fig. A-2.4. Cono elíptico.

- **Hiperboloide de una hoja**

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

es un hiperboloide de una hoja. Sus trazas o secciones sobre planos horizontales z = k son siempre elipses reales.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$$

Por consiguiente, la elipse ψ situada en el plano XOY es la menor de todas las generatrices y la superficie aparece engendrada por esta elipse, que va aumentando a medida que el plano se aleja del XOY.

En cambio, sus trazas sobre planos verticales son hipérbolas o bien un par de rectas que se intersectan. Su gráfica se muestra en la figura siguiente A-2.5.

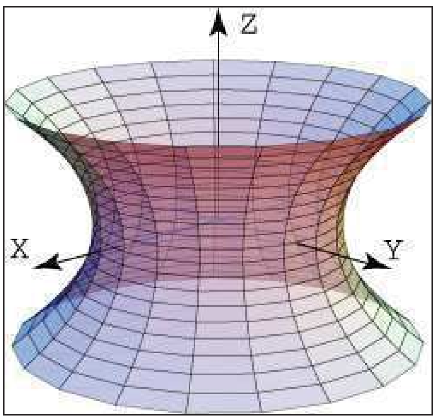


Fig. A-2.5. Hiperboloide de una hoja.

- **Hiperboloide de dos hojas**

La gráfica de la ecuación:

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1$$

es un hiperboloide de dos hojas. Su gráfica consta de dos hojas separadas. Sus trazas o secciones sobre planos horizontales z = k son elipses y sobre planos verticales son hipérbolas (véase la figura A-2.6).

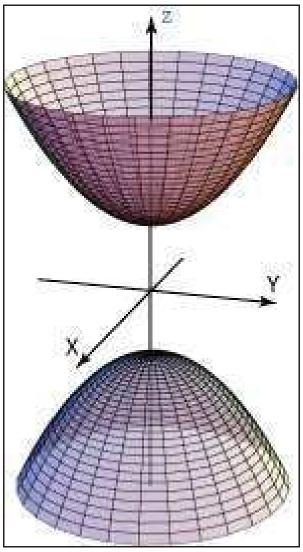


Fig. A-2.6. Hiperboloide de dos hojas.

2. EJEMPLO 1

Identifíquense cada una de las siguiente superficies cuadráticas:

a)

$$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$$

b)

$$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$$

Solución:

a) Dividiendo por - 4 la primera ecuación obtenemos:

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

lo cual corresponde a un hiperboloide de dos hojas, con el eje OY como eje de simetría.

b) A continuación, completando el cuadrado en x, para la segunda superficie obtenemos:

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

que corresponde, como puede comprobarse, a un paraboloide elíptico con su eje paralelo al eje OY.

3. ECUACIÓN CON TÉRMINOS RECTANGULARES

Si ahora introducimos la ecuación completa que incluye los términos rectangulares, veamos que la cuádrica o superficie de segundo orden será el conjunto de puntos del espacio cuyas coordenadas homogéneas[1] verifican la ecuación:

$$F(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}xt +$$

$$+ 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0 . \qquad (3)$$

En función de las semiderivadas parciales respecto de las variables también se puede expresar así, de acuerdo con el conocido teorema de Euler[2]:

$$F(x, y, z, t) = x \cdot f_x + y \cdot f_y + z \cdot f_z + t \cdot f_t = 0 .$$

[1] Sabemos que la rotación alrededor de un punto, que no sea el origen, puede realizarse mediante una traslación, una rotación u otra traslación. Sería deseable combinar estas tres transformaciones en una sola transformación por motivos de eficacia y elegancia. Una forma de hacer esto es emplear matrices cuadradas 3 x 3 en vez de matrices 2 x 2, introduciendo una coordenada auxiliar *w*. Este método recibe el nombre de *coordenadas homogéneas*. En estas coordenadas, los puntos están definidos por tres coordenadas y no por dos. Así un punto (*x*, *y*) estará representado por la tripleta (*xw*, *yw, w*). Las coordenadas *x* e *y* se pueden recuperar fácilmente dividiendo los dos primeros números por el tercero respectivamente. No emplearemos la coordenada *w* hasta que no veamos las transformaciones tridimensionales de perspectiva. En dos dimensiones su valor suele ser 1, para simplificar.

[2] **Leonhard Euler** (nombre completo, **Leonhard Paul Euler**) nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza, y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. Fue un respetado matemático y físico, y está considerado como el principal matemático del siglo XVIII y como uno de los más grandes de todos los tiempos. Vivió en Rusia y Alemania la mayor parte de su vida y realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos. También introdujo gran parte de la moderna terminología y notación matemática, particularmente para el área del análisis matemático, como por ejemplo la noción de función matemática. También se le conoce por sus trabajos en los campos de la mecánica, óptica y astronomía. Euler ha sido uno de los matemáticos más prolíficos, y se calcula que sus obras completas reunidas podrían ocupar entre 60 y 80 volúmenes. Una afirmación atribuida a Pierre-Simon Laplace expresa la influencia de Euler en los matemáticos posteriores: «Lean a Euler, lean a Euler, él es el maestro de todos nosotros».

En coordenadas cartesianas rectangulares, con t = 0, la ecuación de una cuádrica es:

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x +$$

$$+ 2a_{24}y + 2a_{34}z + 2a_{34}z + a_{44} = x \cdot f_x + y \cdot f_y + z \cdot f_z = 0 \qquad (4)$$

Matricialmente, la ecuación general de las cuádricas se puede expresar así:

$$(x \cdot y \cdot z \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

Abreviadamente, podemos expresar el producto matricial o vectorial anterior así:

$$\mathbf{X^t \cdot A \cdot X = 0} \text{ .}$$

La matriz **A** es la matriz cuadrada simétrica de los coeficientes de las incógnitas. Su determinante se denomina "discriminante" de la cuádrica.

4. CENTRO DE LAS CUÁDRICAS

Por otra parte, el *centro* de las cuádricas es el punto o lugar geométrico del espacio R^3 cuyas coordenadas son las soluciones del sistema de ecuaciones formado por la igualación a cero de las formas asociadas o derivadas parciales:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.}$$

Por tanto, derivando en la ecuación general (4), nos queda un sistema heterogéneo, de tres ecuaciones y tres incógnitas, compatible y determinado, así:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por aplicación de la regla de Cramer[3] tenemos que las coordenadas del centro y las soluciones de este sistema son las siguientes:

$$x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}} \quad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}} \quad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}} \ .$$

Siendo A_{ij} el determinante adjunto o cofactor del elemento a_{ij} en el determinante de la matriz de coeficientes A. Como podemos ver tiene que ser necesariamente $A_{44} \neq 0$ para evitar indeterminaciones.

Cuando el origen de coordenadas es también el centro de la cuádrica, debe cumplirse que: F (x, y, z) = F (-x, -y, -z). Para ello, la ecuación de la cuádrica sólo debe poseer términos de grado par.

La ecuación de la cuádrica, una vez trasladados los ejes al centro, es la siguiente:

$$\varphi\ (x, y, z) + F\ (x_0, y_0, z_0) = 0,$$

habiendo representado mediante φ (x, y, z) al conjunto de los términos de segundo grado de la ecuación de la cuádrica.

Por tanto, las cuádricas con centro propio (se pueden ver en el cuadro del epígrafe siguiente) son los elipsoides, hiperboloides y conos.

Los paraboloides, en cambio, poseen centro impropio, que es el punto del infinito.

5. CLASIFICACIÓN DE LAS CUÁDRICAS

A la característica o rango de la matriz A la llamaremos **k** y a la de A_{44} la llamaremos **h**.

Con ello, según los valores de **k** y **h** podremos clasificar convenientemente las superficies cuádricas, tal como se puede ver en el siguiente cuadro.

[3] **Gabriel Cramer** (1704 - 1752) fue un matemático suizo nacido en Ginebra. Profesor de matemáticas de la Universidad de Ginebra durante el periodo 1724-27. En 1750 ocupó la cátedra de filosofía en dicha universidad. En 1731 presentó, ante la Academia de las Ciencias de París, una memoria sobre las múltiples causas de la inclinación de las órbitas de los planetas. Editó las obras de Jean Bernouilli (1742) y de Jacques Bernouilli (1744) y el *Comercium epistolarum* de Leibniz. Su obra fundamental fue la *Introduction à l'analyse des courbes algébriques* (1750), en la que se desarrolla la teoría de las curvas algebraicas según los principios newtonianos, demostrando que una curva de grado *n* viene dada por *N* puntos situados sobre ella.

- CLASIFICACIÓN DE LAS CUÁDRICAS -			
k(A)	**k' (centro)**	**h(A_{44})**	**CUÁDRICA**
4	3 (centro propio)	3	Elipsoide o hiperboloide
4	3 (centro impropio)	2	Paraboloide
3	3 (centro propio)	3	Conos
3	2 (recta propia)	2	Cilindro elíptico o hiperbólico
3	2 (recta impropia)	1	Cilindro parabólico
2	2 (recta)	2	Dos planos secantes
2	1 (plano)	1	Planos paralelos
1	1 (plano)	1	Plano doble

	S_1	S_2	S_3	$\frac{\lvert A\rvert}{A_{44}}$	CUÁDRICA
ELIPSOIDE E HIPERBOLOIDE	+	+	+	+	Elipsoide hiperbólico
	+	+	+	-	Elipsoide real
	+	+	-	-	Hiperboloide de una hoja
	+	-	-	-	Hiperboloide de dos hojas
CONOS	S_1	S_2	S_3	$\frac{\lvert A\rvert}{A_{44}}$	CUÁDRICA
	+	+	+	0	Cono hiperbólico
	+	+	-	0	Cono real
	+	-	-	0	Cono real

	S_1	S_2	S_3	$\frac{\lvert A\rvert}{A_{44}}$	CUÁDRICA
PARABOLOIDES	+	+	0		Paraboloide elíptico
	-	-	0		Paraboloide hiperbólico
CILINDROS ELÍPTICOS E HIPERBÓLICOS	S_1	S_2	S_3	$\frac{\lvert A\rvert}{A_{44}}$	CUÁDRICA
	+	+		-	Cilindro elíptico real
	+	+		+	Cilindro elíptico hiperbólico
	+	-			Cilindro hiperbólico

Como la ecuación general de las cuádricas no resulta adecuada para el estudio, conviene frecuentemente reducirla a otra con menor número de términos que llamaremos *ecuación reducida de la cuádrica*. Para obtener la ecuación reducida de las cuádricas haremos una traslación y una rotación o giro de los ejes de coordenadas cartesianas, y utilizaremos los denominados “invariantes”.

6. ECUACIONES REDUCIDAS DEL ELIPSOIDE, HIPERBOLOIDE Y CONOS

Posee la siguiente configuración analítica:

$$S_1x^2 + S_2y^2 + S_3z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0 .$$

Los tres valores de S son las soluciones de la ecuación secular:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - S & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - S \end{vmatrix} = 0 ,$$

que también se denomina "ecuación característica" y los tres valores de S obtenidos (S_1, S_2 y S_3) se denominan "autovalores o valores característicos". Siendo:

$$\begin{cases} I_3 = A_{44} = -R, \text{ es el invariante cúbico} \\ I_4 = |A|, \text{ es el invariante bicuadrático} \end{cases}$$

El determinante de la matriz anterior, una vez desarrollado, ofrece la ecuación de tercer grado:

$$S^3 + P \cdot S^2 + Q \cdot S + R = 0, \text{ siendo:}$$

$$\begin{cases} I_1 = -P = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ I_2 = Q = a_{11} \cdot a_{22} + a_{11} \cdot a_{33} + a_{22} \cdot a_{33} - a^2_{12} - a^2_{13} - a^2_{23} \end{cases}$$

7. ECUACIÓN REDUCIDA DE LOS PARABOLOIDES

Posee la siguiente configuración analítica:

$$S_2y^2 + S_3z^2 \pm 2x\sqrt{\frac{-I_4}{I_2}} = 0 , \qquad I_4 = |A| \text{ o invariante bicuadrático, e}$$

$I_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$, que es el invariante cuadrático, siendo α_{11}, α_{22}, α_{33} los determinantes adjuntos o cofactores de los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33} calculados en A_{44}.

8. ECUACIÓN REDUCIDA DE LOS CILINDROS ELÍPTICOS O HIPERBÓLICOS

Posee dicha ecuación la siguiente configuración analítica:

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + \frac{I'_3}{I_2} = 0 \ ,$$

siendo: $I'_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33}$, que es el invariante especial de los cilindros, e $I_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$, que es el invariante cuadrático.

9. ECUACIÓN REDUCIDA DE LOS CILINDROS PARABÓLICOS

Posee dicha ecuación la siguiente configuración analítica:

$$S_2 y^2 \pm 2x\sqrt{\frac{-I'_3}{I_1}} = 0 \ ,$$

teniendo en cuenta que:

$$\begin{cases} I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \text{ , que es el invariante lineal} \\ I'_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33} \text{ , que es el invariante especial de los cilindros} \end{cases}$$

10. RESUMEN DE LOS INVARIANTES DE LAS CUÁDRICAS

Dada la ecuación general de una cuádrica, existen ciertas expresiones formadas con sus coeficientes que toman el mismo valor cuando se efectúa una transformación de coordenadas cartesianas rectangulares cualesquiera (no varían en un giro de los ejes donde el origen de coordenadas queda fijo o bien en una traslación de los ejes), por cuya razón reciben el nombre de *invariantes*.

Como hemos visto en los epígrafes anteriores, dichos invariantes son los siguientes:

Invariante lineal o métrico: $I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$
Invariante cuadrático o afín: $I_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$
Invariante cúbico o proyectivo: $I_3 = A_{44}$
Invariante bicuadrático: $I_4 = \lvert A \rvert$
Invariante especial de los cilindros: $I'_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33}$

11. EJEMPLO 2

Dada la cuádrica de ecuación:

$$4y^2 + 4z^2 + 4yz - 2x - 14y - 22z + 33 = 0$$

a) Clasificarla.
b) Hallar la ecuación reducida.
c) Determinar el plano que corta a la cuádrica según una cónica de centro en el punto de coordenadas (8, -1, 4).

Solución:

a) Formaremos la matriz A para hallar su rango o característica:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -11 \\ -1 & -7 & -11 & 33 \end{pmatrix} \quad ; \ |A| = -12 \neq 0 \ ; \qquad k(A) = 4 \ .$$

Al ser $|A| < 0$, se tratará de un paraboloide elíptico, como también tendremos ocasión de corroborar.

La característica o rango de la matriz **h** de A_{44} será:

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \qquad h(A_{44}) = 2 \ .$$

Tiene centro impropio, pues $A_{44} = 0$. Luego por los valores de k y h sabemos que es un paraboloide.

Ahora formaremos la ecuación en S, o ecuación característica o secular, para ver los signos de los autovalores:

$$\begin{vmatrix} -S & 0 & 0 \\ 0 & 4-S & 2 \\ 0 & 2 & 4-S \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

$-S\cdot(4 - S)\cdot(4 - S) + 4S = 0;$ Luego $S_3 = 0$

$S^2 - 8S + 12 = 0$; $S_1 = 2$; $S_2 = 6$

Luego como los dos autovalores son positivos se trata de un **paraboloide elíptico**.

b) La ecuación reducida de los paraboloides es, como ya se ha visto:

$$S_2y^2 + S_3z^2 \pm 2x\sqrt{\frac{-I_4}{I_2}} = 0$$. En nuestro caso es:

$I_4 = |A| = -12$, $I_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 12 + 0 + 0 = 12$.

Luego la ecuación reducida de la superficie cuádrica que nos ocupa será la siguiente:

$$\mathbf{2y^2 + 6z^2 \pm 2x = 0}\ .$$

c) La ecuación de los planos que pasan por el punto (8, -1, 4) es:

$$A(x-8) + B(y+1) + (z-4) = 0.$$

puesto que se puede dividir por un parámetro. Luego la cónica de centro (8, -1, 4) vendrá dada por la intersección:

$$\begin{cases} Ax + By + z - 8A + B - 4 = 0 \\ 4y^2 + 4z^2 + 4yz - 2x - 14y - 22z + 33 = 0 \end{cases}$$

Despejando ahora la variable **x** en la segunda ecuación y substituyéndola en la primera, nos dará la cónica intersección resultado de su proyección ortogonal sobre el plano YOZ:

$$2Ay^2 + 2Az^2 + 2Ayz + (B-7A)y + (1-11A)z + (17/2)A + B - 4 = 0\ .$$

El centro de esta cónica, que es el punto o lugar geométrico del espacio de coordenadas cartesianas rectangulares (8, -1, 4), vendrá dado por la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f'_y = 4Ay + 2Az + B - 7A = 0 \\ f'_z = 4Az + 2Ay + 1 - 11A = 0 \end{cases} \quad \text{en donde:} \quad \begin{matrix} y = -1 \\ z = 4 \end{matrix}$$

luego $\begin{cases} -3A + B = 0 \\ 3A + 1 = 0 \end{cases}$ de donde: $A = -1/3$; $B = -1$

El plano buscado será, por tanto, aquel de ecuación ordinaria o no paramétrica:

$$\boxed{x + 3y - 3z + 7 = 0}$$

Substituyendo ahora los valores obtenidos de A y B, se tendrá una cónica de ecuación:

$$-\frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{3}z^2 - \frac{2}{3}yz + \frac{4}{3}y + \frac{14}{3}z - \frac{47}{6} = 0 \text{ , esto es:}$$

$$- 4y^2 - 4z^2 - 4yz + 8y + 28z - 47 = 0 \text{ .}$$

De haber despejado alternativamente la variable **z** en el sistema de ecuaciones anterior (lo que supone, sin duda, un proceso más largo) hubiéramos obtenido la proyección ortogonal sobre el plano XOY, lo cual nos permitiría clasificar dicha cónica y hallar su correspondiente ecuación reducida previo el cálculo de sus invariantes.

En cualquier caso, dicha determinación se propone como ejercicio complementario a nuestros/as amables lectores/as.

ANEXO 3

EXTREMOS DE FUNCIONES MULTIVARIANTES

1. MÁXIMOS Y MÍNIMOS CONDICIONADOS POR RELACIONES DE IGUALDAD

En este caso, se trata de hallar los extremos relativos de la función económica dada por la ecuación:

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ con la condición: } x^2 + y^2 = 18.$$

Formada la función de Lagrange[1] o lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(x^2 + y^2 - 18),$$

se obtienen las derivadas parciales (condición necesaria o de primer grado):

$$L'_x(x, y, \lambda) = -\frac{1}{x^2} + 2\lambda x = 0 \;\; ; \;\; L'_y(x, y, \lambda) = -\frac{1}{y^2} + 2\lambda y = 0$$

$$\text{de donde se deduce que: } 2\lambda = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{y^3},$$

o sea y = x; como $x^2 + y^2 = 18, \Rightarrow x = y = \pm 3$.

Para el punto crítico (3,3), $2\lambda = \frac{1}{27}$, $\lambda = \frac{1}{54}$,

y para el punto crítico (-3,-3), $2\lambda = -\frac{1}{27}$, $\lambda = -\frac{1}{54}$.

[1] **Joseph Louis Lagrange**, bautizado como **Giuseppe Lodovico Lagrangia**, también llamado **Giuseppe Luigi Lagrangia** o **Lagrange** (25 de enero de 1736 en Turín - 10 de abril de 1813 en París) fue un matemático, físico y astrónomo italiano que después vivió en Prusia y Francia. Lagrange trabajó para Federico II de Prusia, en Berlín, durante veinte años. Lagrange demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica "lagrangiana" y tuvo una importante contribución en astronomía.

Formando, a continuación, el determinante funcional hessiano orlado relevante (que nos determina la condición suficiente o de segundo grado), se tiene:

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{x^3} + 2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{y^3} + 2\lambda \end{vmatrix}$$

Para el punto (3,3), resultará:

$$H(3,3,\frac{1}{54}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{27} + \frac{1}{27} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{27} + \frac{1}{27} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & \frac{1}{9} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{9} \end{vmatrix} = -\frac{8}{9} < 0$$

Luego en (3,3) existe un mínimo relativo que vale 2/3.

Análogamente, en (-3,-3) existe un máximo relativo que vale –2/3.

2. MÁXIMOS Y MÍNIMOS NO CONDICIONADOS

2.1. DEFINICIÓN

Una función de dos variables, como las que aquí nos ocupan, z = f(x,y) se dice que tiene un *máximo* (*mínimo*) en un punto $P(x_0, y_0)$ si el valor de la función en este punto es mayor (menor) que su valor en cualquier otro punto X(x,y) de algún entorno del punto P.

2.2. CONDICIONES NECESARIAS DE EXTREMO

Si una función diferenciable z = f(x,y) alcanza un extremo en el punto $P(x_0, y_0)$ entonces sus derivadas parciales de primer orden en este punto son iguales a cero, o sea:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Los puntos en los que las derivadas parciales son iguales a cero se llaman puntos “críticos” o “estacionarios”. Ahora bien, no todo punto crítico es un punto extremo (Franquet, 2014).

2.3. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS EN EL CASO DE DOS VARIABLES

Sea $P(x_0, y_0)$ un punto crítico de una función $z = f(x,y)$ con las derivadas parciales de segundo orden continuas en P, y sea $H(x_0, y_0)$ el determinante de su matriz hessiana; entonces tiene lugar la siguiente clasificación:

$$H(x_0,y_0)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$H(x_0,y_0)$	$f_{xx}(x_0,y_0)$	*tipo*
positivo	*positivo*	*Mínimo*
positivo	*negativo*	*Máximo*
negativo	?	*Punto silla*
cero	?	*Duda*

Es decir, si el determinante funcional hessiano es positivo hay extremo (el tipo nos lo da $f_{xx}(x_0, y_0)$, si es negativa máximo y si es positiva mínimo). Por el contrario, si el hessiano es negativo no hay extremo. Y, por último, si el hessiano es cero hay duda (con lo que habrá de resolverse por otro método).

En este último caso, se trata simplemente de hallar los extremos relativos de la función económica dada por la ecuación:

$$z = x^3y^2(6 - x - y), \ \forall x > 0, \ \forall y > 0$$

Las primeras derivadas parciales (condición necesaria o de primer grado) son las siguientes:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2y^2(6 - x - y) - x^3y^2 = x^2y^2(18 - 3x - 3y - x) = \\ \qquad = x^2y^2(18 - 4x - 3y) = 0 \\ \\ z'_y = 2x^3y(6 - x - y) - x^3y^2 = x^3y(12 - 2x - 2y - y) = \\ \qquad = x^3y(12 - 2x - 3y) = 0 \end{cases}$$

Los únicos valores que verifiquen $x > 0$, $y > 0$, se obtendrán de

$$18 - 4x - 3y = 0 \ \text{ y } \ 12 - 2x - 3y = 0$$

o sea, serán las soluciones del sencillo sistema de ecuaciones lineales, compatible y determinado:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

de donde x = 3, y = 2.

A continuación, se obtienen las derivadas segundas (condición suficiente o de segundo grado), para formar el determinante funcional hessiano, esto es:

$$\begin{cases} z''_{x^2} = 2xy^2(18 - 4x - 3y) - 4x^2y^2 = 2xy^2(18 - 4x - 3y - 2x) = \\ \qquad = 2xy^2(18 - 6x - 3y) \\ z''_{xy} = 2x^2y(18 - 4x - 3y) - 3x^2y^2 = x^2y(36 - 8x - 6y - 3y) = \\ \qquad = x^2y(12 - 2x - 6y) \\ z''_{y^2} = x^3(123 - 2x - 3y) - 3x^3y = x^3(12 - 2x - 3y - 3y) = \\ \qquad = x^3(12 - 2x - 6y) \end{cases}$$

que substituyendo los valores: x = 3, y = 2, toman los valores respectivos de -144, -108 y -162.

Por lo tanto, se tendrá:

$$H(3,2) = \begin{vmatrix} -144 & -108 \\ -108 & -162 \end{vmatrix} = 11.664 > 0, \text{ y como } -144 < 0 ,$$

podremos afirmar que en el punto (3,2) existe un máximo relativo de valor: z = 27 x 4 x 1 = 108.

3. REDUCCIÓN DE VARIABLES EN LA BÚSQUEDA DE EXTREMOS CONDICIONADOS

3.1. INTRODUCCIÓN

Un problema que se presenta con frecuencia en el Análisis Matemático estriba en determinar los extremos relativos o locales (máximos y/o mínimos) de una función real cuyas variables reales no son independientes sino que se encuentran ligadas por una o más ecuaciones condicionantes. Decimos, entonces, que se trata de un problema de “extremos ligados o condicionados”.

Suelen presentarse en algunos problemas de la Física, la Economía o la Ingeniería. Entonces, el método tradicional de los multiplicadores u operadores de Lagrange, o el de los determinantes jacobianos, son sólo necesarios en presencia de puntos de silla (o de “ensilladura”) o bien cuando la forma implícita de la restricción impide despejar la o las variables que interese substituir en la función objetivo a optimizar. Puede suceder, también, que los expresados métodos no ofrezcan soluciones definitivas y haya que recurrir, justamente, a la técnica referida para solventar eficazmente el problema planteado, como tendremos ocasión de comprobar.

En efecto, supongamos que la ecuación condicionante permita despejar una de las variables en función de las otras, por ejemplo, en la forma: $z = \Phi(x,y)$, y substituyéndola en la función objetivo a optimizar se obtiene:

$$u = f\,[x,y,\ \Phi(x,y)] = F(x,y),$$

y el problema consistirá en buscar los valores extremos de F(x,y) cuyas variables ya son independientes, para lo cual se pueden aplicar los criterios clásicos establecidos.

Pues bien, por tratarse de una cuestión que, generalmente, no se halla contemplada expresamente en los tratados de análisis matemático al uso, hemos creído conveniente su desarrollo con la apoyatura de algunos ejemplos generales y casos prácticos de teoría microeconómica que juzgamos suficientemente representativos al respecto (Franquet, 2014).

3.2. METODOLOGÍA Y BASE TEÓRICA

3.2.1. Método de los operadores de Lagrange

Sea la función $z = f(x,y)$ sujeta a la condición $g(x,y) = 0$. Para obtener los máximos o mínimos condicionados, se forma la función de Lagrange:

$$\phi(x,y) = f(x,y) + \lambda\cdot g(x,y).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

Los extremos buscados resultan del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} = f'_x(x,y) + \lambda\cdot g'_x(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y) + \lambda\cdot g'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

Formando ahora la diferencial segunda:

$$d^2\phi(x,y) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}dy^2 \text{, con la condición:}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0\,.$$

Entonces, la función tiene un máximo si $d^2\phi < 0$ y un mínimo si $d^2\phi > 0$ (García y Rodríguez, 1985). Si $d^2\phi = 0$ es un caso dudoso y hay que seguir investigando.

Esta condición de segundo grado u orden puede discriminarse, frecuentemente, mediante la formación del denominado "hessiano orlado relevante", que ofrece los siguientes valores:

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} \Phi''_{x^2} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{x\lambda} \\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{y^2} & \Phi''_{y\lambda} \\ \Phi''_{x\lambda} & \Phi''_{y\lambda} & \Phi''_{\lambda^2} \end{vmatrix} \left\langle \begin{array}{l} > 0 \rightarrow \text{MÁXIMO (2 variables)} \\ < 0 \rightarrow \text{MÍNIMO} \end{array} \right.$$

donde siempre $\Phi''_{\lambda^2} = 0$. Este proceso se generaliza *n* variables, así:

MÍNIMO $\rightarrow$ siempre H < 0.

MÁXIMO $\rightarrow$ 3 variables $\rightarrow$ H < 0 $\rightarrow$ u = f (x, y, z)
4 variables $\rightarrow$ H > 0 $\rightarrow$ u = f (x, y, z, t)
5 variables $\rightarrow$ H < 0 $\rightarrow$ u = f (x, y, z, t, s)
… (y así alternativa y sucesivamente). Con H = 0 es un caso dudoso y hay que seguir investigando.

En la mayoría de los problemas prácticos no resulta necesario efectuar esta distinción, pues a simple vista se conoce la naturaleza del punto extremo o crítico en cuestión.

3.2.2. Método de los determinantes jacobianos

Sea, en el caso de 2 variables, la función objetivo: z = f(x,y) y la ecuación de condición: g(x,y) = 0. El sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = f(x,y) \\ \\ g(x,y) = 0 \end{array} \right. \qquad [I]$$

representará, en general, una curva en el espacio afín tridimensional euclídeo y los valores que toma *z* serán los de la función *f* a lo largo de la curva *g*. Por lo tanto, razonando como se hace normalmente para la obtención de los extremos ordinarios, la condición necesaria para la existencia de extremo condicionado en un punto será la anulación, en dicho punto, de z'_g.

Luego, para la obtención de los posibles puntos extremos, formaremos el sistema:

$$\begin{cases} z'_s = \dfrac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

O bien, como $\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}$ es siempre positivo (obsérvese que ambas derivadas, si el sistema [I] representa una curva, no son idénticamente nulas, simultáneamente) el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = J(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

siendo J(x,y) el determinante funcional jacobiano.

Para deducir las condiciones suficientes o de segundo grado, bastará con estudiar el signo de z''_{g^2}.

Recordando que:

$$z'_g = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot g'_y - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot g'_x}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}} = \frac{J}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}}, \text{ se tendrá que: } z''_{g^2} = \frac{\dfrac{\partial z'_g}{\partial x} \cdot g'_y - \dfrac{\partial z'_g}{\partial y} \cdot g'_x}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}},$$

que, en los puntos en que se anula J(x, y), se convierte en:

$$z''_{g^2} = \frac{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y} \cdot J'_x\, g'_y - \sqrt{g'^2_x + g'^2_y} \cdot J'_x\, g'_y}{(g'^2_x + g'^2_y)^{3/2}} = \frac{\dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)}}{g'^2_x + g'^2_y}.$$

Por tanto, si en un punto de los hallados:

$$\begin{cases} z'' > 0 \rightarrow \dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} > 0, \text{ existe un mínimo relativo} \\[2ex] z'' < 0 \rightarrow \dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} < 0, \text{ existe un máximo relativo} \end{cases}$$

NOTA: El método expuesto resulta generalizable a *n* variables x_1, x_2, …, x_n; si se trata de obtener los extremos de $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con las (n-1) restricciones:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \; ; \; g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \; ; \; \dots ; \; g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \; ;$$

se resuelve el sistema formado por las *n* ecuaciones siguientes:

$$J = \frac{\partial(f, g_1, g_2, \dots, g_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0 \; ; \; g_1 = 0 \; ; \; g_2 = 0 \; ; \; \dots ; \; g_{n-1} = 0 \; ;$$

y para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo, se calcula en cada uno de los puntos hallados el signo de:

$$J_1 = \frac{\partial(J, g_1, g_2, \dots, g_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \; ,$$

resultando un máximo local si $J_1 < 0$ y un mínimo local si $J_1 > 0$ (García y Rodríguez, 1985).

3.2.3. Método de substitución, eliminación o reducción de variables

El problema de los extremos condicionados, generalizado a *n* variables, consiste en hallar los extremos de la función $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisfacen la ecuación condicionante: $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Si es posible resolver esta última ecuación para una de las variables, como por ejemplo: $x_1 = h(x_2, \dots, x_n)$, la solución de x_1 puede substituirse en z resultando: $f\,[h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n]$, que es una función de (n-1) variables. Llamemos a esta función $F(x_2, \dots, x_n)$; la obtención de los extremos de z, sujeta a la condición g anteriormente expresada, resulta equivalente a la obtención de los extremos no condicionados de la función $F(x_2, \dots, x_n)$ con respecto a las variables $x_2, \dots, x_n$. El problema de extremos condicionados se reduce, de este modo, al de uno no condicionado y con las mismas variables o bien una variable menos, que podemos resolver en la forma acostumbrada. Esto es, que nos permite pasar de un programa de optimización restringida con restricciones de igualdad a una optimización clásica libre sin ningún tipo de restricciones y con el mismo o inferior número de variables, lo que simplifica notablemente el proceso de resolución.

Por el contrario, a este procedimiento se le puede achacar que envuelve una pérdida de simetría debido a que ofrece preferencia a una de las variables de la condición (que, normalmente, será la más sencilla de despejar en función de las otras). En todo caso, para poder efectuar la substitución antedicha en un problema general de este tipo, han de poderse explicitar *m* variables de decisión en función de las (n – m) restantes, que es el números de grados de libertad del problema planteado. Y ello no es siempre posible aunque sí lo es en una gran mayoría de problemas prácticos, razón por la cual se presenta aquí mediante algunos ejemplos aclaratorios que veremos a continuación.

Se supone siempre que el número de variables *n* y el número de restricciones *m* son finitos, y además n > m. Si sucediese que n < m puede resultar que el conjunto de soluciones factibles fuese el vacío o infinito, con lo cual no existe solución, o resulta trivial el problema de optimización. Por otra parte, las restricciones de igualdad en un problema de optimización "reducen" su dimensión. En general, por cada restricción que se añada se pierde un grado de libertad a la hora de obtener los valores que hacen que la función objetivo o económica alcance su valor óptimo (Guzmán et alt., 1999).

3.2.4. Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange

3.2.4.1. Introducción

En epígrafes anteriores se ha visto que los puntos obtenidos al resolver un programa con restricciones de igualdad llevan asociados los denominados multiplicadores de Lagrange (uno por cada restricción o ecuación condicionante). Nos referiremos, a continuación, al significado de dichos multiplicadores, de especial importancia en sus aplicaciones a la Economía (Balbás y Gil, 2004).

Para ello, formulemos un programa con restricciones de igualdad, como el siguiente:

$$\text{Optimizar: } f(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\text{sujeto a: } \left.\begin{array}{l} g_1(x_1,\ldots,x_n) = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) = b_m \end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

donde f: A $\rightarrow$ R y g = ($g_1,\ldots,g_m$): A$\rightarrow$ R^m (n > m) son dos funciones de clase C^2 en el abierto A $\subset$ R^n.

Si suponemos que $b_1,\ldots,b_m$, pueden variar, es claro que el conjunto factible M dependerá de b = ($b_1,\ldots,b_m$), y escribiremos simbólicamente:

$$M(b) = \{x \in A \,/\, g(x) = b\}.$$

Intuitivamente, es claro que los puntos óptimos del programa (I) dependerán del valor de b = ($b_1,\ldots,b_m$). Así si dado $\bar{b} = (\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_m)$ el programa (I) posee un óptimo en el punto: $(\bar{a},\bar{\lambda})(\bar{a} = (\bar{a},\ldots,\bar{a}_n), \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_m))$, y podemos establecer una función F: B $\to$ R (B es un entorno de b), tal que F(b) = f(a), $\forall b \in$ B, y *a* es el óptimo del programa para b $\in$ B.

Pues bien, dado un programa como el (I), si para $\overline{b} = (\overline{b}_1,...,\overline{b}_m)$ la función *f* posee un extremo relativo sobre el conjunto M(b) en el punto $(\overline{a},\overline{\lambda})$ en el que el determinante funcional jacobiano de la función *g* posee rango *m* y el determinante hessiano orlado es no nulo, entonces se cumple que:

$$-\lambda_i = \frac{\partial F(b)}{\partial b_i}.$$

Así pues, este multiplicador asociado a la i-ésima restricción, nos mide la tasa de variación del valor de la función objetivo *f* en el punto óptimo con respecto a su correspondiente b_i, por lo que se le suele denominar "precio sombra".

El opuesto del k-ésimo multiplicador de Lagrange mide el cambio marginal en el valor óptimo de la función objetivo con respecto a la variación del término independiente de la k-ésima restricción b_k. Es decir:

$$\frac{\partial f(z^*)}{\partial b_k} = -\lambda_k^*.$$

Pero los multiplicadores de Lagrange λ_i ($\forall$ i = 1, 2, …, m) pueden tener sentido económico, como ya hemos enunciado. Hemos demostrado que los multiplicadores de Lagrange equivalen a derivadas parciales; y en Economía estas derivadas son sinónimo del término "marginal". Por ello, los multiplicadores λ_i pueden interpretarse como cambios marginales (Sánchez, 2014). Veámoslo seguidamente en algunas aplicaciones microeconómicas.

3.2.4.2. En la planificación de la producción

Así, si tenemos un problema de planificación de producción en donde la función objetivo sea el beneficio a obtener, y las ecuaciones de restricción señalen las disponibilidades de recursos (es decir, las restricciones impuestas por las cantidades limitadas de los factores disponibles b_i), veamos qué medirán entonces los multiplicadores de Lagrange.

El opuesto del k-ésimo multiplicador de Lagrange, simbolizado por: $-\lambda_k^*$, nos señala el aumento del beneficio máximo provocado por la disponibilidad de una unidad más del k-ésimo recurso b_k. O dicho de otra manera, nos medirá la *rentabilidad marginal* del recurso o factor b_k.

Por tanto, $-\lambda_k^*$ representa el precio máximo que el empresario está dispuesto a pagar por una unidad adicional del k-ésimo recurso. Y por eso, al multiplicador $-\lambda_k^*$ -opuesto del operador de Lagrange- se le llama en Economía, *precio sombra* del factor productivo b_k. La justificación del apelativo “precio sombra” del factor estriba en considerar el precio del expresado factor como si estuviese a la “sombra”, en el sentido de que su precio puede diferir del precio real de mercado de ese factor.

Resulta obvio colegir que si el precio real de mercado es superior a su “precio sombra” no será rentable incrementar la utilización de dicho factor. Por el contrario, si el precio de mercado es inferior a su “precio sombra”, sí será rentable aumentar la utilización de dicho factor.

3.2.4.3. En la maximización de la utilidad

Así, si suponemos que el consumidor trata de maximizar su función de utilidad $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sujeta a la ecuación de restricción presupuestaria o “ecuación de balance” $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$, donde *b* nos señala la renta disponible, ¿qué nos señalaría el multiplicador $-\lambda'$ en este caso?

El valor opuesto del multiplicador de Lagrange: $-\lambda^*$, nos medirá la utilidad marginal de la renta en el punto óptimo.

3.2.4.4. En la minimización de costes

Si una empresa desea minimizar su función de costes, estando éstos sujetos a una correcta restricción de producción (donde nos indica el nivel de producto), ¿qué nos señala, entonces, el multiplicador $-\lambda^*$?

El valor opuesto del multiplicador de Lagrange: $-\lambda^*$, nos medirá el coste marginal de producir una unidad de producto más, a partir del punto óptimo (Sánchez, 2014).

4. ALGUNOS EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1

Hallar, por el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de la función: $z = x \cdot y$, si $x + y = 1$.

Solución:

a) La función de Lagrange o *lagrangiana* es:

$\phi(x,y) = x\cdot y + \lambda(x + y - 1)$, de donde:

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y + \lambda = 0\ ;\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x + \lambda = 0\ ;\ x + y = 1,$$

de donde, para $\lambda = -\frac{1}{2}$, se obtiene: $x = y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

- Condición suficiente o de segundo grado:

Para determinar si es máximo o mínimo, haremos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0\ ;\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = (\text{lema de Schwartz}) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 1;\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0\ ,$$

luego, substituyendo: $d^2\phi = 0\cdot dx^2 + 2\cdot 1\cdot dx\ dy + 0\cdot dy^2$,

y como: $x + y = 1$, $dx + dy = 0$, o sea, $dy = -dx$.

Substituyendo nuevamente, se tendrá que:

$$d^2\phi = 2\cdot dxdy = 2\cdot dx\ (-dx) = -2\cdot dx^2 < 0.$$

Por ser negativa $d^2\phi$, en el punto P(½,½,¼) existe, pues, un máximo relativo o local.

b) Otra manera bastante más inmediata de solucionarlo, por el método de reducción de variables que aquí se propugna, conduciría a la siguiente función de una sola variable:

Como: $y = 1 - x$; $z = x\ (1 - x) = x - x^2$; y entonces:

- Condición necesaria o de primer grado:

$$z'_x = 1 - 2x = 0;\ 2x = 1;\ x = ½\ ;\ \ y = 1 - ½ = ½\ .$$

Del mismo modo: $z = ½ \cdot ½ = ¼$.

- Condición suficiente o de segundo grado:

Y como: $z''_{x^2} = -2 < 0 \rightarrow$ MÁXIMO local, llegando a la misma conclusión, aunque de modo más simple que operando por el procedimiento anterior.

Ejemplo 2

Hallar los extremos relativos de: $z = x \cdot y^2$, si $x + y = 6$, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Solución:

a) La función de Lagrange o auxiliar es, en este caso:

$$\phi(x,y) = x \cdot y^2 + \lambda(x + y - 6).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

Derivando parcialmente: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 + \lambda = 0$; $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy + \lambda = 0$,

que, con la condición $x + y = 6$, forman un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Para } \lambda = 0: & \Rightarrow \quad x = 6,\ y = 0. \\ \text{Para } \lambda = -16: & \Rightarrow \quad x = 2,\ y = 4. \end{cases}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

La diferencial segunda de ϕ es: $d^2\phi = 2y \cdot dx \cdot dy + 2x \cdot dy^2$,

y como de la ecuación de condición se deduce que: $dx + dy = 0$, se obtiene también $dy = -dx$, y se tiene que: $d^2\phi = (-2y + 2x)dy^2$. Entonces:

$$\begin{cases} \text{Para } x = 6,\ y = 0:\ d^2\phi = 12dy^2 > 0; \text{ luego en } (6, 0, 0) \text{ hay un mínimo local.} \\ \text{Para } x = 2,\ y = 4:\ d^2\phi = -4dy^2 < 0; \text{ luego en } (2, 4, 32) \text{ hay un máximo local.} \end{cases}$$

b) Alternativamente, por reducción de variables se llegará a las mismas conclusiones, puesto que de la ecuación condicionante se tendrá: $y = 6 - x$; y substituyendo este valor en la función objetivo resultará:

$$z = x(6 - x)^2 = x(36 + x^2 - 12x) = x^3 - 12x^2 + 36\,x\ ;$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$z'_x = 3x^2 - 24x + 36 = 0 \;;\;\; x^2 - 8x + 12 = 0 \;;$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 6 = x_1 \\ 2 = x_2 \end{array} \right. .$$ Hay, pues, 2 puntos críticos: $\left\langle \begin{array}{l} P_1(6,0) \\ P_2(2,4) \end{array} \right.$.

- Condición suficiente o de segundo grado:

$z''_{x^2} = 6x - 24$, $\rightarrow$ en P_1 es $12 > 0 \Rightarrow$ MÍNIMO en P_1 (6, 0, 0)
$\rightarrow$ en P_2 es $-12 < 0 \Rightarrow$ MÁXIMO en P_2 (2, 4, 32)

Ejemplo 3

Obtener los extremos de la función $z = x^2 + y^2$, con la condición siguiente: $x + y - 2 = 0$, aplicando diversos procedimientos.

Solución:

a) Aplicando el método de los jacobianos, se empieza por resolver el sistema:

$$\begin{cases} J = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$, que en el presente caso resulta ser:

$$\begin{cases} J = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y = 0 \\ g = x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

que, resuelto, proporciona los valores: $x = 1$, $y = 1$.

Para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo, se calcula:

$$\frac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 > 0 ,$$

resultando, por tanto, un mínimo local en $x = 1$, $y = 1$, $z = 1 + 1 = 2$.

b) Aplicando, ahora, el método de los multiplicadores de Lagrange, empezaremos por formar la función de Lagrange o auxiliar siguiente:

$$\phi = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

Anulando sus dos primeras derivadas parciales, se tendrá:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \end{cases}$$

de donde $x = y$, que con $x + y - 2 = 0$ proporciona $x = 1$ e $y = 1$.

- Condición suficiente o de segundo grado:

Para determinar si esta solución corresponde a un máximo o a un mínimo, se obtiene $d^2\phi$, y según que sea: $d^2\phi > 0$ o $d^2\phi < 0$ se tratará de un mínimo o de un máximo, respectivamente. En nuestro caso sucede que:

$$d^2\phi = 2dx^2 + 2dy^2 \text{ ,}$$

y como de la condición: $dx + dy = 0$ se tiene: $d^2\phi = 4dx^2$, que en todos los casos es positiva, luego se trata de un mínimo local, cuyo valor es $z = 2$.

c) El problema planteado también puede resolverse directamente por reducción de variables, quedándonos una sencilla función objetivo de una sola variable independiente, ya que:

$$z = x^2 + y^2 \text{ ; si: } x + y - 2 = 0 \text{ ; } y = 2 - x \text{ ;}$$

$$z = x^2 + (2 - x)^2 = x^2 + 4 + x^2 - 4x = 2x^2 - 4x + 4 \text{ ;}$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$z'_x = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 - 1 = 1 \text{ ; } z = 1 + 1 = 2.$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$z''_{x^2} = 4 > 0 \Rightarrow \text{Luego se trata de un MÍNIMO, en el punto } (1, 1, 2).$$

Ejemplo 4

Determinar, por diversos procedimientos, los extremos de la función siguiente: $z = x^2 + y^2$, con la condición $x^2 + 8x \cdot y + 7y^2 - 225 = 0$.

Solución:

a) Método de los jacobianos. Calculemos el jacobiano de las funciones f y g, así:

$$J = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x+8y & 8x+14y \end{vmatrix} = 8(2x^2 + 3x \cdot y - 2y^2).$$

Resolvamos el sistema J = 0, g = 0:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x \cdot y - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 8x \cdot y + 7y^2 - 225 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando por -2 la segunda ecuación y sumando, se obtiene:

$$13x \cdot y + 16y^2 = 450, \text{ de donde: } x = \frac{450 - 16y^2}{13y} \quad [I]$$

y substituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene:

$$y^4 + 25y^2 - 900 = 0,$$

que es una ecuación bicuadrada, que proporciona: $y^2 = \frac{-25 \pm 65}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 20 \\ -45 \end{array} \right.$.

De la primera solución se deduce que $y = \pm 2\sqrt{5}$, que substituida en [I] da, para valores de x: $x = \pm\sqrt{5}$.

De la segunda raíz no se obtiene solución real.

Para precisar si se trata de máximos o de mínimos, se obtiene:

$$J_1(x,y) = \frac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} = 8\begin{vmatrix} 4x+3y & 3x-4y \\ 2x+8y & 8x+14y \end{vmatrix} = 8(26x^2 + 64x \cdot y + 74y^2),$$

y como tanto $J_1(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ como $J_1(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ son positivos, en ambos puntos existen mínimos relativos de valor:

$$z = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{20})^2 = 5 + 20 = 25.$$

b) Este mismo problema, resuelto por el método de reducción de variables, queda establecido así:

$$[OPT]\ z = x^2 + y^2,$$

con la condición: $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$; luego substituyendo en la función objetivo, resultará:

$$z = 225 - 8x \cdot y - 6y^2 ;$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} z'_x = -8y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ z'_y = -8x - 12y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$z''_{x^2} = 0$; $z''_{xy} = z''_{yx} = -8$; $z''_{y^2} = -12$; luego formaremos el determinante funcional hessiano:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} = -64 < 0,$$

que ofrece un “punto de silla”, y el problema debe ser resuelto por otros métodos. En este caso, pues, el método de reducción de variables no ha resultado efectivo para la resolución del problema planteado.

c) Resolveremos, ahora, el problema aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange. Formando la correspondiente función de Lagrange y anulando sus derivadas primeras, tendremos:

$$\phi = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 8x\cdot y + 7y^2 - 225).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} \phi'_x = 2x + 2\lambda x + 8\lambda y = 0 \\ \phi'_y = 2y + 8\lambda x + 14\lambda y = 0 \\ \phi'_\lambda = x^2 + 8x\cdot y + 7y^2 - 225 \end{cases}$$

Podríamos eliminar λ entre las dos primeras ecuaciones, pero, en este caso, es preferible obtener los posibles valores de λ, imponiendo la condición de compatibilidad del sistema anterior, esto es:

$$\begin{vmatrix} 2(1+\lambda) & 8\lambda \\ 8\lambda & 2(1+7\lambda) \end{vmatrix} = 0, \text{ de donde se obtiene: } 9\lambda^2 - 8\lambda - 1 = 0,$$

que proporciona las raíces: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1/9$. Para $\lambda_1 = 1$, por sustitución en cualquiera de las ecuaciones del sistema anterior, se encuentra $x = -2y$, valor que, al ser sustituido en la ecuación de condición, conduce a:

$$4y^2 - 16y^2 + 7y^2 = 225,\ -5y^2 = 225, \text{ de donde: } y = 3i\cdot\sqrt{5},$$

solución imaginaria pura que no proporciona extremos.

Para λ_2 = -1/9, análogamente, se encuentra y = 2x y al substituir en la ecuación de condición resulta:

$$x^2 + 16x^2 + 28x^2 = 225, \quad 45x^2 = 225, \text{ o bien:}$$

$$x = \pm\sqrt{5} \quad \text{y, por tanto,} \quad y = \pm 2\sqrt{5}, \quad z = 25.$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

Para precisar si se trata de máximos o mínimos se obtiene:

$$d^2\phi = 2(1 + \lambda)dx^2 + 16\lambda\cdot dx\cdot dy + 2(1 + 7\lambda)dy^2 .$$

De la ecuación de condición, por diferenciación, se obtiene *dy* en función de *dx*:

$$(2x + 8y)dx + (8x + 14y)dy = 0.$$

Substituyendo *dy* por su valor y para y = 2x, λ = -1/9, se obtiene:

$d^2\phi = \frac{25}{9}dx^2$, que al ser positivo nos dice que en ambos puntos críticos existen mínimos relativos.

De pretender resolverlo alternativamente formando el hessiano orlado relevante, se tiene, a partir de la función auxiliar:

$$\phi = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 8x\cdot y + 7y^2 - 225) ;$$

$$\phi''_{x^2} = 2 + 2\lambda ; \quad \phi''_{xy} = 8\lambda = \phi''_{yx} ; \quad \phi''_{x\lambda} = 2x + 8y ;$$

$$\phi''_{y^2} = 2 + 14\lambda ; \quad \phi''_{y\lambda} = 8x + 14y ; \quad \text{y resultará el hessiano:}$$

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 8\lambda & 2x+8y \\ 8\lambda & 2+14\lambda & 8x+14y \\ 2x+8y & 8x+14y & 0 \end{vmatrix} = 8\lambda(8x + 14y)(2x + 8y) + 8\lambda(2x +$$

$$+ 8y)(8x + 14y) - (2x + 8y)^2(2 + 14\lambda) - (2 + 2\lambda)(8x + 14y)^2 =$$

$$= 16\lambda(8x + 14y)(2x + 8y) - (4x^2 + 64y^2 + 32xy)(2 + 14\lambda) - (2 + 2\lambda)(64x^2 +$$

$+ 196\ y^2 + 224\ xy) = \ldots\ldots,$ de resolución harto laboriosa, al que habrá que sustituir los valores obtenidos de λ, x e y, por lo que resulta más práctico hallar el valor numérico del determinante funcional hessiano para ambos puntos críticos obtenidos. Y así, para $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ se tendrá:

$$H(\sqrt{5},2\sqrt{5},-1/9)=\begin{vmatrix}16/9 & -8/9 & 18\sqrt{5}\\ -8/9 & 4/9 & 36\sqrt{5}\\ 18\sqrt{5} & 36\sqrt{5} & 0\end{vmatrix}=-18000<0,$$ luego se trata de un mínimo relativo o local. Del mismo modo, para $(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$ se tendrá:

$$H(-\sqrt{5},-2\sqrt{5},-1/9)=\begin{vmatrix}16/9 & -8/9 & -18\sqrt{5}\\ -8/9 & 4/9 & -36\sqrt{5}\\ -18\sqrt{5} & -36\sqrt{5} & 0\end{vmatrix}=-18000<0,$$ con lo que también se tratará de un mínimo relativo, c.s.q.d.

Ejemplo 5

Hallar, por diversos procedimientos, los máximos y mínimos de la función: $u = x\cdot y^2\cdot z^3$, con la condición $x + y + z = 12$, siendo x, y, z positivas.

Solución:

a) Emplearemos, en primer lugar, el método de los operadores de Lagrange. Siendo x, y, z positivas, los extremos de la función u, coincidirán con los de la función ln u, donde por ln denotamos el logaritmo neperiano o natural. Por tanto, la función de Lagrange o auxiliar será:

$$\Phi\ (x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z + \lambda\ (x + y + z - 12).$$

- Condiciones necesarias o de primer grado:

Sus derivadas parciales igualadas a cero proporcionan el siguiente sistema:

$$\begin{cases}\Phi'_x=\dfrac{1}{x}+\lambda=0\\ \Phi'_y=\dfrac{2}{y}+\lambda=0\\ \Phi'_z=\dfrac{3}{z}+\lambda=0\\ \Phi'_\lambda=x+y+z-12=0\end{cases}\quad \text{, o bien, } -\frac{1}{\lambda}=x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3},$$

que con la condición $x + y + z = 12$, nos proporcionan, en definitiva, los valores:

$$x = 2,\quad y = 4,\quad z = 6,\quad \lambda=-\frac{1}{2}.$$

- Condiciones suficientes o de segundo grado:

Si ahora calculásemos en dicho punto la diferencial segunda de u, encontraríamos que en (2, 4, 6) existe un máximo. Sin embargo, vamos a partir del determinante funcional hessiano orlado relevante, con lo que:

$$\left|\begin{array}{l} \Phi''_{x^2} = -\dfrac{1}{x^2} \\ \Phi''_{xy} = 0 \\ \Phi''_{xz} = 0 \\ \Phi''_{x\lambda} = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Phi''_{y^2} = -\dfrac{2}{y^2} \\ \Phi''_{yx} = 0 \\ \Phi''_{yz} = 0 \\ \Phi''_{y\lambda} = 1 \end{array}\left| \begin{array}{l} \Phi''_{z^2} = -\dfrac{3}{z^2} \\ \Phi''_{zx} = 0 \\ \Phi''_{zy} = 0 \\ \Phi''_{z\lambda} = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{\lambda x} = 1 \\ \Phi''_{\lambda y} = 1 \\ \Phi''_{\lambda z} = 1 \end{array}\right|$$

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{2}{y^2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{z^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\text{desarrollando por los elementos de la 4ª fila}) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{3}{z^2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x^2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{3}{z^2} & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x^2} & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{2}{x^2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{6}{y^2\, z^2} - \frac{3}{x^2\, z^2} - \frac{2}{x^2\, y^2} < 0 \quad (3 \text{ variables}),$$

luego pudiera ser máximo o mínimo.

El mismo problema, resuelto directamente (más largo), ofrece:

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\Phi = x \cdot y^2 \cdot z^3 + \lambda\,(x + y + z - 12);$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi'_x = y^2\, z^3 + \lambda = 0 \\ \Phi'_y = 2\,x\,y\,z^3 + \lambda = 0 \\ \Phi'_z = 3\,x\,y^2\,z^2 + \lambda = 0 \\ \Phi'_\lambda = x + y + z - 12 = 0 \end{array}\right\} \text{ de donde:}$$

$y^2 z^3 = 2x{\cdot}y{\cdot}z^3 = 3x{\cdot}y^2{\cdot}z^2$; dividido por $y{\cdot}z^2$: $y{\cdot}z = 2{\cdot}x{\cdot}z = 3{\cdot}x{\cdot}y$; $\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ z = 3x \end{array}\right\}$

Entonces: x + 2 x + 3 x = 12 $\left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 6 \end{array} \right.$, luego sucede que en el punto crítico $P_0(2, 4, 6)$ hay un extremo relativo.

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$\left| \begin{array}{l} \Phi''_{x^2} = 0 \\ \Phi''_{xy} = 2\,y\,z^3 \\ \Phi''_{xz} = 3\,y^2\,z^2 \\ \Phi''_{x\lambda} = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \Phi''_{y^2} = 2\,x\,z^3 \\ \Phi''_{yx} = 2\,y\,z^3 \\ \Phi''_{yz} = 6\,x\,y\,z^2 \\ \Phi''_{y\lambda} = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \Phi^2_{z^2} = 6\,x\,y^2\,z \\ \Phi''_{zx} = 3\,y^2\,z^2 \\ \Phi''_{zy} = 6\,x\,y\,z^2 \\ \Phi''_{z\lambda} = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{\lambda x} = 1 \\ \Phi''_{\lambda y} = 1 \\ \Phi''_{\lambda z} = 1 \end{array} \right|$$

, con lo cual:

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 2\,y\,z^3 & 3\,y^2\,z^2 & 1 \\ 2\,y\,z^3 & 2\,x\,z^3 & 6\,x\,y\,z^2 & 1 \\ 3\,x^2\,z^2 & 6\,x\,y\,z^2 & 6\,x\,y^2\,z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

(desarrollando por los elementos de la 4ª fila) =

$$= -\begin{vmatrix} 2\,y\,z^3 & 3\,y^2\,z^2 & 1 \\ 2\,x\,z^3 & 6\,x\,y\,z^2 & 1 \\ 6\,x\,y\,z^2 & 6\,x\,y^2\,z & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3\,y^2\,z^2 & 1 \\ 2\,y\,z^3 & 6\,x\,y\,z^2 & 1 \\ 3\,y^2\,z^2 & 6\,x\,y^2\,z & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2\,y\,z^3 & 1 \\ 2\,y\,z^3 & 2\,x\,z^3 & 1 \\ 3\,y^2\,z^2 & 6\,x\,y\,z^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

= ……………….. (llegando a las mismas conclusiones que mediante el proceso simplificado anterior).

Con $\left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 6 \end{array} \right.$, substituyendo estos valores en el hessiano anterior, se tiene que:

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1728 & 1728 & 1 \\ 1728 & 864 & 1728 & 1 \\ 1728 & 1728 & 1152 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\,985\,984 < 0\,,$$

luego puede ser máximo o mínimo (3 variables), y seguimos sin encontrar la solución definitiva.

b) Resolviéndolo mediante un ejemplo simple (por tanteo), tendríamos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x = 1 \\ y = 5 \\ \underline{z = 6} \\ \sum = 12 \end{array}\right\} u = x \cdot y^2 \cdot z^3 = 1 \times 25 \times 216 = 5400$$, y alternativamente:

$$\left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = 4 \\ \underline{z = 6} \\ \sum = 12 \end{array}\right\} u = x \cdot y^2 \cdot z^3 = 2 \times 16 \times 216 = 6912$$, y así sucederá para todas las

combinaciones posibles de tres cantidades positivas que cumplan la restricción impuesta en el enunciado, luego parece obvio que en el punto crítico $P_0(2, 4, 6)$ existe un MÁXIMO RELATIVO.

c) A continuación, ensayaremos el método de reducción de variables, y se tendrá que:

$x = 12 - y - z$, con lo que substituyendo en la función objetivo, se tendrá:

$\Phi = (12 - y - z) \cdot y^2 \cdot z^3 = 12\, y^2 z^3 - y^3 z^3 - y^2 \cdot z^4 = \Phi\,(y, z)$, que ya es un caso de extremos no condicionados y 2 variables.

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi'_y = 24\, z^3 \cdot y - 3\, y^2\, z^3 - 2\, y\, z^4 = 0 \\ \Phi'_z = 36\, y^2 \cdot z^2 - 3\, y^3\, z^2 - 4\, y^2\, z^3 = 0 \end{array}\right\}$$ de donde:

$$\begin{array}{l} 24 - 3y - 2z = 0 \\ \underline{-36 + 3y + 4z = 0} \end{array}$$

$-12 + 2z = 0 \Rightarrow z = 6;\quad y = \dfrac{24 - 2z}{3} = \dfrac{24 - 12}{3} = 4;\quad x = 12 - 4 - 6 = 2.$

- Condición suficiente o de segundo grado:

Formaremos el hessiano: $H(y, z) = \begin{vmatrix} \Phi''_{y^2} & \Phi''_{yz} \\ \Phi''_{yz} & \Phi''_{z^2} \end{vmatrix}$, con los siguientes

valores reales:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi''_{y^2} = 24\, z^3 - 6\, y\, z^3 - 2\, z^4 = 5184 - 5184 - 2592 = -2592 \\ \Phi''_{yz} = 72\, y\, z^2 - 9\, y^2\, z^2 - 8\, y\, z^3 = 10368 - 5184 - 6912 = -1728 \\ \Phi''_{z^2} = 72\, y^2\, z - 6\, y^3\, z - 12\, y^2\, z^2 = 6912 - 2304 - 6912 = -2304 \end{array}\right.$$

$$H(4,6)=\begin{vmatrix} -2592 & -1728 \\ -1728 & -2304 \end{vmatrix} = 5\,971968 - 2\,985\,984 = 2\,985\,984 > 0,$$

$$\text{con}\,\Phi''_{y^2} = -2592 < 0,$$

luego se trata de un MÁXIMO relativo o local en el punto crítico $P_0(2, 4, 6)$, con un valor de la función económica: $u = x \cdot y^2 \cdot z^3 = 2 \times 16 \times 216 = 6912$.

Obsérvese la mayor facilidad de resolución que se obtiene empleando este último procedimiento (reducción o eliminación de variables) en el presente ejemplo comparado con el método de los multiplicadores de Lagrange, así como el hecho que nos ha permitido discriminar fácilmente la naturaleza del punto crítico hallado como consecuencia de la aplicación de la condición necesaria o de primer grado. De ahí el interés de su empleo en la mayoría de los casos que se presentan en la práctica.

Ejemplo 6

Hallar, por diversos procedimientos, el máximo del producto: $x \cdot y \cdot z$, cuando $x + y + z = a$; siendo x, y, z positivos.

Solución:

a) Formaremos, en principio, la función auxiliar o lagrangiana siguiente:

$$\Phi = x \cdot y \cdot z + \lambda(x + y + z - a)\ .$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left.\begin{aligned} \Phi'_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = y \cdot z + \lambda = 0 \\ \Phi'_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x \cdot z + \lambda = 0 \\ \Phi'_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = x \cdot y + \lambda = 0 \\ \Phi'_\lambda &= \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0 \end{aligned}\right\} x = y = z;\ 3x = a;,\ \text{de donde:}$$

$$x = \frac{a}{3};\quad y = \frac{a}{3};\quad z = \frac{a}{3};\ \text{y entonces: } \Phi = x \cdot y \cdot z = \frac{a^3}{27};\ \text{con: } \lambda = -\frac{a^2}{9}\ .$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$\begin{vmatrix} \Phi''_{x^2} = 0 \\ \Phi''_{xy} = z \\ \Phi''_{xz} = y \\ \Phi''_{x\lambda} = 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \Phi''_{y^2} = 0 \\ \Phi''_{yx} = z \\ \Phi''_{yz} = x \\ \Phi''_{y\lambda} = 1 \end{matrix} \begin{vmatrix} \Phi''_{z^2} = 0 \\ \Phi''_{zx} = y \\ \Phi''_{zy} = x \\ \Phi''_{z\lambda} = 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{\lambda x} = 1 \\ \Phi''_{\lambda y} = 1 \\ \Phi''_{\lambda z} = 1 \end{matrix}\Bigg|$$; el hessiano orlado relevante, será:

$$H(x,y,z,\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & z & y & 1 \\ z & 0 & x & 1 \\ y & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} z & y & 1 \\ 0 & x & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & y & 1 \\ z & x & 1 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & z & 1 \\ z & 0 & 1 \\ y & x & 1 \end{vmatrix} =$$

= - (x z + x y - x^2) + (y^2 – x y – z y) – (z y + z x – z^2) = (operando adecuadamente) = - 2 x^2 – 2 x^2 – 2 x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = - 6 x^2 + 3 x^2 = - 3 x^2 = $-\frac{a^2}{3} < 0$ (3 variables), luego pudiera ser máximo o mínimo, y habrá que intentar la resolución de este problema por algún otro procedimiento.

b) Método de reducción de variables:

Haciendo la sustitución en la función objetivo: z = a – x – y, resulta la función de 2 variables siguiente:

$$\Phi(x,y) = x \cdot y(a - x - y) = a \cdot x \cdot y - x^2 \cdot y - x \cdot y^2;$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left.\begin{matrix} \Phi'_x = a\,y - 2\,y\,x - y^2 = 0 \\ \Phi'_y = a\,x - x^2 - 2\,y\,x = 0 \end{matrix}\right\} \text{ del que resulta } \left.\begin{matrix} a - 2\,x - y = 0 \\ a - x - 2\,y = 0 \end{matrix}\right\}$$

y, en definitiva, $x = y = z = \frac{a}{3}$ (punto crítico).

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$\begin{cases} \Phi''_{x^2} = -2\,y \\ \Phi''_{xy} = \Phi''_{xy} = a - 2\,x - 2\,y, \\ \Phi''_{y^2} = -2\,x \end{cases} \text{ y entonces: } H(x,y,z) = \begin{vmatrix} -2\,y & a - 2(x+y) \\ a - 2(x+y) & -2\,x \end{vmatrix} =$$

$$= -a^2 - 4\,x^2 - 4\,y^2 - 4\,x\,y + 4\,a\,x + 4\,a\,y = -a^2 - \frac{4\,a^2}{3} + \frac{8\,a^2}{3} = \frac{4\,a^2}{3} - a^2 = \frac{a^2}{3} > 0;$$

$\Phi''_{x^2} = -2y = \frac{-2\,a}{3} < 0$, puesto que también a > 0, luego hay un MÁXIMO RELATIVO en el punto $P(a/3, a/3, a/3)$, lo que resuelve eficazmente el problema planteado.

Así pues, al igual que sucede en el ejemplo anterior, el método de reducción de variables o sustitución ha permitido discriminar fácilmente la naturaleza del punto crítico hallado, circunstancia que no se había conseguido por la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 7. Consideremos el programa siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 + 2 \\ \text{sujeta a:} & x_1^3 - x_2 - 2 = 0. \end{array}$$

Solución:

a) De la restricción dada podemos obtener: $x_2 = x_1^3 - 2$, y substituyendo en la función objetivo (método de eliminación de variables) tenemos que:

$\Phi(x_1) = x_1^2 + 2x_1^3 - 2$, que ya es una función real de una sola variable real.

Encontremos, ahora, los extremos de esta función:

$$\frac{d\Phi}{dx_1} = 2x_1 + 6x_1^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1/3 \end{cases}$$

La derivada segunda será:

$$\frac{d^2\Phi}{dx_1^2} = 2 + 12x_1, \quad \frac{d^2\Phi(0)}{dx_1^2} = 2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2\Phi(-1/3)}{dx_1^2} = -2 < 0\,.$$

Por tanto, en dichos puntos, la función objetivo Φ presenta un mínimo y un máximo relativos, respectivamente.

Substituyendo dichos puntos en $x_2 = x_1^3 - 2$ podemos concluir que (0, -2) y (-1/3, -55/27) son, respectivamente, el mínimo y el máximo relativos del programa original (Balbás y Gil, 2004).

b) El problema puede también resolverse formulando la correspondiente función lagrangiana: $\Phi = x_1^2 + 2x_2 + 2 + \lambda(x_1^3 - x_2 - 2)$.

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi'_{x_1} = 2x_1 + 3\cdot\lambda\cdot x_1^2 = 0\\ \Phi'_{x_2} = 2-\lambda = 0\\ \Phi'_{\lambda} = x_1^3 - x_2 - 2 = 0\end{array}\right\}$$

De la resolución de este sistema, con λ = 2, surgen los dos puntos críticos: (0, -2) y $\left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{55}{27}\right)$.

- El punto crítico (0, -2) ofrece un valor de la función objetivo:

$$\Phi = 2 \times (-2) + 2 = -2 \text{ (MÍNIMO RELATIVO).}$$

- El punto crítico $\left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{55}{27}\right)$ ofrece un valor de la función objetivo:

$$\Phi = \frac{3}{27} - \frac{110}{27} + \frac{54}{27} = -\frac{53}{27} \approx -1.96 > -2 \text{ (MÁXIMO RELATIVO).}$$

- Condición suficiente o de segundo grado.

Para corroborar lo anterior, formemos el correspondiente hessiano orlado relevante, esto es:

$\Phi''_{x_1^2} = 2 + 12x_1$; $\Phi''_{x_2^2} = 0$; $\Phi''_{x_1x_2} = 0$; $\Phi''_{x_2\lambda} = -1$; $\Phi''_{x_1\lambda} = 3x_1^2$; y entonces:

$$H(x_1, x_2, \lambda) = \begin{vmatrix} \Phi''_{x_1^2} & \Phi''_{x_1x_2} & \Phi''_{x_1\lambda} \\ \Phi''_{x_1x_2} & \Phi''_{x_2^2} & \Phi''_{x_2\lambda} \\ \Phi''_{x_1\lambda} & \Phi''_{x_2\lambda} & \Phi''_{\lambda^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+12x_1 & 0 & 3x_1^2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3x_1^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 12x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{con } x_1 = 0 \Rightarrow H = -2 < 0 \Rightarrow \text{MÍNIMO LOCAL} \\ \text{con } x_1 = -\tfrac{1}{3} \Rightarrow H = -2 + 4 = 2 > 0 \Rightarrow \text{MÁXIMO LOCAL} \end{cases}$$

que ofrece el mismo resultado que el que se deducía directamente de la aplicación de la condición necesaria, c.s.q.d.

5. CASOS PRÁCTICOS

A continuación se desarrollan algunos ejemplos que se suelen presentar en la práctica por lo que se refiere, especialmente, a la aplicación de la Teoría Microeconómica.

Caso 1.

Supongamos una empresa dedicada a la producción de un bien. Su función de producción, que relaciona la cantidad (q) producida de dicho bien con la de los factores productivos (x_1 y x_2) empleados para la misma es:

$$q = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 .$$

Los precios unitarios de dichos factores son: p_1 = 2 u. m. y p_2 = 4 u. m., respectivamente. Determínese la cantidad de factores productivos que maximizan la producción con un coste de 68 u. m. (Balbás y Gil, 2004).

Solución:

a) El problema es de programación con restricciones de igualdad y vamos a resolverlo, inicialmente, por el método de los operadores de Lagrange. Tenemos que el coste de utilizar los factores productivos será: $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = 2x_1 + 4x_2$, que constituye la ecuación condicionante. Así pues, tendremos el siguiente programa:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & q = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + 4x_2 = 68. \end{array} \qquad \text{(V)}$$

La función lagrangiana es:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + \lambda(2x_1 + 4x_2 - 68).$$

Las derivadas parciales primeras de la misma igualadas a cero junto con la restricción, conforman el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{r} 60 - 4x_1 + 2\lambda = 0 \\ 90 - 6x_2 + 4\lambda = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 68 \end{array}\right\}$$

que posee una solución (x_1 = 12, x_2 = 11 y λ = -6) que es el máximo global del programa, ya que la función objetivo es cóncava en el conjunto factible, que es convexo. Veámoslo.

-El conjunto factible es M = $\{(x_1, x_2) \in \Re^2 / 2x_1 + 4x_2 = 68\}$. Es una recta de $\Re^2$, que, como sabemos, es un conjunto convexo.

-Las derivadas parciales segundas de la función de producción son:

$$\begin{cases} D_{11}q = -4 \\ D_{12}q = D_{21}q = 0 \text{ (lema de Schwartz)} \\ D_{22}q = -6. \end{cases}$$

La matriz hessiana de q en todo punto de $\Re^2$ es:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

y, ya que H_1 = -4 < 0 y H_2 = 24 > 0, resulta que q es cóncava (estrictamente) en $\Re^2$ y, por tanto, en M.

Así, utilizando 12 unidades del primer factor y 11 del segundo, se maximiza la producción para un coste de 68 u. m. Sustituyendo en la función de producción, tenemos que:

$q = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 = 60 \cdot 12 + 90 \cdot 11 - 2 \cdot 12^2 - 3 \cdot 11^2 = 1059$ (unidades físicas o monetarias).

Veamos, por otra parte, que el valor del multiplicador λ asociado a la solución óptima es -6. Ésta será la tasa de variación de la producción óptima respecto al coste, de acuerdo con la significación económica de este operador de Lagrange que hemos explicado en este mismo artículo. Por ejemplo, si estuviésemos dispuestos a utilizar factores productivos por valor de 69 u. m., una más que antes, la producción que obtendríamos utilizando óptimamente los recursos será aproximadamente de 1065, seis más que antes, ya que $-\lambda = 6$ (la aproximación realizada es lineal y será mejor cuanto menor sea la variación del coste respecto al inicial de 68). Puede comprobar el amable lector/a que, resolviendo el programa para un coste de 69, el resultado es ahora x_1 = 12.137, x_2 = 11.182 y λ = -5.727, siendo el valor resultante de q = 1064.875.

b) El mismo problema resuelto por eliminación o reducción de variables, implica que: $x_1 = 34 - 2x_2$; y entonces:

$q(x_2) = 60(34 - 2x_2) + 90x_2 - 2(34 - 2x_2)^2 - 3x_2^2 = 242x_2 - 272 - 11x_2^2$, que ya es una función real de una sola variable real.

-Condición necesaria o de primer grado:

$$q' = 242 - 22x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 11 \text{ y } x_1 = 34 - 22 = 12.$$

-Condición suficiente o de segundo grado:

q” = -22, luego, efectivamente, hay un MÁXIMO en el punto (12, 11), y el problema queda resuelto de modo más inmediato.

Caso 2.

Una determinada empresa elabora un producto utilizando dos factores productivos. La función de producción que relaciona la cantidad de bien producido (Q) con los factores productivos utilizados (x,y) es:
Q (x,y) = 12x + y. La función de costes de la empresa es la siguiente:
C (x,y) = $3x^2 + y^2$. Se pide:

1) ¿Cuáles son las cantidades de factores productivos que consiguen minimizar el coste de producir 49 unidades de producto?.

2) ¿Será rentable producir una unidad más de producto, si el precio unitario de venta de éste fuese de 3 unidades monetarias?.

Solución:

1) El problema se plantea así:

Con la restricción: $\left.\begin{array}{l} \min . 3x^2 + y^2 \\ 12x + y = 49 \end{array}\right\}$

a) Para la técnica de los operadores de Lagrange, construyamos la función lagrangiana siguiente:

$$L\ (x, y) = 3x^2 + y^2 + \lambda\ (12x + y - 49).$$

Condición necesaria de óptimo o de primer grado:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 6x + 12\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ g: 12x + y = 49 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene directamente que: λ = -2y. Substituyendo en la primera ecuación resulta: 6x – 24y = 0. Si resolvemos esta ecuación con la ecuación de restricción, obtenemos: $x^* = 4$, $y^* = 1$. Y asimismo $\lambda^* = -2y = -2$.

Veamos si el punto crítico es realmente un máximo o mínimo:

Condición suficiente o de segundo grado:

Construyamos el Hessiano orlado relevante. Sabemos que:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{vmatrix} \Rightarrow \overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 12 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -294 < 0.$$

En nuestro caso, el número de variables es 2 (n = 2), y el número de ecuaciones de restricción es 1 (m = 1). Debemos estudiar –como ya sabemos- el signo de los (n – m) últimos menores principales orlados. En nuestro caso sucede que: n – m = 2 – 1 = 1 menor principal orlado.

El menor principal orlado, cuyo signo se ha de analizar, es $\overline{H}_{m+n} = \overline{H}_3 = \overline{H}$, siendo $\overline{H}$ el Hessiano orlado anterior, cuyo signo es negativo.

Al ser m = 1 (impar) y $\overline{H} < 0$, tendremos que en P_0 (4,1) hay un mínimo relativo o local.

Así pues, han de utilizarse cuatro unidades del primer factor productivo, y una unidad del segundo factor, si es que deseamos minimizar el coste de producir 49 unidades del producto. Esto implicará un coste mínimo de:

$$C = 3x^2 + y^2 = 48 + 1 = 49 \text{ u.m.}$$

b) De emplear para su resolución el método de reducción de variables, despejando en la ecuación condicionante se tendría que: y = 49 – 12x, y substituyendo en la función objetivo o económica, que ya es una función de una sola variable:

$$L(x) = 3x^2 + (49 - 12x)^2 = 147\,x^2 - 1176x + 2401.$$

- *Condición necesaria o de primer grado*:

$$L'_x = 294x - 1176 = 0 \rightarrow x = 4\ ;\ y = 49 - 48 = 1\ ;$$

- *Condición suficiente o de segundo grado*:

$L''_{x2} = 294 > 0 \rightarrow$ luego hay un mínimo en el punto $P_0(4,1,49)$.

2) A continuación, debe averiguarse cuál sería el coste adicional de producir esta nueva unidad de producto.

Si el precio unitario de venta del producto es de 3 unidades monetarias, ello significa que aumentar la producción en una unidad más, supondrá para la empresa un ingreso adicional de 3 u. m.

Este coste marginal, de producir una unidad adicional más de producto a partir del punto óptimo, coincidirá con el valor opuesto del multiplicador de Lagrange λ^*. Hemos obtenido que $\lambda^* = -2$, luego el coste marginal de producir una unidad más –a partir del óptimo- será de 2 u. m. ($-\lambda = 2$). Luego al ser el ingreso marginal (3 u. m.) superior al coste marginal (2 u. m.), resultará rentable producir una unidad adicional del producto en cuestión.

Caso 3.

Se fabrican dos productos A y B en cantidades *x* e *y* respectivamente. Por la venta de cada unidad A se obtienen 3 euros y por cada unidad de B se obtienen 4 euros. La producción de la empresa ha de adaptarse a la restricción dada por la ecuación: $9x^2 + 4y^2 = 18000$. Calcúlense las unidades que se han de producir de cada producto para maximizar los ingresos (Sánchez, 2014).

Solución:

a) Se trata de maximizar la función de ingreso: $I(x) = 3x + 4y$ bajo la restricción. $9x^2 + 4y^2 = 18000$, por el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello, en primer lugar, construimos la función lagrangiana:

$$L(x, y) = 3x + 4y + \lambda(9x^2 + 4y^2 - 18000).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 3 + 18\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4 + 8\lambda y = 0 \\ g(x,y) = 9x^2 + 4y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{3}{18x} \\ \lambda = -\dfrac{4}{8y} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{6x} = \frac{1}{2y} \Rightarrow y = 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 9x^2 + 4y^2 = 18000 \end{cases} \Rightarrow x = 20,\ \ y = 60,\ \ \lambda = -\frac{1}{120}.$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

A partir del Hessiano orlado relevante, y de sus menores principales podremos saber si existe realmente un máximo. Tenemos que hallar el signo de sus *n-m* últimos menores, siendo *n* el número de incógnitas de la función de ingreso y *m* el número de restricciones.

En este caso, n - m = 2 – 1 = 1, de modo que calculamos el signo del último menor:

$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 18x & 8y \\ 18x & 18\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 8\lambda \end{vmatrix}$, que en el punto crítico condicionado $\left(20, 60, -\frac{1}{120}\right)$

será:

$$\begin{vmatrix} 0 & 360 & 480 \\ 360 & -\frac{3}{20} & 0 \\ 480 & 0 & -\frac{1}{15} \end{vmatrix} = (480)^2 \frac{3}{20} + (360)^2 \frac{1}{15} = 43200 > 0 .$$

Como $(-1)^{m+1} = (-1)^2 = 1 > 0$ entonces hay un máximo relativo en el punto crítico en cuestión, y las unidades que ha de producir de A y B para maximizar los ingresos son x = 20, y = 60.

b) Resolviendo ahora el mismo problema por la técnica propugnada de eliminación de variables, se tiene que: $3x = \sqrt{18000 - 4y^2}$, con lo que: $L(y) = \sqrt{18000 - 4y^2} + 4y$, que es una función real de una sola variable real, y la condición de extremo necesaria o de primer grado exige que:

$$L'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{18000 - 4y^2}} + 4 = 0 \Rightarrow -\frac{4y}{\sqrt{18000 - 4y^2}} = -4 \text{, de donde:}$$

$$y = \sqrt{18000 - 4y^2} \Rightarrow y^2 = 18000 - 4y^2;\ 5y^2 = 18000;$$

$$y = \sqrt{3600} = 60 \Rightarrow x = \frac{y}{3} = \frac{60}{3} = 20 \text{, luego (20, 60) es un punto crítico.}$$

-Condición suficiente o de segundo grado:

Tenemos que: $L'_y = 4 - \frac{4y}{\sqrt{18000 - 4y^2}}$, entonces:

$$L''_{y^2} = -\frac{9000}{(4500 - y^2)^{3/2}} = -\frac{9000}{\sqrt{(4500 - y^2)^3}} \text{, y para y = 60, se tiene que:}$$

$$L''_{y^2} = -\frac{9000}{\sqrt{900^3}} = -\frac{1}{3} < 0 \text{, luego, efectivamente, se trata de un MÁXIMO.}$$

Caso 4.

La función de utilidad hipotética de un consumidor, con un horizonte de dos períodos, es U = (c_1 + 1000)·(c_2 + 2000), donde c_1 y c_2 representan los gastos de cada período. Las rentas del consumidor son: y_1 = 10000, y_2 = 9000 unidades monetarias. El tipo de interés es del 10%. Determinar el plan de gastos del consumidor en los dos ejercicios, empleando diversos procedimientos.

Solución:

a) Resolviéndolo inicialmente por el método de los multiplicadores de Lagrange, se tiene la función lagrangiana a optimizar:

$$V = (c_1 + 1000)\cdot(c_2 + 2000) + \lambda\ [(10000 - c_1) + (9000 - c_2)\ 1.1^{-1}].$$

Así pues, maximizaremos la función de utilidad con la restricción determinada por la "ecuación de balance", que nos indica que la cantidad que el consumidor gasta en el primer período más la que gasta en el 2º período es igual a su renta.

De tal suerte, el consumidor debe encontrar la combinación de gastos que maximice la utilidad (Henderson y Quandt, 1968).

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial c_1} = c_2 + 2000 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial c_2} = c_1 + 1000 - \lambda \cdot 1.1^{-1} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} = (10000 - c_1) + (9000 - c_2)1.1^{-1} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo resulta: λ = 11550; c_1 = 9500 u. m. y c_2 = 9550 u. m. Con ello:

$$U = (10550) \times (11550) = 121\ 275\ 000 \text{ u. m.}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$V''_{c_1^2} = 0$; $V''_{c_2^2} = 0$; $V''_{c_1 c_2} = 1$; $V''_{c_2\lambda} = -1'1^{-1}$; $V''_{c_1\lambda} = -1$; formando el hessiano orlado relevante, resulta:

$$H(c_1, c_2, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1.1^{-1} \\ -1 & -1.1^{-1} & 0 \end{vmatrix} = 1.1^{-1} + 1.1^{-1} = \frac{2}{1.1} = 1.82 > 0$$, luego se trata

de un MÁXIMO.

Veamos la representación gráfica correspondiente:

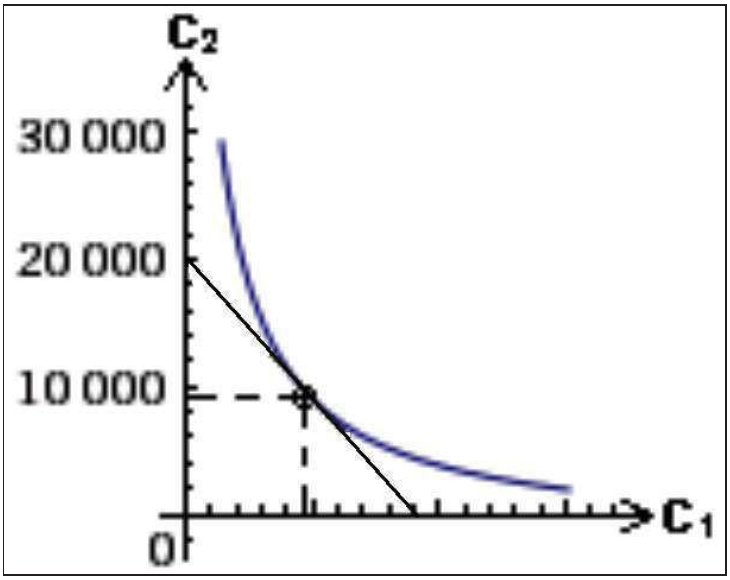


Fig. A-3.1. Curva de indiferencia y ecuación de balance.

En la siguiente figura puede verse, con mayor detalle, el punto de intersección entre la curva de indiferencia[2] y la ecuación de balance[3], que nos determina, como ya hemos tenido ocasión de estudiar en el capítulo 3, los valores óptimos buscados, esto es:

[2] Las curvas de "indiferencia" o de "preferencia" son un conjunto de combinaciones de bienes o servicios que proporcionan la misma utilidad al consumidor (ver cap. 3). Sobre una curva de indiferencia el consumidor es indiferente entre cualquiera de las canastas de bienes o servicios que se le presentan. Es decir, que para todos los puntos pertenecientes a una misma curva, el consumidor no tiene preferencia por la combinación representada por uno sobre la combinación representada por otro. La satisfacción del consumidor se caracteriza mediante la denominada *función de utilidad* en la que las variables son las cantidades de cada bien o servicio representadas por el valor sobre cada eje coordenado. Existen algunas discrepancias entre los autores sobre si la continuidad, derivabilidad y convexidad de dichas curvas están garantizadas y ello posee fuertes implicaciones en la discusión de la existencia o no de puntos de equilibrio. Desde un punto de vista matemático, la discusión implica el axioma de elección.

[3] La "ecuación de balance" (ver cap. 3) es la expresión algebraica a través de la cual se determina una igualdad que corrobora y comprueba que el ingreso o renta del consumidor es exactamente igual al gasto (compra) de bienes o servicios para el periodo determinado de consumo. En otras palabras, al sumar el valor gastado en adquisición de bienes o servicios "x" y bienes o servicios "y". Para tener tales valores basta multiplicar el número de unidades posibles de adquirir - en cada uno de los puntos - por su respectivo precio y luego sumarlos; esto puede hacerse en cualquier punto de la línea de precios.

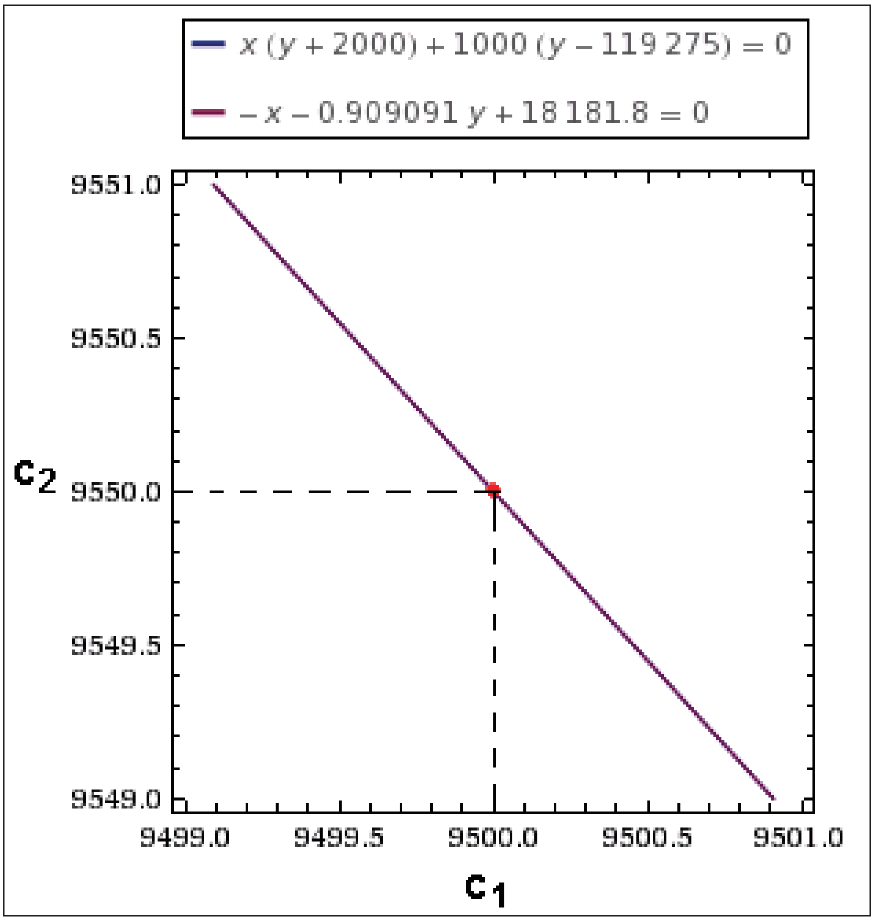


Fig. A-3.2. Detalle de gastos de cada período.

b) Empleando ahora la técnica de reducción o eliminación de variables, resultará que:

$10000 - c_1 = (c_2 - 9000)/1.1$; $11000 - 1.1c_1 + 9000 = c_2 = 20000 - 1.1c_1$.

La función de utilidad, entonces, quedará expresada así:

$$U = (c_1 + 1000) \times (22000 - 1.1 \cdot c_1) = 22000c_1 - 1.1c_1^2 + 22\,000\,000 - 1100\,c_1 =$$
$$= 20900\,c_1 - 1.1c_1^2 + 22\,000\,000.$$

-Condición necesaria o de primer grado:

$$U' = 20900 - 2.2c_1 = 0; \quad c_1 = \frac{20900}{2.2} = 9500 \text{ u. m.}$$

$$c_2 = 20000 - 1.1 \times 9500 = 9550 \text{ u. m.}$$

-Condición suficiente o de segundo grado:

U" = - 2.2 < 0, luego se trata de un MÁXIMO, c.s.q.d.

6. CONCLUSIONES

El método tradicional de los multiplicadores u operadores de Lagrange para la resolución de los problemas de extremos condicionados de varias variables con restricciones de igualdad, o el de los determinantes jacobianos, son sólo necesarios en presencia de puntos de silla (o de “ensilladura”) o bien cuando la forma implícita de la restricción impide despejar la o las variables que interese substituir en la función objetivo o económica a optimizar. Puede suceder, también, que los expresados métodos no ofrezcan soluciones definitivas y haya que recurrir, justamente, a la técnica referida de reducción o eliminación de variables para solventar eficazmente el problema planteado, como hemos tenido ocasión de comprobar. Para una mayor claridad del proceso, se han desarrollado varios ejercicios y casos prácticos representativos de las ventajas que ofrece la técnica en cuestión.

Los problemas de extremos condicionados de funciones de varias variables, resueltos mediante la sustitución pertinente empleando la técnica que denominaremos de “reducción de variables” (en alguna ocasión ha recibido también el apelativo de “substitución” o “eliminación”), se reducen a otros con las mismas variables o una variable menos y sin condición restrictiva alguna, lo que simplifica notablemente su resolución.

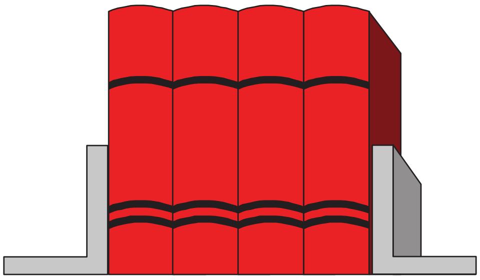
En el presente anexo se han expuesto diversos ejemplos y algunos casos prácticos de microeconomía que ponen de manifiesto, una vez más, la utilidad del procedimiento propuesto de “reducción de variables” en una gran cantidad de casos que se presentan en la práctica de la optimización económica (Franquet, 2014).

ABREVIATURAS Y SIGLAS

%	Porcentaje (tanto por ciento)
...	Puntos suspensivos (etcétera)
€	Euros
arctg	arco tangente
Cap.	Capítulo
cos	Coseno
cosh	Coseno hiperbólico
c.p.o.	Condición de Primer Orden
c.s.q.d.	Como se quería demostrar
Dr.	Doctor
D-W	Durbin-Watson
E-C	Euler-Cauchy
Ed.	Editorial
ED	Ecuación Diferencial
EDF(ER)	Ecuación en Diferencias Finitas (Ecuación Recurrente)
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
EDP	Ecuación en Derivadas Parciales
EI	Ecuación Integral
EID	Ecuación Integro-Diferencial
et alt.	*Et altri*
etc.	Etcétera
Fig.	Figura
FEP	Fondo de Educación y Promoción
FRO	Fondo de Reserva Obligatorio
Ha.	Hectárea
HFR	Hartree-Fock-Roothaan
I.G. (IG)	Integral General
INE	Instituto Nacional de Estadística
I.P. (IP)	Integral Particular
IPC	Índice de Precios de Consumo
I.S. (IS)	Integral Singular
kg.	Kilogramo
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
ln o Ln	Logaritmo neperiano o natural
log	Logaritmo decimal o de Briggs
m.	Metro
Máx.	Máximo
nº	Número
OP	Óptimo de Pareto
p, pág.	Página

PVF	Problema de Valor de Frontera
pp.	Páginas
PVI	Problema de Valor Inicial
RMS	Relación Marginal de Substitución
RMT	Relación Marginal de Transformación
RSB	Relación de Substitución de Bienes
RTP	Relación de Transformación de Productos
RTS	Relación Técnica de Substitución
sin o sen	Seno
sin h	Seno hiperbólico
SIMD	*Single Instruction Multiple Data*
tg o tan	Tangente
tan h	Tangente hiperbólica
TL	Transformada de Laplace
Tm.	Tonelada métrica
ud.	unidad
u.m.	unidad monetaria
UNED	Universidad Nacional de Educación a Distancia
v.gr.	*Verbi gratia*

****



BIBLIOGRAFÍA Y FONDOS DOCUMENTALES

(*) Bibliografía local.
(**) Bibliografía general.
(***) Bibliografía recomendada.

1.-AHIJADO QUINTILLÁN, M. *Introducción a la microeconomía para administración y dirección de empresas. Curso teórico-práctico.* Ed. CEURA, S.A. Madrid, 1997. 648 pág. (***).

2.-AIMAR, H.; BONGIOANNI, B.; MORIN, P. *Matemàtica Aplicada. Apuntes de EDP*. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe (Argentina). Junio, 2012. Disponible *on line* en: www.imal.santafe-conicet.gov.ar/pmorin/MA.../apunte-matematica-aplicada-edp.pdf. (**).

3.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Estadística (Introducción). Unidades Didácticas (Núm. 6).Uned.* Ed. Gráficas Torroba. Madrid, 1974.(**).

4.-ALCAIDE INCHAUSTI, A.; INFANTE MACÍAS, R.; GARCÍA SESTAFE, J.V. *Matemáticas. Unidades Didácticas. Uned.* Ed. Gráficas Torroba. Madrid, 1974.(**).

5.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. et alt. *Matemática Superior. Unidad Didáctica (Núm. 3).Uned.* Ed. Gráfica Internacional. Madrid, 1976.(**).

6.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Matemáticas para economistas y matemáticas empresariales.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid, 1981. 476 pág. (**).

7.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Ampliación de matemáticas aplicadas a la economía. Unidad Didàctica nº6.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid, 1987. (**).

8.-ALEGRE, P. ET ALT. *Ejercicios resueltos de Matemáticas empresariales 2.* Editorial AC. Madrid, 1993. 596 pág. (**).

9.-ALLEN, R.G.D. *Mathematical Analysis for Economists*. Macmillan, Londres, 1938. (**).

10.-ÁLVAREZ VALDÉS, L. *Memento de matemáticas*. Editorial Dossat. Madrid, 1921. 375 pág. (**).

11.-AYRES, FRANK, JR. *Theory and problems of Differential and Integral calculus*. Schaum Publishing Company. New York, 1964. 346 pág. (**).

12.-BALBÁS DE LA CORTE, A. y GIL FANA, J.A. *Programación matemática*. Ed. Paraninfo, S.A. Madrid, 2004. (**).

13.-BALBÁS, A.; GIL J.A.; GUTIÉRREZ, S. *Análisis Matemático para la Economía II: Cálculo integral y sistemas dinámicos*. Ed. Thomson-Paraninfo-AC. Madrid, 2005. 372 pág. (**).

14.-BARGUEÑO FARIÑAS, V.; ALONSO DURÁN, M. *Problemas de ecuaciones diferenciales con introducciones teóricas.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid, 2012. 452 pág. (***).

15.-BASOV, S. Lie groups of partial differential equations and their application to the multidimensional screening problems. *En Econometric Society 2004 Australasian Meetings, 44.*(**).

16.-BELLMAN, R. *Introducción al anàlisis matricial*. Ed. Reverté, o *Functional equations in the theory of dynamic programming-V* de Bellman, Proc. National Academic Sciences U.S.A., 1955. (**).

17.-BELLMAN, R. *Introduction to the Mathematical Theory of Control Process*. Vol. 2. Academic Press. 1971. (**).

18.-BORT CANUTO, A. *Ejercicios de Teoría Económica, vol II.* Ed. CEURA, S.A. Madrid, 1989. 206 pág. (**).

19.-BRONSON, R.; COSTA, G. *Ecuaciones diferenciales*. Ed. McGraw-Hill Interamericana. Colección Schaum. México, 2008. 385 pág. (***).

20.-CABADA FERNÁNDEZ, A. *Problemas resueltos de ecuaciones en derivadas parciales*. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad de Santiago de Compostela, diciembre de 2011. Disponible *on line* en http://webspersoais.usc.es/persoais/alberto.cabada/EDP-Cabada.pdf. (**).

21.-CASTAÑEDA CHORNET, J. *Lecciones de Teoría Económica*. Editorial Aguilar. Madrid, 1968. 739 pág. (***).

22.-COURANT, R. *Differential and Integral Calculus*. Blackie. Londres, 1934. (**).

23.-COURANT, R.; HILBERT, D. Methods of Mathematical Physics, Vol. I e II. Wiley – Interscience, 1962. (**).

24.-ELSGOLTZ, L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.* Editorial Mir. Moscú, 1969. 432 pág. (**).

25.-ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRÓNOMOS DE VALENCIA. *Ejercicios de Teoría Económica I.* Ed. Sección de Publicaciones de la E.T.S de Ingenieros Agrónomos. Valencia, 1969. 184 pág. (***).

26.-ESCUELAS TÉCNICAS SUPERIORES. *Problemas de Álgebra Lineal. Primer curso.* Edita: Multicop. Madrid, 1967. 304 pág. (**).

27.-FERNÁNDEZ VIÑA, J.A. *Matemáticas superiores IV. Unidad Didáctica nº4.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Gráficas Grefol. Madrid, 1975. (***).

28.-FINE, H.B. *Calculus*. Macmillan. New York, 1937. (***).

29.-FRANCO LEIS, D.; PERÁN MAZÓN, J. *Ecuaciones en derivadas parciales (material preliminar y ejercicios resueltos).* Departamento de Matemàtica Aplicada I. UNED. Madrid. Disponible *on line* en *portal.uned.es/pls/portal/url/ITEM/ED678FDB4F2BD8A3E040660A357056E6.* (**).

30.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas. Curso práctico.* Ed.: Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 2013. 752 pág. (**).

31.-FRANQUET BERNIS, J.M. "Reducción de variables en la búsqueda de extremos condicionados de funciones multivariantes". *Cadup-Digital Estudios.* Centro Asociado de la UNED Tortosa. 2014. (**).

32.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes.* Ed.: Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 2014. 904 pág. (**).

33.-GARCÍA CAMOYANO, P. *Formulario de Matemáticas Superiores*. Manuales Técnicos Koel. Editorial Tesoro. Madrid, 1967. 470 pág. (**).

34.-GARCÍA SESTAFE, J.V. *Matemáticas para economistas.* Confederación Española de Cajas de Ahorro. Libros de Ejercicios. Madrid, 1978. 270 pág. (**).

35.-GARCÍA SESTAFE, J.V.; RODRIGUEZ RUIZ, J. *Ciencias Económicas y Empresariales. Curso de matemáticas en forma de problemas.* Centro de Estudios Universitarios "Ramón Areces". Editorial Ceura. Madrid, 1986. 604 pág. (**).

36.-GARCÍA SESTAFE, J.V.; RODRIGUEZ RUIZ, J. *Matemáticas para la Economía. Curso práctico. Álgebra y cálculo.* Centro de Estudios Universitarios "Ramón Areces". Fernández Ciudad, S.L. Madrid, 1999. 594 pág. (**).

37.-GARÍN MUÑOZ, T. *Microeconomía intermedia. Teoría y problemas.* Editorial Universitaria Ramón Areces, S.A. Madrid, 2011. 528 pág. (**).

38.-GOLDBERG, S. *Introduction to Difference Equations.* New York, Wiley, 1958. Existe traducción al castellano de Ed. Marcombo, S.A. Barcelona, 1964. (***).

39.-GOURSAT, E. *A Course in Mathematical Analysis*, vol. I. Boston, Ginn, 1904. (***).

40.-GUZMÁN, L., SÁNCHEZ, M. J., MUÑOZ, A. y SANTOS, J. *Fundamentos matemáticos para la administración y dirección de empresas*. Ed. CEURA, S.A. Madrid, 1999. (**).

41.-HAGUE, D. C. *Economía de la empresa. Instrumentos analíticos para las decisiones empresariales.* Editorial Gustavo Gili, S.A. Barcelona, 1972. 496 pág. (**).

42.-HENDERSON, J.M.; QUANDT, R.E. *Teoría microeconómica.* Ediciones Ariel. Esplugues del Llobregat (Barcelona), 1962. 334 pág. (**).

43.-HERNÁNDEZ, H.; NÚÑEZ, L. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales.* Universidad de Los Andes, Mérida. *On line*: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/hector/prontuario/metodos2/S06_C18.pdf (**).

44.-KRASNOV, M.; KISELIOV, A.; MAKARENKO, G. *Ecuaciones integrales*. Editorial Mir. Moscú, 1977. 190 pág. (**).

45.-LEONORI, T. *Ejercicios del curso "Ecuaciones en derivadas parciales"*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada. Ed. Bubok Publishing, S.L. (**).

46.-LUZÁRRAGA, A. *Problemas resueltos de álgebra lineal.* Barcelona, 1970. 534 pág. (**).

47.-MARTÍN MARCOS, A.; SÁNCHEZ HERNÁNDEZ, J.F. *Problemas resueltos de microeconomía. Unidades Didácticas.* UNED. Madrid, 2001. 202 pág. (**).

48.-MARTÍNEZ CONCHA M.; SILVA CORNEJO, C.; VILLALOBOS MARÍN, E.; *Ejercicios resueltos (series de Fourier).* Universidad de Santiago de Chile. Facultad de Ciencia. Departamento de Matemàtica y CC, 2011. Disponible *on line* en: *es.slideshare.net/DIEGO123NINA/ejercicios-resueltos-* (**).

49.-MARTÍNEZ LASHERAS, J.L. *Ejercicios de Teoría Económica I*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos. Cátedra de Economía y Política Agraria. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 1969. 182 pág. (**).

50.-MARTÍNEZ LASHERAS, J.L. *Ejercicios de Política Agraria*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 1970. 114 pág. (**).

51.-MARTÍNEZ SALAS, J. *Elementos de matemáticas.* Ed. Gráf. Andrés Marín, S.A. Valladolid, 1969. 884 pág. (**).

52.-MATAIX PLANA, J.L. *Mil problemas de cálculo integral.* Ed. Dossat, S.A. Madrid, 1968. 116 pág. (**).

53.-MILNE-THOMPSON, L.M. *The calculus of Finite Differences*. Macmillan. Londres, 1933. (***).

54.-MOCHÓN MORCILLO, F. *Principios de Economía.* Ed. McGraw-Hill. Madrid, 1998. 460 pág. (**).

55.-MOODLE. *Física teórica y Física atómica*. Universidad de Valladolid (UVA). Disponible *on line* en: *metodos.fam.cie.uva.es/moodle.* (**).

56.-MORENO GONZÁLEZ, C. *Cálculo numérico II. Métodos numéricos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales*. Ed. UNED. Madrid, 1999. (**).

57.-MUÑOZ, A.; SANTOS, J.; FABIÁN, G. *Problemas de matemáticas para economía, administración y dirección de empresas.* Ediciones Académicas, S.A. Madrid, 2003. 492 pág. (**).

58.-NAVARRO ROJAS, F. *Ecuaciones en diferencias de Volterra y aproximación numérica para ecuaciones integrales.* Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Programa Cybertesis. Lima, 2011. 135 pág. On line: http://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/cybertesis/294 (**).

59.-NIETO OSTOLAZA, M.C. *Matemáticas para economistas*. Confederación Española de Cajas de Ahorro. Libros de Lecturas. Madrid, 1976. 600 pág. (**).

60.-PONTRYAGIN, L.S.; BOLTYANSKI, V.G.; GAMKRELIDZE, R.V.; MISCHENKO, E.F. *The Mathematical Theory of Optimal Process*. Interscience Publishing Co. Inc. 1962. (**).

61.-PRIETO, E.; RODRÍGUEZ, J.; GARCÍA, C.; GUTIÉRREZ, P.; VELASCO, J.R. *Matemáticas 2. Economía y Empresa. Ejercicios resueltos.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. Madrid, 1991. 518 pág. (**).

62.-PUIG ADAM, P. *Curso Teórico Práctico de Ecuaciones Diferenciales aplicado a la física y técnica.* Editor: Nuevas Gráficas, S.A. Madrid, 1962. 432 pág. (**).

63.-PUIG ADAM, P. *Curso Teórico Práctico de Cálculo Integral aplicado a la física y técnica.* Editor: Biblioteca matemàtica, S.L. Madrid, 1969. 324 pág. (**).

64.-R.A.E.C. *Problemas de cálculo integral.* Ed. Gráficas Lormo. Madrid, 1971. 400 pág. (**).

65.-RODRIGO DEL MOLINO, F.; RODRIGO MUÑOZ, F. *Problemas de Matemáticas para científicos y técnicos.* Ed. Tébar. Sevilla, 1998. 418 pág. (**).

66.-RODRÍGUEZ CALDERÓN, C.; ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Matemática superior. Unidad Didàctica nº1.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid, 1977. (**).

67.-RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, A. *La elasticidad en las funciones vectoriales*. Comunicación a la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras. Barcelona, 1979.(**).

68.-RODRÍGUEZ RUIZ, J.; PRIETO SÁEZ, E.; HERNÁNDEZ MORALES, V.; GÓMEZ TOLEDANO, M.P. *Matemáticas 2. Economía y Empresa. Teoría.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. Madrid, 1991. 484 pág. (**).

69.-RODRÍGUEZ, J. et alt. *Elementos y cuestiones de microeconomía. Unidades Didácticas.* UNED. Madrid, 1999. 302 pág. (**).

70.-SAMUELSON, P. A. *Foundations of Economic Analysis*. Harvard University Press, 1947. (***).

71.-SAMUELSON, P. A. *Curso de Economía moderna.* Biblioteca de Ciencias Sociales. Ed. Aguilar. Madrid, 1973. 992 pág. (***).

72.-SÁNCHEZ SÁNCHEZ, M. *Matemáticas avanzadas para la Administración y Dirección de empresas.* Editorial Sanz y Torres, S.L. –UNED. Madrid, 2011. (**).

73.-SÁNCHEZ SÁNCHEZ, M. *Matemáticas avanzadas para la Economía.* Editorial Sanz y Torres, S.L. – UNED. Madrid, 2014. 270 pág. (**).

74.-SCHIAVI, E.; MUÑOZ, A.I. *Métodos matemáticos de la Ingeniería Química*. Apuntes curso académico 2006-07. Disponible *on line*: *metodosmatematicosiii.wikispaces.com/file/view/IntroducciónEDP's.* (**).

75.-SIMMONS, G. F. *Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas.* Ed. McGraw-Hill. Madrid, 1998. 658 pág. (**).

76.-TENORIO, A.; MARTÍN, A.; PARALERA, C.; CONTRERAS, I. *Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros*. Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa (16), pp. 165-199. Universidad Pablo de Olavide. Sevilla, diciembre de 2013. (**).

77.-VALDIVIA UREÑA, M. *Anàlisis matemático III, tomo II. Unidades didácticas (4)*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Madrid, 1991.(**).

78.-VARIAN, H.L. *Microeconomía intermedia. Un enfoque actual.* Antoni Bosch, editor, S.A. Barcelona, 1998. 716 pág. (**).

79.-WOODS, F.S. *Advanced calculus*. Nueva edición, Boston, Ginn, 1934. (**).

ÍNDICE GENERAL

Pág.

Pág.

Pág.

ÍNDICE DE FIGURAS

* * * * * *