

1

Cinco temas de Hidrología e Hidráulica

J. M. Franquet

UIC

**UIC - Campus de l'Ebre**

**EUCET**

Col·lecció "Tècnica"

# **CINCO TEMAS DE HIDROLOGÍA E HIDRÁULICA**

José María Franquet Bernis



**Universitat Internacional de Catalunya**

Escola Universitària de Ciències  
Experimentals i Tecnologia

## PRÓLOGO

La “Hidrología” es la ciencia que estudia el ciclo del agua y su evolución sobre la superficie de la tierra y bajo el suelo, constituyendo una de sus ramas principales el análisis del volumen hídrico de una región determinada y su distribución en el espacio y en el tiempo. Concretamente, los capítulos 4 y 5 de la presente obra podemos considerarlos propios, en definitiva, de la “Hidrología superficial”, en dicotomía con la “Hidrología subterránea”. Por otra parte, la “Hidráulica” es la parte de la Mecánica de los fluidos que estudia el equilibrio (“Hidrostática”) y el movimiento o flujo (“Hidrodinámica”) de los líquidos. Como “fluido” entendemos aquella modalidad de la materia que, en estado de reposo, se caracteriza por la condición de ser normales a la superficie de un elemento, por pequeño que éste sea, las fuerzas exteriores que sobre él puedan actuar; precisamente, la imposibilidad de que existan fuerzas o tensiones exteriores transversales o de cortadura es lo que diferencia los fluidos de los cuerpos sólidos. Mediante la Hidráulica se estudian principalmente los flujos de agua dirigidos y limitados por paredes resistentes, es decir, corrientes en conducciones libres o abiertas y cerradas o a presión, como es el caso, respectivamente, de los capítulos 1 y 2 de nuestro libro. El capítulo 3, en fin, comprende una aplicación de algunos Métodos Estadísticos clásicos y otros novedosos propuestos por el autor para la evaluación de la uniformidad y de la forma de la distribución de probabilidad de las variables hidráulicas.

Como decía el profesor M. Lucini en su prólogo del traductor a la obra de Ph. Forchheimer (citada en la bibliografía), veamos que durante toda la segunda mitad del siglo XIX y los comienzos del siglo XX, la Hidráulica, probablemente influida en exceso por el dogmatismo y la gloriosa tradición de la vieja Escuela Politécnica francesa, seguía aún aferrada a las brillantes teorías y experiencias de Darcy, Bazin, Chèzy y Poncelet; a los desarrollos matemáticos, geniales algunas veces, de Saint-Venant, así como a los circunstanciados y artificiosos de Boussinesq. El que la Hidráulica era algo más, y había de valerse de otros métodos teóricos y empíricos diferentes de los tradicionales, constituyó una tarea iniciada por Osborne Reynolds en las postrimerías del siglo XIX, con sus estudios revolucionarios sobre la viscosidad y la semejanza de modelos, que fue provechosamente continuada por Kozeny, Prandtl y Von Kàrmàn.

Pues bien, publicamos nuestra obra con el deseo de su utilidad, tanto para los alumnos y profesores de las Escuelas de Ingenieros y Arquitectos como para los técnicos de grado medio y superior en el ejercicio de su profesión. Los estudiantes hallarán en ella el modo de resolver sus dificultades relacionadas con algunos temas concretos y los profesionales el recordatorio de los conocimientos adquiridos y la apertura de nuevas perspectivas para profundizar en otros.

Quisiera puntualizar, asimismo, alguna idea justificativa acerca del instrumental matemático y estadístico empleado en el libro, que dilata el alcance de las inferencias posibles de los supuestos o hipótesis iniciales hasta límites absolutamente insospechados. Y es que los recursos matemáticos de la nueva Hidráulica resultan de orden mucho más elevado que los de la clásica; en este sentido, los trabajos de Levi-Civita, Blasius, Mises, Von Kàrmàn y algunos otros han dado una extensa aplicación a las funciones de variable compleja, representaciones conforme e isogonal, funciones elípticas, etc. La economía y belleza que se desprenden de los planteamientos y de las soluciones matemáticas, su posterior contrastación praxeológica, así como las posibilidades casi inescrutables que los modernos recursos de la Informática pueden ofrecer a la resolución de este tipo de cuestiones, permiten, incluso, augurar metamorfosis espectaculares en su tratamiento.

Es necesario, por otra parte, obviar el peligro de que el análisis matemático desvíe el esfuerzo de los estudiosos hacia el desarrollo de complejos sistemas teóricos de muy escasa significación práctica. El hecho incontrovertible y lógico de que los resultados sólo son válidos en la medida en que los supuestos originales concuerdan con la situación real, puede ser fácilmente ignorado cuando se utiliza profusamente el método matemático. La elaboración y precisión de los resultados obtenidos con los instrumentos matemáticos es probable que induzcan una impresión o aureola exagerada de exactitud en los mismos; ahora bien, la precisión no depende de los símbolos utilizados -y mucho menos en la denominada "Ciencia de los coeficientes"- sino de los conceptos y abstracciones que tales símbolos representan. Las Matemáticas, en definitiva, no constituyen un fin en sí mismas para el Ingeniero o el Hidrogeólogo, sino más bien proporcionan una serie de instrumentos que facilitan la obtención y exposición de las teorías acerca de la Hidráulica y de la Hidrología.

Desde la reflexión y el estudio de muchos años, pero también desde el ejercicio libre de mi profesión de Ingeniero y desde la docencia que me honro en impartir de las asignaturas "Hidráulica y Riegos" y "Proyectos" del Plan de Estudios de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de la Universidad Internacional de Cataluña (UIC), quisiera también aportar mi granito de arena (o mejor aún, mi gotita de agua) a diversas cuestiones relacionadas con la materia, partiendo del tratamiento clásico pero desde una perspectiva novedosa y buscando nuevos planteamientos y soluciones. Y es que renovarse es vivir, y cada generación tiene el hermoso deber de mejorar el esfuerzo acumulado de las precedentes; los viejos nombres que el tiempo inexorable sepulta en el olvido sólo reviven en el germinar primaveral de nuevas semillas y éste es el mejor -y acaso el único- homenaje que ilusionadamente pueden aguardar.

También en el marco limitado de estas reflexiones, quiero rendir tributo sincero de admiración y agradecimiento a los excelentes libros de texto, investigaciones y artículos técnicos, citados en la bibliografía, sobre diversos

temas relacionados con la Hidráulica y la Hidrología, habiendo sido influido notablemente, en mis estudios, por el brillante trabajo de sus autores.

Llegados, por fin, al ineludible capítulo de agradecimientos, debe señalar que no olvida, quien esto escribe, la formidable deuda de gratitud contraída con los que fueron sus guías y maestros, algunos de ellos ya desaparecidos. Mi reconocimiento, en fin, a mi compañero en las tareas docentes universitarias Jordi Sardà (URV, UNED) por su colaboración en temas estadísticos, al igual que al profesor Jordi Gas (UIC), por su original aportación a la generalización del teorema de Cauchy a un número de funciones reales superior a dos, de prometedoras aplicaciones hidráulicas. Reconozco, así mismo, el concienzudo trabajo de mi compañero profesor Oscar Cid (UIC) en el refinado y presentación del trabajo informático de los anexos I y II. También a mi hijo Josep Maria (¡cuántas horas!) y a mi cuñada Cinta Borràs, por su paciente labor de composición y tratamiento del texto, a la Universidad Internacional de Cataluña (UIC), al editor Bibliográfica Internacional, S.L., al impresor Copy-rapid, y, en general, a todos cuantos se han interesado por la publicación del presente libro, aportando sugerencias y valiosos consejos dirigidos a la mejor consecución de nuestro empeño.

**Tortosa, marzo de 2003**  
***EL AUTOR***



# CAPÍTULO I

## CONDUCCIONES LIBRES: DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE FANNING

### RESUMEN

La mecánica del flujo en los cauces abiertos (canales, cauces naturales, acequias de riego y de desagüe, tuberías parcialmente llenas,...) es más complicada que la del flujo que tiene lugar en las tuberías a presión, debido a la existencia de una superficie libre en contacto con la atmósfera. Son posibles muchos fenómenos importantes en la circulación de un líquido por cauces abiertos, por la facilidad con que la corriente puede cambiar de sección transversal y longitudinal al no estar limitada totalmente por paredes, como sucede en los conductos a presión. Los datos experimentales resultan más difíciles de obtener y la elección del factor de fricción resulta asimismo más complicada, debido a la gran variedad de secciones transversales y a la diversidad de los materiales que constituyen sus paredes. Pues bien, en el presente trabajo ofrecemos los valores del coeficiente  $C$  de Chèzy en función de los diferentes valores de  $R$  (radio hidráulico medio) y del coeficiente de rugosidad de las paredes y fondo, así como los correspondientes valores del coeficiente  $\lambda$  de Fanning. Ello se realiza para las cinco formulaciones clásicas de Ganguillet y Kütter (simplificada), Manning-Strickler, Bazin, Koeschlin y Forchheimer, y los resultados así obtenidos, de gran aplicabilidad en el cálculo y diseño de este tipo de obras hidráulicas, pueden encontrarse tabulados en el anexo que se halla al final del presente capítulo de nuestro libro. Escrita en función de  $\lambda$ , por otra parte, la fórmula de Darcy-Weissbach puede aplicarse directamente sin necesidad de disponer de otros datos empíricos. Por último, se proponen por el autor 12 fórmulas para el cálculo de estas conducciones, según las diferentes categorías de rugosidad, junto con un modelo múltiple de aplicación universal, cuya ejemplificación se concreta mediante la resolución de dos casos prácticos suficientemente exhaustivos.

---

## CONDUCCIONS LLIURES: DETERMINACIÓ DEL COEFICIENT DE FANNING

### RESUM

La mecànica del flux a les lleres obertes (canals, lleres naturals, sèquies de reg i de desguàs, canonades parcialment plenes,...) és més complicada que la del flux que es produeix a les canonades a pressió, per l'existència d'una superfície lliure amb contacte atmosfèric. Són possibles molts fenòmens importants en la circulació d'un líquid per les lleres obertes, donada la facilitat amb la qual el corrent pot canviar de secció transversal i longitudinal en no estar limitat totalment per les parets, com succeeix a les canonades a pressió. Les dades experimentals resulten més difícils d'aconseguir i l'elecció del factor de fricció també és més complicada, degut a la gran varietat de seccions transversals i a la diversitat dels materials constituents. Doncs bé, al present treball oferim els valors del coeficient  $C$  de Chèzy en funció dels diferents valors de  $R$  (radi hidràulic mitjà) y del coeficient de rugositat de les parets i de la solera, així com els corresponents valors del coeficient  $\lambda$  de Fanning. Tot això es realitza per a les cinc formulacions clàssiques de Ganguillet i Kütter (simplificada), Manning-Strickler, Bazin, Koeschlin i Forchheimer, i els resultats obtinguts, de gran aplicabilitat al càlcul i disseny d'aquests tipus d'obres hidràuliques, poden trobar-se tabulats a l'annex final del present capítol del nostre llibre. Altrament, escrita en funció de  $\lambda$ , la fórmula de Darcy-Weissbach pot aplicar-se directament, sense que calgui disposar d'altres dades empíriques. Per últim, es proposen per l'autor 12 fórmules per al càlcul d'aquestes conduccions, segons les diferents categories de rugositat, juntament amb un model múltiple d'aplicació universal, l'exemplificació del qual es desenvolupa mitjançant la resolució de dos casos pràctics suficientment exhaustius.

## **FREE CONDUCTS: DETERMINING THE FANNING COEFFICIENT**

### **ABSTRACT / SUMMARY**

The flow mechanism of open riverbeds (irrigation channels, streams, irrigation ditches and sewers, partially full pipelines,...) is more complicated than the flow, which takes place in pipelines under pressure, due to the existence of a free surface in contact with the atmosphere. Many important phenomenon are possible in the circulation of liquid through open spaces, because of the facility with which the current can change direction where it is not totally limited by walls, as occurs in conducts under pressure. Experimental data are more difficult to obtain and the selection of the friction factor is also much more complicated, due to the great variety of the transversal sections and the diversity of materials, which constitute its walls. In the present study we offer Chèzy's coefficient **C** values in function of the different values of **R** (average hydraulic radius) and the coefficient of the roughness of the walls and bottom, as well as Fanning's corresponding values of the  $\lambda$  coefficient. This is done for the five classical formulas by Ganguillet and Kütter (simplified), Manning-Strickler, Bazin, Koeschlin and Forchheimer, and the results thus obtained, highly applicable in calculating and designing this type of hydraulic works, can be found tabulated in the annex, which is found at the end of this chapter (in our book). Written in function of  $\lambda$ , on the other hand, the Darcy-Weissbach formula can be applied directly without the aid of other empirical data. Finally, the author proposes twelve formulas to calculate these channels according to the different frictions, together with a multiple model of universal application. Last but not least, two practical and instructive cases will serve as exhaustive example.

## 1. INTRODUCCIÓN

La masa de agua que se desliza por un cauce abierto debería, según el conocido teorema de Bernouilli (cuya exposición aquí obviaremos por razones de espacio), aumentar la velocidad indefinidamente, a lo largo de su recorrido; mas, ello no es así. En la conocida expresión:  $Q = S \times V$ , en la que  $Q$  es el volumen de agua (caudal o gasto) que en la unidad de tiempo pasa por la sección transversal mojada de área  $S$  perpendicular a la vena líquida, la velocidad media  $V$  de los filetes líquidos permanece constante a lo largo del cauce.

Ya en el año 1754 enunció Brahmms que “el frotamiento consume el trabajo del agua que desciende por un cauce”. En efecto, el movimiento de la masa de agua da lugar a dos clases de resistencia al frotamiento bien distintas: a) La que las moléculas líquidas experimentan al deslizarse unas sobre otras, denominada “viscosidad”, y b) la que dichas moléculas experimentan al desprenderse de las superficies sólidas con las que están en contacto, y que se denomina “adherencia”. Pues bien, si ambas resistencias fuesen perfectamente conocidas, los principios de la Mecánica y los métodos del análisis matemático bastarían para resolver, de una manera completa, estas viejas cuestiones que plantea tradicionalmente la Hidráulica.

Cuando un sólido se coloca sobre un plano inclinado de longitud indefinida y pendiente uniforme, el movimiento que se produce, cuando esta pendiente sobrepasa el valor de un cierto ángulo con el plano horizontal, es siempre acelerado, porque el rozamiento es independiente de la velocidad. En nuestro caso, la adherencia y la viscosidad de los líquidos hacen que éstos presenten, respecto a la velocidad, una propiedad esencialmente distinta a la del frotamiento de los sólidos sobre los sólidos. Este movimiento, en el que  $V$  permanece constante, se denomina *movimiento uniforme*, y tiene lugar esencialmente en los cauces artificiales rectilíneos, de pendiente de la solera y sección constantes, sometidos a un régimen uniforme.

La corriente líquida que fluye por un cauce abierto o canal, tiene una superficie libre en contacto con la atmósfera y su movimiento se debe no a una carga externa (depósito elevado, electrobomba centrífuga, ..., aunque el impulso inicial pueda provenir de ellos) como sucede en el caso de las conducciones forzadas que contemplaremos en el siguiente capítulo de nuestro libro, sino a la pendiente del cauce y de la superficie libre del líquido.

Los tipos más corrientes de cauces abiertos son las corrientes naturales (ríos, arroyos, etc.), los canales artificiales, las acequias de riego y de desagüe de los campos de cultivo, las alcantarillas, y los túneles y tuberías que funcionan parcialmente llenos. A su vez, los canales artificiales pueden utilizarse para la navegación, suministro de agua a las centrales hidroeléctricas, abastecimiento de agua, regadíos, drenaje agrícola, control de inundaciones, etc.

La mecánica del flujo en los cauces abiertos es más complicada que la del flujo en tuberías a presión, debido justamente a la existencia de una superficie libre en contacto con la atmósfera. Son posibles muchos fenómenos importantes en la circulación de líquido por cauces abiertos, por la facilidad con que la corriente puede cambiar de sección longitudinal y transversal al no estar limitada totalmente por paredes resistentes, como sucede en los conductos a presión. Los datos experimentales resultan más difíciles de obtener y la elección del factor de fricción resulta asimismo más complicada, debido a la gran variedad de secciones transversales y a la diversidad de los materiales que constituyen sus paredes.

El número de Reynolds **Re** no desempeña ordinariamente un papel muy importante en el flujo de canal abierto, dado que los efectos de la *viscosidad* son mucho menos importantes que los de la *rugosidad*.

Recordemos que el flujo es uniforme en canales cuando la velocidad media permanece constante entre dos secciones, lo que al existir superficie libre equivale a la constancia de la sección transversal y de la profundidad (calado del agua). En estas condiciones, la superficie libre del agua es paralela al lecho del cauce (solera).

En las corrientes uniformes (Fig. 1.1.) las líneas de corriente son paralelas y la distribución de presiones es hidrostática en una sección transversal A-A'. La línea de niveles piezométricos coincide con la superficie libre del agua y la línea de energía resulta paralela a ella. Así:

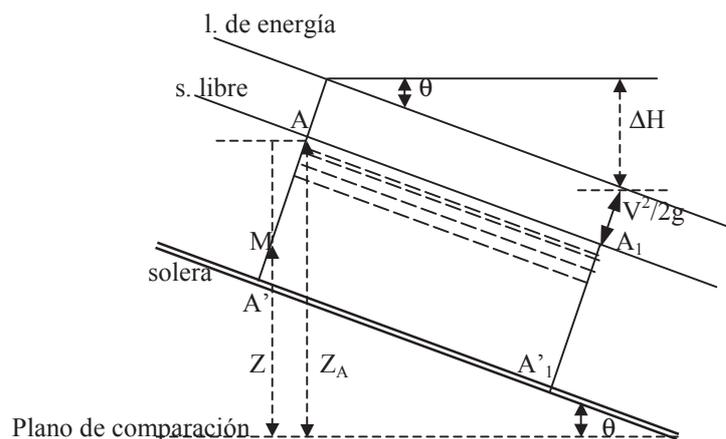


Fig. 1.1. Corriente líquida en una conducción libre

## 2. ECUACIÓN GENERAL DEL MOVIMIENTO UNIFORME EN CANALES

### 2.1. FORMULACIÓN TEÓRICA DEL PROCESO

A continuación, vamos a deducir la ecuación para el flujo uniforme en canales. En efecto, consideremos un tramo de longitud  $l$  (Fig. 1.2.), entre las secciones transversales 1 y 2 de un canal con sección constante  $S$  por el que circula una corriente uniforme con velocidad media  $V$ .

Sean  $z_1$  y  $z_2$  las cotas taquimétricas de los centros de gravedad de las secciones normales o perpendiculares al sentido de circulación del flujo 1 y 2.

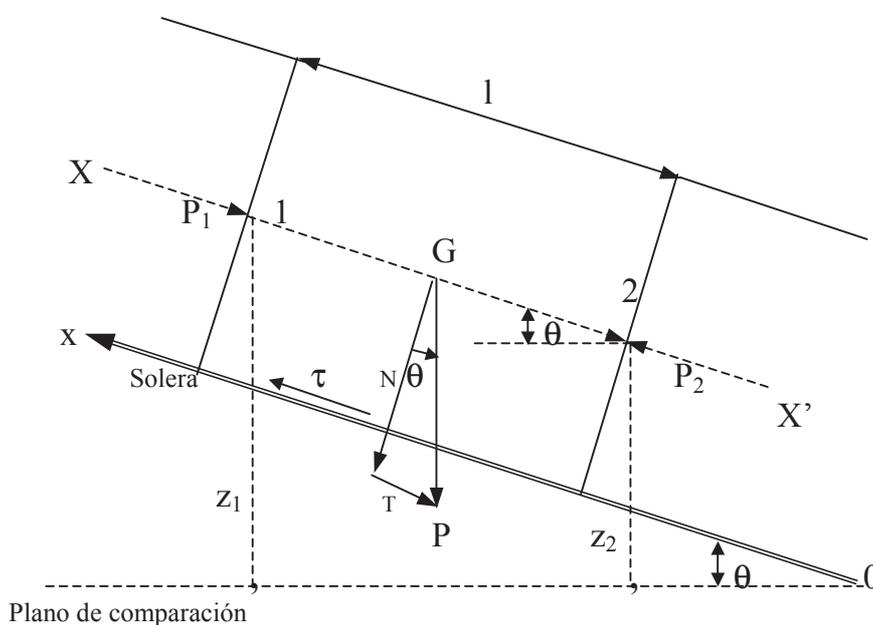


Fig. 1.2. Movimiento uniforme en un canal

Sobre el volumen líquido comprendido entre las secciones 1 y 2 actúan las siguientes fuerzas:

a) El peso de la masa líquida aplicado en  $G$  (c.d.g. del volumen), cuyo valor es:  $P = S \cdot l$  (considerando un peso específico para el agua de  $1'00 \text{ grs./cm}^3$ ), que se descompone en sus componentes tangencial:  $T = S \cdot l \cdot I$  y normal:  $N = S \cdot l \cdot (1 - I^2)^{1/2}$ . También:  $P = (N^2 + T^2)^{1/2}$ . La primera  $T$  traslada el agua en sentido descendente, mientras que la acción de  $N$ , cuyo valor resulta muy próximo (tanto más cuanto menor sea la pendiente del cauce) al de  $P$ , se equilibra con la reacción del fondo del cauce.

b) Las presiones sobre las secciones transversales 1 y 2, que se equilibran recíprocamente, ya que estamos en un régimen de presiones hidrostáticas, en el cual no hay variación de profundidad entre los puntos correspondientes de las secciones consideradas.

c) La fuerza  $F$  de rozamiento o de resistencia de las paredes dirigida según el eje y opuesta al movimiento,  $F = \tau \cdot c \cdot l$ , siendo  $c$  el perímetro o contorno mojado de la sección normal.

Ahora bien, si la masa líquida ha de deslizarse con movimiento uniforme, es que existe una cierta “fuerza retardatriz”, desarrollada por la viscosidad y la adherencia obrando conjuntamente, que debe ser igual a  $S \cdot l \cdot I$ , y cuya línea de acción no coincidirá con la de la  $T$ , para que pueda tener lugar el movimiento deslizante; es decir, que la fuerza retardatriz tendrá por componentes otras fuerzas situadas en la superficie de contacto de la masa de agua con las paredes del cauce y en el plano de separación de dos láminas contiguas, engendrándose, de tal suerte, un par de fuerzas que tiende a hacer deslizar la lámina sobre el cauce o bien sobre otra contigua. Otra explicación radicaría en la acción de la gravedad terrestre, que tendería a producir un movimiento acelerado; si éste no tiene lugar es, precisamente, porque existe la fuerza retardatriz que lo anula. De hecho, el movimiento inicial provoca que el líquido tienda indefinidamente, por ley de inercia, a conservar la velocidad inicial.

Al proyectar las fuerzas exteriores sobre el eje  $Ox$  resulta la expresión del equilibrio en la dirección axial, o sea:

$$P \cdot \text{sen } \theta = F; S \cdot l \cdot \gamma \cdot \text{sen } \theta = \tau \cdot c \cdot l$$

$$\text{pero : } \text{sen } \theta = \frac{z_1 - z_2}{l} = I \text{ (pendiente motriz o hidráulica),}$$

$$I = \frac{AH}{l},$$

que representa la pérdida de energía por unidad de longitud, donde  $l$  se ha medido a lo largo del canal (no horizontalmente). Este  $\text{sen } \theta$  se puede reemplazar por la  $\text{tg } \theta$  cuando la inclinación es muy pequeña.

Veamos ahora que la energía en un punto cualquiera  $M$  de la sección transversal  $AA'$ , será (ver Fig. 1.1.):

$$H_z = \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{V^2}{2 \cdot g} = z_A + \frac{V^2}{2 \cdot g} \quad (1)$$

siendo  $V$  la velocidad correspondiente a la altura  $z$  del punto  $M$ .

La potencia de la corriente es la siguiente:

$$N = \gamma \int_Q H_z dQ = \gamma \cdot Q \cdot z_A + \gamma \int_Q \frac{v^2}{2 \cdot g} dQ \quad (2)$$

La carga o energía media de la sección se define por:

$$H = \frac{N}{\gamma \cdot Q}, \text{ pues } : \left[ N = H \cdot Q \cdot \gamma = L \cdot \frac{F}{V} \cdot \frac{V}{T} = F \cdot v \right]$$

$$\text{En efecto } : N = \frac{W}{T} = \frac{F \cdot L}{T} = F \cdot v, \text{ c.s.q.d.}$$

$$\gamma \cdot S \cdot I = \tau \cdot c$$

de donde :

$$\tau = \frac{S}{c} \cdot I \cdot \gamma = R \cdot I \cdot \gamma$$

Como vemos posteriormente, hay que tener en cuenta que:

$$\alpha = \frac{\int_Q v^2 dQ}{Q \cdot v^2}, \text{ y llamaremos } V \text{ a la velocidad media.}$$

y siendo  $\alpha$  el coeficiente de Coriolis, se cumple que:

$$H = Z_A + \alpha \frac{v^2}{2g} \quad (3)$$

$$Q \cdot \alpha \cdot \frac{V^2}{2g} = \int_Q \frac{v^2}{2g} dQ; \quad Q \cdot \alpha \cdot V^2 = \int_Q v^2 dQ; \quad \text{de donde :}$$

$$N = \gamma \left( Q \cdot Z_A + \int_Q \frac{v^2}{2g} dQ \right) = \gamma \left( Z_A + \alpha \cdot \frac{V^2}{2g} \right) \cdot Q; \text{ o sea } :$$

$$\alpha = \frac{\int_Q \frac{v^2}{2g} \cdot dQ}{Q \cdot V^2} = \frac{\int_Q v^2 \cdot dQ}{S \cdot V^3}$$

En efecto, de la expresión (2) se deduce que:

como queríamos demostrar.

La pérdida de energía por unidad de longitud  $I$ , es igual a la pendiente motriz o hidráulica. Esto es:

$$I = \frac{\Delta H}{l} = \text{sen } \theta = \cos \alpha;$$

donde  $I$  se mide a lo largo del canal (no horizontalmente), como ya se ha señalado.

El valor de  $I$  lo podemos también expresar así:

$$I = \frac{d(Z_A + \alpha \cdot V^2 / 2g)}{dl} = \frac{dH}{dl}$$

y como  $V$  es constante en el movimiento uniforme, se tendrá que:

$$I = \frac{dZ_A}{dl} = \text{sen } \theta = \cos \alpha;$$

que, tal como ya se ha indicado, si la inclinación del canal es pequeña, puede considerarse:  $\text{sen } \theta \cong \text{tg } \theta \cong \theta$ , pudiéndose tomar –por pendiente motriz– la misma pendiente del canal.

Si expresamos el valor medio de la tensión de adherencia  $\tau$  en la pared del canal, para flujo turbulento uniforme, resulta:

$$\tau = \lambda \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2}, \text{ siendo } \lambda \text{ el coeficiente de Fanning}$$

luego :

$$\lambda \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2} = R \cdot I \cdot \gamma$$

y despejando la velocidad media, se tiene:

$$V = \sqrt{\frac{C}{\lambda} \cdot \frac{2 \cdot g}{\lambda}} \cdot \sqrt{R \cdot I} \quad (3')$$

que se convierte en la conocida fórmula de Darcy-Weissbach, siendo  $R$  el radio medio hidráulico de la sección normal.

Esta fórmula utilizada para canales, escrita en función del diámetro equivalente  $D = 4R$ , sería:

$$I = \frac{\overline{f}^{4\lambda}}{4 \cdot R} \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} = \frac{\lambda \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot R}$$

siendo  $f$  función de la rugosidad relativa:  $\frac{k}{4 \cdot R}$  y del nº de Reynolds, o sea:

$f = f(\text{Re}, k/4R)$ , sabiendo que se cumple que:

$$\text{Re} = \frac{4 \cdot V \cdot R}{\nu}$$

El inconveniente fundamental de esta fórmula estriba en la falta de datos experimentales para la gran variedad de secciones y de rugosidades existentes en los canales y acequias de riego o de desagüe, lo que nos impide disponer de un elemento similar tan valioso como lo es el ábaco de Moody en el caso de las tuberías circulares a presión. Veremos, no obstante, cómo escrita esta fórmula en función de  $\lambda$  puede aplicarse directamente, sin necesidad de disponer de otros datos empíricos de laboriosa obtención. Ello vendrá facilitado por las tablas que figuran en el anexo nº: 1 que se halla al final del presente libro, así como por los posteriores ajustes estadísticos efectuados por regresión no lineal mínimo-cuadrática simple y múltiple, cuya explicación se halla en este mismo capítulo y que nos permitirán el cálculo directo del caudal y la velocidad del agua circulante por una conducción libre.

## 2.2. DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN $f(V)$

Así pues, la fuerza retardatriz desarrollada por la viscosidad y la adherencia hace deslizar unas capas líquidas sobre otras, con la consiguiente producción de esfuerzos tangenciales y velocidades crecientes de unas capas respecto a otras a medida que se acercan al centro del cauce y próximas a la superficie libre del agua. Por lo tanto, en una sección cualquiera de la masa líquida normal a la dirección del movimiento (ver Fig. 1.3.), las velocidades se distribuyen por capas aproximadamente concéntricas, siendo las contiguas a las paredes y a la solera las de velocidad mínima, lo que resulta acorde con multitud de experiencias realizadas en cauces abiertos.

Véase, al respecto, la mencionada figura, donde se observa la distribución aproximada de las curvas isotacas a las que nos referíamos con anterioridad.

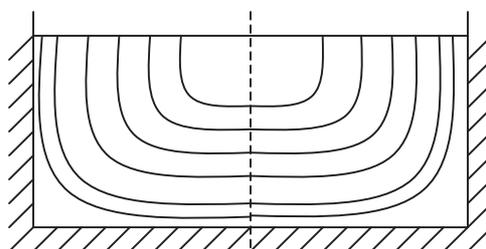


Fig. 1.3. Sección transversal rectangular con isotacas

Se deduce, de todo ello, que la velocidad  $V$  que consideramos será, en realidad, un promedio de velocidades de toda la sección mojada y su valor variará con la fuerza retardatriz. Referiremos esta fuerza a la unidad de superficie de pared del cauce mojada y expresamos su relación con la velocidad media  $V$  por la función real de variable real:  $f(V)$ . Entre dos secciones transversales del canal, separadas por una cierta longitud  $l$ , la superficie de cauce mojada será igual a:  $c \cdot l$ , siendo  $c$  el contorno o perímetro mojado. La fuerza retardatriz total valdrá, pues:  $c \cdot l \cdot f(V)$ , pero, como según lo expuesto anteriormente, esta fuerza debe ser igual a la  $T$ , se tiene:

$T = S \cdot l \cdot I = c \cdot l \cdot f(V)$ , pero como el radio hidráulico.  $R = S/c$ , se cumple la ecuación fundamental:

$$R \cdot I = f(V) \quad (4)$$

Siendo desconocida la función  $f(V)$ , esta última fórmula no nos conduciría a la obtención de ningún resultado práctico. Sin embargo, la relación de dependencia entre las variables  $R$ ,  $I$  y  $V$  se ha determinado, aproximadamente, recurriendo al método empírico, cuyo fundamento es el siguiente: cuando dos cantidades  $x$  e  $y$  se hallan ligadas entre sí por una relación funcional del tipo  $y = f(x)$ , es posible desarrollar en serie la función  $f$  escribiendo, por ejemplo:

$$y = m + n \cdot x + p \cdot x^2 + q \cdot x^3 + r \cdot x^4 + \dots$$

en donde las constantes  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , disminuyen muy rápidamente. Si es posible encontrar  $k$  relaciones existentes entre  $x$  e  $y$ , también podremos establecer  $k$  ecuaciones con  $k$  incógnitas, tomando como tales los  $k$  primeros coeficientes. Resuelto ya este sistema heterogéneo, compatible y determinado (por aplicación de la regla de Cramer, inversión de la matriz de los coeficientes de las incógnitas o por el método de triangularización de Gauss), hallamos la relación (4) con tanta

más aproximación cuanto mayor sea el número de ecuaciones que hayamos planteado. En nuestro caso, haciendo:

$$R \cdot I = m + n \cdot V + p \cdot V^2 + q \cdot V^3 + r \cdot V^4 + \dots$$

se calculan mediante  $k$  experiencias los  $k$  coeficientes buscados y, una vez establecida la fórmula, se comprueba si se continúa verificando al substituir en ella los valores de las variables  $R$ ,  $I$  y  $V$  proporcionados por la realización de nuevas experiencias. Cuando así sucede, la fórmula empírica obtenida es buena; de lo contrario, se aumenta el número  $k$  de términos y de ecuaciones o se elige otro desarrollo en serie, tanteando otra fórmula mediante la cual puedan expresarse, con suficiente aproximación, los resultados experimentales.

Precisamente, siguiendo el procedimiento explicado, basándose en anteriores experiencias de Dubuat y de Chèzy, Prony propuso la formulación empírica de segundo grado:

$$R \cdot I = 0'000044 \cdot V + 0'000309 \cdot V^2$$

Esta expresión polinómica presenta el grave defecto de no tener en cuenta la naturaleza de las paredes de la conducción libre objeto de estudio, que puede presentar una gran variedad, con el inconveniente añadido de ser binomia, por lo que se complica algo el cálculo de sus elementos. Pero, como veremos en el apartado siguiente de nuestro estudio, fue Chèzy quien propuso una fórmula que presenta, respecto a las demás, la ventaja de poder despejar fácilmente cualquiera de las variables que en ella intervienen y de prestarse, con gran sencillez, a la realización de toda clase de cálculos. Dicha fórmula la obtuvo haciendo:  $f(V) = V^2/C^2$ , en donde  $C$  es un coeficiente variable de acuerdo con las características del cauce. Substituyendo, ahora, esta expresión en la (4), se tiene:  $V = C (R \cdot I)^{1/2}$ , tal como podremos comprobar en el epígrafe siguiente.

## 2.3. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE MODELOS

### 2.3.1. Síntesis histórica del concepto de “modelo”

Puesto que buscamos la determinación de la función  $f(V)$  por aplicación de la teoría de la semejanza hidráulica, sería conveniente comenzar nuestra exposición definiendo particularmente el concepto de “modelo hidráulico” y, con mayor generalidad, el propio de “modelo”.

Se habrá notado la aparición, en varias ocasiones y a lo largo del presente libro, de la noción de “modelo” o de “interpretación” de una teoría matemática por medio de otra. No se trata, en absoluto, de una idea reciente o novedosa y, sin duda, puede verse en ella una manifestación permanente del sentimiento profundo de la unidad de las distintas “ciencias matemáticas”. Respecto a ello,

---

decía R. Descartes (1596-1650) que “no por ello dejan de acordarse en tanto que no tienen en cuenta otra cosa que las relaciones o proporciones que se encuentran en dichas ciencias”.

Precisando el “acuerdo” del que hablaba Descartes, parece entreverse, por vez primera, la noción general de isomorfismo (que él llama “ semejanza”) y la posibilidad de “identificar” relaciones u operaciones isomorfas, dando, como ejemplos de ello, el de la adición y el de la multiplicación. No obstante, tan audaces ideas no tuvieron ningún eco entre sus contemporáneos, y habrá que esperar hasta el gran desarrollo del Álgebra de mediados del siglo XIX para vislumbrar siquiera el comienzo de la materialización de los sueños leibnizianos.

Es, precisamente, en este momento histórico, cuando los modelos se multiplican y se acostumbra a pasar de una teoría a otra mediante un simple cambio de lenguaje; el ejemplo más claro de lo que antecede es, seguramente, el de la dualidad en geometría proyectiva, donde la costumbre, muy frecuente en la época, de escribir en columnas contiguas los teoremas “duales”, tuvo mucho que ver con la toma de conciencia de la noción de isomorfía. Por otra parte, mediante el descubrimiento de las coordenadas homogéneas -junto con Feuerbach y Plücker- A. F. Möbius no sólo pudo entender, en términos puramente algebraicos, las nociones fundamentales de puntos impropios y de puntos imaginarios introducidos por Poncelet (1788-1867) y apreciar en todo su valor (junto con Poncelet, Gergonne, Plücker y Chasles) el principio de dualidad, sino que pudo dar un tratamiento completo y moderno del invariante fundamental de la geometría proyectiva: la “razón doble” de cuatro puntos alineados.

El empleo, cada vez más extendido, de la noción de “modelo”, permitiría también al siglo XIX llevar a cabo la unificación de las Matemáticas soñada por los pitagóricos. A principios del siglo, los números enteros y las magnitudes continuadas parecían tan incompatibles entre sí como en la antigüedad; los números reales continuaban estando ligados a la noción de magnitud geométrica (longitud, superficie, volumen), a la que se había recurrido para obtener “modelos” de los números negativos e imaginarios puros y mixtos. Incluso, los números racionales estaban tradicionalmente relacionados con la idea de la división de una magnitud en partes iguales. Sólo quedaban aparte los números enteros, como “productos exclusivos de nuestro espíritu”, tal como decía Gauss en 1832, oponiéndolos a la noción de espacio.

Los primeros esfuerzos para aproximar la Aritmética y el Análisis Matemático se refirieron a los números racionales, positivos y negativos, y fueron debidos a Martín Ohm en 1822, siendo continuados hacia 1860 por varios autores, fundamentalmente Grassmann, Hankel y Weierstrass (en sus cursos no publicados). A este último, parece deberse la idea de obtener un “modelo” de los

números racionales positivos y de los enteros negativos considerando clases de pares de números naturales o enteros positivos. Pero faltaba realizar, sin duda, la tarea más importante: la de obtener un modelo de los números irracionales o inconmensurables dentro de la teoría de los números racionales; hacia el año 1870, la solución de este problema era realmente urgente a la vista de la perentoriedad -surgida después de la aparición de fenómenos “patológicos” en Análisis- de prescindir del uso de cualquier intuición geométrica vaga de “magnitud” para definir el cuerpo o campo de los números reales. Como sabemos, este problema fue resuelto en esta época, y casi simultáneamente, por Cantor, Dedekind, Méray y el propio Weierstrass, siguiendo, por cierto, métodos bastante diferentes.

A partir de este momento, los números enteros pasan a ser el fundamento de todas las matemáticas clásicas. Además, los “modelos” basados en la Aritmética van adquiriendo cada vez más importancia con la extensión del método axiomático y la concepción de los objetos matemáticos como creaciones libres, prodigiosas y admirables del espíritu humano.

### 2.3.2. Definición y clases de modelos

Realizada una pequeña síntesis histórica del problema, veamos que en toda aplicación de la Matemática a los estudios de los fenómenos reales, como los que se producen en la Hidráulica, se presenta un triple proceso, a saber:

- a) Conceptualización.
- b) Razonamiento lógico.
- c) Desconceptualización.

Y debemos advertir, y lo haremos con palabras del profesor Richardson, que: “Matematizar la teoría de un fenómeno no consiste simplemente en introducir ecuaciones y fórmulas en él, sino en moldearlo y fundirlo en un todo coherente, con sus postulados claramente enunciados, sus definiciones establecidas, sin fallos y con sus conclusiones rigurosamente obtenidas”.

De este modo, podríamos definir el “modelo hidráulico” como *una representación objetiva de algún aspecto de un problema hidráulico por medio de una estructura, facilitando el tratamiento teórico y subjetivo, dirigido a resolver algunas cuestiones del problema.*

Por tanto, cuando se van a aplicar las Matemáticas, la Estadística o la Investigación Operativa a una situación real, una labor previa que debe realizar el investigador es la recogida de datos mediante observaciones y medidas, por lo que induce relaciones y, a través de un proceso más o menos complejo de abstracción, construye un modelo o teoría. En esto consiste precisamente la fase de “conceptualización”.

Sobre estos modelos, el investigador trabaja obteniendo teoremas y consecuencias; es la fase conocida como “razonamiento lógico” y puesta en marcha del modelo. Por último, mediante la fase de “desconceptualización”, se interpretan estos resultados y se aplican a la situación real.

De un modo muy general, podemos clasificar los modelos utilizados en tres grandes tipos:

**a) Modelos pictóricos o icónicos:**

Son representaciones de estados, objetos o sucesos. En ellos, se representan las propiedades más interesantes de la situación real por medio de una transformación de escala. Por ejemplo, un plano de una zona regable por gravedad representa la posición relativa de las distintas parcelas a regar y de la red de canales y acequias que las unen. En este último caso, se habrá recalcado la anchura de la conducción libre a una escala gráfica impropia, dotándola, incluso, de un atractivo colorido con la ayuda del diseño asistido por ordenador (CAD).

**b) Modelos analógicos:**

Consisten en hacer una sustitución adecuada de una propiedad de la situación real por otra en el modelo asociado, de acuerdo con ciertas reglas. Por ejemplo, las distintas alturas de una zona regable quedan delimitadas por las curvas de nivel que, como es sabido, constituyen el lugar geométrico de los puntos del terreno que tienen idéntica altitud o cota taquimétrica con respecto al nivel medio del mar o a cualquier plano relativo de comparación. Y sin embargo, es obvio que en la realidad del terreno no aparecen las curvas de nivel surcando fincas y caminos, o serpenteando por las llanuras y los bosques, a la vista arrobada del observador (normalmente, el sufrido agricultor).

**c) Modelos simbólicos:**

Consisten en expresar las magnitudes que intervienen en el problema plantado de un modo abstracto. A este último grupo pertenecen los modelos matemáticos aplicados a la Hidráulica. Generalmente, en su formulación, se siguen las siguientes etapas:

1.<sup>a</sup> Se definen las variables que se consideran como más importantes en la explicación del proceso considerado.

2.<sup>a</sup> Se establecen relaciones analíticas entre estas variables, como consecuencia de relaciones lógicas plausibles entre las mismas.

3.<sup>a</sup> Se estudia la bondad del ajuste del modelo a los datos u observaciones realizados mediante la experimentación.

4.<sup>a</sup> En caso de ser aceptado el modelo, se resuelve.

5.<sup>a</sup> Se interpretan los resultados y se estudia su relación con la realidad.

6.<sup>a</sup> Se hacen previsiones y proyecciones, que constituyen, en definitiva, el objetivo final de la formulación y estudio del modelo.

### 2.3.3. Modelos para el conocimiento científico

Siguiendo a Angel Alcaide, veamos que el método científico se basa muchas veces, en la utilización de *modelos* que, mediante un proceso de abstracción, simplifican la realidad que se quiere estudiar. Cuando en la Geometría elemental se establece el concepto de “línea”, se debe pensar en una figura con una sola dimensión (la longitud), sin que pueda encontrarse en la realidad un línea -por fina que sea- que carezca de anchura e, incluso de altura o “grosor”.

Aunque la creación de los modelos supone, en general, un meritorio trabajo científico, la tarea no se concluye hasta contrastar el modelo con la realidad y ello exige disponer de los datos adecuados. Bross, en su libro sobre *La decisión estadística*, editado por Aguilar en 1958, apunta que el empleo de los modelos presenta las siguientes *ventajas*:

- a) Es el procedimiento seguido en los sistemas de predicción que ha tenido más éxito.
- b) El modelo proporciona una estructura de referencia para la consideración del problema: los “fallos” del modelo señalan a veces una pista sobre las deficiencias de aquél; estos “fracasos” en el modelo del éter hicieron posible el formidable trabajo de Einstein.
- c) El modelo pone de manifiesto el problema de la abstracción, decidiendo su elaborador qué atributos del mundo real tienen que incorporarse al propio modelo.
- d) Al expresar un problema en lenguaje simbólico se tiene la ventaja de la facilidad de manipulación de dicho lenguaje.
- e) Los modelos matemáticos, proporcionan el medio más barato para realizar la predicción.

Pero frente a estas ventajas señala también Bross algunas *desventajas*, a saber:

- A) Un modelo matemáticamente factible puede exigir grandes simplificaciones, lo que puede restarle exactitud.
- B) El lenguaje simbólico está sujeto también a limitaciones.
- C) Un científico hidráulico puede aficionarse tanto a su modelo que, incluso podría llegar a insistir en que dicho modelo es el mundo real, perdiendo, precisamente, la noción de la realidad.

### 2.3.4. Modelos de simulación

Veamos ahora, dado que la hemos mencionado, unas ideas aclaratorias

---

sobre el concepto de SIMULACION.

Por tratarse, precisamente, de la “ciencia de los coeficientes”, la Hidráulica siempre se ha prestado a un desarrollo científico experimental. Con frecuencia se ha dispuesto de los laboratorios de las Escuelas de Ingenieros, Centros de Experimentación Oficiales o de Empresas fabricantes de materiales, donde se pueden hacer repetidas pruebas y comprobar hipótesis científicas (como, por ejemplo, el sometimiento de una conducción libre a diversos estímulos o “inputs” y la posterior observación de sus reacciones).

De forma muy general, entendemos por SIMULACION la creación de un modelo que reproduce fielmente una estructura hidráulica determinada. Una vez construido el Modelo, se pretende medir las magnitudes que nos interesan, sin necesidad de recurrir a experiencias reales, sino basándose en experiencias “simuladas”. Las acciones a los que someteremos nuestro modelo están representadas por los “inputs” de la figura siguiente 1.4., mientras que su respuesta podrá ser evaluada a través de los correspondientes “outputs”.

Fijémonos en que esta forma de proceder ha sido ya utilizada en diversos campos de la ciencia y de la ingeniería. Por ejemplo, la industria aeronáutica, antes de lanzar un nuevo avión al mercado, construye un Modelo o prototipo que se somete en un túnel de viento a distintas condiciones simuladas de presión, turbulencias, temperatura, etc... Lo mismo sucede con la fabricación de microaspersores para riego localizado de alta frecuencia o de tuberías a presión. Observando las reacciones del modelo a estos “inputs” se obtienen conclusiones acerca de su futuro comportamiento en condiciones reales de trabajo (vuelo, irrigación, etc.). De esta forma, se determina si el Modelo es satisfactorio y cuáles son las condiciones que ofrecen mejor rendimiento.

En general, el estudio de nuestro universo o de cualquier fenómeno muy complejo con el relacionado requiere cierta labor de simplificación por parte del investigador, labor consistente en trasladar un fenómeno real a un modelo de estructura más simple, pero que ponga de relieve sus aspectos más importantes. Suponiendo que fuera posible construir un modelo tan complicado como el mismo fenómeno que se pretender analizar, nada se habría adelantado, ya que sería difícil de manipular y comprender como la propia realidad.

La simulación se puede aplicar, en principio, a todo problema relativo a la Hidráulica de las conducciones libres. Ahora bien, para poder simular correctamente el comportamiento de dicho sistema, será necesario:

- a) Precisar unos objetivos que exijan acrecentamiento del conocimiento.
- b) Establecer una maqueta con flujos físicos o informáticos.
- c) Definir las transformaciones de cada bloque o subsistema físico territorial.

d) Disponer de series fiables de valores para actuar como VE (“Variables de entrada”) en el sistema contemplado.

La simulación exige, pues, partir de un pre-modelo con el triple objetivo de:

- 1) Contribuir a la elaboración de un modelo hidráulico completo.
- 2) Validar las hipótesis de trabajo.
- 3) Medir las consecuencias de ciertas acciones correctoras del sistema y buscar -por acrecentamiento del conocimiento- su transformación en modelo.

Para simular el sistema hidráulico es preciso expresar la transformación que se opera en cada uno de sus bloques. Veamos, como características más importantes de este proceso, las siguientes:

a) Se observa cómo la simulación de un gran sistema (por ejemplo, una red extensa de desagües para el avenamiento de una zona marismática) puede apoyarse en *investigaciones de optimización local*, que “ponen en cuestión” las prácticas actuales. La utilidad de la simulación es muy grande, en este caso, puesto que de otra forma resulta imposible prever las consecuencias, sobre el sistema global, de la combinación de un conjunto de acciones modificadora de diversos bloques.

b) Permite una *visión dinámica* de la evolución de un sistema, al reproducir ficticiamente el recorrido de varias trayectorias: en pocos minutos, con ordenadores suficientemente potentes, se pueden simular varios meses o años de funcionamiento de un sistema de riego o saneamiento en condiciones diversas. No hay, por tanto, dificultad alguna en introducir transformaciones aleatorias complejas que, de otro modo, sería prácticamente imposible calcular.

c) Montar una gran simulación resulta caro en estudios, en programación y en duración de paso por ordenador; además, la interpretación de los resultados es delicada. Sin embargo, la simulación es un *instrumento potente y útil*, que permite “empujar” la modelización los más lejos posible hasta la consecución de condiciones simples, sintéticas y generales, pudiéndose llegar al establecimiento de un bloque único, el MODELO, que recubre al sistema global cuya maqueta se ha expuesto, expresando las relaciones existentes entre las VE (variables de entrada), VS (variables de salida), VA (variables de acción) y VES (variables esenciales), siguiendo el esquema clásico, en la Teoría de Sistemas, de J. Melèse.

d) Veamos, en fin, que la simulación constituye una *técnica didáctica* excelente, que permite visualizar el comportamiento de un sistema hidráulico y controlar hipótesis sobre datos ya conocidos. Con ello, se facilita grandemente la comunicación entre los “especialistas” y los “prácticos”

INPUT

*Modelo del sistema  
hidráulico que se*

OUTPUT



Fig. 1.4. Entradas y salidas de un sistema hidráulico

### 2.3.5. Los modelos y la teoría de sistemas

El profesor Dr. Lorenzo Ferrer Figueras, catedrático de Matemáticas de la Universidad de Valencia, desarrolla una interesante teoría acerca de las posibilidades del conocimiento y de la acción, donde se pone de manifiesto la importancia de la modelización y de la posterior experimentación sobre la realidad o sobre el propio modelo (simulación).

Una maqueta es una representación estática de un fenómeno hidráulico observado, que no explica como éste funciona o evoluciona. Sin embargo, la modelización es una representación dinámica, en cuanto explica cómo funciona y/o evoluciona dicho sistema hidráulico. Por ello, la explicación puede tener diversos niveles, de los que consideramos los tres siguientes:

1. Análisis de los factores del Sistema.
2. Conocimiento del funcionamiento de un bloque o subsistema.
3. Estudio del comportamiento dinámico de un gran sistema.

El modelo, entendido como una estructura explicativa de un fenómeno, tiene las siguientes características: A) Constituye una representación simplificada de la realidad. B) Es prospectivo, en tanto que explica el comportamiento futuro del Sistema.

Según Minsky, “para un operador O, un objeto M es un modelo de un objeto A, en la medida en que O puede utilizar a M para responder a las cuestiones que le interesen respecto a A”. De acuerdo con esta definición, cualquier razonamiento o decisión están basados en modelos; a veces explícitos y, otras veces, implícitos.

El modelo es un sistema homomorfo del sistema que representa; se trata, en términos matemáticos, de un homomorfismo, aplicación o transformación lineal entre dos espacios vectoriales de las mismas o diferentes dimensiones. Por tanto, modelo y sistema tienen el mismo comportamiento. El modelo hidráulico en fin, será útil y eficaz en la medida que sea:

- simple y elegante (facilita la comprensión).

- general (suscitará asociaciones, analogías).
- formalizado (facilita la simplicidad y posibilita la aplicación de técnicas de resolución).

## **2.3.6. Los modelos matemático-hidráulicos**

### *2.3.6.1. Variables exógenas y endógenas*

En los análisis hidráulicos para la elaboración de teorías hidráulicas, muchos casos pueden ser cuantificados y expresados en el lenguaje formalizado de las matemáticas. La razón de ello es doble: de un lado, se debe al hecho de que gran parte de las magnitudes hidráulicas (volumen, caudal, presión, longitud,...) son susceptibles de cuantificación, pudiendo ser expresadas como variables que toman valores dentro del conjunto (cuerpo o campo) de los números reales. De otro lado, las variables hidráulicas están interrelacionadas, pudiendo ser expresadas estas relaciones mediante funciones matemáticas adecuadas. Pues bien, las teorías hidráulicas, expresadas en lenguaje matemático, reciben la denominación de “modelos matemático-hidráulicos”.

Para poder profundizar más en la idea de “modelo matemático-hidráulico” es necesario no perder de vista que al ser el modelo la expresión formal de un análisis hidráulico (o bien de una teoría hidráulica) de carácter deductivista y que en dicho análisis se cumplen unos supuestos de partida, el modelo matemático-hidráulico consiste en la expresión de tales supuestos en lenguaje matemático a través de un conjunto de ecuaciones (a veces también de inecuaciones).

El conjunto de estas ecuaciones constituyen la “formulación” del modelo. Estas ecuaciones son las relaciones que, según los supuestos de partida, se dan entre las variables hidráulicas. De estas variables, unas se suponen conocidas (variables exógenas o datos), y las demás son las incógnitas (variables endógenas) cuyos valores han de ser calculados en función de las exógenas.

Dicho lo anterior, veamos qué problemas se nos plantean al utilizar el modelo matemático-hidráulico y qué recursos matemáticos serán necesarios.

### *2.3.6.2. Problemas que se plantean*

#### A) Primer problema

El primer problema con que nos enfrentamos es el de expresar los conceptos hidráulicos, y los supuestos de la respectiva teoría, en lenguaje

matemático. En las teorías hidráulicas de enfoque marginalista, la resolución de un problema viene facilitada porque en dicho enfoque se admiten los siguientes extremos:

- a) Que las variables hidráulicas son susceptibles de ser expresadas por números reales y que admiten variaciones infinitamente pequeñas. Es decir, son variables reales continuas.
- b) Que las relaciones existentes entre las variables hidráulicas pueden ser expresadas por funciones reales de diversos tipos, que suelen ser continuas y derivables repetidamente.

De hecho, la expresión de los conceptos hidráulicos en forma matemática está posibilitada por las dos características anteriores. Pero las dos características que admite el enfoque marginalista no solamente posibilitan la expresión de los conceptos hidráulicos en términos matemáticos sino que, además, permiten expresar los supuestos de la teoría en forma de ecuaciones (o inecuaciones) que forman el modelo matemático-hidráulico. Los supuestos de la teoría especifican cuáles son las relaciones que existen entre las variables hidráulicas, y al ser estas relaciones expresables por medio de funciones reales, basta con utilizar el gran arsenal de funciones reales de que dispone la Matemática para poder expresar los supuestos de la teoría en forma de ecuaciones o inecuaciones. De este modo, queda la teoría expresada como un sistema de ecuaciones que constituyen la formulación del modelo matemático-hidráulico de la teoría en cuestión. Además, en muchos casos puede hacerse una representación gráfica del modelo, lo que le hace mucho más intuitivo.

## B) Segundo problema

El segundo problema que se nos plantea, una vez ya formulado el modelo, es el de deducir las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros que pueden figurar en las relaciones que forman el modelo.

Si se tiene en cuenta que un modelo matemático-hidráulico no es otra cosa que un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son las variables endógenas, se comprende fácilmente que el problema de deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros, requiere la utilización de “técnicas matemáticas” de resolver sistemas de ecuaciones. Estas técnicas son muy variables dependiendo de la naturaleza de las ecuaciones que forman el modelo.

Las más usuales son las siguientes:

- Cuando el modelo consiste en un sistema de ecuaciones lineales, ha de recurrirse a las “técnicas de resolución de sistemas lineales”. Si el número de ecuaciones es elevado, resulta preciso recurrir a los

Métodos Matriciales, que presentan la gran ventaja de ser resueltos con el auxilio del ordenador.

- Cuando el modelo consista en optimizar (maximizar o minimizar) una función cuyas variables estén sometidas a restricciones dadas por igualdades, la resolución del modelo requiere el empleo de las técnicas matemáticas del “Cálculo de Extremos Relativos” (máximos y mínimos locales) propias del Cálculo Infinitesimal clásico, como el método de los multiplicadores u operadores de Lagrange.
- Cuando el modelo consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal cuyas variables estén sometidas a restricciones dadas por desigualdades lineales, ha de recurrirse a las técnicas de la “Programación lineal”, que es una parte de la Investigación Operativa.
- Cuando el modelo consiste en optimizar una función no lineal cuyas variables están sometidas a restricciones dadas por desigualdades lineales o no lineales, la resolución del modelo ha de hacerse a través de las técnicas matemáticas de “Programación no lineal”, también propias de la Investigación de Operaciones..

Mediante el empleo de las técnicas anteriores, o de otras varias no mencionadas, se resuelve el problema de deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros. Es precisamente en esta fase deductiva donde las Matemáticas colaboran en forma esencial con el análisis hidráulico. La deducción matemática presenta la ventaja de su rapidez y de llegar allí donde la deducción verbal le es a veces imposible, como ya hemos señalado en el mismo Prólogo del libro. El dominio de las mencionadas técnicas matemáticas resulta de vital importancia si se quiere llegar a emplear el lenguaje matemático en los análisis hidráulicos. Dicho dominio exige que, previamente, se conozcan las propiedades esenciales de las funciones reales, tanto de una variable como de varias.

### C) Tercer problema

El tercer y último de los problemas que presenta un modelo matemático-hidráulico es el de deducir las conclusiones del modelo. Estas conclusiones suelen expresarse analizando cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas, antes calculados, al producirse una alteración en una de las variables exógenas o en uno de los parámetros. Las variaciones que experimentan las variables endógenas (por ejemplo el caudal del río Ebro en su tramo final) ante una alteración en una de las variables exógenas (por ejemplo el tiempo) o parámetros constituyen las “Predicciones del Modelo”. Estas predicciones son las que deben servir de base a la hora de tomar decisiones, o bien a la hora de aconsejar al poder público sobre la instrumentación de las medidas de política hidráulica que deben seguirse. **Y así, en este caso, vemos cómo la prospectiva de la evolución de los caudales del río Ebro a su paso por la estación**

**foronómica nº: 27 de Tortosa, realizada en el Capítulo V de esta misma obra, desaconseja rotundamente cualquier trasvase de aguas desde el tramo inferior de dicho río a cualquier otra cuenca hidrográfica española, pese a estar así previsto en el vigente Plan Hidrológico Nacional (Ley 10/2001, de 5 de julio).**

La deducción de las conclusiones del modelo suele requerir el uso de las derivadas parciales. Para analizar como se ve afectado el valor de una de las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas, basta con calcular la derivada parcial de la variable endógena respecto a la exógena.

La exposición efectuada hasta aquí ha pretendido resaltar dos cuestiones, sin ánimo de dejarlas resueltas:

- La primera de ellas es un intento de clarificar de qué manera las Matemáticas van a servir a las teorías hidráulicas.
- La segunda de las cuestiones es la de anticipar cuáles van a ser las necesidades matemáticas, o parte de dichas necesidades, que demandan los análisis hidráulicos de enfoque marginalista.

Resumiendo todo lo expuesto, cabe destacar lo siguiente:

- Que muchas de las teorías hidráulicas, de carácter deductivista, pueden ser expuestas en forma matemática a través de los modelos matemático-hidráulicos.
- Que el manejo de un modelo matemático-hidráulico presenta tres problemáticas diferenciadas temporalmente:
  1. Formulación del modelo.
  2. Deducción de los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros.
  3. Deducción de las conclusiones del modelo, analizando cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas o parámetros.
- Que la resolución de las anteriores disyuntivas requiere, desde el lado matemático, conocer las siguientes cuestiones:
  - a) Las propiedades generales de las funciones reales, tanto de una como de varias variables reales, así como los conceptos matemáticos de las mismas, orientado este estudio a exponer los conceptos hidráulicos en forma matemática y a expresar los supuestos de la teoría en la forma de un sistema de ecuaciones o inecuaciones que constituyen la formulación del modelo.

- b) El desarrollo de técnicas matemáticas diversas (resolución de sistemas lineales, cálculo de extremos relativos, programación lineal, programación no lineal, cuadrática, hiperbólica, etc.) con las que se haga posible deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros.
- c) El cálculo de derivadas parciales, tanto de funciones simples o explícitas como de funciones compuestas o implícitas, con las que se haga posible la deducción de las conclusiones del modelo cuando se analicen cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas ante una alteración de una de las variables exógenas o parámetros.

### 2.3.6.3. *Formulación de los modelos matemático-hidráulicos*

Una vez resuelto el problema de saber expresar matemáticamente las relaciones de los modelos especificados en la teoría, estamos en condiciones de abordar la “formulación de los modelos”. No obstante creemos necesario hacer antes algunas puntualizaciones en forma de preguntas, a saber:

*a) ¿Cuáles son las variaciones endógenas y exógenas?*

En primer lugar, para formular el modelo matemático-hidráulico de una cierta teoría, es necesario conocer qué es lo que trata de determinar dicha teoría. O dicho en otros términos: conocer cuáles son las variables endógenas y cuáles las exógenas. Las primeras son las que la teoría trata de determinar en términos de las exógenas.

*b) ¿Aparecen explicitadas todas las relaciones?*

Una vez aclarado este punto, es necesario fijarse en las especificaciones contenidas en los supuestos de la teoría e ir expresándolas en términos matemáticos. Ahora bien, ocurre que las Relaciones de Definición y de Condición no suelen venir explicitadas, y sin embargo han de aparecer en la formulación del modelo. Por ello, al formular un modelo debe tenerse sumo cuidado con las Relaciones de Definición y de Condición. Las Relaciones de Comportamiento siempre vienen especificadas en los supuestos de la teoría.

*c) ¿Es el modelo completo?*

Después de haber expresado en forma matemática las Relaciones que forman el modelo, debe procederse, a modo de comprobación, a observar si el modelo es completo. Para ello, ha de suceder que el número de ecuaciones sea igual al número de variables endógenas (incógnitas). De lo contrario, lo más probable es que falten ecuaciones (tal vez alguna de las Relaciones de Definición o de Condición no explicitadas) aunque también puede ser que se trate de un

sistema compatible indeterminado en los términos definidos por el teorema de Rouché-Frobenius-Kronecker, es decir un modelo en el que haya más variables endógenas que ecuaciones y por tanto con infinitas soluciones para las variables endógenas. También podríamos encontrarnos con sistemas incompatibles (sin solución).

Veamos, en fin, que una de las características fundamentales de los modelos de análisis de redes hidráulicas a presión es la aparición de la variable temporal que, según su presencia o no, se clasifican en *dinámicos* (no inerciales o inerciales) y *estáticos*. No nos extenderemos más en este tipo de modelos, cuyo estudio sería más propio de otros capítulos de nuestro libro.

### 2.3.7. La función $f(V)$ y el coeficiente de Fanning

Siguiendo al profesor Torres Sotelo (obra citada en la bibliografía), veamos que “el estudio del movimiento de los líquidos resulta un problema más difícil y complicado que el estudio del movimiento de los sólidos, puesto que en la mecánica de los cuerpos sólidos tenemos un sistema de partículas rígidamente entrelazadas, mientras que en la de los líquidos se examina un medio compuesto por una gran cantidad de partículas en movimiento”.

“Partiendo de los principios de la Mecánica Racional y auxiliada por la experimentación, la Hidráulica llega al establecimiento de fórmulas prácticas que permiten resolver los problemas que más comúnmente pueden presentársele al Ingeniero proyectista (riegos, abastecimientos de poblaciones, saneamientos agrícolas, depósitos y embalses, etc.)”.

“El método que emplea la Hidráulica actualmente en la investigación del movimiento de los líquidos, consiste en suponer que se actúa sobre un *líquido perfecto* (con incompresibilidad y fluidez perfectas). De este modo, los fenómenos examinados primeramente se simplifican, se idealizan y se les aplican las leyes de la Mecánica Racional. Posteriormente, los resultados obtenidos se comparan con los datos experimentales deducidos con *líquidos naturales* en los que es preciso tener en consideración la viscosidad (rozamientos) y una cierta compresibilidad. Finalmente, se corrigen los cálculos y las fórmulas teóricas mediante los oportunos coeficientes (factores experimentales) al objeto de adaptarlas a la aplicación práctica”.

La Hidráulica es pues una ciencia semiempírica que se ha venido en llamar la “ciencia de los coeficientes”, habida cuenta de su carácter esencialmente empírico. En algunos fenómenos hidráulicos, y cumpliéndose ciertas hipótesis, la teoría ha logrado alcanzar una solución que, al cabo de

muchos ensayos, determina la experiencia si ha lugar a afectar a la solución teórica obtenida de algún coeficiente de corrección que puede variar en función de algunos parámetros. En muchos problemas hidráulicos no puede llegarse teóricamente a fórmulas ciertas al desconocerse, por ejemplo, el carácter del movimiento líquido, y la única fuente de investigación resulta ser la experimentación. El coste del proceso y, en algunos casos, la misma naturaleza del fenómeno hidráulico, ha hecho pensar en el estudio de observaciones realizadas con modelos de reducidas dimensiones a los que se aplican las leyes de la hidrodinámica y con los que se llega al conocimiento del fenómeno hidráulico real, disponiendo de un margen de seguridad o error suficiente en las magnitudes que en aquél intervienen.

Pues bien, para deducir las características del expresado fenómeno real en función de las obtenidas mediante la simulación expresada, se recurre a la noción de *semejanza hidrodinámica*, que define movimientos hidráulicamente semejantes y el empleo de coeficientes sin dimensión para expresar las leyes del movimiento, apareciendo dimensiones muy diversas, como longitudes, fuerzas, tiempos, viscosidades, etc., condicionando la semejanza a la verificación de la existencia de ciertas relaciones entre las variables independientes o explicativas del modelo. Recordemos, en este punto, la semejanza geométrica para pasar a la mecánica, de la cual es un caso particular la hidrodinámica. Y así, dos sistemas  $S_1$  y  $S_m$  son geoméricamente semejantes cuando entre sus puntos existe una correspondencia biyectiva o biunívoca (o sea, una aplicación inyectiva y exhaustiva al mismo tiempo, en los términos del álgebra lineal o de la Teoría de Conjuntos), de tal modo que si la distancia entre dos cualesquiera de ellos  $M$  y  $M'$  del sistema  $S$  es  $l$  y  $l_m$  la de los puntos homólogos  $M_m$  y  $M'_m$ , existirá siempre entre  $l$  y  $l_m$  una relación constante llamada  $\epsilon$  que es una razón de semejanza de longitudes, tomada como fundamental; para superficies y volúmenes, la escala correspondiente sería  $\epsilon^2$  y  $\epsilon^3$ , respectivamente.

Dos movimientos son mecánicamente semejantes cuando siéndolo sus trayectorias, para un punto cualquiera y su homólogo existe una relación constante entre las magnitudes características de la misma naturaleza que intervienen en el fenómeno, y así existirá una relación constante entre las velocidades de dichos puntos, otra constante entre las aceleraciones de dichos puntos homólogos, otra constante entre las fuerzas que actúan en ellos y lo mismo para todas las magnitudes mecánicas que figuren en el movimiento, relaciones o escalas que, en general, difieren con la característica, pero que para una característica determinada subsiste la expresada constancia. Precisamente, en esta semejanza encajan los movimientos hidráulicos en las conducciones libres. Existe, por tanto, una escala de longitudes, una de velocidades, otra de tiempos, etc., estando ligadas entre sí por un cierto número de condiciones o restricciones

del modelo llamadas de  *semejanza*. Ahora bien, como todas las unidades dependen de las tres fundamentales: longitud, masa y tiempo (L.M.T.), las condiciones de semejanza se deducen únicamente de consideraciones dimensionales mediante la igualación de las relaciones de semejanza de magnitudes homólogas diversas que posean una misma ecuación dimensional.

Pues bien, en el caso de las conducciones libres, se pueden aplicar los conceptos expuestos de  *semejanza hidrodinámica* para la determinación teórica de la función  $f(V)$ , teniendo en cuenta que el coeficiente  $C$  de Chèzy, anteriormente definido, puede expresarse del siguiente modo:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}}; \frac{1}{\alpha} = \frac{2g}{\lambda}; \text{ de dónde } : \alpha = \frac{\lambda}{2g}; \text{ siendo } \lambda \text{ el coeficiente de}$$

Fanning, obteniéndose para la pérdida de carga el valor:

$$I = \frac{1}{g} f(\text{Re}) \frac{V^2}{R} = \alpha \frac{V^2}{R} = \frac{\lambda \cdot V^2}{2gR}$$

, siendo  $\alpha$  el coeficiente de resistencia sin dimensión, que es función de un coeficiente de  $\text{Re}$ , de una rugosidad proporcional y de las dimensiones de la sección mojada  $S$ .

### 3. FÓRMULAS CLÁSICAS PARA LA DETERMINACIÓN DE LA PÉRDIDA DE CARGA

#### 3.1. FÓRMULA DE CHÈZY

##### 3.1.1. Descripción general

Mientras que en los tubos a presión la pérdida de carga que figura como factor esencial en las ecuaciones del movimiento, y definida como la relación de la diferencia de niveles piezométricos a la longitud del tubo, es, en general, distinta de la pendiente geométrica del mismo, en los cauces abiertos<sup>1</sup>, pudiendo considerarse la superficie libre como nivel piezométrico del líquido en circulación, **ambas magnitudes, pérdida de carga y pendiente, coinciden**. Así, pues, en las expresiones relativas al movimiento del agua en estos cauces aparece solamente el seno del ángulo de inclinación de la superficie libre respecto de la horizontal, función trigonométrica o circular directa que cuando los ángulos son muy pequeños, como es el caso general, puede, sin inconveniente, sustituirse por

<sup>1</sup> Véase sobre este asunto: *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*, 3ª parte, tomo I, "Gewässerkunde", por P. GERHARDT, R. JASMUND, H. ENGELS, 5ª ed. Leipzig, 1923.

la tangente, o sea por la pendiente de aquella superficie. A. Brahm<sup>2</sup> fue el primero en hacer notar que la pendiente viene determinada por la condición de que la resistencia que al movimiento opone el cauce sea igual a la componente de la gravedad en la dirección del mismo.

Como es bien sabido, en el cálculo de tuberías la fórmula propuesta por el barón de Chèzy en el año 1775, constituye la base fundamental de la mayoría de las fórmulas empíricas deducidas posteriormente.

En la ecuación (3') del apartado anterior, sustituyendo el valor:  $\sqrt{\frac{2g}{\lambda}}$  por el coeficiente **C** de Chèzy, resulta:

$$V = C\sqrt{R \cdot I} \quad , \text{ o bien: } \boxed{I = \frac{V^2}{R \cdot C^2}} \quad (\text{nos da la pendiente motriz})$$

que es la fórmula de Chèzy, cuyo coeficiente **C**, se supuso originariamente constante para cualquier tamaño del conducto y de la rugosidad de sus paredes.

Posteriormente, L. G. Dubuat<sup>3</sup>, fundándose en experiencias propias de gran precisión, propuso sustituir la expresión de Chèzy por la siguiente:

$$V = \frac{48'85\sqrt{R} - 0'80}{\sqrt{1:I - \ln\sqrt{(1:I) + 1'6}}} - 0'05\sqrt{R},$$

cuya aplicación resulta difícil por su complicada estructura, mientras que J. A. Eytelwein<sup>4</sup> volvió a la sencilla forma de la expresión de Chèzy, y a base de 36 ensayos de Dubuat, propuso la configuración clásica:

$$V = 50'9 \sqrt{R \cdot I}$$

Posteriormente **Tadini**, prescindiendo asimismo de la naturaleza de las paredes del canal, propuso la fórmula sencilla, esencialmente coincidente con la expresión de Eytelwein y de Courtais:

$$R \cdot I = 0'0004 \cdot V^2, \text{ o bien:}$$

$$\boxed{V = 50\sqrt{R \cdot I}} \quad , \text{ que ofrece un } \lambda = 0'0078,$$

o bien la propia de Eytelwein ya mencionada:

$$\boxed{V = 50'9\sqrt{R \cdot I}} \quad , \text{ que ofrece un } \lambda = 0'0075,$$

<sup>2</sup> A. BRAHMS, *Anfangsgründe der Deich- u. Wasserbaukunst*, 2 partes, Aurich, 1754 y 1757, 1ª parte, pág. 105.

<sup>3</sup> L. G. DUBUAT, *Principes d'hydraulique*, 1, n. éd. París, 1816. págs. 56, 60.

<sup>4</sup> J. A. EYTELWEIN, *Handbuch der Mechanik fester Körper*. Berlín, 1801. pág. 181.

que pueden ser útiles ambas, por su simplicidad, para el logro de una primera aproximación, particularmente con pequeñas pendientes, grandes secciones y profundidad y caudales circulantes de aguas tranquilas. Ambas fórmulas sirven para la realización de un primer tanteo a nivel de anteproyecto. Una vez dibujada o conocida la sección de lleno de un canal  $S$  y su perímetro mojado  $c$ , calcularemos el radio hidráulico medio  $R$ . Si, además, se nos da la pendiente hidráulica  $I$  podremos despejar  $V$  de cualquiera de ellas y calcular subsiguientemente el caudal  $Q$ .

Según Weissbach, debe tomarse para ríos y canales con lecho rugoso (para unas categorías de rugosidad:  $K = 10$  ó  $11$ , como veremos posteriormente) un valor:

$$\lambda = 0'0074 + 0'000433/V$$

### 3.1.2. Una aplicación del concepto de elasticidad funcional

Se trata, ahora, de representar la función:

$$C = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\lambda}};$$

que es una transformación doblemente logarítmica o bien una función logarítmica doble. También puede expresarse así:

$$C^2 = 2 \cdot g / \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot g}{C^2} = f(C)$$

$\lambda = 2 \cdot g \cdot C^{-2}$ ; que, de hecho, es una función potencial. Tomando logaritmos naturales (neperianos) o decimales (vulgares o de Briggs), ofrece:

$\log \lambda = \log 2 + \log g - 2 \cdot \log C$ ; y derivando la expresión inicial, obtendremos:

$$\frac{d\lambda}{dC} = 2 \cdot g \cdot (-2) \cdot C^{-3} = -4 \cdot g \cdot C^{-3} = \frac{-39'22}{C^3}$$

Una modalidad o extensión del concepto de función derivada, tal y como se estudia en el cálculo infinitesimal clásico, de gran aplicación en el conjunto de la ciencia, es el de *elasticidad de una función*. En este caso, en vez de utilizar un cociente incremental de las variaciones absolutas de la función y de la variable independiente o explicativa, se considera un cociente incremental de variaciones relativas o unitarias, de forma que la elasticidad de  $f(C)$  respecto de  $C$  venga dada por la expresión:

$$\frac{E_f(C)}{E(C)} = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \frac{[f(C) + \Delta C] - f(C)}{f(C)} \div \frac{\Delta C}{C} = f'(C) \frac{C}{f(C)}$$

Pero esta expresión corresponde, de hecho, al cociente de la diferencial del logaritmo neperiano o natural de  $f(C)$  por la diferencial del logaritmo de  $C$ , a saber:

$$\frac{d \ln f(C)}{d \ln(C)} = \frac{f'(C)}{f(C)} \div \frac{1}{C} = f'(C) \frac{C}{f(C)}$$

**Una interpretación práctica del concepto de elasticidad**, de tal suerte definido, puede conseguirse mediante la primera expresión, escrita en la forma:

$$\frac{\Delta f(C)}{f(C)} \div \frac{\Delta C}{C} \equiv \frac{E f(C)}{E(C)} = \mu$$

Si la variable independiente  $C$  varía, v. gr, en un 1 por 100, esto es:

$$\frac{\Delta C}{C} 100 = 1; \frac{\Delta f(C)}{f(C)} 100 = \mu ;$$

entonces, la elasticidad  $\mu$  representa, aproximadamente, la variación porcentual de la función  $f(C)$  cuando la variable independiente experimenta un cambio del 1 por 100.

En algunos tratados de Cálculo Infinitesimal se recogen propiedades y reglas para la determinación de las elasticidades de diversas funciones matemáticas de utilidad en la Hidráulica.

En nuestro caso, la elasticidad de  $\lambda$  (coeficiente de Fanning) con respecto a  $C$  (coeficiente de Chèzy) vendrá dada, según ya sabemos, por:

$$\frac{E \lambda}{E C} = \frac{C}{\lambda} \cdot \frac{d \lambda}{d C} = \frac{-C}{2 \cdot g \cdot C^{-2}} \cdot 4 g \cdot C^{-3} = -2$$

Veamos la correspondiente representación gráfica de la función  $\lambda = f(C)$  en la página siguiente:

<b>C</b>	<b><math>\lambda</math></b>	<b>C</b>	<b><math>\lambda</math></b>
10	0'1961	80	0'0030
20	0'0490	90	0'0024
30	0'0218	100	0'0019
40	0'0122	110	0'0016
50	0'0078	120	0'0014
60	0'0054	130	0'0012

70 0'0040

140 0'0010

Como puede observarse, al crecer el valor de  $C$  disminuye el valor de  $\lambda$ , y recíprocamente, con lo que los incrementos  $\Delta C$  y  $\Delta \lambda$  son de signo contrario, por lo que si se desea que la elasticidad resulte positiva debe definirse la expresión anterior afectada de un signo negativo.

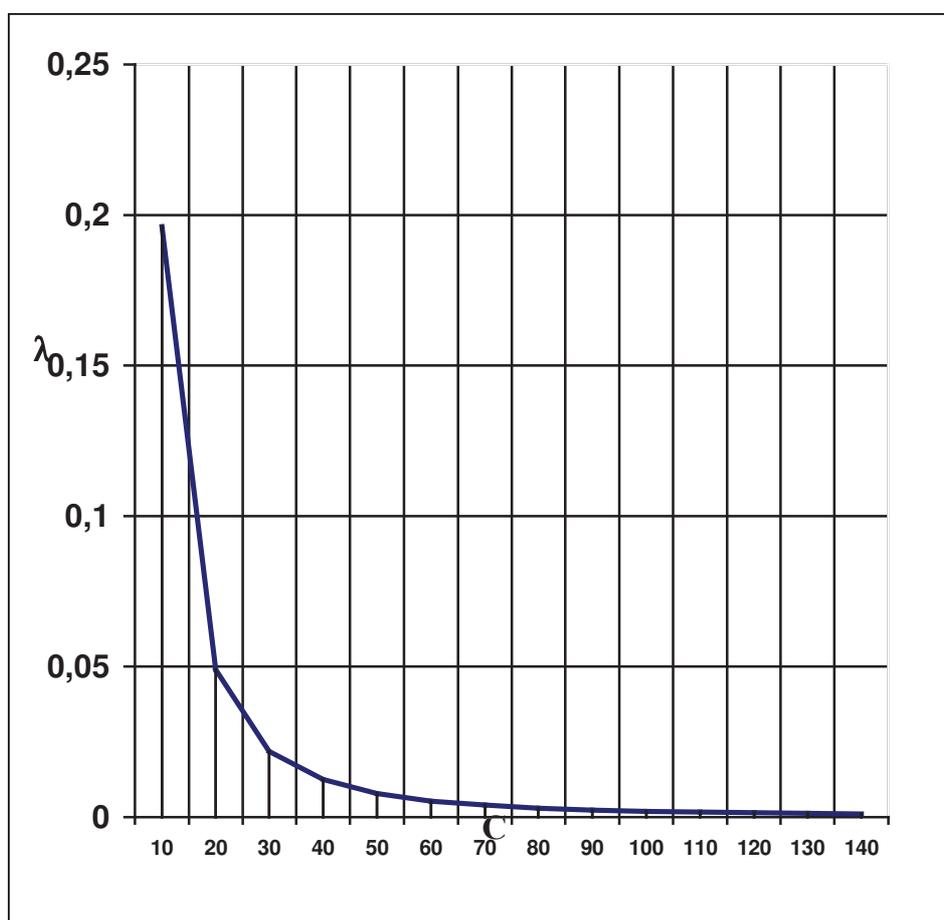


Fig. 1.5. Representación gráfica de la función:  $\lambda=f(C)$

NOTA: Las ramas hiperbólicas de la función de la representación anterior, son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \rightarrow 0 \implies \lambda \rightarrow \infty, \text{ con lo que el eje } 0\lambda \text{ de ordenadas constituye} \\ \text{una asíntota vertical,} \\ C \rightarrow \infty \implies \lambda \rightarrow 0, \text{ con lo que el eje } 0C \text{ de abscisas constituye} \\ \text{una asíntota horizontal.} \end{array} \right.$$

### 3.1.3. Restantes consideraciones de interés

En las tentativas efectuadas para llegar a una fórmula general aplicable a todos los tipos de canales, análogamente a lo que pretendió Darcy en 1857 para los tubos, se llegó a reconocer la importancia esencial de la naturaleza de las paredes. Fue el mismo Darcy quien, en unión de H. Bazin, llevó a cabo las experiencias fundamentales<sup>5</sup>. Para ellas se sirvieron de un cauce de 596'5 m. de largo, 2 m. de ancho y 1 m. de profundidad, alimentado por el canal de Borgoña, y de tal modo dispuesto que, mediante forros adecuados, pudiera variarse la forma de la sección y la naturaleza de las paredes. Se comprobó así<sup>6</sup> que, a igualdad de radio medio hidráulico **R** y pendiente motriz **I**, la velocidad en perfil triangular, rectangular o trapezoidal era idéntica, mientras que para perfiles semicirculares la velocidad era 1/10 mayor que para un perfil rectangular de igual **R**. Esta observación, sobre la que más adelante hemos de volver, ha sido muy poco tomada en consideración, en parte debido a que las secciones semicirculares no se presentan nunca en los cursos de agua naturales y, aún en los artificiales, muy raras veces se emplean (es más normal su uso en acequias prefabricadas de hormigón armado o en tuberías semillenas, aunque también se construyen, con encofrados especiales deslizantes, ciertos canales con esta sección transversal). Darcy murió antes de que se diese a la publicidad sus observaciones, lo cual hizo Bazin solo, obteniendo para el coeficiente **C** de la fórmula de Chèzy<sup>7</sup>:  $V = C\sqrt{R \cdot I}$ , en los diversos materiales empleados en los ensayos referidos, las siguientes expresiones:

I. Enlucidos lisos, tablas cepilladas..... $1:C^2 = 0'00015 \left(1 + \frac{0'03}{R}\right)$

II. Tablas sin cepillar, enlucido basto,  
mampostería, ladrillo rejuntado..... $1:C^2 = 0'00019 \left(1 + \frac{0'07}{R}\right)$

III. Paredes rugosas, mampostería basta..... $1:C^2 = 0'00024 \left(1 + \frac{0'25}{R}\right)$

IV. Tierra..... $1:C^2 = 0'00028 \left(1 + \frac{1'25}{R}\right)$

a cuyos valores, Ganguillet y Kütter<sup>8</sup> agregaron

aún, para la gravilla..... $1:C^2 = 0'00040 \left(1 + \frac{1'75}{R}\right)$

<sup>5</sup> París, Mém. prés. par div. sav. 19 (1865), pág. 162 y ss. DARCY y H. BAZIN, *Recherches hydrauliques I*. París, 1865. Citado en P. FORCHHEIMER, *Tratado de hidráulica*. Ed: Labor, S. A. Barcelona, 1950.

<sup>6</sup> *Recherches...*, pág. 17.

<sup>7</sup> *Recherches...*, págs. 130, 134, 135 y 142.

<sup>8</sup> Z. d. öst. I. y. A. -V. 21 (1869), pág.11. Citado en P. FORCHHEIMER, *Tratado de hidráulica*. Ed: Labor, S. A. Barcelona, 1950.

Como puede observarse, se ha expresado el coeficiente:

$$\alpha = 1/C^2 = \alpha' (1 + \beta/R) \text{ en forma binomia.}$$

Casi en la misma época que el trabajo de Bazin, apareció la Memoria sobre las medidas en gran escala que A. A. Humphreys y L. H. Abbot<sup>9</sup> emprendieron en el río Mississipí, y de las que dedujeron la compleja expresión:

$$V = \left\{ \sqrt{\frac{0'002333}{\sqrt{R + 0'457}} + \sqrt{68'72 R_1 \sqrt{I}}} - \sqrt{\frac{0'002333}{\sqrt{R + 0'457}}} \right\}^2$$

en la que  $R_1$  representa la fracción: Área de la sección dividida entre la suma del perímetro mojado más la anchura de la superficie libre, y que, por su propia definición, para cauces suficientemente anchos, vale aproximadamente 0'5 R. Como el segundo miembro es muy pequeño, la fórmula anterior se puede simplificar bajo la forma:

$$V = 5'0 \text{ a } 5'7 \sqrt{R} \sqrt[4]{I}$$

adoptando el coeficiente 5'0 para los pequeños valores de R y el 5'7 para los grandes. Las medidas, que se hicieron con dobles flotadores, y, por tanto, afectadas de un error sistemático, fueron, no obstante, consideradas como muy exactas en su día, y, a partir de ellas, se trató de llegar a una expresión aplicable lo mismo a pequeños que a grandes cauces. En esta idea, y sin tener en cuenta que, precisamente en el río Mississipí, C varía en sentido contrario de I, Ph. Gauckler<sup>10</sup>, propuso las fórmulas:

$$\left. \begin{array}{l} I > 0'0007, \quad V = \lambda_1 \cdot R^{\frac{4}{3}} \cdot I \quad (\text{ó } C = \lambda_1 \cdot R^{\frac{5}{6}} \cdot I^{\frac{1}{2}}) \\ I < 0'0007, \quad V = \lambda_2 \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ó } C = \lambda_2 \cdot R^{\frac{1}{6}}) \end{array} \right\}$$

en las que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  dependen de la rugosidad de las paredes. También K. R. Bornemann<sup>11</sup> estableció expresiones análogas, pero ambas tuvieron escasa aceptación.

<sup>9</sup> A. A. HUMPHREYS y H. L. ABBOT, *Report upon the physics and hydraulics of the Mississippi River*, Filadelfia, 1861. También existe una traducción alemana de H. Grebenau, *Theorie der Bewegung*, etc., Munich, 1867, con fórmulas originales.

<sup>10</sup> *Annales des ponts et chaussées* (4) 15 (1868), pág. 229. Citado en P. FORCHHEIMER, *Tratado de hidráulica*. Ed: Labor, S. A. Barcelona, 1950.

<sup>11</sup> *Zivilingenieur* (2) 15 (1869), pág. 42. Citado en P. FORCHHEIMER, *Tratado de hidráulica*. Ed: Labor, S. A. Barcelona, 1950.

Las diferencias observadas en los resultados de las fórmulas citadas demuestran que sólo puede establecerse una regla para las velocidades en cursos de agua “semejantes a canales”, en el caso de las conducciones libres.

### 3.2. FÓRMULA DE GANGUILLET Y KÜTTER

Así pues, el establecimiento de una fórmula apropiada para todos los casos resulta muy difícil a causa de la multiplicidad de las circunstancias que se presentan, por lo que aquí no se tratará tanto de establecer fórmulas universales de cálculo sino de encontrar la más idónea en cada caso.

Los ingenieros suizos E. Ganguillet y W.R. Kütter, basados en sus experiencias en torrentes alpinos y en el estudio de las realizadas por Darcy y Bazin, así como las de Humphreys y Abbot en el río Mississipi, proporcionaron, en el año 1869, la siguiente expresión para el coeficiente de Chézy, en función de la rugosidad de las paredes de la conducción libre, de la pendiente motriz o hidráulica y del radio hidráulico medio. A saber:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{I}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}}$$

, donde **n** es un coeficiente que depende de la rugosidad de la superficie y resulta casi idéntico al de Manning. De cualquier modo, expondremos los casos más usuales mediante la siguiente tabla:

Tabla 1.1. Valores del coeficiente **n** de Ganguillet-Kütter y Manning

<b>Tabla de valores n en las fórmulas de Ganguillet-Kütter y Manning</b> (Basados en los valores propuestos por Robert E. Horton. Ref. <u>Apuntes de Hidráulica general y agrícola</u> . J. E. Torres Sotelo. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Valencia, 1970). Adaptación del propio autor.			
<b>Tipo de conducción libre</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Normal</b>	<b>Máximo</b>
<b>I.- Tuberías parcialmente llenas</b>			
Plástico (PVC, PE, PRFV, ...)	0'008	0'009	0'010
Acero	0'010	0'012	0'014
Fundición no revestida	0'012	0'014	0'016
Fundición revestida	0'011	0'012	0'013
Vidrio	0,009	0'010	0'012
Cemento pulido	0'010	0'011	0'013
Mortero de cemento	0'011	0'013	0'015

Hormigón en masa vibropresado o armado	0'011	0'013	0'014
Cerámica vitrificada	0'011	0'013	0'015
Arcilla (para drenaje)	0'012	0'014	0'016
Ladrillo con mortero de cemento (albañales)	0'012	0'015	0'017
Mampostería con cemento	0'017	0'025	0'030
<b>II.- Canales revestidos</b>			
Cemento	0'010	0'011	0'013
Mortero	0'011	0'013	0'015
Hormigón acabado a llana	0'011	0'013	0'015
Hormigón en bruto	0'014	0'017	0'020
Ladrillo	0'012	0'015	0'018
Mampostería labrada y rejuntada	0'013	0'016	0'020
Mampostería con cemento	0'017	0'025	0'030
Mampostería en seco	0'025	0'030	0'035
Conductos metálicos semicirculares, lisos	0'011	0'013	0'015
<b>III.- Canales excavados (sin revestir)</b>			
Tierra, buena alineación (recto)	0'018	0'022	0'025
Grava, buena alineación	0'022	0'025	0'030
Tierra, mala alineación (con curvas)	0'023	0'025	0'030
Tierra, mala alineación con vegetación	0'025	0'030	0'033
Tierra, mala alineación y mucha vegetación o lecho pedregoso	0'030	0'035	0'040
Excavación en roca (uniforme)	0'025	0'035	0'040
Excavación en roca (irregular) con salientes	0'035	0'040	0'050
<b>IV.- Cauces naturales (Ríos y arroyos)</b>			
Limpios, de riberas rectas, sin ollas (ríos de meseta)	0'025	0'030	0'033
Sinuosos con algo de piedra y vegetación	0'033	0'040	0'045
Sinuosos con piedras, ollas y maleza	0'045	0'070	0'100
Ríos de montaña (con grava, piedras y bolos)	0'040	0'050	0'070
<b>V.- Cauces naturales en avenidas</b>			
Inundaciones en pastizales	0'025	0'030	0'050
En terrenos de labor sin cultivos	0'020	0'030	0'040
En terrenos de labor con cultivos herbáceos	0'025	0'040	0'050
En monte bajo	0'035	0'060	0'110
En bosques	0'040	0'070	0'150

En el caso de secciones semicirculares,  $C$  debe aumentarse en 5 ó 6 unidades, regla ésta frecuentemente olvidada<sup>12</sup>, pues se ha comprobado experimentalmente que la velocidad que, a igualdad de  $R$  y de  $I$ , es idéntica en perfiles rectangulares, triangulares o trapeziales, viene aumentada en 1/10 si el perfil transversal es semicircular. Para  $R = 1$  m. resulta, según la fórmula anterior,  $C = 1 : n$ , por la cual, si bien parece queda numéricamente definida  $n$ <sup>13</sup> aparece claramente que  $n$  no tiene igual dimensión en numerador y denominador. Los autores facilitaron la aplicación de la fórmula por una construcción gráfica, fundada en el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$z = 23 + \frac{1}{n} + \frac{0'00155}{I}, \quad x = \left( 23 + \frac{0'00155}{I} \right) n$$

$$C = \frac{z}{1 + \frac{x}{\sqrt{R}}} = \frac{z\sqrt{R}}{\sqrt{R} + x}$$

en las que, tomando  $x$  y  $z$  como abscisas y ordenadas, las líneas en que  $I = \text{const.}$  Son hipérbolas y en las que  $n = \text{const.}$  son rectas. Si, para valores conocidos de  $I$  y  $n$ , el punto de intersección de la hipérbola correspondiente a  $I$  con la recta correspondiente a  $n$ , se une con el punto del eje de abscisas cuya distancia del origen sea  $\sqrt{R}$ , esta recta así trazada corta al eje vertical en un punto cuya ordenada es precisamente  $C$ . La ventaja del método gráfico sobre el analítico estriba no solamente en la supresión del cálculo numérico, sino también en la facilidad de medir el grado de inexactitud con que se trabaja, cuando el coeficiente  $n$  sólo es conocido con escasa aproximación. Así pues, en la práctica toda la cuestión estriba en fijar con la mayor exactitud posible el valor de  $n$ , para lo cual se dispone de numerosos datos experimentales.

Los resultados obtenidos en las medidas practicadas por Humphreys y Abbot indujeron también a G. Hagen<sup>14</sup> a examinar si no podrían ser sintetizados por una expresión menos complicada, llegando, efectivamente, a una sencilla fórmula que, posteriormente<sup>15</sup>, sustituyó por otras dos, si bien, y a pesar de los trabajos de Darcy y Bazin, no creyó necesario distinguir entre los diversos tipos de revestimiento utilizados en los canales artificiales. Por último, en virtud de las

<sup>12</sup> W. R. KÜTTER, en *Allgemeine Bauzeitung*, 35 (1870), pág. 239. Para medidas en el caso de canales con juncos y hierbas acuáticas, ver J. F. D'AUBUISSON, *Annales des ponts et chaussées*. (2) 2 (1841), pág. 114.

<sup>13</sup> En virtud de la dependencia entre el radio medio hidráulico y los coeficientes de rugosidad, parece que tanto los coeficientes de la 1ª categoría de Bazin como los de Ganguillet y Kütter no son aplicables más que a canales de muy pequeñas dimensiones, o bien a las acequias de riego o de desagüe y avenamiento. Por consiguiente, en la práctica se tomarán las cifras de la segunda categoría, aún cuando la pared del canal sea perfectamente lisa.

<sup>14</sup> G. HAGEN, *Abhandlungen der k. Akademie d. Wissenschaften*. Berlín, 1868.

<sup>15</sup> G. HAGEN, *Untersuchungen über die gleichförmige Bewegung des Wassers*. Berlín, 1876. páginas 63, 79.

medidas de A. Cunningham<sup>16</sup> sobre el canal del Ganges (este canal tiene 30 m. de anchura, 3 m. de profundidad y su pendiente oscila entre 1:40.000 y 1: 3.165) adoptó la fórmula siguiente, aplicable a cursos de agua regulares y de gran sección transversal,

$$V = 43'7 \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ó } C = 43'7 \cdot R^{\frac{1}{6}})$$

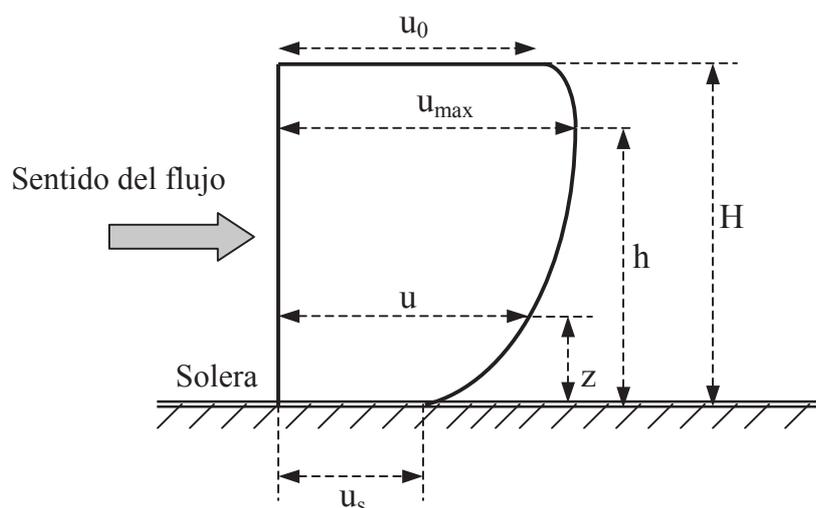


Fig. 1.6. Distribución de velocidades en una sección longitudinal de un canal

P. E. Harder<sup>17</sup> emprendió una deducción basada en premisas un tanto arbitrarias. Para ello admitió, primeramente, que la velocidad  $u$  crece, a partir de la solera, en función de la cota  $z$  según la ley:

$$u = u_s + \sqrt{C_1 \cdot I \left( h \cdot z - \frac{1}{2} z^2 \right)}$$

en la que  $u_s$  es la velocidad en la solera (mínima),  $C_1$  una constante, y  $h$  la cota del filete de máxima velocidad. Se encuentra así para el valor de la velocidad media en toda la sección, según Harder, el siguiente promedio integral u ordenada media:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{H} \int_0^H u \cdot dz = \frac{1}{H} \int_0^H \left( u_s + \sqrt{C_1 \cdot I \left( h \cdot z - \frac{z^2}{2} \right)} \right) \cdot dz = \\ &= \frac{1}{H} [u_s \cdot z]_0^H + \frac{\sqrt{C_1 \cdot I}}{H} \int_0^H \sqrt{h \cdot z - \frac{z^2}{2}} \cdot dz = \dots = u_s + C_2 \cdot H \sqrt{I} \end{aligned}$$

<sup>16</sup> A. CUNNINGHAM, *Hydraulic Experiments at Roorkee*. 1874/75, ROORKEE 1881: resumido en Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 71. Londres, 1883. pág. 1.

<sup>17</sup> P. E. HARDER, *Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen*. Hamburgo, 1878. páginas, 46, 93

en la que  $C_2$  es una constante. Pero como la resistencia que la solera opone al rozamiento es proporcional a  $u_s^2$ , igualando esta resistencia a la componente  $H \cdot I$  del peso, se tiene, además, siendo  $C_3$  una nueva constante,

$$C_3 u_s^2 = H \cdot I \quad \text{ó} \quad u_s = \sqrt{H \cdot I : C_3}$$

De las anteriores expresiones se deduce, teniendo en cuenta el radio medio hidráulico  $R$ , que en cauces suficientemente anchos, con  $H \approx R$ , ofrece:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{1}{C_3}} \times \sqrt{R \cdot I} + C_2 \cdot R \cdot \sqrt{I} = C_4 \cdot \sqrt{R \cdot I} + C_2 \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{R \cdot I} = \\ &= C_4 \cdot \sqrt{R \cdot I} + C_5 \cdot \sqrt{R \cdot I} = (C_4 + C_5) \cdot \sqrt{R \cdot I}, \text{ siendo :} \\ C_4 &= \sqrt{\frac{1}{C_3}} \text{ y } C_5 = C_2 \cdot \sqrt{R} \end{aligned}$$

Para  $C_5$  admitió Harder el valor 7'254, constante para todos los casos, mientras que para el cemento  $C_4 = 70'5$ , para mampostería y ladrillo  $C_4 = 56$ , y para tierra y grava  $C_4 = 36'27$ .

G. Lavale<sup>18</sup> introduce en su fórmula la profundidad media  $T$ , así como la anchura  $B$  de la superficie libre, obteniendo así para la velocidad máxima:

$$\sqrt[36]{V_{\text{máx.}}^{17}} = 23 \sqrt[9]{B} \sqrt[36]{T^7} \sqrt[9]{I^4}$$

El movimiento del agua en los ríos es, por lo general, variable. Sin embargo, en no pocos casos la variación resulta tan pequeña que, en ciertos tramos adecuados y acotados de dicha corriente natural, pueden emplearse las reglas para el movimiento del agua en las conducciones artificiales. Además, en la fórmula fundamental:  $V = C \cdot R^{1/2} \cdot I^{1/2}$  puede substituirse el radio hidráulico medio  $R$  por la profundidad media del agua.

Para la aplicación de la fórmula general de Ganguillet y Kütter se han confeccionado diversas tablas y ábacos, que pueden encontrarse en la mayoría de libros y manuales dedicados al tema de las conducciones libres.

La expresión anterior fue simplificada por el propio Kütter, quien para pendientes superiores a 0,0005 (0'05%) propuso adoptar el coeficiente de Chézy, como sucede con la fórmula de Bazin que veremos posteriormente, así:

<sup>18</sup> J. RAPP, *Unsere natürlichen Wasserläufe*. Weilheim, 1883.

$$C = \frac{100 \cdot \sqrt{R}}{m + \sqrt{R}}$$

, en la que  $C$  ya no dependía de la pendiente motriz y siendo  $m$  un nuevo coeficiente de rugosidad cuyos valores tabulados se exponen a continuación:

Tabla 1.2. Valores del coeficiente  $m$  de Ganguillet y Kutter (fórmula simplificada)

1	Paredes de hormigón liso, fibrocemento y plástico (PRFV, PVC y PE) en sección semicircular o similar	0,10 – 0,14
2	Paredes de hormigón liso, fibrocemento y plástico (PRFV, PVC y PE) en sección rectangular	0,14 – 0,16
3	Paredes de tablas muy ensambladas (conducciones hormigón armado)	0,15 – 0,25
4	Paredes de tablas sin acepillar (enlucido de cemento)	0,25 – 0,27
5	Paredes de fábrica ordinaria	0,30 – 0,35
6	Paredes de mampostería concertada, hormigón pulido toscamente	0,45 – 0,50
7	Paredes de mampostería ordinaria y hormigón sin pulir	0,50 – 0,55
8	Paredes de mampostería rugosa, fondo fangoso	0,75 – 1,00
9	Paredes de mampostería vieja sin vegetaciones	1,00 – 1,25
10	Canales pequeños en roca, canales regulares en tierra sin plantas acuáticas	1,25 – 1,75
11	Canales en tierra con grava y plantas acuáticas; arroyos y ríos con cauce de tierra; mampostería de piedra muy mal conservada con musgo y fondo de cieno	1,75 – 2,00
12	Canales de tierra muy mal conservados, con plantas, fondo de cieno y ríos con lecho de grava	2,00 – 2,50

De hecho, algunos de estos valores (intervalos de admisibilidad) y materiales (introduciendo los de empleo más reciente, como los diversos plásticos y el fibrocemento o amianto-cemento) han sido propuestos por este autor. Como se verá, dicha clasificación en 12 categorías recuerda la posterior de Koeschlin y podría ser perfectamente adoptada en nuestra propuesta ulterior. En cualquier caso, los valores de este coeficiente de rugosidad pueden establecerse aproximadamente así, teniendo en cuenta los valores ya expuestos de Horton, como se hace corrientemente en USA:

$$m = 100 \cdot n - 1$$

, siendo  $n$  el coeficiente de rugosidad de las fórmulas de Ganguillet-Kütter (general) y Manning que se ha expuesto en la anterior tabla 1.1.

En el presente trabajo ofrecemos, al final del mismo, mediante la tabulación correspondiente, los valores del coeficiente  $C$  en función de los diferentes valores de  $R$  y de  $m$ , así como los correspondientes valores del coeficiente  $\lambda$  de Fanning. **Este proceso se repetirá tanto para esta fórmula como para las cuatro que siguen a continuación y los resultados así obtenidos, de gran aplicabilidad en el cálculo y diseño de este tipo de obras hidráulicas, pueden encontrarse tabulados en el anexo n°: 1 que se halla al final de nuestro libro.**

### 3.3. FÓRMULA DE MANNING-STRICKLER

El ingeniero irlandés Robert Manning, en su publicación *Flow of water in open channels and pipes*, propuso en el año 1890 para el coeficiente  $C$  el valor:

$$C = \frac{R^{1/6}}{n}$$

de donde:

$$V = \frac{1}{n} \cdot R^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

, donde  $V$  es la velocidad media de la sección.

Esta misma fórmula, escrita en la forma:

$$V = N \cdot R^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

suele llamarse “fórmula de Strickler”, siendo  $n$  un coeficiente de rugosidad y  $N$ , su inverso, un coeficiente de suavidad.

Esta fórmula de gran simplicidad y cuyos resultados concuerdan bastante bien con los de la fórmula de Kütter, es muy utilizada actualmente. El coeficiente  $C$  depende de la forma y de la rugosidad de las paredes y solera ( $n$ ).

Esta fórmula resulta particularmente apropiada para el movimiento turbulento completo, zona en la que trabajan la mayoría de los canales y acequias, y muy particularmente las utilizadas para el riego.

Para cursos de agua naturales, Manning da la fórmula:

$$C = 34 \left( 1 + \frac{\sqrt{R}}{4} - \frac{0.03}{\sqrt{R}} \right)$$

admitiendo que la rugosidad depende solamente de la profundidad.

Anteriormente, se ha insertado un cuadro con los valores del coeficiente  $n$  de rugosidad para la expresión general de Ganguillet y Kütter, que también resulta válido para la presente expresión de Manning para canales de diversas características. En el caso de canales revestidos generalmente se puede determinar el valor de  $n$  con bastante exactitud, pero en los canales de paredes naturales se presentan algunas dificultades debido a que el valor de  $n$  viene influenciado por una serie de factores aleatorios: vegetación espontánea, diferencias entre el material de las paredes y el constitutivo del lecho, irregularidad de las secciones y alineaciones, etc.

### 3.4. FÓRMULA DE BAZIN

La fórmula ya expresada de Darcy-Bazin (ver epígrafe anterior 3.1.3.) figura con dos coeficientes,  $\alpha'$  y  $\beta$ , cada uno de los cuales depende, según una ley desconocida, del estado y naturaleza de las paredes del cauce. Posteriormente, Bazin criticó sus primeras fórmulas referentes a los valores de la expresión:

$$\alpha = 1/C^2 = \alpha' (1 + \beta/R)$$

reprochándoles que al crecer  $R$  variaría  $C$  pero disminuyendo demasiado lentamente, cuando, en realidad, con el aumento de  $R$  debería perder rápidamente importancia la naturaleza de las paredes.

Después de un gran número de experiencias realizadas en canales artificiales de diferentes secciones y rugosidades, H. Bazin en sus *Annales des Ponts et Chaussées* propuso, en 1897, como valor del coeficiente de Chèzy:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

que, de hecho, resulta ser la fórmula simplificada de Kütter substituyendo el valor 87 en lugar del 100, siendo  $\gamma$  un coeficiente de rugosidad que depende de la naturaleza de las paredes del cauce natural o artificial, de acuerdo con los 7 valores del siguiente cuadro.

Tabla 1.3. Valores del coeficiente  $\gamma$  de Bazin

Categoría	Naturaleza de las paredes del cauce	$\gamma$
1	Paredes muy lisas (enlucido liso de cemento, madera cepillada)	0,06

2	Paredes lisas (hormigón fino sin pulir, sillería y ladrillos)	0,16
2 <sup>a</sup> )	Paredes de hormigón poco pulido, mampostería corriente partida	0,30
3	Paredes de mampostería de cantos rodados	0,46
4	Paredes de tierra de superficie muy regular, revestimiento en seco	0,85
5	Paredes de tierra en condiciones ordinarias	1,30
6	Paredes de tierra en malas condiciones (fondo de cantos rodados, cubiertas de vegetación, rocas)	1,75

La fórmula de Bazin da buenos resultados en pequeños canales artificiales, ya que fue deducida con datos experimentales que se obtuvieron en este tipo de cauces. Su resolución gráfica se realizó, durante mucho tiempo, mediante la aplicación del ingenioso “ábaco de M. d’Ocagne”, hoy en día ventajosamente substituido por las calculadoras electrónicas de bolsillo.

De hecho, H. Bazin<sup>19</sup> reprochó a sus propias primeras fórmulas la circunstancia de que, para distintos grados de rugosidad de la pared, al crecer el radio R, el coeficiente C de la ecuación de Chèzy toma también diversos valores, mientras que, no obstante, al aumentar la profundidad parece debía perder importancia la naturaleza de la pared.

Siguiendo un orden cronológico, debemos citar inmediatamente a C. Hessle, quien, lo mismo que Harder, deduce la resistencia de rozamiento de la distribución de velocidades en el interior de la masa líquida. Si bien las hipótesis en que se basaba son ciertamente discutibles, llega a una fórmula final que, al contrario que la de Harder, coincide en sus resultados numéricos con otras estimaciones anteriores. Además, resulta sencilla y utilizable para pequeñas pendientes. Esta fórmula, para cursos de agua naturales, es:<sup>20</sup>

$$V = 25 \left( 1 + \frac{1}{2} \sqrt{R} \right) \sqrt{R \cdot I} = 25 \cdot \sqrt{R \cdot I} + 12'5 \cdot R \cdot \sqrt{I} = 12'5 \sqrt{I} \cdot (2\sqrt{R} + R)$$

*Ejemplo.* Un cauce de sección mojada S se compone de dos tramos consecutivos de longitudes  $l_1$  y  $l_2$  para las cuales el coeficiente de Bazin es  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , respectivamente. Se trata de calcular la velocidad V para una pendiente I. Si la rugosidad es la misma para ambos tramos, se tiene, según De Chèzy,

<sup>19</sup> H. BAZIN, en *Annales des ponts et chaussées* (7) 7<sup>4</sup> (1897), pág. 55.

<sup>20</sup> C. HESSLE, en *Zeitschrift für Gewässerkunde* 2 (1899), pág.31.

$I = \frac{V^2(l_1 + l_2)}{S \cdot C^2}$ , y si se admiten distintos coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ , se

obtendrá:  $I = \frac{V^2}{S} \left( \frac{l_1}{C_1^2} + \frac{l_2}{C_2^2} \right)$ , luego:

$$V = 87 \sqrt{S \cdot I} : \sqrt{l_1 \left( 1 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{R}} \right)^2 + l_2 \left( 1 + \frac{\gamma_2}{\sqrt{R}} \right)^2}$$

Desde luego, esta fórmula aproximada sería inaplicable si la distribución de velocidades no fuese idéntica en ambos tramos de la conducción libre que nos ocupa.

### 3.5. FÓRMULAS DE KOESCHLIN Y DE BIEL

La fórmula de Koeschlin responde a la siguiente configuración analítica:

$$V = K \cdot \overbrace{(1 + 0,6\sqrt{R})}^C \cdot \sqrt{R \cdot I}$$

, donde  $V$ ,  $R$  e  $I$  tienen el mismo significado que en la fórmula de Bazin y anteriores, y siendo  $K$  el coeficiente de rugosidad, cuyos valores se incluyen en la tabla siguiente, conjuntamente con los de la  $f$  de la fórmula de Biel que se expondrá a continuación, aunque sólo a título ilustrativo.

Esta fórmula tuvo en cuenta, para su establecimiento, además de las experiencias propias de su autor, el estudio comparativo con las formulaciones anteriores de Bazin y de Ganguillet y Kütter, así como algunas otras. Constituye, en este sentido, un precedente de la operativa que proponemos en el presente libro. En cualquier caso, el empleo de esta fórmula no resulta conveniente para valores de  $R > 3$  m., y existen ábacos y nomogramas para facilitar su cálculo rápido.

Los correspondientes valores del coeficiente de rugosidad, en este caso desglosados en 12 categorías, son los siguientes:

Tabla 1.4. Valores del coeficiente  $K$  de Koeschlin y  $f$  de Biel

Valores del coeficiente $K$ de Koeschlin y $f$ de Biel	$f$	$K$
1. Hormigón enlucido, madera cepillada, fibrocemento, plástico	0,015	52
2. Hormigón no enlucido; mampostería lisa; tablas machihembradas	0,030	48
3. Ladrillo enlucido o liso	0,060	46
4. Hormigón viejo; ladrillo en bruto	0,080	44
5. Hormigón rugoso, mortero descuidado, mampostería bien hecha	0,150	42

6. Mampostería ordinaria, hormigón con resaltos	0,200	40
7. Revestimientos ásperos con resaltos, y fondo en buen estado	0,300	36
8. Revestimientos descuidados, fondo en regular estado y con resaltos	0,400	32
9. Canal en tierra en muy buen estado, sin vegetaciones	0,450	28
10. Canal en tierra con fondo con sedimentos, poca vegetación	0,500	24
11. Canal en tierra con resaltos y vegetaciones; pared en mal estado	0,750	20
12. Canal en tierra en malas condiciones, con mucha vegetación, con depósitos gruesos, hielo en suspensión	1,050	18

Es también interesante la fórmula de R. Biel (1907), que es más recomendable para tuberías y canales revestidos, que no para canales de tierra y cauces naturales. A saber:

$$I = \frac{V^2}{1.000 \cdot R} \left[ 0,12 + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{0,0003}{(f + 0,02\sqrt{R})V\sqrt{R}} \right]$$

En los casos más usuales basta con poner:

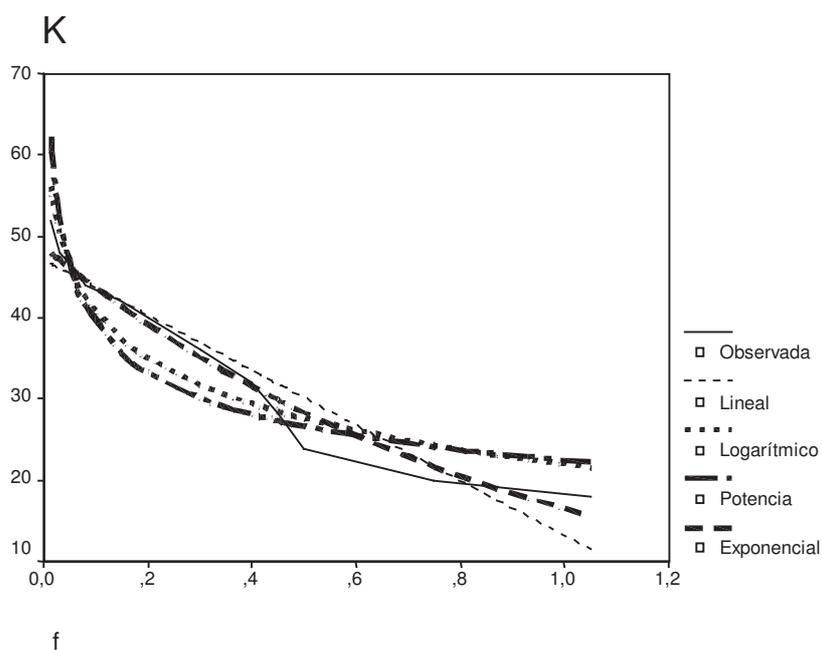
$$I = \frac{V^2}{1.000 \cdot R} \left( 0,12 + \frac{f}{\sqrt{R}} \right)$$

, prescindiendo del último sumando del interior del corchete, y siendo  $f$  el coeficiente de rugosidad a adoptar con los valores de la tabla anterior, lo que simplifica notablemente el cálculo.

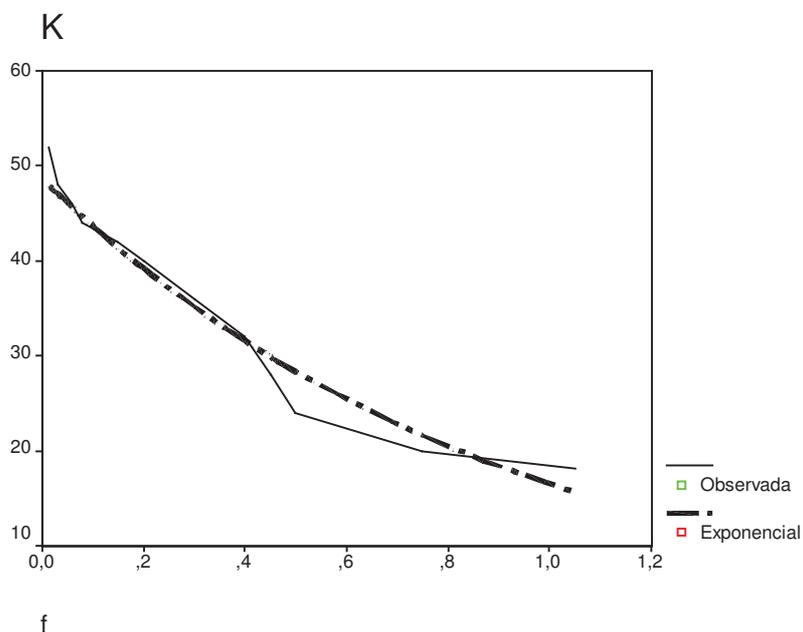
De hecho, la relación existente entre los coeficientes de rugosidad de Koeschlin y de Biel puede representarse así:

**Variable independiente: Coeficiente f de Biel**

V. Dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1
K	LIN	,905	10	95,25	,000	47,0919	-33,903
K	LOG	,900	10	90,34	,000	21,9682	-8,1549
K	POW	,821	10	45,96	,000	22,4815	-,2429
<b>K</b>	<b>EXP</b>	<b>,952</b>	<b>10</b>	<b>196,90</b>	<b>,000</b>	<b>48,6973</b>	<b>-1,0841</b>



A la vista de lo calculado, descartamos las restantes funciones de ajuste mínimocuadrático obtenidas para seleccionar la siguiente:



Con ello, vemos que el mejor ajuste MCO no lineal obtenido entre ambos coeficientes corresponde a una función exponencial del tipo:

$$K = b_0 \cdot e^{b_1 \cdot f} = 48'6973 \times e^{-1'0841 \cdot f}$$

### 3.6. FÓRMULA DE FORCHHEIMER

Es análoga a la ya expuesta de Manning-Strickler. A saber:

$$V = \delta \cdot R^{0.7} \cdot I^{0.5}$$

pues el coeficiente  $\delta$  es el valor  $1/n$  y el exponente de  $R$  es el cociente redondeado:

$$\frac{2}{3} = 0.6\widehat{6}$$

Empleando nomogramas con escalas logarítmicas que se reproducen en diversos manuales, se logra una gran rapidez de cálculo. Para utilizar estos gráficos, se unen los puntos correspondientes a los valores de  $R$  e  $I$  dados, y, la intersección de esta recta con el eje, se une con  $\delta$  mediante una nueva recta, cuya prolongación, corta el eje coordenado, señalando su valor. No obstante, la tabla correspondiente que figura en el anexo 1 de nuestro libro también proporciona directamente los valores buscados.

Forchheimer precisó más alguno de los valores  $\delta = 1/n$  dados por Ganguillet y Kütter, dando a su fórmula mayor elasticidad; así, propuso los cinco casos siguientes:

Tabla 1.5. Valores del coeficiente  $\delta$  de Forchheimer

I.- Para hormigón enlucido .....	$\delta = 90 - 80$
II.- Para hormigón nuevo sin enlucir .....	$\delta = 80 - 50$
III.- Para hormigón antiguo, de superficie irregular, sin enlucir .....	$\delta = 50 - 42$
IV.- Para paredes de tierra .....	$\delta = 42 - 30$
V.- Para cursos de agua naturales .....	$\delta = 30 - 24$

Es evidente, como hace notar Strickler mismo, que las fórmulas de Manning y Forchheimer sólo con muy escasa aproximación se ajustan a las experiencias de Bazin, pues si en la fórmula  $V = \lambda \cdot R^\mu \cdot I^{0.5}$  se calcula el exponente  $\mu$ , se obtienen los resultados siguientes (es de observar que el exponente de  $I$  no es siempre  $0.5$ , pues probablemente se eleva a  $0.6$  para el hormigón):

Cemento liso:  $V = 91.1 \cdot R^{0.6} \cdot I^{0.5}$ ; tablas bien unidas: desde  $72 \cdot R^{0.6} \cdot I^{0.5}$  a  $111 \cdot R^{0.68} \cdot I^{0.5}$ ; ladrillos de fábrica cerámica:  $70 \cdot R^{0.61} \cdot I^{0.5}$ ; tablas con intersticios o juntas de 1 cm.:  $69.5 \cdot R^{0.7} \cdot I^{0.5}$ ; las mismas, con intersticios de 5 cm.:  $47 \cdot R^{0.7} \cdot I^{0.5}$ ; grava fina:  $62 \cdot R^{0.73} \cdot I^{0.5}$  a  $74 \cdot R^{0.74} \cdot I^{0.5}$ ; grava gruesa:  $58 \cdot R^{0.82} \cdot I^{0.5}$ ; paredes de tierra limpia:  $58 \cdot R^{0.92} \cdot I^{0.5}$ ; íd. Sin limpiar:  $\sim 48 \cdot R^{1.12} \cdot I^{0.5}$ . En una canal de madera, de paredes muy lisas y con una lámina de agua de muy pocos milímetros de

profundidad ( $h$ ), se encontró  $V = 100 \cdot h^{0.7} \cdot I^{0.5}$ , de gran utilidad en ciertos casos muy concretos<sup>21</sup>.

Por último, para el estudio y aplicación de las fórmulas sin coeficiente dependiente de la rugosidad, recomendamos la consulta del magnífico libro de P. Forchheimer, pp. 165-170, citado en la bibliografía, sin que pretendamos aquí pormenorizar más sobre el tema por comprensibles razones de espacio y oportunidad.

#### **4. FORMULACIÓN PROPUESTA PARA EL CÁLCULO DE LAS CONDUCCIONES LIBRES**

##### **4.1. FÓRMULAS UNIVERSALES PARA EL CÁLCULO DE LAS CONDUCCIONES LIBRES**

Calculando los valores de  $V$  correspondientes a una pendiente motriz  $I$  determinada, y para diferentes radios medios hidráulicos  $R$ , las diferencias de cálculo obtenidas utilizando las fórmulas ya comentadas de Bazin, Ganguillet y Kütter, la simplificada de Kütter, Bazin, Biel, Forchheimer, Manning-Strickler y Koeschlin, no resultan considerables para la resolución de los casos ordinarios que se presentan en la práctica.

La de Bazin, por ejemplo, tiene la ventaja de ofrecer una mayor seguridad si se trata de canales de paredes térreas, pues proporciona velocidades inferiores a las de Kütter. Al comparar las tablas que nos fijan los diversos coeficientes de rugosidad, puede observarse cuán difícil es especificar, en cada caso, el valor exacto a adoptar para poder determinar así el coeficiente  $C$  de Chèzy o, mejor aún, como aquí se pretende, el coeficiente  $\lambda$  de Fanning. Por otra parte, en la práctica resulta imposible realizar, de una manera constante, las condiciones particulares que concurren en las experiencias que sirvieron para fijar los coeficientes de rugosidad de los cuales se sirvieron tan ilustres investigadores. Así, en un canal con paredes de hormigón armado enlucidas con mortero de cemento Portland artificial PA-350 e hidrofugante, los depósitos minerales que con el paso del tiempo se forman sobre ellas, modifican significativamente sus condiciones primitivas. Y si se trata de canales de tierra, ocurre otro tanto debido a la vegetación que se desarrolla en ellos periódicamente, por mucho cuidado y desyerbados mecánicos y químicos que se lleven a cabo. De aquí, pues, que sea absurdo querer recurrir a fórmulas complicadas o pretender alcanzar un grado de exactitud que, evidentemente, sólo existió en el preciso momento en que se hicieron las correspondientes experiencias, salvando, también, el error de los instrumentos de medida. Tampoco es necesario añadir que, con el objetivo de evitar todo fracaso ulterior, es conveniente colocarse en las condiciones más desfavorables que se puedan presentar en la práctica.

---

<sup>21</sup> *Ztschr. f. Gewässerkunde* 6 (1904), pág. 327. Wien. Ber. 112<sup>2a</sup> (1903), pág. 1.705.

**Juzgamos necesario, a este respecto, elaborar unas formulaciones propias que subsumieran los factores más relevantes de las anteriores, al tiempo que, a través del coeficiente de Fanning, facilitar su resolución para cada una de las doce categorías de rugosidad consideradas (transformación simple) o bien para todas ellas conjuntamente (transformación múltiple).**

De este modo tenemos, en principio, una vez efectuado el cálculo correspondiente, cinco tablas (una para cada una de las fórmulas estudiadas, a saber: Bazin, Ganguillet y Kütter simplificada, Forchheimer, Manning-Strickler y Koeschlin), con diferentes valores del coeficiente de Fanning  $\lambda$  para cada una de ellas en función de las dos variables independientes o explicativas del problema: el grado de rugosidad  $K$  y el radio medio hidráulico  $R$ .

A continuación, se establecen o definen las 12 categorías distintas de rugosidad (como en las tablas figurantes en el Anexo nº: 1) y se calcula el  $\lambda$  medio de cada casilla (obteniendo la media aritmética de los cinco valores homólogos mediante la correspondiente hoja de cálculo). Para ello, se ha tenido en cuenta la naturaleza diferente de las paredes y la solera de los cauces abiertos que se contemplan en las expresadas formulaciones. De esta manera, queda una nueva tabla que resume, en una sola, las cinco formulaciones clásicas expresadas. Dicha tabla de valores promedios puede verse también en el Anexo nº: 1.

Se calcula, por el método de los mínimos cuadrados ordinarios (MCO), el ajuste no lineal de cada columna (rugosidad) en función de  $R$ , o sea, obteniendo la función:  $\lambda = f(R)$ , para cada categoría de rugosidad. Quedarán, entonces, 12 ajustes minimocuadráticos por regresión no lineal, con sus gráficos correspondientes, que pueden verse representados en el Anexo nº: 1. Las líneas de tendencia de tal suerte obtenidas, afectadas con sus correspondientes coeficientes de concausalidad  $R^2$ , que es el coeficiente de determinación o crítico (que resulta muy elevado en todos los casos, produciéndose, obviamente, correlaciones prácticamente perfectas), así como por el valor del estadístico “F” al que nos referiremos más adelante en el estudio de la función de ajuste múltiple, son las siguientes:

Tabla 1.6. Ajuste potencial de la función  $\lambda = f(R)$  para cada categoría de rugosidad

<b>K</b> (categoría de rugosidad)	<b>LÍNEA DE TENDENCIA</b>	<b>R<sup>2</sup></b> (coeficiente de determinación o crítico)	<b>F</b>
1	$\lambda = 0'0026 \cdot R^{-0'2430}$	0.9951	11.711'2
2	$\lambda = 0'0032 \cdot R^{-0'2691}$	0.9962	15.046'2
3	$\lambda = 0'0040 \cdot R^{-0'2952}$	0.9963	15.526'5
4	$\lambda = 0'0048 \cdot R^{-0'3112}$	0.9963	15.598'9

5	$\lambda = 0'0062 \cdot R^{-0'3308}$	0.9960	14.263'3
6	$\lambda = 0'0080 \cdot R^{-0'3545}$	0.9942	10.010'6
7	$\lambda = 0'0102 \cdot R^{-0'3665}$	0.9944	10.226'5
8	$\lambda = 0'0133 \cdot R^{-0'3914}$	0.9922	7.333'24
9	$\lambda = 0'0197 \cdot R^{-0'4166}$	0.9899	5.673'76
10	$\lambda = 0'0268 \cdot R^{-0'4222}$	0.9901	5.820'31
11	$\lambda = 0'0364 \cdot R^{-0'4322}$	0.9898	5.629'16
12	$\lambda = 0'0514 \cdot R^{-0'4384}$	0.9902	5.834'41

que ofrece, en todos los casos contemplados, unos resultados plenamente satisfactorios.

De hecho, la forma funcional analizada posee la configuración analítica:

$$\lambda = A \cdot R^{-\alpha} = e^{-B} \cdot R^{-\alpha}$$

que ofrece los siguientes resultados:

RUGOSIDAD	$\alpha$	B	A	$R^2$	F
1	-0.2430	-5.9542	2.5949E-3	0.9951	11711
2	-0.2691	-5.7526	3.1745E-3	0.9962	15046
3	-0.2952	-5.5125	4.0360E-3	0.9963	15526
4	-0.3112	-5.3400	4.7959E-3	0.9963	15599
5	-0.3308	-5.0885	6.1673E-3	0.9960	14263
6	-0.3545	-4.8232	8.0410E-3	0.9942	10011
7	-0.3665	-4.5889	1.0164E-2	0.9944	10226
8	-0.3914	-4.3196	1.3305E-2	0.9922	7333
9	-0.4166	-3.9287	1.9669E-2	0.9899	5673
10	-0.4222	-3.6182	2.6831E-2	0.9901	5820
11	-0.4322	-3.3123	3.6432E-2	0.9898	5629
12	-0.4384	-2.9677	5.1421E-2	0.9902	5834

## 4.2. INTERPOLACIÓN Y AJUSTE DE LAS FÓRMULAS

### 4.2.1. Interpolación lineal y parabólica

En la decimonovena edición del Diccionario de la Lengua Española se recoge la siguiente acepción del término o verbo *interpolación*: “Averiguar el valor de una magnitud en un intervalo cuando se conocen algunos de los valores que toma a uno y otro lado de dicho intervalo”. Pero en esta ocasión -y quizás muy

excepcionalmente- la Real Academia Española no ha presentado una versión completamente correcta del concepto “interpolación” que se emplea en el campo de las Matemáticas, la Física y la Estadística, como podrá comprobarse al estudiar el tema de Hidráulica que nos ocupa.

Obsérvese que, al ir aumentando las categorías de rugosidad, en la expresión general potencial o doblemente logarítmica natural o neperiana (que posteriormente se estudiará con mayor especificidad) del tipo:  $\lambda = A \cdot R^{-\alpha}$ , también van aumentando correlativamente los valores de los parámetros **A** y  **$\alpha$** , lo que permite al proyectista interpolar linealmente valores intermedios de ambos en el caso de considerarse oportuno establecer, al mismo tiempo, categorías intermedias de rugosidad. Al resolver el problema por este procedimiento, se acepta implícitamente la hipótesis de que todos los puntos del intervalo considerado pertenecen a la recta que pasa por los dos puntos determinados por los extremos inferior y superior del intervalo.

Dicha interpolación también podría establecerse de modo parabólico, según la conocida fórmula de Newton, que constituye una generalización del método anterior a una parábola de grado **p** que pasa por los **p+1** puntos prefijados y dispuestos de tal manera que las abscisas de cada dos puntos consecutivos definen intervalos de la misma amplitud. Dichos puntos son los siguientes, v. gr., para la función:  $\alpha = f(K)$ ,

$$(K_0, \alpha_0), (K_1, \alpha_1), \dots, (K_p, \alpha_p)$$

cuya resolución analítica viene dada por la conocida fórmula de Newton:

$$\begin{aligned} \alpha = & \alpha_0 + \frac{K - K_0}{1!} \times \frac{\Delta \alpha_0}{h} + \frac{(K - K_0)(K - K_1)}{2!} \times \frac{\Delta^2 \alpha_0}{h^2} + \\ & + \dots \dots \dots + \\ & + \frac{(K - K_0)(K - K_1) \dots (K - K_{p-1})}{p!} \times \frac{\Delta^p \alpha_0}{h^p} \end{aligned}$$

en donde:

$$K_1 - K_0 = K_2 - K_1 = \dots = K_p - K_{p-1} = h ,$$

de forma que el segmento  $K_p - K_0$  se divide en **p** intervalos de la misma amplitud **h**. Por otra parte, las primeras, segundas y, en general, p-ésimas diferencias vienen dadas, como se sabe siguiendo la teoría de las diferencias finitas, por:

$$\Delta \alpha_0 = \alpha_1 - \alpha_0, \Delta^2 \alpha_0 = \alpha_2 - 2\alpha_1 + \alpha_0, \dots,$$

$$\Delta^p \alpha_0 = \alpha_p - \binom{p}{1} \alpha_{p-1} + \binom{p}{2} \alpha_{p-2} - \dots + (-1)^p \binom{p}{p} \alpha_0$$

En estas condiciones se puede comprobar fácilmente que para  $K = K_0$ , se tiene  $\alpha = \alpha_0$ ; para  $K = K_1$ ,  $\alpha = \alpha_1$ ; y así sucesivamente. Es decir, la fórmula de la interpolación de Newton es una parábola de orden  $p$  que pasa por  $p+1$  puntos prefijados y dispuestos de tal manera que las abscisas de cada dos puntos consecutivos definen intervalos de la misma amplitud  $h$ .

Veamos, en fin, que la aplicación de la fórmula de Newton exige que los valores de la variable independiente o explicativa se distribuyan de manera que formen intervalos de la misma amplitud. Sin embargo, el problema de la interpolación se presenta, en general, al tratar de obtener un valor de  $A$  ó  $\alpha$  correspondiente a un valor dado de la categoría de rugosidad  $K$  intermedio entre los expuestos en la tabla anterior, que solamente muestra valores enteros naturales, sabiendo que existe una correspondencia dada o no por una función matemática del tipo:  $A = f(K)$ , o bien:  $\alpha = f(K)$ , entre los pares ordenados:

$$(K_0, \alpha_0), (K_1, \alpha_1), \dots, (K, \alpha), \dots, (K_n, \alpha_n)$$

Si se desconoce la forma matemática de la función  $f(K)$ , el método que se suele seguir, si  $K_i - K_{i-1}$  no es una constante  $h$ , es el de obtener una parábola o función polinómica de orden  $n$  que pase por los  $n+1$  puntos dados. Una expresión que resuelve fácilmente el problema es la clásica fórmula de Lagrange, dada por:

$$\begin{aligned} \alpha = & \alpha_0 \times \frac{(K - K_1)(K - K_2) \dots (K - K_n)}{(K_0 - K_1)(K_0 - K_2) \dots (K_0 - K_n)} + \\ & + \alpha_1 \times \frac{(K - K_0)(K - K_2) \dots (K - K_n)}{(K_1 - K_0)(K_1 - K_2) \dots (K_1 - K_n)} + \\ & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\ & + \alpha_n \times \frac{(K - K_0)(K - K_1) \dots (K - K_{n-1})}{(K_n - K_0)(K_n - K_1) \dots (K_n - K_{n-1})} \end{aligned}$$

la cual satisface las condiciones del problema original, siempre que sean distintas todas las  $K_i$ , o sea:  $\forall K_i \neq K_j$ ,  $(\forall i, j = 0, 1, 2, \dots, n)$ .

#### *Ejemplo de aplicación:*

Se trata de hallar la función correspondiente a una categoría de rugosidad:  $K = 3^4$  (como un canal revestido con piezas prefabricadas de hormigón armado, con sus juntas correspondientes en solera y paredes, tomas de compuerta, escalerillas de acceso, etc.).

a) Por interpolación lineal, se tendría:

$$\text{para } \begin{cases} K = 3, \lambda = 0'004 \cdot R^{-0'2952} \\ K = 4, \lambda = 0'0048 \cdot R^{-0'3112} \end{cases}$$

\*Para el parámetro A:

$$\Delta A = \frac{0'4 \times 0'0008}{1} = 0'00032$$

$$A = 0'004 + 0'00032 = 0'00432$$

\*Para el parámetro  $\alpha$ :

$$\Delta \alpha = \frac{0'4 \times 0'016}{1} = 0'0064$$

$$\alpha = -0'2952 - 0'0064 = -0'3016,$$

de donde la nueva ecuación buscada será, para  $K = 3'4$ :

$$\lambda = 0'00432 \cdot R^{-0'3016}$$

b) Por interpolación parabólica. En este caso, debe construirse, en primer lugar, la correspondiente “tabla de diferencias finitas” y aplicar, después, la ecuación de la parábola, para el caso, v. gr., de la función:  $\alpha = f(K)$ :

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{K - K_0}{1!} \times \frac{\Delta \alpha_0}{h} + \frac{(K - K_0)(K - K_1)}{2!} \times \frac{\Delta^2 \alpha_0}{h^2}$$

Como los intervalos de las diferentes categorías de rugosidad tienen todos la misma amplitud  $h = 1$ , elaboraremos la siguiente tabla de diferencias para 3 categorías:

$$\begin{array}{l} K = 2, \lambda = 0'0032 \cdot R^{-0'2691} \\ K = 3, \lambda = 0'0040 \cdot R^{-0'2952} \\ K = 4, \lambda = 0'0048 \cdot R^{-0'3112} \end{array}$$

\*Para el parámetro A:

$$A = A_0 + \frac{K - K_0}{1!} \times \frac{\Delta A_0}{h} + \frac{(K - K_0)(K - K_1)}{2!} \times \frac{\Delta^2 A_0}{h^2} ;$$

<b>K</b>	<b>A<sub>0</sub></b>	<b>ΔA<sub>0</sub></b>	<b>Δ<sup>2</sup>a<sub>0</sub></b>
2	0'0032		
		0'0008	
3	0'0040		0
		0'0008	
4	0'0048		

, con lo que:

$$A = 0'0032 + \frac{K - 2}{1} \times \frac{0'0008}{1} = 0'0016 + 0'0008 \times K ;$$

para  $K = 3'4$ , se tiene:

$$A = 0'0016 + 0'0008 \cdot 3'4 = 0'00432 ,$$

que coincide con el valor obtenido para la interpolación lineal.

\*Para el parámetro  $\alpha$ :

En este caso, la tabla de diferencias para 3 categorías diversas de rugosidad ofrece:

<b>K</b>	<b>α<sub>0</sub></b>	<b>Δα<sub>0</sub></b>	<b>Δ<sup>2</sup>α<sub>0</sub></b>
2	-0'2691		
		-0'0261	
3	-0'2952		0'0101
		-0'016	
4	-0'3112		

, con lo que:

$$\begin{aligned} \alpha &= -0'2691 + \frac{K - 2}{1} \times \frac{-0'0261}{1} + \frac{(K - 2)(K - 3)}{2} \times \frac{0'0101}{1} = (\text{simplificando}) = \\ &= 0'00505 \times K^2 - 0'05135 \times K - 0'1866 ; \end{aligned}$$

esta expresión, para  $K = 3'4$ , vale:

$$\alpha = 0'00505 \cdot 3'4^2 - 0'05135 \cdot 3'4 - 0'1866 = -0'302812 ,$$

por lo que la nueva ecuación buscada, para  $K = 3'4$ , será:

$$\boxed{\phantom{0'00505 \times K^2 - 0'05135 \times K - 0'1866}}$$

$$\lambda = 0,00432 \cdot R^{-0,302812}$$

, que difiere en muy poco de la obtenida por interpolación lineal, según puede comprobarse.

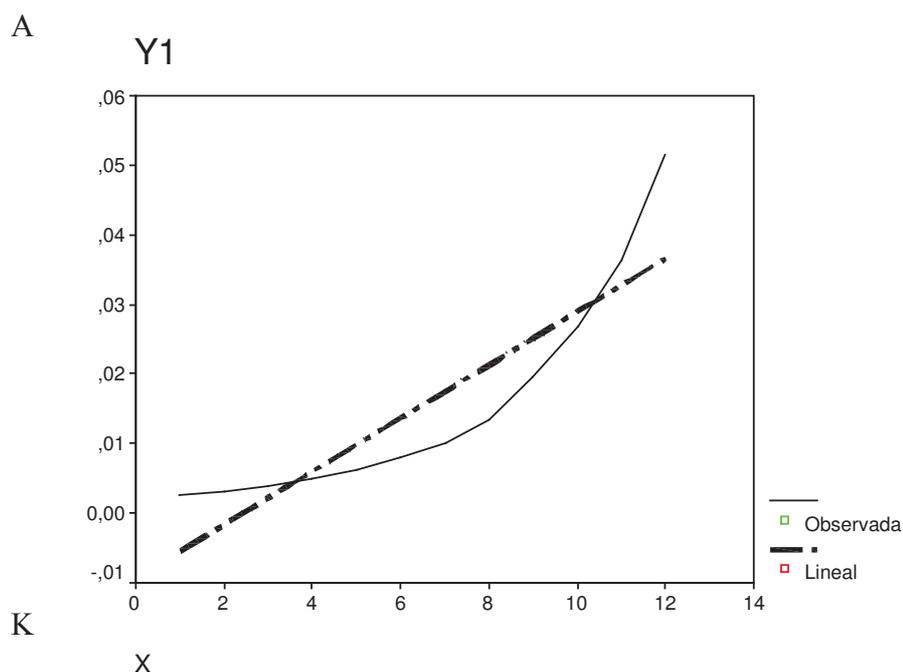
#### 4.2.2. Ajuste minimocuadrático lineal y polinomial

Con el mismo objetivo que el perseguido en el epígrafe anterior, se puede emplear también el método MCO para ajustar una recta o una parábola de 2º grado a las funciones problema buscadas A (K) y  $\alpha$  (K), comparando posteriormente los resultados obtenidos en relación al método de interpolación empleado en el epígrafe anterior. Si utilizamos, alternativamente, el método estadístico para hallar la función correspondiente a la categoría de rugosidad K = 3'4, los cuatro ajustes realizados con sus gráficos correspondientes y los valores de los parámetros  $R^2$  y F, son los siguientes:

a) Ajuste lineal de la función A (K):

Variable independiente: K

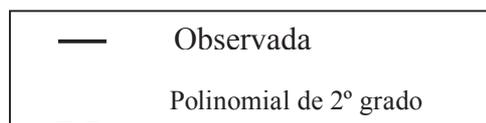
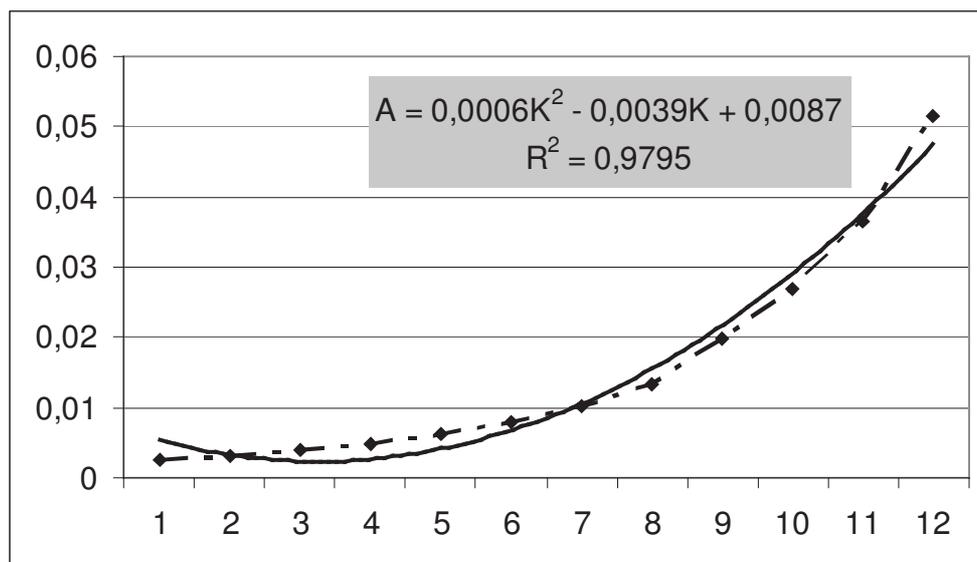
V.Dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1
A	<b>LIN</b>	,800	10	40,05	,000	-,0093	,0038



**Resulta, pues, la ecuación de la recta siguiente:  $A = 0'0038 \cdot K - 0'0093$ , con  $R^2 = 0'800$ , poco aceptable.**

Pues bien, si un diagrama de dispersión de datos o nube de puntos, como es el caso que nos ocupa, indica que la línea recta no se ajusta de forma suficientemente satisfactoria a causa de la no linealidad de la relación existente entre ambas variables del problema, cabe la posibilidad de hallar alguna curva sencilla que proporcione el ajuste satisfactorio. El tipo de curva elegido dependerá mucho de la información teórica de que se disponga referente a la relación expresada y, además, de la comodidad o sencillez de su configuración analítica. En este sentido, seguiremos buscando la función más apropiada y sencilla, como pudiera ser el caso de una parábola cuadrática.

b) Ajuste parabólico de la función A (K):

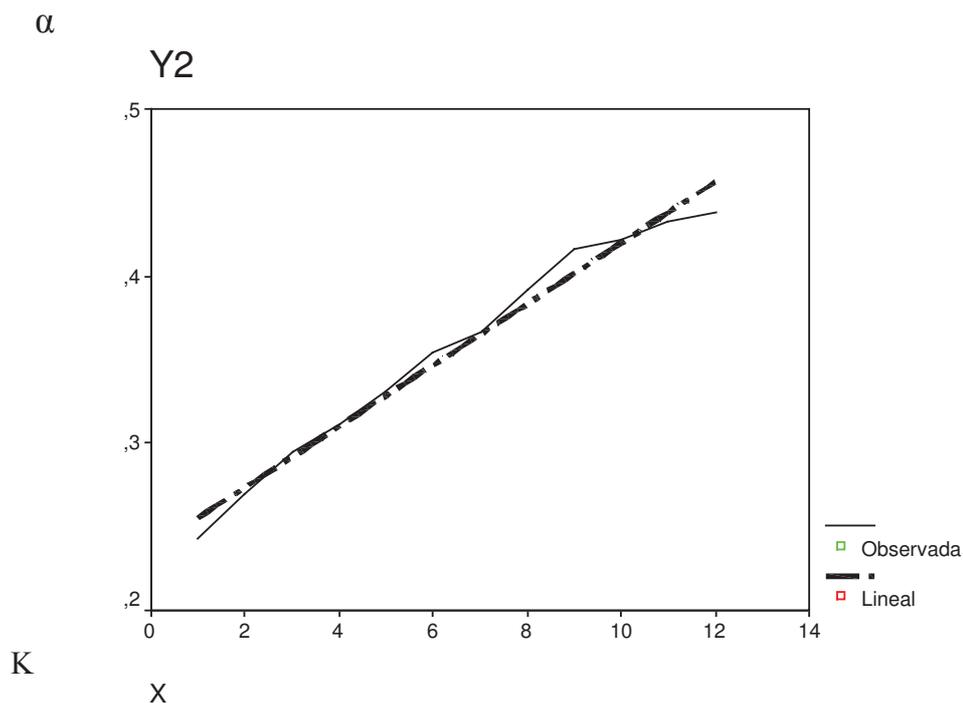


**Esta ecuación, pues, resulta muy aceptable.**

c) Ajuste lineal de la función  $\alpha$  (K):

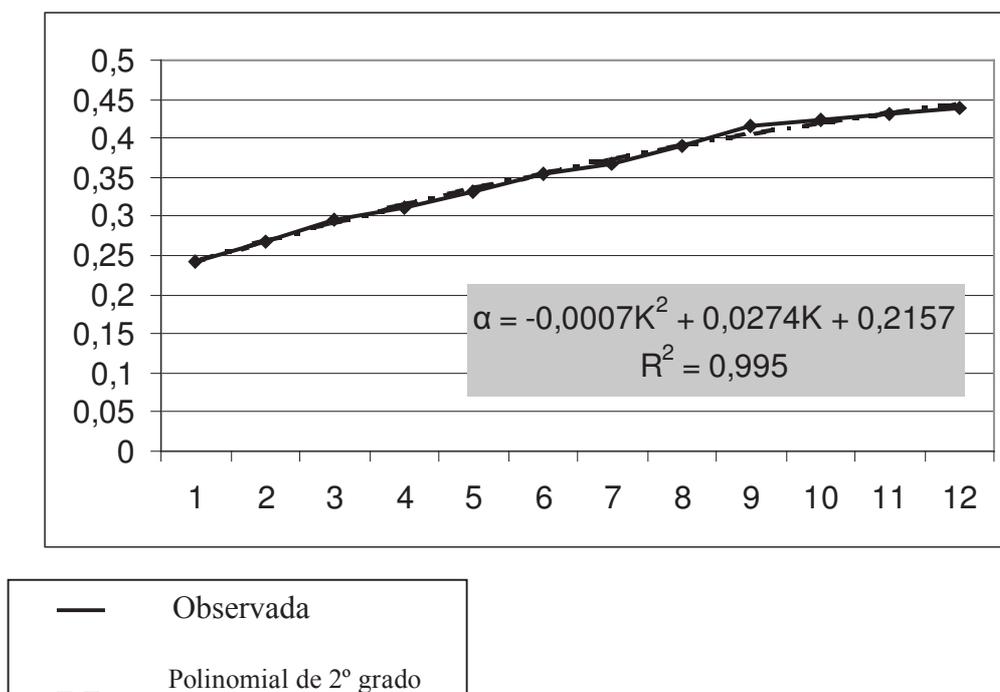
Variable independiente: K

V.Dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1
$\alpha$	<b>LIN</b>	,981	10	525,38	,000	,2371	,0183



Resulta, pues, la ecuación de la recta:  $\alpha = 0'0183 \cdot K + 0'2371$ , con  $R^2 = 0'981$ , muy aceptable.

d) Ajuste parabólico de la función  $\alpha(K)$ :



Esta ecuación, pues, resulta también muy aceptable.

De todo lo expuesto con anterioridad, se deduce lo siguiente:

### A) Por MCO (ajuste lineal)

- *Para el parámetro A:*

Según puede observarse por los resultados obtenidos, este ajuste no resulta satisfactorio, por lo que lo obviaremos, aceptando el efectuado anteriormente por interpolación lineal, que ha ofrecido un valor:  $A = 0'00432$ .

- *Para el parámetro  $\alpha$ :*

En este caso, el valor resultante será:

$$\alpha = 0'0183 \cdot K + 0'2371 = 0'0183 \cdot 3'4 + 0'2371 = 0'29932,$$

con lo que la nueva ecuación buscada será:

$$\lambda = 0'00432 \cdot R^{-0'29932}$$

### B) Por MCO (ajuste parabólico)

- *Para el parámetro A:*

La función polinómica o parábola de 2º grado obtenida, ofrece:

$$\begin{aligned} A &= 0'0006 \cdot K^2 - 0'0039 \cdot K + 0'0087 = \\ &= 0'0006 \cdot 3'4^2 - 0'0039 \cdot 3'4 + 0'0087 = 0'002376 \end{aligned}$$

- *Para el parámetro  $\alpha$ :*

En este caso, el valor resultante será:

$$\begin{aligned} \alpha &= -0'0007 \cdot K^2 + 0'0274 \cdot K + 0'2157 = \\ &= -0'0007 \cdot 3'4^2 + 0'0274 \cdot 3'4 + 0'2157 = 0'300768, \end{aligned}$$

por lo que la nueva ecuación buscada, para  $K = 3'4$ , será:

$$\lambda = 0'002376 \cdot R^{-0'300768}$$

que, especialmente por lo que se refiere al valor del parámetro  $A = 0'002376$ , difiere bastante del obtenido por interpolación parabólica ( $A = 0'00432$ ). Esta discrepancia se manifiesta gráficamente de la simple contemplación de la curva de ajuste expuesta en la figura correspondiente.

Resulta evidente, en definitiva, que los métodos de interpolación relacionados (lineales o parabólicos) resultan mayormente ajustados al

comportamiento de la función realmente observada, aunque su cálculo resulte bastante más engorroso que los métodos estadísticos propios del ajuste MCO (para los que, incluso, pueden emplearse programas informáticos establecidos *ad hoc*), al tener en cuenta intervalos de amplitud más reducida y próximos al valor que nos interesa calcular, por lo que, en aras de una mayor exactitud, serían preferibles a estos últimos. En cualquier caso, el ajuste MCO puede ser también aplicable por su mayor sencillez y generalidad puesto que, una vez determinada la función de ajuste, es posible aplicarla directamente a todo el intervalo continuo de valores de la rugosidad:  $K \in (1, 2, \dots, 12)$ , con unos márgenes de error ciertamente asumibles.

### 4.3. FÓRMULAS PARA LA VELOCIDAD Y EL CAUDAL

A continuación, se aplica y simplifica la fórmula de la velocidad:

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \times \sqrt{R \cdot I} = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{\lambda}},$$

sustituyendo el valor obtenido de:  $\lambda = f(R)$ , con lo que quedarán 12 fórmulas (1 para cada categoría de rugosidad) en función de R y de I. **Son las fórmulas universales propuestas por este autor.**

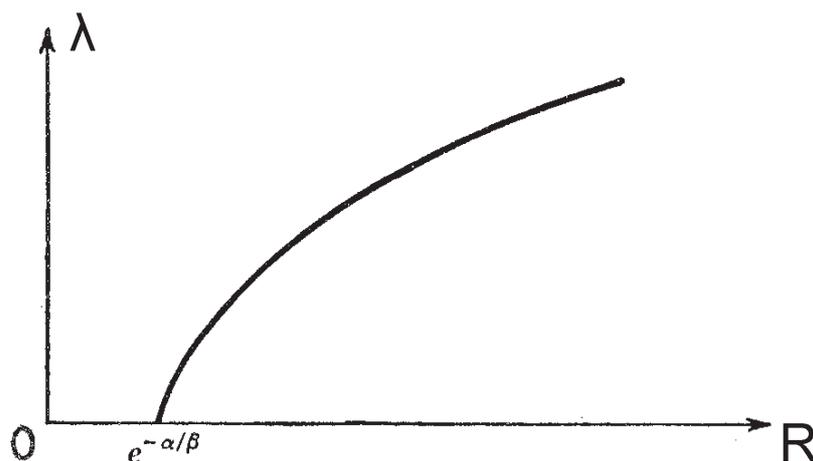
Como ha podido observarse en todos los casos (para las 12 categorías de rugosidad), la línea de tendencia que mejor se ajusta es la función potencial o doblemente logarítmica. En segundo lugar, los mejores valores de  $R^2$  y F se han obtenido, también en todos los casos, para la función semilogarítmica, como puede comprobarse en el anexo correspondiente. Puede suceder que, en alguna circunstancia específica, sea más práctico calcular  $\lambda$  mediante la aplicación de los ajustes o transformaciones semilogarítmicas expresadas, que tienen una configuración analítica del tipo:

$$\lambda = \alpha + \beta \cdot \ln R, \quad R = A \cdot B^\lambda,$$

La derivada de la función  $\lambda(R)$  vendrá dada por la expresión:

$$\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta \lambda}{\Delta R} = \frac{d\lambda}{dR} = \frac{\beta}{R},$$

de modo que la pendiente de la curva decrece firmemente a medida que aumenta R. Ello se pone de manifiesto con claridad si nos atenemos a la contemplación del siguiente gráfico, a saber:

Fig. 1.7. Representación gráfica de la función semilogarítmica:  $\lambda = f(R)$ 

Una vez hallado el valor correspondiente de  $\lambda$ , mediante la fórmula anterior de Darcy-Weissbach, y conociendo el valor de la pendiente motriz  $I$ , se determinan la velocidad y el caudal.

Cuando  $\lambda = 0$ , se tiene que:

$$\ln R = -\alpha/\beta,$$

por lo que el punto de intersección con el eje de las  $R$  es el de coordenadas cartesianas rectangulares  $(e^{-\alpha/\beta}, 0)$ . La inversa de esta función es:

$$R = e^{-\frac{\alpha}{\beta}} \times e^{\frac{\lambda}{\beta}} = e^{\frac{\lambda - \alpha}{\beta}} = A \times B^{\lambda}$$

en la que  $\begin{cases} A = e^{-\alpha/\beta} \\ B = e^{1/\beta} \end{cases}$ , tratándose de una función de crecimiento firme y persistente.

Para calcular las ramas infinitas de esta función, se tiene que:

$$m = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \beta \times \ln R}{R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{R} + \beta \times \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln R}{R} = 0 + \frac{\infty}{\infty},$$

lo que resulta una indeterminación, que resolveremos por aplicación de la regla de l'Hôpital, con lo que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln R}{R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 0, \text{ o sea, } m = 0,$$

por lo que existe una rama parabólica horizontal (según el eje de abscisas  $OR$ ), que es una recta impropia.

En cualquier caso, para las 12 categorías de rugosidad (1-12), sustituyendo los valores obtenidos, se tendrá, para cada caso, las siguientes funciones potenciales:

$$1- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'0026 \times R^{-0'243}}} = 86'85 \times R^{0'6215} \times I^{0'5}$$

$$2- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'0032 \times R^{-0'2691}}} = 78'29 \times R^{0'63455} \times I^{0'5}$$

$$3- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'004 \times R^{-0'2952}}} = 70'02 \times R^{0'6476} \times I^{0'5}$$

$$4- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'0048 \times R^{-0'3112}}} = 63'92 \times R^{0'6556} \times I^{0'5}$$

$$5- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'0062 \times R^{-0'3308}}} = 56'24 \times R^{0'6654} \times I^{0'5}$$

$$6- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'008 \times R^{-0'3545}}} = 49'51 \times R^{0'67725} \times I^{0'5}$$

$$7- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'0102 \times R^{-0'3665}}} = 43'85 \times R^{0'68325} \times I^{0'5}$$

$$8- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'0133 \times R^{-0'3914}}} = 38'4 \times R^{0'6957} \times I^{0'5}$$

$$9- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'0197 \times R^{-0'4166}}} = 31'55 \times R^{0'7083} \times I^{0'5}$$

$$10- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'0268 \times R^{-0'4222}}} = 27'05 \times R^{0'7111} \times I^{0'5}$$

$$11- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'0364 \times R^{-0'4332}}} = 23'21 \times R^{0'7166} \times I^{0'5}$$

$$12- V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{0'0514 \times R^{-0'4384}}} = 19'53 \times R^{0'7192} \times I^{0'5}$$

Del mismo modo, para todos los casos, también puede resultar útil el empleo directo de la fórmula que nos ofrece el caudal:  $Q = S \cdot V$ , y/o substituyendo el valor del radio hidráulico medio por:  $R = S/c$ , siendo  $c$  el contorno o perímetro mojado del cauce en cuestión. Así, se obtendrán las siguientes expresiones:

$$1- Q = 86'85 \cdot c \cdot R^{1'6215} \cdot I^{0'5}$$

$$2- Q = 78'29 \cdot c \cdot R^{1'63455} \cdot I^{0'5}$$

$$3- Q = 70'02 \cdot c \cdot R^{1'6476} \cdot I^{0'5}$$

$$4- Q = 63'92 \cdot c \cdot R^{1'6556} \cdot I^{0'5}$$

$$5- Q = 56'24 \cdot c \cdot R^{1'6654} \cdot I^{0'5}$$

$$6- Q = 49'51 \cdot c \cdot R^{1'67725} \cdot I^{0'5}$$

$$7- Q = 43'85 \cdot c \cdot R^{1'68325} \cdot I^{0'5}$$

$$8- Q = 38'40 \cdot c \cdot R^{1'6957} \cdot I^{0'5}$$

$$9- Q = 31'55 \cdot c \cdot R^{1'7083} \cdot I^{0'5}$$

$$10- Q = 27'05 \cdot c \cdot R^{1'7111} \cdot I^{0'5}$$

$$11- Q = 23'21 \cdot c \cdot R^{1'7166} \cdot I^{0'5}$$

$$12- Q = 19'53 \cdot c \cdot R^{1'7192} \cdot I^{0'5}$$

También, los 12 ajustes y 12 fórmulas se podrían reducir a 6, agrupando los cálculos en grupos de 2. En cualquier caso, al respecto de las 12 categorías de rugosidad, podrían servir las mismas que se hacen servir para la aplicación de la fórmula simplificada de Ganguillet y Kütter, o bien la de Koeschlin.

#### 4.4. BONDAD DEL AJUSTE Y FIABILIDAD DEL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN NO LINEAL

En todos los casos anteriormente relacionados, se ha llevado a efecto el correspondiente “test” sobre la bondad del ajuste empleando el estadígrafo  $\chi^2$  (\*)<sup>22</sup> de Pearson, con (n-1) grados de libertad, a saber:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^K \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}, \quad \text{con } \sum_{j=1}^K o_j = \sum_{j=1}^K e_j .$$

También se ha realizado el análisis estadístico de fiabilidad del coeficiente de correlación no lineal resultante, habiéndose obtenido resultados plenamente satisfactorios. En efecto, los pares de valores de las dos variables de nuestro problema pueden ser concebidos como una muestra de la población de todos los pares posibles. Como están implicadas las dos variables, diremos que se trata de una población de doble variación.

Se puede pensar en un coeficiente de correlación poblacional teórico que denominaremos  $\rho$ , estimado por el coeficiente de correlación  $r$  de la muestra. Los ensayos de significación o contrastes de hipótesis correspondientes a diferentes valores requieren el conocimiento de la distribución muestral de  $r$ . Para  $\rho = 0$ , esta distribución es simétrica y se puede utilizar un estadístico con una distribución de Student (Gosset) con (n-2) grados de libertad, así:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Ahora bien, para  $\rho \neq 0$  la distribución es sesgada y, entonces, una cierta transformación -debida a FISHER- genera un estadístico que se distribuye de manera aproximadamente normal.

Por otra parte, y para concluir las consideraciones metodológicas aquí realizadas, se ha procedido a estudiar la fiabilidad del coeficiente de correlación  $r$  calculado para los diferentes ajustes mínimo-cuadráticos realizados. Para ello, se ha definido la variable aleatoria o estadígrafo (denominada “transformación de Fisher”) siguiente:

$$z = 1.1513 \log [(1+r)/(1-r)] = 1/2 \ln [(1+r)/(1-r)] ; \quad \text{de dónde:}$$

$$e^{2z} = (1+r)/(1-r), \quad \text{que se distribuye de manera aproximadamente normal.}$$

<sup>22</sup> Este pie de página referente a la conocida Prueba del Xi-cuadrado, podrá verse suficientemente desarrollado en el anexo núm.: 3 de nuestro libro (“Restantes especificaciones metodológicas”), por lo que nos remitiremos a él para la consecución de mayores especificaciones y detalles.

Se trata, entonces, de determinar un intervalo de valores entre los que pueda, razonablemente, esperarse (con una probabilidad del 95%) que se encuentre  $r$ , con una media de:

$$\mu_z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

y una desviación típica o “standard” de:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

El intervalo de admisibilidad será, en esta tesitura:

$$z = \mu_z \pm 2\sigma_z$$

Aunque las relaciones precedentes simplifiquen notoriamente el problema de determinar la exactitud de  $r$  como estimador de  $\rho$ , tienen la desventaja de no ser fiables si las dos variables analizadas no poseen una distribución normal conjunta. Consecuentemente, salvo en el caso de estar suficientemente seguros de que las mencionadas variables tienen dicha distribución -por lo menos con una buena aproximación- no debe confiarse demasiado en los resultados obtenidos.

#### **4.5. RELACIÓN ENTRE EL COEFICIENTE PROMEDIO DE FANNING ( $\lambda$ ), EL RADIO HIDRÁULICO MEDIO (R) Y LAS CATEGORÍAS DE RUGOSIDAD (K) DE LAS PAREDES Y SOLERA DE LAS CONDUCCIONES LIBRES**

##### **4.5.1. Definición de las variables del problema**

Llamamos:

$y$  ( $\lambda$ ) = coeficiente promedio de Fanning.  
 $z$  (K) = categorías de rugosidad de paredes y solera.  
 $x$  (R) = radio hidráulico medio.

Los rangos de valores o intervalos de existencia que toman estas variables son los siguientes:

$0.001397 \leq y \leq 0.631222$  (véase la tabla correspondiente de valores medios del coeficiente de Fanning, en número de:  $12 \times 60 = 720$ , calculados con 6 cifras decimales)

$1 \leq z \leq 12$  (existen 12 categorías diferentes de rugosidad)

$0.01 \leq x \leq 15.50$  (existen 60 valores diferentes del radio medio hidráulico)

## 4.5.2. Relaciones de regresión multivariante

### 4.5.2.1. Considerando todas las categorías de rugosidad

Se trata ahora de ajustar la función real de 2 variables reales:  $\lambda = f(K,R)$ . Utilizando el procedimiento de los mínimos cuadrados ordinarios (MCO), se obtiene la siguiente expresión<sup>23</sup> por regresión no lineal múltiple:

$$\ln y = - 6.3388 - 0.3559 * \ln x + 0.2674 * z$$

(-483.4) (- 110.9) (150.32)..... valores de los estadísticos t

con:

$R^2 = 0.9799$  (coeficiente de determinación o crítico), que resulta muy elevado, por lo que podemos conducir, sin temor a equivocarnos, que el **grado de fiabilidad** del modelo aquí propuesto como instrumento de predicción resulta altamente aceptable.

$R = r = 0.9899$  (coeficiente de correlación múltiple no lineal)

$F = 17449.8$  (estadístico de Snedecor)

Deshaciendo los cambios, nos queda la ecuación:

$$y = x^{-0.3559} * e^{-6.3388+0.2674*z} = f(x,z), \text{ o lo que es lo mismo:}$$

$$\lambda = R^{-0.3559} * e^{-6.3388+0.2674*K} = f(K,R)$$

### 4.5.2.2. Considerando las primeras 6 categorías de rugosidad (categorías de la 1 a la 6)

Procediendo de una forma análoga a la del apartado anterior se obtiene la expresión:

$$\ln y = - 6.1766 - 0.3006 * \ln x + 0.2185 * z$$

(-609.4) (-129.6) (84.1) ..... valores de los estadísticos t

con:

$R^2 = 0.9853$  (coeficiente de determinación o crítico), que resulta muy elevado, por lo que podemos conducir, sin temor a equivocarnos, que el **grado de fiabilidad** del modelo aquí propuesto como instrumento de predicción resulta altamente aceptable.

$R = r = 0.9926$  (coeficiente de correlación múltiple no lineal)

$F = 11935.5$  (estadístico de Snedecor)

Deshaciendo los cambios nos queda la ecuación:

$$y = x^{-0.3006} * e^{-6.1766+0.2185*z} = f(x,z), \text{ o lo que es lo mismo:}$$

<sup>23</sup> “Ln” indica logaritmo neperiano o natural y entre paréntesis figuran los estadísticos “t”.

$$\lambda = R^{-0.3006} * e^{-6.1766+0.2185*K} = f(K,R)$$

#### 4.5.2.3. Considerando las últimas 6 categorías de rugosidad (de la 7 a la 12)

Procediendo, por último, de una forma análoga a la de los apartados anteriores, se obtiene:

$$\ln y = - 6.8639 - 0.4112 * \ln x + 0.3236 * z$$

(-249.8)    (-161.9)    (113.7) ..... valores de los estadísticos t

con:

$R^2 = 0.9910$  (coeficiente de determinación o crítico), que resulta muy elevado, por lo que podemos conducir, sin temor a equivocarnos, que el **grado de fiabilidad** del modelo aquí propuesto como instrumento de predicción resulta altamente aceptable.

$R = r = 0.9955$  (coeficiente de correlación múltiple no lineal)

$F = 19566.9$  (estadístico de Snedecor)

Deshaciendo los cambios nos ofrece:

$$y = x^{-0.4112} * e^{-6.8639+0.3236*z} = f(x,z), \text{ o lo que es lo mismo:}$$

$$\lambda = R^{-0.4112} * e^{-6.8639+0.3236*K} = f(K,R)$$

#### 4.5.3. Capacidad de predicción

Esta capacidad predictiva de las funciones de ajuste obtenidas, nos vendrá evaluada por los siguientes parámetros:

	<b>Raíz del Error cuadrático medio</b>	<b>Coefficiente de la desigualdad de Theil</b>
Toda la regresión	0.1644	0.0171
Categorías 1-6	0.0839	0.0075
Categorías 7-12	0.0918	0.0115

Según el cuadro anterior, se desprende que la capacidad predictiva de los modelos ensayados es suficientemente buena y que ésta mejora algo al dividir la muestra global en dos submuestras o particionar el espacio muestral en dos subconjuntos (con lo que se obtienen dos ecuaciones), sin que juzguemos operativo subdividirlo en más.

#### 4.5.4. Explicación sucinta sobre los estadísticos utilizados

##### 4.5.4.1. Estadístico “t”

El estadístico “t”, que se calcula como el cociente entre el estimador y su error estándar:  $\frac{\hat{\beta}_i}{\sigma_{\hat{\beta}_i}}$ , permite contrastar la hipótesis de que el coeficiente es igual

a cero ( $H_0: \beta_i = 0$  frente a  $H_1: \beta_i \neq 0$ ) y que, por lo tanto, la variable aleatoria estadística en cuestión no es individualmente significativa para explicar el comportamiento de la variable endógena.<sup>24</sup>

##### 4.5.4.2. Estadístico “F”

Es el estadístico o estadígrafo que se construye para contrastar si los parámetros asociados a las variables explicativas del modelo (exceptuando el término independiente) son conjuntamente iguales a cero. Dicho de otro modo, este estadístico permite contrastar la capacidad explicativa conjunta de las variables introducidas en el modelo.<sup>25</sup>

##### 4.5.4.3. Evaluación de la capacidad predictiva

Básicamente, la llevaremos a efecto mediante la cuantificación de dos magnitudes diferentes, a saber:

#### - Raíz del error cuadrático medio o “error típico de la estima”.

Viene dado por la siguiente expresión, que constituye una medida de la dispersión con respecto a la curva de regresión:

$$\text{RECM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \hat{f}_i^2}{n}}$$

que tiene propiedades análogas a las de la desviación típica o “standard”. De hecho, el ECM (“error cuadrático medio”) es la varianza de las estimaciones con respecto al valor verdadero del parámetro que se está estimando, y es fácil ver que el ECM es igual a la varianza más el cuadrado del sesgo. De entre todas las

<sup>24</sup> Generalmente se toma como criterio que un valor superior a 3 es suficiente para afirmar que un coeficiente resulta estadísticamente significativo.

<sup>25</sup> Se considera que un valor superior a 6 es suficiente para que la capacidad explicativa del modelo pueda considerarse como adecuada.

curvas de regresión posibles, la curva de mínimos cuadrados es la que tiene el menor RECM.

Evidentemente, cuanto más pequeño es el error mejor es la predicción efectuada. La razón fundamental de la aplicación del criterio del ECM es que las estimaciones próximas al valor verdadero son “buenas” y las alejadas son “malas”, con independencia de la dirección de la discrepancia, y por eso se elevan al cuadrado todas las discrepancias y se promedian con posterioridad. Un estimador sesgado puede presentar, por lo tanto, un ECM más pequeño que otro insesgado si compensa con creces su sesgo por tener una variancia menor.

Bassman señaló en sus estudios que carece de sentido buscar información sobre el sesgo y la desviación cuadrática media de un estimador si los dos primeros momentos de dicho estimador no son finitos<sup>26</sup>. Pero sí tiene sentido, naturalmente, comparar las distribuciones de frecuencias de las estimaciones obtenidas por diferentes métodos, y la comparación entre las desviaciones cuadráticas medias o *standards* correspondientes a diversos estimadores proporciona siempre alguna información útil sobre la dispersión o variabilidad de las estimaciones, aún cuando puedan no existir los momentos apropiados de uno o más de los estimadores. Sería utilísimo, al cabo, que los estudios de Monte Carlo presentaran siempre las distribuciones de frecuencias completas de las estimaciones.

- **Coefficiente de desigualdad de Theil.** Viene dado por la expresión:

$$CDT = \frac{\sqrt{\sum (\hat{Y}_i - Y_i)^2}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n}}}$$

Este coeficiente varía entre cero y uno, indicando una mejor capacidad predictiva del modelo cuanto más se acerque a cero.

Cabe señalar que para la realización de los cálculos y determinaciones estadísticas anteriores, se ha aplicado el programa informático *Econometric-views*, cuyos resultados resumidos pueden verse en el Anexo nº:1 del presente libro.

#### 4.5.5. Clasificación de los cauces según las categorías de rugosidad

<sup>26</sup> R. L. BASMANN, “A Note on the Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in Two Leading Over-identified Cases”, en *Journal of the American Statistical Association*, 56. 1961. pp. 619-636. Citado en J. JOHNSTON, *Métodos de econometría*. Ed: Vicens-Vives. Barcelona, 1967.

Por último, veamos que las 12 categorías o clases de rugosidad de las paredes y solera de las conducciones libres a las que nos hemos referido aquí, que resultan útiles para la aplicación de las fórmulas universales propuestas por este autor para el cálculo de este tipo de cauces, podrían clasificarse así:

Tabla 1.7. Clasificación de los cauces según categorías de rugosidad

Clase de cauce	Categ. (K)	Rugosidad	Tipología del cauce
Cauces Artificiales	1	Muy baja	Acequias de riego y tuberías parcialmente llenas.
	2	“	
	3	Baja	Canales revestidos de hormigón.
	4	“	
	5	Media-baja	Canales revestidos de mampostería.
	6	“	
7	Media-alta	Canales excavados (sin revestir).	
8	“		
Cauces Naturales	9	Alta	Cauces naturales consolidados.
	10	“	
	11	Muy alta	Cauces naturales sin consolidar (en avenidas).
	12	“	

#### 4.5.6. Representación gráfica tridimensional de la función de ajuste

Veamos, como una simple curiosidad, que la representación gráfica de la función de ajuste obtenida en el espacio afin tridimensional euclídeo  $E_3$ , considerando las 12 categorías diferentes de rugosidad, aunque carezca de efectividad práctica, es la siguiente:

$$\lambda = R^{-0.3559} \cdot e^{-6.3388+0.2674 \cdot K}$$

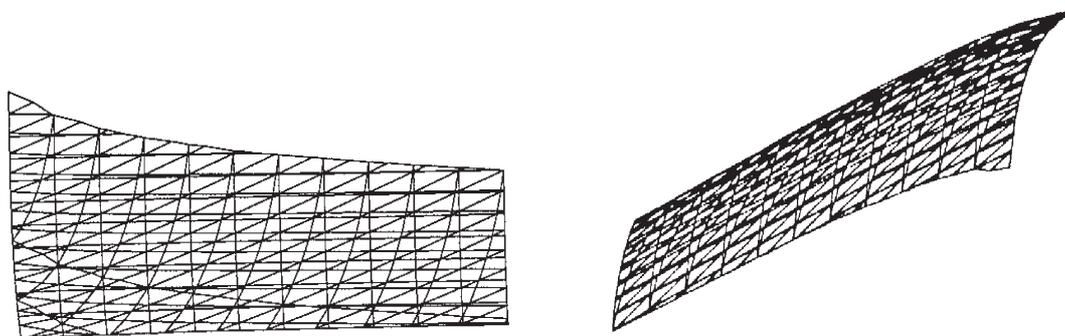


Fig. 1.8. Representación gráfica tridimensional

#### 4.5.7. Nuevas fórmulas para el cálculo de velocidades y caudales

Aplicando, ahora, la fórmula general de Darcy-Weissbach para las conducciones libres, a saber:

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \times \sqrt{R \cdot I} = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{\lambda}},$$

se tiene, para cada caso:

- **Categorías de rugosidad del 1 al 12:**

$$V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{R^{-0.3559} \times e^{-6.3388 + 0.2674 \times K}}} = 4.43 \times \sqrt{I \times R^{1.3559} \times e^{6.3388 - 0.2674 \times K}}$$

- **Categorías de rugosidad del 1 al 6:**

$$V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{R^{-0.3006} \times e^{-6.1766 + 0.2185 \times K}}} = 4.43 \times \sqrt{I \times R^{1.3006} \times e^{6.1766 - 0.2185 \times K}}$$

- **Categorías de rugosidad del 7 al 12:**

$$V = \sqrt{\frac{2g \cdot R \cdot I}{R^{-0.4112} \times e^{-6.8639 + 0.3236 \times K}}} = 4.43 \times \sqrt{I \times R^{1.4112} \times e^{6.8639 - 0.3236 \times K}}$$

El caudal de la conducción, por otra parte, en función del contorno o perímetro mojado  $c$  (teniendo en cuenta que:  $Q = S \cdot V$ ,  $R = S/c$ ), vendrá dado por las siguientes expresiones:

- **Categorías de rugosidad del 1 al 12:**

$$\begin{aligned} Q &= 4.43 \times R \times c \times \sqrt{I \cdot R^{1.3559} \cdot e^{6.3388 - 0.2674 \times K}} = \\ &= 4.43 \times c \times I^{0.5} \times R^{1.67795} \times e^{3.1694 - 0.1337 \times K} \end{aligned}$$

- **Categorías de rugosidad del 1 al 6:**

$$Q = 4'43 \times R \times c \times \sqrt{I \cdot R^{1'3006} \cdot e^{6'1766 - 0'2185 \times K}} =$$

$$= 4'43 \times c \times I^{0'5} \times R^{1'6503} \times e^{3'0883 - 0'10925 \times K}$$

- **Categorías de rugosidad del 7 al 12:**

$$Q = 4'43 \times R \times c \times \sqrt{I \cdot R^{1'4112} \cdot e^{6'8639 - 0'3236 \times K}} =$$

$$= 4'43 \times c \times I^{0'5} \times R^{1'7056} \times e^{3'43195 - 0'1618 \times K}$$

Obsérvese que la consideración, en las fórmulas expuestas, de las 12 categorías de rugosidad (K) de paredes y solera permite al calculista aplicar a dicho parámetro valores no enteros o intermedios entre 2 categorías correlativas, con lo que el margen de maniobra se amplía enormemente.

## 5. COMPORTAMIENTO HIDRÁULICO EN LAS CURVAS

### 5.1. PÉRDIDA DE CARGA: FORMULACIÓN TEÓRICA DEL PROCESO

En el caso de un codo o curva en un cauce natural, canal o acequia de riego o de desagüe, las partículas de agua, por su propia inercia, continúan el movimiento en la dirección primitiva, antes de seguir la nueva. Este hecho implica, como consecuencia, una sección contraída, seguida de un ensanchamiento que, según dedujo Borda, produce una cierta pérdida de carga. Si se representa por **b** la anchura, por **h** la profundidad (uniforme), por  $\beta$  el ángulo de ambas direcciones, por  $C_1$  y  $C_2$  dos constantes, y por  $\nu$  un pequeño número, Boussinesq<sup>27</sup> calculó las siguientes expresiones:

- Distancia de la sección contraída al punto de intersección de los ejes =

$$= C_1 \frac{b}{\beta} \left( \frac{b}{h} \right)^{1-\nu}$$

- Distancia de la sección contraída hasta la pared =  $C_1 b \left( \frac{b}{h} \right)^{1-\nu}$

- Distancia desde el punto de intersección de los ejes hasta aquella zona en que

los filetes líquidos vuelven a ser paralelos =  $C_2 \frac{b}{\beta} \left( \frac{b}{h} \right)^{1-\nu}$

A partir de aquí, Boussinesq considera a un trozo curvo de canal o de río como una sucesión continua de codos a los que aplica las anteriores expresiones,

<sup>27</sup> *Eaux courantes*, pág. 602; J. de math. (3) 9 (1883), pág. 129.

llegando a la consecuencia de que la pérdida de carga, por unidad de longitud de la conducción, puede expresarse bajo la forma:

$$\tau = \frac{V^2}{h} \sqrt{\frac{b}{\rho}} \left(\frac{b}{h}\right)^{\frac{1-3\nu}{2}}$$

en la que  $(1-3\nu)$  es un número muy pequeño,  $\tau$  una constante y  $\rho$  el radio de curvatura del filete medio (aproximadamente coincidente con el eje hidráulico). En consecuencia, siendo válida la expresión de Chèzy para los tramos rectos:  $V = C\sqrt{h \cdot I}$  (considerando, en cauces suficientemente anchos,  $h \approx R$ , tal como se apuntó en el epígrafe anterior 3.2.) para los tramos curvos resultará la expresión:

$$I = \frac{V^2}{h} \left( \frac{1}{C^2} + \tau_1 \sqrt{\frac{b}{\rho}} \right)$$

siendo  $\tau_1$  una nueva constante que, según los estudios de W. Lahmeyer<sup>28</sup>, vale aproximadamente  $\frac{3}{4} \times \frac{1}{C^2}$ , o sea que tiene las dimensiones  $m^{-1} \cdot s^{-2}$  ( $L^{-1} \cdot T^2$ ).

La representación gráfica sería la siguiente:

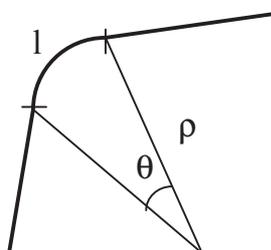


Fig. 1.9. Planta de la traza en tramo curvo de una conducción libre

De este modo, considerando más correctamente, para una conducción libre cualquiera, el valor del radio hidráulico en vez de la profundidad, la fórmula anterior quedaría expresada así:

$$I = \frac{V^2}{R} \times \frac{1}{C^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{b}{\rho}} \right)$$

que, escrita en función del coeficiente de Fanning, ofrece:

<sup>28</sup> Allgemeine Bauzeitung 17 (1852), pág. 153.

$$I = \frac{V^2 \times \lambda}{R \times 2g} \left( 1 + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{b}{\rho}} \right),$$

correspondiendo el primer término a las pérdidas de carga en los tramos rectos y el segundo al efecto de la curvatura de la traza del cauce. Solamente en canales o cauces naturales suficientemente anchos, la profundidad  $h$  es equivalente al radio hidráulico medio.

Así pues, el incremento de la pérdida de carga total debido a un tramo curvo de longitud  $l$ , será, teniendo en cuenta que:  $l = \rho \cdot \theta$  (expresando el ángulo de curvatura  $\theta$  en radianes):

$$\Delta I = \frac{0'75 \times V^2 \times \lambda}{R \times 2g} \left( \sqrt{\frac{b \times \theta}{l}} \right) \times l = \frac{0'038 \times V^2 \times \lambda}{R} \times \sqrt{b \times \theta \times l}$$

## 5.2. ELEVACIÓN DEL NIVEL DE LA LÁMINA DE AGUA EN LA ORILLA CÓNCAVA

En los tramos curvos, el punto más bajo o profundo de la sección transversal del cauce del río o canal se encuentra necesariamente próximo a la orilla exterior (cóncava) y en este punto, el nivel de la lámina de agua es más elevado. Sobre un filete líquido animado de la velocidad  $V$ , en la superficie de una curva del cauce actúan los siguientes esfuerzos: el peso  $G$  y la fuerza centrífuga:  $\frac{G}{g} \times \frac{V^2}{x}$ ; la superficie de nivel ha de ser normal a la resultante de la composición de ambas fuerzas y tiene, por tanto, la inclinación:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z} = \frac{\frac{G}{g} \times \frac{V^2}{x}}{G} = \frac{V^2}{g \times x}; \text{ o sea:}$$

$g \times dz = V^2 \times \frac{dx}{x}$ ; sencilla ecuación diferencial de variables separables que integrada ofrece:

$$g z = V^2 \cdot \ln x + C.$$

En el punto correspondiente de la orilla convexa ( $x = R_1$ ), la elevación del nivel del agua será nula ( $z = 0$ ), a saber:  $0 = V^2 \cdot \ln R_1 + C$ , con lo que, conociendo el valor de la constante de integración, se tiene:

$$g z = V^2 \cdot \ln x - V^2 \cdot \ln R_1 = V^2 \cdot \ln \frac{x}{R_1};$$

por lo que se obtiene como ecuación de la línea de nivel -si admitimos que la velocidad  $V$  está repartida uniformemente por la sección- la expresión:

$$z = \frac{V^2}{g} \times \ln \frac{x}{R_1}$$

La máxima elevación del nivel del agua se producirá en la orilla exterior o cóncava ( $x = R_2$ ), que es la que puede resultar mayormente afectada, con lo que:

$$h = \frac{V^2}{g} \times \ln \frac{R_2}{R_1} = 2.3 \times \frac{V^2}{g} \times \log \frac{R_2}{R_1} = K \times V^2 = f(V)$$

siendo:

$$g = \text{aceleración de la gravedad} = 9.806 \text{ m/seg}^2.$$

$$R_1 = \text{radio de curvatura de la orilla interior.}$$

$$R_2 = \text{radio de curvatura de la orilla exterior.}$$

$$K = \text{constante.}$$

$$x = \text{abscisa.}$$

$$\rho = \text{radio de curvatura medio} = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

De la deducción teórica anterior se infiere que dicha elevación es función no sólo de los radios de curvatura de ambas orillas del río o cauce artificial, sino también de la velocidad del agua que, como ya se ha explicado anteriormente, puede acrecentarse como consecuencia del estrechamiento del cauce a causa de los pilares de sostenimiento o los estribos de un puente, la salida de un túnel o acueducto, obstáculos sumergidos, etc.

Obsérvese, por otra parte, la especial gravedad que entraña el hecho de que la velocidad figure en términos cuadráticos en la expresión anteriormente calculada, lo que provocaría, v. gr., que a un aumento perfectamente admisible del 20% (por efecto de las obras de fábrica mencionadas) en la velocidad del agua correspondería un incremento del nivel en la orilla exterior de:

$$h' = K \cdot V'^2 = K \cdot (1.20 \cdot V)^2 = K \cdot 1.44 \cdot V^2 = 1.44 \cdot h$$

lo que implica un aumento del **44%** en la elevación del nivel del agua en la orilla cóncava. Estas variaciones de nivel de la superficie libre influyen sobre la ley del movimiento del líquido en la curva, ya que la pendiente, y por tanto la velocidad, aumentan al final de una orilla cóncava y disminuyen al final de una convexa. También resulta evidente que la socavación o aterramiento del cauce natural se

manifiesten a alguna distancia aguas debajo de las zonas de las orillas causantes de aquellos.

Por otra parte, dicha elevación de nivel corresponde, más o menos, a aquella parte de sección en la que la corriente lleva la velocidad  $V$ . En el álveo es menor y los filetes fluidos son desviados hacia la zona de menor presión, es decir, hacia la parte interior de la curva. Para reemplazar estos filetes desviados, las capas superficiales, más rápidas, bajan al llegar a la orilla, **estableciéndose así un movimiento helicoidal que, en el caso de los cauces térreos, provoca el derrubio del lecho en la parte exterior de la curva**. Ello originará un ensanchamiento del río o canal que será creciente hasta el máximo relativo o local de la curva, afectando de una manera clara y desfavorable a la orilla cóncava. Posteriormente, esta corriente espiral arrastra el material acarreado desde la orilla cóncava hasta el escarpe interior de la hondonada (la tendencia de los materiales arrastrados a reunirse en la orilla interior o convexa del río se debe a un efecto de la fuerza centrípeta sobre la masa de agua en movimiento turbillonario); la arena fina salta por encima de este talud y llega a la orilla opuesta, mientras los acarreos gruesos no pueden ser levantados y quedan aprisionados en aquel cuenco. Resulta fácil comprender, a mayor abundamiento, que si los sedimentos constitutivos de la orilla cóncava son finos de granulometría (limos y arcillas), la facilidad con que serán arrastrados por el proceso erosivo descrito será tanto mayor.

Veamos, en fin, que en las curvas de los cauces naturales, la profundidad del agua es, pues, irregular, lo que hace que la cantidad de arrastres sea mayor, supuesta una misma profundidad media, que si dicha profundidad fuese constante. El cauce será socavado, aumentando la sección hasta que los arrastres tengan igual valor que en los tramos rectos del río o torrente.

### 5.3. DEFENSA CONTRA LOS EFECTOS NEGATIVOS EXPUESTOS

Evidentemente, y con el fin de prevenir los efectos negativos descritos en los epígrafes precedentes sobre la orilla exterior, sería necesario el revestimiento de la margen correspondiente del río para protegerla contra socavaciones o filtraciones inferiores y conservar el cauce dentro de las líneas anteriormente establecidas. La acción erosiva de la corriente es más pronunciada al pie de los taludes, de ahí que su defensa daba ser más robusta que en la parte superior, donde sólo conviene proteger la orilla contra el desgaste por encima de las aguas medias. En cualquier caso, el sistema de revestimiento más adecuado (empedrado, escollera, fajinas, cintas, tablestacados, gaviones, muros de hormigón en masa, ciclópeo o armado, ... etc.) se decidirá en vista de la máxima fuerza de arrastre posible en las crecidas y de si cabe racionalmente la formación de notables hondonadas en el álveo.

En cualquier caso, en las defensas fluviales la elección del sistema de construcción se acomodará a los materiales de que se disponga en la zona, al impacto medioambiental o de tipo visual-paisajístico, a la mayor o menor fuerza de la corriente y a la movilidad del cauce del río, así como a los ataques que debe resistir la obra concluida. Siempre que sea posible, se procurará ejecutar la obra cuando el nivel del agua sea más somero.

## 6. ESTUDIO DE LA FUNCIÓN $\lambda = f(R)$

### 6.1. LA CONCEPCIÓN TEÓRICA DEL PROBLEMA

Es posible y aconsejable, en nuestro caso, el estudio de la distribución del coeficiente de Fanning según los radios hidráulicos medios y las diferentes categorías de rugosidad (12). Así, dicha distribución respondería a una función hiperbólica del tipo:

$$\lambda = A/(R-a)^\alpha = f(R) ,$$

donde:

a = valor del radio hidráulico medio R más pequeño (m.).  
 $\lambda$  = coeficiente de Fanning correspondiente a un determinado radio hidráulico R.  
 R = radio hidráulico medio (m.), variable independiente.  
 A y  $\alpha$  = parámetros adimensionales que definen la distribución que nos ocupa para cada una de las doce categorías de rugosidad (K).

Es perfectamente lógico que la curva en cuestión sea asintótica (tenga ramas hiperbólicas) para:  $R=a$  y  $\lambda=0$ , o sea:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} A/(R-a)^\alpha = A/\infty = 0 , \text{ (asíntota horizontal, paralela al eje OR, coincidiendo con el eje de abscisas).}$$

$$\lim_{R \rightarrow a} A/(R-a)^\alpha = A/0 = \infty , \text{ (asíntota vertical, paralela al eje O}\lambda\text{).}$$

Su representación gráfica simplificada, nos llevaría a la siguiente configuración, donde el valor del radio hidráulico mínimo de un conjunto

observado o proyectado de conducciones libres constitutivas de una cierta zona regable actuará de cota inferior, así:

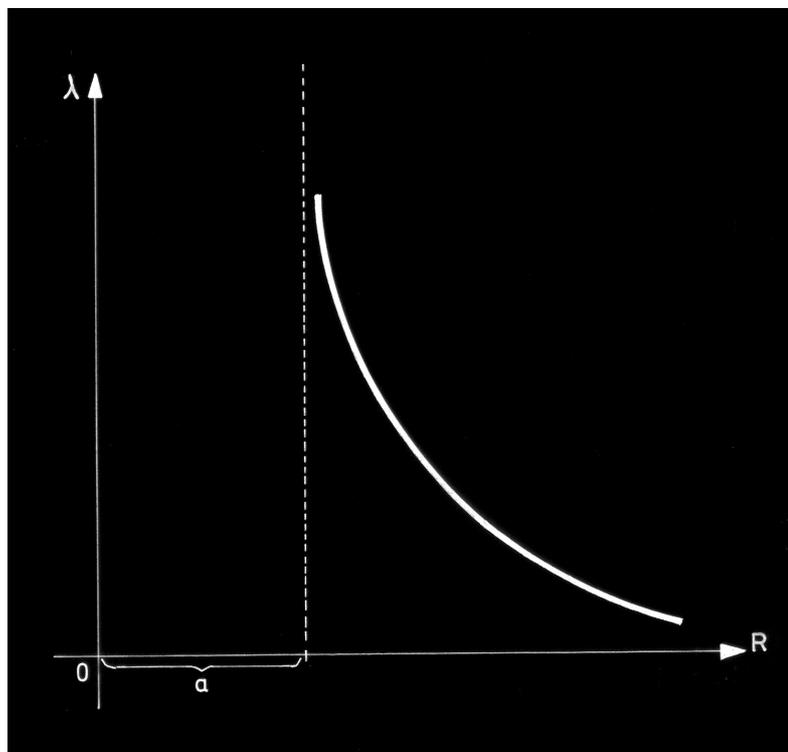


Fig. 1.10. Representación gráfica simplificada de la función  $\lambda = f(R)$

Si ahora desplazamos el eje de ordenadas hasta el punto :  $R = a$ , entonces la función estudiada se convertirá en, simplemente:

$$\lambda = A/R^\alpha = A \cdot R^{-\alpha}$$

en la que hemos considerado que:  $a = 0$ , o sea, el valor de  $R$  más pequeño es nulo o, al menos, inapreciable ( $a = 0'01$  m. en las tablas consideradas). De esta manera, el sentido de la variabilidad de las dos variables  $\lambda$  y  $R$  es contrario para cada categoría de rugosidad  $K$ , como puede contemplarse en las tablas correspondientes.

Se tratará, en definitiva, del ajuste de una función potencial por técnicas de regresión no lineal mínimo-cuadrática.

Evidentemente, la expresión anterior se puede escribir (tomando logaritmos naturales o neperianos) así:

$$\ln \lambda = \ln A - \alpha \cdot \ln R$$

Un valor de la unidad para  $\alpha$  ofrece una cónica hipérbola rectangular, o sea que tratase del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su producto de coordenadas ( $R \cdot \lambda$ ) es una constante, A. Así:

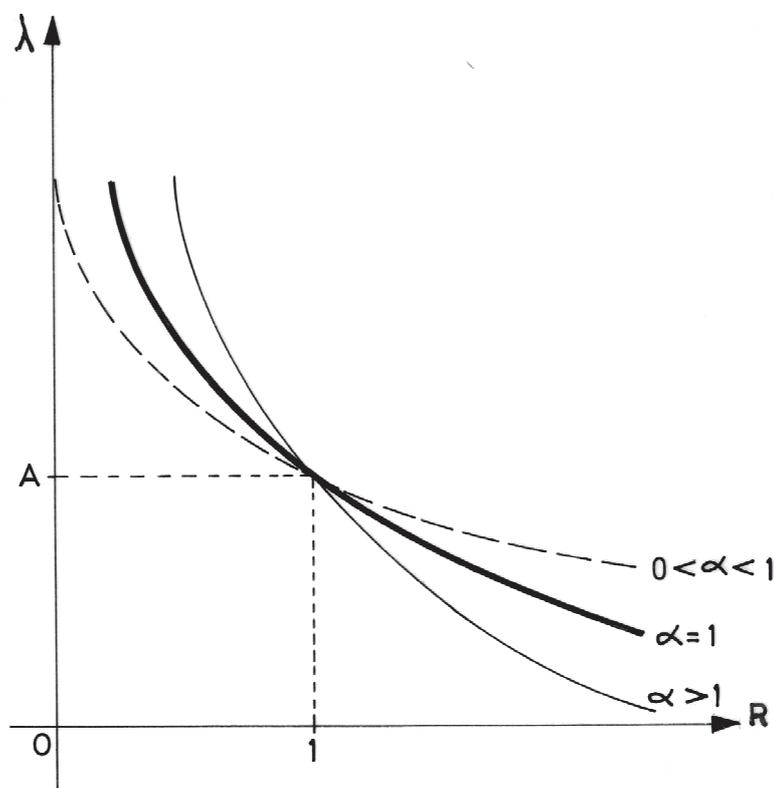


Fig.1.11. Función  $\lambda = f(R)$  según los valores de  $\alpha$ .

De hecho, esta transformación doblemente logarítmica se utiliza frecuentemente en Estadística porque corresponde al supuesto de una **elasticidad constante** entre  $\lambda$  y  $R$ , y la simple aplicación de los métodos lineales a los logaritmos de las variables proporciona directamente una estimación de esta elasticidad.

## 6.2. SIGNIFICACIÓN DEL PARÁMETRO $\alpha$

### 6.2.1. En relación al coeficiente de Fanning

Veremos el significado del parámetro  $\alpha$ , para la cual expondremos diferentes interpretaciones, algunas de ellas en contradicción aparente. A saber:

La función que nos ocupa, de dibujarse a escala doblemente logarítmica, es una recta. En efecto, tomando logaritmos neperianos o naturales en la expresión inicial, se obtiene:

$$\ln \lambda = \ln A - \alpha \cdot \ln R = \beta - \alpha \cdot \ln R$$

donde se ha substituido:  $\ln A = \beta$ .

Si ahora representamos esta recta, resulta que  $-\alpha$  es el coeficiente angular o pendiente negativa de dicha recta, dado que la derivada de esta función vendrá dada por:  $d(\ln \lambda)/d(\ln R) = -\alpha$ . Así:

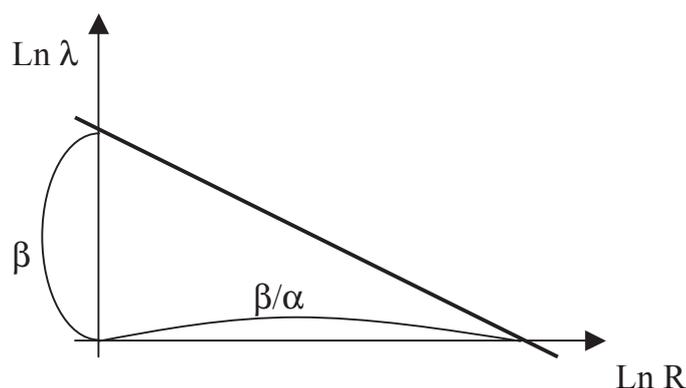


Fig. 1.12. Representación logarítmica de la función  $\lambda = f(R)$

Si calculamos ahora la elasticidad de la función anterior (hemos de recordar que el concepto teórico de elasticidad de la función  $\lambda$  viene dado por el límite del cociente de los incrementos relativos de esta función y de la variable  $R$  independiente o explicativa “radio hidráulico medio”, cuando el incremento absoluto de esta última tiende a cero), se obtiene:

$$\frac{E\lambda}{ER} = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta \lambda / \lambda}{\Delta R / R} = \frac{d \ln \lambda}{d \ln R} = \frac{d \lambda / \lambda}{d R / R} = \frac{R}{\lambda} \times \frac{d \lambda}{d R} = \frac{R}{AR^{-\alpha}} A(-\alpha)R^{-\alpha-1} = -\alpha$$

Entonces  $\alpha$  es el coeficiente de elasticidad de la función  $\lambda = f(R)$  que estamos buscando.

Como ya se ha demostrado:  $E\lambda/ER = -\alpha$

pero:  $E\lambda/ER = d\lambda/\lambda \div dR/R$ , entonces se tendrá:  $d\lambda/\lambda \div dR/R = -\alpha$

y, operando convenientemente, resultará la ecuación diferencial de variables separadas:

$$d\lambda/\lambda = -\alpha \cdot dR/R \quad (1)$$

siendo:  $d\lambda/\lambda$  el decrecimiento relativo del coeficiente de Fanning cuando se produce una variación del radio hidráulico  $R$ .

En efecto, integrando mediante una simple cuadratura, en la ecuación anterior (1), obtendremos:

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = -\alpha \times \int \frac{dR}{R} \quad ; \text{ de donde:}$$

$\ln \lambda = -\alpha \cdot \ln R + \ln A = \ln (AR^{-\alpha})$ , de donde se reconstruye la integral general:

$$\lambda = A \cdot R^{-\alpha} ,$$

donde los diferentes valores de la constante  $A$ , específicos de cada categoría de rugosidad, nos darán otras tantas integrales particulares.

De la ecuación (1) podemos extraer la siguiente interpretación del parámetro  $\alpha$ : **Es la relación existente entre el decrecimiento relativo del coeficiente de Fanning y el crecimiento del radio hidráulico de la conducción.** Además el signo negativo de la ecuación (1) es perfectamente lógico, ya que significa que un crecimiento o decrecimiento del radio hidráulico originará, respectivamente, una disminución o aumento del coeficiente de Fanning, como puede observarse en las tablas calculadas al efecto y obrantes en el Anexo n°: 1 de este libro.

Si consideramos la variación absoluta del radio hidráulico como constante, o sea:  $dR=\text{cte.}$ , entonces  $dR/R$  (crecimiento relativo de  $R$ ) disminuye cuando  $R$  aumenta. De aquí se puede deducir la siguiente conclusión: *El decrecimiento relativo del coeficiente de Fanning a medida que el radio hidráulico  $R$  aumenta es cada vez más pequeño, y la disminución del mismo es proporcional al nivel absoluto ( $R$ ) del radio hidráulico  $R$ .* También dicha propiedad puede comprobarse de la contemplación de la tabla de los coeficientes promedios  $\lambda$  de Fanning que figura en el Anexo n°:1 citado.

En efecto, la ecuación (1) nos dice que:

$$d\lambda/\lambda = -\alpha \cdot dR/R$$

Si consideramos  $dR=\text{cte.}$   $\rightarrow dR/R$  disminuye al crecer  $R$ . Por otra parte, es una constante, pero  $d\lambda/\lambda$  sólo depende de  $dR/R$  y, en definitiva, por ser:  $dR=\text{cte.}$ , sólo depende de  $R$ , de manera que, el cociente  $d\lambda/\lambda$  (decrecimiento relativo del coeficiente de Fanning) depende solamente del valor del radio hidráulico y, naturalmente, del valor del coeficiente  $\alpha$ <sup>29</sup>.

<sup>29</sup>También otra manera de enunciar esta ley es que “a medida que aumenta el radio hidráulico  $R$ , resulta más fácil pasar a un nivel de  $R$  superior”.

Si hacemos  $dR/R = \text{cte}$ . Entonces la variación relativa del coeficiente de Fanning ( $d\lambda/\lambda$ ) es proporcional al parámetro  $\alpha$  (ver la anterior ecuación 1). Si  $\alpha$  es grande, una variación porcentual pequeña del radio  $R$  asignará una variación grande del coeficiente de Fanning, y viceversa si  $\alpha$  es pequeña, sucede justamente lo contrario. Podría decirse, pues, que la distribución varía con el valor del parámetro  $\alpha$ .

Antes de dar otra interpretación del parámetro  $\alpha$ , hemos de hacer, a efectos clasificadores, un desarrollo estadístico teórico de la función estudiada.

Definimos la función  $\lambda = f(R)$  como aquella que nos da el coeficiente de Fanning en función de  $R$ ; pero también se puede definir en términos de probabilidad o de frecuencia relativa, así: *La función  $\lambda = f(R)$  ofrece la probabilidad de que el radio hidráulico medio alcance valores superiores a un valor predeterminado  $R$* . Precisamente, esta definición nos resultará altamente útil para abordar los conceptos expuestos en el epígrafe siguiente de nuestro estudio.

En efecto, expresado matemáticamente, tenemos que:

$$P(R) = A \cdot R^{-\alpha} = \Pr(\varepsilon > R)$$

O sea, la probabilidad de que la variable aleatoria estadística  $\varepsilon$  sea mayor que 0.

Recordando que las funciones de distribución de una variable aleatoria estadística  $R$  se definen por:

$$F(R) = \Pr(\varepsilon \leq R)$$

podemos relacionar la función  $P(R)$  con la función de distribución del radio hidráulico medio  $F(R)$  de la siguiente forma:

$$F(R) = 1 - P(R) = 1 - A \cdot R^{-\alpha} \quad (2)$$

ya que los sucesos son contrarios o complementarios y la relación precedente (2) es la que liga las equiprobabilidades laplacianas, en estos casos.

La función de densidad será, pues, la función derivada:

$$f(R) = F'(R) = d/dR (1 - A \cdot R^{-\alpha}) = (\alpha \cdot A) / (R^{\alpha+1}) \quad (*)$$

---

(\*) Para más especificaciones se puede ver el anejo núm.: 3 titulado: *Restantes especificaciones metodológicas*.

Si queremos saber, v. gr., cuál es la proporción de valores de  $\lambda$  en que su radio medio  $R$  se encuentra entre dos valores dados  $R_1$  y  $R_2$ , operaremos de la siguiente manera, teniendo en cuenta la propiedad aditiva del intervalo de integración  $[R_1, R_2]$  o relación de Chasles y la posterior aplicación de la regla de Barrow:

$$\int_{R_1}^{R_2} f(R) \cdot dR = [F(R)]_{R_1}^{R_2} = F(R_2) - F(R_1) = (1 - A \cdot R_2^{-\alpha}) - (1 - A \cdot R_1^{-\alpha}) = A \cdot (R_1^{-\alpha} - R_2^{-\alpha})$$

### 6.2.2. En relación a la distribución de los valores de $R$ en una zona regable

Otra interpretación interesante que se extrae del estudio analítico de la función  $\lambda = f(R)$  deriva de cambiar el concepto de la variable funcional de dicha expresión. En efecto, substituyendo el concepto de  $\lambda$  (coeficiente de Fanning) por el del número de conducciones libres existentes en las diferentes subzonas de una zona regable, podremos estudiar la distribución de cualquier variable hidráulica de interés (caudales, presiones, diámetros, velocidades de circulación del agua, etc.), y particularmente de los radios hidráulicos medios de las diferentes conducciones (v. gr., acequias a cielo abierto). En este caso,  $\lambda$  nos ofrecerá el nº de conducciones libres de la subzona regable cuyo radio hidráulico medio es superior a un cierto valor de  $R$  prefijado. También del estudio de los diferentes valores del parámetro  $\alpha$  según las diversas funciones obtenidas para cada subzona o unidad de actuación, podremos establecer comparaciones entre ellas por lo que se refiere al equilibrio en su distribución, de tal modo que cuanto mayor sea el valor de dicho parámetro, mejor será también la distribución de la variable hidráulica que nos ocupe.

De hecho, el tema de la uniformidad en la distribución de las variables hidráulicas por una zona regable (o por un área a sanear, si se trata de un proyecto de avenamiento o drenaje agrícola), como la  $R$ , será objeto de un estudio más profundo y específico en el capítulo III de nuestro libro. Enfocando así el problema, las figuras anteriores nos darán el nº de conducciones (acequias o desagües) cuyo radio hidráulico medio es mayor que un valor determinado de  $R$ , mientras que el parámetro  $\alpha$  constituirá una medida de la uniformidad de la distribución de los radios hidráulicos medios de las diferentes conducciones (libres o forzadas) a lo largo y ancho de la zona regable en estudio. Dicha medida, como es lógico, tiene tanto sentido estudiarla para el caso del diseño de una red como para la evaluación posterior de la uniformidad de la misma, pudiendo constituir un parámetro de calidad de dicha red.

Si ahora llamamos a  $= R_0$  al nivel mínimo de los radios hidráulicos medios considerados, que en las tablas que presentamos ofrece un valor:  $R_0 = a = 0'01$  m., la  $P(R_0) = 1$ , que es la probabilidad total, pues, parece claro que todas las conducciones tendrán, como mínimo, este valor de su  $R$ . Como que:  $P(R_0) =$

$A \cdot R_0^{-\alpha} = 1$ , podemos deducir el valor de la constante:  $A = R_0^\alpha$  y sustituyendo las fórmulas obtenidas hasta aquí, nos aparecen las nuevas expresiones, de gran utilidad, a saber:

$$P(R) = (R_0/R)^\alpha \quad (3)$$

sólo definida para  $R > R_0$  ya que  $R_0$  es el nivel mínimo y además porque la probabilidad no puede ser, en ningún caso, mayor de la unidad. De otro modo:

$$F(R) = 1 - (R_0/R)^\alpha \quad (4), \text{ y su derivada será:}$$

$$f(R) = \frac{\alpha \cdot R_0^\alpha}{R^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{R_0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{\alpha+1} = \frac{\alpha}{R} \times \left( \frac{R_0}{R} \right)^\alpha \quad (5)$$

que tomará el valor 0 si  $R \leq R_0$ .

Vamos a calcular, seguidamente, la esperanza matemática o valor medio de la distribución continua de los radios hidráulicos medios que, como sabemos, vendrá dada por la expresión:

$$E(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} R \cdot f(R) \cdot dR$$

Como en este caso de distribución de la variable  $R$ , estos límites de integración no varían de  $-\infty$  a  $+\infty$  sino que están acotados inferiormente por el valor  $R_0 < R, \forall R$ , la esperanza matemática será:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon) &= \int_{R_0}^{+\infty} R \cdot f(R) \cdot dR = \int_{R_0}^{+\infty} R \cdot \frac{\alpha}{R_0} \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^{\alpha+1} dR = \int_{R_0}^{+\infty} R^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot R_0^\alpha \cdot dR = \\ &= \alpha \cdot R_0^\alpha \cdot \int_{R_0}^{+\infty} R^{-\alpha} \cdot dR = -\frac{\alpha \cdot R_0^\alpha}{\alpha-1} \cdot \left[ \frac{1}{R^{\alpha-1}} \right]_{R_0}^{+\infty} \end{aligned}$$

, que es una integral impropia de primera o bien de tercera especie, en función de la continuidad o no de la expresión que conforma el integrando o función subintegral.

Esta expresión, sin embargo, carece de sentido si  $\alpha \leq 1$ . En efecto, analizamos los dos casos:

a) Si  $\alpha = 1 \rightarrow E(\varepsilon) = - (R_0/0) \cdot [(1/\infty^0) - (1/R_0^0)]$   
que es indeterminado.

b) Si  $\alpha < 1 \rightarrow E(\varepsilon) = - (\alpha \cdot R_0^\alpha)/(\alpha-1) \cdot [1/R^h - 1/R_0^h]$

siendo  $h < 0$ , razón por la que, al sustituir los límites, nos sale la esperanza matemática de valor infinito, circunstancia que no es posible en ningún caso. Sólo es factible, efectivamente, para el caso  $\alpha > 1$  en que la esperanza matemática vale:

$$E(\varepsilon) = -\frac{\alpha \cdot R_0^\alpha}{\alpha - 1} \left[ \frac{1}{\infty^{\alpha-1}} - \frac{1}{R_0^{\alpha-1}} \right] = \frac{\alpha \cdot R_0^\alpha}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{R_0^{\alpha-1}} = \frac{\alpha \cdot R_0}{\alpha - 1}$$

$$\text{Ahora bien: } E(\varepsilon) = \bar{X} = \frac{\alpha \cdot R_0}{\alpha - 1}$$

siendo  $\bar{X}$  la media aritmética de los radios hidráulicos de la subzona regable en estudio.

De aquí, podemos extraer una interpretación interesante del parámetro  $\alpha$ , a saber:

$$\bar{X} = \frac{\alpha \cdot R_0}{\alpha - 1} \quad ; \quad \bar{X} \cdot \alpha - \bar{X} = \alpha \cdot R_0 \quad ; \quad \alpha(\bar{X} - R_0) = \bar{X} \rightarrow \alpha = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - R_0}$$

Así pues, a mayor diferencia existente entre el radio medio y el radio mínimo de la zona regable (esto es, a  $|\bar{X} - R_0|$  mayor) el valor del parámetro  $\alpha$  es menor y viceversa, como tendremos ocasión de comprobar en los casos prácticos. Pero el hecho de que, en una determinada subzona regable, el radio medio y el radio mínimo sean más o menos próximos o distantes puede relacionarse con la mayor o menor uniformidad en la distribución de la variable hidráulica analizada  $R$ ; entonces, según esta interpretación, para un coeficiente  $\alpha$  mayor la uniformidad hidráulica es también mayor y recíprocamente. También podremos corroborar que la distribución de  $R$  será tanto más equilibrada cuanto menores sean las diferencias existentes entre las diversas subzonas. Lo mismo puede afirmarse de las restantes variables hidráulicas cuya uniformidad en su distribución, por una zona regable cualquiera, se pretenda analizar.

Hay que tener en cuenta, por otra parte, que el empleo del coeficiente  $\alpha$  como medida de la uniformidad en la distribución por un territorio de una cierta variable hidráulica puede resultar inconveniente en el caso de que la función de ajuste estadístico MCO potencial en cuestión no resulte suficientemente relevante acerca del comportamiento de ambas variables del problema, lo que nos obligaría a buscar otros índices o parámetros indicadores más fiables. Veamos, en este sentido, que en el capítulo III de este libro se propone la utilización alternativa del índice de Gini, del índice de concentración y la curva de Lorenz o bien del índice de Williamson, para solventar exitosamente dicha circunstancia.

En efecto, en el capítulo III se analiza la distribución, como variable hidráulica, del caudal expresado en litros/segundo de 1.000 acequias de riego por una extensa zona regable. El menor valor de dicha variable corresponde a un gasto de cuantía:

$$x_0 = a = 120 \text{ l./seg.},$$

con lo que podemos elaborar la siguiente tabla con las frecuencias acumuladas descendentes  $N_i \downarrow$ , siendo  $x_i$  el nivel del caudal e  $y_i$  el número de conducciones abiertas de caudal superior a  $x_i$ :

$x_i$	$y_i$	%
120	1.000	100'0
150	997	99'7
155	982	98'2
160	932	93'2
165	692	69'2
170	380	38'0
175	145	14'5
180	37	3'7

Tabla 1.8. Frecuencias acumuladas descendentes

Pues bien, si ahora intentásemos ajustar, a esta distribución de frecuencias, una expresión potencial del tipo:  $y = A \cdot x^{-\alpha}$ , como la que venimos estudiando hasta ahora, resultaría lo siguiente:

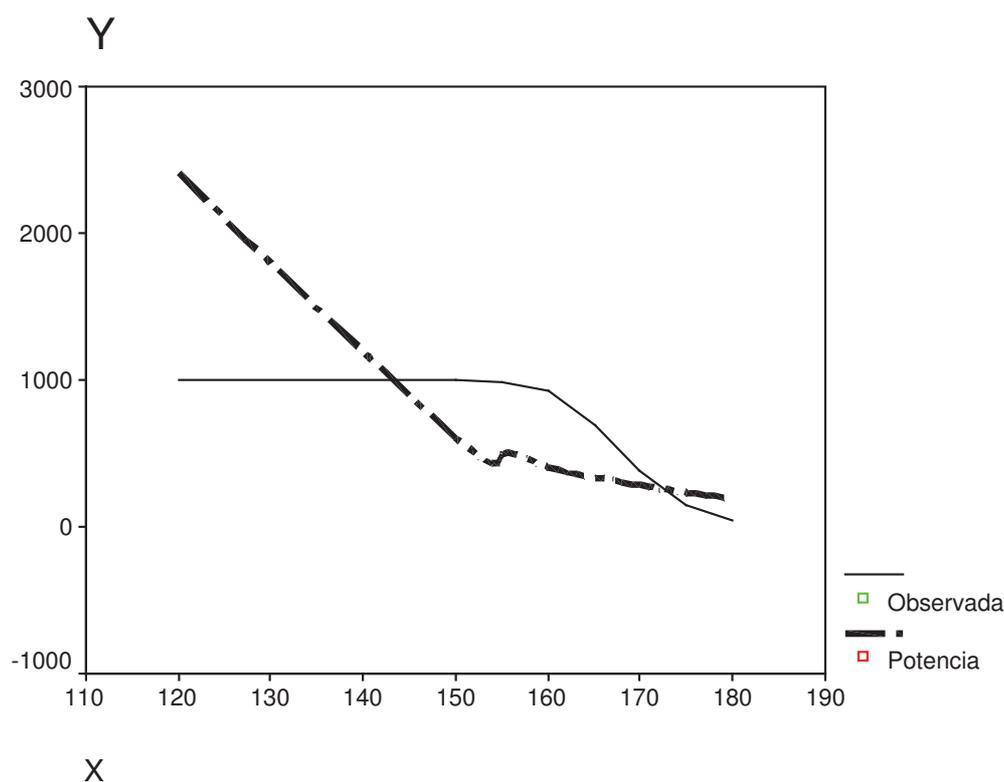
Variable independiente: X

V.Dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1
<b>Y</b>	<b>POW</b>	<b>,427</b>	<b>6</b>	<b>4,48</b>	<b>,079</b>	<b>1,7E+16</b>	<b>-6,1771</b>

que ofrece la expresión analítica:

$$\mathbf{Y = 1,7e16 \cdot x^{-6,1771}}$$

con la siguiente representación gráfica:



, con valores muy bajos de  $R^2$  y de  $F$ , por lo que descartamos, en este caso, su aplicación. La mera contemplación del gráfico anterior reafirma, sin duda alguna, lo aseverado.

De cualquier modo, nos remitiremos al capítulo III para ampliar conceptos sobre la uniformidad en la distribución de las variables hidráulicas por un territorio de actuación infraestructural, cuyo estudio aquí sólo hemos esbozado.

### 6.3. FUNCIÓN LOGARÍTMICO-NORMAL O ECUACIÓN DE MC ALISTER

Si obtenemos la elasticidad de la función de frecuencia de la función  $\lambda = f(R)$ , como ya se ha visto:

$f(R) = F'(R) = (\alpha \cdot A)/R^{\alpha+1}$ , y la elasticidad correspondiente es constante y menor que la unidad, ya que:

$$\begin{aligned} Ef(R)/ER &= \frac{df(R)}{dR} \cdot \frac{R}{f(R)} = \\ &= - \frac{\alpha \cdot A \cdot (\alpha + 1) \cdot R^{-\alpha}}{R^{2\alpha+2}} \cdot \frac{R \cdot R^{\alpha+1}}{\alpha \cdot A} = -\alpha - 1 \end{aligned}$$

Otro modelo de distribución de los radios hidráulicos medios R podría ser aquel que tiene una elasticidad que es función lineal del logaritmo neperiano de R (variable independiente), esto es:

$$Ef(R)/ER = -m \cdot \ln R + n$$

El signo menos aparece ya que la elasticidad mide la variación porcentual del número de conducciones (o del coeficiente de Fanning) correspondiente a una alteración porcentual del radio hidráulico y estos movimientos son, precisamente, de sentido contrario. Por otra parte, es lógico que la elasticidad dependa del nivel del radio hidráulico (R) o bien de una función del mismo ( $\ln R$ ).

Vamos a calcular, ahora, la  $f(R)$  a partir de la elasticidad mediante integración:

$$Ef(R)/ER = \frac{d \ln f(R)}{d \ln R} = -m \cdot \ln R + n ; d \ln f(R) = (-m \cdot \ln R + n) d \ln R$$

$$\begin{aligned} \ln f(R) &= \int (-m \cdot \ln R + n) d \ln R = \int (-m \cdot \ln R + n) \cdot \frac{dR}{R} = \\ &= \int \frac{n}{R} dR - m \int \frac{\ln R}{R} dR = n \ln R - \frac{m}{2} (\ln R)^2 + C \end{aligned} \quad (6)$$

Ahora bien, si consideramos la función de densidad de la distribución normal del logaritmo del radio medio hidráulico, o sea:

$$f(R) = \frac{1}{\sigma \cdot R \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln R - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

y operando con ella tomando logaritmos neperianos o naturales, se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln f(R) &= -\ln(\sigma \cdot R \cdot \sqrt{2\pi}) - (1/2\sigma^2) \cdot (\ln R - \mu)^2 = \\ &= -\ln R - \ln(\sigma \cdot \sqrt{2\pi}) - (1/2\sigma^2) \cdot [\ln^2 R + \mu^2 - 2(\ln R)\mu] = \\ &= \ln R [-1 + (\mu/\sigma^2)] + \ln^2 R (-1/2\sigma^2) - [(\mu^2/2\sigma^2) + \ln(\sigma \sqrt{2\pi})] \end{aligned}$$

Como  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes (respectivamente, media aritmética y desviación típica o “standard”) para la población en estudio, si llamamos:

$$\begin{cases} (-1 + \frac{\mu}{\sigma^2}) = n \\ \frac{1}{2\sigma^2} = \frac{m}{2}; \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{m}}; \\ -\left[ \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) \right] = C \end{cases}$$

, nos queda la siguiente expresión:

$$\ln f(\mathbf{R}) = n \cdot \ln \mathbf{R} - m/2 (\ln \mathbf{R})^2 + C$$

que coincide con la expresión (6) encontrada antes para la distribución que tiene la elasticidad función lineal de  $\ln R$ ; entonces aquella distribución es la logarítmico-normal.

La forma o configuración gráfica de la función de frecuencia de esta distribución es, consecuentemente, campaniforme.

*Ejemplo de aplicación:*

Un caso aplicable a los efectos que se pretende sería el constituido por la gran zona regable compuesta por 1.000 acequias del ejemplo práctico propuesto en el epígrafe 6. del capítulo III de este mismo libro, donde la variable hidráulica estudiada es el caudal máximo circulante, expresado en litros/segundo, de cada conducción libre. A él nos remitimos para el logro de mayores especificaciones y detalles.

#### 6.4. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Los diferentes coeficientes de correlación no lineal obtenidos, en cada caso, se consideran muy aceptables, con un máximo para las categorías de rugosidad  $K = 3$  y  $K = 4$  y un mínimo para  $K = 11$ , como puede comprobarse en el punto 4.1. anterior. Por otra parte, por lo que se refiere a la fiabilidad de los mencionados coeficientes de correlación, podemos definir la variable aleatoria o estadígrafo (denominada “transformación de Fisher”) siguiente:

$$Z = \frac{1}{2} \cdot \ln [(1+r)/(1-r)] = 1,1513 \log [(1+r)/(1-r)], \quad e^{eZ} = (1+r)/(1-r)$$

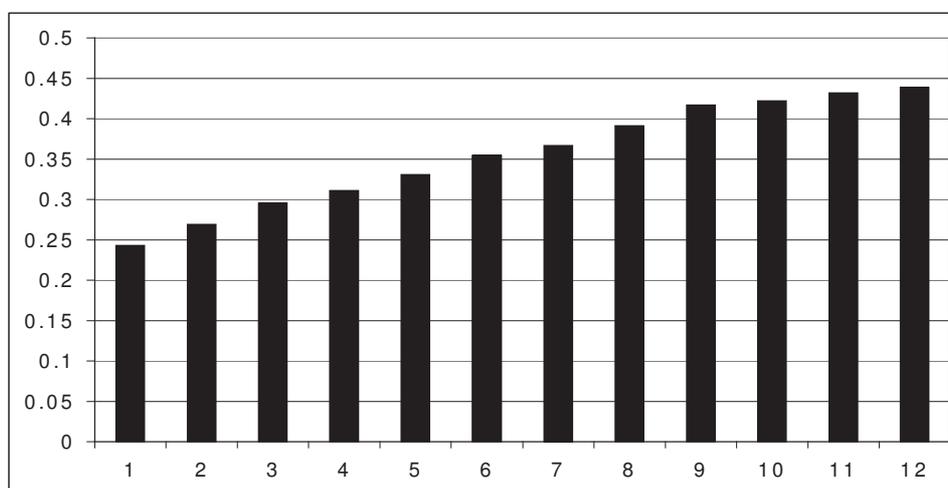
que se distribuye de manera aproximadamente normal. Realizadas las operaciones correspondientes (como ya se ha hecho en otros epígrafes de este mismo libro), el resultado obtenido resulta plenamente satisfactorio en todos los casos analizados.

Una vez conocidos el valor del parámetro  $\alpha$ , podemos establecer el siguiente cuadro comparativo entre las diferentes categorías de rugosidad:

Tabla 1.9. Valor del parámetro  $\alpha$ 

K	$\alpha$
1	0'2430
2	0'2691
3	0'2952
4	0'3112
5	0'3308
6	0'3545
7	0'3665
8	0'3914
9	0'4166
10	0'4222
11	0'4332
12	0'4384

A continuación, puede verse un gráfico del tipo histograma (o mejor aún, diagrama de barras verticales) referente a los valores correspondientes, para cada categoría de rugosidad, del parámetro  $\alpha$ . A saber:

Fig. 1.13. Valores del parámetro  $\alpha$  para cada una de las diversas categorías de rugosidad

## 7. APLICACIONES HIDRÁULICAS DE LOS TEOREMAS DEL VALOR MEDIO Y DE CAUCHY

### 7.1. TEOREMA DEL VALOR MEDIO O FÓRMULA DE LOS INCREMENTOS FINITOS

#### 7.1.1. Funciones de una sola variable independiente

Si una función real  $f$  de variable real es continua en el conjunto cerrado  $[a,b]$  y derivable en el conjunto abierto  $(a,b)$ , entonces existe un cierto punto intermedio  $c \in (a,b)$  tal que se cumple:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Demostración.** El sentido geométrico de la afirmación del teorema en cuestión es el siguiente: *existe un punto intermedio donde la tangente a la curva es paralela al segmento que une los extremos  $f(a)$  y  $f(b)$* . Así:

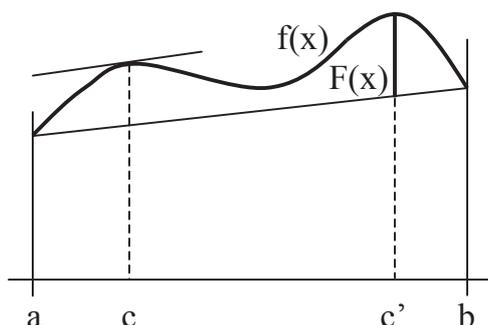


Fig. 1.14. Interpretación geométrica de la fórmula de los incrementos finitos

Desde luego, este punto no tiene por que ser único. De hecho, en aquellas funciones hidráulicas en las que, por su propia naturaleza, aparezcan varios puntos de estas características, la aplicación de este teorema a la resolución de este tipo de cuestiones puede perder su interés original, como veremos más adelante. Para probar el teorema que nos ocupa, construiremos una función auxiliar a la que se pueda aplicar el conocido teorema de Rolle; esa función es:

$$F(x) = f(x) - \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a)$$

que corresponde a la diferencia de ordenadas de la función y de la secante, como puede verse en la figura anterior. Entonces, la función real  $F(x)$  cumple las

hipótesis del teorema de Rolle, a saber: es continua en  $[a,b]$ , es derivable en  $(a,b)$  y  $F(a) = F(b) = 0$ . Existe pues  $c \in (a,b)$  tal que  $F'(c) = 0$ , por tanto:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

donde:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dos consecuencias importantes del teorema del valor medio son expuestas a continuación:

**Corolario 1.** Si  $f$  es una función definida sobre un intervalo y  $f'(x) = 0$  para cada  $x$  del intervalo, entonces  $f$  es constante.

**Demostración.** Sean  $x$  e  $y$  dos puntos cualquiera del intervalo. Aplicando el teorema del valor medio, existe  $c \in (x,y)$  tal que:

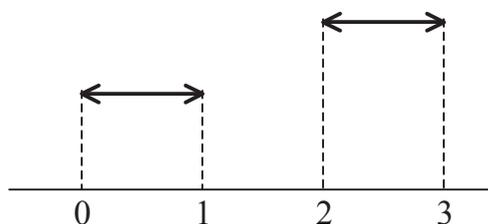
$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

pero como  $f'(c) = 0$ , también resulta ser:  $f(y) - f(x) = 0$ , es decir:

$$f(x) = f(y) = \text{cte.}$$

Este resultado es en cierto modo el recíproco de la afirmación casi trivial que reza así: “si una función es constante su derivada es cero”, pero la hipótesis “ $f$  definida en un intervalo” es crucial, si el dominio de definición no es un intervalo, la función puede tener derivada cero y no ser constante. Un ejemplo es la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1) \\ \frac{3}{2} & \text{si } x \in (2,3) \end{cases}$$



**Corolario 2.** Si  $f$  y  $g$  son dos funciones definidas en el mismo intervalo y  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x$  del intervalo, se cumple  $f = g + \text{constante}$ .

**Demostración.** Puesto que:

$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ , para todo  $x$  del intervalo del anterior Corolario 1 se sigue:

$$f - g = \text{cte.}$$

Y de aquí:  $f = g + \text{cte.}$

### 7.1.2. Funciones multivariantes

Se trata aquí de aplicar, a nuestro caso el teorema del valor medio en funciones de varias variables.

a) Un problema análogo al que resuelve el teorema de los incrementos finitos para las funciones de una sola variable, anteriormente expuesto, es el de expresar por medio de las derivadas parciales  $f'_x$  y  $f'_y$  el incremento de la función de dos variables reales  $f(x,y)$  cuando ambas variables independientes o explicativas se incrementan (o decrementan). Por supuesto, el problema puede generalizarse a un número mayor de variables independientes, con lo cual su resolución reviste aplicaciones interesantes en el estudio de ciertas funciones hidráulicas como las que aquí se presentan, a saber:  $\lambda = f(K,R)$ ,  $V = f(I,K,R)$ ,  $V = f(R,I)$ ,  $Q = f(c,R,I)$ , etc. Concretamente, el estudio consecuente puede tener singular interés para el diseño de este tipo de obras hidráulicas (canales y, en general, conducciones libres).

b) Sean:  $f(x,y)$  una función definida y con derivadas parciales en un recinto  $\mathfrak{R}$ ,  $P_0 (x_0,y_0)$  un punto cualquiera de  $\mathfrak{R}$ , y  $P_1 (x_1,y_1)$  un punto interior de dicho recinto, al que también pertenece el segmento  $P_0P_1$ . Escribamos:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = [f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)] + [f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)]; \quad (1)$$

como las funciones  $f(x,y_1)$  y  $f(x_0,y)$  son derivables en los intervalos  $[x_0,x_1]$  e  $[y_0,y_1]$ , respectivamente, se puede aplicar la fórmula de los incrementos finitos a las dos diferencias del segundo miembro, lo que nos ofrece la expresión:

$$\boxed{f(P_1) - f(P_0) = (x_1 - x_0)f'_x(\xi, y_1) + (y_1 - y_0)f'_y(x_0, \eta)} \quad (2)$$

con  $\xi \in (x_0, x_1)$  y  $\eta \in (y_0, y_1)$ .

Esta fórmula constituye una extensión a las funciones reales de dos variables reales de la fórmula de los incrementos finitos para las funciones de una variable, de provechosas aplicaciones hidráulicas, como tendremos ocasión de comprobar con posterioridad.

c) Haciendo, ahora, las sustituciones:

$$f(P_1) - f(P_0) = \Delta f(P_0), \quad x_1 - x_0 = \Delta x_0, \quad y_1 - y_0 = \Delta y_0,$$

podemos transformar la igualdad (1) en esta otra:

$$\boxed{\Delta f(P_0) = f'_x(P_0) \cdot \Delta x_0 + f'_y(P_0) \cdot \Delta y_0 + \varepsilon_1 \cdot \Delta x_0 + \varepsilon_2 \cdot \Delta y_0} \quad (3)$$

con  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$  cuando  $P_1 \rightarrow P_0$ , suponiendo que existen las dos derivadas parciales de  $f$  en el punto  $P_0$  y que una de ellas, por ejemplo la  $f'_x$ , es continua en dicho punto.

En efecto, la existencia de  $f'_x$ ,  $f'_y$  y la continuidad de  $f'_x$  implica la existencia de un cierto entorno  $E(P_0)$  donde están definidas las funciones  $f$  y  $f'_x$ ; eligiendo en dicho entorno un punto genérico  $P_1(x_1, y_1)$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1) &= f'_x(x_0 + \theta x_0, y_1) \cdot \Delta x_0 = [f'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1] \cdot \Delta x_0 = \\ &= f'_x(P_0) \cdot \Delta x_0 + \varepsilon_1 \cdot \Delta x_0 \end{aligned} \quad (4)$$

con  $0 < \theta < 1$  y  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  cuando  $P_1 \rightarrow P_0$  en virtud de la continuidad de  $f'_x$ .

Por otra parte se tiene:

$$\lim_{\Delta y_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)}{\Delta y_0} = f'_y(x_0, y_0),$$

o sea:

$$\frac{f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)}{\Delta y_0} = f'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2$$

con  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  cuando  $P_1 \rightarrow P_0$ , de donde se deduce que:

$$f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0) = f'_y(P_0) \cdot \Delta y_0 + \varepsilon_2 \cdot \Delta y_0. \quad (5)$$

Llevando las expresiones (4) y (5) a la (1), resulta la (3).

**OBSERVACIÓN:** Recordemos del Cálculo Infinitesimal que mientras que la existencia de la derivada implicaba la continuidad para las funciones de una variable, la existencia de derivadas parciales primeras no basta para asegurar la continuidad de  $f(x, y)$ . En efecto, la existencia de  $f'_x$  y  $f'_y$  lleva consigo, respectivamente, la continuidad de  $f$  **con relación a las variables**

**independientes x e y**, lo que no resulta suficiente para afirmar la continuidad de f.

Por supuesto, todo lo anteriormente expuesto puede generalizarse a tres o más variables explicativas. Pero ya se puede asegurar la continuidad de la función  $f(x,y)$  cuando a la existencia de derivadas parciales acompaña la continuidad de una de ellas, pues aplicando la fórmula (3), cuyo segundo miembro tiende a cero cuando  $P_1 \rightarrow P_0$ , resulta:

$$\lim_{P_1 \rightarrow P_0} f(P_1) = f(P_0).$$

## 7.2. TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY

Sean **f** y **g** dos funciones continuas en  $[a,b]$  y derivables en  $(a,b)$ , entonces existe un cierto punto  $c \in (a,b)$  tal que:

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

Si además:  $g(b) - g(a) \neq 0$  y  $g'(c) \neq 0$ , la ecuación anterior se puede escribir de la forma:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Demostración.** Como hemos hecho en la prueba del anterior teorema del valor medio, construiremos una función auxiliar a la que aplicar el teorema de Rolle. Consideremos:

$$F(x) = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x),$$

donde  $F(x)$  será continua en  $[a,b]$  y derivable en  $(a,b)$  por serlo  $f$  y  $g$ . Además:

$$F(a) = (f(b) - f(a)) g(a) - (g(b) - g(a)) f(a) = f(b) g(a) - g(b) f(a)$$

$$F(b) = (f(b) - f(a)) g(b) - (g(b) - g(a)) f(b) = f(b) g(a) - g(b) f(a)$$

luego  $F(a) = F(b)$ , y aplicando el teorema de Rolle, existe un  $c \in (a,b)$  tal que  $F'(c) = 0$ , por tanto:

$$F'(c) = (f(b) - f(a)) g'(c) - (g(b) - g(a)) f'(c) = 0$$

de donde sigue que:

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c), \text{ c.s.q.d.}$$

El teorema de Cauchy es la clave para probar un resultado fundamental en el cálculo de límites: la conocida regla de L'Hôpital.

### 7.3. APLICACIÓN A LAS FÓRMULAS DE ESTE AUTOR DEL TEOREMA DEL “VALOR MEDIO” DE CAUCHY

Si consideramos, ahora, la categoría de rugosidad  $K = 4$ , por ejemplo, se tiene, por aplicación de la fórmula correspondiente de este autor para el cálculo de la velocidad media en las conducciones libres:

$$V = 63,92 \times R^{0,6556} \times I^{0,5},$$

y si estudiamos posteriormente dicha función para 6 valores diferentes y comunes de los radios hidráulicos medios, se obtienen las ecuaciones:

<b>R=0,5 m</b>	$\rightarrow V = 40,58 \cdot I^{0,5}$
<b>R=1,0 m</b>	$\rightarrow V = 63,92 \cdot I^{0,5}$
<b>R=1,5 m</b>	$\rightarrow V = 83,38 \cdot I^{0,5}$
<b>R=2,0 m</b>	$\rightarrow V = 100,69 \cdot I^{0,5}$
<b>R=2,5 m</b>	$\rightarrow V = 116,55 \cdot I^{0,5}$
<b>R=3,0 m</b>	$\rightarrow V = 131,35 \cdot I^{0,5}$

, que son todas ellas de la forma potencial:

$$V = K \times \sqrt{I} = K \times I^{0,5},$$

cuyas primeras y segundas derivadas, en relación a la variable independiente  $I$ , ofrecen las expresiones:

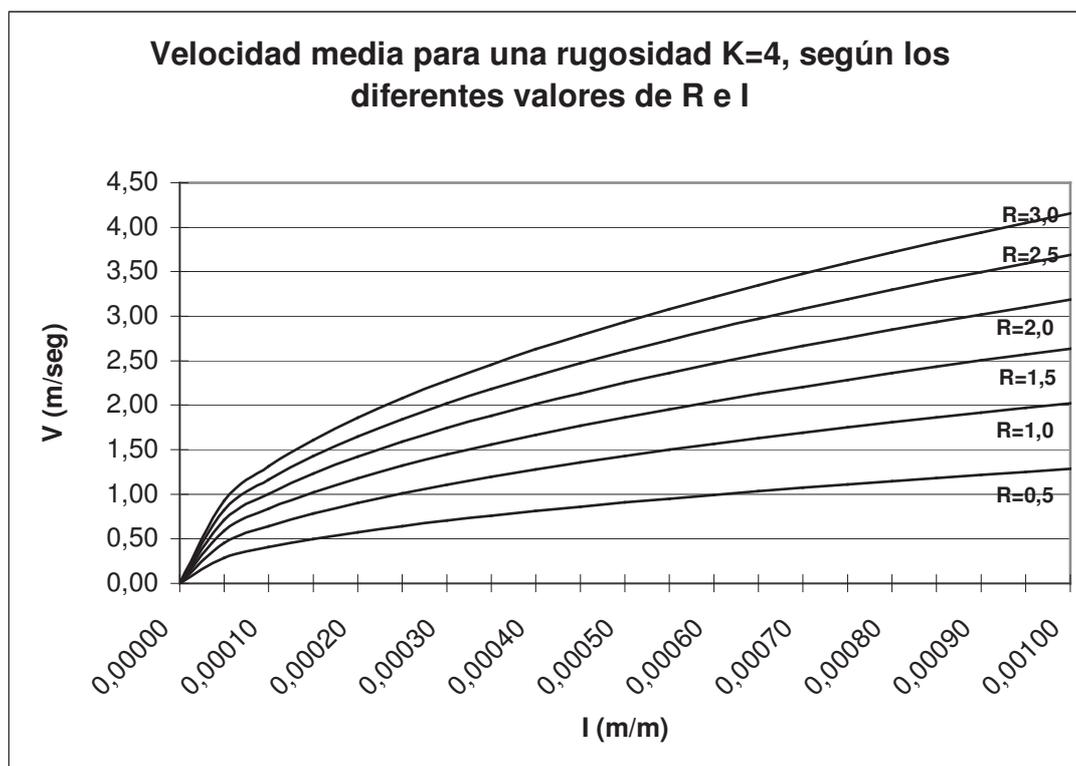
$$V' = K \times 0,5 \times I^{-0,5} = \frac{0,5 \times K}{I^{0,5}};$$

$$V'' = 0,5 \times K \times (-0,5) \times I^{-1,5} = -\frac{0,25 \times K}{I^{1,5}}.$$

Los diferentes valores de la velocidad media de la sección transversal del cauce natural o artificial (m./seg.), en función de la pendiente motriz y del radio hidráulico medio, pueden sintetizarse, en fin, en el siguiente cuadro:

l (m/m)	R=0,5 m	R=1,0 m	R=1,5 m	R=2,0 m	R=2,5 m	R=3,0 m
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.00005	0.28692	0.45198	0.58961	0.71200	0.82416	0.92880
0.00010	0.40577	0.63920	0.83384	1.00691	1.16554	1.31352
0.00015	0.49697	0.78286	1.02124	1.23321	1.42749	1.60873
0.00020	0.57385	0.90397	1.17923	1.42399	1.64832	1.85760
0.00025	0.64158	1.01066	1.31842	1.59207	1.84288	2.07686
0.00030	0.70282	1.10713	1.44425	1.74402	2.01877	2.27509
0.00035	0.75913	1.19583	1.55997	1.88376	2.18052	2.45738
0.00040	0.81154	1.27840	1.66768	2.01383	2.33107	2.62704
0.00045	0.86077	1.35595	1.76884	2.13599	2.47248	2.78640
0.00050	0.90733	1.42929	1.86452	2.25153	2.60622	2.93713
0.00055	0.95162	1.49906	1.95553	2.36142	2.73343	3.08048
0.00060	0.99393	1.56571	2.04248	2.46642	2.85497	3.21746
0.00065	1.03452	1.62965	2.12588	2.56714	2.97155	3.34884
0.00070	1.07357	1.69116	2.20613	2.66404	3.08372	3.47525
0.00075	1.11125	1.75052	2.28356	2.75755	3.19196	3.59723
0.00080	1.14770	1.80793	2.35845	2.84798	3.29664	3.71520
0.00085	1.18302	1.86357	2.43104	2.93563	3.39810	3.82954
0.00090	1.21731	1.91760	2.50152	3.02074	3.49661	3.94057
0.00095	1.25067	1.97015	2.57006	3.10351	3.59243	4.04855
0.00100	1.28316	2.02133	2.63683	3.18414	3.68575	4.15372

La gráfica correspondiente resulta ser la siguiente:



Si estudiamos ahora las dos primeras ecuaciones  $V_1(I)$  y  $V_2(I)$  en el intervalo de valores de la pendiente motriz  $I$   $[a, b]$ , aplicando la fórmula anteriormente expuesta de los incrementos finitos, se obtiene:

$$\frac{V_1(b) - V_1(a)}{V_2(b) - V_2(a)} = \frac{V_1'(c)}{V_2'(c)} \left\{ \begin{array}{l} V_1'(c) = \frac{V_1(b) - V_1(a)}{b - a} \\ V_2'(c) = \frac{V_2(b) - V_2(a)}{b - a} \end{array} \right.$$

Haciendo, ahora, por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} a = 0'0002 \text{ m/m.} \\ b = 0'0008 \text{ m/m.} \end{array} \right\}$$

del cuadro anterior se deduce que:

$$\left. \begin{array}{l} V_1(a) = 0'57385 \text{ m/seg.} \\ V_1(b) = 1'14770 \text{ m/seg.} \\ V_2(a) = 0'90397 \text{ m/seg.} \\ V_2(b) = 1'80793 \text{ m/seg.} \end{array} \right\}$$

También, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 40'58 \times I^{0'5} \\ V_2 = 63'92 \times I^{0'5} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} V_1' = 20'29 \times I^{-0'5} \\ V_2' = 31'96 \times I^{-0'5} \end{array} \right\}$$

Y así, con  $V_1$  se tendrá:

$$V_1' = 20'29 \times I^{-0'5} = \frac{1'14770 - 0'57385}{0'0008 - 0'0002} = \frac{0'57385}{0'0006} = 95'6'42$$

$$\frac{1}{\sqrt{I}} = 47'14; \quad \frac{1}{I} = 2.222; \text{ de donde:}$$

$$\boxed{I = 0'00045 \text{ m/m.}}$$

Del mismo modo, se tendrá (con  $V_2$ ):

$$V_2' = 31'96 \times I^{-0'5} = \frac{1'80793 - 0'90397}{0'0008 - 0'0002} = \frac{0'90396}{0'0006} = 1.506'6;$$

$$\frac{1}{\sqrt{I}} = 47'14 \ ; \Rightarrow \quad \boxed{\phantom{I = 0'00045 \text{ m/m.}}} \\ I = 0'00045 \text{ m/m.}$$

que ofrece el mismo resultado que en el caso anterior, y así sucederá siempre con todas las funciones  $V_i(I)$ . De hecho, siempre que tengamos una serie de funciones de la forma:  $f_i(x) = K_i \cdot F(x)$ , al aplicar el teorema del valor medio, el valor de  $c$  será el mismo  $\forall f_i(x)$  y también para  $F(x)$ . En efecto, aplicando la fórmula del valor medio, se obtiene:

$$f_i(c) = \frac{f_i(b) - f_i(a)}{b - a} \Rightarrow K_i \cdot F'(c) = \frac{K_i \cdot F(b) - K_i \cdot F(a)}{b - a} = \frac{K_i [F(b) - F(a)]}{b - a} \Rightarrow F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

que no depende de  $K_i$ , por tanto, el valor de  $c$  será el mismo  $\forall f_i(x)$  y también para  $F(x)$ .

Aplicando todo ello a nuestro caso, se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= K_1 \sqrt{I} \\ V_2 &= K_2 \sqrt{I} \\ \dots\dots\dots \\ V_n &= K_n \sqrt{I} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(b - a)(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{b - a}{(b - a)(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{1}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\sqrt{c} = \sqrt{b} + \sqrt{a} \Rightarrow c = \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{a})^2}{4} = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{\sqrt{a \times b}}{2}$$

Del mismo modo, se tiene:

$$V'(c) = \frac{V(b) - V(a)}{b - a} = \frac{K\sqrt{b} - K\sqrt{a}}{b - a} = \frac{K(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{b - a} = \frac{K(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(b - a)(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \\ = \frac{K(b - a)}{(b - a)(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{K}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \Rightarrow V'(c) = \frac{K}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

Estas consideraciones, en nuestro caso, resultarán:

$$c = I = \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{a})^2}{4} = \frac{(\sqrt{0'0008} + \sqrt{0'0002})^2}{4} = 0'00045 \text{ m/m.}$$

y también:

$$V'_2(c) = \frac{K_2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{63'92}{\sqrt{0'0008} + \sqrt{0'0002}} = 1.506'6,$$

que son coincidentes con los valores hallados anteriormente.

Las equivalencias anteriores pueden conducir a la formulación:

$$c = \frac{K^2}{4 \cdot V'^2}, \text{ que, para la función } V_2(I), \text{ se tendría:}$$

$$c = \frac{63'92^2}{4 \times 1.506'6^2} = 0'00045 \text{ m/m., c.s.q.d.}$$

El significado que tiene este punto intermedio  $c$  estriba en el concepto de “valor medio” o “abscisa media” del intervalo  $[a,b]$ , que sólo se corresponde aproximadamente a otro concepto clásico del cálculo infinitesimal, la “ordenada media” o “promedio integral”. En efecto:

$$\begin{aligned} (\text{con } K = 4) \rightarrow V &= 63'92 \times R^{0'6556} \times I^{0'5} \\ \rightarrow (R = 1'00) \Rightarrow V_2 &= 63'92 \times I^{0'5}; \text{ que, para el valor obtenido, ofrece:} \end{aligned}$$

$$V_2 = 63'92 \times \sqrt{0'00045} = 1'35595 \text{ m/seg.}$$

Por otra parte, la “ordenada media” vendrá dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \overline{V}_2 &= \frac{\int_a^b V_2(I) \cdot dI}{\Delta I} = \frac{1}{I_2 - I_1} \times \int_{I_1}^{I_2} 63'92 \times I^{0'5} \cdot dI = \\ &= \frac{63'92}{0'0008 - 0'0002} \times \int_{0'0002}^{0'0008} \sqrt{I} \cdot dI = 106.533'33 \times \frac{2}{3} \times \left[ \sqrt{0'0008^3} - \sqrt{0'0002^3} \right] = \\ &= 71.022'22 (2'263 \times 10^{-5} - 0'283 \times 10^{-5}) = 1'40624 \text{ m/seg.} \end{aligned}$$

Este valor, por otra parte, corresponde a una pendiente motriz o hidráulica:

$$I = \frac{V_2^2}{63'92^2} = 0'000484 \approx 0'00045 \text{ m/m., que resultan ser valores aproximados pero no necesariamente coincidentes.}$$

Recordemos, llegados a este punto, que si en lugar de calcular el promedio de valores de una función  $f(x)$  calculamos el promedio integral de su cuadrado, obtenemos un valor cuya raíz cuadrada se llama *media cuadrática integral* de la función en el intervalo considerado, así:

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) \cdot dx}$$

Esta media cuadrática puede interpretarse geoméricamente, en coordenadas cartesianas rectangulares, como la altura  $\mu$  de un rectángulo que engendra, al girar alrededor del eje X-X', un volumen (cilindro) equivalente al engendrado por el trapecio mixtilíneo limitado por la curva entre las abscisas extremas **a** y **b**. En efecto, esta equivalencia ofrece:

$$\pi\mu^2(b-a) = \pi \int_a^b f^2(x) \cdot dx$$

Pero representada la función  $r = f(\theta)$  en coordenadas polares, se puede asimismo interpretar esta media cuadrática como el radio de un sector circular de igual área y amplitud que el sector de curva comprendido entre los radios de argumentos  $\theta_1 = a$  y  $\theta_2 = b$ , según puede verse en la figura anexa, puesto que esta igualdad conduce análogamente a la relación:

$$\frac{1}{2}\mu^2(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot d\theta$$

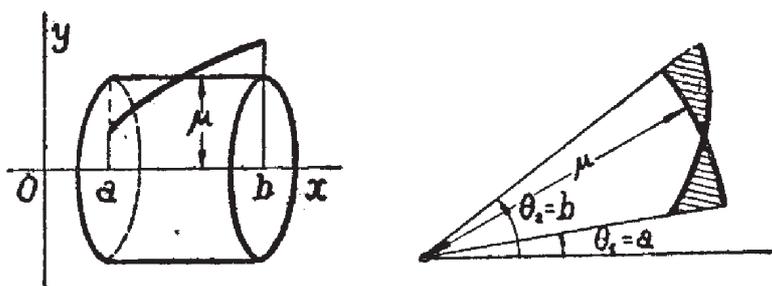


Fig. 1.15. Significación geométrica del concepto de “media cuadrática integral”

Superficiando con un planímetro polar, por doble triangulación geométrica o, simplemente, mediante un *software* adecuado de diseño asistido por ordenador (CAD) podemos, pues, hallar volúmenes de revolución y medias cuadráticas representando la función en cuestión en *coordenadas polares*. Dividiendo el duplo del área  $\Omega$  del sector (que está limitado por la curva y los radios extremos

$\theta_1 = a$ ,  $\theta_2 = b$ ) por el intervalo angular, tendremos el cuadrado de la media cuadrática buscada. Esto es:

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cdot d\theta \quad \mu = \sqrt{\frac{2\Omega}{b-a}}$$

Este razonamiento es extendible a numerosos casos que se plantean en el estudio de la Hidráulica o de la Mecánica de Fluidos y, en general, a toda magnitud física definida por una suma de productos de una función y el incremento de la variable.

En el caso que nos ocupa, aplicando el concepto ya definido de “media cuadrática integral”, obtendríamos el valor:

$$\begin{aligned} V_2 &= \sqrt{\frac{\int_a^b V_2^2(I) \cdot dI}{\Delta I}} = \sqrt{\frac{\int_{I_1}^{I_2} 4.086 \cdot I \cdot dI}{I_2 - I_1}} = \\ &= \sqrt{\frac{4.086 \cdot \left[ \frac{I^2}{2} \right]_{0'0002}^{0'0008}}{0'0008 - 0'0002}} = \sqrt{\frac{2.043 \cdot (0'0008^2 - 0'0002^2)}{0'0006}} = 1'42934 \text{ m./seg.}, \end{aligned}$$

valor que, a su vez, corresponde a una pendiente motriz o hidráulica de:

$$I = \frac{1'42934^2}{63'92^2} = 0'0005 \text{ m./m.},$$

también bastante coincidente con los valores anteriores.

Los diferentes valores obtenidos de  $\overline{V_i}$  calculados por cualquiera de los tres procedimientos anteriores para cada intervalo  $[I_1, I_2]$  y para cada valor de R, nos permiten conocer el incremento de la velocidad que se persigue variando los valores de R, por lo que dicha metodología resulta práctica para el diseño hidráulico de este tipo de conducciones libres.

Realizando el cálculo por el procedimiento propuesto, resulta mucho más sencillo y rápido que mediante el cálculo del correspondiente “promedio integral”, llevado a cabo en segundo lugar, o el de la “media cuadrática integral” realizado en tercer lugar, y que pueden complicarse en base a la configuración analítica de la función subintegral  $V_i(I)$  que debe integrarse.

También es cierto, no obstante, que si se presentan varias “abscisas medias” el cálculo pertinente podría complicarse justamente en sentido contrario

al expresado; por ello aconsejamos la realización y posterior comprobación de los tres resultados.

#### 7.4. LA “ELASTICIDAD” DE LA FUNCIÓN “VELOCIDAD”

Otro concepto interesante de aplicación aquí es el de “elasticidad” de la función  $V_1(I)$ , en los mismos términos que ya se ha empleado en algún otro apartado de este mismo capítulo de nuestro libro. En nuestro caso, se tendrá:

$$V_2(I) = 63'92 \times I^{0'5}; \quad V_2' = 31'96 \times I^{-0'5};$$

$$\frac{EV_2}{EI} = \frac{I}{V_2} \times V_2' = \frac{31'96 \times I^{0'5}}{63'92 \times I^{0'5}} = \frac{1}{2} = 0'5;$$

lo que indica que si incrementamos, por ejemplo, la variable independiente  $I$  (pendiente motriz o hidráulica) en un 10%, la velocidad lo hará sólo en un 5%.

Veamos, por último, que estas funciones no tienen máximos relativos o locales, ni mínimos, ni puntos de inflexión. Por otra parte, la derivada segunda:

$V_2'' = 31'96 \times (-0'5) \times I^{-1'5} = -\frac{15'98}{I^{1'5}} < 0$ , en todo su campo de variabilidad, por lo que la función velocidad es cóncava con respecto a las  $V^+$ .

Del estudio, en todo caso, de las ramas infinitas de este tipo de funciones, se deduce que:

$$V = K \times I^{0'5}; \text{ cuando } I \rightarrow \infty \text{ entonces } V \rightarrow \infty, \text{ luego:}$$

$$m = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{V}{I} = \lim_{I \rightarrow \infty} K \times I^{-0'5} = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{K}{I^{0'5}} = 0,$$

luego existe una rama parabólica horizontal (según OI), que es una recta impropia, que puede apreciarse en la gráfica correspondiente.

#### 7.5. GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE CAUCHY PARA $n$ FUNCIONES, SIENDO $n > 2$ . APLICACIONES HIDRÁULICAS

Mi competente compañero en las tareas docentes universitarias, Profesor Jordi Gas Riera, ha efectuado una generalización inédita del teorema clásico de Cauchy para 2 funciones a un número de ellas igual o superior a 3. Como se ha podido comprobar anteriormente, ello puede poseer provechosas aplicaciones en el campo de la Hidráulica, cuando son numerosas las funciones explicativas del

comportamiento de ciertos fenómenos hidráulicos e intervienen parámetros distintivos. En resumen, que si:

$$\left. \begin{array}{l} f_1, f_2, f_3, \dots, f_n \text{ continuas en } [a, b] \\ f_1, f_2, f_3, \dots, f_n \text{ derivables en } ]a, b[ \\ n \geq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists c \in ]a, b[ / \sum_{i=1, f_{n+1}=f_i}^n [f_i(b) - f_i(a)] f'_{i+1}(c) = \sum_{i=1, f_{n+1}=f_i}^n [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)] f'_i(c)$$

### Demostración:

Consideremos la función:  $G(x) = \sum_{i=1, f_{n+1}=f_i}^n [[f_i(b) - f_i(a)] f_{i+1}(x) - [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)] f_i(x)]$ ;

$G(x)$  es una función auxiliar, continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  por serlo  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$  y, de igual manera, es derivable en el intervalo abierto  $]a, b[$  por serlo  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ . Además, veamos que  $G(a) = G(b)$ , con lo cual podremos aplicar el teorema de Rolle. En efecto:

$$\begin{aligned} G(a) &= \sum_{i=1, f_{n+1}=f_i}^n [[f_i(b) - f_i(a)] f_{i+1}(a) - [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)] f_i(a)] = \\ &= [f_1(b) - f_1(a)] f_2(a) - [f_2(b) - f_2(a)] f_1(a) + \\ &+ [f_2(b) - f_2(a)] f_3(a) - [f_3(b) - f_3(a)] f_2(a) + \\ &+ [f_3(b) - f_3(a)] f_4(a) - [f_4(b) - f_4(a)] f_3(a) + \\ &+ \dots + \\ &+ [f_{n-2}(b) - f_{n-2}(a)] f_{n-1}(a) - [f_{n-1}(b) - f_{n-1}(a)] f_{n-2}(a) + \\ &+ [f_{n-1}(b) - f_{n-1}(a)] f_n(a) - [f_n(b) - f_n(a)] f_{n-1}(a) + \\ &+ [f_n(b) - f_n(a)] f_1(a) - [f_1(b) - f_1(a)] f_n(a) = \\ &= f_1(b) \cdot f_2(a) - f_1(a) \cdot f_2(a) - f_1(a) \cdot f_2(b) + f_1(a) \cdot f_2(a) + \\ &+ f_2(b) \cdot f_3(a) - f_2(a) \cdot f_3(a) - f_2(a) \cdot f_3(b) + f_2(a) \cdot f_3(a) + \\ &+ f_3(b) \cdot f_4(a) - f_3(a) \cdot f_4(a) - f_3(a) \cdot f_4(b) + f_3(a) \cdot f_4(a) + \\ &+ \dots + \\ &+ f_{n-2}(b) \cdot f_{n-1}(a) - f_{n-2}(a) \cdot f_{n-1}(a) - f_{n-2}(a) \cdot f_{n-1}(b) + f_{n-2}(a) \cdot f_{n-1}(a) + \\ &+ f_{n-1}(b) \cdot f_n(a) - f_{n-1}(a) \cdot f_n(a) - f_{n-1}(a) \cdot f_n(b) + f_{n-1}(a) \cdot f_n(a) + \\ &+ f_n(b) \cdot f_1(a) - f_n(a) \cdot f_1(a) - f_n(a) \cdot f_1(b) + f_n(a) \cdot f_1(a) = \\ &= \sum_{i=1, f_{n+1}=f_i}^n [f_i(b) \cdot f_{i+1}(a) - f_i(a) \cdot f_{i+1}(b)] \\ G(b) &= \sum_{i=1, f_{n+1}=f_i}^n [[f_i(b) - f_i(a)] f_{i+1}(b) - [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)] f_i(b)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [f_1(b) - f_1(a)]f_2(b) - [f_2(b) - f_2(a)]f_1(b) + \\
&+ [f_2(b) - f_2(a)]f_3(b) - [f_3(b) - f_3(a)]f_2(b) + \\
&+ [f_3(b) - f_3(a)]f_4(b) - [f_4(b) - f_4(a)]f_3(b) + \\
&+ \dots + \\
&+ [f_{n-2}(b) - f_{n-2}(a)]f_{n-1}(b) - [f_{n-1}(b) - f_{n-1}(a)]f_{n-2}(b) + \\
&+ [f_{n-1}(b) - f_{n-1}(a)]f_n(b) - [f_n(b) - f_n(a)]f_{n-1}(b) + \\
&+ [f_n(b) - f_n(a)]f_1(b) - [f_1(b) - f_1(a)]f_n(b) = \\
&= f_1(b).f_2(b) - f_1(a).f_2(b) - f_1(b).f_2(b) + f_1(b).f_2(a) + \\
&+ f_2(b).f_3(b) - f_2(a).f_3(b) - f_2(b).f_3(b) + f_2(b).f_3(a) + \\
&+ f_3(b).f_4(b) - f_3(a).f_4(b) - f_3(b).f_4(b) + f_3(b).f_4(a) + \\
&+ \dots + \\
&+ f_{n-2}(b).f_{n-1}(b) - f_{n-2}(a).f_{n-1}(b) - f_{n-2}(b).f_{n-1}(b) + f_{n-2}(b).f_{n-1}(a) + \\
&+ f_{n-1}(b).f_n(b) - f_{n-1}(a).f_n(b) - f_{n-1}(b).f_n(b) + f_{n-1}(b).f_n(a) + \\
&+ f_n(b).f_1(b) - f_n(a).f_1(b) - f_n(b).f_1(b) + f_n(b).f_1(a) = \\
&= \sum_{i=1, f_{n+1}=f_1}^n [f_i(b).f_{i+1}(a) - f_i(a).f_{i+1}(b)]
\end{aligned}$$

Por tanto,  $G(a) = G(b)$  y por el teorema de Rolle:  $\exists c \in ]a, b[ / G'(c) = 0$ .  
Ahora bien:

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \sum_{i=1, f_{n+1}=f_1}^n [[f_i(b) - f_i(a)]f'_{i+1}(x) - [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)]f'_i(x)] \Rightarrow \\
\Rightarrow G'(c) &= \sum_{i=1, f_{n+1}=f_1}^n [[f_i(b) - f_i(a)]f'_{i+1}(c) - [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)]f'_i(c)] \\
G'(c) = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1, f_{n+1}=f_1}^n [[f_i(b) - f_i(a)]f'_{i+1}(c) - [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)]f'_i(c)] = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \sum_{i=1, f_{n+1}=f_1}^n [f_i(b) - f_i(a)]f'_{i+1}(c) &= \sum_{i=1, f_{n+1}=f_1}^n [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)]f'_i(c)
\end{aligned}$$

*Observación:* Si aplicamos este teorema para  $n = 3$  funciones, tomando  $f_3(x) = k$  (función constante), resulta el teorema de Cauchy:

$$\left. \begin{array}{l} f_1, f_2 \text{ continuas en } [a, b] \\ f_1, f_2 \text{ derivables en } ]a, b[ \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in ]a, b[ / [f_1(b) - f_1(a)]f'_2(c) = [f_2(b) - f_2(a)]f'_1(c)$$

Si en lugar de la función constante,  $f_3(x) = k$ , tomamos como tercera función la suma de las otras dos,  $f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , también se obtiene el teorema de Cauchy, como fácilmente se puede comprobar.

Veamos, en fin, que en las funciones de la forma  $f_i(x) = K_i \cdot F(x)$ , la fórmula del teorema de Cauchy anteriormente expuesta se cumple  $\forall x$  (en nuestro caso, para cualquier valor de la pendiente motriz I), es decir, es una identidad. En efecto:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= K_1 \cdot F(x) \\ f_2(x) &= K_2 \cdot F(x) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} [f_1(b) - f_1(a)] f_2'(x) &= [f_2(b) - f_2(a)] f_1'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow [K_1 F(b) - K_1 F(a)] K_2 F'(x) &= [K_2 F(b) - K_2 F(a)] K_1 F'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow [F(b) - F(a)] K_1 \cdot K_2 \cdot F'(x) &= [F(b) - F(a)] K_2 \cdot K_1 \cdot F'(x), \end{aligned}$$

que, como puede verse, se trata de una identidad.

Lo mismo sucede para la generalización del teorema de Cauchy. En efecto, sean las funciones:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= K_1 \cdot F(x) \\ f_2(x) &= K_2 \cdot F(x) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f_i(x) &= K_i \cdot F(x) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1, f_{n+1}=f_1}^n [f_i(b) - f_i(a)] f_{i+1}'(x) &= \sum_{i=1, f_{n+1}=f_1}^n [f_{i+1}(b) - f_{i+1}(a)] f_i'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum [K_i \cdot F(b) - K_i \cdot F(a)] K_{i+1} \cdot F'(x) &= \sum [K_{i+1} \cdot F(b) - K_{i+1} \cdot F(a)] K_i \cdot F'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum [F(b) - F(a)] K_i \cdot K_{i+1} \cdot F'(x) &= \sum [F(b) - F(a)] K_{i+1} \cdot K_i \cdot F'(x), \end{aligned}$$

que es también una identidad.

No obstante, digamos por último que para otro tipo cualquiera de funciones hidráulicas con distinta configuración analítica a la relacionada, el tema expuesto puede resultar de gran aplicabilidad e interés.

## 8. CURVA DE CAPACIDAD DE UN CANAL

Puede ser interesante, para el enfoque y resolución de ciertos casos prácticos, por otra parte, la obtención de la denominada “curva de capacidad de un canal”, o curva de gasto de un canal en función del calado. Se trata de una característica o curva limnimétrica del gasto, pues la altura mediante la cual se va a deducir el caudal se lee en una regla graduada que puede observarse en algunos puntos de esos cauces libres (proximidad de compuertas, derivaciones, estaciones foronómicas, etc.) denominada *limnímetro*.

En un canal de sección dada, el área **S** y el radio hidráulico **R** son función del calado **h**, pudiéndose calcular el caudal de la conducción, para cada nivel del calado, mediante alguna de las expresiones relacionadas en los epígrafes anteriores. Si tenemos en cuenta, por ejemplo, para una determinada categoría de rugosidad:  $K = 4$ , la formulación propuesta:

$$Q = 63'92 \cdot S \cdot R^{0'6556} \cdot I^{0'5} \quad (1)$$

esto es:

$$\frac{Q}{63'92 \times I^{0'5}} = S \times R^{0'6556} \quad (2)$$

expresión en la que el segundo miembro es una función de calado **h** para cada sección transversal, y al ser proporcional al caudal, se denomina “capacidad de la sección”, designándose por **K**, así:

$$K = S \cdot R^{0'6556} = K(h); \text{ de dónde:}$$

$$Q = 63'92 \cdot K(h) \cdot I^{0'5}.$$

Se puede ordinariamente admitir que:  $K(h) = C_0 \cdot h^{n/2}$  (3), siendo  $C_0$  una constante y **n** un parámetro designado por Bakmeteff con el nombre de “exponente hidráulico”, con lo que:

$$Q = 63'92 \cdot C_0 \cdot h^{n/2} \cdot I^{0.5} = C_1 \cdot h^{n/2} \quad (4),$$

en que:  $C_1 = 63'92 \cdot C_0 \cdot I^{0.5}$ .

Las curvas de capacidad del canal, representadas en papel doblemente logarítmico, pueden substituirse, al menos en tramos determinados, por la función (resultante de tomar logaritmos decimales o neperianos en la expresión anterior):

$$\log Q = \log C_1 + n/2 \cdot \log h$$

La relación (3) puede obtenerse por interpolación en papel logarítmico. La expresión (4) revela que la curva limnimétrica es de características similares a una parábola, cuya constante  $C_1$ , queda determinada, en la práctica, con un par de medidas del gasto.

Dicha expresión, ofrece la función derivada:

$$Q' = \frac{dQ}{dh} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta h} = C_1 \times \frac{n}{2} \times h^{\frac{n-2}{2}},$$

de forma que si  $n/2$  es mayor que la unidad, la pendiente de la curva aumenta continuamente conforme lo hace  $h$ , mientras que si  $n/2$  se encuentra entre 0 y 1, la pendiente decrece continuamente, como indica la figura siguiente:

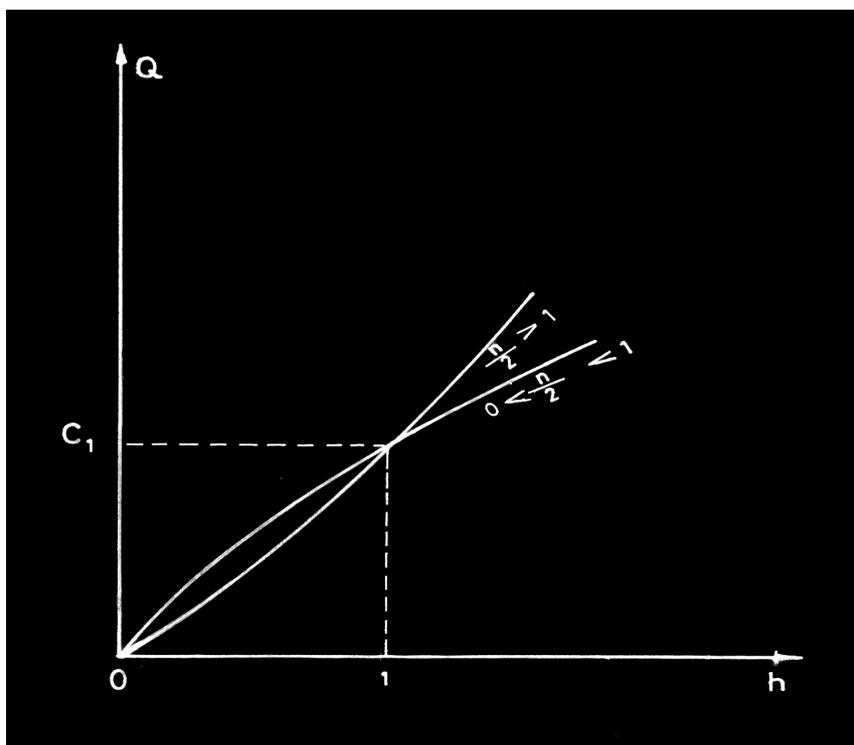


Fig. 1.16. Diferentes formas de la "curva de capacidad" de un canal

Por uno u otro valor de  $n/2$ ,  $Q$  tiende hacia infinito cuando  $h$  tiende hacia infinito. En este caso, la elasticidad ya definida de  $Q$  con respecto a  $h$  vendrá dada por:

$$\frac{EQ}{Eh} = \frac{h}{Q} \times Q' = \frac{h}{C_1 \times h^{n/2}} \times C_1 \times \frac{n}{2} \times h^{\frac{n-2}{2}} = \frac{n}{2},$$

que es justamente la mitad del valor del “exponente hidráulico” de Bakmeteff.

De la investigación de las ramas infinitas de esta función, se deduce que:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{Q}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{C_1 \times h^{n/2}}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} C_1 \times h^{\frac{n-2}{2}},$$

con lo que pueden producirse los siguientes casos:

- para  $n > 2$  → el límite anterior es  $+\infty$ , con lo que se tiene una rama parabólica hacia arriba (vertical), según el eje  $OQ$ .
- para  $n = 2$  → es una recta que pasa por el origen de coordenadas.
- Para  $n < 2$  → el límite anterior es  $0$ , y se trata de una rama parabólica horizontal (según el eje  $Oh$ ).

En ambos casos, para  $h = 1 \Rightarrow Q = C_1$ , y también, para  $n = 0 \Rightarrow Q = C_1$ .

## 9. RESOLUCIÓN DE DOS CASOS PRÁCTICOS

### 9.1. CANAL DE RIEGO

Un canal de 2.650 metros de longitud, con paredes de hormigón armado y taludes 1:1, arranca su solera en la cota inicial taquimétrica  $Z_1 = +2'834$  m.s.n.m., se proyecta inicialmente con una anchura de la lámina de agua de 5'80 m, altura vertical de la sección de 1'60 m y se precisa dejar 30 cm de resguardo hidráulico. Sabiendo que tiene que abastecer una zona regable de 5.000 ha de las que la mitad aproximadamente de la superficie serán para riegos por gravedad por tablas y surcos (módulo unitario de riego de 1'0 l/seg·ha) y la otra mitad para riegos a presión por aspersión, microaspersión, exudación y/o goteo (módulo unitario de riego de 0'6 l/seg·ha). Se pide:

1. Determinar la pendiente necesaria de la solera y su cota final, suponiendo que el flujo es uniforme (velocidad constante entre dos secciones transversales).

2. La velocidad del agua superficial y la próxima a la solera.
3. Los centros de gravedad y de presiones, así como la fuerza total ejercida sobre una compuerta rectangular de dimensiones: 60 cm. (anchura) por 40 cm. (altura), que está sumergida 0'80 m. desde la superficie libre del agua hasta su lado superior, para los tres casos siguientes: que se halle en posición vertical, siguiendo la inclinación de la pared del canal, o bien horizontal.
4. Optimizar la sección transversal definitiva, estudiando la variabilidad del coeficiente de Fanning y la curva de capacidad del canal.
5. Estudiar propuestas de secciones alternativas.

1) Con  $\alpha = 45^\circ$ , las dimensiones de la sección trapezoidal serán:

$$L = 5'80 \text{ m} = l + 2 \cdot h \cdot \cot \alpha ;$$

$$l = L - 2h = 5'80 - 2(1'60 - 0'30) = 3'20 \text{ m};$$

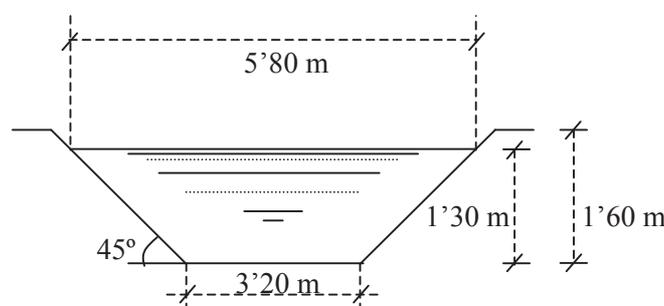


Fig. 1.17. Sección transversal inicial

Sección mojada:

$$S = \frac{L + l}{2} \cdot h = \frac{5'80 + 3'20}{2} \cdot 1'30 = 5'85 \text{ m}^2;$$

Perímetro mojado:

$$c = l + \frac{2 \cdot h}{\sin \alpha} = 3'20 + \frac{2 \cdot 1'30}{\sin 45^\circ} = 6'88 \text{ m};$$

Radio hidráulico medio:

$$R = \frac{S}{c} = \frac{5'85 \text{ m}^2}{6'88 \text{ m}} = 0'85 \text{ m}$$

Velocidad media:

Hay que tener en cuenta que el caudal de cálculo, de acuerdo con las necesidades de abastecimiento de la zona regable, será, considerando el módulo unitario medio de riego:

$$Q = 5.000 \text{ ha} \cdot 0'8 \text{ l/seg} \cdot \text{ha.} = 4.000 \text{ l/seg} = 4 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4}{5'85} = 0'68 \text{ m/seg}$$

A su vez, según las 5 diferentes formulaciones aquí estudiadas, consultando las tablas del anexo, se tendría los siguientes valores para el par ordenado de coeficientes de Chèzy y de Fanning ( $C, \lambda$ ):

**a) Ganguillet – Kütter (simplificada):**

Con  $m = 0'47$ , resulta  $(66'23, 0'0045)$

**b) Manning – Strickler:**

Con  $n = 0'017$ , resulta  $(57'25, 0'0060)$

**c) Bazin:**

Con  $\gamma = 0'30$ , resulta  $(65'64, 0'0045)$

**d) Koeschlin:**

Con  $k = 42$ , resulta  $(65'23, 0'0046)$

**e) Forchheimer:**

Con  $\delta = 65$ , resulta  $(62'92, 0'0049)$

La media aritmética del par ordenado de coeficientes, para las 5 formulaciones anteriores, será:

$$(C, \lambda) = (63'45, 0'0049)$$

, lo que exige una pendiente motriz del canal de:

$$\boxed{I = \frac{V^2}{R \cdot C^2} = \frac{0'68^2}{0'85 \cdot 63'45^2} = 0'000135 \text{ m/m} = \underline{0'135 \text{ m/Km}}}$$

De existir, v. gr., un tramo curvo en la planta de la traza de este mismo canal, con un radio de curvatura medio de su eje hidráulico de:  $\rho = 100 \text{ m.}$ , la pendiente motriz necesaria sería (considerando una anchura media del cauce de:  $b = \frac{5'80 + 3'20}{2} = 4'50 \text{ m.}$ ) de:

$$I = \frac{V^2}{R} \times \frac{1}{C^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{b}{\rho}} \right) = \frac{0'68^2}{0'85 \times 63'45^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{4'5}{100}} \right) = 0'000157 \text{ m/m} = 0'157 \text{ m/Km}$$

que resulta ser un 16% superior a la anteriormente calculada, al objeto de mantener la misma sección transversal y caudal medio que en los tramos rectos de esta conducción libre. Concretamente, la pérdida de carga (pendiente motriz) unitaria producida en la curva vendrá dada por la diferencia:

$$\Delta I = 0'000157 - 0'000135 = 0'000022 \text{ m/m} = 0'022 \text{ m/Km}$$

Otra alternativa constructiva, al objeto de no variar la pendiente de la solera, estribaría en incrementar convenientemente la sección mojada.

Veamos ahora que el desbordamiento de esta sección tendrá lugar, teóricamente, a partir de un valor  $h > 1'60$  m. (altura del tirante de agua máximo), con las siguientes características dimensionales:

$$L = l + 2 \cdot h \cdot \cotg \alpha = 3'20 + 2 \cdot 1'60 \cdot \cotg 45^\circ = 6'40 \text{ m.}$$

$$S = \frac{L + l}{2} \times h = \frac{6'40 + 3'20}{2} \times 1'60 = 7'68 \text{ m}^2$$

$$c = l + \frac{2h}{\text{sen } \alpha} = 3'20 + \frac{2 \times 1'60}{\text{sen } 45^\circ} = 7'73 \text{ m.}$$

$$R = \frac{S}{c} = \frac{7'68}{7'73} = 0'99 \text{ m.}$$

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot R \cdot I}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2 \times 9'806 \times 0'99 \times 0'000135}{0'0047}} = 0'75 \text{ m/seg.}$$

con un caudal de:

$$Q = S \cdot V = 7'68 \cdot 0'75 = 5'76 \text{ m}^3/\text{seg.},$$

lo que supone:  $5'76/4 = 1'44$ , que excede en un 44% el caudal del proyecto.

Esta última consideración puede resultar útil si se estudian cauces para desagüe, donde interesaría que la relación existente entre el caudal de desbordamiento y el de proyecto resulte la mayor posible.

Obsérvese que, de todas maneras, no interesa aplicar aquí la formulación de Ganguillet–Kütter simplificada, habida cuenta de que la pendiente resultante es:  $I < 0'0005$ . Por lo que se refiere a la expresión de Manning–Strickler, veamos que ofrece valores discordantes con el resto, por lo que también podría no ser considerada. Curiosamente, ambas formulaciones constituyen los valores extremos de los valores de las variables aleatorias estadísticas ( $C$ ,  $\lambda$ ) en la correspondiente distribución de frecuencias, pese a que su supresión no origina cambios significativos en los resultados obtenidos, razón por la cual podremos considerarlos definitivos a todos los efectos. En cualquier caso, para profundizar

más en algunos aspectos relacionados con el empleo de los “métodos robustos” en Inferencia Estadística, sugerimos la lectura del epígrafe correspondiente del capítulo V de este mismo libro.

Si consultamos, ahora, la tabla de coeficientes de Fanning promedios  $\lambda$  del anexo nº: 1, se obtiene, para  $R = 0'85$  m. y una categoría de rugosidad  $K = 4$ , un  $\lambda = 0'004896$ , valor éste coincidente con el adoptado. También puede consultarse el gráfico correspondiente, donde la línea de tendencia obtenida, señalada en trazo más grueso, permite también la determinación gráfica de la  $\lambda$ . Así mismo, podríamos calcular  $\lambda$  por la línea de tendencia obtenida para esta categoría de rugosidad, con lo que:

$$\lambda = 0'0048 \cdot R^{-0'3112} = 0'005049,$$

que apenas difiere del tabulado, lo que demuestra el elevado grado de exactitud del ajuste estadístico realizado con la función propuesta.

Veamos, en fin, que con nuestro procedimiento (siendo  $\lambda$  conocido) resulta de inmediata aplicación la fórmula de Darcy – Weissbach, así:

$$\boxed{I = \frac{\lambda \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot R} = \frac{0'0049 \cdot 0'68^2}{2 \cdot 9'806 \cdot 0'85} = \underline{0'000135 \text{ m/m}}}, \text{ c.s.q.d.}$$

Alternativamente, podríamos comprobar la pendiente motriz calculada mediante la fórmula de la velocidad propuesta por este autor para esta categoría de rugosidad, a saber:

$$V = 63'92 \cdot R^{0'6556} \cdot I^{0'5}; \text{ con lo que:}$$

$$I = \frac{V^2}{4.086 \times R^{1'3112}} = \frac{0'68^2}{4.086 \times 0'85^{1'3112}} = 0'00014 \text{ m/m} = 0'14 \text{ m/Km.},$$

que difiere inapreciablemente de la obtenida hasta ahora, por lo que se considera completamente aceptable. Por otra parte, en este caso, el caudal resultante será:

$$Q = 63'92 \cdot c \cdot R^{1'6556} \cdot I^{0'5} = 63'92 \cdot 6'88 \cdot 0'85^{1'6556} \cdot 0'00014^{0'5} = 3'98 \cong 4 \text{ m}^3/\text{seg.},$$

como se quería demostrar.

La cota final de la solera del canal, será:

$$\Delta Z = 0'000135 \cdot 2.650 = 0'358 \text{ m; o sea:}$$

$$\boxed{Z_2 = Z_1 - \Delta Z = 2'834 - 0'358 = \underline{+ 2'476 \text{ m.s.n.m.}}}$$

suponiendo una traza rectilínea, esto es, sin tramos curvos.

En el caso de haber considerado una pendiente:  $I = 0'00014$ , se tendría:  $\Delta Z = 0'00014 \cdot 2.650 = 0'371$  m., lo que supone una diferencia de 13 mm. con la determinación anterior, que resulta despreciable.

2) Por lo que se refiere a la distribución de la velocidad en una sección transversal, siguiendo al profesor Torres Sotelo<sup>30</sup>, veamos que en el flujo en canales la distribución de velocidades depende, entre otros factores, de la geometría del contorno, la rugosidad de las paredes y el caudal. Las velocidades aumentan generalmente con la distancia a las paredes y al fondo, registrándose los mínimos valores junto a éstas.

En canales artificiales de secciones regulares como el que aquí nos ocupa, la velocidad máxima se da en el eje de simetría, un poco más debajo de la superficie libre del líquido, debido a la escasa resistencia que ofrece el aire, a una distancia de 0'05 a 0'25 del calado (media a:  $0'15 \times h$ ).

En las secciones que son irregulares, el eje de la velocidad máxima generalmente se encuentra en la vertical que define el tirante máximo.

La velocidad media a lo largo de un tirante se determina tomando la media de las velocidades a 0'2 y 0'8 del tirante, según las recomendaciones del Departamento de Investigaciones Geológicas de los Estados Unidos, esto es:

$$V = \frac{1}{2} (\text{Velocidad a } 0'2 \text{ del tirante} + \text{Velocidad a } 0'8 \text{ del tirante}).$$

Esta velocidad media suele variar entre 0'80 y 0'95 veces la velocidad en la superficie según se trate de canales pequeños o grandes, respectivamente.

Se han calculado diversas fórmulas empíricas que relacionan la velocidad media  $V$ , con la velocidad superficial  $V_s$  y la velocidad próxima al fondo  $V_f$ ; entre ellas citaremos la de Dubuat, a saber:

$$V_f = 2 \cdot V - V_s$$

y como para valores de  $V_s$  comprendidos entre 0'2 y 1'5 m/s se admite, la expresión:

$$V = 0'8 \cdot V_s$$

sustituyendo, resulta:

$$V_f = 1'6 \cdot V_s - V_s = 0'6 \cdot V_s$$

<sup>30</sup> Vide: *Apuntes de hidráulica general y agrícola. Primera y Segunda Parte.* Citado en la bibliografía.

o bien, en función de la velocidad media, se tiene una velocidad próxima al fondo de:

$$V_f = 2 \cdot V - V/0'8 = 0'75 \cdot V$$

La distribución de velocidades en una corriente libre resulta muy importante cuando se desea determinar el caudal usando un medidor de velocidad, que es un instrumento construido de tal manera que la velocidad angular de su elemento giratorio (hélice o sistema de álabes) es proporcional a la velocidad de la corriente. Un ejemplo característico es el del molinete de Woltman. Mediante un circuito eléctrico, los valores de la velocidad son registrados en un cuentarrevoluciones. Las isotacas -curvas similares a las de nivel en topografía- que unen los puntos de igual velocidad en una sección, suelen obtenerse por interpolación a partir de las medidas puntuales realizadas con el medidor de velocidad.

En nuestro caso, las velocidades del agua en la superficie del canal y en las proximidades de la solera del fondo del mismo, en base a las consideraciones efectuadas, serán, respectivamente, las siguientes:

$$\begin{cases} V_s = \frac{V}{0'8} = \frac{0'68}{0'8} = 0'85 \text{ m./seg.} \\ V_f = 0'75 \times V = 0'75 \times 0'68 = 0'51 \text{ m./seg.} \end{cases}$$

3) Asimismo, se tendrá:

- **Centro de gravedad:**  $X_G = d + h/2 = 0'50 + 0'40/2 = 1'00 \text{ m.}$

- **Centro de presiones:**  $X_C = X_G + \frac{h^2}{12 \cdot X_G} = 1'0 + \frac{0'4^2}{12 \cdot 1'0} = 1'01 \text{ m.}$

todo ello en el caso de tratarse de la compuerta en posición vertical.

Veamos ahora los esfuerzos actuantes sobre la compuerta según su posición.

- **Esfuerzo con la compuerta vertical:** Se tendrá un esfuerzo horizontal de:

$$P = \gamma \cdot b \cdot h \cdot (d + h/2) = 1 \cdot 0'60 \cdot 0'40 \cdot 1'00 = 0'24 \text{ t}^* = \mathbf{240 \text{ Kp} = 2.354 \text{ N}}$$

- **Esfuerzo con la compuerta inclinada:**

a) Se tendrá un esfuerzo horizontal de:

$$\mathbf{P}' = P \cdot \operatorname{sen} \alpha = 240 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{170 \text{ Kp} = 1.668 \text{ N}}$$

b) Se tendrá un esfuerzo vertical igual al peso del volumen de agua que descansa sobre la compuerta, con lo que:

$$h' = 0'40 \cdot \cos 45^\circ = 0'40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0'28 \text{ m.}$$

$$\mathbf{P}'' = (0'28 \cdot 0'60) \cdot (0'80 + 0'28/2) = 0'168 \cdot 0'94 = 0'158 \text{ t}^* = \mathbf{158 \text{ Kp} = 1.549 \text{ N}}$$

La resultante de ambas fuerzas, será:

$$\mathbf{R} = \sqrt{P'^2 + P''^2} = \sqrt{170^2 + 158^2} = \mathbf{232 \text{ Kp} = 2.276 \text{ N}}$$

Como puede observarse, este esfuerzo actuante sobre la compuerta resulta ser algo inferior al obtenido anteriormente para la compuerta en posición vertical, puesto que el centro de gravedad de la misma se ha desplazado ligeramente hacia arriba, si imaginamos un giro de  $45^\circ$  alrededor del eje constituido por el lado superior. De hecho, este último caso coincidirá con el anterior cuando el c.d.g. de la compuerta se halle situado a una profundidad en relación al nivel de la lámina libre del agua de:

$$0'80 + 0'40/2 = 1'00 \text{ m., con lo que:}$$

$$\mathbf{P}'' = (0'28 \cdot 0'60) \cdot 1'00 \text{ m.} = 0'168 \text{ t}^* = \mathbf{168 \text{ Kp} = 1.648 \text{ N}}$$

De este modo, se tendrá:

$$\mathbf{R} = \sqrt{P'^2 + P''^2} = \sqrt{170^2 + 168^2} = \mathbf{240 \text{ Kp} = 2.354 \text{ N}}$$

tal como se quería demostrar.

Veamos, en fin, que si la compuerta se situara en posición completamente horizontal, a una profundidad de:

$$0'80 + 0'40/2 = 1'00 \text{ m., se tendría un esfuerzo actuante sobre la misma de:}$$

$$\mathbf{P} = (0'40 \cdot 0'60) \cdot 1'00 \text{ m.} = 0'24 \text{ t}^* = \mathbf{240 \text{ Kp} = 2.354 \text{ N}}$$

que resulta coincidente, obviamente, con los supuestos anteriormente expresados.

4) Si tratásemos, ahora, de optimizar las dimensiones de la sección trapezoidal de este canal, en las mismas condiciones de caudal y pendiente, de tal suerte que al objeto de minimizar el rozamiento con las paredes sea mínimo también el contorno o perímetro mojado, veamos que de la fórmula de Darcy–Weissbach se deduce que (con  $R_{\text{máx.}} = h/2$ ), se tiene:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot R \cdot I}{\lambda}} = \sqrt{\frac{g \cdot h \cdot I}{\lambda}}$$

Pero como es sabido, el valor del radio hidráulico máximo tendrá lugar para una sección mojada de:

$$S = \frac{h^2 \cdot (2 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{h^2 \cdot (2 - \frac{\sqrt{2}}{2})}{\sqrt{2}/2} = 1'83 \cdot h^2, \text{ con lo que :}$$

$$Q = S \cdot V = 1'83 \cdot h^2 \cdot \sqrt{\frac{9'806 \cdot h \cdot 0'000135}{0'0049}} = \frac{4 \text{ m}^3}{\text{seg}};$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta igualdad, se obtiene:

$$3'35 \cdot h^4 \cdot 0'27 \cdot h = 16; \text{ de dónde:}$$

$$h^5 = 17'69; h = 1'78 \text{ m}; R_{\text{máx.}} = h/2 = 1'78/2 = 0'89 \text{ m},$$

con una sección mojada de:

$$S = 1'83 \cdot 1'78^2 = 5'80 \text{ m}^2,$$

y un perímetro o contorno mojado de:

$$c = \frac{S}{R_{\text{máx.}}} = \frac{5'80}{0'89} = 6'52 \text{ m}$$

Las **dimensiones óptimas**, pues, serán:

$$\boxed{L = \frac{2h}{\sin \alpha} = \frac{2 \cdot 1'78}{\sqrt{2}/2} = 5'03 \text{ m}}, \text{ y}$$

$$\boxed{l = c - L = 6'52 - 5'03 = 1'49 \text{ m}}$$

que ofrecerán una velocidad media del agua de:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4}{5'80} = 0'69 \text{ m/seg}$$

En estas nuevas condiciones hidráulicas, de acuerdo con las formulaciones simples que aquí se proponen, se tendrá una velocidad media de:

$$V = 63'92 \cdot 0'89^{0'6556} \cdot 0'000135^{0'5} = 0'69 \text{ m/seg.}, \text{ y un caudal o gasto de:}$$

$Q = 63'92 \cdot 6'52 \cdot 0'89^{1'6556} \cdot 0'000135^{0'5} = 4 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , resultados ambos totalmente coincidentes con las determinaciones anteriores.

Si aplicamos, ahora, la función múltiple propuesta por este autor (ver apartado 4.5.7.), se tendrá:

$$V = 4'43 \times \sqrt{0'000135 \times 0'89^{1'3006}} \times e^{6'1766 - 0'2185 \times 4} = 0'68 \text{ m/seg.}$$

y un caudal o gasto de:

$$Q = 4'43 \cdot 6'52 \cdot 0'000135^{0'5} \cdot 0'89^{1'6503} \cdot e^{3'0883 - 0'10925 \cdot 4} = 3'92 \cong 4 \text{ m}^3/\text{seg. c.s.q.d.}$$

Veamos, por último, que, en este caso, en el tramo curvo cuyas características se han relacionado anteriormente, la pendiente motriz deberá ser:

$$C = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2 \times 9'806}{0'0048}} = 63'92; \quad b = \frac{L+1}{2} = \frac{5'03 + 1'49}{2} = 3'26 \text{ m.};$$

$$I = \frac{0'69^2}{0'89 \times 63'92^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3'26}{100}} \right) = 0'000149 \text{ m/m} = 0'149 \text{ m/Km.},$$

que resulta menor que la necesaria para el caso anterior (0'000157 m/m).

Se tendrá, pues, la siguiente sección transversal óptima del canal:

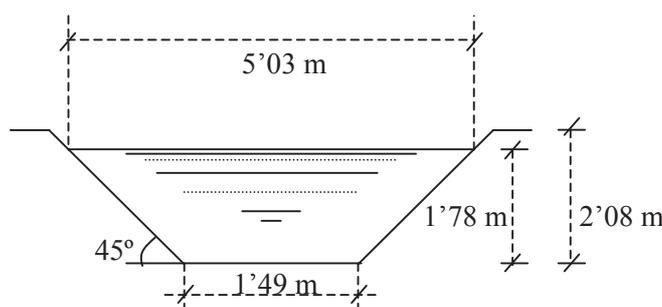


Fig. 1.18. Sección transversal óptima

Veamos, en fin, que desde el punto de vista de las propiedades hidráulicas, la sección más conveniente es aquella que con un área, pendiente motriz y rugosidad dadas posee una capacidad portante máxima (sección de máximo rendimiento hidráulico).

Para la representación gráfica de las curvas de caudales ( $Q$ ) y velocidades medias ( $V$ ) en esta sección (con una anchura de la solera de:  $l = 1.49$  m.), se tiene (con el coeficiente  $\lambda$  de Fanning variable en función de  $R$  y de la rugosidad):

Tabla 1.10. Variables hidráulicas en función del calado de la sección óptima

$h$ (m)	$c$ (m)	$L$ (m)	$S$ (m <sup>2</sup> )	$V$ (m/seg)	$Q$ (m <sup>3</sup> /seg)	$\lambda$ (Forchheimer)	$\lambda$ (promedio)	$R$ (m)	$\Delta\lambda$
0.30	2.339	2.09	0.537	0.269	0.144	0.0084	0.0075	0.230	0.0009
0.60	3.187	2.69	1.254	0.394	0.494	0.0067	0.0062	0.393	0.0005
0.90	4.036	3.29	2.151	0.485	1.043	0.0060	0.0057	0.533	0.0003
1.20	4.884	3.89	3.228	0.569	1.838	0.0054	0.0053	0.661	0.0001
1.50	5.733	4.49	4.485	0.637	2.858	0.0051	0.0050	0.782	0.0001
<b>1.78</b>	<b>6.520</b>	<b>5.03</b>	<b>5.800</b>	<b>0.690</b>	<b>4.000</b>	<b>0.0049</b>	<b>0.0048</b>	<b>0.890</b>	<b>0.0001</b>
2.08	7.373	5.65	7.426	0.761	5.651	0.0046	0.0046	1.007	0.0000

Para la elaboración de esta tabla, se han tomado en consideración los valores del coeficiente  $\lambda$  de Fanning obtenidos según la aplicación de la fórmula de Forchheimer, que, según puede comprobarse en la tabla correspondiente, para un  $\delta = 65$ , con  $R_{\text{máx.}} = 0.89$  m. ofrece un  $\lambda = 0.0049$ , tal como se ha deducido del cálculo anterior, razón por la cual comprobamos que existe una buena adaptación de dicha formulación empírica a nuestro caso. Así mismo, se han señalado en la siguiente columna los valores del coeficiente  $\lambda$  promedio de todas las formulaciones extraídos de la tabla correspondiente del anexo n°: 1, así como la diferencia entre ambos  $\Delta\lambda$ . Con todo ello, se obtiene la siguiente gráfica donde aparecen las funciones de las variables del problema  $Q$ ,  $V$  y  $\lambda$  (Forchheimer) en relación con la altura  $h$  o tirante de agua de la sección transversal del canal. Así:

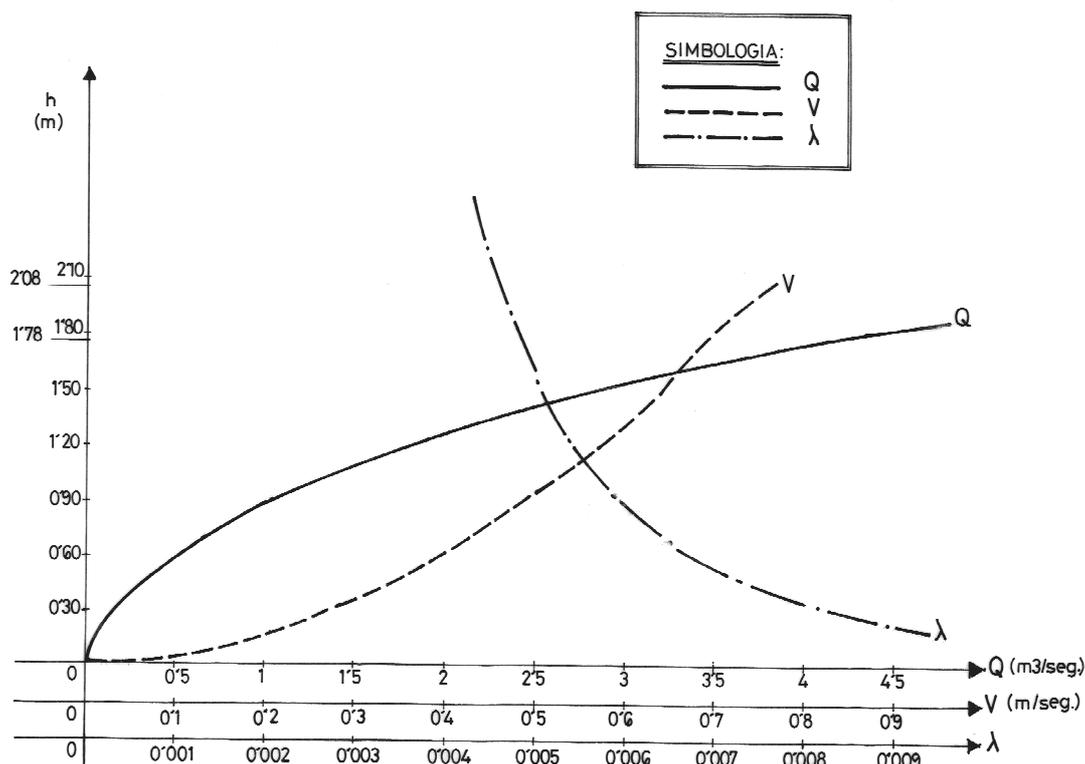


Fig. 1.19. Representación gráfica de las variables del problema

El desbordamiento del canal en cuestión tendría lugar, teóricamente, a partir de un valor:  $h = 2'08$  m, altura del tirante de agua a la que corresponden unas características de esta nueva sección transversal de:

$$L = l + 2 \cdot h \cdot \cotg \alpha = 1'49 + 2 \cdot 2'08 \cdot \cotg 45^\circ = 5'65 \text{ m} ,$$

$$S = \frac{L + l}{2} \cdot h = \frac{5'65 + 1'49}{2} \cdot 2'08 = 7'426 \text{ m}^2 ;$$

$$c = l + \frac{2 \cdot h}{\text{sen} \alpha} = 1'49 + \frac{2 \cdot 2'08}{\text{sen} 45^\circ} = 7'373 \text{ m} ;$$

$$R = \frac{S}{c} = \frac{7'426}{7'373} = 1'007 \text{ m} ;$$

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot R \cdot I}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9'806 \cdot 1'007 \cdot 0'000135}{0'0046}} = 0'761 \text{ m/seg}$$

con un caudal o gasto de:

$$Q = S \cdot V = 7'426 \cdot 0'761 = 5'651 \text{ m}^3/\text{seg}, \text{ o sea: } \frac{5'651}{4} = 1'41275 ,$$

que excede en un 41% al caudal del proyecto.

En este caso, las nuevas formulaciones aquí propuestas conducirán a los siguientes resultados:

a) Funciones simples:

$V = 63'92 \cdot 1'007^{0'6556} \cdot 0'000135^{0'5} = 0'75$  m/seg., con un caudal o gasto de:

$Q = 63'92 \cdot 7'373 \cdot 1'007^{1'6556} \cdot 0'000135^{0'5} = 5'54$  m<sup>3</sup>/seg., resultados ambos substancialmente coincidentes con los anteriormente obtenidos mediante la aplicación de la metodología clásica.

b) Funciones múltiples:

$$V = 4'43 \times \sqrt{0'000135 \times 1'007^{1'3006} \times e^{6'1766 - 0'2185 \times 4}} = 0'73 \text{ m/seg.}$$

con un caudal o gasto de:

$Q = 4'43 \cdot 7'373 \cdot 0'000135^{0'5} \cdot 1'007^{1'6503} \cdot e^{3'0883 - 0'10925 \cdot 4} = 5'44$  m<sup>3</sup>/seg., que ofrecen valores ligeramente inferiores a los obtenidos por los restantes procedimientos expuestos, pero perfectamente aceptables.

Por lo que se refiere a la determinación de la “curva de capacidad de este canal”, veamos que, en nuestro caso, resulta inmediato el ajuste no lineal por el método MCO a la función potencial:

$$Q = f(h) = C_1 \cdot h^{n/2},$$

en base a los 7 valores de la tabla anterior, obteniéndose:

$$Q = 1'3366 \cdot h^{1'8906}$$

$$\text{con } C_1 = 1'3366; C_0 = \frac{C_1}{63'92 \times 1^{0'5}} = \frac{1'3366}{63'92 \times 0'000135^{0'5}} \cong 1'8$$

y un exponente hidráulico:  $n = 3'7812$ .

Se tendrá la siguiente representación gráfica:

**MODELO:**  $Q = 1,3366 * h^{1,8906}$

Variable independiente: h(m.)

V. dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1
<b>Q</b>	<b>POW</b>	<b>,999</b>	<b>5</b>	<b>5188,28</b>	<b>,000</b>	<b>1,3366</b>	<b>1,8906</b>
Q	EXP	,943	5	82,60	,000	,13211	1,9549

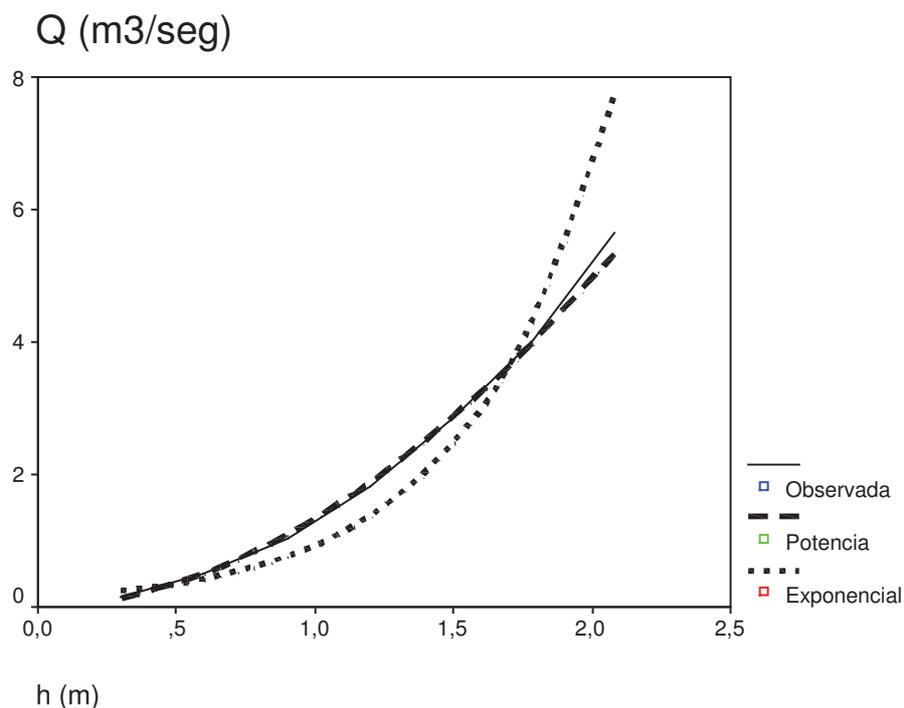


Fig. 1.20. Ajuste de la curva de capacidad del canal a la función potencial

que, en el caso de la función potencial ofrece unos valores muy elevados:

$$\left\{ \begin{array}{l} R^2 = 0,999 \\ F = 5.188,28 \end{array} \right.$$

Por otra parte, en función del contorno o perímetro mojado, se tendrá:

$$1,8 \cdot h^{1,8906} = S \cdot R^{0,6556} = c \cdot R^{1,6556}$$

Veamos, en fin, como las curvas  $Q$ - $h$  ponen de manifiesto cómo crece más rápidamente el caudal que la altura o calado. En el caso de querer aumentar la capacidad portante de un canal, resultaría más conveniente proceder profundizando el lecho o solera (o bien recreciendo los paramentos laterales o paredes) en vez de aumentar la anchura de su sección transversal (que ocupa más terreno), solución ésta que analizaremos a continuación.

c) Hay que tener en cuenta, así mismo, que el perímetro mínimo se refiere exclusivamente al mojado, y por tanto en terrenos llanos en los que la excavación del perfil sea aproximadamente la sección bañada, se obtendrá más economía con la sección hidráulica óptima. Pero en perfiles a media ladera, en los que hay que realizar una excavación importante por encima del nivel de las aguas, este tipo de sección no resulta aconsejable. Tampoco es conveniente esta sección cuando resulte un calado o profundidad que exceda los límites

aconsejables del tirante de agua ( $\approx 3$  metros), que llevarían consigo una excesiva presión hidrostática sobre las paredes y fondo del canal, con el consiguiente aumento de pérdidas por filtración e incluso la aparición de asientos diferenciales del terreno excavado que pueden provocar roturas en las paredes y fondo.

Otro factor a tener en consideración en el precio de la excavación, es el valor de la faja (anchura) de terreno ocupada por el canal, que en algunos casos deberá ser expropiada o sometida a servidumbre de paso.

Luego, para un proyecto de canales es preciso combinar en la práctica las consideraciones exclusivamente hidráulicas con el costo de la excavación necesaria en cada caso, el canal no depende tan sólo del volumen de tierra a remover, sino también de la profundidad de la excavación, del perfil transversal del terreno e incluso del costo de la faja de tierra ocupada por aquellos con sus servidumbres de paso de acueducto correspondientes. En definitiva, que un buen Proyecto de estas características debe conjugar armónicamente los aspectos económicos con los estrictamente técnicos (hidráulicos y constructivos).

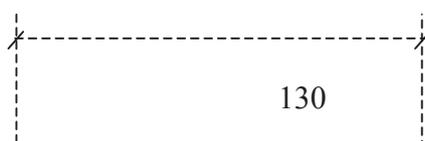
Resumiendo lo expresado hasta ahora, si queremos considerar todos los factores que determinan el costo de la excavación, podemos aceptar la regla de: “adoptar los taludes más próximos a la vertical que permita el terreno, y las secciones más profundas que no produzcan incrementos de gastos excesivos”. En la práctica será necesario proceder por tanteos o aproximaciones sucesivas.

A continuación, se expone una tabla que facilita las dimensiones más apropiadas por unidad de área de la sección transversal del agua en un canal. Para su uso, conocida el área  $S$  y fijado el ángulo  $\alpha$ , obtendremos las restantes dimensiones buscadas multiplicando los valores respectivos de la tabla por  $\sqrt{S}$ . A saber:

Tabla 1.11. Valores a adoptar para el perfil más económico

TALUD	$\alpha$	L	h	$h \cdot \cotg \alpha$	L	c (l+L)	$\cotg \alpha$
Sección rectangular	90°	1'414	0'707	0'000	1'414	2'828	0'000
	60°	0'877	0'760	0'439	1'755	2'632	0'567
<b>1 : 1</b>	<b>45°</b>	<b>0'613</b>	<b>0'740</b>	<b>0'740</b>	<b>2'092</b>	<b>2'704</b>	<b>1'000</b>
	40°	0'525	0'722	0'860	2'246	2'771	1'192
	36°52'	0'471	0'707	0'943	2'357	2'828	1'333
	35°	0'439	0'697	0'995	2'430	2'870	1'402
	30°	0'336	0'664	1'150	2'656	3'012	1'732
2 : 1	26°33'	0'300	0'636	1'272	2'844	3'144	2'000
Semicírculo	----	----	0'798	----	1'596	2'507	----

Lo que daría origen a la sección siguiente:



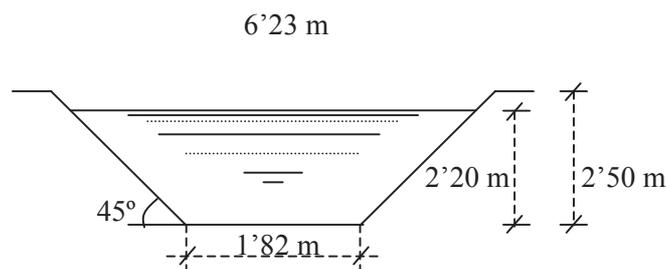


Fig. 1.21. Sección transversal definitiva

En efecto, suponiendo que pudiéramos profundizar en la excavación del terreno fácilmente hasta 2'50 m. por razones geotécnicas, nos quedaría una altura útil del tirante de agua de:

$$H = 2'50 - 0'30 = 2'20 \text{ m.},$$

reservando, como siempre, 30 cm. Para el resguardo hidráulico, con lo que se tendría una sección mojada de:

$$S = 1'83 \cdot h^2 = 1'83 \cdot 2'2^2 = 8'86 \text{ m}^2,$$

$$R = \frac{h}{2} = \frac{2'20}{2} = 1'10 \text{ m. y una velocidad media de:}$$

$V = \frac{Q}{S} = \frac{4}{8'86} = 0'45 \text{ m/seg.}$ , que exige las siguientes dimensiones, con un talud 1:1, haciendo uso de la tabla anterior para la obtención del perfil más económico.

$$L = 2'092 \times \sqrt{8'86} = 6'23 \text{ m.}$$

$$l = 0'613 \times \sqrt{8'86} = 1'82 \text{ m.}$$

$$c = L + l = 6'23 + 1'82 = 8'05 \text{ m.}$$

Así mismo, para esta categoría de rugosidad de paredes y solera ( $K = 4$ ), se tendría una pendiente motriz necesaria de:

$$I = \frac{V^2}{4.086 \times R^{1'3112}} = \frac{0'45^2}{4.086 \times 1'1^{1'3112}} = 0'00004 \text{ m./m.} = 0'04 \text{ m./Km.},$$

que exige una pendiente bastante inferior que en los casos anteriores.

Si calculamos, en fin, la pendiente necesaria en el tramo curvo ya descrito, se tendrá que para  $\lambda = 0'0045$  (consultando la tabla de valores promedios, para  $K = 4$  y  $R = 1'10 \text{ m.}$ ), con lo que:

$$C = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2 \times 9'806}{0'0045}} = 66'02; b = \frac{L+1}{2} = 4'03 \text{ m.};$$

$$I = \frac{0'45^2}{1'1 \times 66'02^2} \times \left( 1 + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{4'03}{100}} \right) = 0'00005 \text{ m./m.} = 0'05 \text{ m./Km.}$$

Veamos, por último, que el desbordamiento de esta última sección tendría lugar, teóricamente, a partir de un valor de  $h > 2'50$  m. (altura del tirante de agua máximo). Entonces, las características dimensionales de la sección transversal serían las siguientes:

$$L = 1 + 2 \cdot h \cdot \cotg \alpha = 1'82 + 2 \cdot 2'50 \cdot \cotg 45^\circ = 6'82 \text{ m.}$$

Las restantes variables de la sección transversal se deducirán por las fórmulas tradicionales del siguiente modo:

$$S = \frac{L+1}{2} \times h = \frac{6'82+1'82}{2} \times 2'50 = 10'8 \text{ m}^2$$

$$c = 1 + \frac{2 \cdot h}{\text{sen} \alpha} = 1'82 + \frac{2 \times 2'50}{\text{sen} 45^\circ} = 8'89 \text{ m.}$$

$$R = \frac{S}{c} = \frac{10'8}{8'89} = 1'21 \text{ m.}$$

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot R \cdot I}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9'806 \cdot 1'21 \cdot 0'00004}{0'0044}} = 0'47 \text{ m/seg.}$$

con un caudal de:

$$Q = S \cdot V = 10'8 \cdot 0'47 = 5'1 \text{ m}^3/\text{seg.}; \text{ o sea:}$$

$$\frac{5'1}{4} = 1'275, \text{ que excede en un } 27'5\% \text{ al caudal del proyecto.}$$

## 9.2. CASO DEL CANAL XERTA-SÉNIA

### 9.2.0. Antecedentes

Se trata aquí del estudio hidráulico del canal del mismo nombre ya construido parcialmente entre los años 1972 y 1980, con una longitud de 33'816 km., distancia entre juntas de dilatación de 75/100 metros, distancia entre juntas de hormigonado de 2'10-2'20 m., sección transversal semicircular en su tramo principal y una capacidad portante teórica (según se afirma en el proyecto de concesión) de 19 m<sup>3</sup>/seg., para el abastecimiento de agua de riego a una zona regable de 16.480 Has. de las comarcas tarraconenses del *Baix Ebre* (44'7% de la superficie) y *Montsià* (55'3% de la superficie), abarcando 12 términos municipales, cuatro en la primera comarca y ocho en la segunda. Arranca a 3.524

metros del origen primitivo, situado en el embalse de la *Vall de l'Infern*. Dicha zona se halla comprendida aproximadamente entre el azud de Xerta, el canal de la Derecha del Ebro, el río Sénia y la cota taquimétrica 200 m.s.n.m. El proyecto técnico inicial se aprobó en agosto de 1972, habiéndose iniciado las obras en enero de 1973 y recibíéndose provisionalmente el 18 de junio de 1980. En el año 2002 se otorgó, por parte de la Confederación Hidrográfica del Ebro, la pertinente concesión administrativa de aguas, con un volumen anual de 72 hm<sup>3</sup> y un caudal punta de 10 m<sup>3</sup>/seg.

Otras características técnicas interesantes del proyecto en cuestión son las siguientes:

- La captación se ha de realizar aguas arriba del azud de Xerta, cuya coronación se halla en la cota 10'55 m.s.n.m. De esta manera, para el caudal mínimo del río, se garantiza un nivel mínimo de agua en la captación a la cota 11'25 m.s.n.m.
- La altura mínima de bombeo ha de ser la cota de la lámina de agua del canal ya construido, o sea 151'385 m.s.n.m.
- El canal transcurre por la parte superior de toda la zona regable siguiendo la curva de nivel 150, de forma que las diferentes curvas de nivel tienen un trazado paralelo al canal tanto por debajo como por encima del mismo. Debido a este hecho, cualquier sectorización que se realice será perpendicular al canal y el terreno presentará un desnivel similar en todos los sectores, pasando de la cota 150 m.s.n.m. a la cota 10 m.s.n.m.
- Todo el trazado del canal se encuentra surcado perpendicularmente por numerosos barrancos y ramblas bastante encajonados y pronunciados, sobre los que el canal transcurre en paso elevado de acueducto, cuyo cálculo hidráulico será también objeto del presente estudio. Estos barrancos habrán de considerarse como límites naturales de los sectores y puntos de desagüe del canal.
- Número de horas de bombeo al día: 16 h.
- Tarifa eléctrica: Alta tensión: Tarifa R-1 hasta 36 kv con una discriminación horaria del tipo 4.
- Material constitutivo de las tuberías: De la misma forma que en otras transformaciones similares, se ha realizado un estudio comparativo de costes de instalación en función del material, diámetros y timbrajes empleados en las redes de distribución ( $P_t < 15$  atm.), resultando más económicos los siguientes materiales:

$\varnothing \leq 315 \text{ mm.}$	PVC
$315 \text{ mm.} < \varnothing \leq 800 \text{ mm.}$	PRFV
$800 \text{ mm.} < \varnothing$	Hormigón armado con camisa de chapa de acero

En las tuberías de impulsión existen tramos con timbrajes superiores a 15  $\text{Kp/cm}^2$  ( $1,5 \text{ N/mm}^2$ ), resultando más aconsejables y baratas las tuberías de fundición dúctil para diámetros moderados (600-450 mm.) y hormigón con camisa de chapa para diámetros superiores. Para timbrajes superiores a 20  $\text{Kp/cm}^2$  ( $2 \text{ N/mm}^2$ ), resulta más económico el acero, tanto con soldadura helicoidal como con soldadura longitudinal.

### 9.2.1. Estudio teórico de la sección circular

Sea el canal semicircular (se trata, en realidad, de un segmento circular) representado en la figura siguiente y admitamos una altura de agua hasta el nivel  $ac$  con el ángulo  $\theta$  (expresado en radianes). Esta sección queda determinada por dos elementos fundamentales: el radio  $r$  y el ángulo  $\theta$ .

Evidentemente, se cumplirá que:

Área segmento circular  $abc = \text{Área sector circular } aoc - \text{Área triángulo } aoc$

$$S = S_1 - S_2$$

pero:

$$S_1 = \frac{1}{2} r \cdot r \theta = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$S_2 = \frac{1}{2} ac \times od = \frac{1}{2} 2r \cos \frac{\theta}{2} \times r \sin \frac{\theta}{2} = r^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

y siendo:

$$\sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta$$

nos quedará:

$$S_2 = \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

y, en consecuencia:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\text{sen } \theta = \frac{1}{2}r^2(\theta - \text{sen } \theta)$$

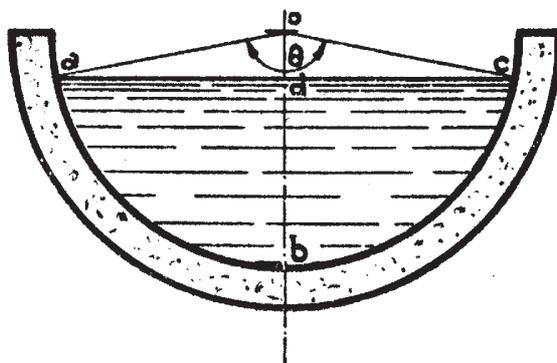


Fig. 1.22. Sección transversal del canal en segmento circular

El perímetro o contorno mojado, vale:

$$c = r \cdot \theta$$

por lo tanto, el radio hidráulico medio o cociente  $S/c$  será:

$$R = \frac{1}{2}r^2(\theta - \text{sen } \theta) : (r\theta) = r \frac{\theta - \text{sen } \theta}{2\theta}$$

Este radio hidráulico será máximo (lo que dará un máximo caudal) cuando se encuentre un valor de  $\theta$  tal que anule la derivada primera (condición necesaria o de primer grado) de la expresión trigonométrica:  $\frac{\theta - \text{sen } \theta}{2\theta}$ . Su resolución nos daría para  $\theta$  el valor del ángulo llano  $180^\circ = \pi$  radianes, es decir, que el radio máximo se consigue cuando el nivel de agua pasa por el punto **o**.

Además, como de las diversas secciones poligonales el semicírculo es la de perímetro mínimo, esta forma de sección es la más ventajosa. En cualquier caso, aunque esta sección transversal es la que posee una mayor sección mojada para un perímetro dado, no suele ser muy utilizada en la práctica, por dificultades constructivas y de conservación o mantenimiento.

### 9.2.2. Comprobación hidráulica del canal construído

Emplearemos, sucesivamente, las diversas formulaciones que han sido objeto de estudio en el presente tema de nuestro libro.

Partiremos, pues, de las siguientes fórmulas:

$$S = \frac{r^2}{2} (\theta - \text{sen } \theta) \quad (1)$$

$$R = \frac{r(\theta - \text{sen } \theta)}{2\theta} \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} \quad (3) \text{ (Manning-Strickler)}$$

para una rugosidad:  $n = 0'014$ , se tendrán los siguientes valores de velocidad y caudal:

$$V = 45 I^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{r(\theta - \text{sen } \theta)}{\theta} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (4)$$

$$Q = V \cdot S = 22'5 I^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{r^8 (\theta - \text{sen } \theta)^5}{\theta^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

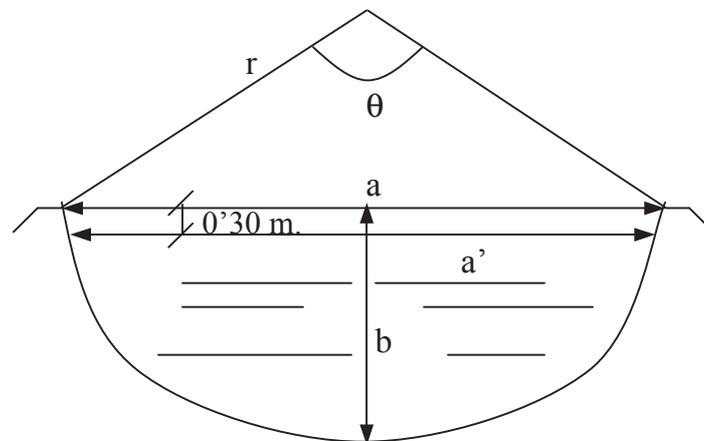


Fig. 1.23. Características dimensionales del canal Xerta-Sénia

Vamos, ahora a plantear diversas hipótesis de cálculo:

### 1º. Canal lleno

$$a = 10'20 \text{ m.}$$

$$b = 2'70 \text{ m.}$$

$$r \text{ sen } \frac{\theta}{2} = \frac{10'2}{2} = 5'1 \quad (6)$$

$$r \cos \frac{\theta}{2} = r - 2'70 \quad (7)$$

$$(6)^2 + (7)^2; r = \frac{5'1^2 + 2'7^2}{2 \times 2'7} = 6'17 \text{ m.}$$

$$\theta = 2 \text{ arc sen } \frac{5'1}{6'17} = 111'58 = 111^\circ 35' = 1'95 \text{ rad.}$$

Para las diferentes pendientes motrices ensayadas I, habida cuenta de la diversidad de tramos que constituyen este canal, se obtienen los siguientes resultados:

<b>S(m<sup>2</sup>)</b>	<b>I(m/m)</b>	<b>V(m/seg)</b>	<b>Q(m<sup>3</sup>/seg)</b>
19'42		(98'28·I <sup>1/2</sup> )	(1.908'79·I <sup>1/2</sup> )
“	0'0002	1'39	27'00
“	<b>0'0003</b>	<b>1'70</b>	<b>33'06</b>
“	0'0004	1'97	38'26
“	0'0005	2'20	42'72
“	0'0006	2'41	46'80
“	0'0007	2'60	50'49
“	0'0008	2'78	53'99

## 2°. Canal con resguardo hidráulico de 0'30 m.

### a) Expresión de Manning-Strickler:

En este caso, se tendrá:

$$r = 6'17 \text{ m.}$$

$$b = 2'70 - 0'30 = 2'40 \text{ m.}$$

$$\theta = 104'67 = 104^\circ 40' = 1'83 \text{ rad.}$$

$$S = 16'42 \text{ m}^2$$

<b>I(m/m)</b>	<b>V(m/seg)</b>	<b>Q(m<sup>3</sup>/seg)</b>
	(91'69·I <sup>1/2</sup> )	(1.505'55·I <sup>1/2</sup> )
0'0002	1'30	21'29

<b>0'0003</b>	<b>1'59</b>	<b>26'08</b>
0'0004	1'83	30'11
0'0005	2'05	33'67
0'0006	2'25	36'88
0'0007	2'43	39'83
0'0008	2'59	42'58

Debe hacerse notar, en cualquier caso, que la consideración de  $n = 0'014$  en la fórmula de Manning-Strickler es bastante exigente.

### b) Expresión de Forchheimer:

Considerando, ahora, un resguardo hidráulico de 30 cm., se tiene (según Forchheimer):

$$V = \delta \cdot R^{0.7} \cdot I^{0.5}; \delta = 70 \text{ (hormigón mal enlucido)}$$

$$R = \frac{r(\theta - \text{sen } \theta)}{2\theta} = \frac{6'17(1'83 - 0'9674)}{2 \times 1'83} = 1'454 \text{ m.};$$

$$S = \frac{r^2}{2} (\theta - \text{sen } \theta) = \frac{6'17^2}{2} (1'83 - 0'9674) = 16'42 \text{ m}^2;$$

de dónde se obtiene:

<b>I(m/m)</b>	<b>V(m/seg)</b>	<b>Q(m<sup>3</sup>/seg)</b>
0'0002	1'29	21'12
<b>0'0003</b>	<b>1'58</b>	<b>25'87</b>
0'0004	1'82	29'87
0'0005	2'03	33'40
0'0006	2'23	36'59
0'0007	2'41	39'52
0'0008	2'57	42'25

que ofrece unos resultados ligeramente inferiores (prácticamente iguales) a la ya calculada expresión de Manning-Strickler.

### c) Expresión de Bazin:

Tomando  $\gamma = 0'16$  (categoría 2: paredes lisas de hormigón fino sin pulir) se tiene, para el mismo resguardo hidráulico:

$$V = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \times \sqrt{R \cdot I} = \frac{87}{1 + \frac{0'30}{\sqrt{1'454}}} \times \sqrt{1'454 \cdot I} = 92'616941 \times \sqrt{I}; \text{ de donde:}$$

I(m/m)	V(m/seg)	Q(m <sup>3</sup> /seg)
0'0002	1'31	21'51
<b>0'0003</b>	<b>1'60</b>	<b>26'34</b>
0'0004	1'85	30'42
0'0005	2'07	34'01
0'0006	2'27	37'25
0'0007	2'45	40'24
0'0008	2'62	43'01

que ofrece unos resultados prácticamente iguales (si bien ligeramente superiores) a los de Manning-Strickler.

#### d) Expresión de Ganguillet y Kütter:

Tomando (al igual que en la formulación ya expresada de Manning-Strickler) el valor de  $n = 0'014$  (para paredes de hormigón poco liso), se tiene la expresión de la velocidad media:

$$V = \frac{23 + \frac{0'00155}{I} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0'00155}{I}\right) \times \frac{n}{\sqrt{R}}} \times \sqrt{R \times I}; \text{ de donde:}$$

I(m/m)	V(m/seg)	Q(m <sup>3</sup> /seg)
0'0002	1'28	21'08
<b>0'0003</b>	<b>1'57</b>	<b>25'74</b>
0'0004	1'81	29'67
0'0005	2'02	33'14
0'0006	2'21	36'27
0'0007	2'39	39'16
0'0008	2'55	41'85

que, así mismo, ofrece resultados muy similares a los anteriores. Obviaremos aquí la aplicación de la expresión simplificada de estos mismos autores, al ser algunas pendientes:  $I \leq 0'0005$  m/m.

A la vista de los resultados anteriores, así como de la aplicación de otras fórmulas usuales (Hazen-Williams, Biel y otras), tomaremos como totalmente aceptables los resultados obtenidos hasta ahora.

### e) Expresión de Knauff:

La fórmula de **Knauff**, específica para canales circulares revestidos no completamente llenos, como es el caso del que nos ocupa, de empleo corriente en Alemania, con un resguardo hidráulico de 30 cm., ofrece la expresión simple:

$$V = \frac{114 \cdot R}{\sqrt{R} + 0'2565} \times \sqrt{I} = \frac{114 \times 1'454}{\sqrt{1'454} + 0'2565} \times \sqrt{I} = 113'35 \times I^{\frac{1}{2}}, \text{ con lo que:}$$

I(m/m)	V(m/seg)	Q(m <sup>3</sup> /seg)
0'0002	1'60	26'32
<b>0'0003</b>	<b>1'96</b>	<b>32'24</b>
0'0004	2'27	37'22
0'0005	2'53	41'62
0'0006	2'78	45'59
0'0007	3'00	49'24
0'0008	3'21	52'64

que resultan sensiblemente superiores a los obtenidos con las restantes formulaciones.

### f) Expresión de Koeschlin:

La fórmula de **Koeschlin**, con el mismo resguardo hidráulico que en los casos anteriores, ofrece una velocidad media de (considerando un  $K = 48$ , para hormigón no enlucido):

$$V = K(1 + 0'6 \times \sqrt{R}) \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{I} = 48(1 + 0'6 \times \sqrt{1'454}) \sqrt{1'454} \cdot \sqrt{I} = 99'75 \cdot I^{\frac{1}{2}},$$

de lo que resulta:

I(m/m)	V(m/seg)	Q(m <sup>3</sup> /seg)
0'0002	1'41	23'16

<b>0'0003</b>	<b>1'73</b>	<b>28'37</b>
0'0004	2'00	32'76
0'0005	2'23	36'62
0'0006	2'44	40'12
0'0007	2'64	43'33
0'0008	2'82	46'33

El empleo de esta fórmula es adecuado en este caso, habida cuenta de que, en todo momento, el radio hidráulico es:  $R < 3'00$  m.

### g) Expresiones de Franquet:

Veamos, por último, que según las formulaciones universales propuestas por este mismo autor, con una categoría de rugosidad  $K = 3'0$  (canales revestidos de hormigón), se tendría, como ya se ha visto anteriormente por aplicación de las fórmulas correspondientes:

g-1) Modelo simple:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot R \cdot I}{0'004 \times R^{-0'2952}}} = 70'02 \times R^{0'6476} \times I^{0'5} = 70'02 \times 1'454^{0'6476} \times I^{0'5} = 89'23 \times I^{\frac{1}{2}},$$

g-2) Modelo múltiple:

$$\begin{aligned} V &= 4'43 \times \sqrt{R^{1'3006} \times e^{6'1766 - 0'2185 \times K}} \times \sqrt{I} = \\ &= 4'43 \times \sqrt{1'454^{1'3006} \times e^{6'1766 - 0'2185 \times 3}} \times \sqrt{I} = 89'33 \times I^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

que ofrece resultados prudentes por la banda inferior, a saber:

<b>I(m/m)</b>	<b>V(m/seg)</b>	<b>Q(m<sup>3</sup>/seg)</b>
0'0002	1'26	20'74
<b>0'0003</b>	<b>1'55</b>	<b>25'41</b>
0'0004	1'79	29'34
0'0005	2'00	32'80
0'0006	2'19	35'93
0'0007	2'36	38'81
0'0008	2'53	41'49

Veamos que, en todos los casos, hemos remarcado los resultados obtenidos para una consideración de la pendiente media del cauce en estudio de  $I = 0'0003$  m/m., ya que es ésta la pendiente general aproximada que resulta de la medición completa del canal en toda su longitud ya construida, a saber:

$$I = \frac{150 - 140}{33.816} \cong 0'0003 \text{ m/m.}$$

En cualquier caso, la velocidad de circulación del agua por este canal y, consecuentemente, el caudal portante, podrían verse incrementados considerablemente efectuando un sellado de juntas con banda de polipropileno o cinta de PVC, que puede aplicarse tanto en juntas estrechas como anchas, independientemente del hecho de que la junta a que sustituya sea de berenjeno relleno de arcilla o producto asfáltico. En algunos tramos de este canal, habida cuenta del tiempo transcurrido desde su construcción, el hormigón puede encontrarse con cierto grado de degradación, lo que provocaría un elevado número de filtraciones, tanto por las juntas como por la aparición de fisuras.

Cabría también la posibilidad de impermeabilizar el canal con láminas de PVC en toda la sección, previa la limpieza de la superficie de apoyo de la lámina, colocación de un geotextil y colocación de la lámina por tramos, con longitudes que puedan facilitar su manejo. La fijación lateral, aunque se puede realizar con mortero tixotrópico (caro) también podría efectuarse mediante pletinas de aluminio o de PVC, para evitar su oxidación. La fijación transversal se llevaría a cabo cada 50 metros para evitar que las tracciones del agua puedan producir su rotura. Estas fijaciones transversales se realizarían con mortero tixotrópico, con dos capas de extensión del mismo, sujetando la lámina al estar perforada en los bordes.

Si se considera, por último, que el recrecimiento de la sección semicircular ya construida podría realizarse con facilidad (mediante aceros redondos corrugados empotrados en el borde superior del paramento existente a distancias convenientes, colocación de cercos de varilla, estribos o mallazo electrosoldado y su posterior encofrado y hormigonado *in situ*), el caudal circulante por ella podría alcanzar razonablemente las “puntas” o máximos precisos (35-40 m<sup>3</sup>/seg.) para efectuar el trasvase previsto en el vigente Plan Hidrológico Nacional (aprobado por la Ley 10/2001, de 5 de julio) hacia las cuencas hidrográficas del Júcar, Segura y Almería (Sur), sin necesidad alguna de recurrir a la construcción de cualquier otra conducción libre o forzada, a tal efecto.

### **3º. Sección hidráulica óptima**

Veamos, por último, que la sección hidráulica óptima semicircular, para una sección mojada de:  $S = 16'42 \text{ m}^2$ , exigiría un calado del canal de:

$$b = 0'798 \times \sqrt{16'42} = 3'23 \text{ m.}, \text{ con un contorno o perímetro mojado de:}$$

$$c = 2'507 \times \sqrt{16'42} = 10'16 \text{ m. y una anchura de la lámina de agua de:}$$

$$a' = 1'596 \times \sqrt{16'42} = 6'47 \text{ m.}$$

### 9.2.3. Tramos del canal en movimiento variado

Cuando siendo constante el caudal circulante varían su sección y la pendiente del fondo, como ha podido comprobar el que suscribe en ciertos tramos del canal que estudiamos, el movimiento que se producirá será *variado*, gradual o simplemente variado, según que dicha variación sea continua o brusca, movimientos que se presentan más frecuentemente en los cauces naturales como el del vecino río Ebro del cual, por cierto, tomará sus aguas el canal Xerta-Sénia. Dos ejemplos tenemos en el movimiento producido en el lecho de un río: en las proximidades de un puente o por causa de la construcción de una presa. La corriente estrecha del lecho -debido a las pilas del puente o por la propia presa- origina un hinchamiento de la masa líquida aguas arriba, con la brusca variación del nivel del plano o lámina del agua. Este desnivel o *remanso* (de elevación o depresión) lleva aparejado que, durante cierto recorrido de la corriente, desaparece la constancia de la profundidad del agua, la sección mojada y la velocidad media de los filetes líquidos, y a causa de esta variación la fuerza viva libre se emplea en la elevación del nivel del agua. Una vez alejada la corriente de la presa o del obstáculo, y a partir de una cierta distancia de aquellos, el movimiento empieza a ser sensiblemente uniforme.

En el movimiento permanente no uniforme, la velocidad del agua en cada punto es constante e independiente del tiempo, pero variable de un punto a otro. Esta clase de movimiento plantea el problema de conocer la variación del nivel de la superficie libre del líquido bajo determinadas condiciones (curvas de remanso y de resalto), cuestión ésta que ya fue estudiado en profundidad por J. B. Belanger y otros investigadores y que huelga desarrollar aquí.

El movimiento permanente puede considerarse como una sucesión de movimientos uniformes. El modo más sencillo de tratar el problema del movimiento permanente consiste en seguir la siguiente metodología: a) desprestigiar las variaciones de la fuerza viva del agua, esto es, el trabajo o energía (positiva o negativa) correspondiente a las aceleraciones, de uno u otro signo, que la masa líquida experimenta al seguir el cauce de la corriente que se considere, y b) calcular el rozamiento de modo exactamente igual que cuando se trata de un movimiento uniforme. Por tanto, si las velocidades, o sea, las fuerzas vivas, no son considerables y la curvatura de la superficie libre resulta

suficientemente ligera, puede calcularse ésta (supuesto conocido el perfil longitudinal del cauce en todo su recorrido y el nivel del agua en un punto determinado) dividiendo el curso del canal en pequeñas secciones sucesivas.

Hay que tener en cuenta, en fin, que de no circular por el cauce del canal todo el caudal con su correspondiente calado, sería posible e incluso necesario construir represamientos o vertederos sumergidos que mantuvieran el nivel adecuado por encima del correspondiente “colchón de agua”, al objeto de unificar la profundidad de las tomas y disminuir la altura manométrica de elevación de los bombeos intermedios hasta las balsas de regulación proyectadas (en número de 18, con capacidad para almacenar tres días de consumo máximo y posterior distribución a toda la red de riego). Ello puede presentarse en este caso, habida cuenta de que las necesidades de caudal de la zona regable proyectada son bastante inferiores a la capacidad portante de la conducción principal, como ya se ha comprobado, por lo que el nivel de la lámina de agua correspondiente a la sección mojada necesaria sería muy bajo. En estas circunstancias, debe considerarse que en un cauce cilíndrico como el que nos ocupa (véase la Fig. 1.24.) todos los perfiles son idénticos y los niveles vienen dados por líneas horizontales a distinta altura trazadas sobre la sección transversal, constante. Así pues, para cada tramo comprendido entre dos perfiles transversales consecutivos se puede determinar fácilmente la sección media  $S$  y, por consiguiente, para un caudal dado  $Q$ , también la pendiente  $J$  que corresponde.

En esta tesitura, sea  $\Delta h$  la diferencia de alturas entre los niveles de dos perfiles consecutivos,  $\Delta x$  la distancia entre éstos, e  $i$  la pendiente, constante, de la solera del cauce. Resulta, para la de la superficie libre del trozo considerado:

$$J = i - \frac{\Delta h}{\Delta x}, \text{ de donde: } \Delta x = \frac{\Delta h}{i - J}$$

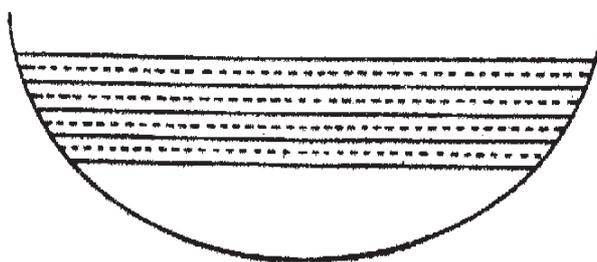


Fig. 1.24. Sección transversal del cauce cilíndrico

Se obtiene, de tal modo (Fig. 1.25.), una línea quebrada que alcanza a zonas tanto más alejadas del muro de presa cuanto más pequeñas sean las divisiones  $\Delta h$ . En el límite, cuando éstas fuesen indefinidamente pequeñas, la curva de remanso resultaría asintótica de una paralela a la solera del canal. Así:

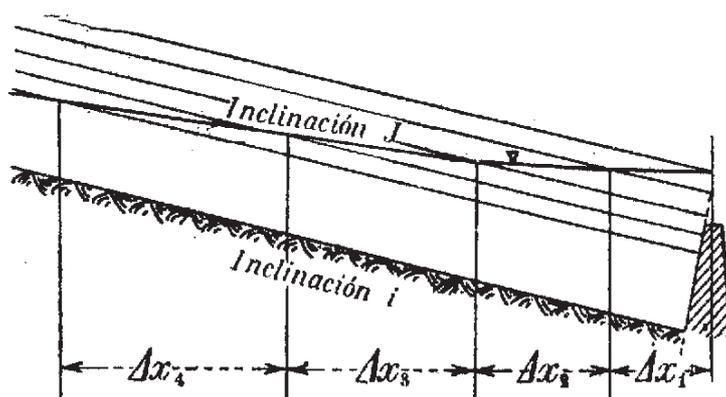


Fig. 1.25. Curva continua de remanso. Sección longitudinal

Por consiguiente, en los cauces cilíndricos se llega a una curva continua de remanso, que puede calcularse analíticamente por diferentes procedimientos tradicionales (G. Tolkmitt, M. Rühlmann, F. Schaffernak, fórmula parabólica, ecuación diferencial, etc.). Los cálculos de Rühlmann y Tolkmitt fueron continuados por J. Dankwerts, quien construyó una gráfica en la que, a partir de una recta inclinada a  $45^\circ$ , que representa el nivel primitivo, se llevan como ordenadas las relaciones  $z/h_0$ , obteniendo así un haz de curvas del que puede deducirse fácilmente la forma de la curva completa de remanso, hallándose el trazado gráfico completado por una tabla numérica. Actualmente, existe *software* adecuado para el cálculo computerizado de este tipo de curvas. Ahora bien, en todos los cálculos a efectuar en estas condiciones es necesario el estudio de todas aquellas perturbaciones que modifiquen la corriente estacionaria del canal, como por ejemplo los cambios de sección, la presencia de obstáculos sumergidos en el cauce, entradas y salidas del agua, cambios de pendiente de la solera, etc.

#### 9.2.4. Estudio del canal principal

Para el enlace de las tuberías de impulsión del bombeo a realizar desde el río Ebro hasta el inicio de la sección en segmento circular ya construida, está prevista, en el proyecto concesional de diciembre de 1999, la construcción de una sección trapecial, con paredes de hormigón “in situ”, del tipo:

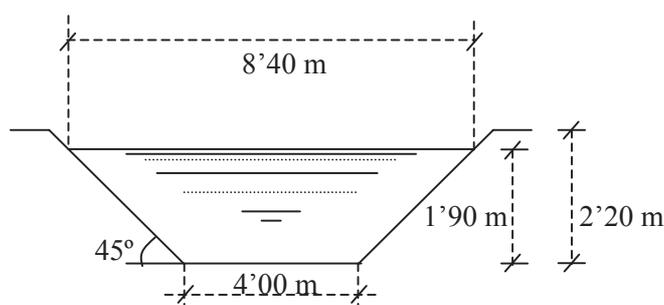


Fig. 1.26. Sección transversal trapecial

$L = 1 + 2 \cdot h \cdot \cotg \alpha$ ; de dónde:

$$\cotg \alpha = \frac{L - 1}{2 h} = \frac{8'40 - 4'00}{2 \times 2'20} = \frac{4'40}{4'40} = 1$$

de dónde, efectivamente:  $\alpha = 45^\circ$ .

Aunque se anuncie un “calado normal”, en el proyecto técnico correspondiente, de 1'70 m., suponiendo, como en los casos anteriores, un resguardo hidráulico de 0'30 m., se tendrá:  $h = 1'90$  m. (ver figura anterior), con lo que:

$L = 4'00 + 2 \times 1'90 \times \cotg 45^\circ = 7'80$  m., de dónde se tendrán las siguientes variables del problema:

*Sección mojada:*

$$S = \frac{L + 1}{2} \times h = \frac{7'80 + 4'00}{2} \times 1'90 = 11'21 \text{ m}^2$$

*Perímetro mojado:*

$$c = 1 + \frac{2 \times h}{\text{sen } \alpha} = 4'00 + \frac{2 \times 1'90}{\text{sen } 45^\circ} = 9'37 \text{ m.}$$

*Radio hidráulico medio:*

$$R = \frac{S}{c} = \frac{11'21}{9'37} = 1'20 \text{ m.}$$

En el mismo proyecto concesional se anuncia una pendiente media del 0'306 por mil y un número de Manning:  $n = 0'018$ , con lo que resultará una velocidad media de:

$$V = \frac{1}{0'018} \times 1'2^{\frac{2}{3}} \times 0'000306^{\frac{1}{2}} = 1'10 \text{ m/seg. , y:}$$

$$Q = S \times V = 11'21 \times 1'10 = 12'33 \text{ m}^3 / \text{seg.}$$

que resulta, incluso, superior al caudal de diseño ( $10 \text{ m}^3/\text{seg.}$ ).

Empleando la formulación universal propuesta por este autor, y en base a la interpolación desarrollada anteriormente para una categoría de rugosidad  $K = 3'4$ , se tendrá una velocidad media de:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{2 \times g \times R \times I}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2 \times g \times R \times I}{0'00432 \times R^{-0'302812}}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 9'806 \times 1'2 \times 0'000306}{0'00432 \times 1'2^{-0'302812}}} = 1'33 \text{ m/seg.}, \end{aligned}$$

lo que implicaría un caudal circulante de:

$Q = 11'21 \times 1'33 = 14'91 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , que resulta ser bastante superior al supuesto en el expresado proyecto concesional.

Así pues, veamos que el diseño hidráulico de este canal podría ser un tanto contradictorio. Como ya se ha visto, para este tipo de sección transversal trapecial, y suponiendo una sección mojada de  $11'21 \text{ m}^2$ , con un gasto de  $10 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , se tendría una geometría óptima (sección de máximo rendimiento hidráulico) de:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{10}{11'21} = 0'89 \text{ m/seg.}, \text{ y las siguientes dimensiones:}$$

$$L = 2'092 \times \sqrt{11'21} = 7'00 \text{ m.}$$

$$l = 0'613 \times \sqrt{11'21} = 2'05 \text{ m.}$$

$$L = 0'74 \times \sqrt{11'21} = 2'48 \text{ m.}$$

$$c = l + L = 2'05 + 7'00 = 9'05 \text{ m.}$$

$$R = \frac{S}{c} = \frac{11'21}{9'05} = 1'24 \text{ m.}$$

lo que exigiría una pendiente motriz media de sólo:

$$I = \frac{\lambda \times V^2}{2 \times g \times R} = \frac{0'00432 \times R^{-0'302812} \times V^2}{2 \times g \times R} = \frac{0'00432 \times 0'89^2}{2 \times 9'806 \times 1'24^{1'302812}} =$$

$= 0'000132 \text{ m/m.} = 0'132 \text{ por mil}$ , que resultaría bastante inferior a la prevista de  $0'306 \text{ por mil}$ .

## 9.2.5. Acueducto Tosca

### 9.2.5.1. Trabajando como conducción libre

Para salvar el barranco del mismo nombre, se construyó en su día un acueducto soportado por pilares, en el p.k. 8'5 de la conducción. De hecho, a lo largo del canal existente, se observan varios de estos acueductos de características geométricas similares. Se trata de una sección transversal rectangular del tipo:

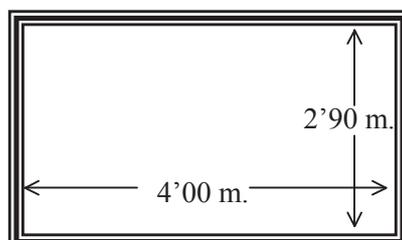
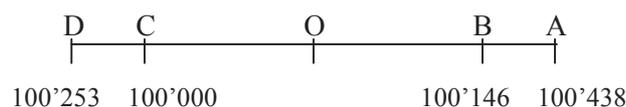


Fig. 1.27. Sección transversal del acueducto

El esquema lineal del acueducto es el siguiente, con las cotas de la solera correspondientes:



Distancias:

$$AD = 247'0 \text{ m.}$$

$$CB = 241'6 \text{ m.}$$

En el tramo AD, se tendría una pendiente motriz de:

$$I = \frac{(100'438 - 100'253) \text{ m.}}{247'0 \text{ m.}} = 0'000749 \text{ m/m.}$$

, con una pendiente motriz menor en el tramo CB (comprobada *in situ* taquimétricamente por el que suscribe), de:

$$I = \frac{(100'146 - 100'000) \text{ m.}}{241'6 \text{ m.}} = 0'000604 \text{ m/m.}$$

, por lo que adoptaremos prudentemente el valor:  $I = 0'0006 \text{ m/m}$ . Se pueden analizar dos casos o situaciones diferentes:

#### a) Sección llena:

$$\left. \begin{array}{l} S = 4 \times 2'90 = 11'60 \text{ m}^2 \\ c = 4 + 2 \times 2'90 = 9'80 \text{ m.} \end{array} \right\} R = \frac{S}{c} = 1'18 \text{ m.}$$

La formulación de Manning-Strickler, ofrecerá:

$$V = \frac{1}{0'014} \times 1'18^{\frac{2}{3}} \times 0'0006^{\frac{1}{2}} = 1'95 \text{ m/seg.}$$

$$Q = 11'60 \times 1'95 = 22'66 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

**b) Sección con resguardo hidráulico:**

Con un resguardo hidráulico de 30 cm., como siempre, se tendrá:

$$S = 4 \times 2'60 = 10'40 \text{ m}^2, c = 4 + 2 \times 2'60 = 9'20 \text{ m.}; R = \frac{S}{c} = 1'13 \text{ m.}$$

$$V = \frac{1}{0'014} \times 1'13^{\frac{2}{3}} \times 0'0006^{\frac{1}{2}} = 1'90 \text{ m/seg.}$$

$$Q = 10'40 \times 1'90 = 19'76 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

Si ahora aplicamos, para el cálculo del caudal circulante por el acueducto, la formulación múltiple propuesta por este autor, se tendrá (suponiendo una categoría de rugosidad  $K = 2'5$ , habida cuenta de la técnica constructiva empleada en paredes y solera):

$$\begin{aligned} Q &= 4'43 \times c \times I^{0'5} \times R^{1'6503} \times e^{3'0883 - 0'10925 \times K} = \\ &= 4'43 \times 9'20 \times 0'0006^{0'5} \times 1'13^{1'6503} \times e^{2'815175} = 20'40 \text{ m}^3 / \text{seg.}, \end{aligned}$$

con una velocidad media de:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{20'40}{10'40} = 1'96 \text{ m/seg.}$$

que ofrecen resultados similares a los obtenidos por aplicación de la fórmula de Manning-Strickler.

Veamos, en fin, que el citado acueducto de Tosca, al igual que los restantes construidos en esta conducción con igual sección y pendiente, constituyen un cierto estrangulamiento en la capacidad portante media del canal Xerta-Sénia, puesto que con un resguardo hidráulico de 0'30 m. ofrecen caudales

circulantes del orden de  $20 \text{ m}^3/\text{seg.}$  frente a los  $26\text{-}28 \text{ m}^3/\text{seg.}$  del resto de la conducción ya construida, para una pendiente media de  $I = 0'0003 \text{ m./m.}$

Por otra parte, al tratarse de una sección mojada rectangular, puede considerarse como un caso límite de la sección trapezoidal en la cual  $\alpha = 90^\circ$ , por lo que la sección hidráulica óptima (o de caudal máximo) debería ser capaz de minimizar la función del contorno o perímetro mojado, a saber:

$$c(h) = \frac{S}{h} + 2h$$

que al derivar e igualar a cero (condición necesaria o de primer grado) ofrece:

$$c'(h) = -\frac{S}{h^2} + 2 = 0$$

Condición suficiente o de segundo grado:

$$c''(h) = \frac{2hS}{h^4} = \frac{2S}{h^3}, \text{ con lo que:}$$

$c''(h) = \frac{4h^2}{h^3} = \frac{4}{h} > 0$ , luego se trata, efectivamente, de un mínimo relativo o local.

$$\text{De donde: } S = 2 \cdot h^2 \text{ y } l = 2 \cdot h; R = \frac{2h^2}{4h} = \frac{h}{2}$$

Luego la sección rectangular hidráulica óptima es el semicuarto circunscriptible al semicírculo de centro  $O$  y radio  $h$ . Esto es:

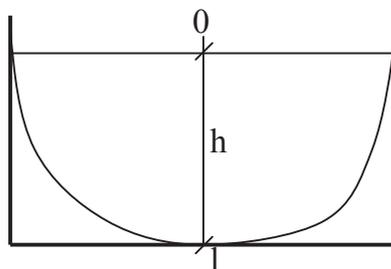


Fig. 1.28. Sección transversal rectangular

Generalizando, podemos decir que en toda sección transversal de máximo caudal puede inscribirse siempre un semicírculo que tiene su centro en el punto medio de la superficie del agua.

En esta tesitura, las dimensiones óptimas de dicho acueducto serán:

$$10'40 = 2 \cdot h^2; \text{ de dónde: } h = \sqrt{\frac{10'40}{2}} = 2'28 \text{ m. y } l = 2 \cdot h = 2 \cdot 2'28 = 4'56 \text{ m.,}$$

valores dimensionales que resultan ligeramente diferentes de los existentes en dicho acueducto que, por otra parte, como hemos visto, resulta insuficiente para transportar el caudal previsto para el resto de la conducción ya ejecutada (26-28 m<sup>3</sup>/seg.). Ello podría obviarse mediante su refuerzo con tuberías laterales en *bypass*, mediante la construcción de otro acueducto paralelo o bien aumentando la velocidad media de circulación mediante bombeo centrífugo o por ruedas hidróforas. En este último caso, respetando el resguardo hidráulico antedicho, sería necesaria una velocidad media en el acueducto reseñado, para un caudal de 27 m<sup>3</sup>/seg., del orden de:

$$V = Q/S = 27'00/10'40 = 2'60 \text{ m./seg.}$$

#### 9.2.5.2. Trabajando como conducción ligeramente forzada

Si ahora consideramos que esta sección podría trabajar, en cierto modo, como una conducción forzada (con cierta presión), se tendría:

$$c = 8 + 2 \times 2'90 = 13'80 \text{ m. ; } R = \frac{S}{c} = \frac{11'60}{13'80} = 0'84 \text{ m.}$$

$V = \frac{1}{0'014} \times 0'84^{\frac{2}{3}} \times 0'0006^{\frac{1}{2}} = 1'56 \text{ m./seg.}$ , que ofrecería un caudal circulante máximo de:

$Q = 11'60 \times 1'56 = 18'10 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , inferior incluso al supuesto en el caso anterior de comportamiento hidráulico como conducción libre, tanto a tubo lleno como considerando 30 cm. de resguardo hidráulico.

Resulta conveniente, complementariamente, contrastar los valores obtenidos hasta ahora con los que resultan de la aplicación de la fórmula de Hazen-Williams (1920), muy utilizada en USA y Japón para el cálculo de tuberías con movimiento turbulento intermedio (en la zona de transición), no

siendo válida cuando se contienen sólidos en suspensión. En efecto, en este tipo de circulación, el coeficiente de fricción depende del número de Reynolds, o sea:

$$f \approx \frac{1}{\text{Re}^n} \quad \text{o bien : } J \approx V^{2-n}$$

Esta dependencia será intermedia entre la que corresponde a tuberías plenamente rugosas, para las cuales  $n = 0$ , y la de tuberías lisas, en las cuales, para la zona cubierta por la fórmula de Blasius, se produce que:  $n = \frac{1}{4}$ .

Luego en la zona de transición expresada (para  $n = 1/8$ ), se puede escribir en términos aproximados:

$$f \approx \frac{1}{\text{Re}^{0.125}}, \text{ es decir: } J \approx V^{2-0.125} = V^{1.875}, \text{ o bien: } V \approx J^{0.54}$$

que es, en realidad, la proporcionalidad directa que caracteriza a la mencionada fórmula de Hazen-Williams (aunque quizás fuera más preciso referirla a  $J^{0.53}$ ).

Así pues, se tendría una velocidad media del orden de (expresada en unidades métricas):

$$V = 0.85 \times C \times R^{0.63} \times J^{0.54}$$

Tomando un valor:  $C = 128$  (para tubos de hormigón armado), se tendrá una velocidad media de:

$$V = 0.85 \times 128 \times 0.84^{0.63} \times 0.0006^{0.54} = 1.77 \text{ m./seg.},$$

que ofrecería un caudal circulante de:

$$Q = 11.60 \times 1.77 = 20.53 \text{ m}^3/\text{seg.},$$

que resulta intermedio entre los anteriormente hallados, por lo que podría proponerse a los efectos de su adopción.

Notemos, así mismo, que el campo de aplicación de esta fórmula viene definido por los valores del nº de Reynolds (normal y de rugosidad) de:

$\text{Re} > 4.000, \text{ o bien:}$
$0.3 < \text{Re}^* < 60.$

Veamos, en fin, que para resolución del presente problema, o de tipos parecidos a éste, puede resultar de utilidad el empleo (especialmente para efectuar tanteos o aproximaciones) de diversos ábacos para la aplicación de las diferentes fórmulas de cálculo propuestas. Sería el caso, por ejemplo, de los

ábacos siguientes expresamente contruidos para las fórmulas de Bazin y Koeschlin. Así:

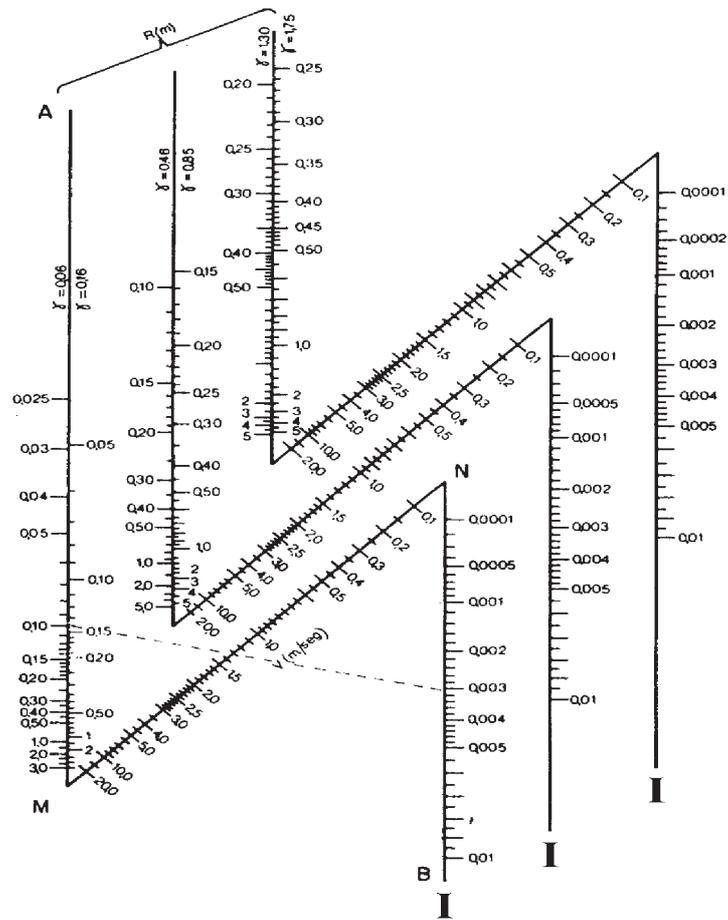


Fig. 1.29. Ábaco de la fórmula de Bazin

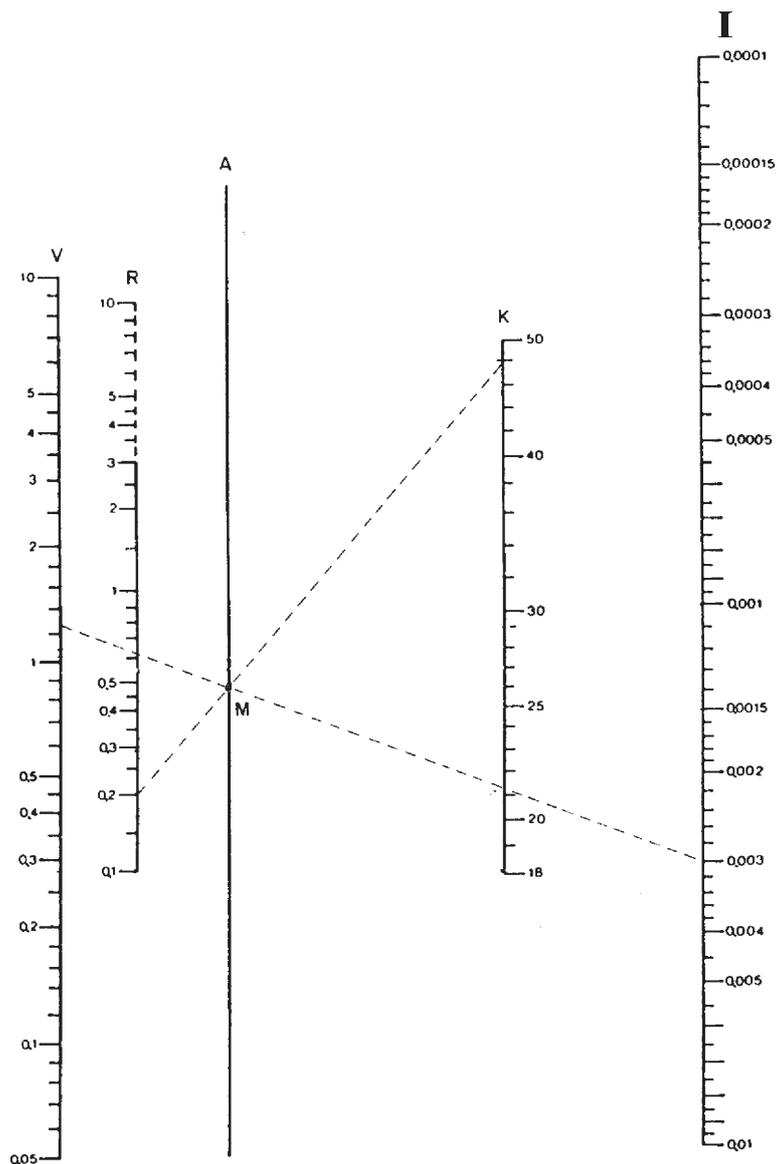


Fig. 1.30. Ábaco de la fórmula de Koeschlin

\* \* \* \* \*



## CAPÍTULO II

### CONDUCCIONES FORZADAS: UNA CONTRIBUCIÓN TEÓRICA A LA DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN APROXIMADA DE CHRISTIANSEN

#### RESUMEN

El cálculo de las pérdidas de carga en una tubería con distribución discreta del gasto, régimen permanente y uniforme, caudal constante por derivación y salidas equidistantes (conducción a presión con servicio en ruta), fue abordado y resuelto por *Christiansen* en el año 1942, para el caso en que la primera derivación estuviera situada a una distancia del extremo aguas arriba de la tubería igual al espaciamiento existente entre todas las derivaciones. Posteriormente, en 1957, *Jensen* y *Fratini* introdujeron la correspondiente modificación en el valor del coeficiente de *Christiansen* para el caso de que la primera salida se hallara a una distancia del comienzo del ramal (línea portagoteros o portaaspersores) igual a la mitad de su espaciamiento. Dichas circunstancias se vienen presentando, sistemáticamente, en el diseño de las redes de riego por aspersión y en los localizados de alta frecuencia (microaspersión, exudación y goteo). El ensayo original, de tipo académico e ingenieril, que se desarrolla a continuación, trata de la justificación matemática de la función aproximada de *Christiansen*, que constituye un tema de notable interés teórico y de escasa o nula difusión en la bibliografía especializada existente al respecto.

**CONDUCCIONS FORÇADES:  
UNA CONTRIBUCIÓ TEÒRICA A LA DEDUCCIÓ DE LA  
FUNCIÓ APROXIMADA DE CHRISTIANSEN**

**RESUM**

El càlcul de les pèrdues de càrrega en una canonada amb distribució discreta de l'aigua, règim permanent i uniforme, cabal constant per derivació i sortides equidistants (conducció a pressió amb servei en ruta), fou estudiat i resolt per *Christiansen* l'any 1942, per al cas que la primera derivació es situés a una distància de l'extrem aigües amunt de la canonada igual a l'interval existent entre les mateixes derivacions. Posteriorment, al 1957, *Jensen* i *Fratini* introduïren la corresponent modificació en el valor del coeficient de *Christiansen* per al cas que la primera sortida es trobi a una distància de l'inici de la canonada (línia portagoters o portaaspersors) igual a la meitat d'aquell interval. Les esmentades circumstàncies es presenten, sistemàticament, en el disseny de les xarxes de reg per aspersió i en els localitzats d'alta freqüència (microaspersió, exudació i degoteig). L'assaig original, de tipus acadèmic i enginyeril, que es desenvolupa a continuació, tracta de la justificació matemàtica de la funció aproximada de *Christiansen*, la qual cosa constitueix un tema de notable interès teòric i d'escassa o nul·la difusió en la bibliografia especialitzada existent al respecte.

**FORCED CONDUCTIONS:  
A THEORETICAL CONTRIBUTION TO THE DEDUCTION OF  
THE APPROXIMATE FUNCTION BY CHRISTIANSEN**

ABSTRACT / SUMMARY

The estimate of loss of cargo in a pipeline with a discreet cost distribution, a permanent and uniform regimen, a constant flow by derivation and equidistant outlets (conduction under pressure with service in route), was approached and resolved by *Christiansen* in 1942, in which case the first derivation is situated at the farthest distance upstream of the pipeline equal to the existing space between the derivations. Later, in 1957, *Jensen* and *Fratini* introduced the corresponding modification in the value of the coefficient by *Christiansen*, in which case the first outlet of the branch is found at a distance (sprinkling or spray line) equal to half of its space. Such circumstances occur systematically, in the design of watering networks by spray and in those sites of high frequency (microspray, exudation and sprinkling). The original study of an academic and engineering nature, which is developed subsequently deals with *Christiansen's* mathematical justification, and constitutes a theme of notable theoretical interest with little or no diffusion in the existent specialized bibliography in this material.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el primer número de la revista *AGRÓNOMOS* del Colegio Oficial de Ingenieros Agrónomos de Levante (correspondiente al verano de 1989) se publicó una brillante colaboración del Dr. Teodoro Montalvo López, Catedrático de Hidráulica General y Agrícola (Departamento de Ingeniería Agroforestal de la Universidad Politécnica de Valencia) y a la sazón Director de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de la capital del Turia. Se abordaba allí, con claridad y profundidad encomiables, el problema de la generalización del coeficiente de Christiansen –empleado para el cálculo de las pérdidas hidráulicas de carga en una tubería con distribución discreta del gasto, caudal constante por derivación y salidas equidistantes– para cualquier valor de la relación:

$$r = \frac{l_0}{l}$$

y de los parámetros  $n_0$  y  $m$ , así como se posibilitaba el cálculo directo de las pérdidas de carga en una tubería de característica única formada por un tramo inicial de cualquier longitud, en régimen permanente y uniforme, y de un tramo final con distribución discreta de caudales y servicio en ruta. Estas circunstancias se vienen presentando, sistemáticamente, en el diseño de las redes de riego por aspersión y en los localizados de alta frecuencia (RLAF, microaspersión, exudación y goteo).

Tuve la oportunidad de ponerme en contacto, más recientemente, con el Dr. Teodoro Montalvo, que me propuso el estudio o deducción matemática de la función aproximada de Christiansen, por tratarse de un tema de notable interés teórico y, al parecer, de escasa o nula difusión en la bibliografía especializada existente al respecto. De hecho, según el profesor Montalvo, el Departamento de Matemáticas de aquella Universidad lo había venido intentando infructuosamente hasta la fecha.

El ensayo que sigue aquí se desarrolla constituye, pues, la justificación matemática (conseguida por quien suscribe) de la aproximación de Christiansen, de fecundas aplicaciones en el diseño de las modernas instalaciones de riego. Puede considerarse como continuación de los artículos publicados por este autor en la misma revista *AGRÓNOMOS* (nº: 2, Otoño-Invierno 1989/90) y en *ENGINYERIA AGRONÒMICA* (nº: 1, Junio de 1990, del Colegio Oficial y la Asociación de Ingenieros Agrónomos de Cataluña).

## 2. JUSTIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN APROXIMADA

Tenemos así, el caso general de una tubería con servicio en ruta, con  $n_0$  derivaciones de caudal constante, con un distanciamiento entre salidas  $l$  y encontrándose la primera derivación a una distancia  $l_0$  del origen de la conducción. Así:

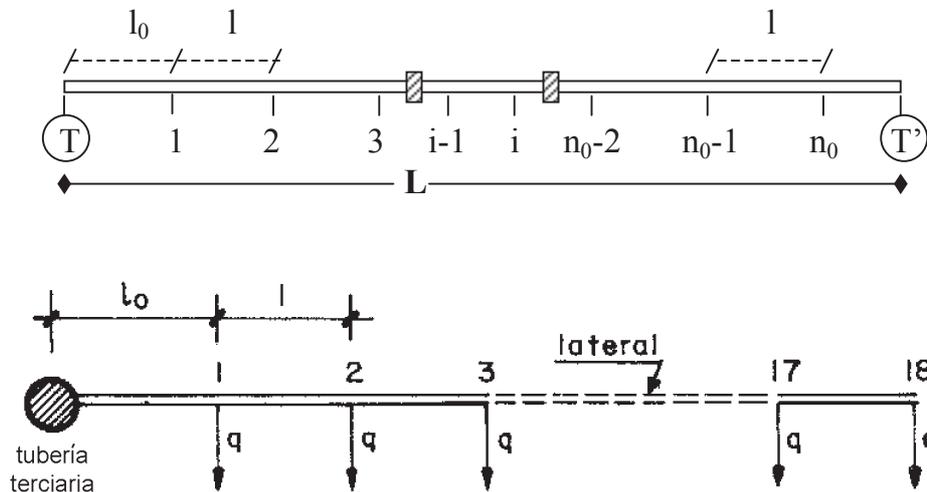


Fig. 2.1. Tubería con servicio en ruta y derivaciones equidistantes de caudal constante  $q$

que se cumplirá  $\forall l / l_1 = l_2 = \dots = l_i = \dots = l$ .

Pues bien, el caudal de salida de T, que se agota en T', será:

$$Q = n_0 \cdot q$$

y la longitud total de la conducción, teniendo en cuenta que:  $l_0 = r \cdot l$ , es:

$$L = l_0 + (n_0 - 1) \cdot l = (r + n_0 - 1) \cdot l$$

Teóricamente, en una tubería de las características expresadas, el coeficiente de reducción por salidas, aplicable a las pérdidas de carga que experimenta una tubería con servicio único en su extremo final, respondería a la expresión:

$$F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m$$

para la cual Christiansen (1942) obtuvo la función aproximada siguiente:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2}, \text{ en la cual:}$$

$n_0$  = número de derivaciones o salidas.  
 $m$  = exponente de la fórmula utilizada en el cálculo hidráulico de las pérdidas de carga.

El problema que aquí se plantea constituye una generalización del problema clásico de una tubería sencilla con varias tomas intermedias (de número no excesivo) y diámetro constante, cuya resolución suele presentarse por aplicación de la conocida fórmula de Darcy y la determinación previa de la línea de niveles piezométricos.

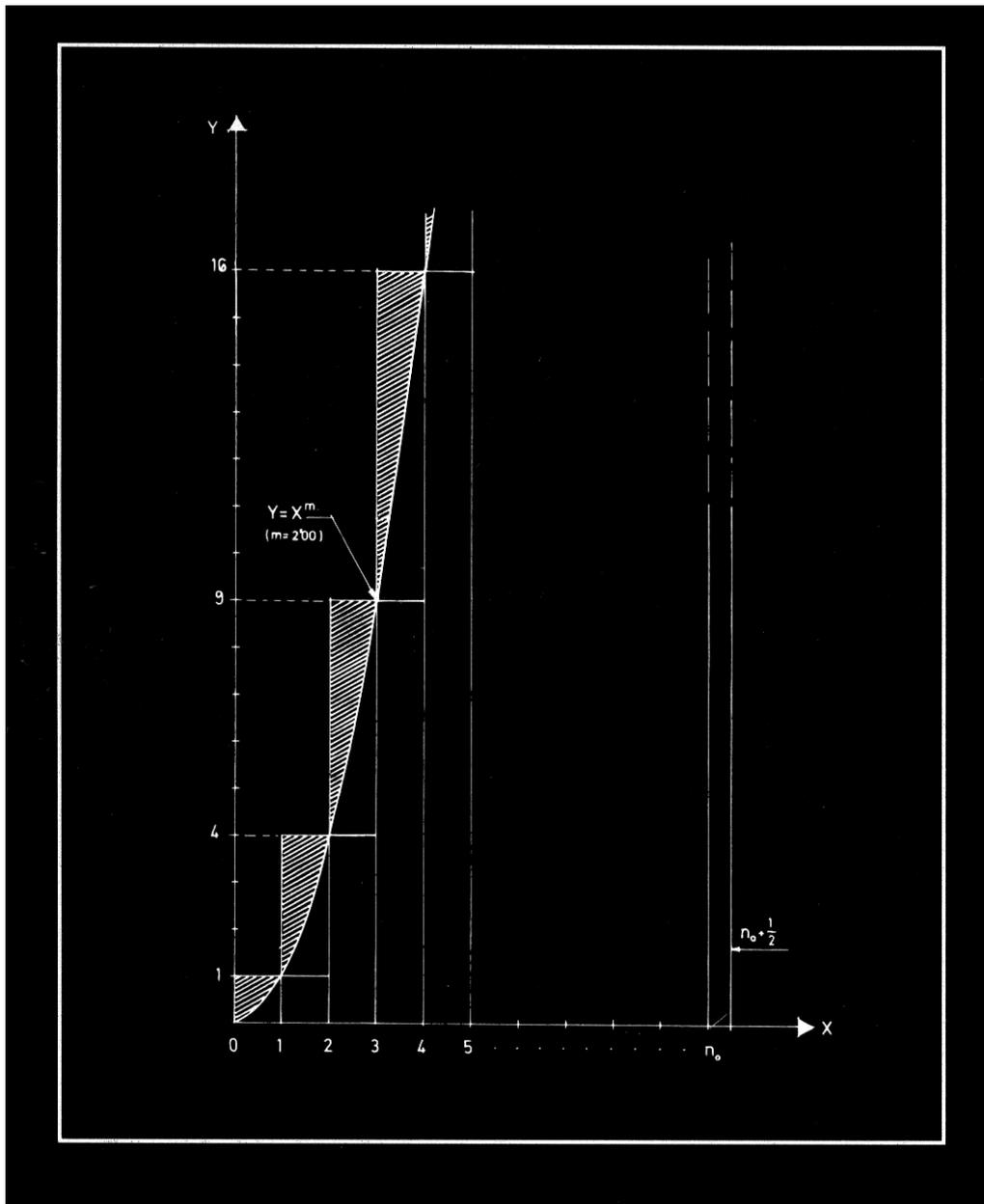
En el caso de tratarse de derivaciones equidistantes y caudal constante  $q$  por cada una de ellas, la determinación de dicha línea piezométrica se obtendría dividiendo la carga total  $h$  en partes proporcionales a la sucesión de números reales:  $n_0^2, (n_0-1)^2, \dots, 1$ .

Pues bien, vamos a tratar, aquí, de explicar o justificar matemáticamente la llamada aproximación de Christiansen, basándonos, inicialmente, en el concepto clásico de “suma integral”.

En efecto, veamos que la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n_0^m$$

representa la suma o adición de las áreas de los rectángulos yuxtapuestos de alturas:  $1, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m, \dots$ , y de base igual a la unidad. Así:

Fig. 2.2. Representación gráfica para  $m = 2'00$ 

Tal y como se puede ver en la representación gráfica adjunta (realizada, v.gr., para  $m = 2'00$ ), la curva o función potencial  $y = x^m$ , comprende, entre ella y el eje de abscisas  $OX$ , un área que difiere de la buscada en aproximadamente la mitad del área del rectángulo mayor, ya que, efectivamente, la zona representada en la figura anterior por , puede considerarse equivalente a la mitad de la superficie de este rectángulo.

Asimismo, se obtendrá una buena aproximación a esta determinación tomando para la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m$$

el área existente bajo la curva y sobre el eje de abscisas, pero entre los límites u ordenadas extremas:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = n_0 + \frac{1}{2}$$

por la aplicación del propio concepto de integral definida. El límite superior se incrementará en  $\frac{1}{2}$  para así obtener, precisamente, la mitad de la superficie del rectángulo mayor, con lo que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = \int_0^{n_0 + \frac{1}{2}} x^m dx = \left[ \frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^{n_0 + \frac{1}{2}} = \frac{(n_0 + \frac{1}{2})^{m+1}}{m+1} = \frac{n_0^{m+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n_0}\right)^{m+1}}{m+1}$$

Ahora bien, se cumple que:

$$\left(1 + \frac{1}{2n_0}\right)^{m+1} = 1 + (m+1) \cdot \frac{1}{2n_0} + \frac{(m+1)m}{2} \cdot \frac{1}{4n_0^2} + \dots$$

por la fórmula clásica del desarrollo del binomio de Newton-Tartaglia. Los términos que no aparecen son de tercer grado y sucesivos en  $\frac{1}{n_0}$  y se pueden despreciar, a efectos prácticos, teniendo en cuenta su bajísima magnitud cuando el número de derivaciones o salidas  $n_0$  resulta suficientemente elevado, tal y como acostumbra a suceder en la realidad.

Así pues, el coeficiente experimental de reducción por salidas, anteriormente definido, tomará el valor:

$$F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m = \frac{n_0^{m+1} \cdot \left[1 + (m+1) \cdot \frac{1}{2n_0} + \frac{(m+1)m}{2} \cdot \frac{1}{4n_0^2}\right]}{n_0^{m+1} \cdot (m+1)} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2n_0} + \frac{m}{8n_0^2}$$

Con todo esto, ya hemos obtenido los dos primeros términos de la fórmula aproximada, cuya deducción es objeto de nuestro estudio, a saber:

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{2n_0}$$

Ahora bien, el tercero de ellos:  $\frac{m}{8n_0^2}$  no coincide con el  $\frac{\sqrt{m-1}}{6n_0^2}$ , que encontraremos en esta fórmula. Sin duda, esto es debido a que este tercer término ha estado cambiado o alterado expresamente (lo cual resultaría lícito ya que, en definitiva, nos encontramos ante un proceso de aproximación) con el único objetivo de que la fórmula sea válida para los casos particulares:  $m = 1, 2, 3$ .

Veamos, a continuación, lo que sucede en cada uno de ellos:

**Para  $m=1$** , se tendrá la serie numérica:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i = \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + n_0,$$

ya que se trata de la suma de los  $n_0$  primeros términos consecutivos de una progresión aritmética de razón igual a la unidad. Así:

$$F = \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1)}{2n_0^2} = \frac{n_0 + 1}{2n_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n_0}$$

En este nivel, hay que cambiar el término  $\frac{m}{8n_0^2}$  por otro como, por ejemplo,  $\frac{m-1}{8n_0^2}$ , para que se obtenga 0 cuando  $m=1$ .

**Para  $m=2$** , se tendrá la serie numérica:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^2 = \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1) \cdot (2n_0 + 1)}{6} = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n_0^2$$

En efecto, esto puede demostrarse por inducción, ya que la igualdad anterior se cumple, evidentemente, para  $n_0=1$ , ya que:

$$\frac{1 \cdot (1 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$$

Supongamos, también, que resulta cierta para  $n_0$ . Entonces, se tendrá:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n_0^2 = n_0 \cdot (n_0 + 1) \cdot (2n_0 + 1) / 6$ , y sumando  $(n_0 + 1)^2$  a los dos miembros de la anterior expresión, resultará:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n_0^2 + (n_0 + 1)^2 &= \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1) \cdot (2n_0 + 1)}{6} + (n_0 + 1)^2 = \\ &= \frac{(n_0 + 1) \cdot [n_0 \cdot (2n_0 + 1) + 6 \cdot (n_0 + 1)]}{6} = \\ &= \frac{(n_0 + 1) \cdot [n_0 \cdot (2n_0 + 3) + 4n_0 + 6]}{6} = \\ &= \frac{(n_0 + 1) \cdot [n_0 \cdot (2n_0 + 3) + 2(2n_0 + 3)]}{6} = \\ &= \frac{(n_0 + 1) \cdot (n_0 + 2) \cdot (2n_0 + 3)}{6} \end{aligned}$$

Así pues, la igualdad es cierta para  $(n_0 + 1)$ , tal y como pretendíamos demostrar. Entonces, el coeficiente de reducción por salidas adoptará el valor:

$$F = \frac{(n_0 + 1)(2n_0 + 1)}{6n_0^2} = \frac{2n_0^2 + 3n_0 + 1}{6n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{6n_0^2}$$

En este nivel, hay que cambiar el término  $\frac{m-1}{8n_0^2}$  por otro, como por ejemplo el  $\frac{m-1}{6n_0^2}$ , para que adopte el valor 0 cuando  $m=1$ , y además valga  $\frac{1}{6n_0^2}$ , cuando  $m=2$ .

**Para  $m=3$** , se tendrá la serie numérica:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^3 = \frac{n_0^2 \cdot (n_0 + 1)^2}{4} = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n_0^3;$$

en efecto, al igual que en el caso anterior, veamos que esta identidad se cumple para:  $n_0=1$ . Siguiendo el mismo método de inducción, supongámosla también cierta para  $n_0$ . Entonces, se cumplirá que:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n_0^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n_0)^2$ , y sumando  $(n_0 + 1)^3$  a los dos miembros de la igualdad, con lo cual ésta no varía, resultará:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n_0^3 + (n_0 + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n_0)^2 + (n_0 + 1) \cdot (n_0 + 1)^2 = \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + n_0)^2 + n_0 (n_0 + 1)^2 + (n_0 + 1)^2.$$

Pero, según hemos visto en el primer caso (para  $m=1$ ), se cumple que:

$$n_0(n_0 + 1) = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n_0),$$

con lo que, también tendremos que:

$$n_0 (n_0 + 1)^2 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n_0) \cdot (n_0 + 1), \text{ y por tanto:}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n_0 + (n_0 + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n_0)^2 + 2 (1 + 2 + 3 + \dots + n_0) \cdot \\ (n_0 + 1) + (n_0 + 1)^2 = [1 + 2 + 3 + \dots + n_0 + (n_0 + 1)]^2,$$

lo que prueba que la igualdad es cierta para  $(n_0 + 1)$ , tal y como pretendíamos demostrar. Así pues, el coeficiente de reducción por salidas adoptará el valor:

$$F = \frac{1}{n_0^4} \cdot \frac{n_0^2 (n_0 + 1)^2}{4} = \frac{n_0^4 + 2n_0^3 + n_0^2}{4n_0^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{4n_0^2}$$

En este nivel, hay que cambiar el término  $\frac{m-1}{6n_0^2}$  por otro que continúe valiendo 0 para  $m=1$ , que valga  $\frac{1}{6n_0^2}$ , para  $m=2$  y que valga  $\frac{1}{4n_0^2}$ , cuando  $m=3$ . En el mismo orden de ideas, veamos que resulta útil su substitución por el término  $\frac{\sqrt{m-1}}{6n_0^2}$ , ya que esta última expresión vale 0 para  $m=1$ , vale  $\frac{1}{6n_0^2}$  para  $m=2$ , y, para  $m=3$  no vale  $\frac{1}{4n_0^2}$  en sentido estricto, pero sí toma un valor próximo que es:  $\frac{\sqrt{2}}{6n_0^2}$ , y,  $\frac{\sqrt{2}}{6} = 0'2357022$  es aproximadamente igual a:  $1/4 = 0'2500000$  (concretamente, el primer valor es un 94'28% del segundo), lo que satisface plenamente, de hecho, nuestras exigencias prácticas.

Siendo la fórmula así obtenida válida para los valores del exponente  $m = 1, m = 2, m = 3$ , o sea:  $m \in (1, 2, 3)$ , resultará además válida para los números reales no enteros del tipo:  $m \in [1, 4]$ , esto es:  $1' \dots, 2' \dots, 3' \dots$ , y también, aunque con menor grado de aproximación, para los valores supuestos:  $4' \dots, 5' \dots$ , etc., que pudiera adoptar el coeficiente utilizado en la fórmula empleada en el cálculo de las pérdidas de carga de la conducción, según los diferentes casos.

Veamos, al respecto de los diferentes valores que puede tomar el coeficiente  $m$ , que, en general, las pérdidas unitarias de carga de una tubería a presión o conducción forzada, en función del caudal por ella circulante, responden a una expresión potencial del tipo:

$$J = n \cdot Q^m$$

que, en el caso de la expresión simplificada de Darcy, adopta el valor:  $m = 2'00$ , así como en las de Lèvy, Gaukler, Weissbach, Kütter, Mougny, Chèzy, Sonier, Manning-Strickler o Catani. En las de la sociedad SOGREAH (1962), Flamant o Blasius es  $m = 1'75$ , así como en las de Saph y Schoder; en la de Scimemi-Veronese, es  $m = 1'78571$ , en la de Hazen-Williams es  $m = 1'852$ , en las de Biegeleisen y Boukowsky es  $m = 1'90$ , así como en la de Meyer-Peter, mientras que en las diversas formulaciones propuestas por Scobey encontramos los valores:  $m = 1'80, 1'90$ , etc., pero siempre dentro del intervalo de existencia al que nos hemos referido, y expresándolas, todas ellas, como fórmulas potenciales monomias.

La versatilidad de tan amplia formulación induce a concluir que en tal información están incluidos los diferentes estilos de trabajo sucesivamente empleados a lo largo de casi dos centurias y representativos, en el fondo, de una evolución de los conocimientos que tienden a generalizar y unificar, cada vez más, sus afirmaciones, en la prosecución de una síntesis final aún no alcanzada (en este mismo sentido, nosotros hemos realizado un esfuerzo en el cálculo de las conducciones libres, que puede hallarse en el capítulo anterior).

Resulta ineludible, hoy en día, distinguir con arreglo a la experimentación de Von Kármán-Nikuradse y de Colebrook-White, las tuberías lisas, rugosas e intermedias, denominaciones éstas establecidas no en función de la contextura de la pared, sino según el comportamiento hidráulico, por virtud de la configuración de la capa límite que se halla perfectamente definida en cada caso. Sucede, de este modo, que la ley de resistencia en las tuberías lisas es única, independiente de su material constitutivo y expresable por una ley analítica de la que la fórmula de Blasius es una primera aproximación que ha sido prolongada por otros investigadores.

Así pues, resultará, en definitiva:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2}$$

**tal y como se quería demostrar, que es la expresión aproximada adoptada por Christiansen en su estudio acerca de las conducciones hidráulicas con servicio en ruta.**

Conviene tener presente, asimismo, que esta fórmula sólo resultará válida para el caso concreto en el cual la primera salida se encuentre del principio de la conducción a una distancia  $l_0 = l$  ( $r = 1$ ).

Es obvio, por otra parte, que cuando el número de derivaciones o salidas aumenta indefinidamente (o sea, cuando el caudal se reparte a lo largo de toda la conducción forzada, como en el caso del riego por exudación), la expresión anterior se convertirá en:

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} F = \frac{1}{1+m}$$

, que constituye, en estas circunstancias, el valor mínimo al cual tiende el coeficiente experimental de reducción que nos ocupa. Si el caudal residual o extremal de la conducción es nulo, y considerando el caso normal  $m = 2'00$ , veamos que ello nos indica que la pérdida de carga que tiene lugar es la tercera parte de la que se produciría si el gasto o caudal inicial recorriera toda la tubería y saliera libremente por el extremo de la misma (y ello considerando que la tubería en cuestión distribuye un gasto uniformemente repartido que se obtiene sumando todos los gastos de las derivaciones y dividiendo dicha suma por la longitud total de la conducción).

Normalmente, en los RLAF se cumplirá que  $m = 1'75$ , mientras que cuando el régimen es laminar, situación ésta frecuente en el riego por exudación en que la pérdida de carga es, prácticamente, continua y no discreta, se tendrá que con:  $m = 1'00$  y  $F = 0'500$  y con  $m = 2'00$  se tiene  $F = 0'333$ .

El estudio más preciso de este caso se desarrolla en el epígrafe siguiente.

### 3. TUBERÍA QUE DISTRIBUYE UN GASTO O CAUDAL UNIFORMEMENTE REPARTIDO

Sea una tubería OB de longitud  $l$  y diámetro  $D$ , que tiene su origen en un grupo de bombeo o bien en un depósito de agua elevado como el de la figura siguiente, con varias tomas laterales uniformemente espaciadas, por las cuales se derivan gastos idénticos. A saber:

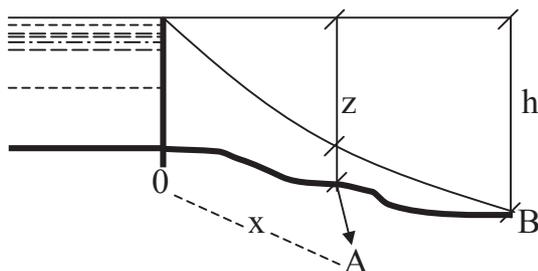


Fig. 2.3. Tubería saliente de un depósito con tomas de idéntico caudal

Cuando en una conducción de estas características, es suficientemente grande el número de derivaciones (típico, v. gr, en los sistemas de riego por aspersión y localizados de alta frecuencia, como la microaspersión, la exudación y el goteo en sus diferentes modalidades), se efectúa el cálculo, con gran aproximación, suponiendo que se distribuye un gasto uniformemente repartido a lo largo del trayecto, el cual se obtiene sumando todos los gastos de las derivaciones y dividiendo dicha suma por la longitud total de la tubería o distancia:  $l = OB$ . A este gasto así obtenido, se le denomina gasto por unidad de longitud de tubería.

En estos casos, puede asimilarse el movimiento del agua por la tubería a una sucesión de movimientos uniformes infinitesimales de ley variable con el caudal -o bien con la sección de la conducción si ésta no es constante- debido a la proximidad de los cambios y a la pequeña variación del caudal que tiene lugar como consecuencia de ellos. Si bien sería preciso, para la intachable resolución del problema, el conocimiento exacto de dicha ley de variación del caudal, podríamos admitir, con buena aproximación, que el servicio en el trayecto se reparte uniformemente en toda la longitud de la tubería, disminuyendo el caudal en una cierta cantidad  $q$  por unidad de longitud de la tubería. **Es decir, que se gasta o consume un caudal  $q$  por unidad de longitud de la conducción.**

Utilizando, ahora, la siguiente notación:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0 = \text{gasto en el origen } 0 \text{ de la tubería.} \\ q = \text{gasto derivado por unidad de longitud de tubería.} \end{array} \right.$$

$Q$  = gasto disponible en un punto genérico  $A$ , situado a una distancia del origen  $OA = x$

evidentemente se verificará que:

$$Q = Q_0 - q \cdot x \quad (1)$$

siendo  $q \cdot x$  el gasto distribuido en el trayecto  $OA$ .

Si expresamos la pérdida de carga por rozamiento en el tramo  $OA$ , mediante la fórmula:

$$\begin{aligned} z &= n \int_0^x Q^2 dx = n \int_0^x (Q_0 - q \cdot x)^2 dx = \\ &= n \int_0^x (Q_0^2 - 2q \cdot x \cdot Q_0 + q^2 \cdot x^2) dx \end{aligned}$$

La constante de integración es nula, pues para  $x = 0$ , también:  $z = 0 \Rightarrow c = 0$ ;

o sea:

$$z = n(Q_0^2 \cdot x - q \cdot Q_0 \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot q^2 \cdot x^3) = n \left[ (Q_0 + q \cdot x)^2 \cdot x - q(Q_0 + q \cdot x)x^2 + \frac{1}{3} \cdot q^2 \cdot x^3 \right]$$

$$z = n(Q_0^2 \cdot x + Q_0 \cdot q \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot q^2 \cdot x^3) \quad (2)$$

que es la ecuación de una parábola cúbica o función representativa de la línea de niveles piezométricos.

Si llamamos  $Q_e$  al caudal residual o extremal que sale por el extremo  $B$  de la tubería tendremos, según la ecuación (2):

$$h = n(Q_e^2 \cdot l + Q_e \cdot q \cdot l^2 + \frac{1}{3} \cdot q^2 \cdot l^3) \quad (3)$$

Ahora bien, si el extremo  $B$  de la tubería es un punto muerto, o sea, si todo el caudal se deriva a lo largo de la conducción sin que al punto  $B$  llegue caudal residual alguno, se tendrá evidentemente que:

$$Q_e = 0 \text{ y por tanto, en (1) se tendrá: } Q_0 = q \cdot l$$

y sustituyendo estos valores en la ecuación (3), obtendremos:

$$h = \frac{1}{3} \cdot n \cdot q^2 \cdot l^3 = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (q \cdot l)^2 \cdot l = 0'333 n \cdot Q_0^2 \cdot l \quad (4)$$

expresión que nos indica que la pérdida de carga es la tercera parte de la que se produciría si el gasto  $Q_0$  recorriera toda la tubería y saliera libremente por el extremo  $B$  de la misma, tal como ya se ha enunciado en el epígrafe anterior.

La ecuación (4) también puede expresarse así:

$$h = \frac{1}{3} n \cdot Q_0^2 \cdot l = n \cdot Q'^2 \cdot l$$

de donde resulta:

$$Q' = \frac{Q_0}{\sqrt{3}} = 0'577 \cdot Q_0 \quad (5)$$

lo que significa que la pérdida de carga es equivalente a la que se produciría si por la tubería circulara un gasto constante e igual a:

$$\frac{Q_0}{\sqrt{3}} = 0'577 \cdot Q_0$$

Estudiaremos a continuación el procedimiento que se utiliza para determinar el diámetro conveniente, para que la tubería pueda distribuir el gasto uniformemente repartido en la forma anteriormente indicada.

La ecuación (3) equivale a la formulación:

$$h = n(Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{3} q^2 \cdot l^2) \cdot l = n \cdot Q_1^2 \cdot l = J_1 \cdot l;$$

introduciendo un caudal ficticio  $Q_1$  que al circular por la tubería de manera constante produzca una pérdida de carga  $h$ .

$$Q_1^2 = Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{3} q^2 \cdot l^2 \quad (6)$$

pero si tenemos en cuenta que:

$$(Q_e + \frac{1}{2} q \cdot l)^2 = Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{4} q^2 \cdot l^2 < Q_1^2$$

$$(Q_e + \frac{1}{\sqrt{3}} q \cdot l)^2 = Q_e^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{3} q^2 \cdot l^2 > Q_1^2$$

resulta el valor de  $Q_1$  acotado entre los límites:

$$Q_e + \frac{1}{2} q \cdot l < Q_1 < Q_e + \frac{1}{\sqrt{3}} q \cdot l$$

o lo que es igual:

$$Q_e + 0'5 \cdot q \cdot l < Q_1 < Q_e + 0'577 \cdot q \cdot l$$

**luego puede tomarse con suficiente aproximación, como valor de  $Q_1$ , para el cálculo del diámetro interior de la conducción:**

$$Q_1 = Q_e + 0'55 q \cdot l$$

, que es la fórmula que se emplea usualmente para el diseño de las redes de abastecimiento de agua agrícola, industrial y doméstica.

Conociendo ya los valores de  $Q_1$  y  $J = h/l$ , se halla fácilmente el valor de  $D$  y  $S$ .

Si al punto B no llegara ningún caudal (con lo que:  $Q_e = 0$ ), se tomará, según hemos demostrado, como valor de  $Q_1$  (de 6):

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot q \cdot l ;$$

o lo que es lo mismo:

$$Q_1 = 0'577 \cdot q \cdot l \approx 58\% \text{ de } Q_0$$

#### 4. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

La expresión general teórica que Christiansen trató de simplificar, correspondiente al coeficiente de reducción por  $n_0$  salidas o derivaciones, tal como se ha visto en los expositivos anteriores, viene dada por la formulación siguiente, para un exponente de la velocidad del agua  $m$  dado:

$$F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m = f(n_0)$$

para la cual Christiansen (1942) obtuvo la función aproximada siguiente:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2} = g(n_0),$$

siendo:  $m \in [1'75, 2'00]$  para las diferentes formulaciones usualmente empleadas en el cálculo de las pérdidas hidráulicas de carga de una tubería a presión con servicio en ruta, distribución discreta del caudal por salidas equidistantes y régimen permanente y uniforme.

En definitiva, el problema que se planteó Christiansen consistía en obtener la aproximación de la función  $g(x)$  a la función  $f(x)$  con el mínimo error posible, en un entorno del punto de abscisa:  $x = n_0$ , o dicho de otro modo, que dada la función real de variable real:  $F = f(x)$ , definida en  $x = n_0$ , se pretendía encontrar otra función real de variable real:  $F = g(x)$  lo más “sencilla” posible y que se “aproximase” suficientemente a  $f(x)$  en un entorno de radio suficientemente pequeño del punto considerado, hasta el punto que en  $x = n_0$ , también se cumple que:  $f(n_0) = g(n_0)$ . En este caso, el error que se comete en un entorno del punto  $x = n_0$ , cuando en vez de  $f(x)$  se toma la función  $g(x)$ , vendrá dado por:

$$E = |f(n_0 + dx) - g(n_0 + dx)|$$

Por otra parte, la *medida de la aproximación* de  $g(x)$  a  $f(x)$  es un cierto número  $r$ , tal que el límite siguiente existe, es finito y distinto de 0:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{E}{dx^r} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{|f(n_0 + dx) - g(n_0 + dx)|}{dx^r}$$

De alguna manera las funciones que llamamos “elementales” como  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log x$ ,  $e^x$ , ..., etc., no resultan, en realidad, nada elementales; por ejemplo, si deseamos calcular  $\sin x$ , encontramos que, salvo para unos pocos valores:  $x = 0$ ,  $x = \pi/4$ ,  $x = \pi/2$ , ..., etc., el cálculo directo de  $\sin x$  es imposible. No ocurre así con las funciones polinómicas:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

donde las operaciones a realizar son simplemente aritméticas. Por ello, tiene gran interés obtener fórmulas que permitan **aproximar** las funciones irracionales o trascendentes mediante polinomios, con el fin de calcular de manera aproximada los valores de aquéllas. Como es natural, en toda aproximación es preciso obtener estimaciones fidedignas del error cometido. Obviamente, no podemos esperar un conocimiento exacto del error, puesto que ello supondría también un conocimiento preciso de la magnitud que aproximamos y haría innecesaria la aproximación. Lo que deseamos, en cualquier caso, es **acotar**, de manera que al realizar la aproximación tengamos la seguridad de que el error cometido no supera cierta cantidad.

Recordemos que en el Análisis matemático, el concepto de diferencial supone una aproximación lineal de la función en un entorno del punto en consideración. Diríamos que si  $f(x)$  es una función derivable en el punto  $n_0$ , la función afín  $g(x)$  es tal que:

$$g(x) = f(n_0) + f'(n_0) \cdot (x - n_0)$$

y aproxima los valores de  $f(x)$  en un entorno de  $n_0$ . Puede verse gráficamente así:

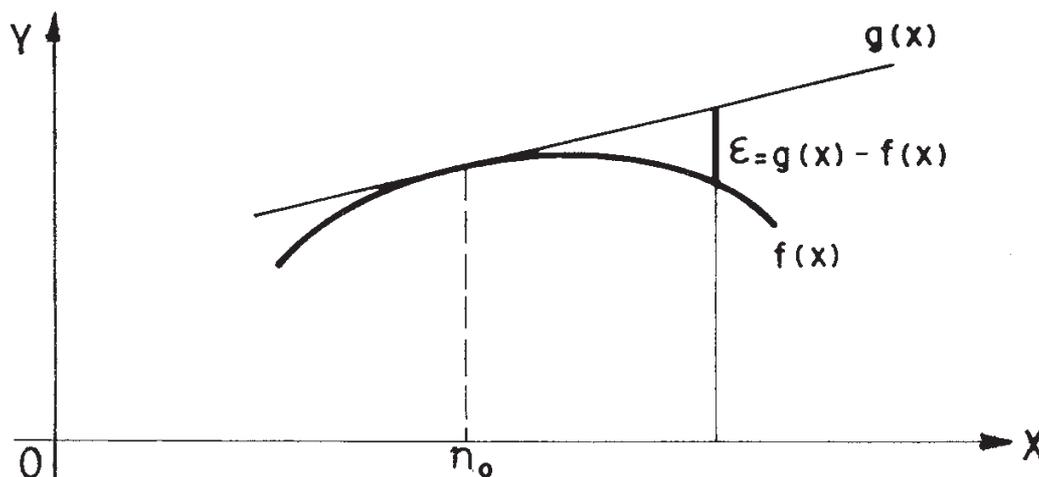


Fig. 2.4. Aproximación entre las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  en el punto:  $x = n_0$

No obstante, el sentido de la palabra “aproxima”, en la afirmación anterior, resulta, a nuestro juicio, excesivamente vago. Podemos precisarlo más si decimos que:

$$\lim_{x \rightarrow n_0} [g(x) - f(x)] = 0 \quad (7)$$

pero, aunque esa igualdad sugiere que  $f(x)$  y su aproximación  $g(x)$  son más y más parecidos cuánto más próximo está  $x$  de  $n_0$ , no nos proporciona una idea precisa de la magnitud del error cometido al sustituir  $f(x)$  por  $g(x)$  para un valor particular de  $x$ .

Siguiendo este camino podemos afirmar, aún más, que:

$$\lim_{x \rightarrow n_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - n_0} = \lim_{x \rightarrow n_0} \left( \frac{f(x) - f(n_0)}{x - n_0} - f'(n_0) \right) = f'(n_0) - f'(n_0) = 0 \quad (8)$$

Esta afirmación contenida en la expresión (8), aunque sigue siendo imprecisa, resulta más fuerte que la anterior (7), y nos garantiza, no solamente que el error  $|g(x) - f(x)|$  se hace más y más pequeño al acercarnos a  $n_0$ , sino también que esa cantidad comparada con  $(x - n_0)$ , que es una magnitud que decrece hacia cero, tiende también a cero; esto lo resumiremos diciendo que  $|g(x) - f(x)|$  tiende a cero más rápidamente que  $(x - n_0)$ . Con símbolos, las aseveraciones anteriores se expresan escribiendo:

$$g(x) - f(x) = o(x - n_0)$$

que se lee  $g(x) - f(x)$  es un infinitésimo (una cantidad infinitamente pequeña) comparado con  $(x - n_0)$ . Esta notación, que se corresponde con la “o pequeña” de

Landau<sup>1</sup> resulta muy útil en el cálculo de límites y para describir términos cuya expresión exacta puede ser complicada, pero cuyo comportamiento en el límite nos es conocido. Para precisarla mejor, damos la definición siguiente:

“Decimos que la función  $h(x)$  es  $o((x-a)^n)$ ,  $h(x) = ((x-a)^n)$ , si se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{(x-a)^n} = 0 \text{ ”}$$

Así pues, la notación infinitesimal:  $o((x-a)^n)$  nos permite ofrecer una información **cuantitativa** más que cuantitativa sobre el error cometido en la aproximación funcional.

Por otra parte, podemos esperar que si una función posee en un punto varias derivadas, sea posible aproximar los valores de la función en un entorno de ese punto por funciones, más que lineales, polinómicas.

En algunos puntos de la recta real, la aproximación de ambas funciones puede ser total e incluso coincidente el valor que toman  $f(n_0)$  y  $g(n_0)$ . Y así, veamos cómo en el ejemplo práctico que se desarrolla al final del presente capítulo, si hubiéramos supuesto, v.gr., un exponente de la velocidad del agua de  $m = 2$  (de haber empleado, para el cálculo de las pérdidas de carga de la conducción porta-goteros, la formulación de Manning-Strickler), habríamos obtenido un coeficiente teórico de reducción por salidas de:

$$F = f(n_0) = \frac{(n_0 + 1)(2n_0 + 1)}{6n_0^2} = \frac{2n_0^2 + 3n_0 + 1}{6n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{6n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 54} + \frac{1}{6 \cdot 54^2} = 0'343$$

y, también, la aplicación estricta de la fórmula aproximada de Christiansen conduciría a la obtención exacta del mismo resultado, puesto que:

$$F = g(n_0) = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{2-1}}{6 \cdot n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 54} + \frac{1}{6 \cdot 54^2} = 0'343$$

con lo que el error cometido en la aproximación sería nulo ( $E = 0$ ).

Recordemos, por último, que al principio del presente epígrafe de nuestro libro se decía que se pretendía hallar una cierta función  $g(x)$  “lo más sencilla”

---

<sup>1</sup> Dada una cierta función  $f(x)$ , con la notación  $o(f)$ , se designa cualquier función  $\varphi(x)$  tal que se cumpla que:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0$ . La condición anterior puede sustituirse por la siguiente:  $\forall \varepsilon > 0$ , corresponde un entorno:  $\varepsilon^*(a)$  donde:  $|\varphi(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$ . Una ecuación de la forma:  $\varphi = o(f)$  equivale, pues, a la relación anterior.

posible y que se aproximara “lo suficiente” a la función problema. Anteriormente, ya hemos indicado cómo medir el grado de aproximación en cuestión; ahora bien, al objeto de no perdernos en subjetivismos, ¿qué debemos entender por la expresión “lo más sencilla posible”?

En general, tomaremos como tales funciones las polinómicas o parabólicas (a partir del 2º grado), esto es, las de configuración analítica del tipo:

$$g(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + \dots$$

cuyo grado nos vendrá determinado por la aproximación que deseemos obtener y donde las constantes (a, b, c, d, ...) se hallarán con la condición de que la nueva función  $g(x)$  se aproxime lo más posible a la  $f(x)$ .

La aproximación más sencilla, o sea, la de primer grado, es la lineal ofrecida por la ecuación de la recta tangente a la curva dada  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = n_0$ . Las aproximaciones de orden superior podrán obtenerse por aplicación del conocido teorema de Taylor para el desarrollo de la función  $f(x)$  en dicho punto. En cualquier caso, el problema eficazmente resuelto por Christiansen alcanzó una mayor complejidad, sin que, por razones desconocidas por quien suscribe, dicho autor quisiera publicitar, en su día, la deducción matemática de su famosa fórmula, cuestión ésta que constituye, precisamente, el objeto fundamental del presente capítulo de nuestro estudio.

## 5. COEFICIENTE DE CHRISTIANSEN GENERALIZADO

Hace falta, por último, efectuar alguna otra consideración. En el caso particular de que se cumpla que:  $l_0 = \frac{1}{2}$  (primera salida situada a una distancia del inicio de la conducción igual a la mitad del espacio existente entre las restantes salidas de la tubería), la expresión general teórica:  $F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m$  tomará la configuración siguiente:

$$F = \frac{1}{n_0^m \cdot \left(n_0 - \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{n_0^m}{2} + \sum_{i=1}^{n_0} i^m\right) ,$$

expresión debida a Jensen y Fratini, que, como ya se ha mencionado, se cumplirá exclusivamente para la relación:

$$r = l_0 / l = 1/2.$$

Las pérdidas continuas de carga en el tramo genérico  $i$  del eje hidráulico de la conducción, comprendido entre las derivaciones ( $i-1$ )-ésima e  $i$ -ésima, son las siguientes:

$$h_i = n \cdot l \cdot Q_i^m$$

y puesto que el caudal circulante por el tramo  $i$  es:

$$Q_i = (n_0 - i + 1) \cdot q \quad ,$$

las pérdidas de carga en el tramo  $i$  podrán expresarse también como:

$$h_i = n \cdot l \cdot (n_0 - i + 1)^m \cdot q^m \quad .$$

De este modo, las pérdidas de carga continuas en toda la conducción, serán:

$$h = \sum_{i=1}^{n_0} h_i = n \cdot q^m \sum_{i=1}^{n_0} l_i \cdot (n_0 - i + 1)^m = n \cdot q^m \left[ l_0 \cdot n_0^m + \sum_{i=2}^{n_0} (n_0 - i + 1)^m \right] ;$$

y como, a la vez, se cumple que:

$$\sum_{i=2}^{n_0} (n_0 - i + 1)^m = \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m \quad ,$$

quedará la siguiente expresión para las pérdidas de carga:

$$h = n \cdot q^m \cdot l \cdot \left( r \cdot n_0^m + \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m \right) = n \cdot Q^m \cdot L \cdot F$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las diversas relaciones anteriores, se obtiene:

$$q^m \cdot l \cdot \left( r \cdot n_0^m + \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m \right) = n_0^m \cdot q^m \cdot (r + n_0 - 1) \cdot l \cdot F \quad ;$$

de donde: 
$$r + \frac{1}{n_0^m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = (r + n_0 - 1) \cdot F \quad ,$$

con lo que despejando el coeficiente de reducción  $F$  (que representaremos por  $F_r$ , para cualquier valor que pueda adoptar la relación  $r$ ), se tiene:

$$F_r = \frac{r + \frac{1}{n_0^m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m}{r + n_0 - 1} \quad (9)$$

que constituye la expresión generalizada del coeficiente de reducción por salidas, para cualquiera de los valores de los parámetros  $r$ ,  $n_0$  y de  $m$ .

A continuación, se han tabulado expresamente los valores de  $F_1$  ( $r=1$ ) y de  $F_{1/2}$  ( $r=1/2$ ), para diferentes valores de  $n_0$  y de  $m$ , a saber:

Tabla 2.1. Coeficiente de Reducción F ( $r = 1/2$ )

$n_0$	$m = 1,75$	$m = 1,80$	$m = 1,85$	$m = 1,90$	$m = 2,00$
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	0,532	0,525	0,518	0,512	0,500
3	0,455	0,448	0,441	0,434	0,422
4	0,426	0,419	0,412	0,405	0,393
5	0,410	0,403	0,397	0,390	0,378
6	0,401	0,394	0,387	0,381	0,369
7	0,395	0,388	0,381	0,375	0,363
8	0,390	0,383	0,377	0,370	0,358
9	0,387	0,380	0,374	0,367	0,355
10	0,384	0,378	0,371	0,365	0,353
11	0,382	0,375	0,369	0,363	0,351
12	0,380	0,374	0,367	0,361	0,349
13	0,379	0,372	0,366	0,360	0,348
14	0,378	0,371	0,365	0,358	0,347
15	0,377	0,370	0,364	0,357	0,346
16	0,376	0,369	0,363	0,357	0,345
17	0,375	0,368	0,362	0,356	0,344
18	0,374	0,368	0,361	0,355	0,343
19	0,374	0,367	0,361	0,355	0,343
20	0,373	0,367	0,360	0,354	0,342
22	0,372	0,366	0,359	0,353	0,341
24	0,372	0,365	0,359	0,352	0,341
26	0,371	0,364	0,358	0,351	0,340
28	0,370	0,364	0,357	0,351	0,340
30	0,370	0,363	0,357	0,350	0,339
35	0,369	0,362	0,356	0,350	0,338
40	0,368	0,362	0,355	0,349	0,338
50	0,367	0,361	0,354	0,348	0,337
100	0,365	0,359	0,353	0,347	0,335
200	0,365	0,358	0,352	0,346	0,334
$\infty$	0,364	0,357	0,351	0,345	0,333

Tabla 2.2. Coeficiente de Reducción F ( $r = 1$ )

$n_0$	$m = 1.00$	$m = 1.75$	$m = 1.80$	$m = 1.85$	$m = 1.90$	$m = 2.00$
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	0.750	0.650	0.644	0.639	0.634	0.625
3	0.667	0.546	0.540	0.535	0.528	0.518
4	0.625	0.497	0.491	0.486	0.480	0.469
5	0.600	0.469	0.463	0.457	0.451	0.440
6	0.583	0.451	0.445	0.435	0.433	0.421
7	0.571	0.438	0.432	0.425	0.419	0.408
8	0.563	0.428	0.422	0.415	0.410	0.398
9	0.556	0.421	0.414	0.409	0.402	0.391
10	0.550	0.415	0.409	0.402	0.396	0.385
11	0.545	0.410	0.404	0.397	0.392	0.380
12	0.542	0.406	0.400	0.394	0.388	0.376
13	0.538	0.403	0.396	0.391	0.384	0.373
14	0.536	0.400	0.394	0.387	0.381	0.370
15	0.533	0.397	0.391	0.384	0.379	0.367
16	0.531	0.395	0.389	0.382	0.377	0.365
17	0.529	0.393	0.387	0.380	0.375	0.363
18	0.528	0.392	0.385	0.379	0.373	0.361
19	0.526	0.390	0.384	0.377	0.372	0.360
20	0.525	0.389	0.382	0.376	0.370	0.359
22	0.523	0.387	0.380	0.374	0.368	0.357
24	0.521	0.385	0.378	0.372	0.366	0.355
26	0.519	0.383	0.376	0.370	0.364	0.353
28	0.518	0.382	0.375	0.369	0.363	0.351
30	0.517	0.380	0.374	0.368	0.362	0.350
32	0.516	0.379	0.373	0.367	0.361	0.349
35	0.514	0.378	0.371	0.365	0.359	0.347
40	0.513	0.376	0.370	0.364	0.357	0.345
50	0.510	0.374	0.367	0.361	0.355	0.343
60	0.508	0.372	0.366	0.359	0.353	0.342
80	0.506	0.370	0.363	0.357	0.351	0.340
100	0.505	0.369	0.362	0.356	0.350	0.338
150	0.503	0.367	0.360	0.354	0.348	0.337
300	0.502	0.365	0.359	0.353	0.346	0.335
$\infty$	0.500	0.364	0.357	0.351	0.345	0.333

## 6. CÁLCULO PRÁCTICO DEL COEFICIENTE UNIVERSAL DE CHRISTIANSEN

No obstante, teniendo en cuenta el infinito número de valores posibles de  $r$ , resultará más práctico que tabular la ecuación anterior (9) basarse en los correspondientes valores para  $r = 1$  para el cálculo del resto de los valores de  $F$ . En efecto, dado que se cumple la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = \sum_{i=1}^{n_0} i^m - n_0^m ,$$

y además de la ecuación:  $F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m$  se deduce que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = F \cdot n_0^{1+m} ,$$

también se habrá de satisfacer la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = F \cdot n_0^{1+m} - n_0^m ,$$

que introducida en la expresión:  $F_r = \frac{r + \frac{1}{n_0^m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m}{r + n_0 - 1}$ , la transforma en:

$$F_r = \frac{r + \frac{1}{n_0^m} \cdot (F \cdot n_0^{1+m} - n_0^m)}{r + n_0 - 1} = \frac{r + n_0 \cdot F - 1}{r + n_0 - 1} ,$$

que permite la obtención del valor de  $F_r$  para cualquier valor de  $r$ , en función del correspondiente a  $F_1$  ( $r = 1$ ), para los mismos valores de los restantes parámetros  $n_0$  y  $m$ . Obviamente, para  $n_0 = 1$ , también  $F_r = 1'00$ , y ello con independencia de los valores de la relación:  $r = l_0 / l$ .

Hace falta apuntar, en definitiva que, al ser posible encontrarnos, en la práctica, con cualquier valor del parámetro  $r$ , este coeficiente generalizado permite el cálculo directo de las pérdidas de carga en una conducción forzada de característica única, formada por un tramo inicial de cualquier longitud en régimen permanente y uniforme o estacionario y de un tramo final con distribución discreta del caudal y servicio en ruta.

## 7. ELECCIÓN DE LA FÓRMULA DE CÁLCULO

Ante la gran cantidad de fórmulas que existen para el dimensionamiento de las conducciones forzadas o a presión, puede surgir cierta desorientación en la búsqueda y aplicación de la fórmula de cálculo más adecuada a cada caso. La

experiencia suele influir grandemente en la susodicha elección, aunque lo más seguro sería, casi con certeza, calcular el diámetro de la conducción con la mayor cantidad de fórmulas posible y decidirse por el caso más desfavorable (o que ofrezca un valor del diámetro más alto).

La experiencia, no obstante, aconseja el empleo de una u otra fórmula según las especiales características del problema presentado. La fórmula de Darcy, por ejemplo, ofrece buenos resultados para diámetros iguales o menores de 500 mm. y velocidades medias de hasta 2'50 m./seg. Para diámetros de la conducción mayores de 500 mm., Daries indica que puede emplearse la misma fórmula de Darcy, reduciendo a la mitad los valores del coeficiente  $b$ , en cuyo caso los resultados obtenidos son bastante aproximados. También son aconsejables en este caso (para diámetros superiores a 500 mm.) las formulaciones de Lèvy y Flamant; concretamente, la expresión de este último autor ofrece buenos resultados hasta diámetros de 1.000 mm., mientras que para diámetros superiores a éste, la de Lèvy resulta más aconsejable. Alrededor de diámetros de 1.000 mm., la de Manning está considerada también como una de las más exactas.

Lo cierto es que las formulaciones modernas no han conseguido aún destronar a las clásicas en las aplicaciones técnicas usuales al cálculo de las conducciones forzadas o a presión. Este fenómeno no es consecuencia tan solo de su desconocimiento por la mayoría de los técnicos, ni siquiera de su menor ductilidad, sino más bien de la constatación de que dichos profesionales valoran más la propia estimación de los parámetros prácticos del problema, teniendo en cuenta que la información empírica es decisiva. Exagerando el concepto, podríamos afirmar que cualquier fórmula es buena si se emplean los parámetros adecuados de los que tanto depende esta Ciencia experimental que es la Hidráulica ("Ciencia de los coeficientes"). De hecho, al Ingeniero experimentado y responsable, le satisface más que cualquier otro, aquel método de cálculo que pueda contrastar con su propia experiencia anterior o con la de su ambiente más próximo.

De aquí, se deduce una tendencia universal a la conservación -y aún al uso general para los conductos rugosos- de la fórmula monomía llamada de Manning-Strickler, a la que nos hemos referido en el anterior epígrafe 4, con su clásica escala dimensional de los valores de la rugosidad, probablemente la más capaz de mantenerse en boga a la par de las más correctas y recientes.

Según el Prof. Enrique Becerril<sup>2</sup>, la correspondencia existente entre ambos tipos de fórmulas ha sido estudiada por diversos autores (Rousse, Addisson, etc.) que han puesto de manifiesto, a la vez que los defectos de aquélla, el valor práctico de su empleo. En este sentido, se llega a la conclusión de que puede

---

<sup>2</sup> En su Prólogo al *Manual General* de la empresa Uralita, S.A., Ed. Dossat, S.A., Madrid, 1966. Fue profesor de Hidráulica de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.

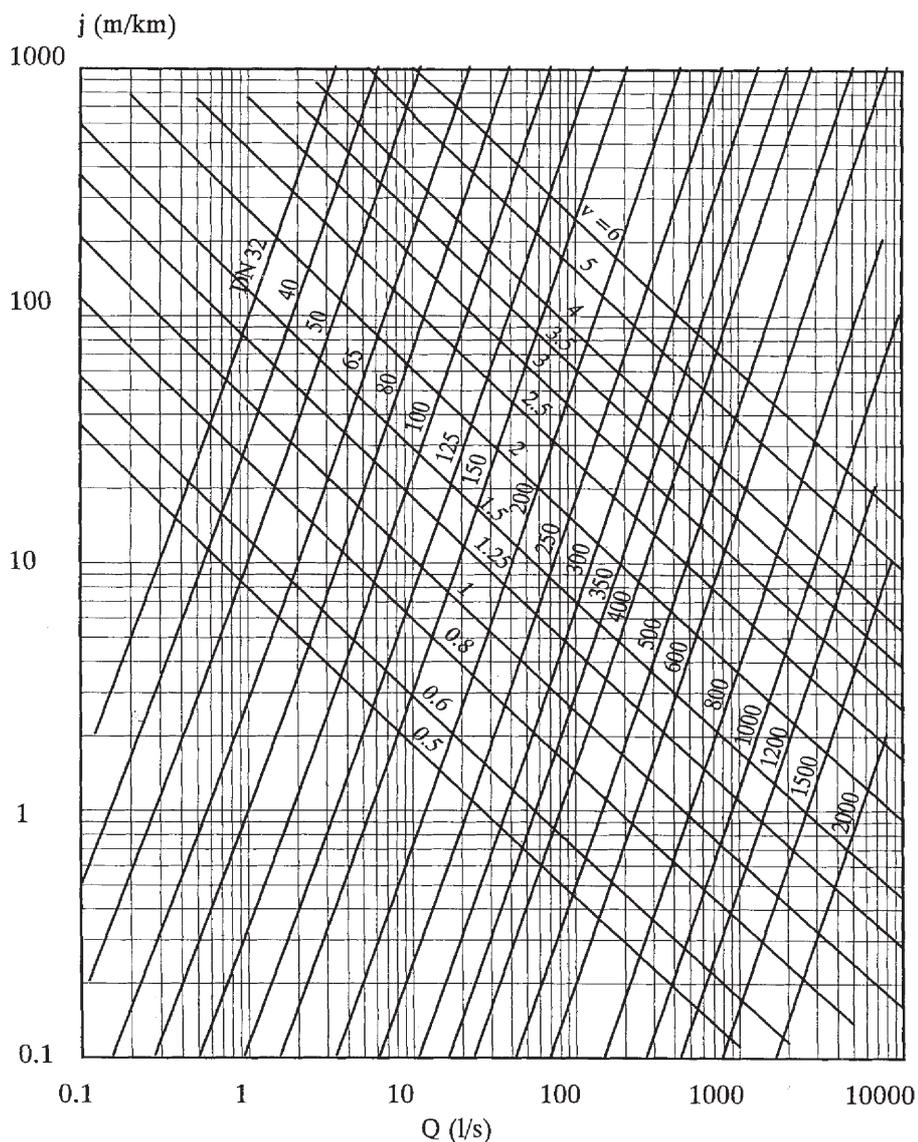
admitirse la correspondencia aproximada:  $\xi = (26 \cdot n)^6$ , siendo  $\xi$  la rugosidad geométrica (Nikuradse) y  $n$  el parámetro convencional de Manning, coincidente con el de Ganguillet y Kütter, como ya hemos visto, y muy usado en la técnica europea. Los anglosajones conservan la escala numérica introduciendo un factor correctivo de valor 1'41.

En cuanto a la zona intermedia y a los conductos de superficie ondulada, ya se comprende que la transición de Colebrook es la más adecuada y representa un considerable avance en la definición del fenómeno en estudio; pero tampoco es menos cierto que su manejo sistemático resulta complicado de no utilizarse un programa informático *ad hoc*, prestándose mal a la tabulación y, por tanto, a las aplicaciones tan interesantes como el método de Hardy-Cross en sus diversas modalidades hidráulicas.

Un considerable grupo de fórmulas presentan las características propias de la zona transicional o semirrugosa. Concretamente, las de Hazen y Williams, muy usadas por la técnica americana, y las de Barnes y Scimemi, con exponentes comprendidos entre 0'53 y 0'55 para la variable  $J$  (pérdida unitaria de carga) en la expresión de la velocidad. Pues bien, si las grandes conducciones de la hidroelectricidad o del abastecimiento en alta, con números de Reynolds del orden de  $10^6$  y aún mayores, exigen el empleo de la ley cuadrática, es decir, de las expresiones del tipo Manning-Strickler, en cambio parece lógico tender, en la hidráulica urbanística y agrícola, al uso de las fórmulas de exponente menor, como son las relacionadas de Hazen-Williams, más fieles traductoras que las de Colebrook en su aplicabilidad a la zona intermedia.

Es de hacer notar, en definitiva, que la solución exacta y concreta no ha llegado aún a expresarse en una sola fórmula, pues todas ellas, aún las más modernas, han diferido, en muchos casos, de las experiencias realizadas en las conducciones en servicio. Casi todos los autores han dado valores del coeficiente de frotamiento (según el material) para las tuberías nuevas y para tuberías en uso (con incrustaciones y depósitos calcáreos, ferruginosos, etc.). En cualquier caso, los coeficientes que se han de emplear para la resolución de los problemas que nos interesan serán los correspondientes a tuberías en uso, puesto que al cabo de un cierto tiempo, relativamente corto, las conducciones analizadas presentarán dichas características.

Las fórmulas empíricas tienden a ser substituidas, hoy en día, por las logarítmicas. Sin embargo, algunas de aquellas, cuya utilidad ha sido constatada por la experiencia de muchos años en su aplicación, permiten al ingeniero resolver, con la suficiente aproximación, los problemas relacionados con el movimiento de los fluidos, particularmente del agua, en tuberías, canales y cursos naturales. Es de destacar la notable simplicidad de las fórmulas empíricas, lo que facilita su resolución mediante el uso de tablas, nomogramas y gráficos adecuados, como el que se presenta seguidamente, debido a Colebrook y Prandtl:



A continuación se presenta una tabla<sup>3</sup> o cuadro donde se resumen las fórmulas de cálculo más apropiadas para los RLAF y, particularmente, para tuberías de plástico, en función de los diferentes regímenes hidráulicos a los que nos hemos referido con anterioridad. A saber:

<sup>3</sup> Vide F. PIZARRO *Riegos localizados de alta frecuencia*. Ed.: Mundi-Prensa. Madrid, 1987. Citado en la bibliografía.

Tabla 2.3. Fórmulas de cálculo aplicables a los RLAF

Régimen	Re	Nombre de la fórmula	$d(m) \frac{v(m^2/sg)}{q(m^3/sg)}$ $\frac{v(m/sg)}{g(m/sg^2)}$	$d(mm) \frac{v(m^2/sg)}{q(l/h)}$ $\frac{v(m/sg)}{q(m/sg)}$
Todos	Todos	Darcy-Weisbach	$J = f \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}$	$J = 6,37 f \frac{q^2}{d^5}$
Laminar	<2.000	Hagen-Poiseuille	$J = \frac{64}{Re} \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}$	$J = 1,153 \cdot 10^6 \frac{q v}{d^4}$ $*J = 1,16 \frac{q}{d^4}$
Critico y turbulento liso	2.000 – 10 <sup>5</sup>	Blasius	$J = 0,025 v^{0,25} d^{-4,75} q^{1,75}$ $*J = 0,00078 d^{-4,75} q^{1,75}$	$J = 14,94 v^{0,25} d^{-4,75} q^{1,75}$ $*J = 0,473 d^{-4,75} q^{1,75}$
Turbulento intermedio y turbulento rugoso	10 <sup>5</sup> – 10 <sup>6</sup>	Veronese-Datei	$*J = 0,000894 d^{-4,80} q^{1,80}$	$*J = 0,355 d^{-4,80} q^{1,80}$
* Para t = 20 °C (v = 1,003 · 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /sg).				
$v = 0,354 \frac{q}{d^2}$ $Re = 3,537 \cdot 10^{-4} \frac{q}{d v}$ $*Re = 352,64 \frac{q}{d}$				

Hay que advertir, por último, que el empleo de una fórmula determinada por el único hecho de su simplicidad, es un criterio que no debe adoptarse hoy en día, habida cuenta de los potentes medios de cálculo e informáticos de que se dispone y que facilitan extraordinariamente la aplicación de cualquiera de ellas.

## 8. VELOCIDADES ACONSEJABLES DE CIRCULACIÓN DEL AGUA

Sin tener en consideración las pérdidas de carga, de la ecuación general de continuidad:  $Q = S \cdot V$  dedúcese que, para conducir por una tubería un caudal determinado  $Q$  puede operarse, bien aumentando el diámetro interior de la misma, con lo que disminuiríamos la velocidad media, o bien recíprocamente. Así mismo pudiera parecer por razones de economía (coste de adquisición de los tubos y de su instalación) que conviene disminuir el diámetro  $D$  de la conducción, pero debe tenerse en cuenta que con ello aumentaríamos correlativamente el valor de  $V$ , la cual está directamente relacionada con el efecto conocido como “golpe de ariete”, que se produce, como es sabido, al iniciarse o interrumpirse bruscamente la circulación del agua y que origina sobrepresiones accidentales negativas o positivas que pueden dar lugar al estallido del tubo<sup>4</sup>.

En el caso concreto de las impulsiones, la velocidad más aconsejable debe ser la más rentable en las condiciones de funcionamiento de la instalación elevadora y depende de una larga serie de factores (horas de funcionamiento, potencia y rendimiento del grupo elevador, coste de la tubería, periodo y tipo de amortización, precio de la energía eléctrica o carburante, etc.) que no procede desarrollar aquí por razones obvias de espacio y oportunidad.

Haciendo salvedad de las ya clásicas fórmulas de Bress (0'57 m./seg.), de Veyrauch (1'18 m./seg.) o el maximalista (1'50 m./seg.) para las impulsiones, los proyectistas parecen adoptar, con cierta generalidad, el criterio más amplio determinado por la fórmula de Mougny, que establece una velocidad media aconsejable de circulación del agua de:

$$V = 1'5 \times \sqrt{D + 0'25} ,$$

expresando  $V$  en m./seg y  $D$  (diámetro interior de la conducción) en metros. Ello ofrece un caudal ( $m^3/seg$ ) de:

$$Q = \frac{\pi \times D^2}{4} \times 1'5 \times \sqrt{D + 0'25} = 1'178 \times \sqrt{D^5 + 0'25 \times D^4}$$

De hecho, una tubería de estas características puede someterse a incrementos de velocidad notorios (en las tuberías forzadas de las centrales

<sup>4</sup> Vide TORRES SOTELO, J.E. en *Apuntes de Hidráulica General y Agrícola*, citado en la bibliografía.

hidroeléctricas pueden incluso alcanzarse velocidades del orden de 4-6 m./seg.) en función de la potencia del grupo motobomba impulsor o elevador. También pueden alcanzarse altos valores de la velocidad en algunos tramos de conducción por gravedad, sin derivaciones, con grandes pendientes, en los que la tubería no trabaja, a veces, a sección llena.

La limitación de velocidad ha venido realizándose con el fin de evitar fundamentalmente los efectos del golpe de ariete y de la abrasión (desgaste por la fricción de las partículas sólidas en suspensión en el agua con la pared interna de la tubería). No obstante, hoy en día, el golpe de ariete se puede controlar dentro de ciertos límites, mediante la instalación de dispositivos adecuados de seguridad (como los moto-variadores de frecuencia, volantes de inercia, chimeneas de equilibrio, válvulas de seguridad o de retención con o sin *by pass*, calderines hidroneumáticos de nitrógeno o aire comprimido, etc.), y el aumento de los timbrajes del tubo puede resultar más económico que el aumento de diámetro que exige el rebajar el valor de la velocidad. Por otra parte, si el agua experimenta una decantación en los depósitos adecuados o bien separación de sólidos en suspensión, mediante floculaciones y filtros de arena (sílex) u otros procedimientos, no existirá riesgo apreciable de abrasión interna.

Por lo que se refiere a las velocidades máximas aconsejables para las conducciones a presión, veamos que las normas portuguesas recomiendan utilizar la expresión:  $V_{\text{máx}} = 0,127 \cdot D^{0,4}$ , expresando el diámetro interior (D) en mm. Por otra parte, generalmente, se acepta la siguiente tabla de velocidades máximas permisibles para las tuberías, en función del diámetro interior D (m.) de las mismas<sup>5</sup>:

Diámetro D (m.)	Velocidad máxima (m/seg.)
0'10	0'75
0'15	0'80
0'20	0'90
0'25	1'00
0'30	1'10
0'40	1'25
0'50	1'40
0'60	1'60
0'80	1'80
1'00	2'00

A partir de esta tabla, pues, es posible determinar, por técnicas de regresión lineal mínimo-cuadrática, una función de ajuste de las velocidades máximas aconsejables con los diámetros interiores de la conducción. En efecto:

<sup>5</sup> Vide RUBIO SANJUÁN, I. en *Elementos de Hidráulica General y Aplicada*. Ed. LABOR, S.A. Barcelona, 1972. Pág. 192. Obra citada en la bibliografía.

## Estimación rectilínea

MODEL: MOD\_3.

Dependent variable.. VAR00002                    Method.. LINEAR

Listwise Deletion of Missing Data

Multiple R                    ,99271  
 R Square                    ,98547  
 Adjusted R Square         ,98365  
 Standard Error             ,05506

Analysis of Variance:

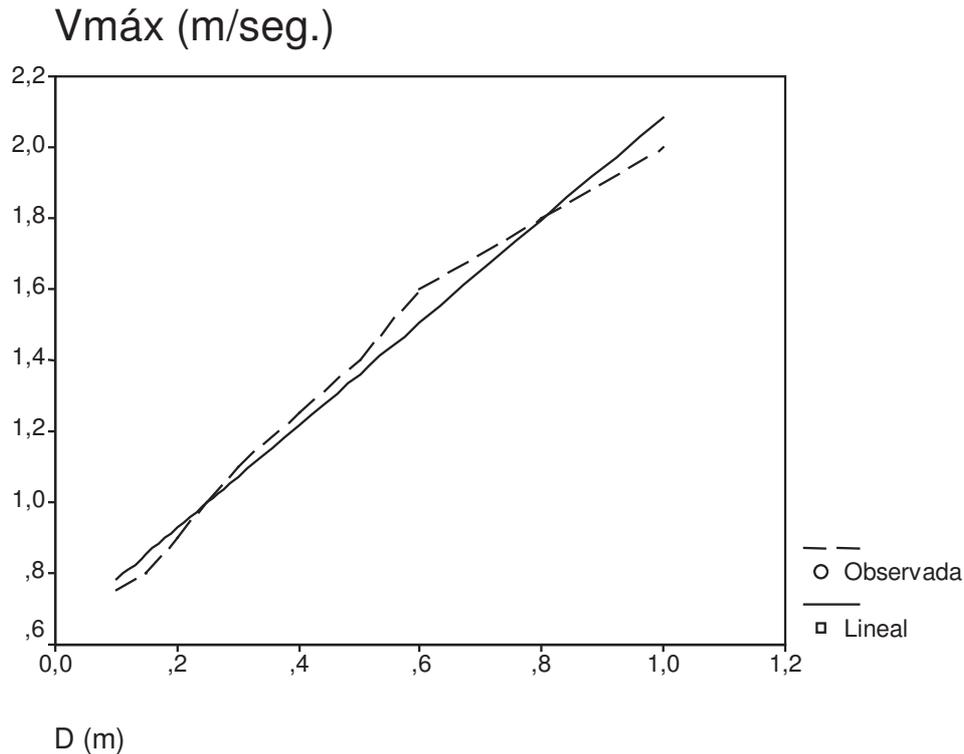
	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regresión	1	1,6447443	1,6447443
Residuales	8	,0242557	,0030320

F =        542,46798                    Signif F =    ,0000

----- Variables en la Ecuación -----

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
VAR00001	1,446565	,062108	,992707	23,291	,0000
(Constante)	,637977	,031882		20,011	,0000

Obsérvese que el ajuste mínimocuadrático lineal realizado, en este caso, ostenta parámetros aceptables de fiabilidad. La representación gráfica consecuente será la siguiente:



La ecuación de tal modo obtenida, pues, tiene la siguiente configuración analítica:

$$V_{\text{máx}} = 1'4466 \cdot D + 0'638$$

que constituye la función que proponemos (de gran utilidad en el diseño hidráulico) para la determinación de las velocidades máximas (m./seg.) de circulación del agua por las conducciones forzadas (tuberías a presión) en función del diámetro interior (m.) de las mismas. En base a ello, el caudal máximo aconsejable será, correlativamente:

$$Q = \frac{\pi \times D^2}{4} \times (1'4466 \times D + 0'638) = 1'136 \times D^3 + 0'501 \times D^2,$$

que constituye la ecuación de una parábola cúbica.

#### *Ejemplos:*

a) Se dispone, en un gran regadío, de una tubería central de distribución de DN 1.900 mm., con lo que se tendrá una velocidad media y un caudal de circulación del agua de:

$$V = 1'5 \times \sqrt{1'90 + 0'25} = 2'20 \text{ m/seg.};$$

$$Q = S \times V = \frac{\pi \times D^2}{4} \times 2'20 = \frac{\pi \times 1'9^2}{4} \times 2'20 = 6'24 \text{ m}^3 / \text{seg.}$$

Para esta misma tubería, se tendría una velocidad máxima aconsejable de:

$$V_{\text{máx}} = 1'4466 \times 1'9 + 0'638 = 3'39 \text{ m/seg.}, \text{ con un caudal, entonces, de:}$$

$$Q = S \times V = 2'84 \times 3'39 = 9'6 \text{ m}^3/\text{seg.} \equiv 303 \text{ hm}^3/\text{año.}$$

Alternativamente, la normativa portuguesa ya mencionada reduciría dicha velocidad del siguiente modo:

$$V_{\text{máx}} = 0'127 \cdot 1.900^{0'4} = 2'60 \text{ m/seg.}, \text{ que ofrecería un caudal de:}$$

$$Q = S \times V = 2'84 \times 2'60 = 7'384 \text{ m}^3/\text{seg.} \equiv 233 \text{ hm}^3/\text{año.}$$

b) El problema también se puede plantear a la inversa. Así, v. gr., la tubería que realmente se necesitaría para transportar un caudal de  $2'5 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , sería de un diámetro nominal de:

$$2'5 = \frac{\pi \times D^2}{4} \times 1'5 \times \sqrt{D + 0'25} = 1'178 \times \sqrt{D^5 + 0'25 \times D^4}, \text{ de donde :}$$

$$1'39 \times D^5 + 0'347 \times D^4 - 6'25 = 0;$$

la única raíz real de esta ecuación de quinto grado es:  $D = 1'304 \text{ m.} \approx 1.300 \text{ mm.}$ , con una velocidad media de:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4 \times Q}{\pi \times D^2} = \frac{4 \times 2'5}{\pi \times 1'3^2} = 1'88 \text{ m/seg.},$$

que resulta correcta, por lo que se debería instalar una tubería de DN 1.300 mm.

Sería conveniente, en este caso, la determinación de las pérdidas de carga de dicha tubería por aplicación de la fórmula de Hazen-Williams (1920) para el movimiento turbulento en la zona de transición, con  $C = 145$  (supuesto el material a base de plancha de acero revestido interiormente con resinas epoxídicas o bien poliéster reforzado con fibra de vidrio, PRFV). Se tendría:

$$J^{0'54} = V/0'36 \cdot C \cdot D^{0'63} = 1'88/0'36 \cdot 145 \cdot 1'3^{0'63} = 0'0305; \text{ de donde se obtiene una pérdida de carga unitaria de: } J = 0'00156 \text{ m/m.l.}, \text{ perfectamente aceptable para este tipo de instalación.}$$

## 9. RESOLUCIÓN DE UN CASO PRÁCTICO

## 9.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se trata de dimensionar las líneas porta-goteros en una plantación cítrica joven, a marco rectangular de: 6'00 x 4'30 m, con 27 árboles en hilera, en terreno franco-arcilloso.

En nuestro caso, estas líneas porta-goteros dispondrán de  $N = 54$  derivaciones (2 microtubos per árbol, de  $\varnothing 1 \times 2$  mm, con descarga de 4'0 l/h a 5 m.c.a. y 1 m de longitud de microtubo sobre pincho de soporte), con un caudal en cabecera de:

$$Q = 4'0 \text{ l/h} \cdot 54 = 216 \text{ l/h} = 0'00006 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Estas líneas, en el caso de las subunidades de riego más largas, serán conducciones mixtas de 2 diámetros, a saber:

Tabla 2.4. Datos del problema

TRAMO	L (m)	N (n° de goteros)
Tramo 1°: $D_i = 16'0$ mm. ( $1/2''$ , 6 Kp./cm <sup>2</sup> .)	60	27
Tramo 2°: $D_i = 12'8$ mm. ( $3/8''$ , 6 Kp./cm <sup>2</sup> .)	60	27
<b>TOTAL =</b>	<b>120</b>	<b>54</b>

Se admitirá, en principio, que se trata de un régimen turbulento liso (con el exponente de la velocidad del agua:  $m = 7/4 = 1'75$ ) y una relación:

$$r = l_0/l = 1$$

## 9.2. CÁLCULO DE LA CONDUCCIÓN MIXTA

Debe tenerse en cuenta que se trata del cálculo de una tubería de dos diámetros. Para ello, se calculará la pérdida de carga de toda la tubería como si tuviera el diámetro del mayor de los tramos, se le suma la pérdida de carga que corresponde al tramo final de diámetro inferior, cuando por el mismo circula el caudal correspondiente a las derivaciones que dicho tramo abastece y, finalmente, se le resta la pérdida de carga que se producirá en el último tramo si su diámetro fuera el mayor de los dos y su caudal el que realmente conduce. Al respecto, puede verse la figura siguiente:

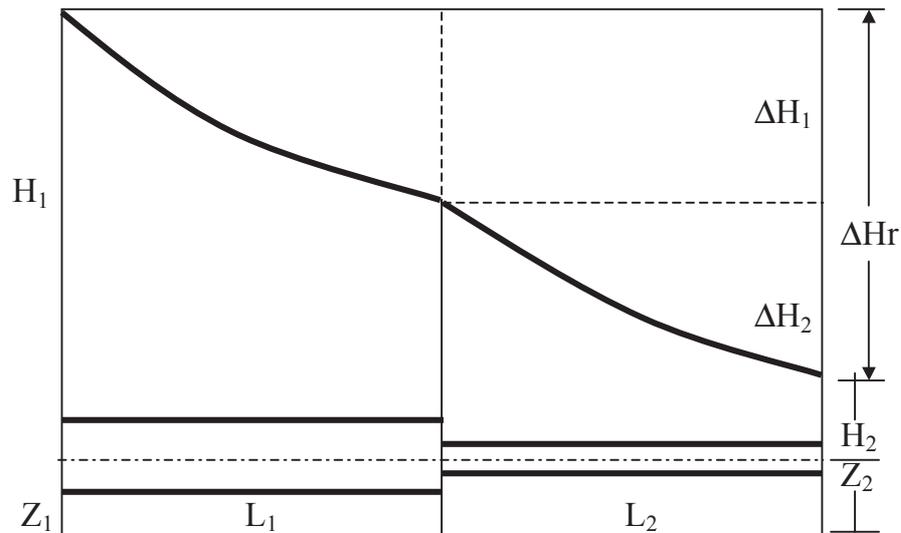


Fig. 2.5. Tubería mixta de dos diámetros

$\Delta H_r = \Delta H_1 + \Delta H_2 = \Delta H(L_T, Q_T, \varnothing_1) + \Delta H(L_2, Q_2, \varnothing_2) - \Delta H(L_2, Q_2, \varnothing_1)$   
, siendo:  $L_T = L_1 + L_2$  y también:  $Q_T = Q_1 + Q_2$ .

Se ensayan varias longitudes para cada tramo hasta obtener una pérdida de carga total que se adapte plenamente a nuestras necesidades de diseño. Huelga decir que para el cálculo de las pérdidas de carga en los tres casos hay que tener en cuenta el coeficiente reductor por salidas y el desnivel taquimétrico existente entre el principio y el final de cada tramo, así como la temperatura del agua y las pérdidas de carga (si las hubiera) en los puntos singulares o piezas especiales de la conducción. No obstante, en nuestro caso no las tendremos en cuenta, habida cuenta de la práctica horizontalidad o nivelación de la parcela que nos ocupa ( $Z_1 = Z_2$ ), lo que conlleva a la igualdad, en la práctica, de ambas alturas geométricas. Tampoco, en aras de una mayor simplicidad, tendremos en cuenta los restantes factores singulares a los que se ha hecho mención.

El cálculo correspondiente de las pérdidas de carga será el siguiente:

- Tramo real + tramo ficticio (con  $\varnothing \frac{1}{2}$ " ):

Para el cálculo de las tuberías de polietileno de pequeño diámetro se ha determinado que el comportamiento hidráulico de las tuberías de diámetro inferior a 25 mm., para números de Reynolds (Re) inferiores a 40.000, no coincide exactamente con los resultados de la aplicación de la fórmula de Hazen-Williams para  $C = 150$ , o bien de la de Colebrook.

La fórmula general de Darcy-Weissbach, propuesta inicialmente por el segundo autor en 1855 y posteriormente por el primero en 1875 para el cálculo

de la pérdida de carga en las conducciones a presión, obedece, como es sabido, a la expresión:

$$J = \lambda \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g \cdot D}$$

y substituyendo por el factor de fricción o coeficiente de rozamiento:  $b = \lambda/8g$ , se tiene la configuración:

$$J = \frac{4 \cdot b \cdot V^2}{D}$$

Considerando, ahora, según Flamant, un coeficiente de rozamiento de:

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt[4]{D \cdot V}}$$

, se tiene:

$$J = \frac{4 \cdot \alpha \cdot V^2}{D \cdot \sqrt[4]{D \cdot V}} = 4 \cdot \alpha \cdot \frac{\sqrt[4]{V^8}}{\sqrt[4]{D^5 \cdot V}} = 4 \cdot \alpha \cdot \sqrt[4]{\frac{V^7}{D^5}}$$

La moderna fórmula de RODRIGO, del tipo Blasius-Flamant, con  $\alpha = 0'00013$  (polietileno blando o de baja densidad) ofrece:

$$J = 0'00052 \cdot \frac{V^{7/4}}{D^{5/4}} = 0'00052 \cdot \sqrt[4]{\frac{V^7}{D^5}}$$

El número de goteros será de:  $N = 54$ , con lo que:

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0'00006}{\pi \cdot 0'016^2} = 0'30 \text{ m./seg.}$$

$$J = 0'00052 \cdot \sqrt[4]{\frac{0'30^7}{0'016^5}} = 0'011 \text{ m/m.l.}$$

$$F = \frac{1}{1+1'75} + \frac{1}{2 \cdot 54} + \frac{\sqrt{1'75-1}}{6 \cdot 54^2} = 0'373 ;$$

$$\Delta H = F \cdot J \cdot L = 0'373 \cdot 0'011 \cdot 120 = \mathbf{0'49 \text{ m.c.a.}}$$

Al respecto, cabe aquí considerar que este valor del factor de fricción  $\lambda$  depende, de una forma directa, de la naturaleza de las paredes de la tubería y del número de Reynolds. Este valor es puramente empírico, y de entre ellos se ha adoptado el de Colebrook y White, que resulta ser una acertada combinación de la ley de la tubería lisa y la de la tubería rugosa, mediante una única expresión que representa todas las fases del flujo turbulento ( $\forall \text{ Re} > 2.000$ ) en el diagrama  $\lambda$ -Re, o sea:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log \cdot \left( \frac{K}{3,71D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \text{ siendo: } K = \text{valor de la rugosidad absoluta}$$

Re = número de Reynolds

Estudiando la anterior fórmula, podemos sacar las siguientes conclusiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } Re \text{ es muy elevado, el segundo término del interior del paréntesis tiende a cero.} \\ \text{si } K \text{ es muy pequeño, el primer sumando del interior del paréntesis tiende a cero.} \end{array} \right.$$

Esta ecuación, sin embargo, tiene la desventaja de que requiere de un cálculo iterativo para la determinación del factor de fricción, lo cual puede dar lugar a tiempos de cálculo excesivos. Existen, no obstante, expresiones alternativas en las cuales puede obtenerse el factor de fricción de forma explícita, sin necesidad de efectuar prolijas iteraciones. De entre éstas, por su amplio campo de aplicación y su uso extendido, cabría indicar la fórmula de Swance y Jain (1976):

$$\lambda = \frac{0'25}{\left[ \log \left( \frac{\epsilon_r}{3'7} + \frac{5'74}{Re^{0'9}} \right) \right]^2}$$

que resulta válida para unos valores de la rugosidad relativa o proporcional ( $\epsilon_r = K/D$ ) de:

$$10^{-6} < \epsilon_r < 10^{-2} \text{ y } 10^3 < Re < 10^8, \text{ con un error relativo de } \pm 1\%.$$

Por lo tanto, dadas las características de las tuberías de plástico, en las cuales las paredes son lisas y los fluidos no “mojan” al tubo, podemos aceptar, como resumen de la fórmula anterior, la siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log \cdot \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}$$

que no es otra que la expresión de Von Kàrmàn, y en el caso de tener un valor de Re de 50.000, se obtiene la conocida expresión empírica de Blasius para el movimiento turbulento liso:

$$\lambda = 0,3164 \cdot Re^{-0'25}$$

El nomograma correspondiente para la realización del cálculo rápido de este tipo de tubería puede verse en la página siguiente.

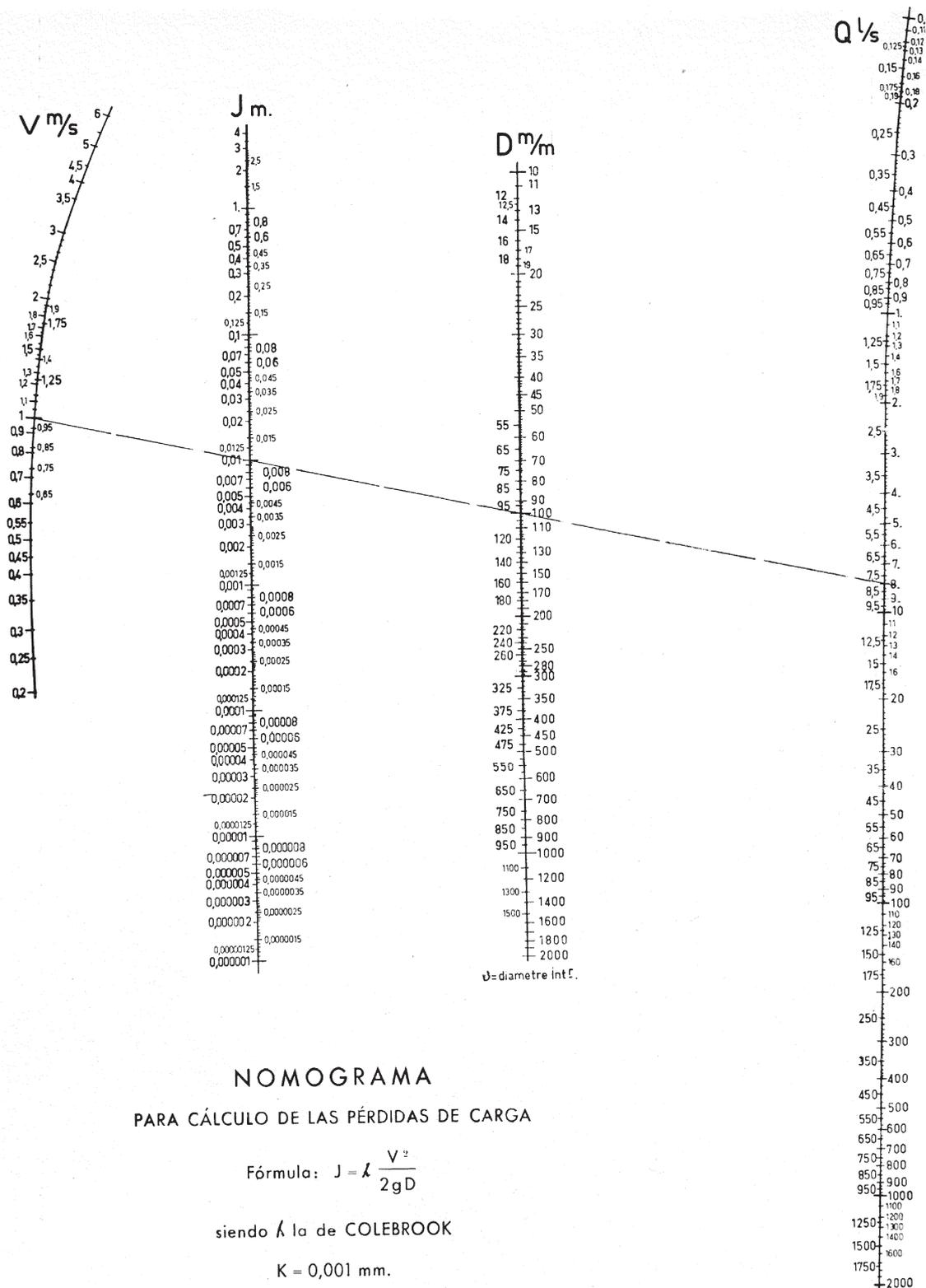


Fig. 2.6. Nomograma para el cálculo de las pérdidas de carga según la formulación de Colebrook-White

Así mismo, se ha comprobado la pérdida de carga calculada por la fórmula de RODRIGO mediante el ábaco siguiente, que facilita la formulación de

Manning, obteniéndose parecidos resultados. En los cálculos que siguen, en todos los casos se han llevado a cabo las comprobaciones pertinentes.

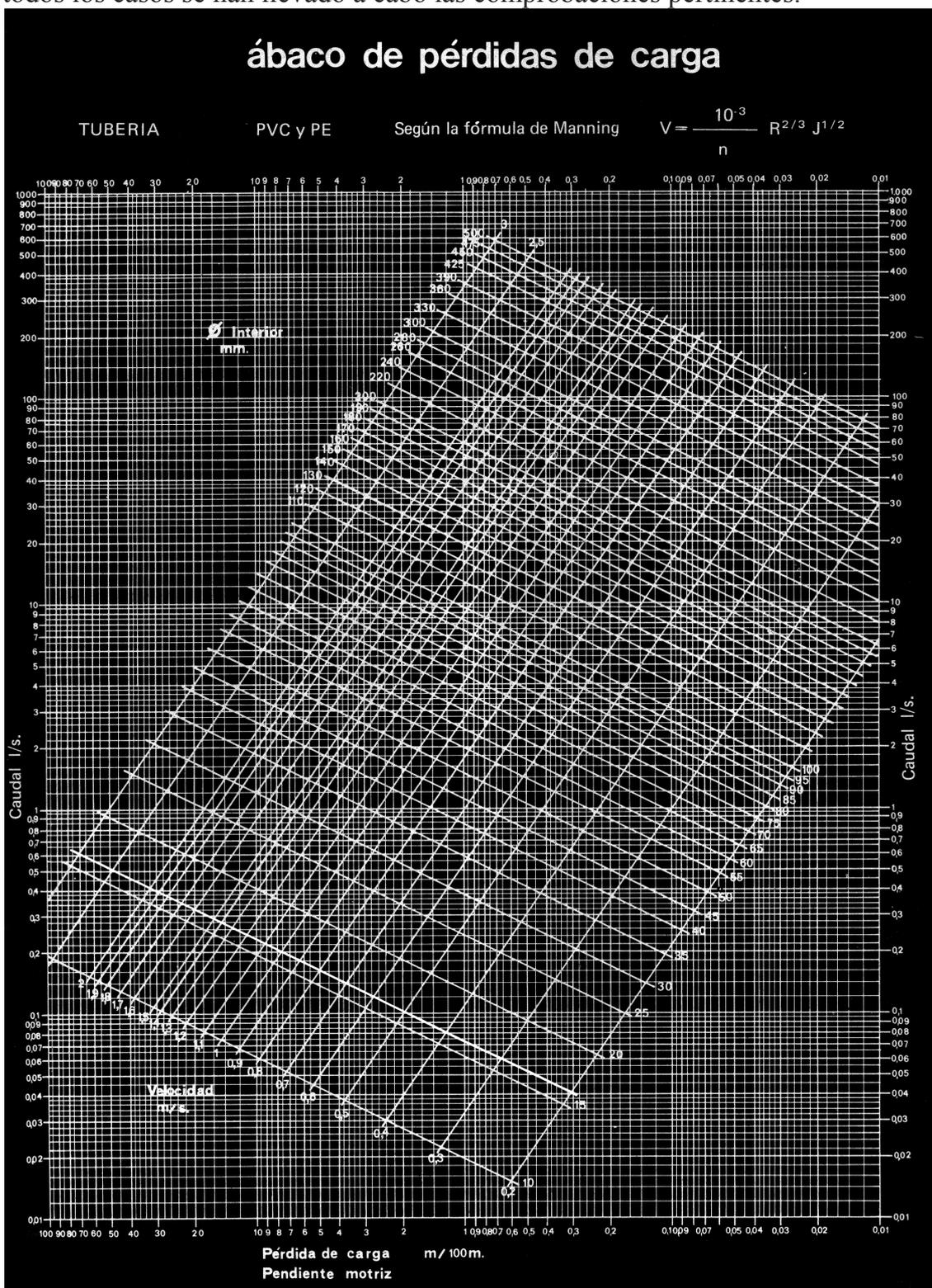


Fig. 2.7. Ábaco para el cálculo de las pérdidas de carga según la formulación de Manning

Los valores más comunes para el coeficiente de rugosidad de MANNING en tuberías, que se utilizarán para valores del número de Reynolds:  $Re > 4.000$

(regímenes turbulentos de BLASIUS y de NIKURADSE, lisos, intermedios o rugosos) o bien del crítico:  $Re^* > 40$ , son los siguientes:

Tabla 2.5. Coeficientes de rugosidad de Manning para distintos tipos de tuberías

MATERIAL	n
Plástico (PRFV, PVC y PE)	0'007-0'008
Fibrocemento	0'011-0'012
Fundición	0'012-0'013
Hormigón	0'013-0'014
Acero comercial	0'015-0'019
Ladrillo (cerámica)	0'012-0'030
Tierra cocida	0'020-0'030

En cualquier caso, para el estudio de los tubos hidráulicamente rugosos, como es el caso de la tuberías secundarias o terciarias en uso, donde pueden producirse corrosiones e incrustaciones diversas habida cuenta de la menor velocidad de circulación del agua y su estancamiento cuando no tiene lugar el riego, podría aplicarse, con mejor aproximación, la fórmula:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log \frac{D}{K} + 1,14 = 2 \cdot \log \frac{3,71 \cdot D}{K}$$

(fórmula de NIKURADSE)

Ésta es la ecuación general de la resistencia de rozamiento en tuberías rugosas, caracterizadas por haber alcanzado aquella situación en que la configuración del proceso turbulento es ya, prácticamente, independiente del valor de la velocidad, también llamada **ley de la tubería rugosa o ley cuadrática**, que ofrece resultados más similares a los obtenidos mediante la fórmula de RODRIGO aplicada anteriormente, con mayores pérdidas de carga. Y ello estando probado que el esfuerzo tangencial medio es proporcional al cuadrado de la velocidad media, midiéndose por la expresión anterior.

Como sabemos, la rugosidad de las tuberías comerciales podría expresarse en términos de “una rugosidad equivalente de arena efectiva, K” que corresponde con la rugosidad artificial de NIKURADSE.

**Se tropieza, sin embargo, con la dificultad añadida de que las tuberías comerciales no tienen una rugosidad uniforme ni regularmente distribuida, como la creada artificialmente por NIKURADSE.** Esto significa, que aún cuando las leyes de la tubería lisa y de la tubería rugosa seguirán siendo válidas con toda seguridad, cabe esperar que la curva de la zona de transición varíe sensiblemente. Efectivamente, se comprueba experimentalmente que las tuberías industriales rugosas se comportan análogamente a las artificiales de

NIKURADSE, en lo que respecta al régimen laminar. Sin embargo entre el régimen turbulento liso y el pleno, la zona de transición evoluciona menos bruscamente. La importancia de cualquier variación acaecida en esta zona se acentúa por el hecho de que casi todas las tuberías comerciales, especialmente cuando son nuevas, se encuentran dentro de la misma.

Los estudios de COLEBROOK y WHITE, en el *Imperial College*, demostraron, que a pesar de la diversidad de las técnicas empleadas para la fabricación de tubos comerciales, podía adoptarse una única curva para representar la ley de transición. En contraste con la curva S de NIKURADSE, aquí no existe punto de inflexión y la curvatura es gradual con conexiones asintóticas a la ley de la tubería lisa y de la tubería rugosa en los extremos. Una explicación a este hecho puede ser la de que, con rugosidad heterogénea, la subcapa laminar es atravesada por las irregularidades mayores en una etapa más temprana, que en el caso de la equivalente rugosidad homogénea; sin embargo, debido a que dichos salientes o depósitos de mayor tamaño son relativamente poco numerosos, la separación de la ley de la tubería lisa es más gradual, conservando la suavidad de la curvatura.

Posteriormente a la publicación de la ley de la tubería rugosa, comenzaron a acumularse datos sobre el valor de la rugosidad efectiva K para diversos tipos de tuberías comerciales. Actualmente se dispone de una amplia gama de valores representativos de K para las tuberías de empleo más común.

La resolución de la ecuación de COLEBROOK, se facilita mediante el uso de ábacos que permiten determinar cómodamente el valor de  $\lambda$  con la suficiente aproximación para los cálculos de ingeniería. Uno de esos ábacos es el denominado “diagrama de MOODY”, que estudiaremos a continuación.

- Tramo ficticio (con  $\varnothing \frac{1}{2}$ ):

El número de goteros será de:  $N = 27$ .

Caudal en el cabezal de riego:  $Q = 27 \cdot 4 = 108 \text{ l./h.} = 0'00003 \text{ m}^3/\text{seg.}$

$$V = \frac{4 \cdot 0'00003}{\pi \cdot 0'016^2} = 0'15 \text{ m/seg}$$

$$J = 0'00052 \cdot \sqrt[4]{\frac{0'15^7}{0'016^5}} = 0'003 \text{ m/m.l}$$

$$F = \frac{1}{1+1'75} + \frac{1}{2 \cdot 27} + \frac{\sqrt{1'75-1}}{6 \cdot 27^2} = 0'382;$$

$$\Delta H = F \cdot J \cdot L = 0'382 \cdot 0'003 \cdot 60 = \mathbf{0'07 \text{ m.c.a.}}$$

- Tramo real (con  $\varnothing 1/2''$ ):

$$\Delta H_1 = 0'49 - 0'07 = \mathbf{0'42 \text{ m.c.a.}}$$

- Tramo ficticio (con  $\varnothing 3/8''$ ):

En este caso, se tiene:

$$V = \frac{4 \cdot 0'00003}{\pi \cdot 0'0128^2} = 0'23 \text{ m/seg}$$

$$J = 0'00052 \cdot \sqrt[4]{\frac{0'23^7}{0'0128^5}} = 0'009 \text{ m/m l}$$

$$\Delta H_2 = F \cdot J \cdot L = 0'382 \cdot 0'009 \cdot 60 = \mathbf{0'21 \text{ m.c.a.}}$$

- Total tramo :

En resumen, que las pérdidas de carga de la línea porta-goteros en estudio, serán:

$$\Delta H_r = 0'42 + 0'21 = \mathbf{0'63 \text{ m.c.a.}}$$

Según la norma de Christiansen, esta pérdida de carga no habría de superar un:

20% Ha. =  $(20 \cdot 5)/100 = 1'00 \text{ m.c.a.}$ , condición ésta que cumple holgadamente.

Esta restricción se ha impuesto, pues, de manera que la diferencia existente entre los caudales del primer y del último gotero de cada ramal no sea superior al 10%, lo cual equivale aproximadamente, a que la pérdida de carga no exceda del 20% de la presión normal de funcionamiento. Dichas condiciones de servicio redundan en la consecución de una buena uniformidad en la distribución del riego, cualidad ésta necesaria para proceder a un diseño correcto de la instalación. Para una ampliación exhaustiva respecto al concepto de "uniformidad", puede consultarse el siguiente capítulo de nuestro libro.

### 9.3. MÉTODO DEL DIÁMETRO EQUIVALENTE

Veamos, en fin, que tratándose de una conducción mixta de dos diámetros (tuberías en serie), podríamos haber realizado el cálculo hidráulico por el método de la *longitud equivalente*, o mejor aún, del *diámetro equivalente*, que resulta ser más exigente que el anterior. De este modo, el diámetro equivalente de la conducción mixta será:

$$\frac{L}{D^5} = \frac{L_1}{D_1^5} + \frac{L_2}{D_2^5} = \sum_{i=1}^2 \frac{L_i}{D_i^5}; \text{ de dónde:}$$

$$D = \sqrt[5]{\frac{L}{\sum_{i=1}^2 \frac{L_i}{D_i^5}}}$$

y un **K** equivalente de:

$$L \cdot K = L_1 \cdot K_1 + L_2 \cdot K_2 = \sum_{i=1}^2 L_i \cdot K_i$$

$$K = \frac{\sum_{i=1}^2 L_i \cdot K_i}{L}$$

En nuestro caso, tendremos:

$$D_e = \sqrt[5]{\frac{L}{\frac{L_1}{D_1^5} + \frac{L_2}{D_2^5}}} = \sqrt[5]{\frac{120}{\frac{60}{16^5} + \frac{60}{12^5}}} = 139 \text{ mm.}$$

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_e^2} = \frac{4 \cdot 0'00006}{\pi \cdot 0'0139^2} = 0'40 \text{ m/seg}$$

$$J = 0'00052 \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{0'40^7}{0'0139^5}} = 0'022 \text{ m/m.l.}$$

que con el ya calculado coeficiente de Christiansen de reducción por salidas ( $F = 0'373$ ), ofrece unas pérdidas de carga totales del ramal porta-goteros de:

$$\Delta H_r = F \cdot J \cdot L = 0'373 \cdot 0'022 \cdot 120 = \mathbf{0'98 \text{ m.c.a.}}$$

que resulta mayor que  $\Delta H_r = \mathbf{0'63 \text{ m.c.a.}}$  obtenido anteriormente, pero todavía dentro de los límites de aceptabilidad establecidos por la norma (sería aconsejable, al respecto, promediar aritméticamente los resultados obtenidos para la determinación definitiva).

#### 9.4. MÉTODO DE LA LONGITUD EQUIVALENTE

Cuando una conducción, tal como la que nos ocupa, consta de tuberías de diferentes dimensiones o características (diámetros interiores, longitudes, rugosidades), se dice que estas tuberías están conectadas en serie o bien que constituyen un sistema de tuberías en serie.

Las ecuaciones de continuidad y energía establecen las dos siguientes relaciones que deben ser satisfechas simultáneamente en el supuesto de que la tubería estuviera desprovista de salidas o goteros y pasara, a través de ella, todo el caudal inicial:

$$\begin{cases} Q = Q_1 = Q_2 \\ h = h_1 + h_2 \end{cases}$$

Para un caudal dado  $Q$  la pérdida de carga total en la conducción valdrá, despreciando las pérdidas accidentales, según la ecuación universal de Darcy-Weissbach:

$$h = h_1 + h_2 = J_1 \cdot L_1 + J_2 \cdot L_2 = \frac{f_1 \cdot L_1 \cdot V_1^2}{2g \cdot D_1} + \frac{f_2 \cdot L_2 \cdot V_2^2}{2g \cdot D_2} \quad (1)$$

donde al coeficiente de fricción  $\lambda$  le denominaremos, a partir de ahora,  $f$ .

Si conocido el valor de  $h$  se pretendiera hallar el caudal correspondiente  $Q$  la fórmula (1) habría que expresarla en función del gasto o caudal, así:

$$h = \frac{16 \cdot Q^2}{2 \cdot g \cdot \pi^2} \left( \frac{f_1 \cdot L_1}{D_1^5} + \frac{f_2 \cdot L_2}{D_2^5} \right)$$

de donde:

$$Q = \frac{\pi \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{4 \left( f_1 \cdot L_1 / D_1^5 + f_2 \cdot L_2 / D_2^5 \right)^{1/2}} \quad (2)$$

A veces, la resolución de la ecuación (2) anterior resulta laboriosa y puede ser práctico el procedimiento de sustituir el sistema de tuberías en serie por una única tubería equivalente, de sección constante. Se dice que una tubería es equivalente a otras cuando la pérdida de carga, para un gasto dado, es la misma que en el sistema de tuberías que sustituye.

Siendo  $(L, D)$  las dimensiones de la tubería equivalente, que sustituye al sistema mixto de dos diámetros de la línea porta-goteros que nos ocupa, vamos a demostrar que si para un caudal  $Q$ , se cumple la condición  $h = H$ , siendo  $H$  la pérdida de carga del gasto  $Q$  en la tubería equivalente, esta condición se seguirá verificando para las pérdidas de carga correspondientes a cualquier otro gasto  $Q'$ .

Por hipótesis será:

$$h = h_1 + h_2 = H \quad (3)$$

e introduciendo en ambas tuberías un nuevo caudal arbitrario,

$$Q' = K \cdot Q$$

la pérdida de carga total en el sistema valdrá ahora,

$$h' = h'_1 + h'_2 = H' \quad (4)$$

pero según la fórmula simplificada de Darcy, se tiene:

$$\begin{aligned} h_1 &= m_1 \cdot L_1 \cdot Q^2 ; & h_2 &= m_2 \cdot L_2 \cdot Q^2 ; \\ h'_1 &= m_1 \cdot L_1 \cdot (KQ)^2 ; & h'_2 &= m_2 \cdot L_2 \cdot (KQ)^2 \end{aligned}$$

y dividiendo ordenadamente ambos miembros de estas igualdades, resultará:

$$\frac{h'_1}{h_1} = \frac{h'_2}{h_2} = \frac{h'}{h} = K^2 \quad (5)$$

entonces la ecuación (4) podría expresarse así:

$$h' = h'_1 + h'_2 = K^2 (h_1 + h_2) = K^2 \cdot h \quad (6)$$

y como, a su vez, se cumple que:  $H' = K^2 \cdot H$  (7)

comparando la ecuación (6) y la (7), y siendo  $H = h$  (por hipótesis), quedará también demostrado que:

$$H' = h'$$

En consecuencia, un problema de tuberías en serie, puede reducirse al de una tubería sencilla de diámetro prefijado y de una cierta longitud, pudiendo resolverse según los procedimientos ya conocidos. A veces puede ser conveniente fijar el diámetro de la tubería equivalente igual al de la tubería más larga del sistema, quedando reducida la solución del problema planteado a la determinación de la longitud  $L$  de la tubería equivalente.

Para determinar el valor de  $L$  se expresa la condición de equivalencia, con el diámetro  $D$  fijado:

$$h = \frac{16 \cdot Q^2 \cdot f \cdot L}{2 \cdot g \cdot \pi^2 \cdot D^5} \quad (8)$$

y para el sistema que estamos considerando, se tendrá:

$$L = \frac{D^5}{f} \left( \frac{f_1 \cdot L_1}{D_1^5} + \frac{f_2 \cdot L_2}{D_2^5} \right) \quad (9)$$

En la práctica, el valor de  $L$  puede determinarse fácilmente introduciendo un caudal ficticio cualquiera  $Q$  en la conducción en serie y calculando el valor de  $h$ . Como sabemos que este gasto  $Q$  ha de producir la misma pérdida de carga  $h$  en la tubería equivalente de diámetro prefijado  $D$ , con los valores de  $Q$  y  $D$  se calculará la pérdida unitaria de carga  $J$  y  $L = h/J$ .

En nuestro caso, el cálculo de la longitud equivalente de esta conducción mixta, de acuerdo con la fórmula anterior (9), considerando un diámetro interno de la tubería equivalente de  $D = 16 \text{ mm}$  ( $1/2''$ ), exige la previa determinación de los coeficientes o factores de fricción  $f$ ,  $f_1$  y  $f_2$ . A saber, para una temperatura media del agua de  $25^\circ\text{C}$ , se tiene una viscosidad cinemática de:  $\nu = 0'91 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$ , como puede comprobarse en la tabla que reproducimos más adelante, y una rugosidad absoluta (tubería de PE) de  $K = 0'01 \text{ mm}$ , así:

**Tramo 1:**  $L_1 = 60 \text{ m}$ ;  $D_1 = 16 \text{ mm}$ ;

$$V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 0'00006}{\pi \cdot 0'016^2} = 0'30 \text{ m/seg}$$

$$R_e = \frac{V_1 \cdot D_1}{\nu} = \frac{0'30 \cdot 0'016}{0'91 \cdot 10^{-6}} = 5.275 ;$$

Rugosidad relativa o proporcional:  $K/D_1 = 0'01/16 = 0'000625$ , lo que ofrece, en el ábaco de *Moody*, un  $f_1 = 0'037$ . En cualquier caso, nos hallamos en régimen turbulento liso ( $4 \cdot 10^3 < R_e = 5.275 < 10^5$ ) por lo que, según la expresión de Blasius (1911) para el rozamiento en tubos de pared lisa, obtenida sobre la base de sus propias investigaciones y con datos experimentales facilitados por Saph y Schoder, se tiene:

$$f_1 = \frac{0'3164}{R_e^{0'25}} = \frac{0'3164}{\sqrt[4]{5.275}} = 0'037 , \text{ que confirma plenamente el resultado}$$

anterior.

Si hubiéramos considerado el tubo como “hidráulicamente rugoso”, tendríamos que tener en cuenta la expresión de Nikuradse o ley cuadrática:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \times \log \frac{D}{K} + 1'14 = 2 \times \log \frac{16}{0'01} + 1'14 = 7'55 ,$$

de dónde  $1/f = 56'98$ ;  $f = 0'018$ , que resulta ser sólo un 50% del anteriormente obtenido, por lo que esta determinación no resulta aceptable al resultar un valor excesivamente bajo, como veremos a continuación.

En efecto, podríamos contrastar los cálculos anteriores de  $f_1$  mediante la aplicación de diversas fórmulas alternativas. A saber:

a) En primer lugar, la fórmula basada en las ecuaciones de resistencia de Von Kàrmàn-Prandtl para tubos hidráulicamente lisos, que ofrece la configuración analítica:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{\text{Re} \times \sqrt{f}}{2'51} \right) = 2 \log \left( \frac{5.274'72 \times \sqrt{f}}{2'51} \right),$$

de dónde se deduce que:  $f_1 = 0'0368$ .

b) Alternativamente, la formulación de la *Société Belge des Mécaniciens*, conduce a la expresión:

$$f = \frac{0'532}{\text{Re}^{1/3}} + 0'0084 \times \left( \frac{K}{D} \right)^{1/5} = \frac{0'532}{\sqrt[3]{5.274'72}} + 0'0084 \times 0'000625^{0'2} = 0'033$$

c) También la formulación de Von Mises nos llevaría a un valor de:

$$f = 0'0096 + \sqrt{\frac{K}{D}} + 1'7 \times \sqrt{\frac{1}{\text{Re}}} = 0'0096 + \sqrt{0'000625} + 1'7 \times \sqrt{\frac{1}{5.274'72}} = 0'058$$

que, en este caso, resulta ser excesivamente alto.

d) Por otra parte, la moderna formulación de Swance y Jain (1976) resulta también perfectamente aplicable en este caso, habida cuenta de los valores del nº de Reynolds (Re) y de la rugosidad relativa o proporcional ( $\varepsilon_r$ ), con lo que se tendrá:

$$f = \frac{0'25}{\left[ \log \left( \frac{\varepsilon_r}{3'7} + \frac{5'74}{\text{Re}^{0'9}} \right) \right]^2} = \frac{0'25}{\left[ \log \left( \frac{0'000625}{3'7} + \frac{5'74}{5.274'72^{0'9}} \right) \right]^2} = 0'038$$

e) Por último, la formulación de Colebrook y White, que combina acertadamente las leyes anteriores de las tuberías lisas y rugosas (conducciones semirrugosas), ofrece:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \times \log \cdot \left( \frac{K}{3,71 \times D} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) = -2 \times \log \cdot \left( \frac{0'01}{3,71 \times 16} + \frac{2,51}{5.274'72 \sqrt{f}} \right),$$

de dónde se deduce que:  $f_1 = 0'0375$ .

**Por todas estas razones, el valor adoptado de  $f_1 = 0'037$  se considera centrado y completamente adecuado a la resolución de nuestro problema.**

**Tramo 2:**  $L_2 = 60$  m;  $D_2 = 12'8$  mm. ;

$$V_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_2^2} = \frac{4 \cdot 0'00006}{\pi \cdot 0'0128^2} = 0'46 \text{ m/seg}$$

$$R_e = \frac{V_2 \cdot D_2}{\nu} = \frac{0'46 \cdot 0'0128}{0'91 \cdot 10^{-6}} = 6.470;$$

Rugosidad relativa:  $K/D_2 = 0'01/12'8 = 0'000781$ , lo que ofrece, en el ábaco de *Moody*, un  $f_2 = 0'035$ . Como nos hallamos en el mismo régimen que el del tramo de tubería anterior, resultará:

$$f_2 = \frac{0'03164}{\sqrt[4]{6.470}} = 0'035, \text{ que también confirma la determinación gráfica}$$

anterior, con las mismas consideraciones que para el cálculo alternativo de la  $f_1$  hemos realizado anteriormente, que vienen a confirmar el valor obtenido de la  $f_2$ , según invitamos a comprobar, como ejercicio recapitulatorio, a nuestros amables lectores. Para valores superiores y hasta  $Re \cong 1'5 \cdot 10^6$  se debe emplear la fórmula de Nikuradse:

$$f = 0'0054 + \frac{0'396}{Re^{0'3}}$$

La corriente turbulenta está influida por la rugosidad de las paredes de la conducción; por ello habrá que tenerla en cuenta al efectuar los cálculos correspondientes. Una de las fórmulas más empleadas es la de Hopf y Fromm, cuya aplicación será suficiente para la mayoría de los casos. Esta fórmula es la siguiente:

$$f = 10^{-2} \times \frac{k}{D} \times 0'314$$

que es independiente del número de Reynolds  $Re$  y en ella  $D$  es el diámetro interior de la tubería en metros y  $k$  un coeficiente de aspereza expresado en metros, cuyos valores son los siguientes:

	k (metros)
Tubo de metal nuevo y liso, plásticos.....	1'5
Tubo nuevo de hierro forjado y chapa de acero .....	2'5
Tubo usado de hierro forjado; cemento liso y fibrocemento .....	5'0

- Tubo usado de hierro forjado con incrustaciones,  
cemento rugoso.....7'0
- Tubos muy rugosos, con grandes incrustaciones .....10'0

A continuación, puede verse dicha estimación efectuada mediante el empleo del conocido ábaco de *Moody*:

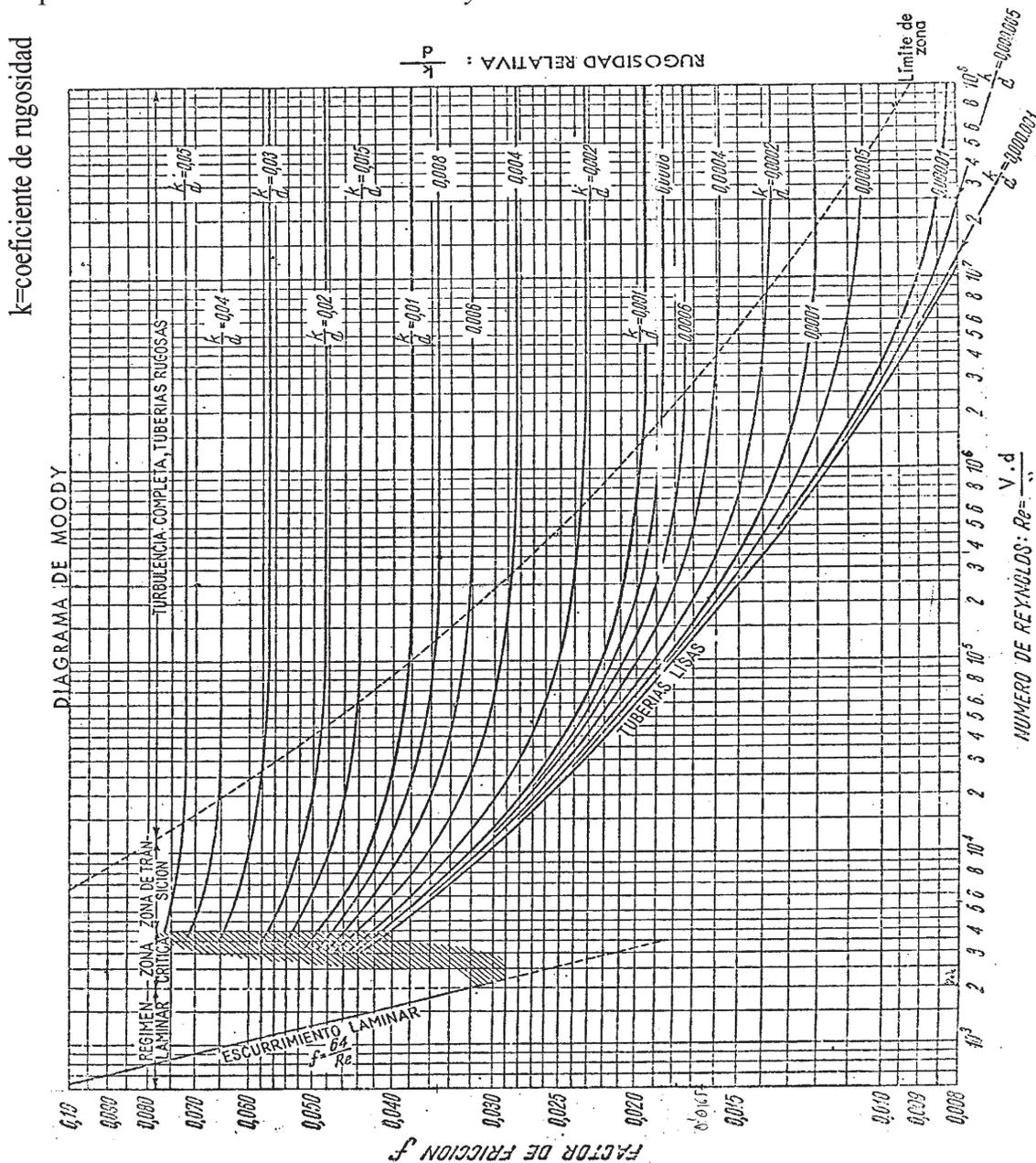


Fig. 2.8. Ábaco de Moody

Este ábaco del coeficiente de fricción para tuberías comerciales, confeccionado por Lewis F. MOODY en el año 1944, se representa en la figura anterior 2.8., y consiste en un diagrama representado en papel logarítmico, basado en la fórmula de COLEBROOK y en las propias experiencias de MOODY sobre tubos industriales. **Este diagrama nos permite deducir el valor**

**de f en función de Re (nº de Reynolds) y de K/D (rugosidad relativa o proporcional).**

El ábaco en cuestión indica que hay cuatro zonas bien diferenciadas: una de **flujo laminar** ( $Re < 2.000$ ) en la que resulta aplicable la expresión de Hagen-Poiseuille:  $f = 64/Re$ , una **zona crítica o inestable** ( $2.000 < Re < 4.000$ ) donde los valores de f son inciertos porque el flujo puede ser indistintamente laminar o turbulento, aunque en el caso de las tuberías de plástico como las que aquí nos ocupan resulta aplicable la expresión de Blasius:  $f = 0,3164 \times Re^{-0,25}$ , una **zona de transición** a partir de  $Re > 4.000$ , que comprende los regímenes turbulentos lisos e intermedios, donde resultan aplicables las expresiones de Blasius, Schiller-Hermann y Nikuradse y hasta un valor de Re variable con K/D, donde  $f = f(Re, K/D)$ ; y una **zona de turbulencia rugosa o completa** donde el valor de  $f = f(K/D)$ , como puede observarse por las curvas que representan los valores de K/D, las cuales tienden a hacerse paralelas al eje de abscisas, y en la que resulta aplicable también la expresión de Nikuradse.

No aparece una línea de delimitación estrictamente rigurosa entre la zona de transición y la de turbulencia completa. El profesor MOODY las separó mediante una línea de trazos, señalada en la figura como límite de zona  $((Re)^* = 70)$ . Para la mayor parte de las aplicaciones, la curva límite de zona  $(Re)^* = 70$ , puede trasladarse hasta un valor del  $(Re)^* = 35$ , por ser pequeños los errores que en tal supuesto se cometen. De hecho, mediante deducciones semiempíricas se llegó a determinar el **espesor estable  $\delta'$  de la subcapa laminar**, con el siguiente resultado:

$$\delta' = \frac{11,6 \cdot \nu}{V^*}$$

donde  $V^*$  es la denominada “velocidad de fricción” de Prandtl. Por consiguiente, el parámetro característico del comportamiento de la tubería estará dado por la relación entre la altura de rugosidad (rugosidad absoluta) K y el espesor  $\delta'$  anteriormente definido, o sea:

$$\frac{K}{\delta'} = \frac{1}{11,6} \cdot \frac{K \cdot V^*}{\nu}$$

El término  $\frac{V^* \cdot K}{\nu}$  es una forma del nº de Reynolds denominado *número de Reynolds de rugosidad*, al que nos hemos referido con anterioridad, que es proporcional al cociente  $K/\delta'$  y nos dará el criterio para clasificar el comportamiento de la tubería.

Existe, pues, un determinado valor para  $(Re)^*$  que cuando se rebasa empiezan a ser sensibles las rugosidades. A saber:

$$(\text{Re})^* = \frac{V^* \cdot K}{\nu} = \text{Re} \cdot \sqrt{\frac{f}{8}} \cdot \frac{K}{D}$$

de donde se deduce que  $(\text{Re})^*$  es el producto de los tres parámetros más importantes del flujo en las tuberías.

La ecuación anterior define una curva como lugar geométrico de los puntos del plano en que  $(\text{Re})^*$  es constante, y la utilizaremos justamente para separar la zona de transición de la de turbulencia plena.

Por otra parte, la línea recta de HAGEN-POISEUILLE:  $f = 64/\text{Re}$ , puede usarse para la resolución de los problemas de flujo laminar en tuberías.

**Este diagrama de Moody es aplicable a cualquier líquido y a cualquier tipo de movimiento.** Existen ábacos auxiliares que dan el valor de  $\text{Re}$  en función de  $V \cdot D$  para varios líquidos, y el valor de  $K/D$  en función de  $D$  y del material constitutivo de las paredes del tubo.

Por último, veamos que la tubería equivalente, con  $D = 16 \text{ mm.}$ , ofrece:

$$V_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0'00006}{\pi \cdot 0'016^2} = 0'30 \text{ m/seg}$$

$$R_e = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{0'30 \cdot 0'016}{0'91 \cdot 10^{-6}} = 5.275 \text{ (tramo 1),}$$

con la misma rugosidad relativa que en el primer tramo, lo que ofrece un  $f = 0'037$ .

De este modo, la longitud equivalente de esta conducción mixta será, por aplicación directa de la fórmula (9):

$$L = \frac{0'016^5}{0'037} \cdot \left( \frac{0'037 \cdot 60}{0'016^5} + \frac{0'035 \cdot 60}{0'0128^5} \right) = 233'2 \cong 233 \text{ m.}$$

En su consecuencia, las pérdidas de carga de la línea porta-goteros serán de:

$$\boxed{\Delta H_f} = F \cdot J \cdot L = 0'373 \cdot 0'011 \cdot 233 = \boxed{0'96 \text{ m.c.a.}}$$

Hay que tener en cuenta, por otra parte, que la “ecuación universal” de Darcy-Weissbach (1857), o sea:

$$J = \frac{f}{D} \times \frac{V^2}{2g} = \frac{16 \times Q^2 \times f}{2g \times \pi^2 \times D^5} = f \times 0'0826 \times \frac{Q^2}{D^5},$$

resulta aplicable a nuestro caso, con lo que la pérdida de carga unitaria sería de:

$$J = 0'037 \times 0'0826 \times \frac{0'00006^2}{0'016^5} = 0'0105 \cong 0'011 \text{ m./m.l.}, \text{ c.s.q.d.}$$

Veamos, por último, la siguiente tabla donde se resumen las fórmulas a aplicar y sus autores, para el cálculo del valor del factor de fricción ( $\lambda = f$ ), en función exclusiva del número de Reynolds (Re), lo que facilita grandemente dicha determinación. En efecto:

Tabla 2.6. Valores de la expresión  $f = f(\text{Re})$  según el régimen hidráulico

Nº Re	Régimen	Fórmula	Autor
<2.000	Laminar	$f = \frac{64}{\text{Re}}$	Hagen-Poiseuille
2.000-4.000	Crítico o inestable	$f = \frac{0'3164}{\text{Re}^{0'25}}$	Blasius
4x10 <sup>3</sup> -10 <sup>5</sup>	Turbulento liso	$f = \frac{0'3164}{\text{Re}^{0'25}}$	Blasius
		$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \cdot \frac{2'51}{\text{Re} \cdot \sqrt{f}}$	Von Kármán-Prandtl
10 <sup>5</sup> - 2x10 <sup>6</sup>	Turbulento intermedio	$f = 0'0054 + \frac{0'396}{\text{Re}^{0'3}}$	Schiller-Hermann
		$f = 0'032 + \frac{0'221}{\text{Re}^{0'237}}$	Nikuradse
2x10 <sup>6</sup> -3'24x10 <sup>6</sup>	Turbulento rugoso	$f = 0'032 + \frac{0'221}{\text{Re}^{0'237}}$	Nikuradse

## 9.5. RESTANTES DETERMINACIONES: INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA SOBRE LAS CONDICIONES DE CIRCULACIÓN DEL AGUA

### 9.5.1. Generalidades

En tanto que no se llegó a diferenciar netamente el dominio del movimiento laminar del turbulento, sino que, al contrario, se creía que ambos estaban regidos por la misma ley, se trató de evaluar el mismo en tubos anchos, visto que es decisiva la importancia que tiene sobre la circulación en tubos capilares. Ya G. Hagen<sup>6</sup>, a quien, como queda dicho, se debe la distinción entre ambas clases de movimientos, admitió que la pérdida de carga disminuía al aumentar la temperatura, si bien este efecto se iba restringiendo a medida que se consideraban tubos de mayor diámetro. Igualmente O. Reynolds<sup>7</sup> negó toda influencia de la viscosidad sobre el movimiento turbulento, en tanto que la resistencia sea proporcional al cuadrado de la velocidad, dependiendo las variaciones observadas solamente de las de la densidad del líquido. En las experiencias de W. C. Unwin<sup>8</sup> sobre discos lisos giratorios, el aumento de resistencia no seguía la expresada ley cuadrática, resultando que dicha resistencia variaba en función de la temperatura  $t$  (en °C), proporcionalmente a:

$$1 - 0,00405 t$$

A cifras muy análogas llegó posteriormente J. G. Mair<sup>9</sup> midiendo las pérdidas de carga en un tubo de latón de 38 mm; la fórmula encontrada fue la siguiente:

$$J = a_1 \frac{V^{1,795}}{D^{3-1,795}} = a_1 \frac{V^{1,795}}{D^{1,205}}$$

En la que  $a_1$ , proporcional a  $1 - 0,00416 t$ , tiene los valores siguientes:

Temperatura en °C	13,9	21,1	37,8	54,4	71,1
$A_1$	0,000556	0,000530	0,000492	0,000454	0,000415

Saph y Schoder<sup>10</sup>, con delgados tubos lisos de latón, encontraron que, entre 2° y 21°C, cada aumento de 1°C equivale a una disminución del 6,7% en la superficie de rozamiento. También F. W. Macaulay<sup>11</sup> observó que en los tubos del acueducto de Elan, en la ciudad inglesa de Birmingham, al pasar la temperatura de 3°C en invierno a 18°C en verano, el caudal aumentaba en un 2,5%.

<sup>6</sup> G. HAGEN, *Abhandlungen d. K. Akad. d. Wissensch.* Berlin, 1869; G. HAGEN, *Ueber die Bewegung des Wassers.* Berlin, 1870. pág. 23.

<sup>7</sup> O. REYNOLDS, *Proceedings of the Royal Institution of Great-Britain. Papers 2.* pág. 237.

<sup>8</sup> W. C. UNWIN, *Min. Proc. Inst. Civ. Eng.* 80 (1885), pág. 221; W. C. UNWIN, *Treatise on hydraulics.* Londres, 1907. pág. 136.

<sup>9</sup> J. G. MAIR, *Min. Proc. Inst. Civ. Eng.* 84 (1886), pág. 429.

<sup>10</sup> SAPH y SCHODER, *Am. Soc. Civ. Eng. Trans.* 51 (1903), pág. 290.

<sup>11</sup> F. W. MACAULAY, *Min. Proc. Inst. Civ. Eng.* 208 (1921), pág. 25.

Es de notar que, en la fórmula de Blasius,  $J$  es proporcional a  $(\eta : \gamma)^{1/4}$ , en la que  $\eta$  depende de la temperatura y  $\gamma$  también, aunque en mucho menor grado. Asimismo, K. Brabbée<sup>12</sup> estudiando tuberías de 15 a 50 mm  $\varnothing$ , con unión por manguitos y tubos hervidores de 50 a 131 mm  $\varnothing$  para calefacción por agua caliente, encontró las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } 13^\circ \text{ a } 15^\circ\text{C, } J = 0,000446 \frac{V^{1,781}}{D^{1,298}} \text{ ó } 0,000380 \frac{V^{1,80}}{D^{1,41}} \\ \text{para } 70^\circ\text{C, } J = 0,000437 \frac{V^{1,84}}{D^{1,26}} \text{ ó } 0,000391 \frac{V^{1,86}}{D^{1,37}} \end{array} \right\}$$

En el coeficiente de las fórmulas para 70°C se puede admitir que una parte, aproximadamente equivalente a 0,00001, procede de la menor densidad del agua, sin cuyo efecto los coeficientes serían 0,000427 y 0,000381<sup>13</sup>.

En los casos generales, y cuando no exista una especificación concreta de la fórmula a aplicar, la pérdida de carga obtenida debe multiplicarse, en el caso de los tubos de PVC, por el factor  $\lambda$  que se deduce del siguiente gráfico:

En la práctica, las pérdidas de carga anteriormente calculadas se multiplicarán, según la temperatura del agua, por el siguiente factor de corrección tabulado para tuberías de plástico (PE de alta y baja densidad, PRFV o bien PVC):

Tabla 2.7. Factor multiplicador o corrector de las pérdidas de carga en función de la temperatura del agua, para tuberías de plástico

<sup>12</sup> K. BRABBÉE. *Beihefte zum Gesundheitsingenieur*, tomo I, n° 1 (1913).

<sup>13</sup> Véase también: L. SCHILLER, Zwei neue Aehnlichkeitsgesetze für das Temperaturfeld usw. *Physikalische Zeitschrift* 29 (1928), pág. 690. L. SCHILLER y Th. BURBACH, Wärmeübergang strömender Flüssigkeiten in Rohren, en *Z. D. V. Deutsch. Ing.* 72 (1.028), pág. 1.195.

t (°C)	FACTOR
0	1'120
5	1'075
10	1'035
15	1'000
20	0'970
<b>25</b>	<b>0'940</b>
30	0'915
35	0'890
40	0'870
45	0'845
50	0'825
55	0'810
60	0'780

En cualquier caso, teniendo en cuenta una temperatura media anual del agua de riego de 25°C (de procedencia subterránea) y añadiendo prudentemente un 15% de pérdidas de carga por las piezas especiales de la conducción, se tendrán unas pérdidas totales de carga del ramal porta-goteros que nos ocupa de:

$$\overline{\Delta H_r} = \frac{0'63 + 0'98 + 0'96}{3} \cdot 0'94 \cdot 1'15 = \overline{0'93 \text{ m.c.a.}} < \underline{1'00 \text{ m.c.a.}}$$

razón por la que se considera ACEPTABLE.

Veamos ahora, por ejemplo, que si la relación entre el espaciamiento existente al comienzo del ramal y el normal existente entre los 54 emisores es de:

$$r = \frac{4'30 \text{ m}}{2'15 \text{ m}} = 2'00 ,$$

entonces se deduce que el valor del correspondiente coeficiente reductor por salidas debería ser:

$$F_2 = \frac{r + N \cdot F - 1}{r + N - 1} = \frac{2 + 54 \cdot 0'373 - 1}{2 + 54 - 1} = 0'384 ,$$

con lo que las pérdidas de carga anteriormente calculadas, aumentarían correlativamente, en el peor de los casos ( $F = 0'373$ ), así:

$$\underline{\Delta H_r} = 0'93 \times \frac{0'384}{0'373} = \underline{0'96 \text{ m.c.a.}} < 1'00 \text{ m.c.a.} ,$$

que continuarían siendo aceptables.

### 9.5.2. Relación entre la temperatura y la viscosidad cinemática del agua

El concepto de “viscosidad”, tal como lo estamos desarrollando aquí, hace referencia a una propiedad física de los líquidos desde el punto de vista de su estudio mecánico, en virtud de la cual el fluido (agua) en movimiento ofrece resistencia a los esfuerzos tangenciales que tienden a deformarlo. La viscosidad -propiedad inversa de la fluidez- es debida fundamentalmente a la interacción de las moléculas del líquido, corresponde a las resistencias de fricción que se oponen al desplazamiento relativo de sus moléculas cuando se pone en movimiento y nos ofrece una idea del grado de cohesión de las mismas. Como sea que al aumentar la temperatura disminuye la fuerza de cohesión molecular, disminuirá también la viscosidad; sin embargo, para presiones ordinarias, la viscosidad resulta independiente de la presión. La “viscosidad dinámica” de un fluido homogéneo se mide por la resistencia que opone al desplazamiento, en su seno, de una superficie plana sólida en el plano de ésta, siendo la fuerza por unidad de superficie que es preciso aplicar a una superficie plana sólida sumergida en dicho fluido para desplazarla en su plano, manteniendo una diferencia de velocidad igual a la unidad entre la superficie plana considerada y un plano paralelo a esta superficie tomado a una distancia de la superficie igual a la unidad.

La “viscosidad cinemática” ( $\nu$ ) es el cociente entre la “viscosidad dinámica o absoluta” ( $\mu$ ) y la densidad del líquido ( $\rho$ ). Interviene, como en el caso que nos ocupa, en numerosas aplicaciones de la Hidráulica y se mide mediante viscosímetros, que son aparatos en los que generalmente se determina el tiempo que invierte un volumen determinado de líquido en verter a través de un orificio (o de un tubo capilar) o, por el contrario, el volumen vertido en un tiempo determinado por un regulador calibrado, puesto que la experiencia viene demostrando que la velocidad de circulación por el expresado mecanismo resulta inversamente proporcional a la viscosidad. En Europa se ha empleado el viscosímetro Engler habitualmente, mientras que en USA resulta de uso más común el de tipo Saybolt.

Veamos, a continuación, la siguiente tabla:

Tabla 2.8. Viscosidad cinemática en función de la temperatura del agua

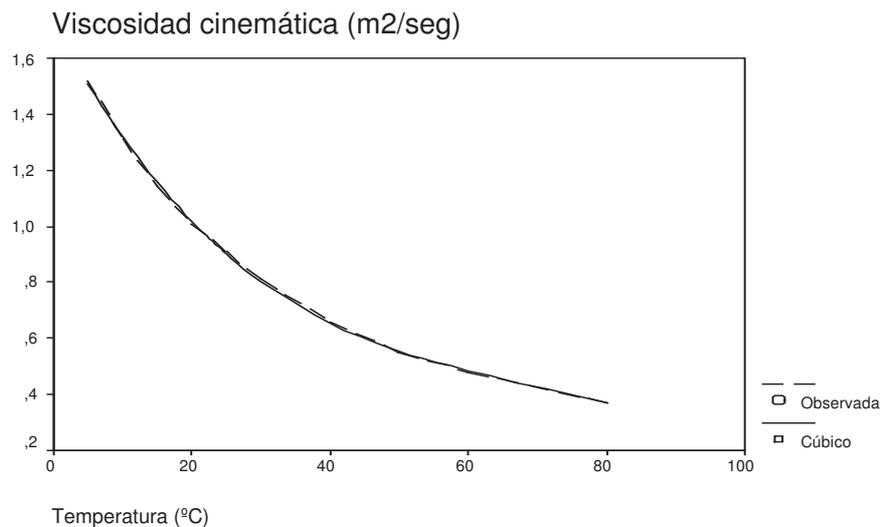
<b>TABLA DE VALORES DE LA VISCOSIDAD CINEMÁTICA PARA EL AGUA</b>	
<b>Temperatura (°C)</b>	<b><math>\nu</math> (m<sup>2</sup>/seg.)</b>
0°	$1'790 \times 10^{-6}$
5°	$1'520 \times 10^{-6}$
10°	$1'310 \times 10^{-6}$
15°	$1'140 \times 10^{-6}$
<b>20°</b>	<b><math>1'010 \times 10^{-6}</math></b>
<b>23°</b>	<b><math>0'950 \times 10^{-6}</math></b>
25°	$0'910 \times 10^{-6}$
30°	$0'804 \times 10^{-6}$
40°	$0'661 \times 10^{-6}$
50°	$0'556 \times 10^{-6}$
60°	$0'477 \times 10^{-6}$
70°	$0'415 \times 10^{-6}$
80°	$0'367 \times 10^{-6}$
90°	$0'328 \times 10^{-6}$
100°	$0'296 \times 10^{-6}$

De ella, es inmediata la deducción de la relación analítica existente entre ambas variables siguiendo las técnicas usuales de la regresión no lineal mínimocuadrática que venimos empleando profusamente en nuestros estudios, del siguiente modo:

Variable independiente: Temperatura (°C)

Dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2	b3
Viscosidad	CUB	,999	7	3477,39	,000	1,7224	-,0461	,0006	-3,E-06

La representación gráfica del ajuste MCO realizado, resulta ser la siguiente:



Dependiente variable.. Viscosidad x 10<sup>-6</sup> Method.. CUBIC

Listwise Deletion of Missing Data

Multiple R ,99966  
 R Square ,99933  
 Adjusted R Square ,99904  
 Standard Error ,01102

Analysis of Variance:

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	1,2661686	,42205619
Residuals	7	,0008496	,00012137

F = 3477,38715 Signif F = ,0000

----- Variables in the Equation -----

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
Temperatura (°C)	-,046132	,001512	-2,970347	-30,518	,0000
Temperatura (°C)	,000606	4,1991E-05	3,338727	14,432	,0000
Temp. (°C)	-3,01261036E-06	3,2932E-07	-1,315645	-9,148	,0000
(Constant)	1,722391	,014907		115,541	,0000

Así pues, como consecuencia del ajuste realizado, se ha obtenido la ecuación polinómica de tercer grado siguiente:

$$v = (1,7224 - 0,0461 \cdot t + 0,0006 \cdot t^2 - 0,000003 \cdot t^3) \times 10^{-6}$$

que nos ofrece los valores de la viscosidad cinemática del agua (m<sup>2</sup>/seg.) en función de la temperatura centígrada, con gran exactitud (trátase de una correlación inversa casi perfecta), como puede comprobarse del análisis estadístico que se acompaña.

### 9.5.3. Influencia sobre los emisores de riego

La sensibilidad del emisor del riego localizado de alta frecuencia a la temperatura del agua puede influir también notoriamente sobre la uniformidad del sistema de riego. Este factor, a pesar de los numerosos estudios realizados por diversos autores, ha resultado complicado de predecir e incluir en el diseño hidráulico de una instalación de riego. Se ha tendido, por tanto, a ignorar, pues se estimaba que, en la mayoría de los casos, su efecto hidráulico era mejorador de la uniformidad de la distribución del riego, habida cuenta de la mayor descarga que se producía en los emisores o goteros.

De entre todas las propiedades del agua que se modifican con la temperatura, la viscosidad constituye el factor que, de manera más significativa, se ve alterado (Rodríguez-Sinobas *et al.*, 1999), de tal suerte que es de esperar que en los emisores con flujo laminar (exponente de descarga  $> 0,5$ ), donde este factor posee más influencia, se deben detectar las mayores variaciones de caudal ante los cambios de temperatura. Estos investigadores dedujeron teóricamente la expresión de la descarga del emisor que, simplificada al estimar variaciones depreciables en su geometría y en la densidad del agua, queda configurada como sigue:

$$q = K \cdot \nu_s^{1-2m} \cdot h^m$$

donde:

$\nu_s$  = viscosidad cinemática relativa del agua.

$h$  = presión hidráulica (m.c.a.)

$m$  = exponente de descarga del emisor de riego.

$q$  = caudal del emisor de riego (litros/hora).

El exponente de la viscosidad cinemática (1-2m) es el responsable de que los emisores con exponente de descarga = 0,5 sean insensibles a los cambios de viscosidad, los de exponente  $> 0,5$  incrementan su descarga al disminuir la viscosidad, mientras que los de exponente  $< 0,5$  descargan un menor caudal.

Por otra parte, para un rango de temperaturas suficientemente amplio (sobre todo con temperaturas  $< 20^\circ\text{C}$ ), ofrece un buen comportamiento la relación, debida a Assaf y Assaf (1974), siguiente:

$$\nu_t = 0,98^{(t-20)} \cdot \nu_{20^\circ\text{C}}$$

No obstante, al ser  $23^\circ\text{C}$  y no  $20^\circ\text{C}$  la temperatura a la que se obtiene la ecuación de descarga del emisor, la relación debería substituirse por la otra:

$$\nu_t = 0,98^{(t-23)} \cdot \nu_{23^\circ\text{C}}$$

de tal forma que, substituyendo en la expresión inicial, la ecuación de descarga del emisor queda configurada de la siguiente manera:

$$q = [v_{23^{\circ}\text{C}} \cdot 0,98^{(t-23)}]^{1-2m} \cdot K \cdot h^m$$

quedando así introducido el efecto que tienen los cambios de la viscosidad cinemática del agua sobre el caudal del emisor de riego.

#### 9.5.4. Perfil de temperaturas en las tuberías

Una tubería lateral expuesta a la radiación solar sufre un calentamiento que transmite al agua que circula por ella, pero la temperatura que alcanza no resulta uniforme a lo largo de toda su longitud. Cerca de la entrada del lateral, la temperatura del agua sólo se incrementa ligeramente debido a la alta velocidad de flujo; mientras, cerca del final de la conducción, la velocidad del fluido es baja, a causa de las descargas del caudal que se han ido sucediendo al tratarse de una conducción con servicio en ruta, y el incremento de temperatura es mayor (Parchomchuk, 1976). De esta manera, se ha llegado a tener constancia de temperaturas, al final de los laterales de riego, de hasta 77°C (Anónimo, 1975, citado por Solomon, 1985).

Parchomchuk (1976), en un día soleado, registró que, a lo largo de un lateral de 37 metros de largo, las temperaturas medias del agua se incrementaron en 16°C (de 26 a 42°C) y, sorprendentemente, encontró que se producía el mismo salto térmico en un lateral bastante más corto (21 metros). Según el autor, esto ocurre si se realizan las mediciones después de haberse equilibrado la distribución de temperaturas a lo largo del lateral.

La velocidad del flujo en una tubería lateral es la que determina el incremento de temperatura que experimenta el agua. En una tubería con un diámetro constante y descargas sensiblemente iguales (como en un lateral, con un coeficiente de uniformidad del riego suficientemente elevado), la velocidad de flujo va descendiendo de forma lineal. No ocurre necesariamente así en las tuberías terciarias, pues en éstas es frecuente la aparición de cambios de diámetro (conos reductores) y/o descargas de caudal desiguales (por ejemplo, en subunidades trapezoidales). Aquí queda sin efecto la relación lineal existente entre las distancias a la entrada y las velocidades relativas.

#### 9.5.5. Consideración del efecto de la temperatura en el diseño hidráulico

Existen ocasiones en las que, por el comportamiento del emisor ante la temperatura, como se ha citado que se supone en la mayoría de los casos, el efecto de ésta consiste en aumentar la descarga del emisor, contribuyendo a aumentar la uniformidad del riego. En estos casos, no debe incluirse el efecto de la temperatura cuando se proceda a diseñar la instalación, puesto que ello no constituye un factor desfavorable. Sin embargo, existen otros casos en los que sí

debe tenerse en cuenta, por la disminución del caudal descargado y de uniformidad que provoca. En el resto de la discusión que sigue, se considerará emisor “normal” al que responde con aumentos de caudal ante incrementos de temperatura, y emisor “inverso” al que, contrariamente, sufre disminución de caudal al aumentar la temperatura.

Generalmente, los emisores<sup>14</sup> del tipo “normal” suelen ser “no compensantes” (o sea, no uniformizan su descarga en función de la presión) con exponente  $> 0,5$ , mientras que los de tipo “inverso” incluyen los emisores del tipo *vortex* (con exponente  $< 0,5$ ). Los emisores autocompensantes, a pesar de su independencia de la presión y de su especial comportamiento, también podrían incluirse en este último grupo. Su descarga disminuye con la temperatura, al parecer debido a la fatiga del elastómero por la acción combinada de la presión y de la temperatura (Rodríguez-Sinobas *et al.*, 1999).

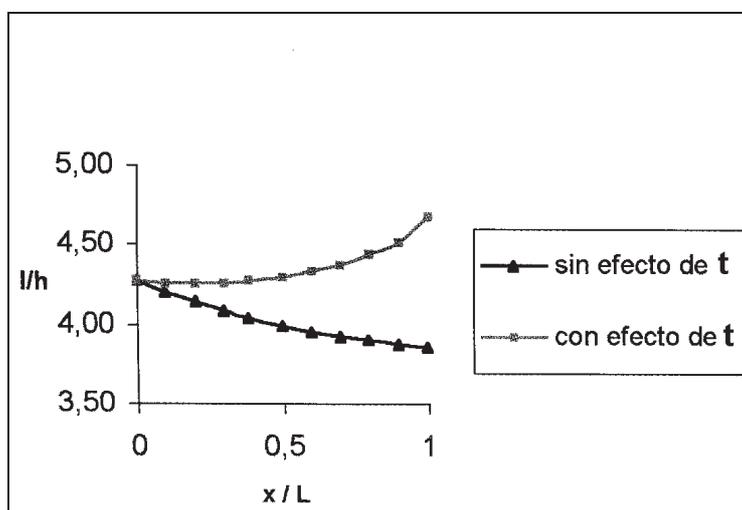


Fig. 2.9. Comportamiento de un emisor “normal” con  $t > 23^{\circ}\text{C}$ , sobre lateral de pendiente  $\geq 0\%$

Como puede apreciarse en la anterior figura 2.9., en cuyo eje de abscisas figura la relación  $x/L$  (distancia relativa a la entrada del lateral), en un lateral formado por emisores “normales” y con temperatura de entrada  $> 23^{\circ}\text{C}$  (temperatura a la que se obtiene la ecuación de descarga del emisor o gotero), los caudales afectados por la temperatura son siempre mayores que los que no lo están. Por tanto, es un caso en el que no es necesario incluir el efecto de la temperatura en el diseño hidráulico. No ocurre igual si el mismo lateral recibe agua a una temperatura  $< 23^{\circ}\text{C}$  (ver figura 2.10.). Aquí, debe tenerse en cuenta el efecto de la temperatura pues, según el valor de la pendiente, el caudal mínimo podría situarse cerca de la entrada, donde está influido por la temperatura.

<sup>14</sup> Vide BUSTELO LUTZARDO, J.A. (2002), citado en la bibliografía y fondos documentales.

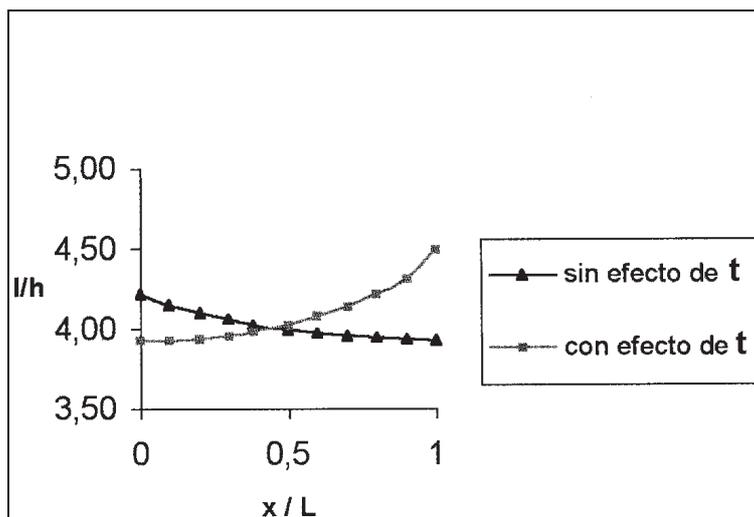


Fig. 2.10. Comportamiento de un emisor “normal” con  $t < 23^\circ\text{C}$ , sobre lateral de pendiente  $\geq 0\%$

En la siguiente figura 2.11., se observa que con emisores “inversos” los caudales influidos por la temperatura son siempre inferiores que los hallados sin este efecto, por lo que debe tenerse en cuenta a efectos de diseño. Sólo existiría la excepción en el caso de la temperatura de entrada  $< 23^\circ\text{C}$  y pendiente negativa suficientemente acusada como para encontrar el caudal mínimo en la entrada del lateral (ver figura 2.12.), que se calcularía sin incluir el efecto de la temperatura. Así:

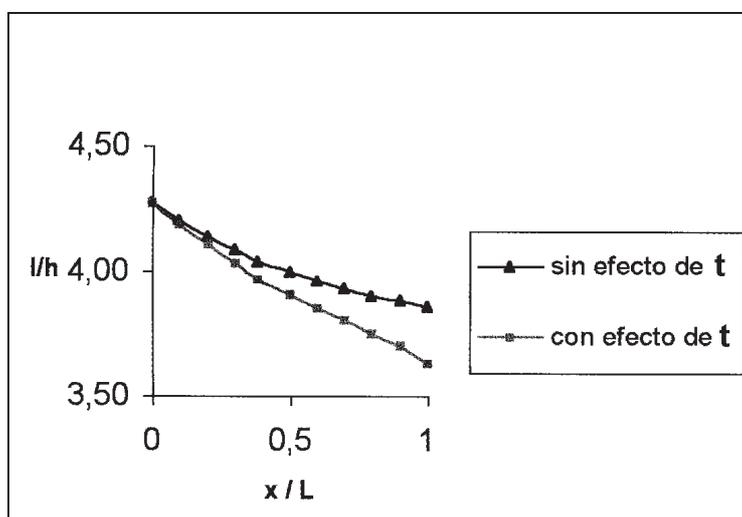


Fig. 2.11. Comportamiento de un emisor “inverso” con  $t > 23^\circ\text{C}$ , sobre lateral de pendiente  $\geq 0\%$

Veamos, en fin, que en los emisores autocompensantes no es posible corregir los caudales a través de las variaciones de la presión de servicio. En estos casos, sólo cabe elegir otro emisor, ya sea con menor sensibilidad a la temperatura, o bien con menor CV.

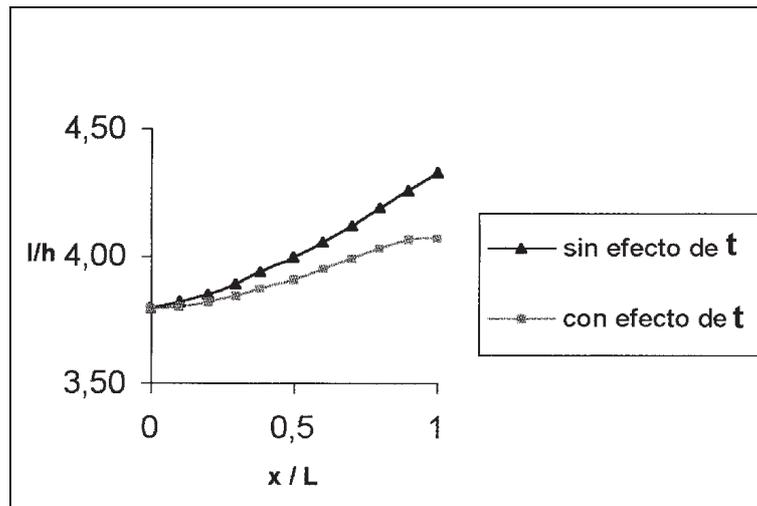
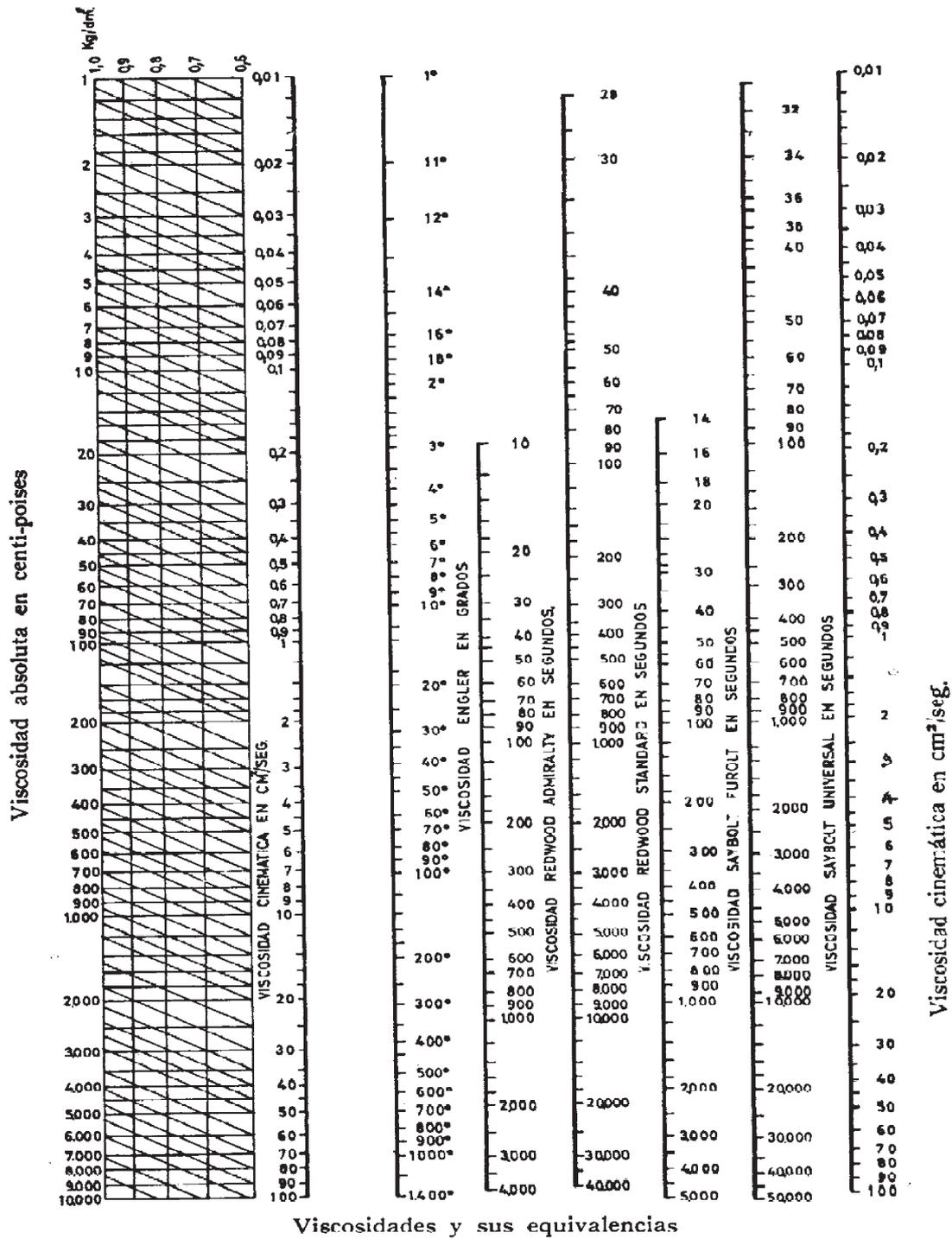


Fig. 2.12. Comportamiento de un emisor “inverso” con  $t > 23^{\circ}\text{C}$ , sobre lateral de pendiente  $< 0\%$

Por lo que se refiere, en fin, al concepto de “viscosidad”, digamos que al fluir un líquido viscoso como el agua a lo largo de la pared sólida de la tubería, la corriente resulta frenada por la viscosidad, y la velocidad de traslación de las capas o filetes líquidos disminuye a medida que se reduce la distancia de los mismos a la pared del tubo, llegando incluso a anularse en la misma.

Sin embargo, en un líquido en estado de reposo o con un régimen tal que no existe movimiento relativo de una capa con relación a su inmediata adyacente, no habrá tensiones de rozamiento o esfuerzos tangenciales aparentes, hallándose desprovisto de viscosidad. Por esta razón, en el estudio de la estática de los líquidos (conocida como “Hidrostática” y a la que nos hemos referido en el Prólogo de este mismo libro) no hay que considerar los esfuerzos tangenciales (tensiones de adherencia o de rozamiento) porque dichas fuerzas no existen en un líquido en reposo, y las únicas tensiones que quedan son las normales o presiones.

Veamos, por último, el siguiente gráfico:



Viscosidades y sus equivalencias

Fig. 2.13. Escalas de viscosidad

\* \* \* \* \*



## CAPÍTULO III

### UNIFORMIDAD Y DISTRIBUCIÓN DE LAS VARIABLES HIDRÁULICAS

#### RESUMEN

La *uniformidad* es una magnitud que caracteriza a cualquier sistema de riego y que además interviene de manera decisiva en su diseño, tanto en el agronómico, puesto que afecta al cálculo de las necesidades totales de agua de los cultivos, como en el hidráulico, pues en función de ella se definen los límites entre los que se permite que varíen los caudales de los emisores en los sistemas de riego a presión (aspersión y localizados de alta frecuencia). La uniformidad es, pues, uno de los objetivos básicos que persigue el diseño de este tipo de instalaciones y que sirve de puente de unión entre la agronomía y la hidráulica. Posiblemente, la medida más conocida de la uniformidad del riego es el coeficiente de uniformidad (CU) de *Christiansen*, propuesto por su autor el año 1942 y ampliamente utilizado en el riego por aspersión en sus diferentes modalidades. El estudio de las distribuciones estadísticas de probabilidad servirá de complemento teórico a estos conceptos. No obstante, hemos creído conveniente ampliar el concepto de “uniformidad hidráulica” al estudio del comportamiento de ciertas variables hidráulicas, como la sección de la conducción, la presión, la pendiente motriz, las pérdidas de carga unitarias o totales, etc., referidas a un conjunto más o menos importante de parcelas en regadío (zona regable), y con el ánimo de lograr una distribución más homogénea o “equilibrada” de sus valores desde el punto de vista espacial. También los nuevos coeficientes de uniformidad aquí propuestos se podrán utilizar para la *evaluación* de instalaciones en funcionamiento o bien para el *diseño* de nuevas instalaciones, tal como se pone de manifiesto en el ejemplo práctico que figura al final del presente capítulo de nuestro libro.

---

## UNIFORMITAT I DISTRIBUCIÓ DE LES VARIABLES HIDRÀULIQUES

### RESUM

La *uniformitat* és una magnitud que caracteritza qualsevol sistema de reg i que, a més, intervé decisivament en el seu disseny, tant pel que es refereix a l'agronòmic, ja que afecta el càlcul de les necessitats totals d'aigua dels conreus, com a l'hidràulic, ja que en funció d'ella es defineixen els límits entre els quals es permès que varien els cabals dels emissors en els sistemes de reg a pressió (aspersió i localitzats d'alta freqüència). La uniformitat és, doncs, un dels objectius bàsics que cerca el disseny d'aquesta mena d'instal·lacions i serveix de pont d'enllaç entre l'agronomia i la hidràulica. Possiblement, la mesura més coneguda de la uniformitat del reg sigui el coeficient d'uniformitat (CU) de *Christiansen*, proposat pel seu autor l'any 1942 i àmpliament emprat en el reg per aspersió en les seves diferents modalitats. L'estudi de les distribucions estadístiques de probabilitat servirà de complement teòric d'aquests conceptes. No obstant això, hem cregut convenient d'ampliar el concepte "d'uniformitat hidràulica" a l'estudi del capteniment de certes variables hidràuliques, com ara la secció de la conducció, la pressió, el pendent motriu, les pèrdues de càrrega unitàries o totals, etc., referides a un conjunt més o menys important de parcel·les en regadiu (zona regable), i amb l'ànim d'aconseguir una distribució més homogènia o "equilibrada" dels seus valors des del punt de vista espacial. També els nous coeficients d'uniformitat aquí proposats es podran utilitzar per a fer l'*avaluació* d'instal·lacions en funcionament o bé per al *disseny* de noves instal·lacions, com queda prou palès a l'exemple pràctic que figura al final del present capítol del nostre llibre.

## UNIFORMITY AND DISTRIBUTION IN HYDRAULIC VARIABLES

### ABSTRACT / SUMMARY

*Uniformity* is a magnitude which characterizes any system of irrigation and also influences in a decisive manner in its design, not only in the agronomical aspect, since it affects the calculation of the total water requirements of the crop, but also the hydraulic aspect, since it helps to set the limits which allow for variation in the water levels of the sprinklers in the systems of irrigation under pressure (spraying and local fixtures of high frequency). Uniformity is thus, one of the basic objectives pursued in the design of these installations and serves as a link uniting agronomy and hydraulics. Probably the best known measure of uniformity in irrigation is *Christiansen's* coefficient of uniformity, proposed by its author in 1942 and widely used in irrigation by spraying (sprinkling) in its different forms or modalities. Nevertheless, we believe it convenient to enlarge the concept of hydraulic uniformity to the study of the behaviour or performance of certain hydraulic variables, such as the section of conveyance, pressure, driving force incline, length, loss of load, individual or total, etc., in reference to a more or less important group of smallholdings under irrigation (irrigable zone), with the intention of attaining a more homogenous or balanced distribution of its values from a spatial point of view. In addition, the new coefficients of uniformity proposed here can be utilized for the *evaluation* of installations currently in operation, and in addition, for the design of new installations/projects, as is manifest in the practical example which appears at the end of the present chapter of our book.

## 1. EL CONCEPTO DE “COEFICIENTE DE UNIFORMIDAD HIDRÁULICA”

La uniformidad es una magnitud que caracteriza a cualquier sistema de riego y que además interviene en su diseño, tanto en el agronómico, puesto que afecta al cálculo de las necesidades totales de agua de los cultivos, como en el hidráulico, pues en función de ella se definen los límites entre los que se permite que varíen los caudales de los emisores en los sistemas de riego a presión (aspersión y localizados de alta frecuencia). La uniformidad es, pues, uno de los objetivos básicos que persigue el diseño y que sirve de puente o nexo de unión entre la agronomía y la hidráulica, puesto que si la uniformidad no es alta, habrá diferencias apreciables entre las cantidades de agua (y abonos disueltos, en el caso de la fertirrigación) que se suministran a unas plantas y otras, y, como consecuencia de ello, el cultivo no será homogéneo y el rendimiento disminuirá. Si para solucionar este problema optamos por aumentar las dosis de riego, de tal forma que la planta que esté en peores condiciones (caso más desfavorable por razones taquimétricas o estadimétricas) reciba el agua que precisa, existirán muchas otras plantas que reciban volúmenes superiores a sus necesidades y, por lo tanto, habrá un despilfarro de agua. Pero es que además, esta solución puede disminuir también los rendimientos por exceso de agua en algunos casos (asfixia radicular), y siempre exigirá, o bien mayores caudales aportados (con el consiguiente dimensionado excesivo de la red) y/o bien mayores necesidades de energía y fertilizantes, al aumentar el número de horas de funcionamiento del riego.

Se comprende, pues, que al proyectar un regadío debe tenerse en cuenta la consecución de una uniformidad alta, buscando como objetivo final sacar el máximo partido posible a un sistema de riego normalmente caro y a un recurso escaso para obtener una gran “eficiencia”, entendiendo como tal la proporción del agua total que se aplica al terreno que es realmente utilizada por el cultivo, medida por el producto entre el coeficiente de uniformidad y la relación de transpiración del cultivo (cociente entre el agua transpirada y el agua aplicada a la planta).

Posiblemente, la medida más conocida de la uniformidad del riego es el coeficiente de uniformidad (CU) de Christiansen, propuesto por su autor el año 1942 y ampliamente utilizado en el riego por aspersión en sus diferentes modalidades. Sin embargo, pronto se vio que la aplicación de esta fórmula presentaba algunos inconvenientes, puesto que medía las desviaciones con respecto a la media aritmética, por lo que otorgaba idéntica importancia a las variaciones por encima de la media que a las que se producían por debajo, lo que no se compagina suficientemente bien con los efectos agronómicos respectivos. Esta última circunstancia puede resultar particularmente grave en el caso de los riegos localizados de alta frecuencia (RLAF), pues mientras las variaciones por encima de la media señalan un despilfarro del recurso que, en general, no

afectará al cultivo, aunque sí a la eficiencia (eficacia al menor coste) del riego, las variaciones por debajo indican que la planta recibe menos agua de la que necesita, por lo que su producción disminuirá, pudiendo incluso llegar a desaparecer.

Existen otros coeficientes, como el usado por los técnicos de la prestigiosa empresa Wright, o como el adoptado por el *Soil Conservation Service* (USA) así como por la *American Society of Agricultural Engineers*; también es digno de resaltar el propuesto por Keller y Karmeli, así como el de Bralts y Kesner (1983). En Francia, en fin, tiende a usarse el coeficiente de uniformidad propuesto por el *Centre de la Recherche et de l'Expérimentation du Génie Rural* (C.R.E.G.R.). **No obstante, hemos creído conveniente ampliar el concepto de “uniformidad hidráulica” al estudio del comportamiento de ciertas variables hidráulicas que hemos manejado en los dos primeros capítulos de nuestro libro, como la sección de la conducción, el caudal, la presión, la pendiente motriz, etc., referidas a un conjunto más o menos importante de parcelas en regadío (zona regable), y con el ánimo de lograr una distribución más homogénea o “equilibrada” de sus valores desde el punto de vista espacial.** También los nuevos coeficientes de uniformidad aquí propuestos se podrán utilizar, indistintamente, para la *evaluación* de instalaciones en funcionamiento o bien para el *diseño* de nuevas instalaciones, en lugar de los anteriormente mencionados.

Por lo que se refiere a los antecedentes, veamos que en el libro de este mismo autor titulado *Análisis territorial (División, organización y gestión del territorio)*, citado en la bibliografía, y concretamente en su capítulo 12 (“Uniformidad y equilibrio del territorio”), se propone y define el concepto de “coeficiente de uniformidad territorial” como medida de la uniformidad de la distribución de una variable socioeconómica por un cierto territorio, precisamente de sentido contrario a su grado de variabilidad. Pues bien, creemos que una extensión de dicho concepto a la evaluación de la distribución de las variables hidráulicas como las mencionadas resulta perfectamente posible y provechosa.

El proceso de cálculo que aquí se propone comienza con la determinación del coeficiente de variación (CV) de Pearson (que, como es sabido, trátase de una medida abstracta de dispersión relativa de los valores de la variable aleatoria estadística, profusamente utilizada) de los radios medios hidráulicos (o caudales, presiones de servicio, pérdidas unitarias o totales de carga, longitudes, pendientes motrices, diámetros, etc.) de todas las conducciones abiertas o forzadas para cada subzona regable; de hecho, el mismo procedimiento puede utilizarse tanto si se trata de un riego a presión, o de una red de desagües para avenamiento o saneamiento agrícola. Es obvio que, desde los respectivos puntos de vista, la zona regable en cuestión se hallará tanto más equilibrada desde el punto de vista, por ejemplo, de la distribución de los radios hidráulicos de sus diferentes conducciones, cuanto menores sean los valores de su CV (“coeficiente de

variación” de Pearson) referido a la variable R o a cualquier otra, que toma valores para cada una de las partes en que se considera espacialmente dividido dicho territorio. Destaca, del coeficiente elegido como medida de la variabilidad, su adimensionalidad, es decir, su independencia de las unidades de medida, permitiendo la comparación entre grupos diferentes de datos, lo que no resulta posible establecer mediante el exclusivo empleo de la varianza o de su raíz cuadrada: la desviación típica o “standard” de la correspondiente distribución de frecuencias.

Al respecto, y como medida de la uniformidad en la distribución de los radios hidráulicos o cualquier otra variable hidráulica por una zona regable, pueden utilizarse los diversos coeficientes que propondremos a continuación (expresados en %), de sentido contrario a la variabilidad antedicha.

El primero de ellos podría ser el siguiente:

$CU_1 = 100(1 - CV)$ , de gran sencillez y aplicabilidad, siendo:  $CV = \sigma / \bar{X}$ , en que  $\bar{X}$  es la media aritmética de los valores de la variable analizada R y  $\sigma$  es su desviación típica o "standard" (desviación cuadrática media).

El significado físico del CV se deduce claramente si aceptamos que todos los valores de la variable R, o cualquier otra significativa elegida en la zona regable en estudio, se distribuyen de acuerdo con la curva campaniforme de una distribución normal y, por lo tanto, se tendrá lo siguiente:

a) Prácticamente, todos los valores observados se hallarán comprendidos en el entorno:  $(1 \pm 3 \cdot CV) \bar{X}$ .

b) Aproximadamente, el 95% de las observaciones se encuentran comprendidas en el entorno:  $(1 \pm 2 \cdot CV) \bar{X}$ .

c) Si se toman las n/4 observaciones de valores más bajos del total de los n valores medidos de la variable en cuestión (cuyo valor superior será el primer cuartil  $Q_1$  de la distribución de frecuencias), su media aritmética será igual a:  $q_{25} = (1 - 1'27 \cdot CV) \bar{X}$ .

d) El 68'27% de las observaciones realizadas estarán comprendidas en el intervalo:  $(1 \pm CV) \bar{X}$ .

Por tanto ello, y según los valores que adopte dicho coeficiente CV (o el  $CU_1$ ), podríamos establecer una clasificación de las subzonas que constituyen el área objeto de puesta en riego según su grado o índice de uniformidad en relación a la correspondiente característica R o a cualquier otra variable hidráulica digna de evaluación.

Otros coeficientes de uniformidad hidráulica podrían definirse a partir de las siguientes expresiones:

$$CU_2 = (Q_1 / \bar{X}) \times 100 \text{ (de menor aplicabilidad) y } CU_3 = (q_{25} / \bar{X}) \times 100,$$

siendo  $q_{25}$ , como ya se ha visto, el valor medio del cuarto inferior de los valores de la variable hidráulica analizada.

En relación a la uniformidad hidráulica a la que nos venimos refiriendo en el presente capítulo, veamos que la propiedad más interesante de la distribución normal de los valores de la variable hidráulica analizada es que si se toma el 25% de los valores más bajos, su valor medio, es decir, lo que hemos denominado  $q_{25}$ , valdrá, según se deduce del estudio de la distribución normal:

$$q_{25} = (1 - 1'27 \cdot CV) \cdot \bar{X} \quad ,$$

con lo que el coeficiente de uniformidad  $CU_3$  anteriormente definido, tomará el valor:

$$CU_3 = 100 (1 - 1'27 \cdot CV) < CU_1$$

Si suponemos, v.gr., una zona regable en que analizando la distribución de sus radios medios hidráulicos obtenemos un  $CV = 0'32$ , veamos que:

$$\begin{aligned} CU_1 &= 100 (1 - 0'32) = 68'00\% \\ CU_3 &= 100 (1 - 1'27 \times 0'32) = 59'36\% \quad , \end{aligned}$$

aunque dependería de las circunstancias el escoger uno u otro índice para la medida de la uniformidad hidráulica que se pretende, lo que constituye una responsabilidad del ingeniero proyectista o de la reglamentación que pudiera elaborarse al respecto. De hecho, el  $CU_3$  siempre ofrecerá, expresado en %, por su propia configuración analítica, valores absolutos más bajos que el correspondiente  $CU_1$ , tanto si se trata de valores positivos como negativos (véase, al respecto, el gráfico de la figura 3.1.).

Por otra parte, consideremos, ahora, una zona regable cualquiera estructurada en subzonas (por grandes ramales de riego, polígonos catastrales, unidades de actuación, etc.) para las que conocemos los valores de las diferentes variables hidráulicas analizadas (radio medio, diámetro, presión de servicio, caudal, longitud, etc.). Llamando "e" al número de subzonas que integran una zona determinada, resultará que cuanto mayor sea "e" menor será la probabilidad de que todos las subzonas de esa zona regable pertenezcan al 25% más bajo del territorio global cuya puesta o transformación en regadío se pretende. En este caso, la expresión del coeficiente de uniformidad propuesto se transformaría en:

$$CU_3 = (1 - 1'27 \cdot CV / \sqrt{e})$$

Por otra parte, según se deduce del estudio de la distribución normal (ver Anexo nº: 3), se cumplirá que:  $Q_1 = (1 - 0'68 \cdot CV) \cdot \bar{X}$ , que será el intervalo correspondiente al 50% de los casos o "rango intercuartílico" ( $Q_3 - Q_1$ ) de la distribución de probabilidad, con lo que también:

$$CU_2 = 100 (1 - 0'68 \cdot CV),$$

que, lógicamente, será el mayor de los cuatro coeficientes de uniformidad hidráulica aquí definidos (ver Fig. 3.1.).

Así pues, y en base a dichos coeficientes, resulta un  $\overline{CU}$  (medio) de :  $Z = -0'9375$  (media aritmética), o bien  $Z = -0'9117$  (media geométrica), por lo que podríamos considerar, como medida "standard" de la uniformidad de una zona regable cualquiera, un  $\overline{CU} = 100 (1 - 0'92 \cdot CV)$ , cuyo intervalo, bajo la hipótesis de normalidad en la distribución espacial de los valores de la variable hidráulica analizada, abarcaría un 64'24% de los casos, según puede comprobarse mediante la tabla 3.1. más completa de áreas y ordenadas bajo la función normal, que adjuntamos en este mismo apartado.

En el ejemplo anteriormente propuesto, se tendrá:

$$\begin{cases} CU_2 = 100 (1 - 0'68 \times 0'32) = 78'24\% \\ \overline{CU} = 100 (1 - 0'92 \times 0'32) = 70'56\% \end{cases}$$

pudiendo, en la práctica, escoger cualquiera de ellos como medida de la uniformidad hidráulica que deseamos realizar.

Habida cuenta de su interés para la realización de este tipo de cálculos, a continuación se presenta una tabla que ofrece las áreas existentes bajo la curva normal tipificada, limitadas por la ordenada  $z = 0$  y cualquier valor positivo de  $z$ . A partir de esta misma tabla, se pueden encontrar las áreas comprendidas entre dos ordenadas cualesquiera, utilizando la simetría de la curva de Gauss en relación al eje de ordenadas  $z = 0$ . Por último, se incluye también una tabla con los valores de las ordenadas ( $y$ ) de la curva normal tipificada para los diferentes valores de  $z$ .

Veámoslas a continuación:







## 2. OTROS COEFICIENTES DE UNIFORMIDAD HIDRÁULICA

### 2.1. BASADOS EN LA DESVIACIÓN MEDIA ABSOLUTA

La "desviación media" es la media aritmética de las desviaciones absolutas de los  $n$  valores de la variable hidráulica analizada respecto a un promedio cualquiera. Si tomamos, como dicho promedio, la media aritmética o esperanza matemática  $\bar{X} = \alpha$ , su expresión será, en el caso de una distribución de frecuencias unitarias:

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{X}| + |x_2 - \bar{X}| + \dots + |x_n - \bar{X}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|}{n}$$

(este valor resultaría mínimo si en vez de considerar la  $\bar{X}$  hubiéramos tomado la mediana  $M_e = Q_2$  o valor central de la correspondiente distribución de frecuencias).

Por otra parte, en el caso de operar con frecuencias agrupadas o conjuntas, lo que sucederá cuando se opte por agrupar los valores de la variable hidráulica analizada por intervalos de clase, se tendrá que:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \dots + n_h &= \sum_{i=1}^h n_i = n \\ DM &= \frac{|x_1 - \bar{X}| \cdot n_1 + |x_2 - \bar{X}| \cdot n_2 + \dots + |x_h - \bar{X}| \cdot n_h}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^h |x_i - \bar{X}| \cdot n_i}{n} = \sum_{i=1}^h |x_i - \bar{X}| \cdot f_i \end{aligned}$$

Pues bien, en base a ella, podríamos definir el siguiente nuevo coeficiente de uniformidad:

$$CU_4 = 100 (1 - DM / \bar{X}),$$

que, en realidad, resulta similar al  $CU_1$ , habiendo substituido la desviación típica o "standard" por la desviación media absoluta, como medida absoluta de dispersión espacial, por la zona regable, de los valores de la variable aleatoria estadística analizada (radio medio, caudal, pendiente, longitud, presión, ...). Normalmente, para una misma zona regable, se cumplirá que:

$$CU_3 < CU_1 < \bar{CU} < CU_4 < CU_2 < CU_5$$

estando los valores de todos estos coeficientes de uniformidad limitados o acotados superiormente en el 100%, según podrá comprobarse, de modo gráfico, en la figura 3.1.

## 2.2. BASADOS EN OTRAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN Y CONCENTRACIÓN

### 2.2.1. Índice de Gini y curva de Lorenz

Teóricamente, la distribución perfecta de la variable hidráulica tendrá lugar cuando, por ejemplo, en un riego por gravedad, todas las acequias de riego tengan el mismo caudal (o radio hidráulico, longitud, pendiente motriz, etc.), lo que constituye un *desideratum* ideal pero, en cualquier caso, presenta una medida de la uniformidad en el diseño de las mismas. En este caso, al representar los porcentajes acumulados del caudal frente a los porcentajes acumulados de las conducciones, se obtendrá la recta de ecuación:  $q_i = p_i$ , coincidente con la bisectriz del primer cuadrante, y el índice de GINI valdrá 0. Obviamente, este índice se encuentra más próximo a 1 cuanto peor está distribuida, por la zona regable, la variable hidráulica que estamos evaluando.

En los libros de A. PULIDO SAN ROMÁN<sup>1</sup> y de A. ALCAIDE INCHAUSTI<sup>2</sup>, podemos encontrar presentaciones diferentes de la medida que hemos empleado para parametrizar la concentración de los caudales en el ejemplo práctico desarrollado al final del presente capítulo: el índice de GINI. Para interpretar correctamente su significado, resulta suficiente con observar que G varía entre los valores extremos 0 y 1, tomando el valor mínimo o nulo cuando cada  $p_i$  es igual a su correspondiente  $q_i$ , lo que provoca la anulación del numerador de su expresión definitoria; es decir, cuando cualquier porcentaje de acequias de riego transporta un porcentaje igual de caudal sobre el global. O bien dicho de otra manera,  $G = 1$  tendría lugar en el supuesto teórico o hipotético de que todas las  $q_i$  fuesen nulas, excepto la última o k-ésima (correspondiente al último intervalo de clase considerado) que concentraría todo el caudal circulante por la zona regable que nos ocupa, lo que señalaría la menor uniformidad u homogeneidad en la distribución posible.

Todos estos conceptos pueden precisarse mucho mejor representando en un diagrama la función:  $p_i = f(q_i)$ , o bien su inversa:  $q_i = \varphi(p_i)$ , que permite obtener una línea poligonal construida por encima (o por debajo) de la diagonal de un cuadrado que tiene un extremo en el centro u origen de coordenadas cartesianas rectangulares y el otro extremo en el punto de coordenadas (100, 100). Esta figura, denominada CURVA DE LORENZ, frecuentemente usada en el Análisis estructural económico, pondrá de manifiesto una distribución de los caudales de las acequias de riego más equitativa en la medida que la línea poligonal resultante (que tenderá a convertirse en una curva al aumentar el

<sup>1</sup>Estadística y Técnicas de Investigación Social. Ed. ANAYA. Madrid, 1971, pág. 111.

<sup>2</sup>Estadística Económica. Ed. SAETA. Madrid, 1973, pág. 294.

número de puntos en estudio) se sitúe más próxima a la citada diagonal (o bien G más próximo a 0) y también recíprocamente<sup>3</sup>.

### 2.2.2. Índice de Williamson

Por otra parte, en el mismo orden de ideas, juzgamos recomendable la utilización, a los efectos de medir el grado de concentración/dispersión de la variable hidráulica en estudio, del denominado "índice de Williamson", que nos ofrecerá una buena información en cuanto al nivel de agrupación de los valores de la variable aleatoria estadística ( $q_i$ ) en relación al valor central o media de la correspondiente distribución de frecuencias.

En nuestro caso, la variable hidráulica estudiada es el caudal global máximo  $Q_i$  que pueden transportar las acequias de riego de cada uno de los 8 intervalos de clase en que hemos considerado particionado el conjunto de las mismas (ver el ejemplo práctico que hemos propuesto al final del presente capítulo). Por esta razón, la fórmula pertinente, en relación al número de estas conducciones libres, vendrá dada por la expresión:

$$W_{Q,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 \left( \frac{Q_i}{n_i} - \frac{Q}{n} \right)^2 \times \frac{n_i}{n}}{\frac{Q}{n}}}, \forall i \in (1, 2, \dots, 8), \text{ donde :}$$

$Q_i$  = caudal global máximo de cada intervalo de clase (l./seg.)

$n_i$  = número de acequias de riego de cada intervalo de clase.

$Q$  = caudal global máximo del conjunto de la zona regable (l./seg.)

$n$  = número total de acequias de riego de la zona regable estudiada.

De hecho, los valores de la variable hidráulica  $Q_i$  vienen dados, en las tablas auxiliares correspondientes de cálculo, como:

$$Q_i = x_i \cdot n_i$$

### 2.2.3. Índice de concentración de Lorenz

<sup>3</sup> Así pues, cuanto más pequeña sea el área rayada comprendida entre la curva de Lorenz y la diagonal del primer cuadrante del círculo, mejor será también la distribución de la variable hidráulica que es objeto de nuestro estudio.

A mayor abundamiento, desarrollaremos el cálculo de este nuevo índice desde el mismo diagrama o curva que hemos propuesto anteriormente. Tal como se ha venido considerando, se obtendrán siempre curvas cóncavas hacia las y positivas, y que se hallan situadas por debajo de la diagonal del cuadrado que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (100,100).

Así pues, tendremos:

$$L = \frac{(a - q_1) + (2a - q_2) + \dots + [(n-1)a - q_{n-1}]}{a + 2a + \dots + (n-1)a} \quad (1),$$

donde  $a$  es la media aritmética de los porcentajes de los caudales de las diferentes acequias de riego correspondientes a cada intervalo de clase, o sea:

$$X_i = \frac{x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i} \times 100 \quad ; \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{q_n}{n} \quad ;$$

(en nuestro caso, como se verá posteriormente, se tiene:  $n = 8$ ).

De esta manera, se cumplirá también que:

$$\begin{aligned} q_1 &= X_1 \\ q_2 &= X_1 + X_2 \\ q_3 &= X_1 + X_2 + X_3 \\ &\dots\dots\dots \\ q_n &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \end{aligned}$$

o sea:  $q_i = \sum_{j=1}^i X_j$

que es justamente el criterio que hemos seguido para la elaboración de la tabla correspondiente. **Debe tenerse bien presente que, en este caso, la ordenación de los valores de las  $X_i$  es preciso realizarla de menor a mayor.**

Desarrollando la expresión anterior (1), obtendremos:

$$\begin{aligned} L &= \frac{a + 2a + \dots + (n-1)a - (q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1})}{a + 2a + \dots + (n-1)a} = \\ &= 1 - \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1}}{a + 2a + \dots + (n-1)a} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{\frac{n(n-1)}{2}a} = \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} ,$$

ya que:  $1 + 2 + \dots + (n-1) = n \cdot (n-1) / 2$  ,

dado que se trata de la adición de los (n-1) primeros términos consecutivos de una progresión aritmética de razón igual a la unidad (demostrable por inducción completa, como ya se ha visto en el anterior capítulo II del presente libro), y además:  $n \cdot a = q_n$ , por la propia definición que hemos considerado de la media aritmética **a**.

Veamos, entonces, los valores que adopta este nuevo índice en los casos extremos posibles. Efectivamente, **si la concentración del caudal es máxima**, tendremos que:

$$X_1 = X_2 = \dots = X_{n-1} = 0, \quad \text{y también : } q_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{0}{q_n} = 1 ,$$

dado que:  $\sum_{i=1}^{n-1} q_i = 0$  .

Sin embargo, **si la concentración del caudal es mínima**, o sea, la distribución de la misma variable hidráulica es teóricamente perfecta desde el punto de vista estadístico (no necesariamente de las necesidades de agua de los cultivos, que pueden ser diferentes según la edad y la especie, y que se deben establecer según las diversas subzonas regables), se tendrá lo siguiente:

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n = a,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_i = \frac{n(n-1)}{2} a$$

en cuyo caso, el índice de concentración de Lorenz será:

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{n \cdot (n-1) \cdot a}{2 \cdot n \cdot a} = 1 - 1 = 0$$

De hecho, estos valores extremos del índice analizado se corresponden con similares valores del índice de Gini anteriormente estudiado. Podemos ver que, cuando:  $L = 0$  ( $X_1 = X_2 = \dots = X_n = a$ ), sucede justamente que:  $q_n = n \cdot a$ , razón por la cual la curva pertinente es el segmento recto coincidente con la diagonal del

cuadrado al que nos hemos referido con anterioridad. En el caso de la concentración máxima, resulta:  $L = 1$  ( $X_1=X_2=...=X_{n-1}=0$ ), y la curva poligonal de Lorenz, que constituye un triángulo rectángulo, viene dada por los dos lados normales o perpendiculares del cuadrado construido al objeto de trazar el diagrama en cuestión. Obviamente, cuanto más se aproxime la curva a la diagonal relacionada, más perfecta será -al menos desde el punto de vista estadístico- la distribución de la variable hidráulica en estudio. Incluso podemos dar una interpretación geométrica del índice de Lorenz de esta manera: el numerador de la fórmula (1) se puede considerar como la adición de las áreas de  $(n-1)$  rectángulos de base igual a la unidad y altura:  $(h \cdot a - q_h)$ ,  $\forall h \in [1,2,...,(n-1)]$ . El denominador, en este caso, es la suma de las áreas de  $(n-1)$  rectángulos de base unidad y altura:  $h \cdot a$ ,  $\forall h \in [1,2,...,(n-1)]$ . Si observamos lo que representa la suma de estos rectángulos, deduciremos que el numerador de la expresión (1) es el área comprendida entre la curva poligonal de Lorenz y la diagonal del cuadrado, mientras que el denominador es precisamente el área de la mitad de dicho cuadrado<sup>4</sup>.

Este índice es equivalente al anteriormente estudiado de Gini y obliga a la realización del cálculo de la superficie rayada de la figura, comprendida entre la diagonal y la correspondiente curva o poligonal de Lorenz. Un valor aproximado es el que se obtiene mediante la aplicación de la fórmula basada en los porcentajes acumulados, que resulta muy empleada en los trabajos prácticos. En nuestro caso, como se verá posteriormente, la fórmula (1) tomará la configuración simplificada (con  $n = 8$  y  $q_n = 100$ ):

$$L = 1 - \frac{2}{7} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{100} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^7 q_i}{350}$$

### 3. OTRAS CARACTERÍSTICAS INTERESANTES DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LAS VARIABLES HIDRÁULICAS

#### 3.1. ECUACIONES DE LIGADURA ENTRE LOS COEFICIENTES DE UNIFORMIDAD

Evidentemente, existen en la metodología estadística otras medidas del grado de concentración y/o dispersión de las variables hidráulicas que pueden emplearse eficazmente en la medida de la uniformidad o del equilibrio hidráulico de una zona sometida a un proceso de transformación a regadío o avenamiento

<sup>4</sup>Así pues, también el índice de concentración de Lorenz será tanto más pequeño cuanto menor sea el valor del área limitada por la diagonal del primer cuadrante y la misma curva poligonal.

(como, por ejemplo, el recorrido "semi-intercuartílico", el "coeficiente de apertura", el "recorrido relativo", etc...), debiéndose tener en cuenta que, para distribuciones moderadamente asimétricas, se pueden aplicar, con buena aproximación, las fórmulas empíricas siguientes (donde  $Q_1$  y  $Q_3$  son, respectivamente, el primer y tercer cuartil de la correspondiente distribución de frecuencias):

$$DM \approx (4/5) \cdot \sigma \quad ; \quad (Q_3 - Q_1)/2 \approx (2/3) \cdot \sigma$$

, que no son más que consecuencias directas del hecho de que, para distribuciones normales, se tiene que la desviación media absoluta DM y el "rango semiintercuartílico" son, respectivamente, iguales a 0,7979 y 0,6745 veces la desviación típica o "standard"  $\sigma$ .

Desde esta perspectiva, y para distribuciones aproximadamente normales con suficiente número de valores de la variable hidráulica en estudio ( $n \geq 30$ ), los coeficientes de uniformidad anteriormente definidos pueden representarse, geoméricamente, por rectas o funciones lineales cuya variable independiente o explicativa sea el coeficiente de variación de Pearson CV. En concreto, se tendrá que:

$$CU_4 = 100 (1 - 0,7979 \cdot s/\bar{X}) \approx 100 \cdot (1 - 0,80 \cdot CV)$$

La representación gráfica resultante será la siguiente:

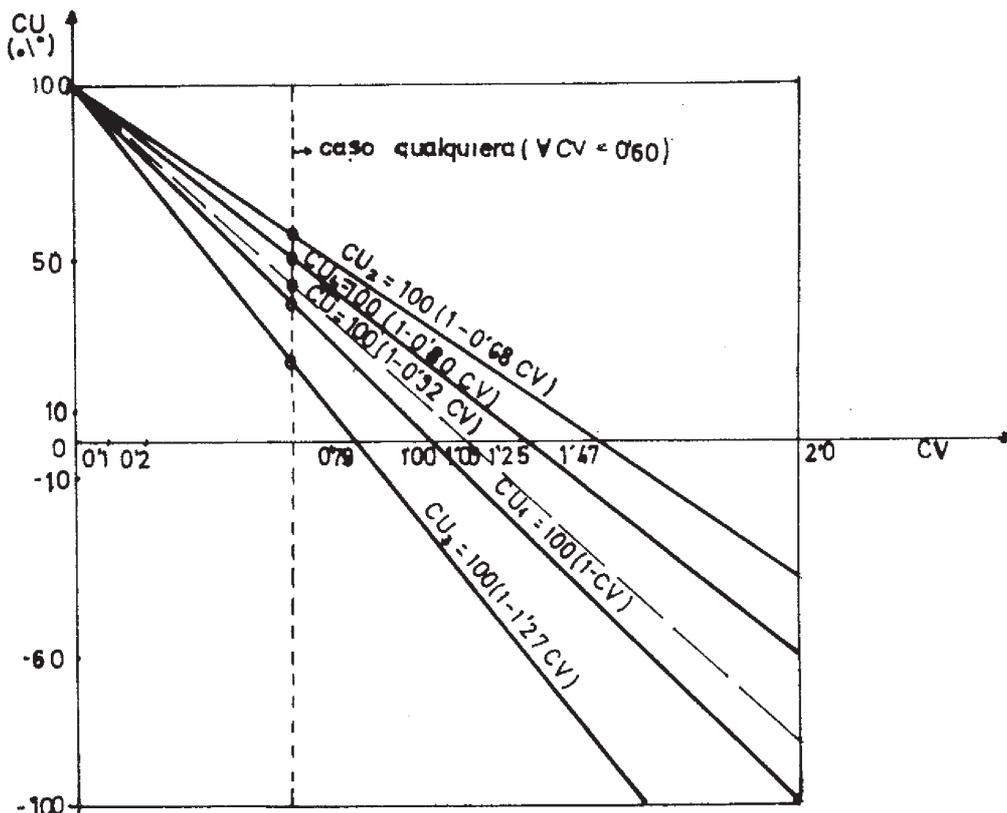


Fig. 3.1. Coeficientes de uniformidad en función del coeficiente de variación de Pearson

A su vez, las relaciones que ligan entre sí los diferentes coeficientes de uniformidad hidráulica aquí definidos, pueden deducirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 CU_1 &= 100 (1 - CV) = 100 - 100 \cdot CV \\
 CU_2 &= 100 (1 - 0,68 \cdot CV) = 100 - 68 \cdot CV \\
 CU_3 &= 100 (1 - 1,27 \cdot CV) = 100 - 127 \cdot CV \\
 CU_4 &= 100 (1 - 0,80 \cdot CV) = 100 - 80 \cdot CV \\
 \overline{CU} &= 100(1 - 0,92 \cdot CV) = 100 - 92 \cdot CV
 \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned}
 CU_1 - CU_3 &= 100 - 100 \cdot CV - 100 + 127 \cdot CV &= 27 \cdot CV \\
 CU_3 - CU_4 &= 100 - 127 \cdot CV - 100 + 80 \cdot CV &= -47 \cdot CV \\
 \hline
 CU_1 - CU_4 &= \dots\dots\dots(27 \cdot CV - 47 \cdot CV) \dots\dots\dots &= -20 \cdot CV
 \end{aligned}$$

Se tendría que:

$$\begin{aligned}
 CU_1 / CU_3 &= (1 - CV) / (1 - 1,27 \cdot CV) && ; \\
 CU_1 - 1,27 \cdot CV \cdot CU_1 &= CU_3 - CV \cdot CU_3 && ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CU_1 - CU_3 &= 27 \cdot CV = 1,27 \cdot CV \cdot CU_1 - CV \cdot CU_3 & ; \\ 27 &= 1,27 \cdot CU_1 - CU_3 & ; \quad CU_3 + 27 = 1,27 \cdot CU_1 & ; \text{ con lo que:} \\ & & & \mathbf{CU_1 = (CU_3 + 27) / 1,27} \end{aligned}$$

Así mismo:

$$\begin{aligned} CU_1 / CU_4 &= (1 - CV) / (1 - 0,8 \cdot CV) & ; \\ CU_1 - 0,8 \cdot CV \cdot CU_1 &= CU_4 - CV \cdot CU_4 & ; \\ CU_1 - CU_4 &= -20 \cdot CV = 0,8 \cdot CV \cdot CU_1 - CV \cdot CU_4 & ; \\ -20 &= 0,8 \cdot CU_1 - CU_4 & ; \quad CU_4 - 20 = 0,8 \cdot CU_1 & ; \text{ y entonces:} \\ & & & \mathbf{CU_1 = (CU_4 - 20) / 0,8} \end{aligned}$$

Si observamos la representación gráfica adjunta 3.2., la convergencia de ambas rectas tendrá lugar para los valores:

$$(CU_3 + 27) / 1,27 = (CU_4 - 20) / 0,8 \quad \text{y} \quad CU_3 = CU_4$$

, lo que implica que, en dicho punto, tendrá lugar la máxima uniformidad hidráulica posible, con:

$$\mathbf{CU_1 = CU_3 = CU_4 = 100\% = CU_2 = \overline{CU}}$$

También se cumplirá que:

$$\begin{aligned} CU_3 / CU_4 &= (1 - 1,27 \cdot CV) / (1 - 0,8 \cdot CV) & ; \\ CU_3 - 0,8 \cdot CV \cdot CU_3 &= CU_4 - 1,27 \cdot CV \cdot CU_4 & ; \\ CU_3 - CU_4 &= -47 \cdot CV = 0,8 \cdot CV \cdot CU_3 - 1,27 \cdot CV \cdot CU_4 & ; \\ & 1,27 \cdot CU_4 - 47 = 0,8 \cdot CU_3 & ; \text{ y} \\ & & & \mathbf{CU_3 = (1,27 \cdot CU_4 - 47) / 0,8} \end{aligned}$$

Las relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad hidráulica anteriormente definidos, y que ya han sido expresadas analíticamente, pueden verse gráficamente a continuación:

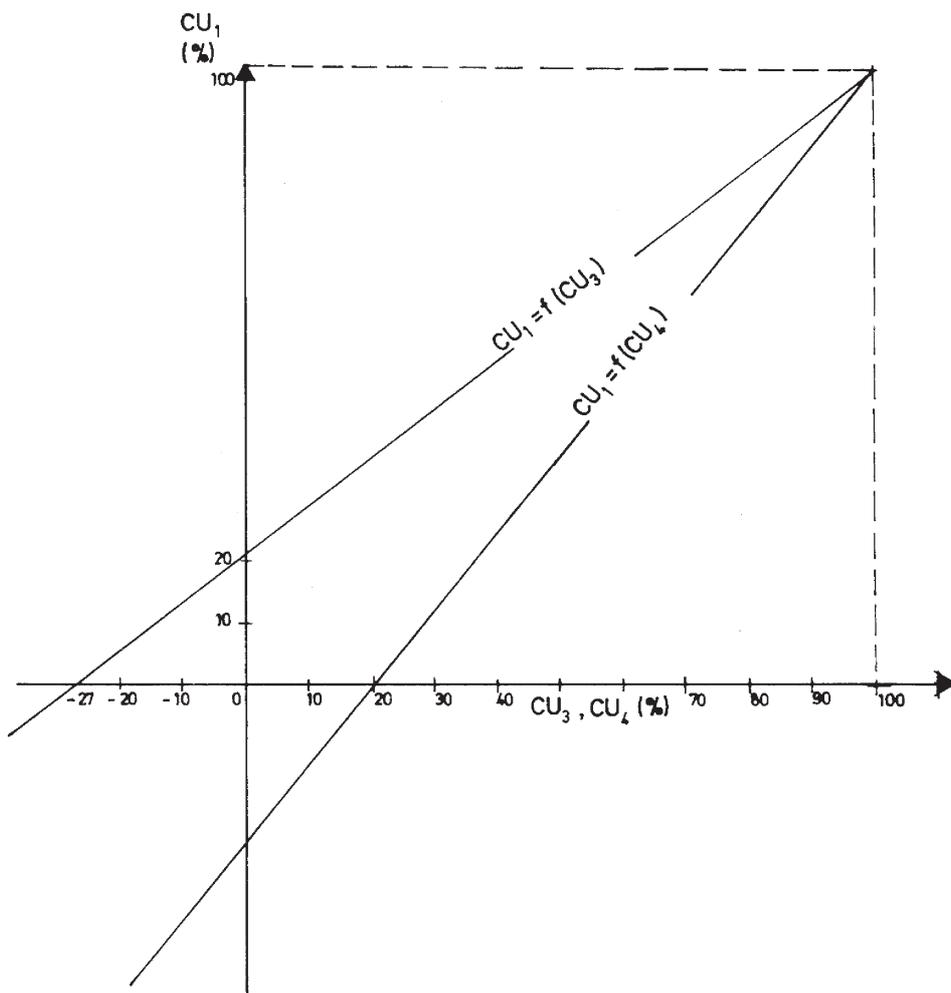


Fig. 3.2. Relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones hidráulicas aproximadamente normales (I)

El gráfico anterior puede complementarse, por su elevado interés práctico, con el siguiente, que relaciona el coeficiente de uniformidad  $CU_3$  con el  $CU_4$  del siguiente modo:

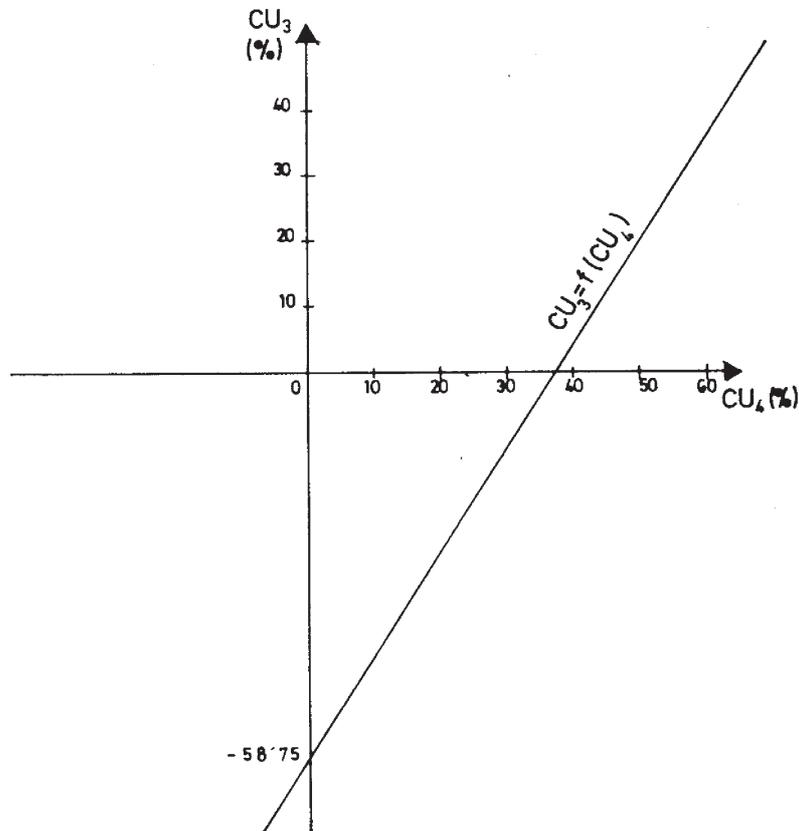


Fig. 3.3. Relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones hidráulicas aproximadamente normales (II)

De las expresiones anteriores, se deducen inmediatamente las tres siguientes, hasta completar las seis relaciones posibles existentes entre los índices hidráulicos de tal suerte definidos, esto es:

$$CU_3 = 1,27 \cdot CU_1 - 27 \quad ; \quad CU_4 = 0,8 \cdot CU_1 + 20 \quad ;$$

$$CU_3 = (0,8 \cdot CU_3 + 47) / 1,27$$

Idénticas consideraciones podríamos realizar respecto a  $CU_2$  y a  $\overline{CU}$  en relación con los tres restantes coeficientes de uniformidad hidráulica, y cuya materialización brindamos, como ejercicio recapitulatorio, a nuestros amables lectores.

### 3.2. AGRUPAMIENTO EN "CLASES" Y OTRAS CARACTERÍSTICAS DE LAS DISTRIBUCIONES HIDRÁULICAS

### 3.2.1. Los intervalos de clase

Así mismo, cuando el número  $n$  de los valores de la variable hidráulica analizada sea grande, lo que tendrá lugar en aquellas zonas de actuación infraestructural compuestas por un número elevado de subunidades territoriales menores, resultarán poco manejables las tablas estadísticas que recojan todos los valores con sus correspondientes frecuencias. En tales casos, se agruparán los valores de la variable en "clases", que podrán ser de la misma o diferente amplitud; una norma práctica genérica pudiera ser el establecer una misma amplitud equivalente al 10% de la observación mayor, con lo que el número de clases oscilará alrededor de la decena. Cuando esto acontezca, el cálculo de la desviación típica necesaria para el hallazgo de los CV y de los pertinentes coeficientes de uniformidad registrará algo de error, debido, precisamente, al "error de agrupamiento" en clases. Para ajustarnos mejor a la realidad, se utilizará entonces la varianza corregida, ofrecida por la denominada "corrección Sheppard", a saber:

$$\sigma_c^2 = \sigma^2 - C^2/12$$

siendo  $C$  la amplitud del intervalo de clase escogido y  $\sigma^2$  la varianza de los datos agrupados, y ello tendrá lugar en distribuciones continuas donde las "colas" van gradualmente convergiendo a 0 en ambas direcciones.

En líneas generales, veamos que un número excesivo de "clases" reduce las ventajas de la agrupación, pero también resulta cierto que un número escaso de ellas puede llegar a anular la significación de los datos. Respecto a la amplitud de las "clases" establecidas, conviene observar que, en general, es conveniente que sea la misma para todas; sin embargo, esto dependerá mucho de los propios datos y del objetivo final de la distribución territorial de la variable en estudio. En principio, si la distribución es más o menos uniforme, todas las "clases" serán de igual amplitud, y si, por el contrario, presenta grandes oscilaciones, puede ser interesante considerar intervalos de amplitud diferente.

De hecho, la construcción de una distribución numérica -como la mayoría de las que elaboraremos aquí- consta de tres etapas fundamentales: 1) determinar las "clases" con sus intervalos más procedentes, tal como ya hemos expresado antes, en las que se han de agrupar los datos de la variable hidráulica en estudio, 2) clasificar (o distribuir) los datos en las clases apropiadas, y 3) contar el número de casos de cada clase. Como sea que las dos últimas etapas son puramente mecánicas, así como el establecimiento de la correspondiente "marca de clase" (obtenida normalmente, a falta de más datos, como la semisuma de los valores extremos del intervalo de clase), nos fijaremos sólo en la primera. Por esto, hace falta determinar el número de clases así como la amplitud del intervalo de los valores de la variable aleatoria estadística con la que trabajamos (radio

hidráulico, longitud, caudal, presión, ...). Por esto, en términos generales, se pueden observar al efecto las siguientes normas:

- a) Pocas veces emplearemos menos de 6 ó más de 15 clases; el número exacto de las mismas dependerá de la naturaleza, cuantía e intervalo que cubren los datos.
- b) Siempre escogeremos las clases de manera que todos los datos queden comprendidos.
- c) Se procurará, siempre que sea posible, que todos los intervalos de clase tengan la misma amplitud, lo que obviará la determinación de las “densidades de frecuencia” -que determinan la altura de los rectángulos yuxtapuestos del histograma- para el cálculo de algunas medidas centrales de la correspondiente distribución de frecuencias (como la “moda”) o la representación gráfica de los histogramas.

Veamos, por último, que mediante el razonamiento que sirve para definir la “desviación típica o standard” como una medida de dispersión absoluta de los valores de la variable hidráulica, se puede afirmar que si este estadístico resulta pequeño, los valores se encuentran concentrados en el entorno de la media aritmética y, además, si la desviación típica es grande, los valores están mucho más esparcidos o dispersos en relación a los centrales. Para comprender este razonamiento sobre una base algo menos intuitiva, nos referiremos brevemente al importante *Teorema de Tchebyshev*, que expresa que **para cualquier clase de datos (poblaciones o muestras), al menos el 75% de los datos se encuentran sobre el intervalo que se extiende a cada lado de la media aritmética en dos veces el valor de la desviación típica ( $\pm 2\sigma$ )**. Según este teorema, también se puede afirmar que por lo menos el 88’8% de los datos se encuentran dentro del intervalo de tres veces ( $\pm 3\sigma$ ) la desviación típica (a ambos lados de la media aritmética) y que al menos el 96% de los mismos se hallan comprendidos dentro del intervalo de amplitud de cinco veces la desviación típica ( $\pm 5\sigma$ ).

Precisamente, una característica importante del teorema de Tchebyshev es que resulta válido para cualquier tipo de datos, incluidos los hidráulicos. No obstante, si se dispone de alguna información adicional en relación a la forma global de la distribución que estamos trabajando, también se pueden realizar afirmaciones mucho más estrictas. Por ejemplo, si una distribución es *campaniforme* o gaussiana, se puede esperar que aproximadamente el 95% de los datos (en lugar de al menos el 75%) se encuentren dentro del intervalo  $\pm 2\sigma$  y el 99% de los datos (en lugar de al menos el 88’8%) se encuentran dentro del intervalo  $\pm 3\sigma$ . Estos porcentajes, en definitiva, corresponden a la llamada *distribución normal*, que es objeto de estudio en diversas partes de nuestro libro.

### 3.2.2. Forma de la distribución de frecuencias

También existen otras características de menor interés práctico, que tratan de precisar la *forma de la distribución* de la variable que se estudia en relación con una distribución normal. Así, la curva de Gauss sabemos que es simétrica respecto de la ordenada  $x = \alpha$  (el parámetro  $\alpha$  es la media aritmética o esperanza matemática de una distribución normal de frecuencias) y la distribución observada puede ser *asimétrica* o sesgada respecto a la ordenada correspondiente e, incluso, dicha asimetría puede representar una mayor área bajo la curva, a la derecha o a la izquierda de dicha ordenada; por otra parte, a la distribución observada puede corresponderle un área bajo la curva más achatada o más alargada que la correspondiente área de una distribución normal; a tal característica la denominaremos *curtosis* o *medida de apuntamiento*.

Todas estas características, bien conocidas por otra parte, de una distribución de frecuencias originan medidas exactas si están utilizando todos los posibles valores de la variable hidráulica, es decir, si corresponden a la población o universo de datos; pero un objetivo esencial de la Inferencia Estadística es el de estimar dichas características poblacionales a partir de una muestra o subconjunto poblacional, lo que en la planificación hidráulica sucederá sólo en casos muy concretos de zonas para las que se manejen grandes cantidades de datos de la variable en estudio (por ejemplo, el caudal de los emisores de un sistema de riego por goteo). En estos casos, las características de la *distribución muestral* suelen ser, en general, los mejores *estimadores* de las características de la distribución de la población, pero las *estimaciones* que originan han de presentarse, como sabemos, acompañadas de los errores de muestreo y de otras medidas de naturaleza probabilística, que permiten apreciar el grado de confianza o fiabilidad de la correspondiente estimación de la característica poblacional, y que no procede analizar aquí con mayor profundidad por comprensibles razones de espacio.

### 3.2.3. Otros coeficientes de uniformidad hidráulica

Veamos, por último, que en base a los mismos o parecidos conceptos, sería posible la definición de otros coeficientes de uniformidad hidráulica. Y así, valga como ejemplo el que tendría en cuenta el valor del 1.er y 3.er cuartil de la distribución de frecuencias de la variable contemplada, a saber:

$$CU_5 = 100 \times \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}}$$

que, en el caso de una distribución moderadamente asimétrica (aproximadamente normal), ofrecerá un valor en función de  $Q_3$  y de  $\sigma$  equivalente a:

$$Q_3 - Q_1 \approx 4\sigma/3 \quad ; \text{ esto es:}$$

$$(Q_3 - Q_1)/Q_3 \approx 4\sigma/3Q_3 \approx 1 - Q_1/Q_3 \quad ; \text{ de donde:}$$

$$\sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{3Q_3}}, \text{ con lo que:}$$

$$CU_5 = 100 \cdot \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = \sqrt{10.000} \cdot \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{3Q_3}} = \sqrt{10.000 - \frac{40.000 \cdot \sigma}{3Q_3}}$$

## 4. AJUSTES A UNA DISTRIBUCIÓN “GAMMA” Y/O EXPONENCIAL

### 4.1. DISTRIBUCIÓN “GAMMA”

Según el problema que se presente, sería posible buscar una distribución teórica de probabilidad más apropiada que la gaussiana anteriormente explicitada, como por ejemplo la distribución de probabilidad “gamma”, cuya variable hidráulica  $x$  posee una función de densidad del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)}, & \forall x > 0 \\ 0 & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

, siendo  $\forall \alpha > 0$  y también  $\beta > 0$ .

De hecho, la cantidad  $\Gamma(\alpha)$  es un símbolo que representa el valor de la función “gamma” generalizada de Euler en el punto  $\alpha$ . Esta función, como ya se sabe, viene definida por la integral euleriana de 2ª especie:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \cdot dx .$$

Vamos, ahora, a demostrar que la media y la varianza de la distribución gamma están dadas por  $\mu = \alpha \cdot \beta$  y  $\sigma^2 = \alpha \cdot \beta^2$ , respectivamente. En este caso, la función generatriz de momentos y la función característica están dadas, respectivamente, por:

$$M(t) = (1 - \beta \cdot t)^{-\alpha}, \text{ y } \phi(\omega) = (1 - \beta \cdot i_\omega)^{-\alpha}$$

Se tiene que:

$$\mu = \int_0^{\infty} x \left[ \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \right] dx = \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} dx$$

Reemplazando  $x/\beta = t$ , tenemos la media:

$$\mu = \frac{\beta^\alpha \cdot \beta}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha \cdot e^{-t} \cdot dt = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \beta$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \left[ \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \right] dx = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} dx$$

Por otra parte, reemplazando  $x/\beta = t$ , tenemos lo siguiente:

$$E(X^2) = \frac{\beta^{\alpha+1} \cdot \beta}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} \cdot e^{-t} \cdot dt = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + 2) = \beta^2 \cdot (\alpha + 1) \cdot \alpha$$

ya que:  $\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1) \cdot \Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1) \cdot \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$ . Por tanto, la varianza buscada, será:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \beta^2(\alpha+1) \cdot \alpha - (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha \cdot \beta^2$$

Además, se demuestra fácilmente, integrando por partes, que:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

Si  $\alpha$  es un número entero positivo (natural), esta relación de recurrencia ofrece el resultado factorial:  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$ , como comprobaremos más adelante, razón por la que a la función gamma se la llama, a veces, “función factorial”.

Integrando por partes en la expresión:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} \cdot dx$$

$$u = x^{\alpha-1}, \quad dv = e^{-x} \cdot dx; \quad du = (\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2} \cdot dx, \quad v = -e^{-x}$$

se obtiene:

$$\Gamma(\alpha) = \left[ -e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} \right]_0^\infty + (\alpha-1) \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\alpha-2} \cdot dx = (\alpha-1) \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{\alpha-2} \cdot dx = (\alpha-1) \cdot \Gamma(\alpha-1)$$

Reiterando el procedimiento:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k) \cdot \Gamma(\alpha-k)$$

En el caso particular de que  $\alpha$  sea un número natural (entero positivo), la aplicación de la expresión anterior conduce a:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N})$$

puesto que:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot dx = 1$$

Una expresión que se presenta con frecuencia, es la que se obtiene mediante el cambio de variable:  $x = t^2$ . En efecto:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} \cdot dx = \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot t^{2\alpha-2} \cdot 2t \cdot dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot t^{2\alpha-1} \cdot dt$$

El cambio  $x = m \cdot t$ , conduce análogamente a:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} \cdot dx = \int_0^{\infty} e^{-mt} \cdot (mt)^{\alpha-1} \cdot m \cdot dt = m^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-mt} \cdot t^{\alpha-1} \cdot dt$$

Si ahora hacemos el cambio de variable:  $\beta = \frac{1}{a}$ , diremos que una variable aleatoria  $X$ , de tipo continuo, sigue una distribución gamma de parámetros  $\alpha$  y  $a$ , siendo  $\alpha, a \in \mathfrak{R}^2$  y  $\alpha > 0$  y  $a > 0$ , si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-ax}, & \forall x > 0 \\ 0 & , \forall x \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Abreviadamente lo indicaremos por:

$$X \rightarrow \Gamma(\alpha, a)$$

Veamos que la expresión (1) está bien definida y por tanto es una función de densidad. En efecto, para  $x > 0$ ,  $f(x)$  es positiva; y además la integral de la función de densidad, en todo el campo de variación, es la unidad, para lo cual bastará con hacer el cambio de variable:  $a \cdot x = y$ , en la expresión (1), y tendremos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-ax} \cdot dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} a^{\alpha} \cdot \left(\frac{y}{a}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot \frac{dy}{a} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

La representación gráfica de varias distribuciones gamma se presenta en la figura 3.4., para diferentes valores de los parámetros  $\alpha$  y  $a$ . Así:

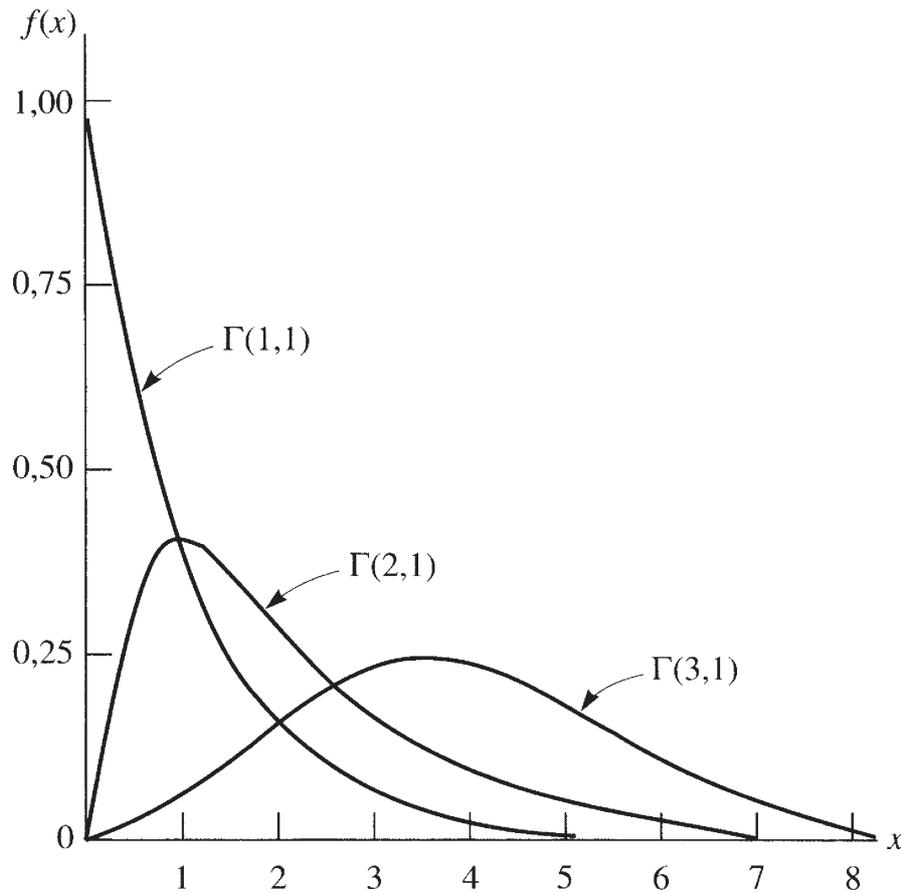


Fig. 3.4. Representación gráfica de la función de densidad de distribuciones  $\Gamma(\alpha, a)$

Como puede observarse, la función de densidad de la  $\Gamma(\alpha, a)$  presenta una forma, para  $\alpha \leq 1$ , que difiere de la forma que presenta para  $\alpha \geq 1$ , pues para valores de  $\alpha > 1$  presenta los correspondientes máximos en los puntos:

$$x = \frac{\alpha - 1}{a}$$

lo cual se comprueba fácilmente sin más que buscar los máximos de la función de densidad.

Al parámetro  $\alpha$  se le suele llamar *parámetro forma* y al parámetro  $a$ , *parámetro escala*.

### 3.1. CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN “GAMMA”

### 1. *Función de distribución*

La función de distribución correspondiente a una variable aleatoria  $X$ , distribuida según una  $\Gamma(\alpha, a)$  es:

$$f(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1} \cdot e^{-ax} \cdot dx, & \forall x > 0 \\ 0 & , \forall x \leq 0 \end{cases}$$

El valor de esta expresión no es fácil de obtener, aunque cuando  $\alpha$  es un número entero positivo, la integral se puede calcular por partes y las probabilidades se obtienen de forma aproximada.

Con el fin de simplificar el cálculo de estas probabilidades, Pearson tabuló la función gamma incompleta para diferentes valores del parámetro  $\alpha$ .

La *función gamma incompleta* viene dada por la expresión:

$$F^*(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} \cdot dy, \quad \forall y > 0$$

que aparece tabulada en la siguiente tabla, donde se ha hecho  $\alpha = p$ , así:

y	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	
1	0,8427	0,6321	0,4276	0,2642	0,1509	0,0803	0,0402	0,0190	0,0085	0,0037	0,0015	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—
2	0,9545	0,8647	0,7385	0,5940	0,4506	0,3233	0,2202	0,1429	0,0886	0,0527	0,0301	0,0166	0,0088	0,0045	0,0023	0,0011	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
3	0,9857	0,9502	0,8884	0,8009	0,6938	0,5768	0,4603	0,3528	0,2601	0,1847	0,1266	0,0839	0,0538	0,0335	0,0203	0,0119	0,0068	0,0038	0,0021	0,0011	0,0001
4	0,9953	0,9817	0,9540	0,9084	0,8438	0,7619	0,6674	0,5665	0,4659	0,3712	0,2867	0,2149	0,1564	0,1107	0,0762	0,0511	0,0335	0,0214	0,0133	0,0081	0,0001
5	0,9984	0,9933	0,9814	0,9596	0,9248	0,8753	0,8114	0,7350	0,6495	0,5595	0,4696	0,3840	0,3061	0,2378	0,1803	0,1334	0,0964	0,0681	0,0471	0,0318	0,0018
6	0,9995	0,9975	0,9926	0,9826	0,9652	0,9380	0,8994	0,8488	0,7867	0,7149	0,6364	0,5543	0,4724	0,3937	0,3210	0,2560	0,1999	0,1528	0,1144	0,0839	0,0039
7	0,9998	0,9991	0,9971	0,9927	0,9844	0,9704	0,9488	0,9182	0,8777	0,8270	0,7670	0,6993	0,6262	0,5503	0,4745	0,4013	0,3329	0,2709	0,2163	0,1695	0,0045
8	0,9999	0,9997	0,9989	0,9970	0,9932	0,9862	0,9749	0,9576	0,9331	0,9004	0,8589	0,8088	0,7509	0,6866	0,6179	0,5470	0,4762	0,4075	0,3427	0,2834	0,0011
9	1,0000	0,9999	0,9996	0,9988	0,9971	0,9938	0,9880	0,9788	0,9648	0,9450	0,9184	0,8843	0,8425	0,7932	0,7373	0,6761	0,6112	0,5443	0,4776	0,4126	0,0001
10	—	1,0000	0,9998	0,9995	0,9988	0,9972	0,9944	0,9897	0,9821	0,9707	0,9547	0,9329	0,9048	0,8699	0,8281	0,7798	0,7258	0,6672	0,6054	0,5421	0,0001
11	—	—	0,9999	0,9998	0,9995	0,9988	0,9975	0,9951	0,9911	0,9849	0,9756	0,9625	0,9446	0,9214	0,8922	0,8568	0,8153	0,7680	0,7157	0,6595	0,0001
12	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9989	0,9977	0,9951	0,9924	0,9873	0,9797	0,9689	0,9542	0,9349	0,9105	0,8806	0,8450	0,8038	0,7576	0,0001
13	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9989	0,9980	0,9963	0,9935	0,9893	0,9830	0,9741	0,9620	0,9460	0,9255	0,9002	0,8698	0,8342	0,0001
14	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9990	0,9982	0,9968	0,9945	0,9910	0,9858	0,9784	0,9684	0,9551	0,9379	0,9166	0,8906	0,0001
15	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991	0,9984	0,9972	0,9953	0,9924	0,9881	0,9820	0,9737	0,9626	0,9482	0,9301	0,0001
16	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9976	0,9960	0,9936	0,9900	0,9850	0,9780	0,9687	0,9567	0,0001
17	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9988	0,9979	0,9966	0,9946	0,9916	0,9874	0,9816	0,9739	0,0001
18	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9990	0,9982	0,9971	0,9954	0,9929	0,9894	0,9846	0,0001
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9991	0,9985	0,9975	0,9961	0,9941	0,9911	0,0001
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9995	0,9992	0,9987	0,9979	0,9967	0,9950	0,0001
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9989	0,9982	0,9972	0,0001
22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9991	0,9985	0,0001
23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9992	0,0001
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,0001

El valor de la función de distribución  $F(x)$  de la  $\Gamma(\alpha, a)$  es igual al de la función gamma incompleta en el punto  $y = a \cdot x$ , es decir:

$$F(x) = F^*(ax)$$

## 2. Función generatriz de momentos factoriales

Aplicando la definición de función generatriz de momentos, tenemos:

$$g_x(t) = E[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-ax} \cdot dx = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-(a-t)x} \cdot dx$$

y haciendo el cambio de variable:

$$(a-t)x = u, \quad dx = \frac{du}{a-t}$$

se tiene:

$$= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{1}{(a-t)^\alpha} \cdot u^{\alpha-1} \cdot e^{-u} \cdot du = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(a-t)^\alpha} = \frac{a^\alpha}{(a-t)^\alpha} = \left(1 - \frac{t}{a}\right)^{-\alpha}$$

## 3. Propiedad reproductiva

Si  $X_1, \dots, X_n$  son  $n$  variables aleatorias independientes, distribuidas según una  $\Gamma(\alpha_i, a)$ , para  $\forall i = 1, \dots, n$ , entonces la variable aleatoria:

$$Y = X_1 + \dots + X_n$$

sigue una distribución:

$$\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, a)$$

### Demostración:

Calculamos la función generatriz de momentos de la variable aleatoria  $Y$ , con lo que:

$$\begin{aligned} g_Y(t) &= E[e^{tY}] = E[e^{t(X_1 + \dots + X_n)}] = E[e^{tX_1}] \dots E[e^{tX_n}] = \\ &= (1-t/a)^{-\alpha_1} \dots (1-t/a)^{-\alpha_n} = (1-t/a)^{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \end{aligned}$$

que es la función generatriz de momentos de una distribución:  $\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, a)$ .

Y teniendo en cuenta la conocida propiedad de la unicidad de la función generatriz de momentos, resulta que:

$$Y \rightarrow \Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, a)$$

es decir, que la distribución  $\Gamma(\alpha, a)$  es reproductiva respecto al parámetro  $\alpha$ .

Proposición:

Si la variable aleatoria  $X$  se distribuye según una  $N(0,1)$ , entonces la variable aleatoria  $Y = X^2$  se distribuye según una  $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

Demostración:

La función de distribución de la variable aleatoria  $Y$  en el punto  $x$ , para  $x > 0$ , será:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_x(\sqrt{x}) - F_x(-\sqrt{x})$$

en donde  $F_x$  es la función de distribución de la variable aleatoria  $X$ ,  $N(0,1)$ .

Derivando la expresión de la función de distribución, tendremos la función de densidad; en efecto:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F'_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_x(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_x(-\sqrt{x}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{x})^2} = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{2\sqrt{x}\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

que, como vemos, es la función de densidad de una  $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

Proposición:

Si  $X_1, \dots, X_n$  son  $n$  variables aleatorias independientes y distribuidas según una  $N(0,1)$ , entonces la variable aleatoria:

$$Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$$

sigue una distribución:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

La demostración de la presente proposición resulta inmediata, pues basta con tener en cuenta una proposición anteriormente expuesta y la propiedad reproductiva de la distribución gamma respecto al parámetro  $\alpha$ .

Cuando el parámetro  $\alpha$  es entero, a la distribución  $\Gamma(\alpha, a)$  se le conoce también con el nombre de *distribución de Erlang*, y entonces se relaciona con la distribución de Poisson, de manera que si el número de sucesos aleatorios e independientes que ocurren en un intervalo de tiempo es una variable aleatoria de Poisson de parámetro  $\mathbf{a}$  (es decir con media de ocurrencia constante  $\mathbf{a}$ ), entonces la variable que representa el tiempo, hasta que ocurra el  $\alpha$ -ésimo suceso de Poisson, sigue una distribución  $\Gamma(\alpha, a)$ .

El ejemplo práctico que se plantea en el último epígrafe de este capítulo, por lo que se refiere a la distribución de los caudales de las diferentes acequias de riego de una cierta zona regable, podría presentar una distribución de probabilidad del tipo  $\Gamma(3, 1)$  o similar, si se observa la anterior Fig. 3.4.

### 4.3. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

También se le suele llamar *distribución exponencial negativa*.

Diremos que una variable aleatoria  $X$ , de tipo continuo, sigue una **distribución exponencial** de parámetro  $\mathbf{a}$ , siendo  $a \in \mathfrak{R}$  y  $a > 0$ , si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax} & , \forall x > 0 \\ 0 & , \forall x \leq 0 \end{cases}$$

Abreviadamente lo indicaremos por:

$$X \rightarrow \text{Exp}(a)$$

## 5. AJUSTE A UNA DISTRIBUCIÓN “BETA”

### 5.1. CONCEPTUALIZACIÓN

Análogamente a como hicimos para la distribución gamma, definiremos previamente la función beta como una función del análisis matemático que puede resultar útil para la resolución de problemas de “uniformidad hidráulica” u otros relacionados con la Hidráulica en general. Así pues, definimos la *función beta generalizada de p y q*,  $\beta(p,q)$  como dada por la integral euleriana de 1ª especie:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx, \quad p > 0, \quad q > 0$$

que es convergente para valores de x en el intervalo (0,1), siendo p,q números reales positivos, no necesariamente enteros.

Se verifica que:

$$\beta(p,q) = \beta(q,p)$$

y para probar esto, basta hacer el cambio de variable:

$$1 - x = y, \quad dx = -dy$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \beta(p,q) &= \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx = \int_1^0 -(1-y)^{p-1} \cdot y^{q-1} \cdot dy = \\ &= \int_0^1 y^{q-1} \cdot (1-y)^{p-1} \cdot dy = \beta(q,p) \end{aligned}$$

También se verifica que:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1)$$

Esta función  $\beta(p,q)$  la utilizaremos para definir la “distribución de probabilidad beta”.

Diremos que una variable aleatoria X, de tipo continuo, sigue una **distribución beta** de parámetros p y q, siendo  $p,q \in \mathfrak{R}^2$  y  $p > 0$  y  $q > 0$ , si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}, & \forall x/ 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ en el resto} \end{cases} \quad (2)$$

O bien, teniendo en cuenta la expresión (1):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}, & \forall x/ 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ en el resto} \end{cases}$$

Abreviadamente lo indicaremos por:

$$X \rightarrow \beta(p,q)$$

Observemos que esta función de densidad está definida en el intervalo (0,1), lo cual nos indica que esta familia de distribuciones beta es muy útil para representar modelos probabilísticos que representan proporciones que se pueden presentar en algunos problemas que plantea la Hidráulica, en general. En este sentido, se desarrolla un ejemplo práctico en el epígrafe siguiente.

La expresión (2) está correctamente definida como una función de densidad, pues para  $0 < x < 1$ ,  $f(x)$  es positiva y además muy fácilmente se comprueba que:

$$\int_0^1 \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx = 1$$

La representación gráfica de la función de densidad, como vemos en la figura 3.5. toma formas muy diferentes para los distintos valores de los dos parámetros  $p$  y  $q$ . Esto nos permite seleccionar la forma de la función de densidad, pues bastará elegir adecuadamente los parámetros para ajustarse convenientemente a ella. Así pues:

- Cuando  $p = q$  la función de densidad es simétrica, siendo el eje de simetría la recta de ecuación:  $x = \frac{1}{2}$ .
- Cuando  $p = q = 1$  la distribución  $\beta(p,q) \equiv U(0,1)$ .
- Cuando  $p < q$  es asimétrica a la derecha.
- Cuando  $p > q$  es asimétrica a la izquierda.
- Cuando  $p < 1$  y  $q \geq 1$  es decreciente y cóncava.
- Cuando  $q < 1$  y  $p \geq 1$  es creciente y cóncava.
- Cuando  $p > 1$  y  $q > 1$  tiene un solo máximo relativo o local.
- Cuando  $p < 1$  y  $q < 1$  tiene un solo mínimo relativo o local.

## 5.2. CARACTERÍSTICAS

### 1. Función de distribución

---

La expresión de la función de distribución es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} dx, & 0 < x < 1 \\ 0 & , x \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

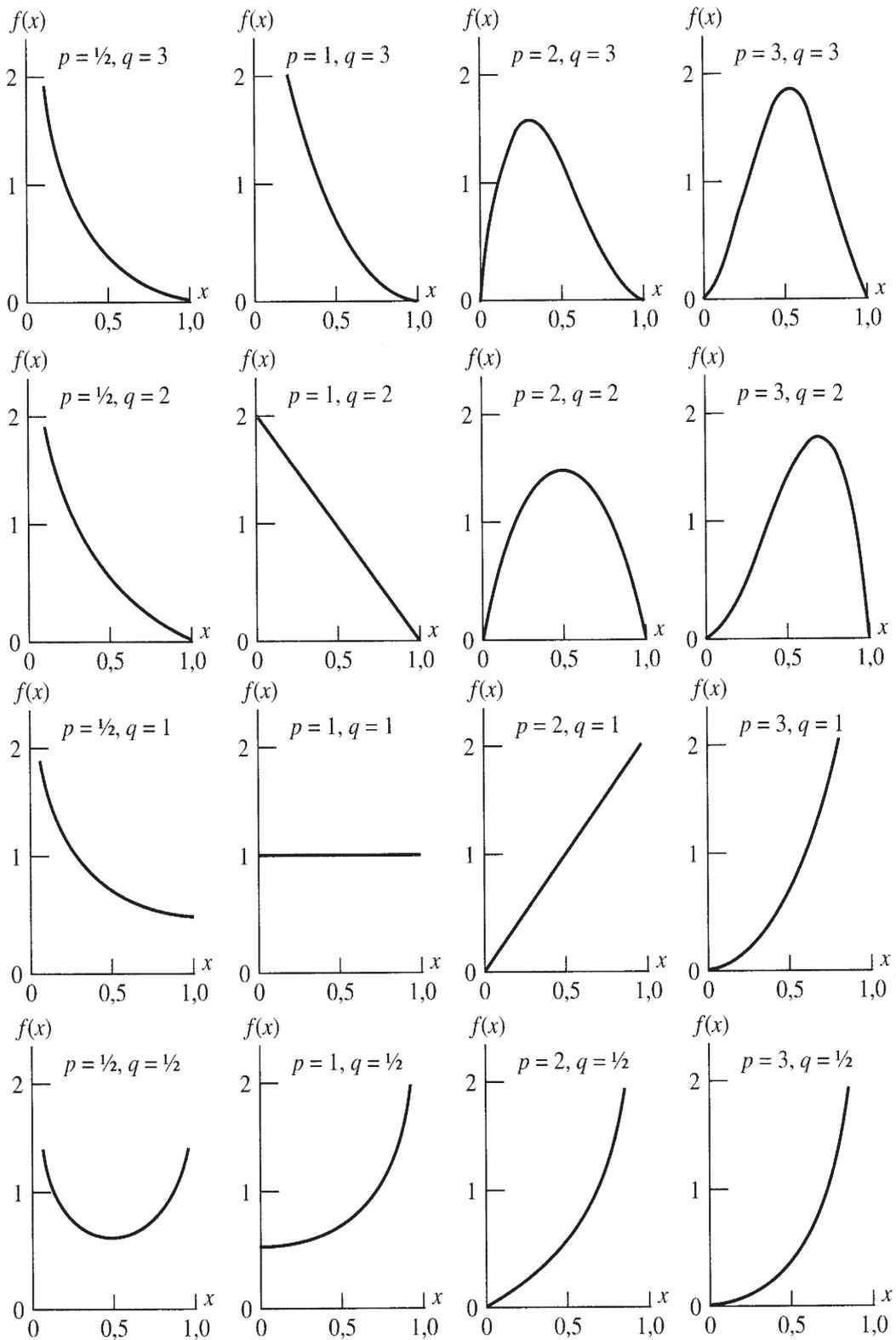
De manera análoga a como ocurría en la distribución  $\Gamma(\alpha)$ , aquí existen también tablas correspondientes a la *función beta incompleta*<sup>5</sup>, que nos facilitan el cálculo de valores de la función de distribución.

Las diferentes representaciones gráficas de la función de distribución  $\beta(p,q)$  para los valores más usuales de los parámetros **p** y **q** pueden verse en la página siguiente:

---

<sup>5</sup> La función beta incompleta es:

$$\int_0^x x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx, \forall x / 0 < x < 1$$

Fig. 3.5. Representación gráfica de la función de densidad de la distribución  $\beta(p, q)$

## 2. Media

Calculamos los *momentos de orden r* respecto al origen, para poder obtener fácilmente la media y la varianza. Esto es:

$$\begin{aligned} E[X^r] &= \int_0^1 x^r \cdot \frac{1}{\beta(p, q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx = \frac{1}{\beta(p, q)} \int_0^1 x^{p+r-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx = \\ &= \frac{\beta(p+r, q)}{\beta(p, q)} = \frac{\Gamma(p+r) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+r+q)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} = \frac{(p+r-1) \dots (p+1) \cdot p}{(p+r+q-1) \dots (p+q)} \end{aligned} \quad (4)$$

Expresión a partir de la cual podemos obtener la *media* o *esperanza matemática* sin más que hacer  $r = 1$ :

$$E[X] = \frac{p}{p+q}$$

## 3. Varianza

Obteniendo previamente el momento de orden 2, para lo cual hacemos  $r = 2$ , tenemos:

$$E[X^2] = \frac{(p+1)p}{(p+q+1)(p+q)}$$

Luego la *varianza* es:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{(p+1) \cdot p}{(p+q+1) \cdot (p+q)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} = \\ &= \frac{p \cdot q}{(p+q+1) \cdot (p+q)^2} \end{aligned}$$

### 5.3. EJERCICIO DE APLICACIÓN

El depósito central prismático de distribución del agua de una determinada Comunidad de Regantes, de dimensiones interiores en planta: 50'00 x 40'00 m., se llena una vez por semana en el período de riegos, los domingos, aprovechando las horas-valle (8 h.) y las horas-llano (8 h.), con el agua procedente de dos pozos de 300.000 y 200.000 litros/hora, así como 150 y 190 m. de altura manométrica de impulsión, respectivamente. Observando el consumo de agua de las campañas anteriores se llegó a la conclusión de que la proporción de agua del depósito que se distribuye durante la semana se podría representar por una distribución “beta” de parámetros:  $p = 3$  y  $q = 2$ . Determinar: a) La probabilidad de que la altura del tirante de agua sea inferior a 80 cm. una vez transcurrido el riego semanal, así como la velocidad ascensional del nivel del agua en el proceso de llenado. b) La potencia del transformador que abastece de energía eléctrica ambos pozos y las características necesarias de los dos grupos sumergidos elevadores. c) El tiempo de vaciado del depósito por un orificio circular de 200 mm.  $\varnothing$  y el tiempo necesario para el vaciado de un 30% del mismo; calcúlese este último caso suponiendo, simultáneamente, el caudal constante de entrada del pozo de menor caudal. d) La presión, a depósito lleno, ejercida sobre las paredes y el fondo.

a) En principio, el volumen útil o capacidad del depósito será:

$V = (300.000 + 200.000) \text{ l/h.} \times 16 \text{ h.} = 8.000 \text{ m}^3$ , con lo que la altura útil del depósito será:

$$h = \frac{8.000 \text{ m}^3}{(50 \times 40) \text{ m}^2} = 4'00 \text{ m.}, \text{ sin contar con el resguardo hidráulico}$$

(20/30 cm.). Así pues, una altura máxima de 80 cm. del tirante de agua implica una capacidad del depósito de:

$$\frac{0'80 \text{ m.}}{4'00 \text{ m.}} = 0'20 = 20\%.$$

Se tratará, pues, de hallar la probabilidad, de que se distribuya, al menos, el 80% del agua del depósito durante una semana.

Designamos por la variable aleatoria  $X$  la proporción de agua del depósito central distribuida durante la semana. Entonces:

$$X \rightarrow \beta(3,2)$$

y la función de densidad será:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(3+2)}{\Gamma(3)\cdot\Gamma(2)} x^2 \cdot (1-x), & 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ en el resto} \end{cases}$$

Luego la probabilidad pedida es:

$$P(X \geq 0'8) = \int_{0'8}^1 f(x) \cdot dx = \int_{0'8}^1 12x^2 \cdot (1-x) \cdot dx = 12 \int_{0'8}^1 (x^2 - x^3) \cdot dx = 12 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{0'8}^1 =$$

$= [4x^3 - 3x^4]_{0'8}^1 = 1 - (4 \cdot 0'8^3 - 3 \cdot 0'8^4) = 1 - 0'8192 = 0'1808 \cong 18'1\%$ , con lo que, al menos teóricamente, el calado del agua descenderá de los 80 cm. una vez cada 5 ó 6 semanas.

Para el cálculo anterior, debe tenerse en cuenta que:

$$\frac{\Gamma(3+2)}{\Gamma(3)\cdot\Gamma(2)} = \frac{1}{\beta(3,2)}; \text{ y entonces : } \beta(3,2) = \int_0^1 x^{3-1} (1-x)^{2-1} \cdot dx = \int_0^1 x^2 (1-x) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot dx - \int_0^1 x^3 \cdot dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}; \text{ de dónde :}$$

$$\frac{\Gamma(3+2)}{\Gamma(3)\cdot\Gamma(2)} = 12, \text{ c.s.q.d.}$$

Por otra parte,  $Q = 500.000 \text{ l/h.} = 138'89 \text{ l/seg.}$

$dV = S \cdot dz = Q \cdot dt$ , o sea, la velocidad ascensional pedida será:

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{Q}{S} = \frac{0'139 \text{ m}^3/\text{seg.}}{(50 \times 40) \text{ m}^2} = 0'000069 \text{ m/seg.} \cong 25 \text{ cm/h.},$$

cuestión que podría resolverse más fácilmente con los propios datos del problema, que informan del llenado total del depósito en un tiempo de 16 h., con lo que:

$$\frac{400 \text{ cm.}}{16 \text{ h.}} = 25 \text{ cm./h.}, \text{ c.s.q.d.}$$

**b)** La potencia necesaria de los grupos electro-bombas sumergidos de ambos pozos, deberá ser:

$$P_1 = \frac{\gamma \times Q_1 \times H_m}{75 \times \rho_m \times \rho_b} = \frac{1 \times \frac{300.000}{3.600} \times 150}{75 \times 0'86 \times 0'80} = 242 \text{ HP}$$

$$P_2 = \frac{\gamma \times Q_2 \times H'_m}{75 \times \rho_m \times \rho_b} = \frac{1 \times \frac{200.000}{3.600} \times 190}{75 \times 0'86 \times 0'80} = 205 \text{ HP}$$

que, considerando un aumento del 5% por las oscilaciones del voltaje, suponen una potencia activa total de:

$$P_{ac} = (242 + 205) \times 1'05 \times 0'736 = 345 \text{ Kwatt},$$

lo que exige una estación transformadora eléctrica mínima de potencia aparente:

$$P_{ap} = \frac{P_{ac}}{\cos \varphi} \times 1'50 = \frac{345}{0'85} \times 1'50 = 609 \text{ KVA}, \text{ para un factor de potencia}$$

“standard” del 85% y un incremento del 50% por las necesidades de arranque de los grupos electro-bomba.

Ambos grupos electro-bombas sumergidos serán para una tensión, en corriente alterna trifásica, de 380/660 volt y 50 Hertz, con arranque temporizado estrella-triángulo o bien con variador de frecuencia. Su consumo (intensidad) será, en cada caso:

$$I_1 = \frac{736 \times P_1}{E \times \sqrt{3} \times \cos \varphi \times \rho_m} = \frac{736 \times (242 \times 1'05)}{380 \times \sqrt{3} \times 0'85 \times 0'86} = 389 \text{ ampères}$$

$$I_2 = \frac{736 \times P_2}{E \times \sqrt{3} \times \cos \varphi \times \rho_m} = \frac{736 \times (205 \times 1'05)}{380 \times \sqrt{3} \times 0'85 \times 0'86} = 329 \text{ ampères}$$

Las secciones alternativas de cable de cobre para cada grupo, teniendo en cuenta la profundidad a la que se hallan instalados ambos en relación a la correspondiente caseta de automatismos ( $L_1 = 100 \text{ m.}$  y  $L_2 = 120 \text{ m.}$ ), son las siguientes:

#### **Pozo 1:**

cable de  $\varnothing 95 \text{ mm}^2$  en 2 tiradas de  $(2 \times 3 \times 95) \text{ mm}^2$  con arranque temporizado ( $\Delta - *$ ).

cable de  $\varnothing 120 \text{ mm}^2$  en 1 tirada de  $(1 \times 3 \times 120) \text{ mm}^2$  y arranque con variador de frecuencia.

#### **Pozo 2:**

cable de  $\varnothing 70 \text{ mm}^2$  en 2 tiradas de  $(2 \times 3 \times 70) \text{ mm}^2$  con arranque temporizado ( $\Delta - *$ ).

cable de  $\varnothing 120 \text{ mm}^2$  en 1 tirada de  $(1 \times 3 \times 120) \text{ mm}^2$  y arranque con variador de frecuencia.

Ambos grupos electrobombas sumergibles deberán ser con cuerpo de fundición o acero inoxidable, turbinas de bronce semi-axiales y cojinetes y casquillos intermedios protegidos. Irán gobernados por sendos cuadros de mando general de maniobra montados en armarios metálicos con su interruptor general e inter-fases, arrancador electrónico, fusibles extrarrápidos de silicio, contactores,

bornes, conexionado del conjunto, relé térmico de protección, amperímetro, voltímetro, reloj cuenta-horas, conmutador de mando, pilotos de señalización, electrosondas de nivel pozo-depósito, cableado y demás accesorios.

c) El tiempo de vaciado total del depósito por el orificio de desagüe de  $\varnothing$  200 mm., practicado en pared gruesa y a descarga libre, sería:

$$t = \frac{2 \times S}{C_d \times S_0} \times \sqrt{\frac{h}{2g}} = \frac{2 \times 50 \times 40 \times 4}{0'82 \times \pi \times 0'2^2} \times \sqrt{\frac{4'00}{2 \times 9'806}} = 70.124 \text{ seg.} \equiv 19'48 \text{ horas} \approx 19 \text{ h. } 29 \text{ min.}$$

Por otra parte, para el vaciado de un 30% del depósito debe considerarse que tenemos una altura total del tirante de agua en el mismo de:  $h_1 = 4'00 \text{ m.}$

Quedará en el depósito un 70% de capacidad, con una altura de:

$$h_2 = 70\% \text{ s/}4'00 \text{ m.} = 2'80 \text{ m.},$$

con lo que el tiempo de vaciado, en este caso, será:

$$t = \frac{2 \times S}{C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = \frac{2 \times 50 \times 40 \times 4}{0'82 \times \pi \times 0'2^2 \times \sqrt{2 \cdot g}} (\sqrt{4'00} - \sqrt{2'80}) =$$

$$= 11.455 \text{ seg.} \equiv 3'18 \text{ horas} \approx 3 \text{ h. } 11 \text{ min.}$$

Veamos, en fin, que si tenemos un caudal de entrada en el depósito de:

$Q_e = 200.000 \text{ l/h.} = 0'056 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , en este caso, nos encontraremos con una aportación  $Q_e < Q_s$ , siendo  $Q_s$  el caudal desaguado por el orificio de salida a la menor altura de carga considerada, puesto que:

$$Q_s = C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} = 0'82 \times \frac{\pi \times 0'2^2}{4} \times \sqrt{2 \times g \times 2'80} = 0'191 \text{ m}^3 / \text{seg.}$$

$> 0'056 \text{ m}^3/\text{seg.}$  Con ello, se tendrá la sencilla ecuación diferencial:

$$- S \cdot d \cdot h = (Q_s - Q_e) \cdot dt,$$

con lo que separando variables e integrando mediante una cuadratura, se obtiene:

$$t = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{S \cdot dh}{Q_s - Q_e} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{S \cdot dh}{Q_e - C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g \cdot h}};$$

por otra parte siendo  $z$  la carga en el centro del orificio de salida del depósito, que origina un caudal de salida por el mismo igual al entrante  $Q_e$ , pudiendo expresarse éste por:

$$Q_e = C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g \cdot z},$$

se tendrá:

$$\begin{aligned} t &= \int_{h_1}^{h_2} \frac{S \cdot dh}{C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g \cdot z} - C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g \cdot h}} = \frac{S}{C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{z} - \sqrt{h}} = \\ &= \frac{2 \cdot S}{C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g}} \times \left( \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} + \sqrt{z} \times \ln \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{z}}{\sqrt{h_2} - \sqrt{z}} \right); \end{aligned}$$

pero teniendo en cuenta que:

$$\sqrt{z} = \frac{Q_e}{C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g}}, \text{ sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{2 \cdot S}{C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g}} \times \left( \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} + \frac{Q_e}{C_d \times S_0 \times \sqrt{2 \cdot g}} \times \ln \frac{C_d \times S_0 \times \sqrt{2g \times h_1} - Q_e}{C_d \times S_0 \times \sqrt{2g \times h_2} - Q_e} \right) = \\ &= \frac{2 \times 50 \times 40 \times 4}{0'82 \times \pi \times 0'2^2 \times \sqrt{2 \cdot g}} \times \\ &\times \left( \sqrt{4'00} - \sqrt{2'80} + \frac{4 \times 0'056}{0'82 \times \pi \times 0'2^2 \times \sqrt{2 \cdot g}} \times \ln \frac{0'82 \times \pi \times 0'2^2 \times \sqrt{2g \times 4'00} - 0'222}{0'82 \times \pi \times 0'2^2 \times \sqrt{2g \times 2'80} - 0'222} \right) = \\ &= 15.641 \text{ seg.} \cong 4'345 \text{ horas} \cong 4 \text{ horas, } 21 \text{ min.}, \end{aligned}$$

que resulta, lógicamente, superior en 1 hora y 10 minutos al anteriormente calculado.

Si ahora consideramos, modificando algo el cálculo anterior, que la velocidad inicial de entrada del agua al depósito es:  $V_0 = 1'2$  m./seg., la altura de carga sobre el orificio de salida que provoca un caudal igual al constante de entrada será:

$$0'056 = C_d \times S_0 \times \sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h_2}; \text{ de dónde:}$$

$$3'0864 \times 10^{-3} = 0'6724 \times 9'87 \times 10^{-4} (1'44 + 2 \times 9'806 \times h_2);$$

$$h_2 = \frac{3'2106}{19'612} = 0'164 \text{ m.}, \text{ altura de carga en que se producirá el equilibrio}$$

entre el caudal  $Q_e$  y el  $Q_s$ . Entonces, para calcular con mayor exactitud el instante en el cual tiene lugar dicho equilibrio, habría que modificar convenientemente las formulaciones anteriores referentes al tiempo de vaciado del depósito comunitario que nos ocupa.

Veamos, en fin, que si el caudal constante entrante en el depósito fuera el correspondiente al procedente de ambos pozos, se tendría:

$$0'139 = C_d \times S_0 \times \sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h_2}; \text{ de dónde:}$$

$$0'0193 = 0'6724 \times 9'87 \times 10^{-4} (1'44 + 2 \times 9'806 \times h_2);$$

$$h_2 = \frac{29'08 - 1'44}{19'612} = 1'41 \text{ m.}, \text{ que es la altura de carga sobre el orificio de}$$

salida con la que se producirá el equilibrio:  $Q_e = Q_s$ .

**d)** Veamos, por último, que la presión, a depósito lleno, sobre la **pared larga** ( $50'00 \times 4'00$  m.), será:

$$P = 0'5 \times \gamma \times b \times h^2 = 0'5 \times 1.000 \times 50 \times 4^2 = 400.000 \text{ Kp.} = 400 \text{ t}^* = 3.922.400 \text{ N}, \text{ mientras que la } \mathbf{pared\ corta} \text{ (} 40'00 \times 4'00 \text{ m.)}, \text{ ofrecerá:}$$

$$P = 0'5 \times 1.000 \times 40 \times 4^2 = 320.000 \text{ Kp.} = 320 \text{ t}^* = 3.137.920 \text{ N}.$$

Por último, la presión unitaria sobre el **fondo del depósito** ( $50'00 \times 40'00$  m.), con una altura de carga de agua de  $4'00$  m., será de  $0'4 \text{ bar} = 0'4 \text{ Kp./cm}^2 = 0'04 \text{ Mpa}$ , y una presión total de:

$$0'4 \text{ Kp./cm}^2 \times 20.000.000 \text{ cm}^2 = 8 \times 10^6 \text{ Kp.} = 78'45 \times 10^6 \text{ N}.$$

## 6. EJEMPLO PRÁCTICO

## 6.1. DATOS Y ENFOQUE DEL PROBLEMA

Sea una gran zona regable geográficamente determinada, constituida por 1.000 acequias de riego prefabricadas de hormigón armado a cielo abierto y sección semicircular, de las que conocemos el correspondiente caudal, expresado en litros/segundo, siendo precisamente esta variable hidráulica la que será analizada desde el punto de vista de su uniformidad espacial. El riego se realiza por turnos, organizado a través de la correspondiente Comunidad de Regantes. Los valores de esta variable hidráulica se hallan agrupadas en ocho "clases" de la misma amplitud, concretamente: 5 l/seg., constituyéndose la primera y última clases de la tabla en "intervalos abiertos", ya que no se han fijado el extremo inferior de la primera y el extremo superior de la última, que corresponderían, respectivamente, a los caudales más bajo y más alto de las acequias de la zona regable en cuestión. Se desea averiguar los diferentes coeficientes de uniformidad hidráulica, "normalizar" la distribución, obtener las medidas centrales y de dispersión así como las restantes características estadísticas de interés.

La tabla resultante del conteo realizado es la siguiente:

Tabla 3.3. Frecuencias de la distribución de caudales

CAUDALES (Q)						
litros / segundo	f. simple $n_i$	f. acumul. ascen. $N_i\uparrow$	f. acumul. descen. $N_i\downarrow$	f. simple $f_i$	f. acumul. ascen. $F_i\uparrow$	f. acumul. descen. $F_i\downarrow$
Menos de 150	3	3	997	0'003	0'003	0'997
De 150 a 155	15	18	982	0'015	0'018	0'982
De 155 a 160	50	68	932	0'050	0'068	0'932
De 160 a 165	240	308	692	0'240	0'308	0'692
De 165 a 170	312	620	380	0'312	0'620	0'380
De 170 a 175	235	855	145	0'235	0'855	0'145
De 175 a 180	108	963	37	0'108	0'963	0'037
De 180 y más	37	1.000	0	0'037	1'000	0'000
TOTAL	1.000	///	///	1'000	///	///

Para interpretar correctamente dicha tabla, deben formularse las siguientes observaciones:

a) La columna de las frecuencias simples, encabezada por  $n_i$ ,  $\forall i \in (1, 2, \dots, 8)$ , recoge la *frecuencia absoluta* de cada uno de los ocho *intervalos de clase*; así, 240 es el número de acequias cuyo caudal está comprendido entre 160 (inclusive) y 165 l./seg. La *frecuencia total* toma el valor  $n = 1.000$  acequias.

b) Las *frecuencias acumuladas ascendentes* las hemos designado por  $N_i\uparrow$  ( $\forall i=1, 2, \dots, 8$ ) y a cada una de ellas corresponde el número de acequias de caudal o gasto inferior al extremo superior de la clase; así,  $N_4\uparrow = 308$ , significa

---

que se han hallado (o proyectado) 308 acequias con un caudal inferior a 165 l./seg.

c) Las *frecuencias relativas* ordinarias y acumuladas encabezadas, respectivamente, por  $f_i$ ,  $F_i\uparrow$  y  $F_i\downarrow$  vienen determinadas por el cociente de dividir la correspondiente frecuencia absoluta o acumulada (ascendente o descendente) por la frecuencia total. Así:

$$f_4 = 240/1.000 = 0'240, F_4\uparrow = 308/1.000 = 0'308 \text{ y } F_4\downarrow = 692/1.000 = 0'692$$

La suma de las frecuencias relativas ordinarias y la última frecuencia relativa acumulada ascendente han de ser siempre iguales a la unidad, puesto que representan la probabilidad total.

d) La representación gráfica de una tabla de frecuencias ordinarias (absolutas o relativas), cuando la variable es continua (como es el caso de las variables hidráulicas, que pueden tomar valores entre dos consecutivos) está distribuida en clases -como las de la tabla número 3.3.-, debe realizarse mediante un *histograma de rectángulos yuxtapuestos* (fig. 3.6.), que se construye tomando como abscisas los extremos de los intervalos y levantando sobre cada intervalo, tomado como base, un rectángulo cuya área sea directamente proporcional a la correspondiente frecuencia (absoluta o relativa). Si los intervalos son de la misma amplitud (caso de la tabla núm. 3.3., que van de 5 en 5 l./seg.), la altura de cada rectángulo es proporcional a la correspondiente frecuencia. En nuestra figura se ha supuesto que el extremo inferior de la variable es 145 y el superior 185 l./seg., aunque, de hecho, los extremos inferior y superior, respectivamente, del campo de existencia de la misma son de 120 y 208 l./seg., correspondientes a las acequias de caudal mínimo y máximo de todas ellas.

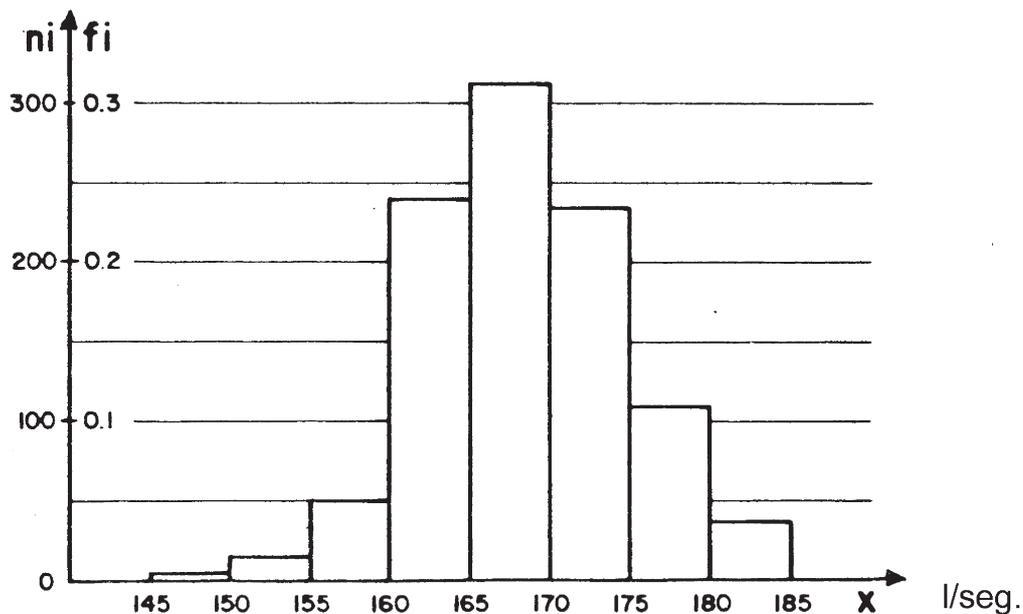


Fig. 3.6. Histograma de rectángulos yuxtapuestos

e) La representación gráfica de una tabla de frecuencias acumuladas, cuando la variable continua se ha distribuido en intervalos de clase (figura 3.7.), se obtiene mediante un **polígono de frecuencias o diagrama acumulativo ascendente**, que consiste en unir mediante una línea poligonal los puntos cuyas abscisas son los extremos superiores de cada intervalo de clase (150, 155, 160, etc ..., en nuestro ejemplo) y cuyas ordenadas son las correspondientes frecuencias acumuladas. En la figura 3.7., para un valor cualquiera de la variable hidráulica en estudio  $x$ , la ordenada correspondiente representa el número (absoluto o relativo) de conducciones que tienen su caudal inferior o dicho valor de  $x$ . El diagrama suele partir de un punto de ordenada cero cuya abscisa es el extremo inferior de la tabla (en nuestro ejemplo, hemos tomado para dicho extremo la abscisa  $x = 145 > 120$ ); a partir del extremo superior de la tabla ( $185 < 208$ , en nuestro caso) la línea es una recta paralela al eje de abscisas, cuya altura constante es igual a la frecuencia total ( $n = 1.000$  acequias de riego, en el problema cuya resolución afrontamos).

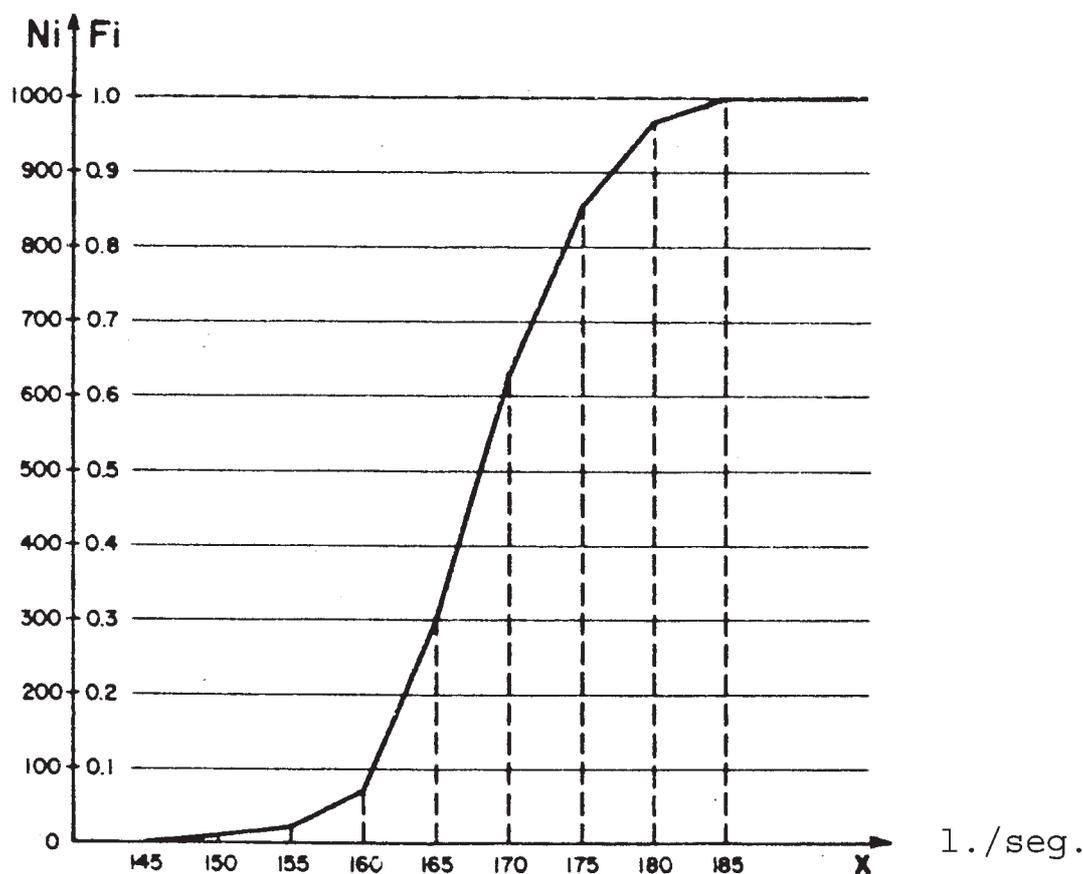


Fig. 3.7. Diagrama acumulativo ascendente de los caudales

## 6.2. "NORMALIZACIÓN" DEL PROBLEMA

Una variable aleatoria que se distribuya con la función de densidad que ya hemos relacionado en otras partes de este mismo libro, recibe el nombre de *normal* debido a que la distribución binomial, considerada en su caso límite, es la que corresponde corrientemente o habitualmente a la mayor parte de las variables empíricas, entre ellas las hidráulicas. Una ampliación de conceptos teóricos en relación a la expresada distribución de probabilidad, puede encontrarse en el anexo n°: 3 de este mismo libro ("Restantes especificaciones metodológicas").

Desde luego, entre las muchas distribuciones continuas que se utilizan en Estadística y que pueden tener provechosas aplicaciones en el estudio de las variables hidráulicas, tal como vemos en este mismo capítulo de nuestro libro, la *curva normal* o *distribución normal* es, con mucho, la más importante de ellas. Su estudio data de investigaciones sobre la naturaleza de los errores experimentales, llevadas a cabo en el siglo XVIII. Se observaba entonces que las discrepancias entre las medidas repetidas de la misma cantidad física mostraban un sorprendente grado de regularidad; sus aspectos (distribución), según se encontró, podían aproximarse muy bien mediante un cierto tipo de curva de distribución continua, denominada "curva normal de errores" y atribuida a las leyes del azar. Las propiedades matemáticas de este tipo de curva de distribución

continua y su base teórica fueron investigadas, por primera vez, por Abraham de Moivre (1667-1745), Pierre Laplace (1749-1827) y Karl Gauss (1777-1855). Este último fue un gran matemático alemán que, con sus brillantes aportaciones sobre las geometrías no euclidianas, hizo posible la aparición de las ciencias formales.

La importancia de la distribución normal radica, en primer lugar, en que son muy numerosas las variables aleatorias que la siguen, resultando adecuada para describir la distribución de muchos conjuntos de datos. En efecto, numerosas medidas físicas (como las hidráulicas), datos meteorológicos, características biológicas, variables económicas y sociales, etc., siguen la ley normal, así como también aparece en muchas investigaciones teóricas. En segundo lugar, como consecuencia del teorema del límite central, que establece que la suma de un número elevado de variables aleatorias converge a una distribución normal, sea cual sea la distribución de estas variables. Además, en ciertas condiciones, las distribuciones discretas pueden ser substituidas por distribuciones normales, lo que simplifica notablemente los cálculos correspondientes. Hay que tener mucho cuidado, en fin, al suponer que un determinado conjunto de observaciones se puede aproximar por una distribución normal, pues será necesario realizar una comprobación previa.

Como se ha visto, la curva normal tiene forma de campana extendida indefinidamente en ambas direcciones, positiva y negativa, siendo asintótica en relación al eje de abscisas. Rara vez es necesario extender las colas de la curva normal muy lejos de la media, porque el área comprendida bajo la curva y el eje horizontal que queda a más de cuatro o cinco desviaciones típicas de la media aritmética o esperanza matemática resulta insignificante para la mayoría de los fines prácticos y, entre ellos, los propios de la Hidráulica o la Hidrología. Debe tenerse en cuenta que no todas las distribuciones acampanadas simétricas en relación al eje de ordenadas son distribuciones normales, y las palabras *distribución normal* refiérense al hecho de que el área bajo la curva se distribuye de una manera determinada.

Una importante propiedad de la curva normal es que está completamente determinada por su media y su desviación típica. Es decir, la ecuación matemática de dicha curva es tal que se puede determinar el área existente bajo la curva entre dos puntos cualesquiera del eje horizontal si se conoce el valor que adoptan ambos parámetros, aunque en la práctica dichas áreas se obtienen valiéndose de tablas especiales elaboradas al efecto. Por otra parte, la probabilidad o frecuencia relativa con que una variable hidráulica tomará valores entre dos puntos es el área bajo la curva comprendida entre los dos puntos del eje horizontal.

Si se representa gráficamente esta función (Fig. 3.8.), encontraremos que está definida para todos los valores de  $x$  (desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ ) y con las siguientes propiedades:

- a) Solamente existe la curva para valores positivos de las ordenadas.
- b) El eje de abscisas  $OX$  es una asíntota de la curva.
- c) Existe un máximo para el punto  $x = \alpha$ .
- d) Es creciente hasta el máximo y después es decreciente.
- e) Existen dos puntos de inflexión: para  $x = \alpha - \sigma$  y para  $x = \alpha + \sigma$ .
- f) Es cóncava hacia la región positiva del eje  $OY$ , para  $-\infty < x < \alpha - \sigma$  y para  $\alpha + \sigma < x < +\infty$  y cóncava hacia la región negativa del eje de ordenadas en el intervalo:  $\alpha - \sigma < x < \alpha + \sigma$ .

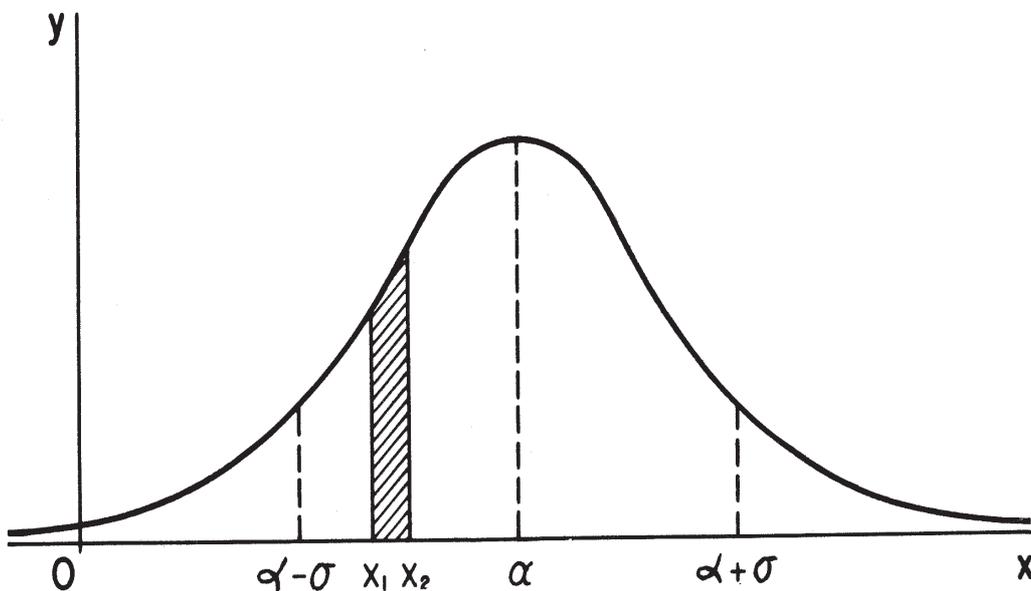


Fig. 3.8. Área bajo la curva normal entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$

Dentro de la ley normal los valores más próximos a  $\alpha$  son más frecuentes que los más alejados de  $\alpha$ . La utilización e interpretación de esta función para Gauss puede verse a través de un ejemplo como el siguiente: supongamos que se efectúan 1.000 mediciones del caudal de una misma acequia, cuyo caudal verdadero es de 168 litros/seg.; en este caso se dice que  $\alpha = 168$  l./seg. Las medidas efectuadas se acumularán en mayor proporción alrededor de  $\alpha$  cuanto más próximas estén a dicho valor y serán menos frecuentes cuanto más alejadas se encuentren de  $\alpha$ .

El parámetro  $\sigma$  está relacionado con la precisión de las mediciones realizadas al medir el parámetro  $\alpha$ . Si se hace igual a la unidad el área

comprendida entre la curva y el eje de abscisas y se supone que los caudales medidos que han estado comprendidos entre los valores  $x_1$  y  $x_2$  representan el diez por ciento de las 1.000 mediciones realizadas, el área rayada de la Fig. 3.8. debe ser igual a 0'10. También sabemos hoy que el área comprendida entre la curva, el eje de abscisas y las ordenadas  $x = \alpha - \sigma$  y  $x = \alpha + \sigma$  corresponde, aproximadamente, al 64 por ciento del área total. Por lo tanto, ya tenemos un significado del hasta ahora desconocido parámetro  $\sigma$ : cuanto menor sea el valor de  $\sigma$  (que se denomina *desviación típica* o *standard* en la terminología estadística) serán de menor cuantía los errores que se cometen al medir el caudal  $\alpha$ ; es decir, si el aparato de medir caudales (por ejemplo, un rotámetro o un molinete Woltman) es más perfecto o si es más hábil la persona encargada de medirlos,  $\sigma$  será un número menor que en el caso contrario.

La función de densidad normal o la función de distribución normal son dos modelos matemáticos inspirados por la conocida “ley de los errores” o ley de Gauss. Pues bien, la Estadística ha incorporado a su metodología –como un modelo probabilístico esencial– esta ley de Gauss con el nombre de *función de densidad normal*. Si  $y = f(x)$  es dicha función de densidad, se puede definir a partir de ella la denominada *función de distribución normal*  $F(x)$ , tal que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx,$$

y dicha integral impropia de primera especie significa que a cada valor de  $x$  corresponde un número  $F(x)$  determinado por la probabilidad de que la variable (“caudal”, en nuestro ejemplo) tome un valor menor o igual a  $x$ .

Las áreas comprendidas bajo la curva normal y el eje de abscisas representan probabilidades. En estas condiciones, la probabilidad de que la variable  $x$  (en nuestro caso se trata del caudal de la acequia  $Q$ ) tome un valor comprendido entre  $x_1$  y  $x_2$ , vendría dada de la siguiente forma, aplicando la propiedad de la aditividad del intervalo de integración:

$$\begin{aligned} P_r(x_1 < x \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x) \cdot dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} \times dx = \frac{1}{6'36 \times \sqrt{2\pi}} \times \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-168'325)^2}{2 \times 6'36^2}} \times dx = \\ &= 0'063 \times \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-168'325)^2}{80'9}} \times dx \end{aligned}$$

es decir, como la última integral permite conocer el área rayada de la Fig. 3.8., dicha área representa la probabilidad de que la variable  $x = Q$  (que en el Cálculo

de Probabilidades es una *variable aleatoria* o *estocástica*, en lugar de una *variable estadística*) tome un valor comprendido entre  $x_1 = Q_1$  y  $x_2 = Q_2$ .

En el caso de que la tabla anterior correspondiera a 1.000 mediciones distintas de un mismo caudal (en lugar de corresponder a los caudales medidos en 1.000 acequias distintas), la distribución de frecuencias determinada por las columnas encabezadas por "litros/segundo" y por " $f_i$ " presentaría una *imagen empírica* de una función de densidad normal. Si los resultados se hubieran obtenido a partir del modelo matemático, en lugar de constituir una observación de la realidad, para:  $x_1 = 165$  y  $x_2 = 170$ , se tendría que:

$$\int_{165}^{170} f(x) \cdot dx = 0'312$$

Conocidas la media y la desviación típica, se pueden tabular las áreas comprendidas bajo la curva normal.

En realidad, para  $\alpha = 168'325$  (media aritmética o esperanza matemática de aquella distribución de frecuencias) y para  $\sigma = 6'36$  (desviación típica) se tiene que:

$$\int_{165}^{170} f(x) \cdot dx = 0'303 \text{ ,}$$

cuya diferencia:  $0'312 - 0'303 = 0'009$  es una medida de la discrepancia existente entre la realidad y el modelo teórico que ha sido considerado y para la clase particular "caudal de 165 a 170 l./seg."

Las áreas comprendidas entre menos infinito y  $x$  son los valores de la función de distribución para cada valor de la variable hidráulica  $x$ .

De la misma manera, la distribución de frecuencias determinada por la primera columna de la tabla 3.3. y la encabezada por  $F_i \uparrow$ , constituyen una *imagen empírica de la función de distribución normal* que venimos considerando. En este caso, los resultados empírico y teórico, para  $x = 170$ , serían, respectivamente:

$$F_5 \uparrow = \int_{-\infty}^{170} f(x) \cdot dx = 0'620 \text{ y también: } \int_{-\infty}^{170} f(x) \cdot dx = 0'622$$

que implicarían una discrepancia absoluta de 0'002 y relativa del 0'32% entre el valor teórico y el correspondiente valor observado, que resulta ser francamente baja.

### 6.3. CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL

#### 6.3.1. Medidas centrales o promedios

Comenzaremos, como es habitual, por el cálculo de los diferentes promedios o valores de la distribución de la variable “caudal”. Para ello, y a partir de la tabla inicial, elaboraremos la siguiente:

Tabla 3.4. Cálculos auxiliares de la distribución de caudales (I)

$n_i \cdot \log x_i$	$\log x_i$	$Q_i$ (litros/seg.)	$x_i$ (l/s)	$n_i$	$x_i \cdot n_i$ (l/s)	$N_i \uparrow$	$x_i^2 \cdot n_i$	$n_i/x_i$
6'506	2'1687920	Menos de 150	147'5	3	442'5	3	65.268'75	0'020
32'749	2'1832698	De 150 a 155	152'5	15	2.287'5	18	348.843'75	0'098
109'864	2'1972806	De 155 a 160	157'5	50	7.875'0	68	1.240.312'50	0'318
530'605	2'2108534	De 160 a 165	162'5	240	39.000'0	308	6.337.500'00	1'477
693'893	2'2240148	De 165 a 170	167'5	312	52.260'0	620	8.753.550'00	1'863
525'645	2'2367891	De 170 a 175	172'5	235	40.537'5	855	6.992.718'75	1'362
242'913	2'2491984	De 175 a 180	177'5	108	19.170'0	963	3.402.675'00	0'608
83'667	2'2612629	De 180 y más	182'5	37	6.752'5	1.000	1.232.331'25	0'203
2.225'842	////////	TOTAL	///	1.000	168.325'0	///	28.373.200'00	5'949

\* **Media Aritmética:** a partir de los correspondientes resultados se tiene que, tratándose de una distribución conjunta de frecuencias:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^h x_i \cdot n_i / n = \alpha = 168.325 / 1.000 = 168'325 \text{ l./seg.}$$

que constituye la media aritmética o esperanza matemática de la distribución de frecuencias de la variable hidráulica analizada.

Por otra parte, y por lo que se refiere a la determinación de otros promedios o medidas centrales de esta distribución de frecuencias, veamos que, a partir de la primera columna y de la encabezada por  $N_i \uparrow$  (tabla 3.4.) se obtienen los siguientes resultados promedios (como  $N_i \uparrow = 500$  está en el intervalo del 165 a 170, en él se encuentra la mediana o segundo cuartil):

\* **Mediana:**  $Me = 165 + (500-308) / 312 \times 5 = 168 \text{ l./seg.}$

, que se halla situada en el punto de corte de los diagramas acumulativos ascendente y descendente, por definición.

\* **1.º cuartil:**  $Q_1 = 160 + (250-68) / 240 \times 5 = 164 \text{ l./seg.}$

\* **3.º cuartil:**  $Q_3 = 170 + (750-620) / 325 \times 5 = 173 \text{ l./seg.}$

Es decir, entre las acequias integrantes de la zona regable en estudio, la mitad tienen un caudal inferior a 168 l./seg., la cuarta parte, un caudal inferior a 164, otra cuarta parte, más de 173 y entre los caudales 164 y 173 se encuentra el 50% de aquellas conducciones libres.

Otros promedios interesantes para nuestro estudio serían los siguientes:

\* **Moda:**  $M_o = 165 + (235 / 240+235) \times 5 = 167'47 \text{ l./seg.}$

\* **Media cuadrática:**

$$C = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2 \cdot n_i / n} = \sqrt{28.373.200 / 1.000} = 168'44 \text{ l./seg.}$$

\* **Media geométrica:**

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^8 x_i^{n_i}} = \text{antilog.} \sum_{i=1}^8 n_i \cdot \log x_i / n = \\ = \text{antilog } 2.225'842 / 1.000 = 168'2062 \text{ l./seg.}$$

\* **Media armónica:**

$$H = n / \sum_{i=1}^8 n_i / x_i = 1.000 / 5'949 = 168'0955 \text{ l./seg.}$$

Desde luego, las cuatro medias aquí estudiadas quedan ordenadas, con arreglo a su magnitud, del modo siguiente:

$$\text{armónica} < \text{geométrica} < \text{aritmética} < \text{cuadrática}$$

$$(H = 168'0955) < (G = 168'2062) < (\bar{X} = 168'3250) < (C = 168'4435)$$

### 6.3.2. Medidas de dispersión o concentración

Por lo que se refiere a la desviación típica o "standard", como medida de la dispersión absoluta de la distribución por la zona regable de nuestra variable hidráulica  $Q_i$ , veamos que su valor vendrá dado por:

$$\sigma = \sqrt{C^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{168'44^2 - 168'32^2} = 6'36 \text{ l./seg.,}$$

y un coeficiente de variación de Pearson (medida de dispersión relativa) de :

$$CV = \sigma / \bar{X} = 6'35 / 168'32 \approx 0'038 = 3'8\% .$$

Recorrido intercuartílico:

$$Q_3 - Q_1 = 173 - 164 = 9 \text{ l./seg.,}$$

Recorrido semi-intercuartílico:

$$(Q_3 - Q_1) / (Q_3 + Q_1) = 9 / (173 + 164) = 0'02671,$$

es decir, que en ambos casos, la medida de dispersión empleada viene a representar sólo alrededor del 3% del correspondiente promedio. **Desde luego, ello indicaría que el grado de uniformidad y equilibrio de la zona regable que nos ocupa, en relación a la distribución de los caudales o capacidades portantes de las acequias que la surcan, resulta francamente elevado. En efecto, los coeficientes de uniformidad anteriormente definidos, tomarán, en este caso, los siguientes valores:**

$$\begin{cases} CU_1 = 100 \cdot (1 - CV) = 100 \cdot (1 - 0'038) = 96'2\% \\ CU_3 = 100 \cdot (1 - 1'27 \cdot CV) = 100 \cdot (1 - 1'27 \cdot 0'038) = 95'2\% \\ CU_4 = 100 \cdot (1 - 0'80 \cdot CV) = 100 \cdot (1 - 0'80 \cdot 0'038) = 97'0\% \end{cases}$$

debiendo considerarse también que:

$$CU_2 = (Q_1 / \bar{X}) \cdot 100 = (163'79 / 168'32) \cdot 100 = 97'3\%$$

, si bien otra determinación del mismo coeficiente de uniformidad hidráulica conduciría al valor:

$$CU_2 = 100 (1 - 0'68 \cdot CV) = 100 (1 - 0'68 \times 0'038) = 97'4\% ,$$

cuya pequeña discrepancia (+0'1%) con el resultado anterior débese al propio ajuste de normalidad, o bien al proceso de cálculo decimal.

Veamos, por último, que el "coeficiente de uniformidad hidráulica medio", ofrecerá un valor de:

$$\overline{CU} = 100 (1 - 0'92 \cdot CV) = 100 (1 - 0'92 \times 0'038) = 96'5\% ,$$

mientras que también:

$$CU_5 = 100 \cdot \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{163'79}{172'77}} = 97'4\%$$

La representación gráfica de los valores de los diferentes coeficientes de uniformidad hallados, en definitiva, es la siguiente:

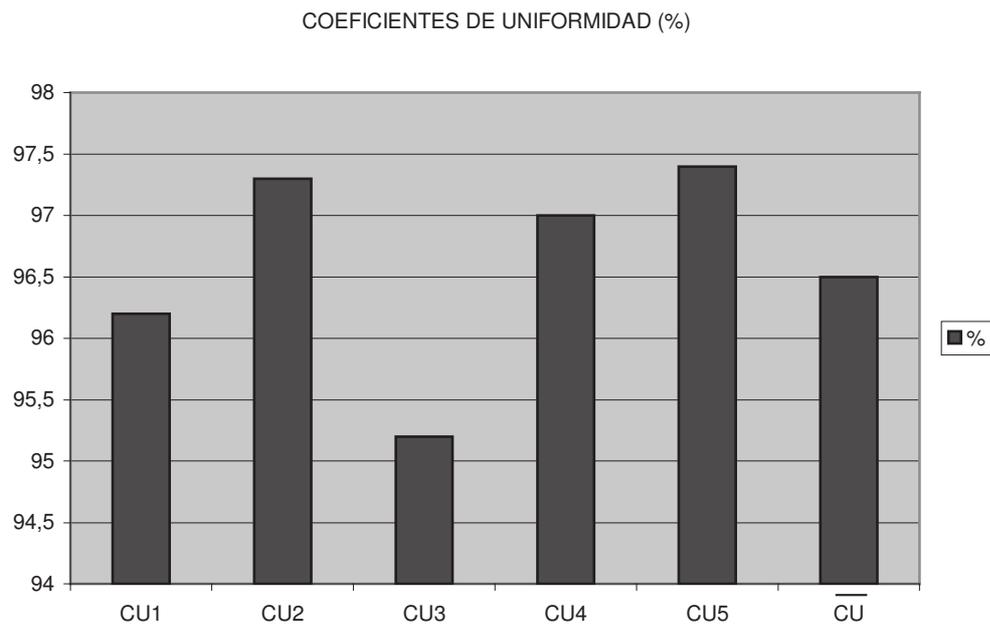


Fig. 3.9. Valores de los diferentes coeficientes de uniformidad

### 6.3.3. Otras características de la distribución espacial

Por lo que se refiere a las restantes características de la distribución espacial de la variable hidráulica "caudal", veamos que una de la asimetría o sesgo la constituye el denominado "1.<sup>er</sup> coeficiente de asimetría de Pearson":

$$P_1 = \frac{\bar{X} - M_0}{\sigma} = \frac{168'32 - 167'47}{6'36} = 0'134 \approx 0 \quad ,$$

luego se trata de una distribución prácticamente simétrica.

También podríamos calcular el "2º coeficiente de asimetría de Pearson", a saber:

$$P_2 = \frac{3 \cdot (\bar{X} - M_e)}{\sigma} = \frac{3 \cdot (168'32 - 168'08)}{6'36} = 0'113 \quad ,$$

o bien el "coeficiente de sesgo cuartílico", de valor:

$$\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{172'77 - 2 \cdot 168'08 + 163'79}{172'77 - 163'79} = 0'045 \quad ,$$

que conducen, en todos los casos, a conclusiones similares. Cabe observar, no obstante, una ligera asimetría o sesgo hacia la derecha, puesto que:  $P_1 > 0$ ,  $P_2 > 0$  y también:

$$\bar{X} = 168'32 \text{ l./seg.} > \text{Me} = 168'00 \text{ l./seg.} > \text{Mo} = 167'47 \text{ l./seg.}$$

Así mismo, se elaborará la siguiente tabla:

Tabla 3.5. Cálculos auxiliares de la distribución de caudales (II)

$n_i$	$x_i-168$	$(x_i-168)^3 \cdot n_i$	$(x_i-168)^4 \cdot n_i$	$ x_i-168  \cdot n_i$
3	-20'5	-25.844'4	529.810'2	61'5
15	-15'5	-55.851'2	865'693'6	232'5
50	-10'5	-57.881'3	607.753'6	525'0
240	-5'5	-39.930'0	219.615'0	1.320'0
312	-0'5	-39'0	19'5	156'0
235	4'5	21.414'6	96.365'7	1.057'5
108	9'5	92.596'5	879.666'7	1.026'0
37	14'5	112.800'0	1.635.600'0	536'5
1.000	////	47.265'2	4.834.524'3	4.915'0

$$\sum_{i=1}^8$$

De los resultados de la tabla anterior, se deduce que el momento central (respecto a la media aritmética) de tercer orden es:

$$m_3 = 47'2652 \text{ ,}$$

por lo que se tendrá un "coeficiente directo de asimetría" o "coeficiente de sesgo" de Fisher de:

$$g_1 = m_3 / \sigma^3 = 47'2652 / 6'36^3 = 0'18 \text{ ,}$$

que confirma la existencia de una distribución aceptablemente simétrica (en curvas simétricas como la normal, se cumple que:  $g_1 = g_1^2 = 0$ ).

Por otra parte,  $m_4 = 4.834'5243$  (momento central o respecto al origen de 4.º orden) y, por tanto, se tendrá un "coeficiente de curtosis" de Fisher de:

$$g_2 = (m_4 / \sigma^4) - 3 = (4.834'5243 / 6'36^4) - 3 = 2'95 - 3 = - 0'05 \approx 0 \text{ ,}$$

lo que permite asegurar que la distribución es **mesocúrtica** y aproximadamente normal (la curva normal, como es sabido, tiene un valor:  $g_2 = 0$ ).

Veamos, así mismo, que la anterior tabla de cálculo núm. 3.5., en su última columna, nos permitirá el cálculo de otra medida de dispersión absoluta a la que ya nos hemos referido con anterioridad: la desviación media respecto a la media aritmética (que sería mínima con respecto a la mediana), a saber:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^8 |x_i - \bar{X}| \cdot n_i}{n} = 4.915 / 1.000 = 4'915 \approx 4\sigma / 5 =$$

$$= 4 \cdot 6'36 / 5 = 5'088 \text{ l./seg.}$$

Este valor de la DM, en la presente distribución agrupada de frecuencias, conducirá a una determinación más ajustada y directa del valor del coeficiente de uniformidad hidráulica  $CU_4$ , a saber:

$$CU_4 = 100 \cdot (1 - 4'915 / 168'325) = 97'08 \%$$

prácticamente coincide con el anteriormente calculado (97'00%) mediante procedimientos indirectos.

### 6.3.4. Índice de Gini y curva de Lorenz

Para la determinación de dichos ítems, es necesaria la elaboración de la siguiente tabla de cálculos auxiliares:

Tabla 3.6. Cálculos auxiliares para la determinación de G

$L_i$ (l./seg.)	$x_i$ (l/s.)	$n_i$	$Q_i = x_i \cdot n_i$ (l./seg.)	$\frac{n_i}{n} \times 100$	$\frac{x_i \cdot n_i}{\sum x_i \cdot n_i} \times 100$	$p_i$	$q_i$	$p_i - q_i$
<150	135'0	3	405'0	0'3	0'24	0'3	0'24	0'06
150-155	152'5	15	2.287'5	1'5	1'36	1'8	1'60	0'20
155-160	157'5	50	7.875'0	5'0	4'67	6'8	6'27	0'53
160-165	162'5	240	39.000'0	24'0	23'12	30'8	29'39	1'41
165-170	167'5	312	52.260'0	31'2	30'97	62'0	60'36	1'64
170-175	172'5	235	40.537'5	23'5	24'03	85'5	84'39	1'11
175-180	177'5	108	19.170'0	10'8	11'36	96'3	95'75	0'55
>180	194'0	37	7.178'0	3'7	4'25	100	100	0'00
$\sum_{i=1}^8$		$n =$ 1.000	$Q =$ 168.713'0	100%	100%	383'5	378'0	5'50

En este caso, al objeto de precisar mejor los cálculos, los valores de la primera y última marca de clase:  $x_1 = 135'0$  l./seg. y  $x_8 = 194'0$  l./seg. se han estimado teniendo en cuenta los valores extremos:  $Q_0 = 120'0$  l./seg. y  $Q_4 = 208'0$  l./seg.

Así pues, según la fórmula dada por Pulido, el valor del índice de Gini, en este caso, será de:

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{K-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{K-1} p_i} = \frac{5'50}{283'5} = 0'02 = 2\%$$

Habida cuenta del bajísimo valor del índice obtenido, podemos afirmar que la distribución de los caudales de las acequias de riego por la zona regable es casi perfecta desde el punto de vista estadístico.

La correspondiente curva poligonal de Lorenz apenas se separa de la diagonal o bisectriz del primer cuadrante, dado el bajísimo valor del índice de Gini ya obtenido, por lo que obviaremos su representación gráfica, a efectos prácticos.

### 6.3.5. Índice de Williamson

En nuestro caso, la variable hidráulica en estudio es el caudal global que puede ser transportado por las acequias de cada intervalo de clase. Por ello, la fórmula pertinente, en relación al número de acequias de riego, vendrá dada por la expresión:

$$W_{Q,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 \left( \frac{Q_i}{n_i} - \frac{Q}{n} \right)^2 \times \frac{n_i}{n}}{Q/n}}, \forall i \in (1,2,\dots,8)$$

Esto es:

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 \left( x_i - \frac{168.713}{1.000} \right)^2 \times f_i}{168'713}} = \\ &= \sqrt{\frac{(135'0 - 168'713)^2 \times 0'003 + (152'5 - 168'713)^2 \times 0'015 + (157'5 - 168'713)^2 \times 0'05 +}{168'713}} \\ &\sqrt{\frac{+ (162'5 - 168'713)^2 \times 0'24 + (167'5 - 168'713)^2 \times 0'312 + (172'5 - 168'713)^2 \times 0'235 +}{168'713}} \\ &\sqrt{\frac{+ (177'5 - 168'713)^2 \times 0'108 + (194'0 - 168'713)^2 \times 0'037}{168'713}} = \sqrt{\frac{58'73}{168'713}} = 0'59 \end{aligned}$$

que, como era de esperar, resulta ser muy bajo.

### 6.3.6. Índice de concentración de Lorenz

En el caso que nos ocupa, veamos que un valor aproximado de este índice es el que se obtiene mediante la aplicación de la fórmula basada en los porcentajes acumulados, que se emplea comúnmente en los trabajos prácticos.

Aquí, la fórmula correspondiente explicada en epígrafes anteriores de este mismo capítulo de nuestro libro, tomará la configuración simplificada (con  $n = 8$  y  $q_n = 100$ ):

$$L = 1 - \frac{2}{7} \times \frac{\sum_{i=1}^7 q_i}{100} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^7 q_i}{350}$$

El resultado que ofrece la aplicación de la fórmula anterior es el siguiente, teniendo en cuenta, como ya se ha dicho, que resulta necesario ordenar los valores de la variable hidráulica en estudio (caudal de las conducciones) de menor a mayor, para la aplicación correcta de la fórmula, así:

Tabla 3.7. Ordenación creciente de los porcentajes acumulados de caudales

	$X_i$	$q_i$
	0'24	0'24
	1'36	1'60
	4'25	5'85
	4'67	10'52
	11'36	21'88
	23'12	45'00
	24'03	69'03
	30'97	100'00
$\sum_{i=1}^8$	100'00	254'12

A esta distribución de probabilidad le corresponde, pues, el índice de Lorenz:

$$L = 1 - \frac{154'12}{350} = 0'56$$

## 6.4. AJUSTE A UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

### 6.4.1. La hipótesis de normalidad y el estadígrafo $\chi^2$

La distribución que venimos estudiando de la variable hidráulica "caudal", en la zona regable considerada, puede ajustarse a una distribución normal. De este modo, la distribución teórica de los caudales de las acequias vendrá dada, como ya se ha visto, por la función de densidad normal:

$$y = (1/6'36 \cdot \sqrt{2\pi}) \cdot e^{-\frac{(x-168'325)^2}{80'8992}}$$

Mediante los métodos adecuados de la Estadística Matemática, sería posible justificar la bondad de este ajuste contrastando la **hipótesis de normalidad** mediante el empleo del estadígrafo  $\chi^2$  de Pearson, tal como ya se realiza en algún otro apartado de esta misma obra.

En la Fig. 3.10. se ha representado gráficamente la función anterior. En realidad, tal representación significa el **ajuste de una función de densidad normal** a la distribución de los caudales observados (por medición de los mismos) o proyectados en la fase de diseño de la zona regable. Utilizando una tabla de la distribución normal como la que incluimos en este mismo capítulo, podemos obtener las áreas de las superficies que están limitadas por la curva normal, el eje de abscisas y las ordenadas en los extremos o límites de los intervalos de clase. Dado que, como es bien sabido, dicha área total es igual a la unidad, resultará que cada una de ellas expresa la probabilidad  $p_i$  de que la variable "caudal" tome un valor perteneciente al correspondiente intervalo de clase.

Para proceder al ajuste es necesario transformar los valores observados de la variable Q (en este caso representados por el límite superior  $L_i$  de cada intervalo de clase) en *valores tipificados* o "estandarizados", lo que se consigue restando de cada  $L_i$  la media 168 (columna 2ª de la Tabla 3.8.) y dividiendo dicha diferencia por la desviación típica 6'36 de la distribución observada (3ª columna), al objeto de poder emplear las tablas de la distribución normal, obtenidas para una distribución de media  $\alpha = 0$  y desviación típica  $\sigma = 1$ . Así:

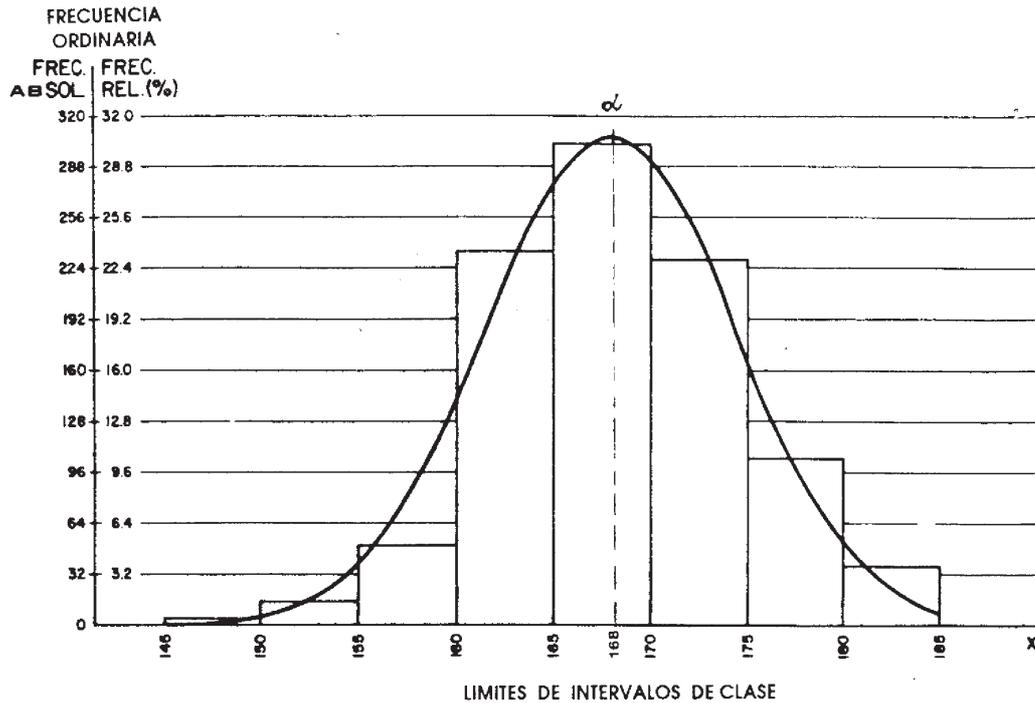


Fig. 3.10. Distribución campaniforme o gaussiana de Q

Tabla 3.8. Ajuste a una distribución normal

AJUSTE DE UNA DISTRIBUCION NORMAL A LA DE LOS CAUDALES						
$L_i$	$L_i - 168$	$t = \frac{L_i - 168}{6,36}$	P	$p_i$	$T_i$	$n_i$
150	-18	-2,817	0,002	0,002	2	3
155	-13	-2,034	0,021	0,019	19	15
160	-8	-1,252	0,105	0,084	84	50
165	-3	-0,469	0,319	0,214	214	240
170	2	0,313	0,622	0,303	303	312
175	7	1,095	0,864	0,242	242	235
180	12	1,878	0,971	0,107	107	108
"	"	"	1,000	0,029	29	37
				1,000	1,000	1,000

Las áreas bajo la curva normal se obtienen como diferencia entre los valores correspondientes de la función de distribución. A partir de estos valores tipificados se puede emplear la Tabla de la Distribución Normal, calculando mediante las oportunas interpolaciones, en su caso, los valores P, tales que:

$$P_1 = \int_{-\infty}^{-2'817} f(t) \cdot dt = 0'002 \quad ; \quad P_2 = \int_{-\infty}^{-2'034} f(t) \cdot dt = 0'021 \quad ; \text{etc.},$$

siendo:

$$t = Z = (x - \alpha) / \sigma$$

La diferencia entre dos  $P_i$  consecutivas determina las probabilidades  $p_i$  de que la variable  $Q$  tome un valor comprendido entre  $L_{i-1}$  y  $L_i$ , de tal manera que:

$$p_1 = P_1 = 0'002 \quad ; \\ p_2 = P_2 - P_1 = 0'021 - 0'002 = 0'019 \quad ; \text{etc.}$$

Las frecuencias teóricas son proporcionales a las correspondientes áreas existentes bajo la curva normal. Distribuyendo la frecuencia total,  $n = 1.000$  acequias, en nuestro caso, proporcionalmente respecto a las probabilidades  $p_i$ , se obtienen las *frecuencias teóricas*  $T_i$ , que corresponderían a los caudales observados si la variable  $Q$  se ajustara *exactamente* al modelo teórico de la distribución normal. **En nuestro ejemplo, las discrepancias entre los valores observados  $n_i$  y los teóricos  $T_i$  son lo suficientemente pequeños como para que pueda aceptarse la hipótesis de que la variable hidráulica  $Q$  sigue una distribución normal**, a pesar de la determinación que realizaremos a continuación.

En cualquier caso puede hacerse, como ya se ha apuntado, un contraste de la bondad del ajuste utilizando el estadígrafo  $\chi^2$  de Pearson, con  $(n-1)$  grados de libertad, a saber:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(n_i - T_i)^2}{T_i}$$

puesto que  $\forall T_i > 5$ , a excepción del correspondiente al primer intervalo de clase  $L_1$ , ya que  $T_1 = 2$ .

De este modo, se tendrá:

$$\chi^2 = \frac{(3-2)^2}{2} + \frac{(15-19)^2}{19} + \frac{(50-84)^2}{84} + \frac{(240-214)^2}{214} + \frac{(312-303)^2}{303} + \\ + \frac{(235-242)^2}{242} + \frac{(108-107)^2}{107} + \frac{(37-29)^2}{29} = 20'95$$

El valor de  $\chi^2$  con:  $8-1 = 7$  g.l., para una probabilidad del 5% es  $14'067 < 20'95$ , luego se rechaza la hipótesis nula y, en su consecuencia, el ajuste o asimilación a una distribución normal será sólo orientativo, pero no aceptable estrictamente.

### 6.4.2. Determinación y fiabilidad del coeficiente de correlación no lineal

Podemos, no obstante, calcular el coeficiente de determinación o crítico del ajuste anterior, a partir de la siguiente fórmula de la varianza residual:

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n} = \frac{2.044}{8} = 255'5 \quad ; \quad S_{n_i}^2 = 12.617 \quad ;$$

$$R = r^2 = 1 - \frac{S_e^2}{S_{n_i}^2} = 1 - \frac{255'5}{12.617} = 0'980 \quad ,$$

lo que implica un coeficiente de correlación de:

$$r = \pm \sqrt{0'980} = \pm \mathbf{0'990}$$

*que resulta suficientemente aceptable, razón por la que aceptaremos como válido el presente ajuste normalizado.*

Por otra parte, y por lo que se refiere a la fiabilidad del coeficiente de correlación hallado  $r$ , definimos la variable aleatoria:

$$Z = 1/2 \cdot \ln [(1+r)/(1-r)] \quad ; \quad e^{2z} = [(1+r)/(1-r)] \quad ;$$

$$\text{con: } \rho = 0'990 \text{ y } n = 8.$$

Se trata de determinar un intervalo de valores entre los que puede razonablemente esperarse (con una probabilidad del 95%) que se encuentre  $r$ , con media:

$$\mu_z = \frac{\ln \frac{1+\rho}{1-\rho}}{2} = \frac{\ln \frac{1'99}{0'01}}{2} = 2'647$$

y desviación típica:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0'447$$

El intervalo será:

$$Z = m_Z \pm 2 \cdot \sigma_Z = 2'647 \pm 0'894 = 3'541 \text{ y } 1'753 \quad ,$$

valores éstos que corresponden a:  $r_1 = 0'998$  y  $r_2 = 0'942$  .

Así pues, puede afirmarse que la probabilidad de que se cumpla la desigualdad:  $0'942 < r < 0'998$ , es del 95%.

Aunque la relación precedente simplifique, de modo notable, el problema de determinar la exactitud de  $r$  como estimador de  $\rho$ , tiene la desventaja de no ser

fiable si las dos variables analizadas no poseen una distribución normal conjunta. En su consecuencia, a menos que se esté bastante seguro de que estas variables tengan tal distribución -por lo menos con una buena aproximación- no debe confiarse grandemente en los resultados obtenidos.

## 6.5. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Un caso particular de la distribución anteriormente estudiada  $\Gamma(\alpha, a)$  se presenta cuando:  $\alpha = 1$ , circunstancia que da lugar a la denominada “distribución exponencial”, a la que también nos hemos referido con anterioridad. O sea, se tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x/\beta}}{\beta}, & \forall x > 0 \\ 0 & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

En nuestro caso, asimilamos:  $\beta = \bar{X} = 168'713$  l./seg. (media aritmética de la distribución o esperanza matemática de la misma), con lo que:

$$f(x) = \frac{1}{168'713} \cdot e^{-\frac{x}{168'713}}$$

Así pues, si se trata, por ejemplo, de saber la probabilidad de encontrar, en esta zona regable, una acequia de riego de caudal máximo inferior a 160 l./seg., el problema estriba en calcular la integral definida:

$$F(x < 160 \text{ l./seg.}) = \int_{135}^{160} \frac{e^{-\frac{x}{168'713}}}{168'713} \cdot dx = \left. \begin{matrix} t = x/168'713 \\ dx = 168'713 \cdot dt \end{matrix} \right\} =$$

(haciendo el correspondiente cambio de variable)

$$= \int_{0'80}^{0'95} e^{-t} \cdot dt = [-e^{-t}]_{0'80}^{0'95} = -e^{-0'95} + e^{-0'80} = 0'45 - 0'39 = 0'06 = 6\%$$

resultado éste que diverge algo del que se deduce de la tabla anterior, donde correspondería el 6'8%, como se puede comprobar. De hecho, la determinación del grado de exactitud del ajuste de la distribución anterior a la distribución teórica exponencial se habría de contrastar mediante un *test* de hipótesis  $\chi^2$  con (k-1) grados de libertad, siendo **k** el número de pares de clase comparados. En nuestro caso, tendríamos que:

$$e_i = \frac{e^{-\frac{x_i}{168'713}}}{168'713} \cdot n = \frac{5'93}{e^{x_i/168'713}};$$

Obviamente, el valor del estadígrafo es:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$$

que resulta ser elevado e inapropiado, habida cuenta del carácter descendente de esta distribución teórica de probabilidad, que no se corresponde con la realidad del caso práctico cuya resolución nos ocupa, con lo que, la discrepancia entre los valores teóricos (propios de la distribución exponencial) y los reales es bastante grande, y haría falta buscar una distribución mejor, circunstancia que excede las pretensiones de nuestro problema, ya que  $\chi^2_{0.95} (5 \text{ g.l.}) = 11.07$ , en el caso de escoger una región crítica del 5%.

## 6.6. CORRECCIÓN POR AGRUPAMIENTO EN "CLASES"

Veamos, por último, que por haberse realizado, en este ejemplo práctico, un agrupamiento en clases o intervalos de amplitud:  $c = 5 \text{ l./seg.}$  de los valores de la variable hidráulica analizada (caudal de las diferentes acequias que suministran agua a la zona regable), procede aplicar la corrección de Sheppard para la determinación de la desviación típica más ajustada de los datos del problema. Esto es:

$$\sigma_c^2 = \sigma^2 - \frac{c^2}{12} = 168'44^2 - 168'32^2 - \frac{5^2}{12} = 38'33 \quad (\text{varianza corregida})$$

$$\sigma_c = \sqrt{38'33} = 6'19 \text{ l./seg.} \quad (\text{desviación típica corregida}),$$

que lógicamente, resultan ser de alguna menor cuantía que en la primera determinación efectuada. Ello podría obligar a una ligera revisión de los cálculos anteriores en los que se haya hecho intervenir a la expresada medida de la dispersión espacial por la zona regable de los valores de la variable hidráulica estudiada.

## CAPÍTULO IV

### RIEGO DEFICITARIO CONTROLADO EN EL ALMENDRO

#### RESUMEN

Una línea reciente de investigación, enfocada hacia el mayor ahorro posible de agua, propugna una técnica denominada *riegos deficitarios controlados (RDC) de alta frecuencia*. Se pretende aplicar el agua con alta frecuencia pero en cantidades inferiores a la evapotranspiración máxima, y se supone que en estas condiciones las plantas experimentan unas adaptaciones que hacen que los rendimientos no disminuyan. Tradicionalmente, el almendro se ha cultivado en suelos marginales, sin riego y con muy pocas prácticas culturales. Ello puede ser así porque se trata de una especie bien adaptada en suelos pobres y a la falta de agua, y que aún así es capaz de asegurar un nivel productivo que, aunque sea mínimo, tiene pleno sentido en una economía de subsistencia, pero que llega a ser inviable en una economía plenamente competitiva. Estas características de rusticidad del almendro han hecho que se le considere como un cultivo meramente de secano, pero lo cierto es que su respuesta al riego resulta espectacular. Sin embargo, la disponibilidad de recursos hídricos para la agricultura en la zona mediterránea, como es bien sabido, es muy limitada, y con un futuro incierto por la creciente demanda de las zonas urbanas e industriales y por los ciclos de sequía recurrentes. Todo esto hace necesario poner más énfasis en la racionalización del suministro y consumo del agua de riego y en la mejora y puesta a punto de técnicas de distribución del recurso que permitan la obtención de producciones suficientemente altas con aportaciones hídricas limitadas. También se presenta la respuesta del cultivo del almendro con sistema de riego localizado subterráneo (RLS). Los datos obtenidos muestran un mayor potencial hídrico foliar, transpiración, producción y eficiencia en el uso del agua para este tipo de riego en comparación con el superficial tradicional.

# REG DEFICITARI CONTROLAT A L'AMETLLER

## RESUM

Una línia recent de recerca, enfocada cap al màxim estalvi possible d'aigua, propugna una tècnica anomenada *regs deficitaris controlats (RDC) d'alta freqüència*. Es pretén aplicar aigua amb alta freqüència però en quantitats inferiors a l'evapotranspiració màxima, i es suposa que en aquestes condicions els vegetals experimenten unes adaptacions que possibiliten que els rendiments no minven. Tradicionalment, l'ametller s'ha conreat en sòls marginals, sense reg i amb poques pràctiques culturals. Això és així perquè es tracta d'una espècie ben adaptada en sòls pobres i a la manca d'aigua i que, malgrat això, és capaç d'assegurar un nivell productiu mínim que gaudeix de sentit en una economia de subsistència, encara que esdevingui inviable en una economia competitiva. Aquestes característiques de rusticitat de l'ametller fan que se'l consideri com un conreu de secà, encara que la seva resposta al reg resulta espectacular. Tanmateix, la disponibilitat de recursos hídrics per a l'agricultura de la zona mediterrània és molt limitada i amb un futur incert per la demanda creixent de les zones urbanes i industrials i pels cicles recurrents de sequera. Tot això obliga a posar més èmfasi en la racionalització del subministrament i del consum de l'aigua de reg, així com en la millora i introducció de tècniques de distribució del recurs que permetin l'obtenció de produccions suficientment elevades amb aportacions hídriques limitades. També es presenta la resposta del conreu de l'ametller amb sistemes de reg localitzat subterrani (RLS). Els resultats obtinguts ofereixen un major potencial hídric foliar, transpiració, producció i eficiència en l'ús de l'aigua amb aquest tipus de reg que amb el sistema tradicional superficial.

# CONTROLLED-DEFICIENT IRRIGATION IN THE ALMOND TREE

## ABSTRACT / SUMMARY

A recent line of investigation, aimed at saving the maximum amount of water as possible, proposes a technical called **controlled deficient irrigation (CDI) at high frequency**. The idea is to apply water at high frequency but in quantities inferior to the evapotranspiration maximum, and it is supposed that under these circumstances plants experiment adaptations, which prevent a decrease in production. Traditionally, the almond tree has been cultivated in marginal soil, without irrigation and with very little attention. This is possible because we are dealing with a species well adapted to poor soil and lack of water, and which even under these conditions is capable of assuring a level of production which, although it is minimum, is in keeping with an economy of subsistence, but which is not acceptable in a fully competitive economy. These rustic characteristics of the almond tree have led to its being considered a product solely of dry regions, but the fact is that its reaction to irrigation is spectacular. However, the availability of water resources in the Mediterranean zone, as is well known, is very limited, and with an uncertain future because of the growing demand for water in urban areas and the recurring drought cycles. All of this makes it necessary to emphasize rationalization in the administration and consumption of water for irrigation, and in the improvement and perfection of techniques of distribution of this resource that will allow us to obtain a sufficiently high production with limited amounts of water. On the other hand, management and scheduling details for subsurface drip irrigation schemes designed to prevent emitter clogging hazards are presented. Under this irrigation system for almond, transpiration, leaf water potential, yield and water use efficiency are higher with subsurface than with traditional surface irrigation.

## 1. ANTECEDENTES

### 1.1. LA PROBLEMÁTICA SITUACIÓN ACTUAL

El constante desarrollo de las tecnologías aplicadas a la agronomía nos ha permitido, hoy en día, disponer de nuevos sistemas y métodos de riego que otorgan una mayor productividad y calidad de la cosecha, minimizando los costes de producción y aumentando la rentabilidad de las explotaciones frutales. Estos avances técnicos en la metodología del control del agua y de los nutrientes, su optimización y la implantación de nuevas variedades, unidos a la correcta aplicación de las mejores prácticas de manejo en el campo, pueden abrir nuevos horizontes en la comercialización más competitiva de los frutos secos, a un menor coste y mayor calidad, en una agricultura abierta, globalizada y sin fronteras.

La puesta en riego de los campos de almendro, a lo largo y ancho de la casi toda la geografía española, constituye un tema de rabiosa actualidad en el momento presente. Veamos, como ejemplo, que el jefe de producción vegetal de la Conselleria de Agricultura, Pesca y Alimentación de la Generalitat Valenciana en Castellón de la Plana se refirió, recientemente, a los pies o patrones investigados para soportar mejor la sequía. Pues bien, don Manuel Muncharaz matizó que “el almendro es un árbol que resiste muy bien la sequía, pero si además se le aportan recursos hídricos complementarios, el rendimiento es mucho mayor”. El pie de almendro amargo está dando paso progresivamente a un híbrido de almendro con melocotonero. Este portainjerto o patrón tiene como ejemplo el denominado “Monegro”, descubierto en Aragón, que resulta muy resistente a la sequía. Asimismo, se están investigando más pies o patrones que, en algunos casos, soportan mejor que otros la presencia de diversas enfermedades. La producción media de almendra en la citada provincia, por ejemplo, ha tenido un promedio, en los últimos años, de 20.000 toneladas en cáscara. El cultivo del almendro, localizado en las comarcas del Maestrat y Palancia, en el interior de dicha provincia levantina, se ha estabilizado gracias, entre otros factores, a las ayudas que percibe el sector de la Unión Europea a través de las Organizaciones de Productores de Frutos Secos (O.P.F.H.) y los correspondientes *Planes de Mejora de la Calidad y de la Comercialización*, cuya vigencia, por cierto, concluye en los próximos años.

El cultivo de los frutos secos, y muy particularmente del almendro, es el resultado de una actividad mantenida durante siglos en nuestro país, de manera que los árboles que los producen son parte integrante e inseparable del ecosistema, del paisaje y de la cultura de sus gentes. Además, posee una gran importancia económica y social para vastas regiones desfavorecidas del área mediterránea y del interior de la península ibérica. Alrededor de 40.000 familias viven de la actividad económica generada por el sector en toda España y más de 200.000 explotaciones se complementan con ingresos procedentes de los frutos

secos. Pero estas explotaciones pueden desaparecer a medio plazo si la Unión Europea persiste en la intención de no renovar las ayudas económicas al sector.

Al respecto, una demanda de la CCAE (Confederación de Cooperativas Agrarias de España), en la que coincide el sector, es que la ayuda comunitaria a estos productos se conceda a través de la OCM (Organización Común de Mercado) de Frutas y Hortalizas, por lo que las asociaciones y organizaciones agrarias se muestran partidarias de ir prorrogando automáticamente cada año los expresados Planes de Mejora, que han ofrecido excelentes resultados y han finalizado ya en algunos casos. Y ello hasta que se aborde la reforma en profundidad de la OCM, donde los productores solicitan disponer de un apartado específico.

Básicamente, esta situación preocupante del sector almendrero a la que nos venimos refiriendo viene determinada por las siguientes características <sup>1</sup>:

- a) La Unión Europea, que constituye el mayor mercado para las exportaciones estadounidenses de almendra y de otros frutos de cáscara, acordó en el marco de la Ronda Uruguay del GATT una reducción del 50% en la tarifa aduanera para las almendras en grano y para las nueces con cáscara, y de un 36% para las nueces peladas, las almendras tostadas y los pistachos tostados. El arancel inicial estaba situado en el 7% para las almendras en grano y en el 8% para las nueces con cáscara; en julio del año 2000, fin del periodo de reducción arancelaria pactado, alcanzaron el 3,5% (con un contingente de 90.000 toneladas al tipo del 2%, como después se verá) y el 4% respectivamente. Las almendras amargas tienen arancel nulo.
- b) El proceso de ampliación de la UE-12 a la UE-15 implicó una ampliación de 45.000 Tm. a 90.000 Tm. del contingente consolidado de las almendras con arancel reducido del 2%.
- c) Corea del Sur ha reducido sus aranceles para la almendra en cáscara de un 50% a un 21%, y de un 50% a un 30% para las nueces.
- d) Tailandia va a reducir a la mitad los aranceles para la importación de nueces y almendras tostadas. En 1996, las exportaciones californianas a Tailandia de frutos secos eran superiores en un 177% a las de 1990.
- e) Malasia también reducirá sus tarifas para las almendras, las nueces, las avellanas, las castañas y los pistachos de algo más del 5% al 0%. La tarifa para los frutos de cáscara tostados se reducirá de un 30% a un 20%. Las exportaciones de frutos de cáscara de Estados Unidos a Malasia han crecido un 311% desde el año 1990.

---

<sup>1</sup> Véase el libro *Frutos de Cáscara y Algarroba: un sector amenazado (documento de reflexión)*, editado por AEOFRUSE y CCAE. Andalucía, 1999.

- f) En 1992 la India suprimió todas las restricciones cuantitativas a la importación de la almendra. En 1997, acordó cumplir sus compromisos ante la OMC y suprimir el componente *ad valorem* en sus aranceles. En 1996, se ha convertido en el duodécimo cliente para la almendra californiana.

A la vista de lo que se nos avecina, creemos posible que la tradicional vocación exportadora del sector español de los frutos secos y la presencia en el mercado internacional de unos productos apreciados por determinadas industrias de transformación y los consumidores por sus excelentes cualidades organolépticas, claramente diferenciales, desaparecerían para siempre, de no compensarse adecuadamente los desequilibrios generados por el comercio internacional con las ayudas por unidad superficial. Es posible que el mercado mundial quedara en manos de un único proveedor (Estados Unidos, teniendo en cuenta que España es el segundo productor mundial), en una situación de monopolio fáctico, que probablemente conllevaría un incremento de los precios internacionales, como se demuestra, en el caso de la almendra, en los estudios realizados por ALSTON, J.M., SEXTON, R.J. y otros (1993), y con toda seguridad, a una mayor situación de dependencia de la Unión Europea, fuerte y crecientemente deficitaria en estos productos.

En 1989, la Comisión introdujo una serie de medidas específicas para apoyar los instrumentos de producción y comercialización en el sector. Estas medidas debían ser provisionales y limitadas a una duración de 10 años. Últimamente, la Comisión Europea ha previsto un montante máximo por hectárea de 241'5 euros, de los cuales, el 75% serán cofinanciados por la Unión Europea y el 25% restante por los Estados miembros. De este modo, la contribución de la UE se reduce del 82 al 75% y la del Estado miembro aumenta correlativamente del 18 al 25%. Se trata de la misma cantidad que, desde hace diez años están recibiendo los productores, lo que supone, sólo a causa de la inflación registrada en el período, una reducción del 50% de los ingresos por este concepto. Además, a la cifra mencionada se le deben restar las retenciones que aplican las OPFH que, en algunos casos, también han resultado abusivas.

El sector productor agrupado en CCAE cree que esta propuesta de Reglamento no termina de solucionar la difícil situación por la que atraviesa el sector. En primer lugar, en ningún momento se vincula la prórroga de los Planes de Mejora a la aprobación de un régimen de ayuda definitivo para estos productos; este punto ha sido una de las principales reivindicaciones de CCAE, ya que para la próxima campaña, se volverá a sufrir la inseguridad que se viene padeciendo durante los últimos años, al quedarse el sector nuevamente con la incertidumbre de saber si dispondrá o no de ayuda definitiva.

La contribución presupuestaria total de la UE a las medidas previstas se eleva hasta los 54'3 millones de euros. Afortunadamente, el comisario de agricultura Franz Fischler ha señalado, con respecto a la nueva propuesta de la

Comisión, que “la prórroga de un año demuestra el interés de la Comisión por el sector y pone en evidencia que es consciente del papel medioambiental, social y rural que los frutos secos desempeñan en Europa”. Añadió que, en la actualidad, se examinan todos los aspectos del sector de los frutos secos con vistas a una solución definitiva para los productores.

Con ello, da la sensación que desde Bruselas, poco a poco pero inexorablemente, se va dejando hundir al sector sin plantear una necesaria estrategia de futuro que, hoy por hoy, sólo puede llegar mediante el estudio, en profundidad, de todos los aspectos del problema. Esperemos que, desde él, se valore la conveniencia de regular las importaciones procedentes de los terceros países, de establecer una normativa que regule el mercado interior, de definir una estrategia de la calidad de estos productos y de fijar, en fin, una verdadera ayuda a la renta para los agricultores.

## **1.2. LA PUESTA EN RIEGO DEL ALMENDRO**

La puesta en marcha del riego localizado, superficial y subterráneo, está siendo la gran novedad en un cultivo tradicionalmente de secano, y, de hecho, puede considerarse que, en la actualidad, el 10 por ciento de toda la superficie de almendros existente en España ya dispone de ese sistema de riego de alta frecuencia. Los rendimientos obtenidos son significativamente superiores al sistema de riego tradicional, ya que una hectárea de cultivo puede pasar de tener una producción de 500-1.000 kilogramos a 3.000-5.000 kilogramos de almendra en cáscara. Por otra parte, el almendro, como cultivo mediterráneo, posee una buena aptitud para producir cosecha cuando es sometido a una estrategia de riego deficitario controlado (RDC), pudiendo alcanzar los 1.000-1.500 Kg. grano/ha. con dotaciones limitadas de riego (300 mm anuales) y eficiencias que se sitúan alrededor de los 2'50 m<sup>3</sup> de riego por cada kilogramo de grano. Es posible conseguir porcentajes de ahorro de alrededor del 50% con respecto a las dosis habituales que se vienen aplicando en este cultivo (500-600 mm), siempre y cuando se tenga un suelo con buena capacidad de retención del agua disponible.

La producción mundial de almendra se halla concentrada en California (alrededor del 65%) y en la cuenca mediterránea (alrededor del restante 35%). España, con más de 600.000 Has. de este cultivo y una producción próxima al 16% mundial se constituye, como ya se ha apuntado, en el segundo productor del planeta. Mientras que en California el almendro se cultiva en regadío, en la cuenca mediterránea las plantaciones son, generalmente, de secano y en zonas de pluviometría escasa. Únicamente el 7% de la superficie española cultivada de almendros se halla en regadío, pese a que, en los últimos tiempos, esta modalidad de cultivo se ha ido extendiendo significativamente. De hecho, este cultivo tiene muchas posibilidades de desarrollo con dotaciones reducidas y costosas del recurso hídrico, que suelen ser las disponibles en la mayor parte de nuestro país.

Es evidente que el riego debe aplicarse para cubrir las necesidades variables del cultivo en cada una de sus fases fisiológicas, maximizando su eficiencia, facilitando la absorción de los nutrientes y evitando las condiciones del suelo que puedan favorecer la aparición de enfermedades radiculares. Las características en el diseño del riego no son universales, ya que no existe un sistema óptimo aplicable para todas las situaciones y necesidades. Así pues, las condiciones climáticas variables, el tipo de suelo, la calidad y cantidad de agua disponible, la fuente de suministro energético, la variedad, la densidad de plantación, la edad del arbolado, etc., la mayoría de las veces son diferentes para cada situación y obligan a realizar, de hecho, una instalación a medida para cada caso. No obstante, el mejor diseño y el mejor sistema instalado no funcionarán correctamente sin un manejo adecuado. Un manejo óptimo deberá considerar los requerimientos hídricos a través de métodos predictivos, valorar el contenido de humedad del suelo y aplicar, en consecuencia, de forma eficiente, la cantidad de agua precisa que el árbol necesita.

Pues bien, teniendo en cuenta que, según los últimos datos ofrecidos por el Plan Hidrológico Nacional (PHN) y el Plan Nacional de Regadíos (PNR), el consumo de agua alcanza el 80% para usos consuntivos agrícolas y ganaderos, siguiendo las recomendaciones de la FAO esta proporción debería irse reduciendo progresivamente en los próximos años. Como consecuencia de ello, el agua debería utilizarse con la máxima racionalidad y ahorro, lo que puede llevarse a efecto mediante la aplicación de dos tipos de estrategias: la optimización del riego o el cultivo de los vegetales mejor adaptados a las condiciones edafoclimáticas de cada comarca. En la estrategia de aplicación del riego deficitario controlado (RDC), combinada con los nuevos avances en la gestión y control automatizado del riego, mediante el conocimiento de las respuestas ecofisiológicas de las diferentes variedades ante las situaciones ambientales y la utilización minuciosa de diversos sensores y/o biosensores, constatamos que diversos equipos multidisciplinares que trabajan en California y en España están dedicando importantes esfuerzos e investigaciones sobre el tema, en los últimos tiempos.

## **2. SISTEMAS DE EXPLOTACIÓN DEL ALMENDRO**

### **2.1. SISTEMAS DE PLANTACIÓN Y FORMACIÓN**

En la Fig. 4.1. se refleja esquemáticamente cuáles son los principales factores que intervienen en la elección del sistema de plantación y formación, y cómo condiciona este sistema la elección de los restantes.

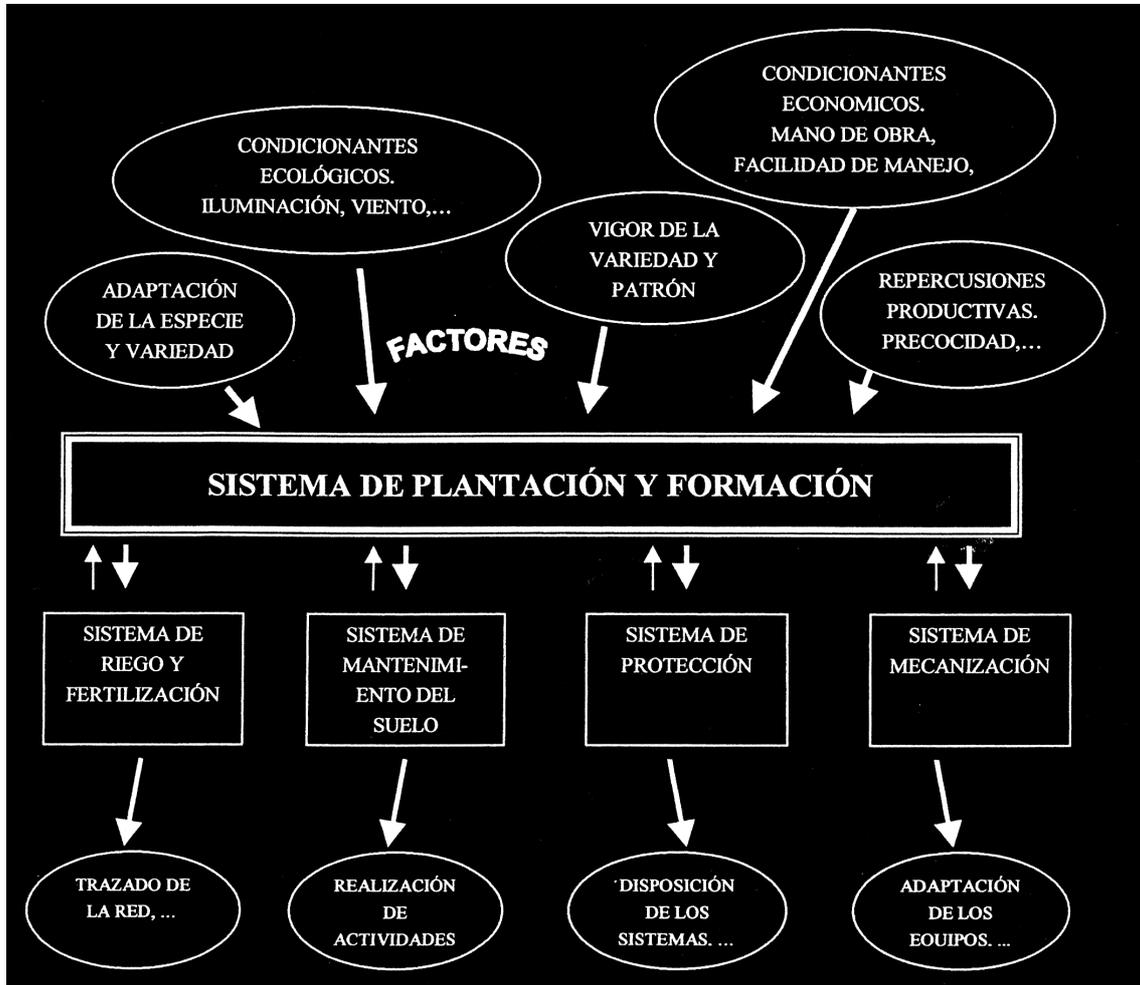


Fig. 4.1. Elección del sistema de plantación y formación. Factores que influyen en la elección e interacción con los otros sistemas tecnológicos

## 2.2. SISTEMAS DE RIEGO Y FERTILIZACIÓN

El sistema de riego y fertilización incluye las técnicas empleadas para aportar el agua y, en su caso, los fertilizantes de manera conjunta a la plantación (sistema de fertirrigación).

Las técnicas se diferencian según la forma de aportar el agua y según su necesidad de instalaciones. Se clasifican en dos grandes grupos: riego por gravedad y riego impulsado o a presión, lo que motiva que las correspondientes conducciones sean, desde el punto de vista hidráulico, de dos tipos, respectivamente: libres y forzadas.

En el riego por gravedad se diferencian las siguientes alternativas: riego “a manta” por inundación total, riego a fajas o eras y riego a surcos. A su vez, en el riego impulsado se diferencian dos tipos: riego por aspersión, con las alternativas de aspersión fija y móvil; y riego localizado, con las alternativas de microaspersión, goteo y exudación (o riego subterráneo, al que haremos una mención específica, por cierto, al final del presente capítulo).

Los principales factores que intervienen en la elección del sistema de riego más apropiado para una explotación determinada son: la necesidad de aporte de agua a la plantación, los condicionantes del terreno, la disponibilidad de agua y sus características, los requerimientos de mano de obra y el coste de las instalaciones electromecánicas.

La interacción de este sistema con los restantes condicionará, por ejemplo, las longitudes y separación de las filas de los árboles (marco de plantación), las actividades de mantenimiento del suelo, la posibilidad de protección con riego antiheladas, la accesibilidad a las parcelas, etc.

En la Fig. 4.2. se refleja, esquemáticamente, cuáles son los principales factores que intervienen en la elección del sistema de riego y fertilización, y cómo condiciona este sistema la elección de los restantes.

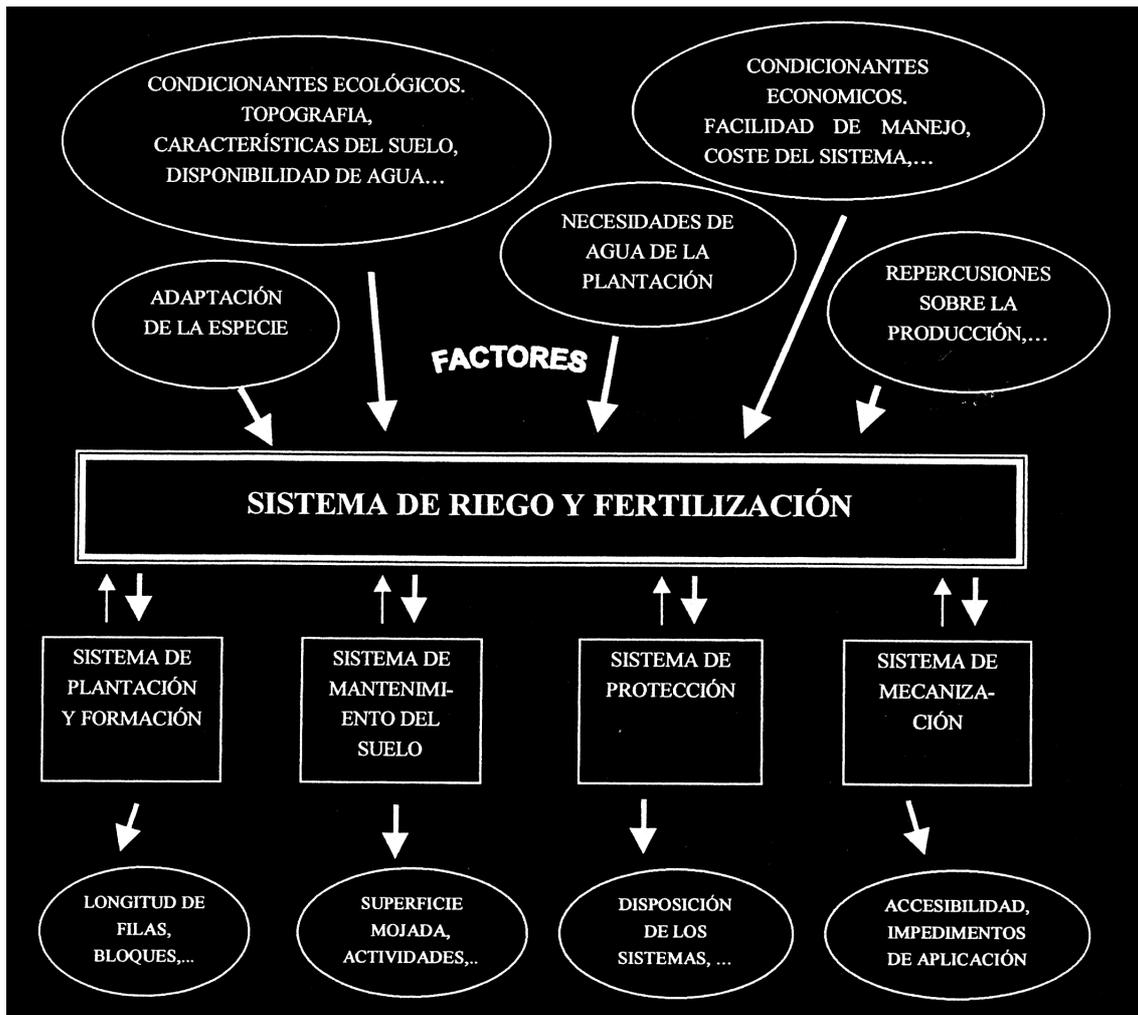


Fig. 4.2. Elección del sistema de riego y fertilización. Factores que influyen en la elección e interacción con los otros sistemas tecnológicos

### 2.3. SISTEMAS DE MANTENIMIENTO DEL SUELO

El sistema de mantenimiento del suelo incluye las diferentes técnicas y actividades que se aplican en la plantación para controlar las malas hierbas, y en algunos casos para satisfacer otros objetivos secundarios, como, por ejemplo, mejorar la accesibilidad de la maquinaria o bien disminuir la erosión eólica e hidráulica.

Las alternativas que se presentan son muy variadas, según se mantenga el suelo sin vegetación, con vegetación o con sistema mixto. El suelo sin vegetación puede mantenerse mediante operaciones clásicas de laboreo, con herbicidas o bien con cubiertas inertes (“mulching”). Normalmente, se emplean sistemas mixtos. En general, este sistema está supeditado a la elección de las otras técnicas utilizadas.

Los factores que condicionan la elección son principalmente de tipo ecológico (las características del suelo, la pendiente del terreno, las malas

hierbas, etc.), además de la adecuación de las especies implantadas a la aplicación del sistema, y otros aspectos de manejo y económicos.

En la figura 4.3. se reflejan, esquemáticamente, los factores más influyentes en la elección del sistema de mantenimiento del suelo, y la posible interacción que mantiene con los otros sistemas.

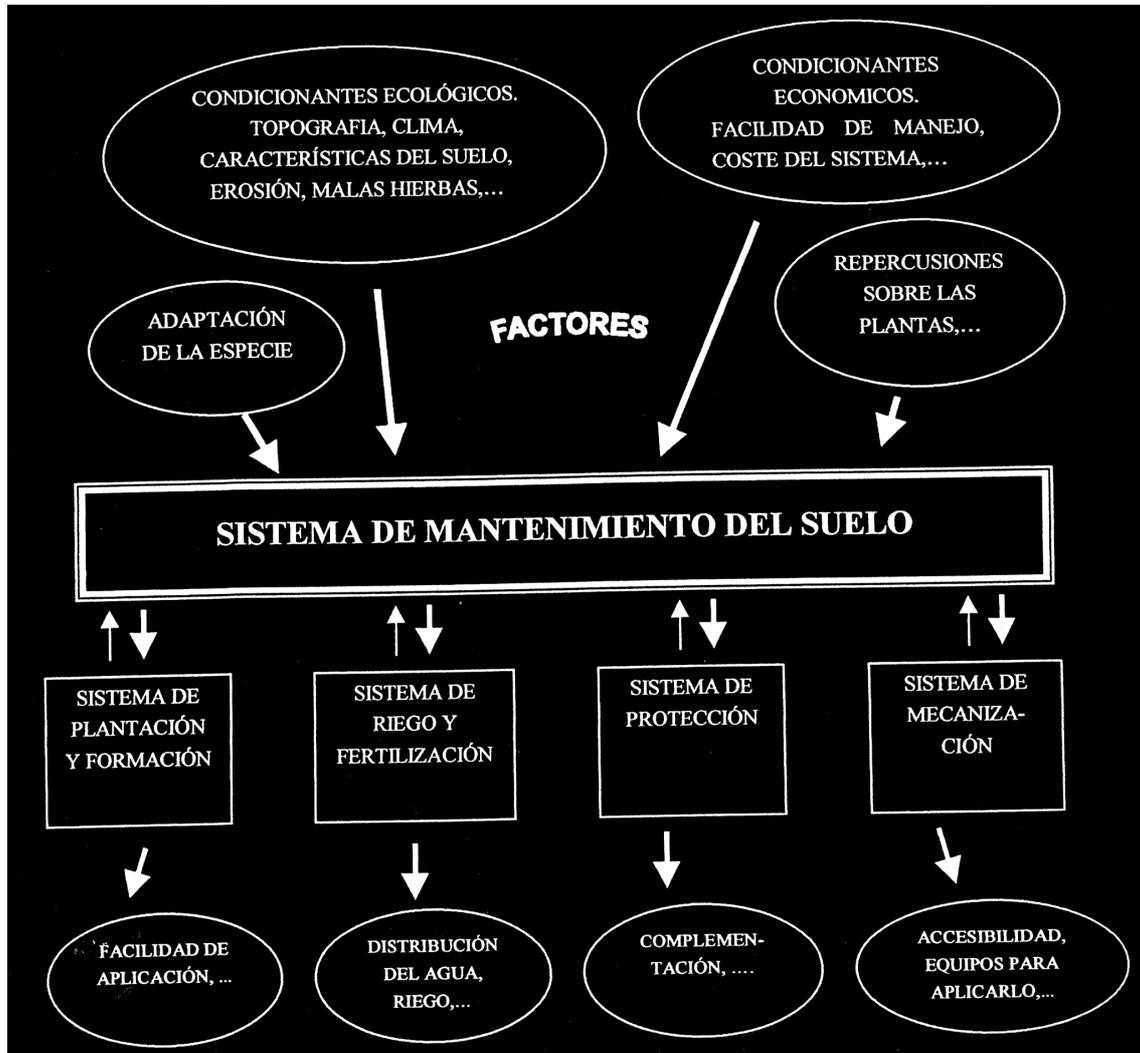


Fig. 4.3. Factores que más influyen en la elección del sistema de mantenimiento del suelo y la interacción con los demás sistemas

## 2.4. SISTEMAS DE PROTECCIÓN

El sistema de protección comprende las diferentes técnicas para proteger la plantación de la acción perjudicial de factores del medio ecológico para modificar o eliminar los efectos de los factores adversos.

El sistema de protección se divide en varios subsistemas según los factores sobre los que actúa, como la protección de heladas, viento y granizo, aunque también pueden incluirse otras protecciones específicas sobre plagas o sobre factores concretos que resulten estratégicos para la plantación.

En cada tipo de protección se presentan varias alternativas. Por ejemplo, en la protección antiheladas: el riego por aspersión, las torres de ventilación o la instalación de estufas. En la protección contra el viento: la instalación de cortavientos inertes o la plantación de setos con árboles y arbustos. En la protección antigranizo: la instalación de redes o las actuaciones sobre las nubes de tormenta (lo que no implicará sólo a la explotación proyectada).

La adopción o no de una determinada protección estará muy ligada al riesgo que se corre en la explotación y al coste del sistema. Los factores que influyen en la elección, en cada caso, son principalmente del tipo económico en relación con el grado de protección lograda, además de aspectos de manejo y de adaptación de las especies implantadas.

En la figura 4.4. se reflejan, esquemáticamente, como se ha hecho en los apartados anteriores, los factores más influyentes en la elección y la posible interacción del sistema de protección con los otros sistemas.

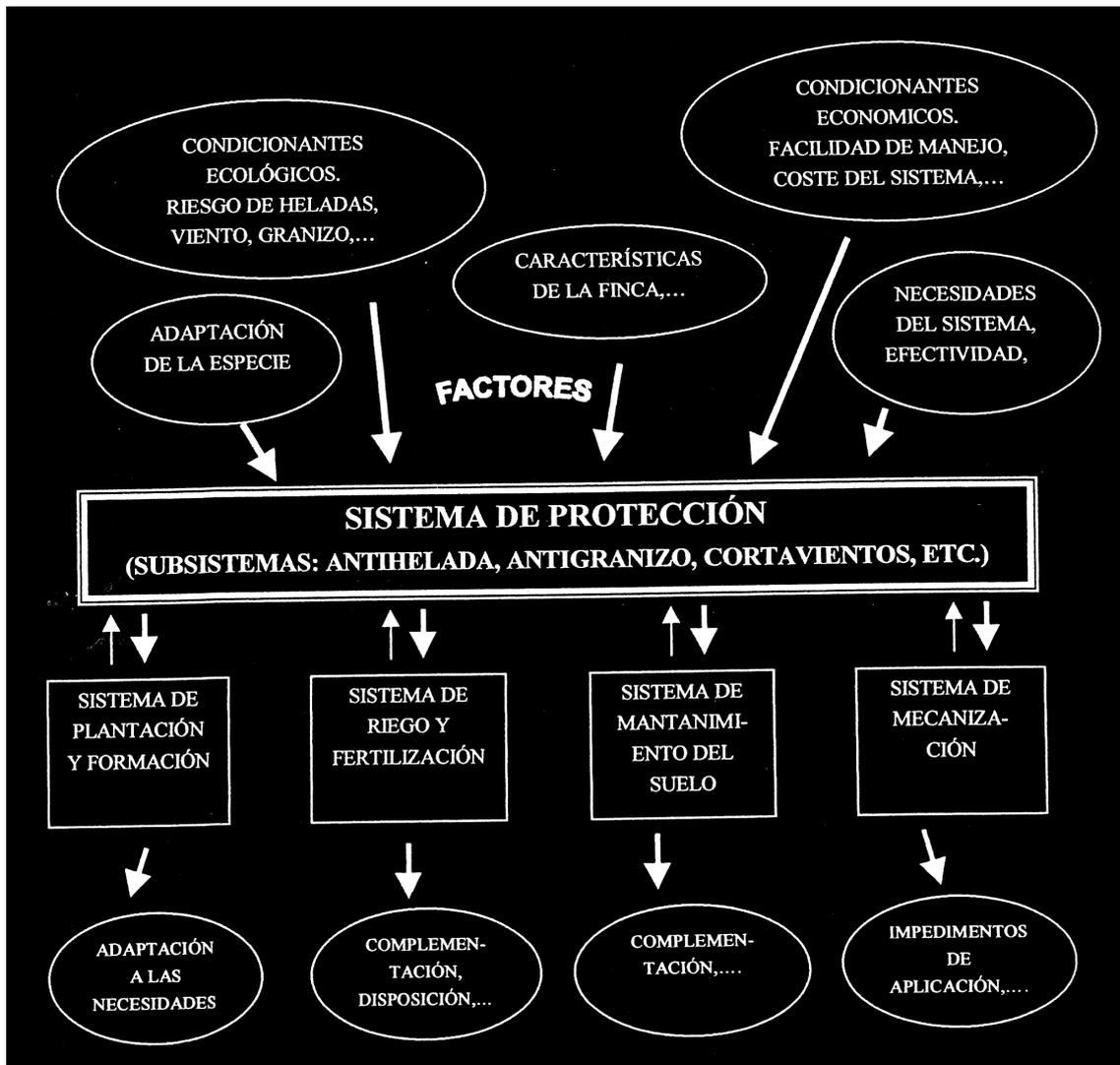


Fig. 4.4. Elección del sistema de protección. Factores que influyen en la elección e interacción con los otros sistemas tecnológicos

## 2.5. SISTEMA DE MECANIZACIÓN

El sistema de mecanización se concibe, más que como un sistema tecnológico propio, como diferentes niveles o grados de mecanización por los que se puede optar en la explotación para mecanizar las actividades de mayor incidencia, como son la poda y la recolección, para la mayoría de las explotaciones.

En cada caso se establecen alternativas que marcan diferencias apreciables en su ejecución, como: manual, semimecanizada o totalmente mecanizada.

Lógicamente, el sistema de mecanización estará previamente condicionado por la adaptación de las especies y variedades a las intervenciones requeridas, así como por la existencia de equipos específicos para realizar las actividades de forma mecánica.

Otros factores que condicionan la elección serán los de tipo económico, de disponibilidad de mano de obra o de estructura de la explotación.

Igualmente, el sistema de mecanización estará condicionado, de forma integrada, por el resto de la tecnología de producción de la explotación, y origina ciertas exigencias a los otros sistemas debido a las necesidades de su aplicación.

En la figura 4.5. se reflejan los principales factores que influyen en la elección, y las interacciones con los otros sistemas tecnológicos.

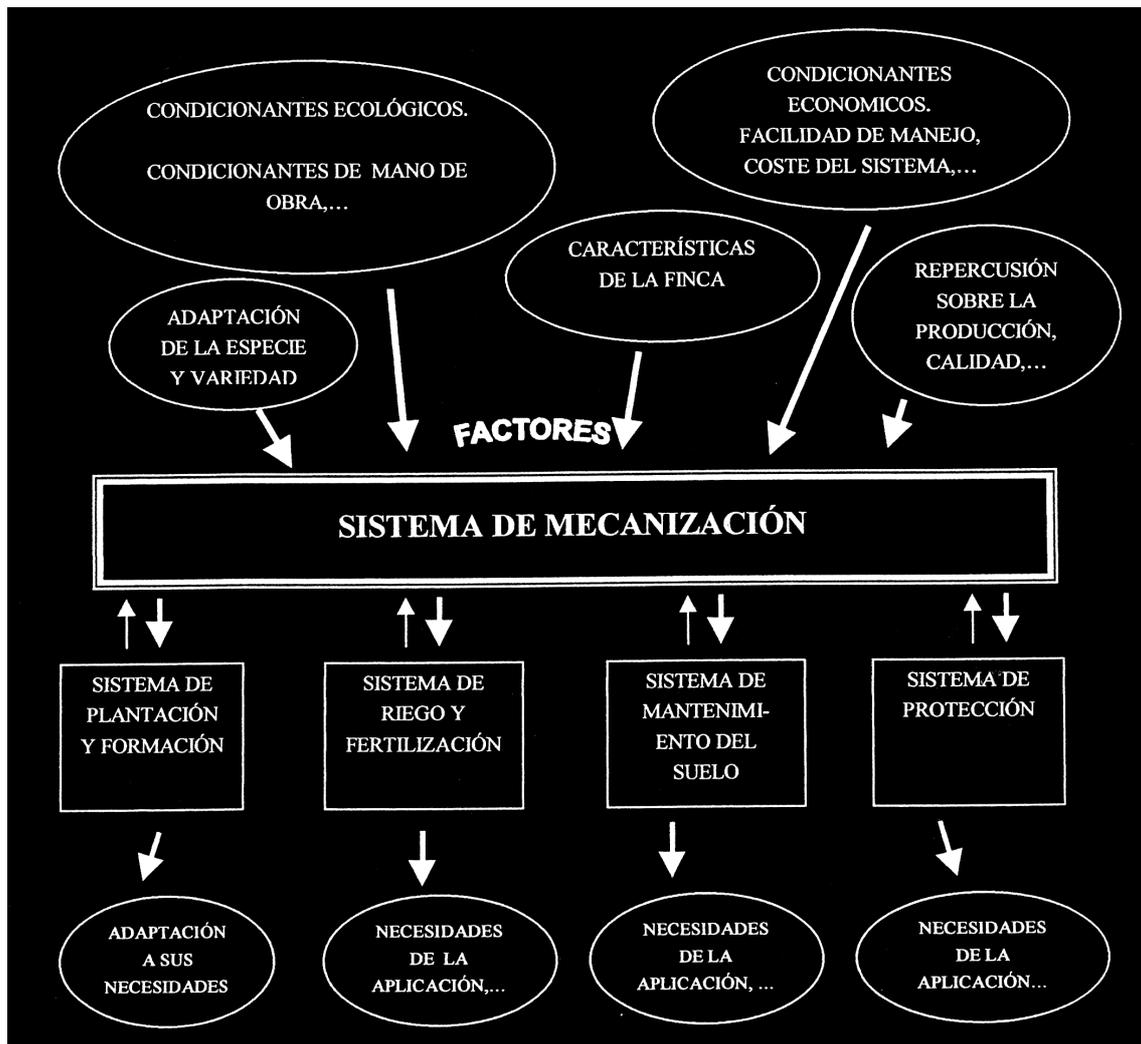


Fig. 4.5. Elección del sistema de mecanización. Factores que influyen en la elección e interacción con los otros sistemas tecnológicos

## 2.6. INTERACCIÓN ENTRE LOS SISTEMAS ANTERIORES

Por último, veamos que la interacción existente entre los sistemas tecnológicos básicos de producción del almendro que hemos definido con anterioridad, puede verse en el siguiente esquema:



Fig. 4.6. Interacción entre los sistemas tecnológicos básicos de producción

### **3. VOLUMEN DE AGUA DE RIEGO Y NECESIDADES HÍDRICAS**

#### **3.1. CONCEPTOS PREVIOS**

Hasta hace unos cuantos años nadie creía concienzudamente que el agua potable llegaría a ser un grave problema para la humanidad. Sin embargo, hoy en día la escasez del agua constituye un problema de primer orden para el 25% de la población mundial; es decir, de las casi 5.300 millones de personas que habitan la Tierra, 1.300 millones no tienen siquiera el agua potable asegurada. Hay quien se ha atrevido, incluso, a vaticinar que las más devastadoras guerras en el siglo XXI tendrán lugar como consecuencia de la disputa por el preciado líquido elemento.

Esta situación, no obstante, se ha producido a causa de una compleja serie de factores, de entre los cuales cabe destacar: la demanda de agua exigida para la agricultura, la industria y el consumo doméstico; sus usos lúdicos y las necesidades ecológicas; la contaminación de los escasos recursos hídricos; la desertización, y, en última instancia, los cambios climáticos.

La agricultura, concretamente, será un factor clave en el futuro. Se prevé que en el año 2025 los agricultores habrán de producir alimentos para abastecer a 8.000 millones de personas. Actualmente, el 11% de la superficie terrestre se dedica al cultivo agrícola, si bien se calcula que aún se podría cultivar el doble de extensión. El agua es y seguirá siendo indispensable para incrementar la producción, pero para poder hacerlo se ha de reducir sensiblemente en cantidad el agua de riego que se malgasta, que representa un aproximadamente un 60% del total. Además, la agricultura convencional utiliza abonos químicos, pesticidas diversos (fungicidas, insecticidas, nematocidas, acaricidas, herbicidas) compuestos de nitratos y fosfatos, que envenenan el agua y degradan el suelo continuamente.

Como es bien sabido, la franja mediterránea ha estado calificada como zona de alto riesgo de desertización a causa de los incendios que la devastan cada verano. El fuego destruye la capa vegetal, de tal manera que se pierde la generación de materia orgánica (con sus correspondientes ácidos húmicos y fúlvicos) y la consecuente capacidad de absorber el agua de la lluvia. Paralelamente, la erosión hidráulica arrastra la tierra vegetal de los horizontes superiores o superficiales, que es, por cierto, la que reúne mejores condiciones edafológicas para el cultivo, con lo cual se desertiza el terreno. Se calcula que cada año, sólo por este motivo, una superficie de tierra equivalente a la extensión de la nación hermana de Portugal deja de ser productiva.

Pues bien, en el supuesto (que, en todo caso, está científicamente por corroborar) de que las temperaturas llegasen a aumentar un promedio de uno o dos grados centígrados y las precipitaciones acuosas disminuyesen correlativamente entre un 10% y un 20%, los recursos hídricos se pueden reducir entre un 40% y un 70%. Es previsible, en síntesis, que si no modificamos la

situación actual, el año 2002 (primer horizonte del Plan Hidrológico Nacional) muchos países tendrán la mitad de los recursos de agua por cápita que tenían el 1975, con los gravísimos problemas de todo tipo que tal circunstancia comportaría.

Como ya hemos apuntado con anterioridad, el agua, cada vez más, es un bien caro y escaso que hay que racionalizar en su aplicación y consumo, además de la consideración del costo que supone su movimiento. Este principio se enunció ya en la Ley de Aguas de 1985 y en sus disposiciones complementarias, así como en los estudios previos conducentes a la elaboración de los diferentes Planes Hidrológicos de Cuenca (PHC), del Plan Hidrológico Nacional (PHN) y del Plan Nacional de Regadíos (PNR). También se halla consagrado en el Real Decreto Legislativo 1/2001, de 20 de julio, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Aguas (BOE n°: 176, de 24/07/2001). **Por ello, se debe ser lo más exacto posible en el cálculo de los volúmenes a aportar, para alcanzar la mayor eficacia de riego con la menor cantidad de agua posible y al menor costo (eficiencia).** Esto se consigue aportando solamente las cantidades necesarias para obtener una humedad adecuada en el suelo, durante el tiempo que sea necesario.

Debe tenerse en cuenta que sólo una pequeña parte del agua absorbida por el almendro llega a formar parte de su composición; la mayor parte se mueve internamente siendo evaporada a través de los estomas, mediante el conocido proceso de **transpiración**.

En los sistemas de riego no localizados (inundación y aspersión), hay que considerar también el proceso de **evaporación** del agua desde la superficie del suelo, además de las eventuales pérdidas por gravedad o percolación a las capas profundas del subsuelo, que deben ser las mínimas posibles. No hay que olvidar que en muchas zonas del área mediterránea aún predomina el riego por inundación, con amplios turnos de aplicación que generan elevadas pérdidas de agua por infiltración en las acequias a cielo abierto, importante evaporación en sus amplios bancales de riego así como escorrentía superficial (lixiviación de nutrientes y erosión hidráulica) y pérdidas subsuperficiales por percolación profunda en el subsuelo.

Sumando los dos conceptos anteriormente expresados llegamos al de **EVAPOTRANSPIRACIÓN**, que dependerá de las condiciones edafoclimáticas, atmosféricas y geográficas de la zona regable. Este dato nos resultará válido para determinar, lo más aproximadamente posible, las necesidades hídricas de la plantación de este apreciado fruto seco.

La evapotranspiración puede ser determinada directamente con evapotranspirímetros, pero estos aparatos son costosos y difíciles de manejar, por lo que siguen siendo útiles las fórmulas empíricas tradicionales que proporcionan los métodos de Blaney-Criddle, Penman, Turc, Thornthwaite,

radiación y evaporímetros, que son los recomendados por la F.A.O. En este sentido, posteriormente se verá el cálculo aproximativo realizado para el caso concreto que nos ocupa.

### 3.2. LAS NECESIDADES DE AGUA

La determinación de las necesidades de agua de los cultivos constituye el paso previo para establecer los volúmenes de agua que será necesario aportar con el riego. Teniendo en cuenta que en los últimos años se ha presentado la necesidad imperiosa de extender los regadíos en la mayor parte de las zonas áridas y semiáridas del mundo, son numerosísimas las investigaciones que se están realizando para determinar con la mayor precisión posible estas necesidades.<sup>2</sup>

En este sentido, podemos señalar que las investigaciones y ensayos se dirigen en dos sentidos:

Predeterminación de necesidades a partir de fórmulas empíricas. }  
Determinación de necesidades a partir de mediciones directas. }

Entre los métodos investigados para predeterminar estas necesidades, quizás sean los más utilizados los que se basan en la evapotranspiración. El concepto de evapotranspiración como suma de la transpiración de la planta y de la evaporación en suelo y planta, ha dado lugar a numerosas fórmulas de uso frecuente -a las que ya hemos hecho mención- ante las dificultades que plantean las determinaciones directas.

La diversidad de criterios empleados en la determinación de la evapotranspiración por diversos autores, obliga a conocer los fundamentos de los cálculos utilizados en cada caso para que, de esta manera, al aplicar estas fórmulas en diferentes condiciones de medio y cultivo, se haga con la máxima precisión posible.

La adaptación de las fórmulas de evapotranspiración para su uso en la determinación de las necesidades de agua de las cosechas y, posteriormente, su aplicación al riego obliga a establecer las tres etapas siguientes:

- Determinación de la evapotranspiración de un cultivo de referencia  
( $ET_0$ ):

---

<sup>2</sup> Vide P. URBANO. *Tratado de Fitotecnia General*, citado en la bibliografía.

Habitualmente, a partir de datos meteorológicos y mediante fórmulas empíricas, se determina ésta, que Doorenbos y Pruitt (1986) definen como “*la tasa de evapotranspiración de una superficie extensa de gramíneas verdes (césped) de 8 a 15 cm. de altura, uniforme, de crecimiento activo, que sombrean totalmente el suelo y que no escasean de agua*”.

El método de cálculo a utilizar vendrá determinado por los datos de clima y suelo disponibles de la zona y por las condiciones particulares de uso de las fórmulas, ya que unas proporcionan mayor exactitud que otras, según las circunstancias.

- Determinación de la evapotranspiración de cada especie cultivada ( $ET_c$ ):

Esta se determina mediante el empleo de coeficientes de cultivo ( $K_c$ ) que corresponden a la relación entre la evaporación del cultivo de referencia ( $ET_0$ ) y “*la de una determinada especie cultivada, exenta de enfermedades, que crece en un campo extenso, en condiciones óptimas de suelo, en el que se ha llegado a un potencial de máxima producción*” (Doorenbos y Pruitt, 1986).

- Determinación de las necesidades de agua de los cultivos en cada caso particular:

Los valores de la  $ET_c$  pueden variar y, en consecuencia, deben adaptarse a las distintas situaciones que tengan en cuenta la variación de las condiciones climáticas, de suelos, prácticas de cultivo, variedades cultivadas, ciclos de cultivo, métodos de riego y, finalmente, el nivel de rendimiento de las cosechas.

Las características texturales, estructurales, edafológicas, de drenaje, topográficas, etc. del suelo poseen una influencia substancial en el manejo y en el diseño del sistema de riego. El suelo, a su vez, define la capacidad de reserva y cesión del agua de riego hacia el árbol. Debe tenerse en cuenta que 1 kg. de materia puede precisar hasta 600 litros de agua y las dotaciones, con frecuencia, se desvían ampliamente de las necesidades reales del almendro.

A continuación, se describen los métodos más utilizados en nuestro país, indicando los fundamentos científicos de cada uno, los datos necesarios para su empleo y las indicaciones de uso más recomendables.

### **3.3. FÓRMULAS EMPÍRICAS**

### 3.3.1. Método de Thornthwaite (1948-1955)

Desarrollado básicamente en los EE.UU., propone la determinación de necesidades de agua mediante el uso de la *evapotranspiración potencial* (ETP), definida como la “*cantidad de agua que perderá una superficie completamente cubierta de vegetación en crecimiento activo si en todo momento existe en el suelo humedad suficiente para su uso máximo por las plantas*”.

Los datos meteorológicos a utilizar en el cálculo de la ETP son temperaturas e iluminación. En primer lugar, a partir de las temperaturas mensuales, se determina la denominada *evapotranspiración sin ajustar* (*e*), que corresponde a valores calculados para meses ficticios de 30 días y 12 horas de insolación diaria. Se calcula el valor de “*e*” mediante la fórmula:

$$e = 1'6 \left( \frac{10 \times t}{I} \right)^a$$

Siendo: *t*: temperatura mensual.

*I*: índice térmico de la zona.

$$a = 0,675 \cdot I^3 \cdot 10^{-6} - 0,771 \cdot I^2 \cdot 10^{-4} + 0,01792 \cdot I + 0,49239$$

El *índice térmico* de la zona (*I*) es un valor anual que se obtiene mediante la suma de los doce *índices de calor* (*i*) correspondientes a cada uno de los meses del año, calculados por la expresión:

$$i = \left( \frac{t}{5} \right)^{1,514}, \quad I = \sum_1^{12} i$$

Conocidos los valores de *t* e *I*, se puede calcular en la fórmula de Thornthwaite la *evapotranspiración sin ajustar* (*e*).

La obtención de la *evapotranspiración ajustada* o *evapotranspiración potencial* (ETP) se realizará multiplicando los valores (*e*) por un cierto coeficiente de corrección que tenga en cuenta la duración de la iluminación diaria y los días del mes.

La ETP calculada por este método es independiente del tipo de vegetación que ocupa el suelo, siendo, hasta cierto punto, constante y no dependiendo más que de factores climáticos. En este sentido, debería existir compensación entre los procesos de evaporación y transpiración, de forma que cuando el suelo está poblado por una vegetación muy desarrollada, con una gran superficie transpirante, la evaporación es mínima, mientras que en los suelos con escasa vegetación la transpiración desciende, pero la evaporación es más alta.

### 3.3.2. Método de Turc (1955)

Este autor propone un método de cálculo en el que, además de los factores climáticos clásicos: temperatura, precipitación y radiación, considera también factores de suelo y de cultivo. Se calculan los valores de la evapotranspiración a partir de las mediciones realizadas en lisímetros, mediante la fórmula:

$$E = \frac{P + a + V}{\sqrt{1 + \left( \frac{P + a}{L} + \frac{V}{2L} \right)^2}}$$

Siendo: E: evapotranspiración en mm., durante 10 días.

P: precipitación en mm., durante 10 días.

a: altura de agua del suelo que puede evaporarse en 10 días a expensas de las reservas.

V: humedad adicional disponible para la transpiración.

L: poder evaporante de la atmósfera, que es función de la temperatura y de la radiación solar.

El factor V depende de la materia seca producida, período de crecimiento y de un coeficiente de cosecha que expresa la capacidad de transpiración de un cultivo en relación con el trigo.

### 3.3.3. Método de Penman (1948-1956)

La ecuación original de Penman calculaba las pérdidas de agua por evaporación ( $E_0$ ) en una superficie libre de agua. Mediante la utilización de unos coeficientes experimentales que iban desde 0'6, en los meses de invierno, a 0'8 en los de verano, se podía determinar la evapotranspiración ( $ET_0$ ) en los diferentes campos de cultivo.

La revisión de la FAO (1976) a la fórmula original de Penman recomienda utilizar, para el cálculo de la evapotranspiración, la siguiente expresión:

$$ET_0 = c [w R_n + (1 - w) f(u) (e_a - e_d)]$$

Siendo:  $ET_0$ : evapotranspiración del cultivo de referencia en mm./día.

c: factor de corrección.

w: factor de ponderación para los efectos de la radiación. Se determina en función de las temperaturas y de la altitud de la zona.

$R_n$ : radiación neta.

f(u): función del viento. Se determina mediante la fórmula:

$$f(u) = 0,27 \left( 1 + \frac{u^2}{100} \right)$$

$u_2$ : velocidad del viento expresada en km./día, medida a una altura de 2 m. sobre el nivel del suelo. Si se mide a otras alturas, deberá utilizarse un coeficiente de corrección.

$e_a - e_d$ : déficit de presión de vapor.

La ecuación de Penman, revisada por la FAO, contiene dos términos: el primero, de *energía*, que es función de la radiación, y el segundo, *aerodinámico*, que depende de la velocidad del viento y de la humedad relativa de la atmósfera. En condiciones meteorológicas de calma, el segundo término es poco significativo, mientras que en las regiones muy secas, con fuerte déficit de tensión de vapor, o en las sometidas a vientos fuertes y secos, este término alcanza una gran significación.

Este método es probablemente el más exacto de todos los que utilizan fórmulas empíricas para calcular la evapotranspiración, pero tiene el inconveniente de requerir datos meteorológicos de los que no se dispone en muchas estaciones y, además, de resultar muy laborioso para su cálculo.

### 3.3.4. Método de Blaney y Criddle (1950-1964)

Las fórmulas de Blaney y Criddle son de uso muy frecuente, pues utilizan pocos datos meteorológicos y ofrecen, en cambio, buena precisión en las condiciones de clima árido. A partir de valores de iluminación ( $p$ ) y temperatura ( $t$ ), calculan la evapotranspiración de referencia ( $ET_0$ ), mediante la expresión:

$$ET_0 = K \frac{p \cdot t}{100}$$

La utilización del coeficiente  $K$  y la transformación de unidades -en la forma original se expresa la temperatura en grados Fahrenheit y la  $ET_0$  en pulgadas- permite determinar la  $ET_0$  en mm, a partir de temperaturas expresadas en grados centígrados, mediante la fórmula:

$$ET_0 = \frac{p}{\sum p} (45,72t + 812,8)$$

El método propone la utilización de *coeficientes de consumo* para cada cultivo *constant*, para utilizarlos durante todo el ciclo vegetativo, y *variables*, para usarlos por meses, según la curva de vegetación. Multiplicando la evapotranspiración de referencia ( $ET_0$ ) por el coeficiente de consumo ( $K_c$ ), se obtiene la evapotranspiración del cultivo ( $ET_c$ ), que equivale al consumo de agua por evaporación y transpiración durante el cultivo. O sea:

$$ET_c = K_c \cdot ET_0$$

Los valores más bajos de ( $K_c$ ) corresponden a regiones costeras y los más altos a regiones de clima árido.

Más recientemente, Doorenbos y Pruitt (1986) sugieren una adaptación del método original de Blaney–Criddle para calcular las  $ET_0$  y  $ET_c$ . Para ello, denominan *factor de uso consuntivo* ( $f$ ), a la expresión:

$$f = p (0,46 \cdot t + 8,13)$$

que da  $f$  en mm/día, siendo  $p$  el porcentaje de horas diurnas durante el período considerado y  $t$  la temperatura, expresada en °C. La tabla siguiente permite la obtención, para los diferentes meses del año, del valor de  $p$  según la latitud del lugar. A saber:

Tabla 4.1. Porcentaje medio diario de horas de iluminación ( $p$ ) según la latitud

Lat. Norte Lat. Sur	En. Jul.	Feb. Ag.	Mar. Sept.	Abr. Oct.	Mayo Nov.	Jun. Dic.	Jul. En.	Ag. Feb.	Sept. Mar.	Oct. Abr.	Nov. Mayo	Dic. Jun.
60°	.15	.20	.26	.32	.38	.41	.40	.34	.28	.22	.17	.13
58°	.16	.21	.26	.32	.37	.40	.39	.34	.28	.23	.18	.15
56°	.17	.21	.26	.32	.36	.39	.38	.33	.28	.23	.18	.16
54°	.18	.22	.26	.31	.36	.38	.37	.33	.28	.23	.19	.17
52°	.19	.22	.27	.31	.35	.37	.36	.33	.28	.24	.20	.17
50°	.19	.23	.27	.31	.34	.36	.35	.32	.28	.24	.20	.18
48°	.20	.23	.27	.31	.34	.36	.35	.32	.28	.24	.21	.19
46°	.20	.23	.27	.30	.34	.35	.34	.32	.28	.24	.21	.20
44°	.21	.24	.27	.30	.33	.35	.34	.31	.28	.25	.22	.20
42°	.21	.24	.27	.30	.33	.34	.33	.31	.28	.25	.22	.21
40°	.22	.24	.27	.30	.32	.34	.33	.31	.28	.25	.22	.21
35°	.23	.25	.27	.29	.31	.32	.32	.30	.28	.25	.23	.22
30°	.24	.25	.27	.29	.31	.32	.31*	.30	.28	.26	.24	.23
25°	.24	.26	.27	.29	.30	.31	.31	.29	.28	.26	.25	.24
20°	.25	.26	.27	.28	.29	.30	.30	.29	.28	.26	.25	.25
15°	.26	.26	.27	.28	.29	.29	.29	.28	.28	.27	.26	.25
10°	.26	.27	.27	.28	.28	.29	.29	.28	.28	.27	.26	.26
5°	.27	.27	.27	.28	.28	.28	.28	.28	.28	.27	.27	.27
0°	.27	.27	.27	.27	.27	.27	.27	.27	.27	.27	.27	.27

El consumo de agua no solamente depende del cultivo sino, también, de los restantes factores climáticos no considerados en la fórmula original. Se establecen en esta adaptación, unas relaciones entre el factor  $f$  de Blaney-Criddle y la  $ET_0$  teniendo en cuenta los niveles generales de humedad, insolación y viento.

Las  $ET_c$  calculadas en esta adaptación, representan las necesidades de consumo de los cultivos, definidas como *la cantidad de agua potencialmente necesaria para satisfacer las necesidades de evapotranspiración de los cultivos, de modo que la producción vegetal no quede limitada por la falta de agua.*

### 3.3.5. Método mixto de Thornthwaite y Blaney-Criddle

En España, el prestigioso *Centro de Estudios Hidrográficos* (1964) recomendó utilizar un método mixto considerando los resultados obtenidos en los cálculos realizados según los métodos de Thornthwaite y Blaney-Criddle, respectivamente.

En los meses del año en que las necesidades de agua calculadas según Thornthwaite sean mayores que las determinadas según Blaney-Criddle, se tomará la media de ambas. En los restantes, se toman directamente las de Blaney-Criddle.

Se adopta este criterio por considerar que es más exacto el método de cálculo según la metodología de Blaney-Criddle, pero se tomó el de Thornthwaite como margen de seguridad, ya que, por no tener éste en cuenta el cultivo, suele dar necesidades mayores.

### **3.4. MEDICIÓN DIRECTA: MÉTODO DE LA CUBETA EVAPORIMÉTRICA**

En algunas regiones de nuestro país existe una amplia red de estaciones de registro automático de datos agroclimáticos con los que poder caracterizar el clima de las distintas zonas y realizar el cálculo de la evapotranspiración de referencia ( $ET_0$ ) que resulta básica para la determinación de las necesidades de agua del cultivo y, consecuentemente, de la dotación de riego. En ellas se registran, normalmente cada 30 minutos, los datos medios de los siguientes parámetros:

- Temperatura del aire.
- Humedad relativa del aire.
- Velocidad del viento.
- Dirección del viento.
- Radiación solar.
- Precipitación.

Diariamente se realiza la recarga, vía telefónica, de los datos almacenados, que posteriormente son procesados para el cálculo de la evapotranspiración de referencia por los métodos de Penman, Monteith, Radiación y Hargreaves. También se integran en la misma una red de tanques de evaporación de clase A (a los que nos referiremos con posterioridad) que permiten completar los datos para el cálculo de las dotaciones de riego.

En los métodos basados en evaporímetros de cubeta se determina la evapotranspiración de referencia ( $ET_0$ ) a partir de las medidas correspondientes a evaporación en lámina libre de agua ( $E_p$ ) multiplicados por un coeficiente, denominado “coeficiente de cubeta” ( $K_p$ ), que depende de las características y posición de la propia cubeta. Así:

$$ET_0 = K_p \cdot E_p$$

La evaporación en la cubeta se mide mediante un tornillo micrométrico alojado en un cilindro metálico que se enrasa con la lámina libre de agua. Las lecturas se hacen diariamente y la diferencia entre las lecturas es la cantidad de agua evaporada en un día. Es conveniente hacer las lecturas a la misma hora del día y, preferiblemente, en las primeras de la mañana. Será necesario reponer, periódicamente, el agua que se va perdiendo por evaporación.

Los valores de  $K_p$  dependen del tipo de cubeta utilizada en las mediciones. Las cubetas evaporimétricas permiten medir los efectos integrados de la radiación, temperatura, viento y humedad relativa de la atmósfera sobre la evaporación en superficie libre de agua. Las principales diferencias que se presentan entre la medición utilizada en la cubeta y la evapotranspiración real de un suelo cultivado son las siguientes:

- La capacidad de reflexión de la radiación incidente en la superficie del agua es sólo del 5-8%, mientras que en los suelos cultivados llega a ser del 20-25%.
- Debido al almacenamiento diurno de calor, la cubeta puede seguir evaporando agua durante la noche, especialmente en condiciones de baja humedad relativa del aire. Sin embargo, la planta cierra sus estomas durante la noche y la transpiración nocturna resulta muy reducida.
- Tanto en las cubetas enterradas como en las elevadas, puede haber transferencias de calor del suelo a la cubeta.

A pesar de las diferencias señaladas, Christiansen (1966), utilizando los datos obtenidos en cubetas evaporimétricas clase A, consigue buenas correlaciones entre  $ET_0$  y  $E_p$ .

Los valores de  $ET_c$  se obtienen multiplicando los de  $ET_0$  por los coeficientes de cultivo ( $K_c$ ). De esta manera, se tiene que:

$$ET_c = ET_0 \times K_c = K_p \times K_c \times E_p$$

### 3.5. DETERMINACIÓN DEL AGUA NECESARIA PARA EL RIEGO

Utilizando, en definitiva, alguno de los métodos de cálculo indicados anteriormente, se determinan las necesidades de agua de los cultivos ( $ET_c$ ). El agua necesaria para el riego ( $A_r$ ) puede obtenerse restando, de las correspondientes necesidades, las lluvias ( $P$ ) producidas durante el período de la determinación:

$$A_r = ET_c - P$$

Lo más frecuente es trabajar con datos mensuales y, en su consecuencia, obtener los valores correspondientes a períodos mensuales. Cuando se citan valores diarios, éstos suelen proceder, generalmente, de valores mensuales divididos por el

número de días del mes, ya que, como es fácil comprender, el cálculo de los valores diarios exige determinaciones prolijas y muy laboriosas.

Las necesidades de agua pueden referirse a condiciones medias o máximas, según sean los datos utilizados en su determinación. Cuando se trata de calcular las *necesidades de agua de riego* ( $Ar$ ) parece prudente utilizar un valor intermedio entre las condiciones medias y máximas, ya que si se calculara con las condiciones primeras se estaría en dificultades en los años más desfavorables a la media, y si se actuara con las condiciones máximas, por el contrario, se sobredimensionarían las instalaciones y la inversión. Por estas razones, pueden proponerse unas “necesidades de cálculo” ( $Ar_{cal}$ ), a partir de las necesidades medias ( $Ar_{med}$ ) y de las máximas ( $Ar_{máx}$ ), como sigue:

$$Ar_{med} = ET_{c, med} - P_{med}$$

$$Ar_{máx} = ET_{c, máx} - P_{mín}$$

$$Ar_{cal} = \frac{Ar_{med} + Ar_{máx}}{2}$$

Conviene destacar que las condiciones máximas indicadas en las expresiones anteriores corresponden a media de máximas y no a máximas absolutas. Para las lluvias mínimas se consideran las correspondientes al año, dentro del período de la observación, que haya ofrecido menores precipitaciones durante la estación seca.

Si se tratara de calcular las necesidades de agua de riego para una zona donde existen diferentes especies de cultivo formando una determinada alternativa, se realizarán los cálculos siguiendo los criterios anteriores sin más que sustituir las necesidades de los cultivos ( $ET_c$ ), por las de la alternativa ( $ET_{al}$ ). La determinación de éstas resulta fácil teniendo en cuenta el porcentaje de superficie ocupada por cada uno de los cultivos ( $f_i$ ), con lo que:

$$ET_{al} = \sum f_i \times ET_c$$

El tema de los cultivos alternativos no aparecerá en el caso del almendro, aunque sí puede presentarse una asociación de cultivos (almendros con olivos, algarrobos, melocotoneros o cultivos herbáceos intercalados). En este caso, el proceso de resolución sería el mismo.

El *agua a aportar con el riego* ( $N_r$ ) se obtiene dividiendo las necesidades ( $Ar$ ) por un factor de eficiencia o eficacia del riego ( $k$ ), que tenga en cuenta las condiciones locales y la modalidad de riego aplicado. Se denomina también “eficiencia de aplicación en parcela” y representa la fracción del agua aplicada que queda retenida en la zona radicular a disposición del cultivo. Su valor depende del sistema de riego empleado, del tipo de suelo y de otros factores. En los modernos sistemas de riego localizado de media y alta frecuencia -exudación, rezume, goteo,

microaspersión, etc.- a los que nos referiremos a continuación, pueden obtenerse eficiencias muy altas, pero existen otros métodos de riego, de superficie o de aspersión, con eficacia relativamente baja que, en numerosas ocasiones, conviene mejorar en todo lo posible. Según los casos, los valores de la eficiencia pueden oscilar entre el 60% y el 90%.

Aunque no procede extendernos aquí sobre el concepto de la “uniformidad del riego”, adelantemos que, debido a diversas causas, los emisores de una instalación arrojan caudales que no son exactamente iguales entre sí, lo que origina que las diversas partes de una plantación reciban dosis de riego diferentes. A efectos del diseño agronómico se establece la condición de que la parte de la finca que menos agua reciba, reciba como mínimo una cierta fracción de la dosis media. A esa fracción se la denomina “coeficiente de uniformidad” (CU). En la realidad, la dosis media se eleva de forma que la fracción de la finca menos regada (caso más desfavorable) reciba la cantidad de agua necesaria.

De acuerdo con todo ello, el agua a aportar con el riego se determinará con la fórmula:

$$N_r = \frac{1}{k \cdot CU} \times Ar_{cal}$$

, siendo CU el coeficiente de uniformidad adoptado (generalmente a través de la conocida fórmula de Christiansen), imponiendo la condición, por ejemplo, de que la parte menos regada de la finca reciba una dosis del 90% de la media (CU = 0,90). Ese valor de CU se puede fijar a voluntad, pero en su elección hay que tener en cuenta que cuanto mayor sea el CU más uniforme será el riego y el consumo de agua será menor (en la parte más regada de la finca sobrarán menos agua) pero, en cambio, la instalación resultará más cara, ya que para conseguir una alta uniformidad habrá que dimensionar la red de tuberías de forma que los distintos emisores trabajen a presiones muy parecidas<sup>3</sup>. Otras aplicaciones del concepto ya expresado del CU, sugeridas por quien suscribe para la evaluación de grandes zonas regables, pueden hallarse en el capítulo III de la presente obra, para el estudio de la uniformidad de las diversas variables hidráulicas.

Por último, habrá que considerar, para el cálculo de las necesidades totales a partir de  $N_r$ , las pérdidas de agua por percolación y las necesidades de lavado de sales, que conviene estudiar conjuntamente. Las pérdidas de agua en parcela en los riegos localizados de alta frecuencia son prácticamente las debidas a la percolación a las capas profundas del subsuelo; las pérdidas por escorrentía superficial sólo se pueden presentar en casos extremos de manejo muy deficiente de la instalación, por lo que no las tendremos en cuenta *a priori*. Las necesidades de lavado son un

---

<sup>3</sup> Vide F. PIZARRO *Riegos localizados de alta frecuencia*. Ed.: Mundi-Prensa. Madrid, 1987. Citado en la bibliografía.

sumando que hay que añadir a las necesidades netas para mantener la salinidad del suelo a un nivel que no resulte perjudicial para el cultivo.

#### **4. EL RIEGO LOCALIZADO**

Trátase de un sistema que aprovecha al máximo el agua, dando a cada planta la cantidad que necesita, en el momento oportuno. El empleo de este sistema obliga a realizar aportaciones de pequeñas cantidades pero con una gran frecuencia, que puede llegar a ser diaria. En general, el riego localizado ofrece las siguientes ventajas sobre los sistemas tradicionales de aportación de agua:

- 1<sup>a</sup>.- Se forzará al árbol a desarrollar sus raíces en una masa concreta de tierra de fácil control.
- 2<sup>a</sup>.- No se perderá agua mojando otros espacios de terreno, que se mantienen secos durante todo el período de cultivo, facilitando así la mecanización y el mejor aprovechamiento de todos los espacios interiores de la plantación.
- 3<sup>a</sup>.- Mejor control de las malas hierbas, lo que evita las siempre onerosas prácticas del desyerbado mecánico o químico.
- 4<sup>a</sup>.- Correcta dosificación del agua de riego, tanto en dosis como en oportunidad.
- 5<sup>a</sup>.- Dosificación automática de los abonos a través del agua de riego (fertirrigación), lo que origina su más rápido y correcto aprovechamiento, al quedar situados los nutrientes en la zona de pelos absorbentes del sistema radicular.
- 6<sup>a</sup>.- Considerable ahorro de mano de obra y sencillez de manejo.
- 7<sup>a</sup>.- Reducidos gastos de conservación y mantenimiento.

Con los sistemas de riego localizado de alta frecuencia se obtienen excelentes resultados, pero implican también un cambio radical con respecto a los criterios tradicionales. De hecho, se trata más de un nuevo sistema de cultivo que no de un simple pero novedoso sistema de aplicación del riego.

El riego localizado de alta frecuencia (microaspersión, exudación, goteo), tan extendido y promocionado hoy en día, presenta, por sus características de localización, bajo caudal y frecuente aportación, un mejor aprovechamiento del agua que los sistemas tradicionales de riego por inundación (a “manta” o por “surcos”). Un manejo adecuado en un sistema de bajo volumen puede generar

ahorros de agua substanciales. Todo ello dependerá de la adaptación del diseño a las características propias del suelo y del grado de exactitud en la evaluación de las necesidades hídricas del cultivo. El volumen de ahorro siempre será mayor en los árboles jóvenes, donde la cantidad de suelo húmedo por los emisores (“bulbo”) siempre es menor que en los árboles adultos.

En relación al manejo del riego, veamos que diversos estudios e investigaciones realizadas en los últimos 10-15 años han permitido averiguar las grandes posibilidades que presentan determinadas especies, como el almendro, ante la reducción controlada del agua de riego en determinadas fases de su proceso fisiológico.

El riego localizado debe ir íntima y necesariamente unido al de la aportación de fertilizantes y elementos correctores por el mismo sistema, llegando al nuevo concepto de FERTIRRIGACIÓN, al que nos referiremos más adelante con brevedad.

Tabla 4.2. Ficha hídrica del almendro (zona mediterránea)

ITEMS \ MESES	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	MEDIAS	TOTALES
t (°C)	8,5	12,6	12,7	14,6	18,0	22,5	25,3	24,7	22,2	18,6	13,2	9,5	16,9	-
p (%)	6,67	6,69	8,29	8,94	10,05	10,14	10,36	9,56	8,41	7,75	6,68	6,46	8,34	100,00
K <sub>c</sub>	0,20	0,10	0,22	0,45	0,43	0,46	0,51	0,51	0,38	0,60	0,41	0,30	0,38	-
ETP (mm)	16,0	9,3	25,4	59,6	70,7	85,9	104,1	94,7	58,4	77,3	38,8	24,2	55,4	664,4
P (mm)	18,9	38,0	36,1	41,0	55,4	44,1	21,9	21,2	61,8	58,1	55,2	36,4	40,7	488,1
P-ETP (mm)	2,9	28,7	10,7	-18,6	-15,3	-41,8	-82,2	-73,5	3,4	-19,2	16,4	12,2	-14,7	-176,3
(P-ETP) ACUMULA (mm)	2,9	31,6	42,3	23,7	8,4	-33,4	-115,6	-189,1	-185,7	-204,9	-188,5	-176,3	-	-
VAR. RESERVA (mm)	2,9	28,7	10,7	-18,6	-15,3	-37,0	-	-	-	-	16,4	12,2	-	-
RESERVA (mm)	31,5	60,2	70,9	52,3	37,0	-	-	-	-	-	16,4	28,6	-	-
ETA (mm)	16,0	9,3	25,4	59,6	70,7	44,1	21,9	21,2	58,4	58,1	38,8	24,2	37,6	451,1
FALTA DE AGUA (mm)	-	-	-	-	-	37,0	-	-	3,4	-	-	-	-	40,4
DESAGUE (mm)	0,1	-	-	-	-	18,5	9,3	4,7	4,0	2,0	1,0	0,5	0,3	40,4

Para la elaboración del Cuadro núm. 4.2., se han estudiado los consumos hídricos del almendro en una zona regable de características climáticas medias mediterráneas y costera. Para ello, se ha empleado el método mixto de Thornthwaite y Blaney-Criddle, en el que la ETP (evapotranspiración potencial o evapotranspiración del cultivo) ha sido calculada a partir de la fórmula de Blaney-Criddle:

$$ETP = ET_c = (0'4572 \cdot t + 8'128) \times p \times K_c, \text{ siendo:}$$

t = temperatura media del período (°C).

p = porcentaje de horas de luz del período respecto del total anual (%).

K<sub>c</sub> = coeficiente empírico estacional de consumo.

Los restantes ítems han sido calculados, para las comarcas costeras de Tarragona y Castellón de la Plana, siguiendo el método clásico de Thornthwaite. Se ha obtenido que los meses de máxima ETP son Julio, con 104'1 mm. y 3'36 mm./día, y Agosto, con 94'7 mm. y 3'05 mm./día, respectivamente.

Veamos, por último, que considerando los sistemas de riego presumiblemente a emplear en la zona regable que nos ocupa (mayoritariamente localizados de media y alta frecuencia, por microaspersión, exudación o goteo) no se humedecerá toda la superficie del terreno, y que la zona húmeda se hallará, en gran medida, a la sombra de la propia planta, las pérdidas por evaporación se reducirán al máximo, con lo que prácticamente todo el uso consuntivo de la planta coincide con la transpiración. Por ello, se ha adoptado un coeficiente corrector de 0'70 para el período de máximo consumo, y un coeficiente de eficacia del sistema de riego de 1'00.

Según el Dr. Ingeniero Agrónomo Joan Girona, para aplicar correctamente el agua de riego al almendro se puede utilizar el método del balance hídrico, donde las necesidades de riego se determinan en base a la  $ET_0$  (evapotranspiración de referencia) que nos pueden proporcionar algunas redes de estaciones agroclimáticas (por ejemplo en Cataluña la red de estaciones agroclimáticas del *Departament d'Agricultura, Ramaderia i Pesca de la Generalitat de Catalunya*), y que nos permiten calcular la demanda hídrica del cultivo ( $ET_c$ ) en base a la expresión siguiente:

$$ET_c = ET_0 \cdot K_c$$

Los coeficientes de cultivo ( $K_c$ ) a utilizar para el almendro en condiciones mediterráneas, que se exponen a continuación, se obtuvieron experimentalmente en una parcela de ensayo situada en el *Centre de Mas Bové* (IRTA). El valor de los  $K_c$  para este cultivo se encuentran en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3. Valor de  $K_c$  para el cultivo del almendro

MES	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre
$K_c$	0'40	0'65	0'85	0'90	0'95	1'05	0'85	0'60

Como puede observarse, estos valores no resultan coincidentes con los obtenidos en el anterior cuadro 4.2., puesto que resultan más específicos para el caso del almendro, prescindiendo del olivo. Por esta razón, se propone su utilización para el período marzo-septiembre (ambos inclusive), pudiéndose emplear los coeficientes  $K_c$  del cuadro 4.2. para el resto del año.

Las necesidades de riego ( $A_r$ ) serían la diferencia entre la demanda evapotranspirativa ( $ET_c$ ) y la lluvia efectiva ( $P$ ) en el período estudiado, como ya se ha visto. O sea:

$$Ar = ET_c - P$$

Y las necesidades netas de riego (o sea, las cantidades de agua a aplicar a través del sistema de riego)  $N_r$ , serían las que ya hemos expresado mediante las formulaciones anteriores.

En el caso de instalaciones de riego localizado que funcionen correctamente, resulta normal alcanzar valores de la eficiencia del sistema de riego de:  $k = 0'95$ , y para muchos casos de riego por gravedad, contrariamente, se tiene que:  $k \leq 0'60$ .

Siguiendo esta metodología, tan simple, podríamos determinar de forma correcta las cantidades de agua que puede consumir el almendro en las diferentes épocas del año, teniendo en cuenta los restantes factores de lavado de sales y pérdidas por percolación a los que ya nos hemos referido con anterioridad.

Para calcular las horas de funcionamiento de un sistema de riego localizado, en una plantación de almendros, conviene emplear la fórmula:

$$T(\text{horas/día}) = 0'93 \cdot \frac{Q}{Ng \cdot Qg}$$

siendo:

T = núm. de horas de riego al día.  
 Q = caudal de agua en litros/árbol.  
 Ng = núm. de goteros por árbol.  
 Qg = caudal de los goteros (litros/hora).

También en diferentes ensayos efectuados en la provincia de Córdoba se determinaron las dosis óptimas de agua en almendros en pleno desarrollo, y durante el mes de máximo consumo (Julio). Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Tabla 4.4. Dosis óptimas de agua de riego

<b><i>Densidad de plantación</i></b>	<b><i>Dosis diaria</i></b>	<b><i>L./seg./Ha.</i></b>
<b><i>70-80 pies/Ha.</i></b>	130 l./árbol	0'12
<b><i>165 pies/Ha.</i></b>	98 l./árbol	0'18
<b><i>312 pies/Ha.</i></b>	65 l./árbol	0'23

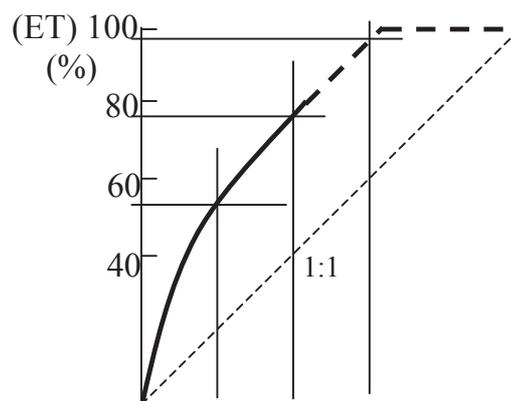
Para aplicar estas cifras a otra zona, hay que adaptarlas convenientemente, lo que se puede hacer, por ejemplo, relacionando la ET de ambas zonas. En el caso que nos ocupa, trátase de riegos deficitarios controlados, con necesidades hídricas y marcos de plantación clásicos, por lo que puede perfectamente deducirse un módulo necesario de riego del orden de sólo 0'1 l/seg. y ha.

## 5. ESTRATEGIAS DE RIEGO DEFICITARIO CONTROLADO DE ALTA FRECUENCIA EN EL ALMENDRO

Una línea reciente de investigación, enfocada hacia el mayor ahorro posible de agua, propugna una técnica denominada *riegos deficitarios controlados de alta frecuencia*. Se pretende aplicar el agua con alta frecuencia pero en cantidades inferiores a la ET máxima, y se supone que, en estas condiciones, las plantas experimentan unas adaptaciones que hacen que los rendimientos no disminuyan.

Las primeras experiencias en tal sentido, realizadas por Miller en 1977 con remolacha, trigo y judías arrojaron unos resultados positivos. Fereres ha estudiado dichas experiencias y al parecer, el déficit de agua de riego fue compensado por las plantas con extracciones del agua almacenada en el suelo. Este último investigador ha experimentado los riegos deficitarios de alta frecuencia en casos en que el agua almacenada en el suelo era insuficiente, con cultivos de sorgo, judías y tomate, concluyendo que cuando las plantas disponen de agua en cantidad inferior a la ET máxima, las producciones disminuyen. En tales condiciones, el hecho de aplicar el riego con alta frecuencia puede incluso ser contraproducente, ya que al mantener constantemente una humedad más alta las pérdidas por evaporación pueden aumentar.

Un hecho sorprendente observado por el citado investigador al regar melocotoneros por goteo, aplicando del 25 al 33 por 100 de la ET, es que al finalizar la temporada de riego, el suelo regado contenía menos agua que un suelo no regado con el mismo cultivo. Al parecer, las modestas cantidades de agua de riego aplicadas fueron suficientes para mantener abiertos los estomas durante más tiempo que en el caso del terreno no regado, ocasionando una mayor actividad de las plantas y una consecuente mayor extracción de agua y nutrientes del suelo.



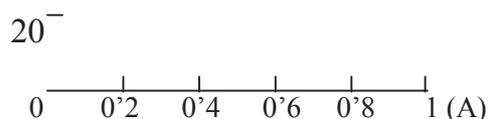


Fig. 4.7. Relación entre A y ET (E. Ferreres *et al.*, 1981)

En conclusión, que no parece que los riegos deficitarios de alta frecuencia tengan las posibilidades que hace unos años se esperaba. Los cultivos responden a regímenes bajos de humedad disminuyendo sus producciones. En cambio, ese sistema de riego sí puede ser de gran aplicación a algunos problemas particulares. Por ejemplo, en caso de sequía, la aplicación localizada y frecuente de pequeñas dosis de riego puede trasladar el periodo de estrés hídrico hasta después de la recolección, disminuyendo sólo ligeramente la cosecha, aunque reduciendo el crecimiento vegetativo posterior.

Tradicionalmente, el almendro se ha cultivado en suelos marginales, sin riego y con muy pocas prácticas culturales. Ello puede ser posible porque es una especie bien adaptada en suelos pobres y a la falta de agua, y que aún así es capaz de asegurar un nivel productivo que, aunque sea mínimo, tiene pleno sentido en una economía de subsistencia, pero que llega a ser inviable en una economía plenamente competitiva y abierta como la que habrá que afrontar en los próximos años.

Estas características de rusticidad del almendro han hecho que se le considere como un cultivo meramente de secano, pero su respuesta al riego es espectacular y esto permite que se pueda pasar de producciones medianas en secano alrededor de los 160 Kg. grano/ha a las producciones de regadío próximas a los 1.500 Kg. grano/ha (ver Cuadro Núm. 4.5.).

Sin embargo, la disponibilidad de recursos hídricos para la agricultura en la zona mediterránea, como resulta bien sabido, es muy limitada, y con un futuro incierto por la creciente demanda de las zonas urbanas e industriales y por los ciclos de sequía recurrentes. Todo esto hace necesario poner más énfasis en la racionalización de la distribución y consumo del agua de riego y en la mejora y puesta a punto de técnicas de riego que permitan la obtención de producciones suficientemente altas con aportaciones de agua de riego limitadas.

## 6. FERTIRRIGACIÓN

La incorporación de los fertilizantes puede tener lugar también mediante el riego deficitario controlado, teniendo en cuenta las siguientes recomendaciones en cuanto al funcionamiento de la instalación de fertirrigación.

El tiempo total de riego (T), al objeto de obviar problemas de precipitación de sales y las consecuentes obstrucciones de los goteros o emisores

por causa de los abonos aplicados y las propias sales disueltas en el agua de riego, se dividirá en los siguientes períodos:

$1/6 T =$  Como máximo de TIEMPO DE ARRANQUE. Realmente será suficiente el tiempo que precise la instalación para situarse en la presión de trabajo adecuada, llenado de las tuberías, expulsión del aire, etc. Así mismo, se producirá un primer mojado del terreno.

$2/6 T = 1/3 T =$  TIEMPO DE ABONADO, propiamente dicho.

$3/6 T = 1/2 T =$  Como mínimo de TIEMPO DE LIMPIEZA de la red. Este tiempo ha de cumplimentar, incluido al Tiempo de Comienzo o Arranque, las  $2/3$  partes del tiempo total, teniendo en cuenta que a mayor tiempo de limpieza menor es el riesgo de obstrucción de la conducción por precipitaciones químicas. También cumple la finalidad de limpiar la superficie del suelo de la solución fertilizante, aumentando la efectividad de su asimilación y disminuyendo los riesgos de dañar con la misma los órganos aéreos de la planta.

Los abonos líquidos o sólidos solubles se introducirán en la red de riego mediante la correspondiente bomba inyectora gobernada por el programador de riego automático, que permite el control de sectores diferentes de riego comandados por electroválvulas, válvulas volumétricas, etc. Los sistemas de inyección del abono o dosificadores son mecanismos que toman el abono de un depósito sin presión y lo inyectan a la red a una presión superior a la del agua de riego. Su accionamiento puede ser eléctrico, hidráulico o por motor de combustión interna, lo que tiene consecuencias en la automatización de la instalación. En general, inyectan una cantidad de fertilizante no proporcional al volumen circulante del agua de riego, pero algunos modelos presentan variantes que los hacen proporcionales, lo que facilita la automatización del sistema.

Los abonos líquidos se almacenarán en los correspondientes depósitos, generalmente provistos de agitadores accionados por pequeños electromotores para homogeneizar las mezclas que se inyectarán en la red. Dichos depósitos suelen ser de poliéster o de polietileno, aunque para algunos productos puede servir el acero inoxidable. Los primeros, reforzados con fibra de vidrio, son más frágiles y para contener soluciones muy ácidas deben estar revestidos interiormente con resinas especiales epoxídicas. Los depósitos de polietileno son muy adecuados por su ligereza, poca fragilidad y resistencia química, con un precio muy competitivo.

Alternativamente, y en sustitución del sistema anterior, podrá emplearse un depósito fertilizador para abonos solubles (sólidos) o bien líquidos (sistema "Venturi"). Dicho tanque consiste en un depósito conectado en paralelo a la red de riego, herméticamente cerrado, que debe resistir la presión de la red. Se

fabrica en plástico reforzado o bien metálico, con capacidades oscilantes entre 20 y 200 litros, en cuyo interior se coloca el abono a incorporar al agua de riego. El depósito consta de dos tomas, una de entrada y otra de salida, conectadas a la red de riego en dos puntos próximos, pero separados por una válvula, cuyo objeto es crear una diferencia de presión del orden de 1 a 5 m.c.a. con el objetivo de que una parte del agua de riego circule forzosamente por el circuito paralelo donde se halla el tanque.

La toma inyecta agua en la parte inferior del tanque, preferiblemente de forma tangencial a la pared del mismo, para que se mezcle bien con el abono. La toma de salida, situada en la parte superior, recoge una mezcla de agua de riego y de abono, conduciéndola a la red de distribución. Es conveniente que los tanques dispongan de una válvula de vaciado, situada en la parte inferior, y de un purgador, que debe estar dispuesto en la tubería de salida. Así mismo, es recomendable la instalación de un medidor de caudal así como de una ventosa situada en la parte superior para desairear las peligrosas bolsas de aire que pueden originar sobrepresiones accidentales importantes que provocarían el estallido del mecanismo y la segura inundación de la caseta de fertilización.

Los tanques, “calderas” o “lecheras” de abonado son muy populares y ampliamente utilizados. Ello débese a su bajo coste y a que no precisan energía para su funcionamiento, ya que aprovechan la misma presión del agua de riego, lo que permite su emplazamiento en cualquier punto de la red, aunque suelen ubicarse en el interior de las casetas-almacén de abonos. Tienen dos inconvenientes fundamentales: a) La concentración en abono del agua de riego no es constante a lo largo de cada riego, y b) Hay que reponer el abono del tanque con gran frecuencia, lo que disminuye el grado posible de automatización de la instalación. A pesar de estos inconvenientes, resultan un elemento muy útil siempre que se tengan ideas claras acerca de su funcionamiento.

En las instalaciones también deben preverse depósitos que contendrán los ácidos para la limpieza interior de las tuberías y otras piezas especiales de la red. Generalmente se tratará de ácido fosfórico y/o nítrico, que además aportan nutrientes esenciales para la planta. En general, en la elección de estos depósitos, así como en la de los que deben contener las soluciones fertilizantes expresadas, debe tenerse en cuenta su tamaño, atendiendo a las necesidades de la explotación y a las condiciones del suministro. Las fábricas venden los abonos líquidos en camiones-cisterna (a granel) que bombean las soluciones directamente a los depósitos, que deben llevar incorporada una toma para la salida del abono y una ventosa para la entrada o salida del aire.

Según el Dr. Pizarro, no conviene enterrar dichos depósitos, puesto que podrían no resistir los empujes del terreno; cuando están vacíos son fácilmente arrastrados por el viento, por lo que hay que sujetarlos convenientemente. No soportan presión ni vacío, ni deben ser utilizados como cisternas para el transporte.

## 7. TOLERANCIA A LA SEQUÍA EN LA MEJORA GENÉTICA DEL ALMENDRO

### 7.1. INTRODUCCIÓN

Resulta bien conocido que la tolerancia a la sequía de las plantas en las regiones áridas y semiáridas de clima mediterráneo constituye un carácter determinante para su producción. Este carácter se considera tan complejo que es necesario estudiarlo desde la perspectiva que ofrecen diversas disciplinas (ecofisiología, genética, agronomía, etc.). Ya el estudio de la tolerancia a la sequía se introdujo como un objetivo del programa de mejora genética del almendro emprendido por el IRTA (*Institut per a la Recerca i Tecnologia Agroalimentàries*, dependiente del DARP de la *Generalitat de Catalunya*) en 1996, si bien el estudio de tan importante carácter, relacionado con el vigor y la caída de hojas, siempre fue considerado como muy relevante desde el año 1974. De hecho, las tres variedades de almendro obtenidas por el IRTA: “Masbovera”, “Glorieta” y “Francolí” poseen un buen vigor y se comportan como tolerantes a la sequía. En el proyecto CICYT (AGF96-0520, *Mejora del almendro para resistencia a la sequía*) se fijó, como finalidad básica, la búsqueda de parámetros objetivos, fiables, sencillos, baratos y reproducibles para ser utilizados como criterios eficientes en el proceso de selección precoz de nuevas variedades. De este modo, la estrategia se basa en el cultivo de material vegetal con buenas características para adaptarse a las condiciones de sequía. Para la descripción de este proceso, seguiremos el magnífico trabajo realizado por Ignasi Batlle, Feli de Herralde, Anna Campalans, Carme Biel, Miguel A. Romero, Pere Arús, Francisco J. Vargas y Robert Savé<sup>4</sup>.

### 7.2. VARIEDADES

#### 7.2.1. Conceptos previos

El clima del área mediterránea se caracteriza por un doble estrés: el frío en invierno y la sequía en verano. Para afrontar esta última, las especies mediterráneas han desarrollado toda una serie de mecanismos de resistencia que se pueden catalogar como de **tolerancia** (ajuste osmótico y elástico), **evitación** (forma y función de la cubierta vegetal, tasa de transpiración cuticular, ...) y **escape** (la planta entra en reposo durante el periodo climáticamente adverso). A

---

<sup>4</sup> AA. VV. “La tolerància a la sequera en la millora genètica de l’ametller”, en *Butlletí informatiu. IRTA*, 62. Julio de 1999.

diferencia de otros frutos secos típicamente mediterráneos, como el algarrobo o el pistachero, en el almendro, de manera profusa, se han observado mecanismos de evitación de la sequía (como la abscisión foliar) que permiten la supervivencia durante los periodos de estrés pero que, contrariamente, reducen de modo notorio la cantidad y calidad de la cosecha y afectan, incluso, a la productividad de la campaña siguiente.

Pues bien, mediante el mencionado proyecto CICYT (I+D) se pretende hacer uso de la ecofisiología y de la biotecnología molecular para obtener instrumentos fiables al objeto de utilizarlos en el programa de mejora de variedades de este fruto seco.

### **7.2.2. Caracterización ecofisiológica**

La caracterización ecofisiológica de ocho variedades de almendro, escogidas por su comportamiento diferencial frente a la sequía (*Desmayo Langueta*, *Falsa Barese*, *Garrigues*, *Lauranne*, *Marcona*, *Masbovera*, *Non Pareil* y *Ramillete*), en condiciones de campo con árboles adultos sobre portainjerto o patrón de semilla en el Centro de Mas Bové (Tarragona) y en condiciones semicontroladas en torreta con árboles jóvenes sobre patrón clonal (GF-677) en el Centro de Cabrils (Barcelona), ha permitido clasificarlas por su resistencia a la sequía. También se ha realizado un estudio de las copas de los árboles basado en medidas biométricas y fenológicas, así como una evaluación del intercambio gaseoso, de la relación fotosíntesis/transpiración, con medidas analíticas para establecer la relación existente entre la acumulación de sustancias (azúcares solubles, prolina, relación celulosa/hemicelulosa y discriminación isotópica con  $^{13}\text{C}$ ) y la tolerancia a la sequía de las diferentes variedades de almendro.

Los resultados obtenidos permiten establecer una clasificación varietal en base a su tolerancia a la sequía, basándose en las curvas presión-volumen y en la morfología foliar (peso específico de la hoja). Al respecto, es destacable el buen comportamiento observado -de resistencia a la sequía- de la variedad “Masbovera”. El peso específico de las hojas se ha revelado como un parámetro altamente indicativo de la respuesta del almendro a la sequía resultando, a la vez, muy rápido y fácil de medir. Se obtiene, en fin, información que puede ser aplicada en un manejo agronómico más eficiente de las variedades, esto es, en cuanto a las estrategias de riego, poda, marcos de plantación, etc.

## **8. EL RIEGO LOCALIZADO SUBTERRÁNEO EN EL ALMENDRO**

### **8.1. CONCEPTOS PREVIOS**

El sistema de riego localizado subterráneo (RLS) en el almendro surge como una necesidad de lograr mayores eficiencias en el uso del agua y de los fertilizantes disueltos en ella (fertirrigación), que van siendo aplicados en cantidades precisas directamente al sistema radicular de la planta. Este sistema,

muy compatible con el riego deficitario controlado que aquí se propugna, nos permite mejorar la calidad y la producción, al mantener un mayor volumen de suelo humectado que el riego localizado superficial (Phene *et al.*, 1990; Del Amor *et al.*, 1997). Los nutrientes, especialmente el anhídrido fosfórico, son aplicados directamente a las raíces de la planta incrementando su absorción (Chase, 1985). Mediante este sistema de riego, se establece la mejor práctica de manejo para evitar la contaminación por nitratos al disminuir las pérdidas por percolación en las capas profundas del subsuelo (Phene y Ruskin, 1995). Permite el empleo de aguas residuales y de mala calidad sin contaminar la superficie del suelo (Oron *et al.*, 1991), que queda libre de malas hierbas. Permite también reducir diversas enfermedades, como la *Alternaria*, y supone menores costes de mantenimiento, debido a la ausencia de reparaciones por daños originados por pájaros, roedores, personas y maquinaria diversa, llegándose a alcanzar un 25% de ahorro sobre los requerimientos netos de riego (Lamm *et al.*, 1995).

A pesar de todas estas ventajas, las especiales características de los RLS exigen un diseño y manejo apropiados, como evitar el riesgo de intrusión radicular en el gotero como consecuencia del comportamiento hidrófilo o hidrotrópico de las plantas, así como el peligro de obstrucción de los emisores enterrados, lo que originó, en el pasado, la desconfianza en la implantación de este sistema.

## **8.2. MANEJO**

Cualquier sistema de riego requiere de un mantenimiento y manejo característicos y el RLS no constituye tampoco una excepción. La prevención de las obstrucciones comienza incluso antes de la instalación, mediante el análisis del agua de riego, que nos indicará el sistema de filtrado más idóneo. El tipo de emisor también juega un papel importante en la selección de las medidas de filtrado a emplear. El emplazamiento y uso de caudalímetros, rotámetros y manómetros es necesario para la detección de anomalías en el sistema. Una vez instalados los equipos de contaje y control, se establecen las medidas adecuadas de caudal y presión para cada sección, las cuales habrán de ser verificadas periódicamente. La obtención de caudales altos puede indicar la existencia de alguna fuga por rotura; si son bajos, debemos proceder a la limpieza de los filtros, bajar el pH y también abrir el final de los ramales para eliminar los sedimentos u otros materiales que se hayan podido acumular durante el riego.

Los errores de la instalación, como las conexiones de los ramales de riego con la tubería secundaria mal realizadas, así como las incompatibilidades de los solutos con los componentes (tubería y piezas especiales) de la instalación han sido los problemas más frecuentes encontrados en las instalaciones de Arizona (Copeland y Yitayew, 1990), Colorado (Kruse e Israeli, 1987) y California (Feistel, 1992), que tienen como consecuencia una mala uniformidad del riego.

El mantenimiento de la superficie del suelo seca es el principal propósito de tener enterrado el emisor, propio de los RLS. Para conseguirlo, se debe tener en cuenta la capacidad de infiltración del suelo para fijar el número de emisores y la frecuencia del riego. De esta manera, el aumento de la frecuencia o el riego a pulsos evitará humedecer la superficie del terreno y minimizar la percolación.

Un referente obligado para el productor español es California, donde ya se cultivan unas 2.000 hectáreas de almendros en RLS empleando el gotero *Rootguard*, tratándose de una cifra que evoluciona en constante aumento.

## 9. RESUMEN Y CONCLUSIONES

El almendro (*Prunus amygdalus* Linneo, o bien *Amygdalus communis* L.) es una especie que se adapta a muchas situaciones de disponibilidades hídricas, de forma que se encuentran plantaciones productivas en situaciones tan opuestas como las del Valle de San Joaquín (California, EUA), donde los suelos son fértiles y profundos, y los almendros reciben cantidades muy importantes de agua de riego (1.000 mm./año, según Micke y Kester, 1978), y los secanos áridos del litoral mediterráneo, como es el caso del que nos ocupa en nuestro país, donde el agua de lluvia es la única que reciben los almendros, y donde los suelos son normalmente pobres y superficiales o de poco espesor, con presencia frecuente de horizontes petrocálcicos a escasa profundidad (Vargas, 1975; Grasselly y Crossa-Reynaud, 1984). Evidentemente, en estas condiciones de cultivo la repercusión productiva es muy considerable, con un ratio medio de 1/10 favorable a las condiciones de regadío (Girona, 1992).

Tabla 4.5. Situaciones productivas comparativas de Catalunya y California

<b>Tipos de cultivo</b>	<b>Superficie de cultivo (Ha.)</b>	<b>Producción Total (t. en grano)</b>	<b>Producción en grano (Kg./Ha.)</b>
<b>Regadío</b>	181.398	256.689	1.415
<b>Secano</b>	64.015	10.426	163

Fuente: Murua *et al.*, (1993); USDA, FAS. *Horticultural products review* (1994); Generalitat de Catalunya, DARP (1991)

Si se quieren realizar aportaciones de cantidades reducidas de agua de riego al almendro, lo que tendrá lugar presumiblemente utilizando modernos sistemas localizados de alta frecuencia (RLAF, microaspersión, exudación y/o goteo), es importante conocer con la máxima precisión su ciclo fenológico (Girona, 1992; Girona *et al.*, 1994), por tal de reducir al mínimo los efectos perjudiciales de la restricción de agua y potenciar la productividad (Goldhamer y Shackel, 1989; 1990; Girona *et al.*, 1994). Es también de vital importancia conocer el tipo de suelo y la evolución de sus disponibilidades hídricas, dado que los factores citados pueden tener una influencia determinante en la respuesta productiva de este cultivo.

Es preciso resaltar, en fin, que todas estas metodologías deben aplicarse en aquellas explotaciones frutícolas cuyas características edafoclimáticas sean conocidas y siempre bajo el asesoramiento técnico oportuno. Nunca será conveniente arriesgarse cuando se desconozcan las propiedades físicas del suelo (textura, drenaje, comportamiento hidrológico, etc.), la demanda real del agua del cultivo (evapotranspiración, eficiencia de aplicación) así como la edad, marco de plantación, variedad y comportamiento fisiológico del almendro.

Un repaso somero a los trabajos previos existentes sobre los requisitos hídricos del almendro, nos permiten analizar aquellos aspectos claves de la sensibilidad estacional de este cultivo al déficit hídrico, así como su respuesta a las diferentes estrategias de riego. Son los siguientes:

\* Los requisitos máximos de agua de riego del almendro en la zona mediterránea se pueden cifrar alrededor de los 650 mm./año (Girona, 1995; Torrecillas *et alt.*, 1989), mientras que en las condiciones características de California las necesidades de riego pueden llegar a los 1.100 mm./año (Fererres, 1978).

\* Durante la fase de crecimiento del grano (del 15 de Junio al 15 de Agosto, o bien hasta la cosecha) grandes aportaciones de agua de riego son totalmente innecesarias (Andriani *et alt.*, 1989; Goldhamer y Shackel, 1989; Girona *et alt.*, 1994), aunque en suelos superficiales y en las condiciones mediterráneas un corte total del agua de riego no es aconsejable (Girona, 1994).

\* Después de la cosecha es muy importante que el árbol no esté sometido a déficit hídrico, para que tenga una masa de hojas fotosintéticamente activas, y se puedan asegurar las reservas de carbohidratos necesarias para el año siguiente (Fererres *et alt.*, 1981; Goldhamer y Shackel, 1990).

\* Durante todas las fases de crecimiento vegetativo (de Febrero-Marzo al 15 de Junio) es importante reducir al mínimo el déficit hídrico (Girona, 1995).

\* Durante los primeros estadios de crecimiento (de Febrero al Marzo-Abril) el agua es muy importante, aunque normalmente no sea necesario efectuar el riego (Girona, 1995).

\* Una estrategia adecuada podría consistir en regar correctamente hasta mediados del mes de junio (crecimiento vegetativo activo, floración, cuajado, desarrollo del fruto) para reducir luego la dotación hasta mediados de septiembre (cosecha).

\* La existencia de mapas genéticos permitirá la detección de marcadores moleculares en las proximidades de zonas de los cromosomas (QTLs) implicadas en la herencia de la tolerancia a la sequía (IRTA, 1999).

\* A nivel molecular, los diferentes genes identificados se introducirán en el mapa genético de *Prunus* para poder ser utilizados en la futura selección de variedades más resistentes a la sequía (IRTA, 1999).

\* También en el futuro, la investigación sobre la tolerancia a la sequía mediante la caracterización ecofisiológica y la mejora genética de las variedades y patrones optimizará la selección y empleo de variedades mejoradas que se adaptarán bien a las condiciones propias del clima mediterráneo (IRTA, 1999).

\* Dado que las reducciones iniciales de agua de riego (por ejemplo un 60% de la ET durante todo el ciclo anual) producen caídas productivas importantes (Hutmacher *et alt.*, 1994), parece más correcto utilizar otras estrategias como son las propias del riego deficitario controlado (RDC), basadas en la restricción del agua de riego en aquellos momentos del ciclo anual en que el almendro sea menos sensible al temible déficit hídrico.

\* De los resultados obtenidos se puede destacar el interés agronómico del RLS (riego localizado subterráneo) en el cultivo del almendro, ya que su aplicación produce mayores rendimientos en semilla y una más elevada eficiencia del agua aplicada, en comparación con el riego localizado superficial. Este sistema permite al cultivo expresar todo su potencial productivo, mejorando y complementando la respuesta de otras prácticas de manejo como el RDC.

\* La escasa diferencia existente entre los sistemas de gotero enterrado puede deberse a que las raíces del cultivo no se desarrollan en las proximidades del emisor cuando éste se encuentra saturado de agua. Ello puede acontecer al realizar riegos frecuentes, si bien no significa necesariamente que en el futuro tales obturaciones no puedan llegar a suceder.

\* \* \* \* \*

## CAPÍTULO V

### UNA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS A LA PROSPECTIVA DE LAS APORTACIONES DEL RÍO EBRO EN SU TRAMO FINAL

#### RESUMEN

En los últimos tiempos se ha venido hablando mucho acerca de la conveniencia de trasvasar aguas del río Ebro, fundamentalmente, a otras cuencas hidrográficas españolas (Cuencas internas de Cataluña, Júcar, Segura y Almería-Sur) para suplir los denominados “déficits estructurales” que supuestamente dichas cuencas padecen. Esta consideración, que parece primar sobre otras alternativas, constituye un aspecto nuclear del Plan Hidrológico Nacional (PHN), que después del proceso parlamentario correspondiente, fue aprobado en forma de Ley 10/2001, de 5 de julio, por las Cortes Generales. Ahora bien, ello exige *a priori* y *a fortiori* la existencia, en cantidad suficiente, de esos volúmenes de agua en la cuenca cedente que sean susceptibles de ser transferidos a la “España seca”. Estadísticamente es demostrable la existencia de una clara tendencia a la reducción de los caudales medios en el tramo final, de tal suerte que la aportación de los últimos 30 años de aquella serie alcanzaba tan sólo un promedio de 13.400 hm<sup>3</sup>/año (425 m<sup>3</sup>/seg. en caudal ficticio continuo), mientras que la media de los 10 últimos años era ya de sólo 10.100 hm<sup>3</sup>/año (320 m<sup>3</sup>/seg.). En cualquier caso, resulta imprescindible, antes de elaborar complejos proyectos técnicos y legales orientados a utilizar supuestos "sobrantes regulados" del río Ebro, el llevar a término un previo, riguroso y ecuánime estudio sobre las **existencias reales de caudales regulados**, a partir de las más recientes y esmeradas estadísticas de aforo, comprobando la exactitud de medida en las estaciones foronómicas existentes al efecto y teniendo bien presente el comportamiento actual del río, consecuente del aprovechamiento real de los recursos.

## UNA APLICACIÓ DELS MÈTODES ESTADÍSTICS A LA PROSPECTIVA DE LES APORTACIONS DEL RIU EBRE EN EL SEU TRAM FINAL

### RESUM

En els darrers temps, s'ha vingut parlant sovint envers la conveniència de transvasar aigües del riu Ebre, fonamentalment, a d'altres conques hidrogràfiques espanyoles (Conques internes de Catalunya, Xúquer, Segura i Almeria-Sud) per tal de suplir els anomenats "dèficits estructurals" que suposadament aquelles conques pateixen. Aquesta consideració, que sembla destacar per sobre d'altres alternatives, constitueix un aspecte nuclear del *Plan Hidrológico Nacional* (PHN) que actualment, després del procés parlamentari escaient, fou aprovat en forma de llei (10/2001 de 5 de juliol) per les Corts Generals de l'Estat. Ara bé, això exigeix *a priori* i *a fortiori* l'existència, en prou quantitat, de volums d'aigua a la conca cedent que siguin susceptibles d'ésser transferits a "l'Espanya seca". Estadísticament és demostrable una clara tendència a la minva dels cabals mitjans, de manera que l'aportació dels darrers 30 anys d'aquella sèrie sols assolia una mitjana de 13.400 hm<sup>3</sup>/any (425 m<sup>3</sup>/seg., en cabal fictici continu), mentre que la mitjana dels 10 últims anys era ja tan sols de 10.100 hm<sup>3</sup>/any (320 m<sup>3</sup>/seg.). En qualsevol cas, resulta imprescindible, abans d'elaborar complexos projectes tècnics i legals orientats a utilitzar suposats "sobrants regulats" del riu Ebre, el portar a terme prèviament un rigorós i equànime estudi sobre les **existències reals de cabals regulats**, a partir de les estadístiques més recents dels aforaments, comprovant l'exactitud de mesura en les estacions foronòmiques escaients i tenint molt present el capteniment actual del riu, que és conseqüència de l'aprofitament real dels seus recursos.

## AN APPLICATION OF STATISTICAL METHODS IN THE PROSPECT OF THE CONTRIBUTIONS OF THE EBRO RIVER IN ITS FINAL SECTION

### ABSTRACT / SUMMARY

Recently, the convenience of transferring water from the Ebro River has been discussed at length, fundamentally, to other hidrographic basins, (the internal basins of Catalonia, Júcar, Segura and Almería), to supplement the so called “structural deficits” which these river basins supposedly suffer. This consideration, which seems to take precedence over other alternatives, constitutes a nuclear aspect of the National Hydrological Plan, now in the process finished of parliamentary approval (Law 10/2001, 5 July). However, this requires, *a priori* and *a fortiori*, the existence, in sufficient quantity, of those volumes of water in the yielding basin which are subject to transfer to dry Spain. Statistically, it is possible to demonstrate a reduction of the average flow capacity, in such a way that the contribution in the last 30 years barely reached an average of 13.400 hm<sup>3</sup>/year (425 m<sup>3</sup>/second), while the average over the last 10 years was of only 10.000 hm<sup>3</sup>/year (320 m<sup>3</sup>/second). In any case, before elaborating complex projects oriented towards utilizing a supposed regulated surplus of the Ebro River, it is necessary to perform a rigorous and impartial study of the **actual surplus of the regulated flow**, with the most recent and careful statistics of appraisal, comparing its accuracy in the existing phoronomics stations and bearing in mind the true behaviour of the river, as a result of the actual exploitation of its resources.

### 1. ALGUNOS CURIOSOS ANTECEDENTES

En el tomo IV ("Resumen") del Proyecto de Directrices del Plan Hidrológico de la Cuenca del Ebro (PHCE), que se presentó en su día, y en la tabla I.1.5.1.1. del mismo, dicese textualmente (págs. 5 y ss.) que *"en tanto no se disponga de mejores ajustes se asumirán las series de aportaciones obtenidas por las 400 unidades hidrográficas"*, figurando con el código 04 la del "Ebro en el embalse de Flix" y con el 05 la del "Ebro en Tortosa", con aportaciones medias respectivas anuales, correspondientes al período o año hidráulico 1940-41 al 1985-86, de 17.999'3 hm<sup>3</sup>/año (equivalentes a 570'75 m<sup>3</sup>/seg.) y 18.119'6 hm<sup>3</sup>/año (574'57 m<sup>3</sup>/seg.).

Los recursos hidráulicos de la Cuenca (aportaciones medias en régimen natural) se calcularon haciendo un promedio del registro histórico de caudales del río Ebro, que ofrece un supuesto volumen anual de 18.198 hm<sup>3</sup>, mientras que otros estudios de este mismo autor, para la serie cronológica o temporal de los 60 años aforados comprendidos entre 1913/14 y 1988/89 en la estación foronómica n°: 27 (Tortosa) **arrojan caudales medios de 496 m<sup>3</sup>/seg. equivalentes a sólo 15.642 hm<sup>3</sup>/año**. Si se considera, en cambio, la serie hasta el año hidráulico 1998/99 (o sea, 70 años aforados) los caudales medios registrados en dicha estación descienden a 14.401 hm<sup>3</sup>/año (equivalentes a 457 m<sup>3</sup>/seg. en caudal ficticio continuo), tal como tendremos ocasión de comprobar posteriormente mediante el ajuste estadístico pertinente y la posterior integración o "promedio integral" de la función polinomial obtenida. La diferencia existente entre ambas determinaciones y la cifra anteriormente señalada de las aportaciones medias del río en régimen natural débese, obviamente, al consumo que tiene lugar en la propia cuenca para los diferentes usos, y que se intuye que tiene un carácter creciente. Estadísticamente es demostrable la existencia de una clara tendencia a la reducción de los caudales medios en el tramo final, de tal suerte que la aportación de los últimos 30 años de aquella serie alcanzaba tan sólo un promedio de 13.400 hm<sup>3</sup>/año (425 m<sup>3</sup>/seg.), mientras que la media de los 10 últimos años era ya de sólo 10.100 hm<sup>3</sup>/año (320 m<sup>3</sup>/seg.).

Consultando la Documentación Básica del Plan Hidrológico de la Cuenca del Ebro, sin embargo, es curioso constatar, al respecto, las previsiones realizadas varios años antes en la Ponencia de Regadíos del Consejo Económico Sindical Interprovincial del Ebro (Enero de 1971), donde después de dividir el Ebro en cinco grandes tramos, se realizaron las siguientes previsiones:

Tabla 5.1. Volúmenes anuales necesarios para el riego con arreglo a dotaciones similares a las del II Plan de Desarrollo Económico y Social de España

TRAMOS	VOLÚMENES ANUALES (hm <sup>3</sup> )		
	AÑOS	1970	1980
1º Ebro y sus afluentes hasta Miranda	10,6	10,6	39,8
2º Ebro y sus afluentes de Miranda a Castejón	840,3	1.173,6	2.571,3
3º Ebro y sus afluentes de Castejón a Sástago	2.113,1	2.493,1	4.697,1
4º Ebro y sus afluentes de Sástago a Flix	3.032,3	3.784,4	5.883,1
5º Ebro y sus afluentes de Flix a la desembocadura	275,6	529,3	1.912,0
<b>Total</b>	<b>6.271,9</b>	<b>7.991,0</b>	<b>15.103,3</b>

Las dotaciones medias en los diferentes períodos resultan ser, según dicho estudio, las siguientes:

Tabla 5.2. Dotaciones medias de riego durante diferentes períodos en el valle del Ebro

AÑO	DOTACIONES MEDIAS (m <sup>3</sup> /ha)
1970	9.665
1980	9.637
1990	9.605
2000	9.576

El balance previsto de agua de riego para el año 2000, según los estudios anteriormente mencionados, era el siguiente:

Tabla 5.3. Balance previsto de agua de riego en el valle del Ebro (año 2000)

VOLUMEN DISPONIBLE (hm <sup>3</sup> )					
TRAMO	ACUMU- LADO (hm <sup>3</sup> )	DENTRO DE CADA TRAMO	PROPIO DEL TRAMO MÁS EXCEDENTE	NECESARIO PARA EL RIEGO	EXCEDENTE QUE PASA AL SIGUIENTE TRAMO
1º	1.399	1.399	1.399	40	1.359
2º	7.658	6.259	7.618	2.571	5.047
3º	10.558	2.900	7.947	4.697	3.250
4º	16.804	6.246	9.496	5.883	3.613
5º	16.816	12	3.625	1.912	1.713
	Suman	16.816		15.103	
<b>Sobrante</b>				+1.713	
				16.816	

## 2. LOS ESTUDIOS POSTERIORES

### 2.1. LOS CAUDALES MEDIOAMBIENTALES

Así pues, el denominado "sobrante o excedente al mar" no alcanzaría siquiera, teniendo en cuenta la anterior Tabla 5.3., el considerado en el Plan como "caudal para mínimos medioambientales" o "caudal de compensación", de 100 m<sup>3</sup>/seg. (3.154 hm<sup>3</sup>/año), que es el ratificado posteriormente por el Anteproyecto de Ley del Plan Hidrológico Nacional de Septiembre de 2000 (ALPHN-2000) y por la propia Ley del PHN (véase Art. 16 y ss.), pese a que el propio texto legal remite tímidamente al PIPDE ("Plan Integral de Protección del delta del Ebro", en la Disposición Adicional 10ª) su cuantificación definitiva. Y ello pese a que las alegaciones de la Generalitat de Catalunya, presentadas a través de su *Agència Catalana de l'Aigua*, solicitaban del orden de 130/135 m<sup>3</sup>/seg. por este mismo concepto, al suponer solamente 1.713 hm<sup>3</sup>/año = 54'32 m<sup>3</sup>/seg.

La falta de aportaciones hídricas para fines medioambientales quedaría aún mayormente agravada si se considera el resultado de otros estudios más recientes sobre las necesidades del tramo final. En el Plan Hidrológico del Ebro, dicho concepto subsumía el denominado **caudal de compensación** (que atiende solamente a la preservación de los ecosistemas fluviales), además del "hidrológico" (régimen de aportaciones naturales del tramo en cuestión), "sanitario" (en concordancia con los objetivos de calidad), "visual-paisajístico" y otros.

Las propuestas iniciales del PHCE abundaban en el sentido de que, en tanto no estén fijados dichos caudales mínimos, se tendrá en cuenta, con carácter general, un caudal mínimo del 10% de la aportación media interanual y que, cuando el caudal sea superior a los 80 m<sup>3</sup>/seg. podrá adoptarse, incluso, sólo el 5% del mismo. En cualquier caso, el Plan de Cuenca y el propio PHN prevén un

caudal ecológico mínimo, en la desembocadura, de  $3.153'6 \text{ hm}^3/\text{año}$  ( $100 \text{ m}^3/\text{seg.}$ ).

De hecho, el caudal medio de los 60 años hidráulicos de que se disponen datos, medido en la estación foronómica de Tortosa es, como ya se ha dicho, de  $496 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , por cuya razón, dicho caudal mínimo medioambiental quedaría evaluado, en el caso de adoptar la primera condición restrictiva anterior, en sólo  $50 \text{ m}^3/\text{seg.}$  Más correcto nos parecería el actuar contra la contaminación mediante un aumento de los caudales disponibles para dilución, merced a la aportación artificial de un cierto caudal adicional de una cuantía tal que el caudal global resultante (“caudal de compensación”) permitiese el grado de dilución suficiente como para obtener, con suficiente garantía, el objetivo de calidad predeterminado.

Por la misma definición de “caudal adicional”, su magnitud en cada tramo de río debería ser función de cuatro factores básicos, a saber:

-El estado actual de la calidad de las aguas del río.

-Los objetivos de calidad que se pretende alcanzar, definidos en dos fases de mejora progresiva asociadas a los usos actuales y futuros, que las aguas del río deben satisfacer.

-Las nuevas obras de depuración que se consideren en funcionamiento.

-La garantía que se exige al objetivo de calidad, es decir, la garantía que se considere para los caudales propios del río que van a ser incrementados mediante la aportación adicional.

En relación con este último punto, es evidente que cuanto mayor sea la garantía que se exija al objetivo de calidad, más disminuirá el caudal diluyente propio del río, y por tanto, el caudal adicional aportado deberá ser mayor. Esta "garantía de calidad" resulta de difícil definición y posterior cuantificación, ya que el grado de exigencia puede variar según el uso que el agua deba satisfacer, tanto a nivel de calidad general como en relación con los diversos parámetros que la definen.

En efecto, la garantía de calidad con que debe obtenerse un agua destinada exclusivamente al riego puede ser inferior a la exigida para el abastecimiento público. Cabe señalar, al respecto, que son numerosas las poblaciones que se abastecen directamente del río, previos los controles y tratamientos oportunos que establece la vigente Reglamentación Técnico-Sanitaria de Aguas Potables; concretamente, el Consorcio de Aguas de Tarragona (CAT), en base a la ley 18/1981, abastece actualmente a unos 40 municipios de dicha provincia catalana para consumo humano e industrial y, por otra parte, las transferencias previstas en el PHN-2001 desde el Ebro, tanto hacia el Norte (cuencas internas de

Cataluña, antigua Cuenca Hidrográfica del Pirineo Oriental) como hacia el Sur (cuencas del Júcar, Segura y Almería-Sur) también irán destinadas, en gran medida, a dichas modalidades de consumo. Asimismo, la garantía con que la concentración de un elemento tóxico debe mantenerse por debajo del máximo tolerado debe ser superior que si se trata de una sustancia con menor incidencia sanitaria, como por ejemplo el anión cloruro  $\text{Cl}^-$  (aunque sí, en este caso, de mayor incidencia agronómica).

Ahora bien, para transformar el caudal de compensación en una demanda anual ( $\text{hm}^3/\text{año}$ ) es necesario tener en cuenta el régimen hidrológico de cada río. Es decir, a medida que aumenta el caudal propio del río con un 95% de garantía (en períodos húmedos), el aporte adicional necesario es menor y llega a anularse cuando el flujo circulante es suficiente, por sí solo, para diluir la contaminación vertida hasta los niveles que marca el objetivo de calidad.

Por tanto, la ley de caudales adicionales a lo largo del año, de cuya integración resulta la demanda ecológica, depende directamente de la curva anual de caudales propios del río con garantía del 95%. Esta curva varía con las características hidrológicas de cada río; a su vez es variable en un mismo río según la selección que se considere y depende, además, de la pluviometría anual y de su reparto espacial y temporal. Sin embargo, esta complicación intrínseca al cálculo de la demanda ecológica anual puede obviarse con la suficiente exactitud si se tiene en cuenta que los principales problemas de calidad se producen en aquellas corrientes de agua con una hidrología marcadamente torrencial, o bien en las cuencas bajas de ríos más regulares, en zonas de pendiente suave y baja o media pluviometría, como es precisamente el caso del tramo inferior del Ebro.

Desde luego, en el caso del delta del Ebro, de extraordinario interés ecológico nacional e internacional, las restricciones operativas anteriores se nos antojan ciertamente escasas, tal como ya ha señalado el propio Organismo rector del Parque Natural. Concretamente, el artículo 103.4 de la ley de Aguas de 1985 establecía que "...los Organismos de cuenca y la Administración medioambiental competente coordinarán sus actuaciones para una protección eficaz de las zonas húmedas de interés natural o paisajístico". Así mismo, el artículo 279.4 del Reglamento del Dominio Público Hidráulico rezaba que "la Administración controlará particularmente los vertidos y el peligro de disminución de aportación de agua en la zona. En ambos casos se adoptarán las medidas necesarias en orden a preservar la cantidad y calidad de las aguas que afluyen a la zona, todo ello sin perjuicio de las prohibiciones y medidas generales establecidas en la Ley de Aguas", mientras que el artículo 280.1 insiste en los mismos términos del ya mencionado art. 103.4 de aquella Ley (refundida posteriormente por el R.D. Legislativo 1/2001, de 20 de julio del mismo año).

Así pues, a las necesidades estrictamente medioambientales fijadas por el propio PHN ( $100 \text{ m}^3/\text{seg.}$ ) deberían sumarse otros  $100 \text{ m}^3/\text{seg.}$  para aportar sedimentos al Delta al objeto de compensar su subsidiencia (al tiempo que

mantener la producción piscícola y marisquera en las bahías deltaicas) y otros  $100 \text{ m}^3/\text{seg.}$  para frenar la penetración de la cuña salina por el cauce del río hasta un punto que no la convierta en perniciosa para las aguas y los suelos circundantes. **En definitiva, consideramos que el caudal de compensación no debe ser inferior a  $300 \text{ m}^3/\text{seg.}$  en el tramo inferior del río Ebro, a los que se deben sumar los aproximadamente  $50 \text{ m}^3/\text{seg.}$  que circulan por los canales de regadío de ambas márgenes, con el fin de desarrollar las labores agrícolas y mantener ecológicamente el delta del Ebro. Todo ello exige, en suma y a nuestro criterio, un caudal mínimo de  $350 \text{ m}^3/\text{seg.}$  (algo más de  $11.000 \text{ hm}^3/\text{año}$ ) aguas arriba del azud de Xerta-Tivenys. Esas cifras, ya por sí solas, teniendo en cuenta las aportaciones del río, podrían hacer inviable cualquier trasvase de aguas a otras cuencas hidrográficas.**

Valdría la pena profundizar algo más, por nuestra parte, en el estudio de las necesidades mínimas de caudal a partir de estudios más específicos realizados al efecto. Una nueva cultura -y por tanto gestión- del agua debe, sin lugar a dudas, plantearse la preservación de los valores ambientales, sociales y económicos del territorio, valores éstos íntimamente interrelacionados y de cuyo equilibrio depende el desarrollo sostenible del sistema fluvial y de las tierras que vertebra.

La gestión alternativa del agua en el tramo inferior del Ebro debe basarse en un sistema que sitúe en pie de igualdad los usos del agua con la preservación de los valores ambientales, sociales y económicos de la zona. El régimen hídrico del río debe respetar y conjugar adecuadamente todas estas características<sup>1</sup>.

Con estas premisas básicas, antes de abordar cualquier planificación es **imprescindible establecer un sistema integrado de gestión** de toda la parte baja del Delta -desde Mequinenza/Riba-roja hasta el mar mediterráneo-, fundamentado en estudios científicos previos que determinen cuales han de ser los principales criterios que deben dirigir la gestión de los caudales de agua y de los sedimentos. Este sistema debe ser **interdisciplinar, dando cabida a todos los usuarios, aunque debe ser independiente de ellos y con una marcada presencia de científicos, técnicos y conservacionistas, encargados de asegurar que la garantía de agua para todos los usos quede supeditada al buen estado ecológico del río y del Delta.**

El sistema de gestión adecuado debe contemplar varios apartados, para los cuales a continuación se definen también los caudales y regímenes hídricos que se evalúan como necesarios (ver también la tabla siguiente). Para mantener esta triple función ecológica, social y económica, es necesario el establecimiento de un régimen hídrico concreto y unos caudales ecológicos o medioambientales, considerados como mínimo vital para la supervivencia del ecosistema y la vida, en todos los aspectos, del territorio y de su población. Estos mínimos que deben

---

<sup>1</sup> Vide PRAT, N. en “Afecciones al Bajo Ebro derivadas del PHN, alternativas y necesidad de un nuevo modelo de gestión del agua”.

preservarse son, según los estudios del catedrático Narcís Prat, del Departamento de Ecología de la Universidad de Barcelona, los siguientes:

- 1) Un caudal mínimo para contener la penetración de la cuña salina, provocada por los caudales bajos, en la zona de Deltebre. Ello implica mantener una cierta reserva de agua en los embalses para estos fines. Este caudal mínimo puede concretarse en  $3.500 \text{ hm}^3/\text{año}$ .
- 2) Un caudal mínimo durante el invierno para mantener la necesaria renovación y oxigenación de la corriente fluvial, y que a la vez mantendrá el equilibrio entre aguas dulces y las aguas marinas en áreas más próximas a la desembocadura, circunscribiendo la cuña salina a la zona estuarina final del río. Ello puede suponer un aumento de  $3.100 \text{ hm}^3/\text{año}$ , en el régimen mínimo de caudales, durante tres meses.
- 3) Un régimen de caudal en crecidas para aportar los sedimentos necesarios para la subsistencia de la plana deltaica y para aflorar las aguas marinas, que posibilitará un aumento cuantitativo y cualitativo de la producción pesquera en las zonas próximas a la desembocadura e incluso más allá de las mismas (para este último caso, las avenidas deben ser en primavera). El transporte de 5 millones de toneladas de sedimentos necesita de unos  $1.000 \text{ m}^3/\text{seg.}$  durante unos 57'8 días. Todo ello supone la necesidad de un aumento de  $3.000 \text{ hm}^3/\text{año}$ .
- 4) Un cierto régimen de caudal del río Ebro para gestionar y disminuir los episodios de anoxia en la cuña salina, fenómeno éste que es producto de la combinación, entre otros factores, de la cuña salina y de las elevadas concentraciones de nutrientes (nitrógeno, fósforo, potasio y otros microelementos contenidos en las aguas del río como consecuencia de los lixiviados propios de las zonas agrícolas y ganaderas de la cuenca). Para esto, deberían soltarse caudales del orden de  $400 \text{ m}^3/\text{seg.}$  durante 20 días, en verano, y por lo menos dos veces al año en los años medios. Ello supone, a su vez, un aumento en las necesidades de  $865 \text{ hm}^3/\text{año}$ .
- 5) Una cantidad de agua necesaria para los regantes que ya poseen concesiones administrativas para el riego de los terrenos de ambos márgenes del tramo inferior, a través, básicamente, de las correspondientes Comunidades de Regantes (concretamente la Comunidad General de Regantes del Canal de la Derecha del Ebro y la Comunidad de Regantes-Sindicato Agrícola del Ebro), cifrada en  $824 \text{ hm}^3/\text{año}$ .
- 6) Un determinado volumen de agua para llevar a cabo las medidas agroambientales (inundación de otoño), que supondría una cantidad de  $190 \text{ hm}^3/\text{año}$ .
- 7) La concesión administrativa otorgada por la ley 18/1981, de abastecimiento de municipios e industrias de Tarragona (el denominado "minitransvase"), hasta un máximo de  $4'00 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , equivalentes a  $126 \text{ hm}^3/\text{año}$ . Estas aguas se derivan desde la estación de bombeo de Campredó-Tortosa.

En total, pues, estamos hablando de un volumen total de necesidades mínimas básicas que puede cifrarse alrededor de  $11.605 \text{ hm}^3/\text{año}$  (que suponen  $368 \text{ m}^3/\text{seg.}$  en caudal ficticio continuo, aguas arriba del azud de Xerta-Tivenys, coincidente con nuestras consideraciones anteriores), que constituye un caudal

absolutamente imposible de garantizar si se llevan a cabo las previsiones del Plan Hidrológico Nacional.

De este modo, las necesidades hídricas estimadas para el tramo final del Ebro pueden resumirse en la siguiente tabla:

<b>NECESIDADES HÍDRICAS</b>	<b>CAUDAL (hm<sup>3</sup>/año)</b>
Contener la cuña salina	3.500
Caudal mínimo invernal	3.100
Crecidas para sedimentos y afloramiento marino	3.000
Gestionar las anoxias en la cuña salina	865
Agua para los regantes	824
Minitrasvase a Tarragona	126
Medidas agroambientales	190
<b>TOTAL</b>	<b>11.605</b>

Debe tenerse en cuenta, además, que en los 20 años del periodo comprendido entre los años hidráulicos 1979/80 y 1998/99, dicho caudal anual ha sido solamente superado en cinco ocasiones (el 25% del tiempo total).

**Según los datos anteriormente expuestos, por tanto, resulta imposible garantizar cabalmente un trasvase de 1.050 hm<sup>3</sup>/año si lo que se desea es diseñar un sistema de gestión adecuado para el mantenimiento de los usos y necesidades ambientales del tramo final del río Ebro.**

Por otra parte, las futuras perspectivas de reducción de las aportaciones por el efecto combinado del aumento progresivo de la cobertura forestal de la cuenca y del cambio climático, merecen una atención especial e ineludible de cara a la planificación futura del uso de los recursos hídricos de la cuenca del Ebro. Hay que tener en cuenta, al respecto, que las drásticas consecuencias del cambio climático sobre los recursos hídricos para la cuenca del Ebro podrían suponer una pérdida del 16% de dichos recursos hacia el año 2060.<sup>2</sup>

## 2.2. NUESTROS ESTUDIOS ANTERIORES

---

<sup>2</sup> Vide AYALA-CARCEDO, F.J. E IGLESIAS, A. 2000. Impactos del posible cambio climático sobre los recursos hídricos, el diseño y la planificación hidrológica en la España Peninsular. *El Campo de las Ciencias y las Artes* 137:201-222.

Estos datos han sido contrastados con otros estudios anteriormente realizados por el que suscribe<sup>3</sup> acerca de los caudales aforados en las estaciones foronómicas núms. 121 (Flix) y 27 (Tortosa), según los datos obtenidos de la propia Confederación Hidrográfica del Ebro. La primera de estas series temporales está constituida por 14 años hidráulicos, mientras que la segunda se presenta por 20 años naturales. Se estudió, así mismo, una serie de 60 años hidráulicos (desde el 1913-14 hasta el 1988-89, excluyendo los años de la Guerra Civil española y posteriores hasta el 1950, por falta de datos. Por cierto que el PHN-2001 cuestiona la validez de los datos antiguos con razonamientos un tanto dudosos). Después de los cuadros o tablas correspondientes, que pueden verse a continuación, se exponen los gráficos resultantes de la proyección por la regresión lineal efectuada, con la consideración de las medias y otras especificaciones estadísticas de interés.

Tabla 5.4. Caudales en la estación foronómica de Flix

---

<sup>3</sup> Vide J.M. FRANQUET en *Enginyeria Agronòmica*, nº: 2, noviembre de 1990. *Col·legi Oficial d'Enginyers Agrònoms de Catalunya*. Barcelona.

ESTACIÓ DE FLIX. (FORONÒMICA Nº121) (CABALS EN M<sup>3</sup>/SG.)

ANY HIDRAULIC	OCT.	NOV.	DES.	GEN.	FEB.	MAR.	ABR.	MAY.	JUN.	JUL.	AGO.	SET.	MITJANES		
													$\bar{X}$	$\bar{X}_3$	
1 1973 - 74	249,6	281,2	262,1	269,9	355,4	867,5	889,5	438,6	358,5	309,2	204,5	351,7	402,8	-	1
2 74 - 75	433,2	531,0	434,8	290,9	542,1	357,5	778,9	487,0	751,4	353,8	187,8	256,2	448,2	381,8	2
3 75 - 76	259,1	363,5	453,2	314,7	438,0	363,2	365,0	246,2	214,7	207,6	142,9	169,2	294,5	427,2	3
4 76 - 77	180,4	462,9	408,0	725,4	763,5	507,5	325,6	758,2	1.078,9	513,5	381,1	386,1	538,8	476,3	4
5 77 - 78	486,4	371,8	427,4	451,2	1.429,5	1.167,1	819,9	850,9	533,7	788,1	172,5	141,4	595,5	568,7	5
6 78 - 79	223,4	281,1	289,1	651,0	1.609,2	707,4	870,5	654,6	937,5	292,7	158,9	299,2	571,8	535,8	6
7 79 - 80	569,4	630,1	499,1	630,7	363,2	430,2	430,4	531,5	485,9	270,9	145,7	291,6	440,0	467,0	7
8 80 - 81	294,9	322,2	560,4	898,7	479,1	299,5	485,0	463,9	231,4	240,7	145,6	250,3	389,3	383,1	8
9 81 - 82	207,8	290,6	265,4	553,1	564,0	700,5	323,1	169,9	236,1	153,6	138,5	226,2	319,9	394,4	9
10 82 - 83	258,0	814,0	1.010,0	655,0	466,0	539,0	603,0	366,0	228,0	246,0	177,0	327,0	474,0	379,1	10
11 83 - 84	253,0	258,0	279,0	334,0	541,0	423,0	470,0	659,0	626,6	205,5	134,1	162,2	343,3	403,7	11
12 84 - 85	188,0	686,0	585,5	561,2	568,4	460,0	320,0	505,0	321,0	200,6	158,9	148,3	393,8	328,1	12
13 85 - 86	123,0	176,0	124,0	175,0	477,0	341,0	460,0	433,0	248,0	146,0	114,0	147,0	247,3	302,9	-
14 86 - 87	203,0	280,0	205,0	236,0	543,0	302,0	411,9	205,0	149,0	213,0	206,0	257,0	267,6	-	-
MITJANA	280,7	410,6	414,5	481,9	652,8	533,2	539,5	483,5	457,2	295,8	176,3	243,8	409,1	420,7	
$\sigma$	122,5	181,0	210,8	209,1	368,1	239,9	204,5	193,5	282,5	163,4	62,4	78,4	105,9	75,6	
CV.	0,44	0,44	0,51	0,43	0,56	0,45	0,38	0,40	0,62	0,55	0,35	0,32	0,26	0,18	

$\bar{X}$  = mitjana aritmètica

$\sigma$  = desviació típica o "standard" (quadràtica mitjana).

CV = coeficient de variació de Pearson (mesura de dispersió relativa)

$\bar{X}_3$  = mitjana aritmètica mòbil de grau 3.

Las dos regresiones lineales MCO efectuadas para las medias aritméticas (14 años hidráulicos) y las medias móviles de orden 3 (12 años hidráulicos), que arrojan similares resultados, son las siguientes:

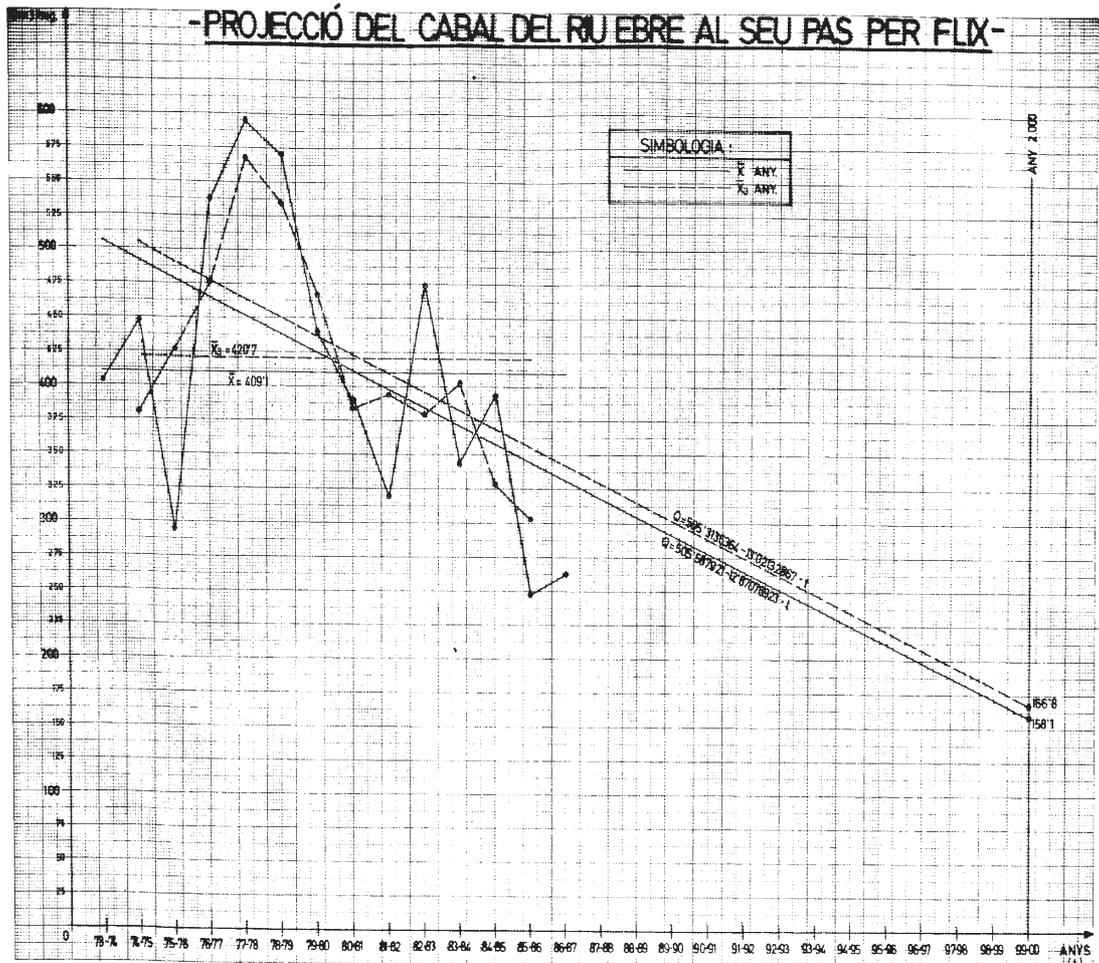


Fig. 5.1. Proyección del caudal en Flix

Por lo que se refiere a la estación foronómica n°: 27 de Tortosa, como ya se ha dicho, se ha considerado una serie temporal de 20 años naturales, obteniéndose unos resultados ligeramente superiores a los de la estación foronómica n°: 121 de Flix, referente a los registros de caudales. A saber:

Tabla 5.5. Caudales en la estación foronómica de Tortosa

ESTACIÓ DE TORTOSA (FORONÒMICA Nº 27):  
(CABALS EN M<sup>3</sup>/SEG.)

Any natural	Nº Ordre	AGOST	J - A - S - O	$\bar{X}$ any
1.966	1	80,35	263,35	598,69
1.967	2	92,87	143,26	440,49
1.968	3	135,35	178,47	495,62
1.969	4	175,87	249,92	555,47
1.970	5	93,81	179,09	460,39
1.971	6	160,06	229,01	448,69
1.972	7	220,23	325,09	621,85
1.973	8	220,19	282,54	409,09
1.974	9	162,00	230,11	373,90
1.975	10	134,75	273,96	437,26
1.976	11	101,37	158,28	281,88
1.977	12	287,29	274,39	492,91
1.978	13	122,83	219,59	569,67
1.979	14	107,00	164,28	541,21
1.980	15	88,67	218,64	316,69
1.981	16	93,88	156,66	306,70
1.982	17	93,26	117,96	237,77
1.983	18	141,13	203,77	446,61
1.984	19	141,00	210,91	351,46
1.985	20	209,00	219,54	402,08
$\bar{X}$		143,05	214,94	439,42
$\sigma$		54,36	52,08	104,53
CV.		0,38	0,24	0,24

$\bar{X}$  = mitjana aritmètica

$\sigma$  = desviació típica o "standard" (quadràtica mitjana).

CV = coeficient de variació de Pearson (mesura de dispersió relativa)

J - A - S - O = juliol - agost - setembre - octubre.

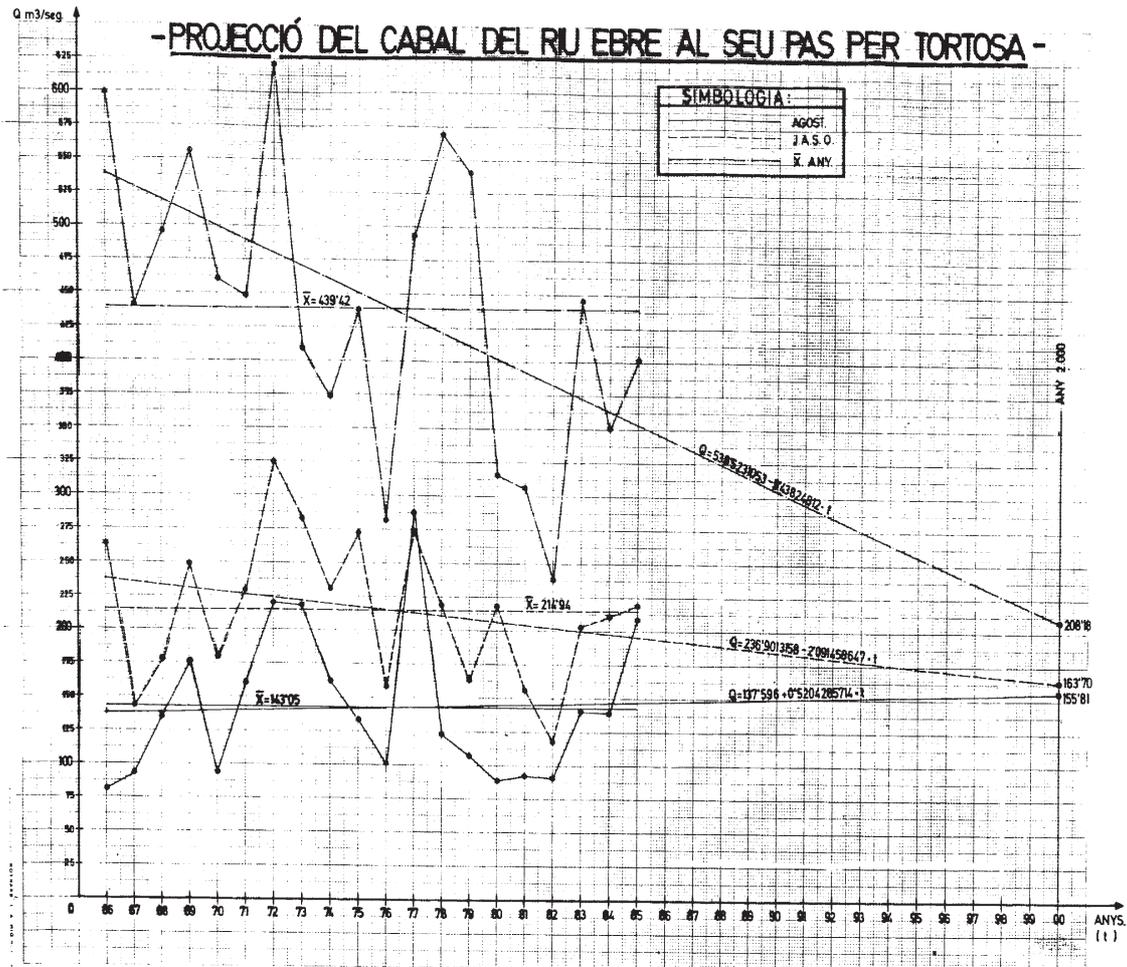


Fig. 5.2. Proyección del caudal en Tortosa

Con relación a las tres series históricas o cronológicas estudiadas, que nos han ayudado a determinar la tendencia secular por el método analítico de los mínimos cuadrados ordinarios (MCO), es necesario hacer la consideración de que los valores que toma la variable aleatoria estadística "caudal del río Ebro" -correspondientes al fenómeno cuantitativo cuyo desarrollo en el tiempo es objeto de nuestro estudio- son fruto de la conjunción de numerosos factores que actúan simultáneamente. Todas estas fuerzas, heterogéneas y de muy diversos tipos, las podemos clasificar o agrupar en cuatro grandes componentes o movimientos característicos y que será necesario tener muy en cuenta en posteriores estudios sobre estos mismos temas. A saber:

a) **Tendencia secular:** Es el movimiento pausado o regular latente en una serie durante un período de tiempo suficientemente largo, o sea, una dirección predominante. Se trata del comportamiento "medio", por decirlo de esta manera, de la serie en el tiempo. Intuitivamente, la tendencia de una serie cronológica caracteriza la pauta gradual y estable de sus modificaciones, atribuidas a la acción de fuerzas persistentes que afectan al crecimiento o la mengua de los caudales y que ejercen su influencia con más o menos lentitud. En las figuras

correspondientes, se trata de la línea recta o curva trazada a lo largo de toda la serie y que nos muestra la tendencia lineal o no de dicha serie temporal.

b) **Variaciones estacionales y periódicas:** Muchas variables, y en nuestro caso el caudal de agua descendente por el río Ebro, están influidas por las estaciones o meses del año, dando lugar a movimientos de tipo cíclico, dentro de un mismo período anual. Y así, vemos como, sistemáticamente, en los meses de verano el caudal de agua baja, mientras que a partir del mes de octubre se incrementa considerablemente.

c) **Variaciones cíclicas:** Nos referimos aquí a las oscilaciones, de larga duración, en un entorno de la línea de tendencia, producidas, por ejemplo, por períodos de sequía plurianuales. Se definen, a veces, como la variación que resta en una serie histórica tras eliminar las variaciones de tendencia, estacionales y accidentales. El tema, en realidad, es mucho más complejo, pero en el análisis clásico tal proceso de eliminación constituye la manera usual de medir la variación cíclica. Estos "ciclos" (así denominados a veces) pueden ser o no periódicos, es decir, pueden seguir o no los mismos caminos después de intervalos de tiempos iguales. Para que estas variaciones puedan ser observadas, es necesario que el período que comprende la serie temporal analizada sea suficientemente amplio e incluya un elevado número de años.

d) **Variaciones accidentales:** Son un tipo de movimientos, irregulares o azarosos, que registran las series temporales como consecuencia de las circunstancias esporádicas o eventuales (inundaciones, averías en los embalses reguladores...). Estas variaciones se reducen, entonces, a movimientos pasajeros en la trayectoria histórica de la serie. Aunque se supone, normalmente, que las citadas circunstancias atípicas producen variaciones que sólo duran un determinado espacio de tiempo, lo cierto es que pueden ser tan intensas que originen un nuevo ciclo u otros movimientos. La mayoría de las veces, las variaciones irregulares debidas a la ocurrencia de acontecimientos especiales se pueden reconocer e identificar fácilmente con los fenómenos que las causaron (por ejemplo, grandes lluvias); entonces, los datos que reflejan su impacto se pueden simplemente eliminar con anterioridad a la medición de los otros componentes de la serie cronológica. En cuanto a los tipos de fluctuaciones aleatorias por esencia, poco hay que decir, excepto que tienden a compensarse a largo plazo.

Evidentemente, para hacer predicciones acertadas con cierto grado de verosimilitud, no solamente es necesario que la expresión analítica de la función matemática de tendencia presente un suficiente grado de ajuste a las observaciones obtenidas del comportamiento pretérito del fenómeno en estudio, sino que, además, es conveniente la limitación de la prognosis a un futuro próximo, al objeto de asegurar que las diversas circunstancias que han generado las cuantificaciones históricas del fenómeno seguirán prevaleciendo en el momento al que se refiere la predicción.

Posiblemente, por esta fundamental razón, nos limitamos a analizar lo que puede ocurrir con el caudal del río en su paso por Tortosa y Flix en el año 2002, que es una fecha un poco mágica, por un lado, y al mismo tiempo coincidente con la de la publicación de este libro. Las proyecciones minimocuadráticas realizadas (ciertamente con un coeficiente de determinación bajo, dada la independencia, aleatoriedad, o falta de correlación entre ambas variables analizadas) predicen unos caudales medios anuales descendentes por el río, de 208'18 y 158'10 m<sup>3</sup>/seg, respectivamente, a su paso por Tortosa y Flix, que serán del todo insuficientes como para sostener la demanda de agua del tramo inferior, que ya actualmente se puede estimar, muy simplifcativamente, de la siguiente manera:

- Abastecimiento de poblaciones	2'00 m <sup>3</sup> /seg
- Riegos y otros usos agrarios	60'00 "
- Usos industriales	5'00 "
- Caudal mínimo medioambiental y pérdidas en el tramo	158'00 "
<hr/>	
Totales necesarios	225'00 m <sup>3</sup> /seg

que se tendrían que verter, como mínimo, en Ribarroja y Flix, y aún ello considerando una previsión de caudal "medioambiental" ciertamente baja (podría incrementarse, perfectamente, en 200 m<sup>3</sup>/seg. teniendo en cuenta las consideraciones anteriores). Nótese, al respecto, que se ha considerado un caudal ecológico o "mínimo medioambiental" notablemente inferior al que se viene propugnando en los estudios más recientes, que lo fijan, como hemos visto, en unos 300 m<sup>3</sup>/seg. (de media anual, adaptado al hidrograma natural del río Ebro) aguas abajo del azud de Xerta-Tivenys.

Estos caudales previstos descendentes por el río en su tramo final, resultan claramente insuficientes, no ya sólo para el abastecimiento agrícola, industrial y urbano del tramo inferior del río, sino que ni siquiera cubren el denominado caudal "medioambiental" que, según estudios recientes, puede estimarse no inferior a los 200 m<sup>3</sup>/seg en épocas de estiaje, pese a que el denominado "caudal de compensación en la desembocadura" se prevé, en el Plan Hidrológico Nacional, del orden de sólo 100 m<sup>3</sup>/seg (3.154-3.139 hm<sup>3</sup>/año). Y ello pese a que todavía no existe una normativa específica ni unos estudios rigurosos al respecto, teniéndose en cuenta simplemente cierta legislación francesa que, obviamente, no se adecua a las características edafo-climáticas de la cuenca del Ebro.

Por otra parte, las aportaciones consideradas en el Plan Hidrológico de la Cuenca del Ebro, con carácter fijo, ascienden a 18.212 hm<sup>3</sup>/año (577 m<sup>3</sup>/seg en caudal ficticio continuo), cifras éstas que están en absoluta contradicción con los caudales históricamente aportados y las previsiones de evolución de los mismos a las que antes nos hemos referido, como tendremos ocasión de estudiar con mayor

detalle posteriormente. De hecho, el PHN-2001, después de reducirlas en casi 1.000 hm<sup>3</sup>/año, ya sólo contempla unas aportaciones medias del río en régimen natural del orden de 17.265 hm<sup>3</sup>/año.

Por último, y también con los datos suministrados por la misma Confederación Hidrográfica del Ebro, se ha realizado un ajuste mínimo-cuadrático por regresión lineal a la serie cronológica o temporal de los 60 años hidráulicos -de los que se tiene constancia- transcurridos desde 1913-14 hasta el 1988-89, lo que arroja una media aritmética de 495'55 ≈ 496 m<sup>3</sup>/seg para la serie original, con predicciones de caudal efectuadas al 31 de Marzo del año 2000 de 273'6 m<sup>3</sup>/seg, 285'3 m<sup>3</sup>/seg ó 301'9 m<sup>3</sup>/seg, según el tipo de corrección o suavización de la tendencia empleado, por el método de las medias móviles de orden 3.

Así pues, sólo debe considerarse, para el año 2000, una aportación media máxima en Tortosa próxima a los 300 m<sup>3</sup>/seg, equivalentes a 9.461 hm<sup>3</sup>/año, y ello con la perspectiva que ofrece la serie cronológica de 60 años hidráulicos, la mayor empleada en los estudios realizados sobre el río Ebro. Ahora mismo, como puede comprobarse, esta previsión efectuada por el autor ha quedado confirmada por la realidad<sup>4</sup>.

Veamos, no obstante, que en la misma estación foronómica de Tortosa y con la perspectiva de 20 años naturales a la que nos hemos referido anteriormente (1966-85), se tendrían sólo 208'18 m<sup>3</sup>/seg, que equivale a 6.565 hm<sup>3</sup>/año.

Considerando, en fin, una previsión media de cálculo de: Q = 248 m<sup>3</sup>/seg. (50% de la media aritmética de todo el período), implicarán una aportación de sólo 7.821 hm<sup>3</sup>/año, volumen éste también inferior a los 9.500 hm<sup>3</sup>/año (301 m<sup>3</sup>/seg.) previstos en el Plan.

Complementariamente, la consideración de los caudales previsibles en la estación de aforos de Flix arrojaría, incluso, caudales inferiores a los ya expuestos para la estación de Tortosa.

Ya en anteriores planificaciones previstas por la Administración Central, las cifras no cuadraban. Por lo que se refiere, más específicamente, al tramo final del río Ebro, la situación prevista para el horizonte 2012 como resultado de las transferencias hidráulicas anunciadas en el Art. 74 ("Fijación de volúmenes máximos de transferencia de recursos") del anterior Anteproyecto de Ley del PHN de 1993, sería la siguiente:

---

<sup>4</sup> Efectivamente, el año hidráulico 1999/00 ofreció 6.987 hm<sup>3</sup>/año mientras que el 2000/01 arrojó 12.630 hm<sup>3</sup>/año, que ofrecen una media de 9.815 hm<sup>3</sup>/año, frente a los 9.461 hm<sup>3</sup>/año previstos por este autor en su ajuste lineal. El último año hidráulico conocido 2001/02 arrojó una aportación de sólo 4.058 hm<sup>3</sup>/año, que resulta ser la menor de toda la serie histórica o temporal, lo que confirma el carácter inequívocamente descendente de la función del caudal a su paso por la estación foronómica nº: 27 (Tortosa).

**Situación del Ebro en el año 2012 (en el tramo final: Tortosa)**

-Q (previsto)	=	251'00 m <sup>3</sup> /seg.
-Transferencias netas	=	-54'00 "
-Consumo propia cuenca	=	-140'00 "
<hr/>		
(aportaciones en tramo final)		+ 57'00 m <sup>3</sup> /seg.
(necesidades en tramo final)		- 225'00 "
<hr/>		
BALANCE	=	- 168'00 m <sup>3</sup> /seg.
<hr/> <hr/>		

Si se reducen, en la realidad, los consumos ciertamente exagerados de la cuenca del Ebro previstos en el correspondiente Plan Hidrológico, la nueva situación hubiera quedado así:

-Q (regulado)	=	155'00 m <sup>3</sup> /seg.
-Trasvases proyectados	=	-67'00 "
<hr/>		
(aportaciones en tramo final)		+ 88'00 m <sup>3</sup> /seg.
(necesidades en tramo final)		- 225'00 "
<hr/>		
BALANCE	=	- 137'00 m <sup>3</sup> /seg.
<hr/> <hr/>		

Como puede observarse, en ninguno de ambos supuestos quedaban asegurados los caudales en el tramo final del río. Muy al contrario, los balances eran espectacularmente negativos. Pero lo que resulta todavía más preocupante: aún en el caso de suponer unos trasvases proyectados en el PHN 2001 del orden de sólo 17 m<sup>3</sup>/seg. (del orden del 50% de los previstos: 1.050 hm<sup>3</sup>/año), el balance final resultante seguiría siendo negativo de -87'00 m<sup>3</sup>/seg.

**2.3. EXCEDENTES *VERSUS* DÉFICITS**

La mayoría de las disposiciones concernientes a las transferencias hídricas entre cuencas se encuentran en el Título II del ALPHN-1993, donde se definían los conceptos de “cuenca excedentaria” y “cuenca receptora”, y en el que vienen expresados los “volúmenes de reserva” y los “volúmenes de transferencia de recursos” (CIP, 1994)<sup>5</sup>.

El Artículo 64 del citado Anteproyecto definía la característica principal de las cuencas cedentes del siguiente modo: *Las cuencas cedentes de recursos deben ser globalmente excedentarias en recursos hidráulicos, determinándose el carácter excedentario según las reglas de cómputo que se contienen en el artículo 66 de esta Ley;* que dice textualmente lo siguiente:

1. *Se entenderá que en un sistema de explotación de recursos se produce un **excedente** en un período y ámbito territorial determinado, cuando, de acuerdo con las normas de utilización y las reglas de explotación del sistema y atendidas las demandas con las garantías establecidas, existe un superávit del recurso.*

Al respecto cabría decir que, como se ha comprobado, las normas de gestión de los sistemas hidráulicos existentes pueden ser mejoradas en gran medida, por lo que no son un invariable a la hora de definir 108 excedentes o déficits de un sistema. Por otra parte, las garantías establecidas no han sido establecidas en el propio PHN. Sobre este particular el único documento que puede servir de guía es la Orden Ministerial 249/1992 de Instrucciones Técnicas para los Planes Hidrológicos de Cuenca (MOPT, 1992), en las que se definen determinados valores de las garantías asignadas a los usos urbano, agrícola e industrial y en donde nada se dice, por cierto, del uso ecológico del agua. La demanda ecológica del agua, con su debido criterio de garantía a satisfacer, debería figurar entre las variables que sirven para caracterizar a una cuenca como excedentaria o bien como receptora de agua.

Continúa el citado Artículo 66 del siguiente modo:

2. *Se entenderá que se produce un **déficit** en un sistema de explotación de recursos cuando no sea posible atender la demanda con las posibilidades hídricas del sistema incluyendo en ellas las actuaciones dirigidas al ahorro de agua, la utilización coordinada de aguas superficiales y subterráneas, la utilización de retornos y otras medidas técnicas, en función de criterios de viabilidad técnicos, económicos y ambientales.*

3. *Se entenderá por “excedentes o déficits globales” de una cuenca los que resulten del conjunto de sus sistemas de explotación de recursos.*

Veamos que la elaboración del balance hidráulico de cada cuenca hidrográfica (PHC), o del conjunto de todas ellas (PHN), es la técnica habitualmente empleada para obtener una imagen representativa de su situación hidrológica en un momento dado. **El balance se realiza entre los recursos**

---

<sup>5</sup> Centro de Investigación para la Paz.

disponibles en su ámbito geográfico y sus demandas totales; su resultado (positivo o negativo) denuncia, respectivamente, el estado global "excedentario" o "deficitario" correspondiente a cada cuenca. La simulación matemática de los sistemas de explotación debe permitir, además, identificar y cuantificar los déficits de carácter local que podrían quedar enmascarados en el balance global de la cuenca. Entre estos déficits locales deberían ser incluidos los volúmenes procedentes de acuíferos sobreexplotados, ya que el remedio de tal situación debe constituir uno de los objetivos fundamentales de la planificación hidráulica.

### 3. LOS AJUSTES ESTADÍSTICOS MÁS RECIENTES

#### 3.1. LAS APORTACIONES DEL RÍO EBRO EN TORTOSA

En los últimos tiempos se ha puesto en marcha el Sistema Automático de Información Hidrológica y de Comunicación Fónica de la Cuenca Hidrográfica del Ebro (SAIH-EBRO), que responde a la necesidad de racionalizar y agilizar el proceso de toma de decisiones en tres aspectos fundamentales relacionados con la gestión hidráulica de la Cuenca antedicha, esto es:

- Gestión global de los recursos hidráulicos con el fin de optimizar su asignación y explotación (abastecimientos urbanos e industriales, regadíos, centrales hidroeléctricas, etc.).
- Previsión y actuación en situaciones de avenidas, con objeto de minimizar los daños y perjuicios de toda índole causados por las mismas.
- Vigilancia exhaustiva de los niveles de contaminación de las aguas de los ríos y de los canales.

Para cumplir eficazmente todos estos objetivos se ha dispuesto de una red de telemetría y telecontrol que transmite y procesa todas las variables captadas *on line*.

Basándonos ahora en los datos suministrados por la propia CHE (Confederación Hidrográfica del Ebro), los caudales registrados en toda la larga serie histórica o cronológica de que se dispone, en la estación foronómica nº: 27 de Tortosa (la última antes de la desembocadura), expresados respectivamente en  $m^3/seg$  y  $hm^3/año$ , son los siguientes:

Tabla 5.6. Aportaciones del río Ebro en Tortosa ( $m^3/seg$ )

ESTACIÓN DE AFOROS nº: 27		RÍO EBRO EN TORTOSA											SUPERFICIE DE LA CUENCA: 84.230 $km^2$		
CAUDALES MEDIOS MENSUALES EN $m^3/seg$														MEDIA ANUAL	APORT. ( $hm^3$ )
AÑO	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP			
1960-61	1.253	1.216	1.126	1.983	1.129	465	311	311	450	122	92	135	715	22.540	

CAPÍTULO V

1961-62	424	1.086	1.069	1.125	1.056	1.343	1.026	586	425	137	31	67	695	21.933
1962-63	250	463	636	1.027	625	767	965	380	455	285	461	413	560	17.657
1963-64	263	709	903	349	563	841	973	476	484	96	53	89	482	15.240
1964-65	270	283	526	660	472	886	426	208	112	102	50	107	342	10.784
1965-66	658	825	866	804	946	938	504	627	617	174	80	140	596	18.803
1966-67	255	1.044	890	518	472	654	658	268	213	127	93	97	440	13.870
1967-68	138	789	848	1.085	556	561	618	369	415	156	135	251	493	15.584
1968-69	255	285	435	473	399	1.158	1.357	1.001	565	318	185	251	557	17.581
1969-70	323	343	547	1.245	933	755	364	290	324	170	94	129	458	14.435
1970-71	145	175	261	313	343	333	570	1.571	973	372	160	242	455	14.359
1971-72	285	376	542	679	1.423	1.011	734	669	692	311	220	488	615	19.456
1972-73	513	480	423	539	705	514	313	218	568	236	220	161	405	12.781
1973-74	202	234	233	260	333	904	922	390	308	270	162	286	375	11.826
1974-75	390	504	412	275	560	349	783	476	791	347	135	222	434	13.701
1975-76	225	344	435	305	420	351	334	204	189	177	101	131	267	8.455
1976-77	146	429	361	731	785	465	246	693	1.115	367	287	297	491	15.476
1977-78	427	274	357	382	1.647	1.280	770	800	455	223	123	105	563	17.761
1978-79	145	199	224	621	1.801	686	873	560	911	197	107	208	534	16.840
1979-80	427	472	374	482	266	299	279	413	352	180	89	182	318	10.064
1980-81	191	224	431	877	364	215	354	340	159	167	94	175	299	9.443
1981-82	130	201	183	439	458	591	235	119	155	100	93	148	236	7.457
1982-83	184	789	1.035	638	445	510	569	322	178	209	141	281	442	13.926
1983-84	213	263	280	319	515	416	419	593	573	204	103	190	339	10.735
1984-85	267	666	533	558	613	437	332	487	314	175	143	206	393	12.382
1985-86	85	166	109	159	480	356	424	407	222	109	64	80	220	6.926
1986-87	153	263	191	222	531	333	382	156	88	126	102	146	222	6.999
1987-88	288	389	571	545	963	565	1.071	759	730	534	239	251	573	18.117
1988-89	229	276	225	182	119	80	118	212	76	125	86	76	151	4.756
1989-90	71	130	182	182	193	94	167	139	162	107	103	106	136	4.283
1990-91	160	157	261	349	281	480	647	681	150	130	165	129	300	9.449
1991-92	96	166	271	146	124	98	431	178	304	219	123	146	191	6.054
1992-93	629	793	775	289	167	223	208	319	178	115	132	126	331	10.434
1993-94	233	345	304	790	495	270	306	208	135	82	89	84	277	8.745
1994-95	178	435	211	717	350	603	121	96	68	69	70	66	249	7.842
1995-96	69	81	138	785	907	557	324	394	269	98	111	196	325	10.292
1996-97	180	252	968	1.349	666	290	191	239	317	172	183	188	416	13.124
1997-98	167	294	795	628	430	305	254	381	243	155	135	111	325	10.251
1998-99	126	129	250	280	347	359	161	247	141	120	127	133	201	6.343
<b>MEDIA</b>	273	424	492	598	612	547	506	430	381	189	133	175	395	12.480

Tabla 5.7. Aportaciones del río Ebro en Tortosa (hm<sup>3</sup>/año)

ESTACIÓN DE AFOROS nº: 27

RÍO EBRO EN TORTOSA

SUPERFICIE DE LA CUENCA: 84.230 km<sup>2</sup>

*APORTACIONES en hm<sup>3</sup>/año*

AÑO	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	MEDIA MENSUAL	APORT. ANUAL
1960-61	3.356	3.152	3.016	5.311	2.731	1.245	806	833	1.166	327	246	350	1.878	22.540

1961-62	1.136	2.815	2.863	3.013	2.554	3.597	2.659	1.570	1.102	367	83	174	1.828	21.933
1962-63	670	1.200	1.703	2.751	1.512	2.054	2.501	1.018	1.179	763	1.235	1.070	1.471	17.657
1963-64	704	1.838	2.419	935	1.411	2.253	2.522	1.275	1.255	257	142	231	1.270	15.240
1964-65	723	735	1.409	1.766	1.141	2.373	1.104	557	289	274	135	278	899	10.783
1965-66	1.762	2.138	2.319	2.153	2.288	2.512	1.306	1.679	1.599	466	214	363	1.567	18.803
1966-67	683	2.706	2.384	1.387	1.142	1.752	1.706	718	552	340	249	251	1.156	13.870
1967-68	370	2.045	2.271	2.906	1.393	1.503	1.602	988	1.076	418	362	651	1.299	15.584
1968-69	683	739	1.165	1.267	965	3.102	3.517	2.681	1.464	852	496	651	1.465	17.581
1969-70	865	889	1.465	3.335	2.257	2.022	943	777	840	455	252	334	1.203	14.434
1970-71	387	453	698	837	830	892	1.478	4.207	2.522	997	429	629	1.197	14.359
1971-72	763	974	1.453	1.819	3.565	2.709	1.902	1.791	1.793	832	590	1.265	1.621	19.455
1972-73	1.375	1.243	1.134	1.444	1.704	1.376	810	584	1.472	632	590	417	1.065	12.781
1973-74	542	606	625	696	805	2.421	2.390	1.044	798	723	434	742	985	11.826
1974-75	1.045	1.306	1.102	737	1.355	936	2.029	1.274	2.050	929	361	577	1.142	13.701
1975-76	603	892	1.166	816	1.052	941	865	547	491	473	272	338	705	8.455
1976-77	392	1.111	967	1.958	1.898	1.244	639	1.855	2.889	984	769	769	1.290	15.476
1977-78	1.145	709	957	1.022	3.983	3.429	1.995	2.143	1.178	597	329	273	1.480	17.760
1978-79	389	516	601	1.664	4.356	1.836	2.263	1.500	2.362	528	288	538	1.403	16.839
1979-80	1.143	1.224	1.002	1.290	666	802	724	1.107	913	482	239	473	839	10.063
1980-81	511	581	1.155	2.348	881	575	917	911	411	447	252	454	787	9.443
1981-82	349	520	491	1.175	1.109	1.583	610	320	401	268	250	383	621	7.457
1982-83	493	2.045	2.772	1.709	1.076	1.366	1.475	862	461	560	378	728	1.160	13.926
1983-84	570	682	750	854	1.290	1.114	1.086	1.588	1.485	546	276	493	895	10.735
1984-85	715	1.726	1.428	1.495	1.483	1.170	861	1.304	814	469	383	534	1.032	12.381
1985-86	228	430	292	426	1.161	954	1.099	1.090	575	292	171	207	577	6.926
1986-87	410	682	512	595	1.284	892	990	418	228	337	273	378	583	6.999
1987-88	771	1.008	1.529	1.460	2.413	1.513	2.776	2.033	1.892	1.430	640	651	1.510	18.117
1988-89	613	715	603	487	288	214	307	567	198	336	232	197	396	4.756
1989-90	190	337	487	487	467	252	433	372	420	287	276	275	357	4.283
1990-91	429	407	699	935	680	1.286	1.677	1.824	389	348	442	334	787	9.449
1991-92	257	430	726	391	311	262	1.117	477	788	587	329	378	504	6.054
1992-93	1.685	2.055	2.076	774	404	597	539	854	461	308	354	327	870	10.434
1993-94	624	894	814	2.116	1.197	723	793	557	350	220	238	218	729	8.745
1994-95	477	1.128	565	1.920	847	1.615	314	257	176	185	187	171	653	7.842
1995-96	185	210	370	2.103	2.272	1.492	840	1.055	697	262	297	508	858	10.291
1996-97	482	653	2.593	3.613	1.611	777	495	640	822	461	490	487	1.094	13.124
1997-98	447	762	2.129	1.682	1.040	817	658	1.020	630	415	362	288	854	10.251
1998-99	337	334	670	750	839	962	417	662	365	321	340	345	529	6.343
MEDIA	731	1.100	1.317	1.601	1.494	1.466	1.312	1.153	989	507	356	455	1.040	12.479

El resumen de las aportaciones ( $\text{hm}^3/\text{año}$ ), así como la correspondiente fuente de los datos expuestos, es el siguiente:

Tabla 5.8. Resumen de las aportaciones ( $\text{hm}^3/\text{año}$ )

**APORTACIONES DEL RIO EBRO EN TORTOSA**

ESTACION DE AFOROS Nº 27. SUPERFICIE DE LA CUENCA 84.230  $\text{km}^2$

AÑO	APORTACIÓN (hm <sup>3</sup> )	FUENTE
1913-14	20.555	Resumen estadístico. Comisaría Ebro.(año 1969-70)
1914-15	31.288	"
1915-16	27.888	"
1916-17	24.838	"
1917-18	14.544	"
1918-19	25.293	"
1919-20	20.700	"
1920-21	17.660	"
1921-22	17.133	"
1922-23	14.755	"
1923-24	16.126	"
1924-25	12.322	"
1925-26	17.037	"
1926-27	19.491	"
1927-28	21.016	"
1928-29	10.940	"
1929-30	22.065	"
1930-31	19.197	"
1931-32	14.197	"
1932-33	14.385	"
1933-34	13.924	"
1934-35	15.077	"
1935-36	al 1950-51	No existen datos
1951-52	15.524	Resumen estadístico. Comisaría Ebro.(año 1969-70)
1952-53	12.350	"
1953-54	16.013	"
1954-55	8.942	"
1955-56	15.859	"
1956-57	8.270	"
1957-58	9.060	"
1958-59	14.256	"
1959-60	28.875	"
1960-61	22.540	Resumen anual de aforos. Comisaría Ebro.
1961-62	21.933	"
1962-63	17.657	"
1963-64	15.240	"
1964-65	10.784	"
1965-66	18.803	"
1966-67	13.870	"
1967-68	15.584	"
1968-69	17.581	"
1969-70	14.435	"

**APORTACIONES DEL RIO EBRO EN TORTOSA**

ESTACION DE AFOROS Nº 27. SUPERFICIE DE LA CUENCA 84.230 km<sup>2</sup>

AÑO	APORTACION (hm <sup>3</sup> )	FUENTE

<b>1970-71</b>	14.359	Resumen anual de aforos. Comisaría Ebro.
<b>1971-72</b>	19.456	"
<b>1972-73</b>	12.781	"
<b>1973-74</b>	11.826	"
<b>1974-75</b>	13.701	"
<b>1975-76</b>	8.455	"
<b>1976-77</b>	15.476	"
<b>1977-78</b>	17.761	"
<b>1978-79</b>	16.840	"
<b>1979-80</b>	10.064	"
<b>1980-81</b>	9.443	"
<b>1981-82</b>	7.457	"
<b>1982-83</b>	13.926	"
<b>1983-84</b>	10.735	"
<b>1984-85</b>	12.382	"
<b>1985-86</b>	6.926	"
<b>1986-87</b>	6.999	"
<b>1987-88</b>	18.117	"
<b>1988-89</b>	4.756	"
<b>1989-90</b>	4.283	"
<b>1990-91</b>	9.449	"
<b>1991-92</b>	6.054	"
<b>1992-93</b>	10.434	"
<b>1993-94</b>	8.745	"
<b>1994-95</b>	7.842	"
<b>1995-96</b>	10.292	"
<b>1996-97</b>	13.124	"
<b>1997-98</b>	10.251	"
<b>1998-99</b>	6.343	"
<b>1999-00</b>	6.987	fuelle CHE. Datos no computados
<b>2000-01</b>	12.630	fuelle CHE. Datos no computados
<b>2001-02</b>	4.058	fuelle CHE. Datos no computados

Con dichos datos (expresados en  $\text{hm}^3/\text{año}$ ) se ha elaborado el siguiente gráfico:

## APORTACIONES ANUALES DEL RIO EBRO EN TORTOSA (E.A.27) hm3

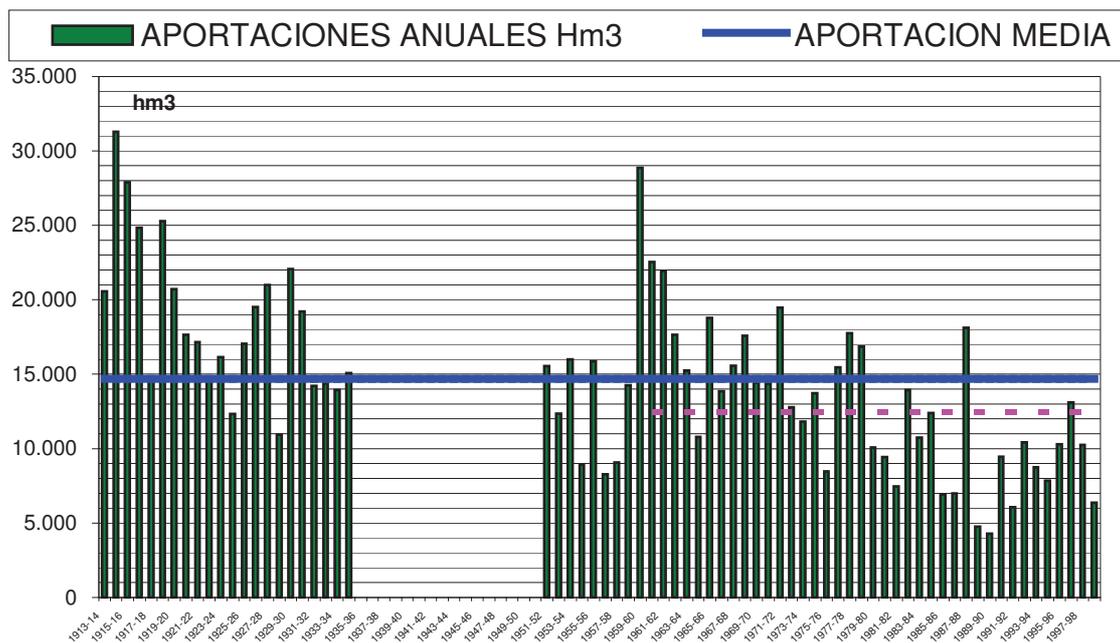


Fig. 5.3. Aportaciones anuales del río Ebro en Tortosa

### 3.2. COMPARACIÓN CON LAS CIFRAS DEL PHN

Veamos, en fin, que en base a la media de los caudales aforados en la E.A. nº: 27 de Tortosa en los últimos 14 años hidráulicos (sin computar los tres últimos conocidos, o sea, el 1999-00, el 2000-01 y el 2001-02), de llevarse a efecto los trasvases propuestos desde el tramo inferior del río Ebro, la situación quedaría establecida del siguiente modo:

#### Media de los 14 últimos años hidráulicos

$\bar{X} = 8.830 \text{ hm}^3/\text{año} \equiv 280 \text{ m}^3/\text{seg.}$	(Caudal medio en Tortosa)
– $3.721 \text{ hm}^3/\text{año} \equiv 118 \text{ m}^3/\text{seg.}$	( $\Delta$ consumo cuenca del Ebro)
– $1.050 \text{ hm}^3/\text{año} \equiv 33 \text{ m}^3/\text{seg.}$	(Trasvases previstos)
<hr/>	
$4.059 \text{ hm}^3/\text{año} \equiv 129 \text{ m}^3/\text{seg.}$	(Caudal futuro previsto en Tortosa)
<hr/>	
– $3.154 \text{ hm}^3/\text{año} \equiv 100 \text{ m}^3/\text{seg.}$	(Caudal mínimo según el PHN)
<hr/>	
$905 \text{ hm}^3/\text{año} \equiv 29 \text{ m}^3/\text{seg.}$	(Sobrantes)

Como puede observarse, nuestros estudios nos conducen a cifras substancialmente diferentes de las que nos indica el PHN-2001. En efecto, partiendo de las mismas aportaciones medias del río Ebro en régimen natural establecidas en  $17.265 \text{ hm}^3/\text{año}$ , se produce la siguiente dicotomía posicional (en la que JMF señala a este autor):

<b>PHN</b>		<b>JMF</b>
17.265	a. m. r. n.	17.265
- 5.500	caudal en Tortosa	- 8.435
- 3.400	consumo actual	- 3.721
- 3.154	Δ consumo Cuenca	- 3.154
	caudal mínimo medioambiental (PHN)	
5.211	excedente regular	1.955
- 1.050	trasvases	- 1.050
4.161	sobrantes	905

, lo que supone una diferencia en el excedente regular, en absoluto desdeñable, de  $5.211 - 1.955 = 3.256 \text{ hm}^3/\text{año}$ , equivalente a más de  $103 \text{ m}^3/\text{seg.}$  en caudal ficticio continuo, superior, incluso, al “caudal mínimo medioambiental” previsto en la desembocadura. Hay que tener en cuenta, al respecto, que en las alegaciones presentadas en noviembre del 2000 al entonces nuevo Anteproyecto de Ley del PHN, por parte del Gobierno de Aragón, dicha cifra del excedente regular quedaba reducida a  $44 \text{ hm}^3/\text{año}$ , mientras que, como ya hemos apuntado con anterioridad, por su parte, la Generalitat de Catalunya había pedido, en la misma tesitura, un caudal mínimo medioambiental de  $130/135 \text{ m}^3/\text{seg.}$  Pues bien, ambas peticiones anularían por completo las aportaciones futuras del río Ebro en su desembocadura y, en consecuencia, la posibilidad de realización de cualquier trasvase.

Gráficamente, la dicotomía numérica anterior puede expresarse del siguiente modo:

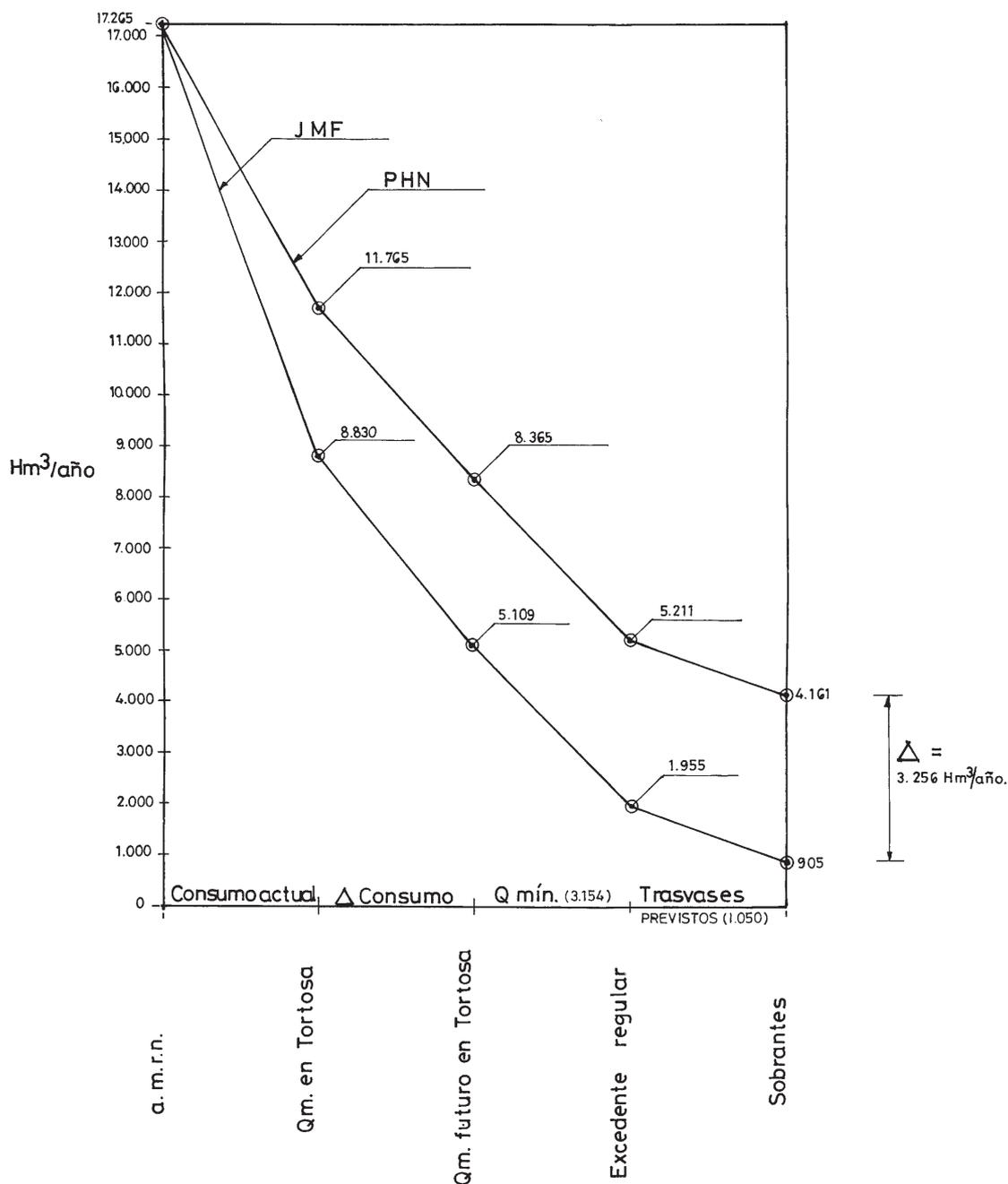


Fig. 5.4. Dicotomía posicional entre el PHN-2001 y el autor

De la contemplación de dicho gráfico y de las anteriores tablas estadísticas, se infieren, a simple vista, seis conclusiones inmediatas:

a) El carácter claramente descendente de la serie histórica o cronológica que nos ocupa (que, con obviedad, el nuevo PHN atribuye a un aumento de los consumos para los diferentes usos que ha tenido lugar a lo largo y ancho de la cuenca hidrográfica), circunstancia ésta que resulta corroborada por el análisis estadístico que de las diferentes funciones de ajuste minimocuadrático se realiza en el anexo número 2. Ello constituye, a nuestro juicio, un auténtico

“talón de Aquiles” del PHN-2001; el otro talón (el del otro pie) del Plan estriba, probablemente, en el hecho de que se prevea que más de un 50% de la financiación prevista de las infraestructuras necesarias lo sea con cargo a los Fondos Europeos de Cohesión. Y eso último, ante la perspectiva de la incorporación de 10 nuevos países a la Unión Europea en los próximos años y el esfuerzo financiero que ello conllevará, se nos antoja francamente difícil.

b) Que la aportación media de toda la serie no alcanza siquiera los 15.000 hm<sup>3</sup>/año, mientras que la aportación media del periodo comprendido entre los años hidráulicos 1960/61 y 1998/99 es de 12.479 hm<sup>3</sup>/año. La aportación oficialmente registrada en la Estación Foronómica nº: 27 (Tortosa) correspondiente al año hidráulico 1999/00 se cifra en 6.987 hm<sup>3</sup>/año, mientras que la penúltima de ellas, correspondiente al año hidráulico 2000/01 (considerado especialmente húmedo y lluvioso en la Cuenca del Ebro) asciende a 12.630 hm<sup>3</sup>/año lo que confirma, una vez más, el carácter descendente de la serie cronológica de caudales que nos ocupa. El año hidráulico 2001-02, en fin, arrojó solamente 4.058 hm<sup>3</sup>/año, con lo que la media aritmética de estos últimos tres años, no computados en el estudio referido, es de sólo 7.892 hm<sup>3</sup>/año. Obsérvese, a la postre, como ya se ha visto, que la aportación del último año hidráulico resulta ser la más baja de toda la serie histórica en estudio.

c) Que, del mismo modo, analizando lo que ha venido sucediendo en los últimos 80 años, veamos las diferentes aportaciones medias en Tortosa:

- Década de los 20.....16.855 hm<sup>3</sup>/año.
- Década de los 60.....16.843 hm<sup>3</sup>/año.
- Década de los 70.....14.071 hm<sup>3</sup>/año.
- Década de los 80.....9.502 hm<sup>3</sup>/año.
- Década de los 90.....8.235 hm<sup>3</sup>/año.

d) Así pues, el estado actual de salud del río Ebro en su tramo final registra una preocupante disminución de los caudales medios anuales. Según datos obtenidos de la propia Confederación Hidrográfica del Ebro (CHE), el caudal del río a su paso por Tortosa, como ya se ha dicho, ha sido de 4.058 hm<sup>3</sup> el último año hidráulico (del 1 de octubre del 2001 al 30 de septiembre del 2002). Esta cifra representa aproximadamente sólo una tercera parte del caudal medio previsto en el PHN sin justificación alguna, que es, como ya se ha visto, de 11.765 hm<sup>3</sup> anuales en el tramo final, mientras que la cantidad a transvasar, según las previsiones del PHN, es de 1.050 hm<sup>3</sup>.

e) Los datos de la CHE ponen de manifiesto que el caudal del río el último año ha sido el más bajo de la historia, o por lo menos de la larga serie temporal o cronológica de datos que se posee (desde el año hidráulico 1913-14 hasta nuestros días), incluso por debajo de uno de los años más secos, como fue el 1989-90, en que el caudal del Ebro a su paso por la estación

foronómica de Tortosa (EA-27) fue de sólo 4.283 hm<sup>3</sup>. Y según esos mismos datos, la media del caudal del Ebro de los últimos cuatro años hidráulicos ha sido de 7.504'5 hm<sup>3</sup> y la tendencia general de la evolución del caudal del río es claramente descendente, una vez efectuadas las contrastaciones estadísticas que las técnicas predictivas modernas recomiendan y que constituyen el objeto fundamental del presente capítulo de nuestro libro.

f) A la vista de todos estos datos, uno se cuestiona fácilmente ¿cuál será la aportación media de la década 2000/09? ¿Y las posteriores?. Piénsese, al respecto, que el Plan Hidrológico Nacional que ahora se nos presenta, tal como ya hemos señalado con anterioridad, parte de una aportación evidentemente optimista de 11.765 hm<sup>3</sup>/año en Tortosa, mientras nosotros, alternativamente, lo hacemos de una cifra de 8.830 hm<sup>3</sup>/año (correspondiente a la media de los últimos 14 años hidráulicos), que supera incluso la correspondiente a la que ofrece la serie de promedio para toda la década de los años 90. La cuestión clave, pues, surge inmediatamente: ¿cuál de ambas determinaciones parece más razonable?

### 3.3. MEDIAS MÓVILES Y AJUSTE ESTADÍSTICO

A partir de aquí, se ha estudiado por este autor la tendencia general de la serie cronológica de los caudales del río Ebro en la E.A. de Tortosa, comenzando por aplicar el conocido “método de las medias móviles” que suaviza los valores de la serie. Un promedio móvil cualquiera se obtiene reemplazando cada valor de la serie original por la media aritmética de dicho valor y alguno de los valores que le preceden o siguen directamente. Para ello, hemos sustituido la serie original por la que resulta de hacer corresponder a cada valor de la primera  $Y_t$  la media aritmética o esperanza matemática siguiente:

$$\bar{Y}_t = \frac{Y_{t-h} + \dots + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + \dots + Y_{t+h}}{2h+1}$$

, obteniéndose las medias móviles centradas  $\bar{X}_3$  y  $\bar{X}_{3,3}$ . Este método facilita la observación de la tendencia al suavizarse la serie, eliminando los “outliers” (puntos anómalos), así como las irregularidades o fluctuaciones debidas al azar.

El método de las medias móviles es de naturaleza mecánica puesto que consiste en sustituir la serie temporal observada por otra amortiguada o suavizada obtenida por el cálculo reiterado de valores medios y que nos representa la tendencia de la misma. Si el número de observaciones utilizado es impar, como aquí hemos hecho, se obtiene una serie de medias móviles centradas con los períodos de tiempo. En resumen, se debe resaltar que el método mecánico de las medias móviles aquí empleado tiene como objetivo prioritario el de aislar la componente tendencial de todas las demás mediante la suavización o amortiguamiento de la serie de caudales observada. Al ir promediando los caudales aforados de forma sucesiva se eliminan los efectos indeseables de las

otras componentes cuando existan: variaciones estacionales, accidentales y cíclicas, a las que ya nos hemos referido con anterioridad. Una cuestión diferente es el carácter anual (expresada por años hidráulicos) de los datos de la serie, puesto que al tratarse de observaciones del período anual no existe componente estacional ya que no se dan períodos inferiores al año; entonces, para el cálculo de las medias móviles lo ideal sería tomar los mismos años que tenga la amplitud del ciclo completo, pero ello no siempre es fácil de determinar, por lo que suele obtenerse varias series de medias móviles con distinto número de observaciones (tres, cinco, siete años, etc.) y elegir la que esté más suave o amortiguada observando sus valores extremos.

Otra cuestión interesante es la determinación de la amplitud del ciclo más adecuada, teniendo en cuenta la posible correlación existente entre el ciclo de las aportaciones hídricas del río Ebro en su tramo final y el de los datos meteorológicos más relevantes al efecto (las precipitaciones en la cuenca del Ebro), con independencia de otras variables influyentes, como el consumo de agua en la misma Cuenca para los diferentes usos.

Cuando se dispone de las observaciones correspondientes a una larga serie de años, se plantea el problema de seleccionar un cierto período de ellos para el estudio de los datos meteorológicos. Existen numerosos trabajos acerca de la periodicidad del clima, sin que se haya llegado a un acuerdo sobre el tema, que ha sido objeto de muchas teorías, a veces discrepantes. Una de esas teorías establece que el clima presenta una pseudo-periodicidad con ciclos de once años de duración, que coincide con el período de las manchas solares, las cuales, al parecer, ejercen una fuerte influencia sobre el clima. En base a esta teoría, un criterio muy utilizado estriba en considerar períodos mínimos de 11 años de duración para el estudio de los datos meteorológicos, aunque resulta preferible contemplar períodos múltiplos de 11, como 22, 33 años, etc. Es curioso observar, al respecto, los anillos concéntricos de crecimiento anual de los troncos de los árboles centenarios: los más gruesos corresponden a los años más pluviosos, y los especialistas en Dendrocronología pueden estudiar la climatología de una determinada región, incluso de épocas prehistóricas, ayudados en su trabajo por el hallazgo de los troncos encontrados en las ruinas de antiguas ciudades ya desaparecidas. En dichos anillos parece encontrarse, efectivamente, una periodicidad en sus gruesos de crecimiento que podría coincidir con los períodos de once años de la frecuencia de las manchas solares a la que nos acabamos de referir.

El problema fundamental de construir un promedio móvil, como el que aquí hemos realizado, es el de escoger un período de tiempo apropiado para el promedio. Esta elección depende principalmente de la naturaleza de los datos y de los fines para los que se construye el promedio. De ordinario, el objetivo de ajustar un promedio móvil estriba en eliminar, en la medida de lo posible, alguna suerte de fluctuaciones indeseables o perturbadoras de los datos. Al describir la tendencia de datos anuales de caudal por una media móvil, el problema principal

radica en eliminar las desviaciones ascendentes y descendentes que pueda haber en los datos respecto de la tendencia fundamental y que resultan de influencias cíclicas en los movimientos del caudal. Si todos los ciclos del caudal fueran exactamente análogos en duración y amplitud, sus influencias se podrían suprimir fácilmente de la serie por compensación, porque cualesquiera movimientos periódicos absolutamente uniformes se eliminan completamente con un promedio móvil cuyo período sea igual (o sea un múltiplo) al período del movimiento.

Ello quiere decir también que si los movimientos estacionales en una serie de datos mensuales de caudales aforados fueran exactamene uniformes, las variaciones estacionales (como también la mayoría de las irregularidades) se podrían eliminar de la serie ajustándole un promedio móvil de 12 meses. Sin embargo, en las series cronológicas de caudales pueden no aparecer movimientos cíclicos uniformemente periódicos, ni estacionales ni irregulares, que, si bien pueden ser ocasionados por las variables climatológicas, también pueden ser eliminados por la regulación efectuada por los embalses de la cuenca; de tal suerte, el efecto de ajustar promedios móviles a las series de aportaciones hidráulicas estriba en *alisarlas*, pero no eliminar completamente de dichas series ciertas fluctuaciones.

Del mismo modo, se ha operado utilizando otro método parecido (cuya exposición pormenorizada obviaremos aquí por obvias razones de espacio) consistente en obtener las “cifras mensuales del movimiento anual” (cifras MA), que se hallan exentas de componente estacional y resulta fácil transformarlas en medias móviles. En efecto si los valores de cada mes del año  $t$  los designamos por  $Y_{tE}$ ,  $Y_{tF}$ , ...,  $Y_{tD}$ , la cifra MA correspondiente a  $Y_{tD}$  es la  $Y'_{tD} = Y_{tE} + Y_{tF} + \dots + Y_{tD}$ ; de igual manera, a  $Y_{t+1-D}$  corresponde la cifra:

$$Y_{t+1-E} = Y_{tF} + Y_{tM} + \dots + Y_{tD} + Y_{t-1-E}$$

y así sucesivamente. Estas cifras MA recogen los caudales o aportaciones correspondientes el año que termina con el mes al que se refiere la cifra, por lo que su tratamiento estadístico no exige una corrección de las variaciones estacionales y, además, las cifras MA pueden también convertirse en medias móviles dividiendo por 12 cada una de ellas y haciéndola corresponder al punto medio de dos meses consecutivos.

Posteriormente, se han llevado a efecto los ajustes estadísticos lineales y no lineales por el método de los mínimos cuadrados ordinarios sobre la serie histórica original de 70 caudales anuales y las correspondientes series suavizadas con las medias móviles de orden 3 y de orden 3·3, en número de 5 por cada serie, obteniéndose los resultados que figuran en el Anexo n°: 2 de este mismo libro y que resumimos en la siguiente tabla 5.9., junto con los gráficos correspondientes figurantes en dicho anexo.

En la siguiente tabla, pues, se expresan analíticamente las diferentes funciones matemáticas de ajuste MCO obtenidas, junto con la expresión de los correspondientes coeficientes de correlación lineal y no lineal (que resultan ser siempre negativos, habida cuenta del carácter descendente de todas las series de caudales estudiadas) y de determinación o crítico (que nos indicarán, en alguna medida, el grado de fiabilidad del ajuste llevado a cabo). Así:

Tabla 5.9. Características de las funciones ajustadas del caudal (Q) del río Ebro

Media	Función ajustada	R <sup>2</sup>	R	Ecuación
X <sub>1</sub> (70 datos)	Potencial	0,3327	-0,5768	$Q = 983,95 \cdot t^{-0,2361}$
	Logarítmica	0,3874	-0,6224	$Q = -109,86 \cdot \ln(t) + 851,21$
	Exponencial	0,3902	-0,6247	$Q = 675,19 \cdot e^{-0,0096t}$
	Lineal	0,3881	-0,6230	$Q = -4,1487 \cdot t + 659,94$
	Parabólica	0,4567	-0,6758	$Q = -0,0039 \cdot t^3 + 0,5177 \cdot t^2 - 22,301 \cdot t + 776,14$
X <sub>3</sub> (68 datos)	Potencial	0,4947	-0,7034	$Q = 1.027,9 \cdot t^{-0,2375}$
	Logarítmica	0,5531	-0,7437	$Q = -113,85 \cdot \ln(t) + 868,41$
	Exponencial	0,5568	-0,7462	$Q = 672,54 \cdot e^{-0,0089t}$
	Lineal	0,5430	-0,7369	$Q = -3,9907 \cdot t + 651,71$
	Parabólica	0,6447	-0,8029	$Q = -0,004 \cdot t^3 + 0,5319 \cdot t^2 - 22,67 \cdot t + 777,29$
X <sub>3,3</sub> (66 datos)	Potencial	0,4995	-0,7068	$Q = 1.024,1 \cdot t^{-0,2347}$
	Logarítmica	0,5500	-0,7420	$Q = -108,86 \cdot \ln(t) + 849,95$
	Exponencial	0,5887	-0,7673	$Q = 663,41 \cdot e^{-0,0086t}$
	Lineal	0,5792	-0,7611	$Q = -3,7806 \cdot t + 638,2$
	Parabólica	0,6994	-0,8363	$Q = -0,004 \cdot t^3 + 0,5048 \cdot t^2 - 20,866 \cdot t + 750,96$

Puede verse, a continuación, una tabla con las predicciones (expresadas en m<sup>3</sup>/seg.) o prognosis de los caudales circulantes en Tortosa hasta el año hidráulico 2028-29 para las diferentes funciones matemáticas de ajuste obtenidas y relacionadas en el cuadro anterior. A saber:

Tabla 5.10. Predicciones del caudal según las diferentes funciones de ajuste

**Datos correspondientes a las diferentes líneas de tendencia estudiadas**  
**Predicciones expresadas en m<sup>3</sup>/seg. en la E.A. núm. 27 de Tortosa.**

Núm orden	Año	X <sub>1</sub>				X <sub>2</sub>				X <sub>3</sub>						
		Potencial	Logarítmica	Exponencial	Lineal	Polinomial	Potencial	Logarítmica	Exponencial	Lineal	Polinomial	Potencial	Logarítmica	Exponencial	Lineal	Polinomial
88	1999-2000	341.9	359.3	290.1	294.9	165.0	354.9	358.9	307.3	300.5	175.5	358.1	362.5	311.2	305.5	98.0
89	2000-2001	341.0	358.1	287.3	290.7	142.7	354.0	357.6	304.6	296.5	153.0	357.1	361.3	308.6	301.7	72.5
90	2001-2002	340.1	356.9	284.6	286.6	119.3	353.0	356.3	301.9	292.5	129.4	356.2	360.1	305.9	297.9	45.9
91	2002-2003	339.2	355.6	281.9	282.4	94.9	352.1	355.1	299.2	288.6	104.7	355.3	358.9	303.3	294.2	18.1
92	2003-2004	338.3	354.4	279.2	278.3	69.4	351.2	353.8	296.6	284.6	78.9	354.4	357.7	300.7	290.4	-10.8
93	2004-2005	337.5	353.3	276.5	274.1	42.7	350.3	352.6	293.9	280.6	52.0	353.5	356.5	298.1	286.6	-41.0
94	2005-2006	336.6	352.1	273.9	270.0	15.0	349.4	351.4	291.3	276.6	23.8	352.6	355.4	295.6	282.8	-72.4
95	2006-2007	335.8	350.9	271.2	265.8	-14.0	348.5	350.2	288.8	272.6	-5.5	351.7	354.2	293.1	279.0	-105.0
96	2007-2008	334.9	349.8	268.6	261.7	-44.1	347.7	349.0	286.2	268.6	-36.0	350.8	353.1	290.6	275.3	-138.9
97	2008-2009	334.1	348.6	266.1	257.5	-75.4	346.8	347.8	283.7	264.6	-67.7	350.0	351.9	288.1	271.5	-174.1
98	2009-2010	333.3	347.5	263.5	253.4	-108.0	346.0	346.6	281.1	260.6	-100.8	349.1	350.8	285.6	267.7	-210.6
99	2010-2011	332.5	346.4	261.0	249.2	-141.8	345.1	345.5	278.7	256.6	-135.1	348.3	349.7	283.2	263.9	-248.4
100	2011-2012	331.7	345.3	258.5	245.1	-177.0	344.3	344.3	276.2	252.6	-170.7	347.5	348.6	280.7	260.1	-287.6
101	2012-2013	330.9	344.2	256.1	240.9	-213.4	343.5	343.2	273.7	248.6	-207.7	346.7	347.5	278.3	256.4	-328.2
102	2013-2014	330.2	343.1	253.6	236.8	-251.1	342.7	342.1	271.3	244.7	-246.0	345.9	346.5	275.9	252.6	-370.3
103	2014-2015	329.4	342.0	251.2	232.6	-290.2	341.9	341.0	268.9	240.7	-285.7	345.1	345.4	273.6	248.8	-413.7
104	2015-2016	328.7	341.0	248.8	228.5	-330.7	341.1	339.9	266.5	236.7	-326.8	344.3	344.4	271.2	245.0	-458.6
105	2016-2017	327.9	339.9	246.4	224.3	-372.6	340.3	338.8	264.2	232.7	-369.4	343.5	343.3	268.9	241.2	-505.1
106	2017-2018	327.2	338.9	244.1	220.2	-415.9	339.6	337.7	261.8	228.7	-413.4	342.8	342.3	266.6	237.5	-553.0
107	2018-2019	326.5	337.9	241.7	216.0	-460.6	338.8	336.6	259.5	224.7	-458.8	342.0	341.3	264.3	233.7	-602.4
108	2019-2020	325.7	336.8	239.4	211.9	-506.8	338.1	335.6	257.2	220.7	-505.8	341.3	340.3	262.1	229.9	-653.4
109	2020-2021	325.0	335.8	237.1	207.7	-554.5	337.3	334.5	254.9	216.7	-554.4	340.5	339.2	259.8	226.1	-706.0
110	2021-2022	324.3	334.8	234.9	203.6	-603.7	336.6	333.5	252.7	212.7	-604.4	339.8	338.3	257.6	222.3	-760.2
111	2022-2023	323.6	333.8	232.6	199.4	-654.5	335.9	332.5	250.4	208.7	-656.1	339.1	337.3	255.4	218.6	-816.0
112	2023-2024	323.0	332.8	230.4	195.3	-706.8	335.2	331.4	248.2	204.8	-709.3	338.4	336.3	253.2	214.8	-873.5
113	2024-2025	322.3	331.9	228.2	191.1	-760.7	334.5	330.4	246.0	200.8	-764.2	337.7	335.3	251.0	211.0	-932.7
114	2025-2026	321.6	330.9	226.0	187.0	-816.2	333.8	329.4	243.8	196.8	-820.7	337.0	334.4	248.9	207.2	-993.6
115	2026-2027	321.0	329.9	223.9	182.8	-873.3	333.1	328.4	241.7	192.8	-878.9	336.3	333.4	246.8	203.4	-1056.2
116	2027-2028	320.3	329.0	221.7	178.7	-932.1	332.4	327.5	239.5	188.8	-938.8	335.6	332.5	244.6	199.7	-1120.5
117	2028-2029	319.6	328.0	219.6	174.5	-992.6	331.7	326.5	237.4	184.8	-1000.4	334.9	331.5	242.5	195.9	-1186.6

Obsérvese al respecto que, en todos los casos, se trata de correlaciones negativas o inversas, al ser las correspondientes series decrecientes. Desde el punto de vista del coeficiente de correlación (no lineal), el mejor de todos ellos

ha resultado ser, precisamente, el que ofrece predicciones más bajas de caudal, o sea, la regresión de tipo polinomial de tercer grado, con un  $R = -0,8363 < -0,75$ , que no resulta en absoluto despreciable, debiendo considerarse que existe una dependencia no lineal entre las variables del problema (exógena y endógena) fuerte o aceptable. Dicha regresión prevé, como puede comprobarse con preocupación, la desaparición absoluta de caudal descendente por el río Ebro en este punto para el año hidráulico 2004-2005, que correría el riesgo de convertirse más bien en una especie de “ría” o fiordo, o sea, un brazo de mar que se introduce en el continente o, en cualquier caso, poseedor de un ambiente mucho más marino (fluviomarino u holomarino) que fluvial o lacustre. Lo que sí parece evidente es **que los resultados de todas las regresiones minimocuadráticas efectuadas contradicen las previsiones contempladas en el PHN de julio del 2001.**

Si tenemos en cuenta que en dicha legislación se prevé un caudal mínimo medioambiental de  $100 \text{ m}^3/\text{seg.}$  (ya previsto en el Plan Hidrológico de la Cuenca del Ebro) nos quedaría la siguiente distribución de caudales del río Ebro a su paso por la ciudad de Tortosa:

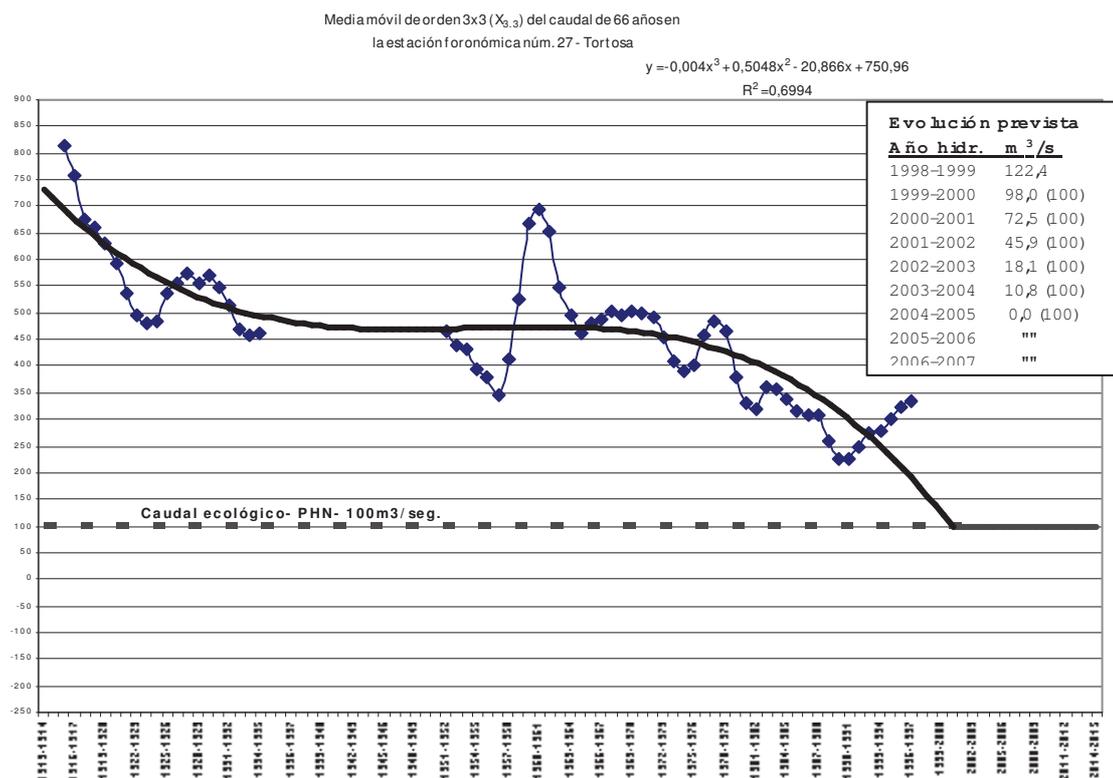


Fig. 5.5. Función descendente de caudales del Ebro

Por lo que se refiere a la función polinómica hallada, veamos que su gráfica puede presentar vaivenes y ascenderá o descenderá sin límite (es decir, la Q ascenderá hasta  $+\infty$ , o bien descenderá hacia  $-\infty$ ) cuando la variable explicativa t (años hidráulicos) se mueva hacia la derecha de la recta real (tendiendo hacia

$+\infty$ ) o se mueva hacia la izquierda (tendiendo hacia  $-\infty$ ). Así pues, del estudio de las ramas infinitas de esta función se deduce que existen ramas parabólicas verticales (según el eje OQ) hacia arriba (por la izquierda) y hacia abajo (por la derecha).

Al coeficiente de la mayor potencia de  $t$ ,  $a_3 = -0'004 < 0$ , se le denomina “coeficiente dominante”, por lo que al tratarse de una función de grado impar, resulta que crece por la izquierda y decrece por la derecha. Dicha gráfica, como la de la mayoría de las funciones cúbicas, presenta dos vueltas. El caudal anual se comporta, por tanto, como una función decreciente, aunque a veces se originen caudales anormales debidos a las avenidas por efecto de lluvias extraordinarias o grandes deshielos procedentes del Pirineo y, en menor medida, del sistema ibérico. La representación gráfica genérica de dicha función sería la siguiente:

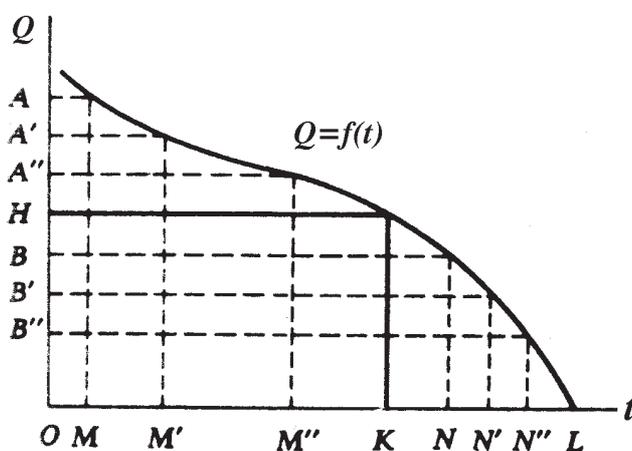


Fig. 5.6. Función parabólica cúbica de caudal descendente

Del estudio analítico de la curva anterior, se deducen las siguientes consideraciones:

**- Cortes con los ejes coordenados:**

Cuando  $x = 0$ , entonces:  $y = 750'96 \approx 751 \text{ m}^3/\text{seg.}$

Cuando  $y = 0$ , entonces debe resolverse la ecuación:

$$-0'004 \cdot x^3 + 0'5048 \cdot x^2 - 20'866 \cdot x + 750'96 = 0,$$

cuya única solución real es:  $x = 91'631 \approx 92$  (correspondiente al año hidráulico 2003-2004).

Por otra parte, el caudal ecológico o “mínimo medioambiental”, previsto en el PHN-2001 y en el Plan Hidrológico de la Cuenca del Ebro, se alcanzaría para un caudal  $Q = 100 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , con lo que:

$$-0'004 \cdot x^3 + 0'5048 \cdot x^2 - 20'866 \cdot x + 650'96 = 0$$

que ofrece la solución real:  $x = 87'921 \approx 88$  (correspondiente al año hidráulico 1999-2000).

**- Extremos relativos o locales:**

La condición necesaria o de primer grado, será:

$y' = dy/dx = -0'012 \cdot x^2 + 1'0096 \cdot x - 20'866 = 0$ , de cuya resolución se obtienen las dos raíces reales: 36'519 (año 1948) y 47'614 (año 1959).

La condición suficiente o de segundo grado, exige:

$$y'' = d^2y/dx^2 = -0'024 \cdot x + 1'0096, \text{ con lo que:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 36'519 \rightarrow y'' = 0'133 > 0, \text{ mínimo local en } (36'519, 467'36) \\ x = 47'614 \rightarrow y'' = -0'133 < 0, \text{ máximo local en } (47'614, 470'09) \end{array} \right.$$

De este modo, se tiene un intervalo de ligero crecimiento del caudal (prácticamente plano) entre el año 1948 y el 1959, o sea, durante el período (36'519, 47'614).

**- Concavidades, convexidades y puntos de inflexión:**

Tendrán lugar para:  $y'' = -0'024 \cdot x + 1'0096 = 0$ ; y además:

$$y''' = -0'024 \neq 0, \text{ con lo que:}$$

$x = 1'0096/0'024 = 42'07 \approx 42$  (punto de inflexión, correspondiente al año hidráulico 1953-54). Así, la función obtenida es convexa hacia las  $y^+$  en el intervalo (0, 42) y cóncava en el resto de su dominio de definición o campo de variabilidad.

No obstante, debe tenerse en cuenta que al interpretar un cierto coeficiente de correlación no hay que dar por sentado que un valor numéricamente elevado del mismo establezca una relación de causa a efecto que va de la variable independiente  $t$  (tiempo, en años hidráulicos) a la función  $Q$  (caudal expresado en  $m^3/\text{seg.}$  o en  $hm^3/\text{año}$ ). De hecho, sólo confirma el grado de efectividad de la relación existente entre ambas.

Una manera de corroborar la bondad del ajuste realizado por regresión minimocuadrática a una parábola de tercer grado, estriba en calcular el “promedio integral”, “ordenada media” o “valor medio” de la función, realizando el cociente entre el valor de la integral definida de la curva de ajuste y la amplitud del intervalo de integración (constituido por 82 años hidráulicos).

En nuestro caso, como puede verse en la anterior tabla 5.9. se trata de la función:

$$\begin{aligned}
 Q \text{ (m}^3\text{/seg.)} &= -0'004 t^3 + 0'5048 t^2 - 20'866 t + 750'96 = f(t) \\
 &\int_3^{85} (-0'004 t^3 + 0'5048 t^2 - 20'866 t + 750'96) dt = \\
 &= [-0'004 t^4/4 + 0'5048 t^3/3 - 20'866 t^2/2 + 750'96 t]_3^{85} = \\
 &= -0'001 \cdot (85^4 - 3^4) + 0'1683 \cdot (85^3 - 3^3) - 10'433 \cdot (85^2 - 3^2) + 750'96 \cdot (85 - 3) = \\
 &= -52.201 + 103.353 - 75.285 + 61.579 = 37.446 \\
 \bar{Q} &= \frac{37.446}{85 - 3} = 457 \text{ m}^3\text{/seg.} \equiv 14.401 \text{ hm}^3\text{/año}
 \end{aligned}$$

, valor éste que se ajusta muy bien, como ya se ha visto, al valor medio del caudal descendente por dicha estación foronómica en el período de estudio<sup>6</sup> (\*). Del mismo modo podría operarse calculando la “media cuadrática integral”, tal como la hemos definido en el capítulo I de este mismo libro.

Otra manera de resolver el problema planteado consistiría en aplicar el teorema del “valor medio” a la función hallada  $Q(t)$  en el intervalo temporal  $[3,85]$ , tal como ya hemos expuesto también en el capítulo I. En tal caso, se tendría la conocida fórmula de los incrementos finitos:

$$Q'(c) = \frac{Q(b) - Q(a)}{b - a};$$

$$Q'(t) = -0'012 \times t^2 + 1'0096 \times t - 20'866;$$

$$\begin{aligned}
 Q(85) &= -0'004 \times 85^3 + 0'5048 \times 85^2 - 20'866 \times 85 + 750'96 = \\
 &= -2.456'5 + 3.647'18 - 1.773'61 + 750'96 = 168'03 \text{ m}^3\text{/seg.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(3) &= -0'004 \times 3^3 + 0'5048 \times 3^2 - 20'866 \times 3 + 750'96 = \\
 &= -0'108 + 4'5432 - 62'598 + 750'96 = 692'80 \text{ m}^3\text{/seg.}
 \end{aligned}$$

Con lo que resultará:

---

<sup>6</sup> Una ampliación acerca del concepto estadístico de “media”, aplicado a la determinación de caudales en una corriente natural, como es el caso del río Ebro, puede consultarse al final del presente capítulo de nuestro libro.

$$-0'012 \times t^2 + 1'0096 \times t - 20'866 = \frac{168'03 - 692'80}{82};$$

que equivale a la ecuación de 2º grado:

$$0'003 \times t^2 - 0'2524 \times t + 3'6166 = 0;$$

$$t = \frac{0'2524 \pm \sqrt{0'2524^2 - 0'0434}}{0'006} = \begin{cases} 65'82 \text{ (año 1977)} \\ 18'32 \text{ (año 1931)} \end{cases}$$

Para  $t_1 = 65'82$  años, se tendrá un caudal medio anual de:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -0'004 \times 65'82^3 + 0'5048 \times 65'82^2 - 20'866 \times 65'82 + 750'96 = \\ &= -1.140'6 + 2.186'9 - 1.373'4 + 750'96 \approx 424 \text{ m}^3/\text{seg.} \equiv 13.371 \text{ hm}^3/\text{año} \end{aligned}$$

Para  $t_2 = 18'32$  años, se tendrá un caudal medio anual de:

$$\begin{aligned} Q_2 &= -0'004 \times 18'32^3 + 0'5048 \times 18'32^2 - 20'866 \times 18'32 + 750'96 = \\ &= -24'6 + 169'4 - 382'3 + 750'96 \approx 513 \text{ m}^3/\text{seg.} \equiv 16.178 \text{ hm}^3/\text{año} \end{aligned}$$

Ambos valores resultan, respectivamente, algo inferior y superior al “promedio integral” anteriormente calculado, lo que confirma, de hecho, la bondad del procedimiento seguido. En cualquier caso, cuando aparezcan dos o más puntos intermedios del intervalo que cumplan con el teorema del valor medio (habida cuenta de la configuración geométrica de la función hidráulica en estudio) juzgamos más aconsejable emplear el método del “promedio integral”, por su propia unicidad y conceptualidad.

En este caso se ha trabajado sobre la media móvil 3x3, sin necesidad de eliminar los *outliers* ni de aplicar los métodos especiales que proporciona la moderna “inferencia estadística robusta”, a los cuales nos referiremos a continuación. De cualquier modo, en lo sucesivo, sería conveniente permanecer atentos a la evolución real futura de los caudales aforados en la E. A. de Tortosa al objeto de seleccionar aquella función regresional -de entre todas las estudiadas- que mejor ajuste su comportamiento al de la realidad de las aguas del río Ebro a su paso por aquella histórica y bella ciudad, próxima ya a su desembocadura.

#### **4. LA APLICACIÓN DE LOS “MÉTODOS ROBUSTOS” EN EL ANÁLISIS DE LOS CAUDALES HISTÓRICOS DEL RÍO EBRO**

Hay que considerar que el empleo de las modernas técnicas de la “inferencia estadística robusta” -aunque, sin duda, sin ofrecer grandes

variaciones en los resultados finales- podrían afinar aún más algunos de los resultados obtenidos. Dichos estudios podrían complementarse con una aplicación más sistemática de los métodos LOWESS (de hecho, esto ya se sugiere en los propios estudios del PHN), así como desarrollar más el tema de la “cointegración” de las series temporales y analizar, incluso, funciones periódicas y series de Fourier mediante el Cálculo de Variaciones clásico.

Aunque puede afirmarse que la Estadística tuvo su origen en los censos romanos de población<sup>7</sup>, sus métodos, tal como los conocemos hoy en día, se deben fundamentalmente a Sir Ronald Fisher, quien en su trabajo del año 1922 (*Sobre los fundamentos matemáticos de la Estadística Teórica*) estableció los principios a partir de los cuales se fueron desarrollando las diversas técnicas y métodos que actualmente utilizamos. Sin embargo, su correcta aplicación requiere de condiciones muy rígidas, tales como un modelo probabilístico fijo (habitualmente la distribución normal) en el que sólo queden indeterminados uno o dos parámetros (la media y/o su varianza). Pero tal restricción o condicionante supone un problema, ya que los modelos probabilísticos más utilizados rara vez se ajustan bien al fenómeno aleatorio observado (en nuestro caso, la evolución del caudal del río), razón por la cual los resultados obtenidos bajo tales supuestos dejan de ser válidos incluso en situaciones muy cercanas a la modelizada bajo la cual se obtuvieron.

Por estas razones surgieron los denominados “Métodos Robustos”, aunque su origen se supone remoto. Rey (1978) lo sitúa en la antigua Grecia, en donde los sitiadores contaban las capas de ladrillos de algunos muros de la ciudad sitiada y tomaban la moda (valor más frecuente) de los recuentos al objeto de determinar la longitud de las escalas a utilizar en el asalto. De esta forma, la estimación realizada no se veía afectada por los valores extremos de la variable aleatoria estadística, procedentes de murallas muy altas o muy bajas. No obstante, fue en 1964 cuando, de la misma manera que los trabajos de R.A. Fisher dotaron a la Estadística del rigor matemático del que hasta entonces carecía, el artículo de Peter Huber titulado *Estimación robusta de un parámetro de localización* abrió las puertas de la precisión matemática en robustez y, por ende, las del reconocimiento científico. Posteriores trabajos suyos, así como las aportaciones fundamentales de Frank Hampel en los años 1971 y 1974, en las cuales definió los conceptos de “robustez cualitativa” y la “curva de influencia”, terminaron de poner los cimientos de los métodos robustos, tal y como son conocidos hoy en día.

De hecho, la introducción de los Métodos Robustos en la ciencia Estadística fue motivada -básicamente, aunque no de forma exclusiva- por la gran sensibilidad a los *datos anómalos* (*outliers* en la terminología anglosajona) de los estimadores generalmente utilizados, y a los que ya nos hemos referido en

---

<sup>7</sup> Entre ellos, el más famoso posiblemente, el ordenado por el emperador César Augusto y que obligó a trasladarse a José y María a la ciudad de Belén de Judea, donde nació Jesús (de Nazareth) en un humilde pesebre.

el epígrafe anterior. No obstante, a pesar de la relación existente entre el análisis de *outliers* y los Métodos Robustos, ambos campos han seguido desarrollos y caminos independientes.

Una de las primeras ideas que sugiere la presencia de datos anómalos en una serie histórica de caudales, entendidos éstos como cifras sorprendentemente alejadas del grupo principal de observaciones, es la de su rechazo o eliminación, con objeto de *reparar o limpiar* la serie, antes de realizar inferencias con ella.

Esta idea hállese reflejada en numerosas publicaciones existentes sobre el tema. Así, por ejemplo, puede leerse en el trabajo de Ferguson (1961) que “... el problema que se plantea en el tratamiento de los datos anómalos es el de introducir algún grado de objetividad en su rechazo...”, dando por supuesto que los datos anómalos son necesariamente *erróneos* y que, por tanto, deben de ser eliminados. A la vista de la serie de caudales aforados en la E.A. de Tortosa, podría pensarse, v. gr. que el caudal medio de 919 m<sup>3</sup>/seg. para el año hidráulico 1959-60 constituye un *outlier*. Pero ello no es más que una de las posibles opciones a considerar en el tratamiento de los datos anómalos, puesto que no siempre son necesariamente erróneos.

En definitiva, los datos pueden ser o parecer anómalos en relación con el modelo supuesto, por lo que una posible alternativa a su rechazo es la de su *incorporación*, ampliando el modelo. Ello nos llevaría a una nueva definición de *outlier*, a saber: “aquella observación que parece ser inconsistente con el resto de los valores de la serie, en relación con el modelo supuesto”. Desde luego, en la definición anterior aparece una componente ciertamente subjetiva en la calificación o conceptualización de un dato como “anómalo”. Existe una manera más objetiva de poder llegar a tal conclusión. Se trata de utilizar unos tests de hipótesis, denominados *tests de discordancia*, que están basados en unos estadísticos para los que es posible determinar, o al menos tabular, su distribución en el muestreo. Mediante dichos tests podemos calificar a uno o varios datos como *discordantes* –esto es, valores que resultan significativos en un test de discordancia- y como consecuencia podemos, como hemos visto:

- *Rechazarlos*, eliminándolos del resto de la serie.
- *Identificarlos*, resaltando algún aspecto que pudiera resultar interesante.
- *Incorporarlos*, ampliando la distribución-modelo propuesta.

A pesar del esfuerzo realizado para conseguir una calificación objetiva de los datos, el carácter subjetivo permanece, en cierta medida, en los tests de discordancia, tanto en su nivel de significación como en la propia elección del contraste a considerar. Además, como en todo test de hipótesis, los tests de

discordancia no son simétricos; es decir, no son tratadas de igual manera la hipótesis nula de ausencia de *outliers* en la serie que la alternativa de, por ejemplo, tres *outliers* a la derecha. Y una vez concluido el test, deberían considerarse los dos tipos de error asociados al test. Pero lo peor de proceder de tal suerte, rechazando los *outliers* y luego utilizando los métodos clásicos, es la pérdida de eficiencia con respecto a la utilización de Métodos Robustos.

Otro problema adicional relacionado con el tratamiento de *outliers* es que éstos no sólo se presentan en situaciones simples, sino que también aparecen en situaciones más estructuradas, como puede ser el caso de las series cronológicas de caudales que nos ocupan. En estas situaciones, los datos anómalos tenderán a ser menos aparentes, siendo en ocasiones la discrepancia con el modelo propuesto lo que conferirá “anomalía” al dato. Así, por ejemplo, en una regresión minimocuadrática la anomalía consistirá en no estar alineado con el resto de las observaciones. Ahora bien, el ser anómalo no consiste en ser extremo; puede encontrarse en el grupo principal de observaciones y ser tratado como “anómalo”. Al respecto, puede verse el ejemplo de la figura siguiente, en el que aparece una supuesta serie cronológica de caudales:

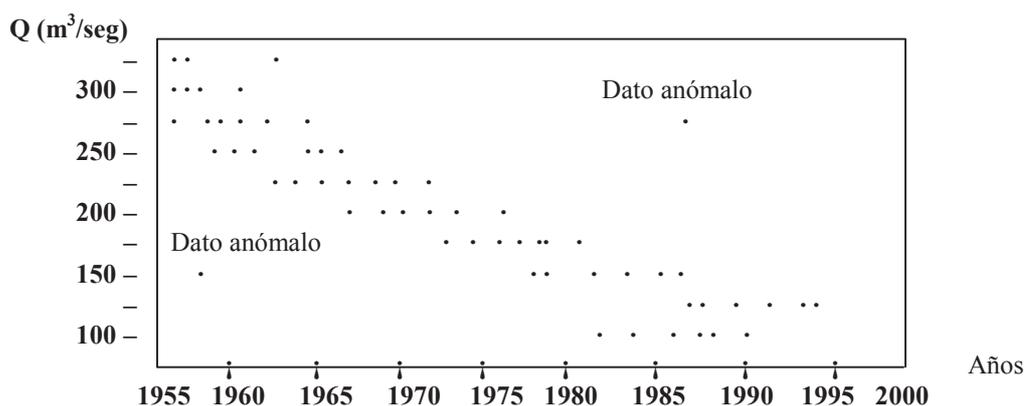


Fig. 5.7. Serie histórica descendente de caudales

Por tanto, el término *modelo*, del que nos hemos ocupado extensamente en el capítulo primero de nuestro libro, en la definición de *outlier* que hemos dado anteriormente, debe entenderse en un sentido bastante amplio.

Digamos, como resumen y síntesis de lo expuesto en el presente apartado de nuestro libro, que mientras los *tests* de discordancia tienen como objetivo el estudio de los *outliers* en sí mismos, proponiendo como acción ante la presencia de un *outlier* alguno de los tres puntos anteriormente reseñados, los Métodos Robustos están diseñados para realizar inferencias sobre el modelo, reduciendo la posible influencia que pudiera tener la presencia de datos anómalos. De hecho, los Métodos Robustos son denominados, en ocasiones, *Técnicas de acomodación de outliers*. Es decir, en los *tests* de discordancia los *outliers* constituyen el objetivo, mientras que en los Métodos Robustos, cuya aplicación al estudio de la

predicción de los caudales del Ebro en su desembocadura aquí propugnamos, son precisamente el mal a evitar.

## 5. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS CAUDALES

A continuación, se estudian los tres ajustes lineales realizados para las medias móviles, explicados con anterioridad.

### 5.1. ANÁLISIS DE LA $\bar{x}_1$

a) **Ajuste minimocuadrático por regresión lineal:**

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma x = 1.830 \\ \Sigma x^2 = 73.810 \\ \Sigma y = 29.733 \\ \Sigma y^2 = 16.517.665 \end{array} \right\}$$

sobre  $n = 60$  años hidráulicos. Las medias aritméticas de ambas variables de esta distribución bidimensional son las siguientes:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 30,5$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = 496(495,55)m^3 / seg.$$

Las desviaciones típicas o “standard” son:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{73.810 - \frac{1.830^2}{60}}{60}} = 17,32$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{16.517.665 - \frac{29.733^2}{60}}{60}} = 172,4m^3 / seg.$$

Con un coeficiente de variación de Pearson de:

$$CV = \frac{172,4}{495,55} \times 100 = 35 \%$$

$$a = 662,6830508$$

$$b = -5,479772159$$

$$r = -0,5504; R = r^2 = 0,303 \text{ (coeficiente de determinación o crítico);}$$

$$\hat{x} = 71 \text{ (31-03-2000)} \rightarrow \hat{y} = 273,6m^3 / seg.$$

con lo que se tendrá la siguiente recta de ajuste:

$$y = a + b \cdot x = 662,6830508 - 5,479772159 \cdot x$$

Se trata, pues, de una correlación negativa o inversa.

La covarianza de ambas variables será:

$$\sigma_{xy} = r \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y = -0,5504 \cdot 17,32 \cdot 172,4 = -1.643,48;$$

$$\sigma_{xy}^2 = 2.701.015,6;$$

También se tendrá la siguiente varianza residual:

$$\sigma_{ry}^2 = \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = 29.722 - \frac{2.701.015,6}{300} = 20.719;$$

De este modo, la varianza explicada por la regresión vendrá dada por:

$$\sigma_{yt}^2 = \sigma_y^2 - \sigma_{ry}^2 = 29.722 - 20.719 = 9.003$$

**b) Intervalo de confianza del caudal esperado:**

$$\sigma_x^2 = 17,32^2 = 300 = \frac{\sum_{i=1}^{60} (x_i - \bar{x})^2}{60}; \sum_{i=1}^{60} (x_i - \bar{x})^2 = 18.000;$$

$$\sigma_y^2 = 172,4^2 = 29.722 = \frac{\sum_{i=1}^{60} (y_i - \bar{y})^2}{60}; \sum_{i=1}^{60} (y_i - \bar{y})^2 = 1.783.320;$$

De donde la suma de los cuadrados de los residuos, será:

$$\sum_{i=1}^{60} e_i^2 = \sum_{i=1}^{60} (y_i - \bar{y})^2 - \hat{\beta}^2 \sum_{i=1}^{60} (x_i - \bar{x})^2 = 1.783.320 - 5,479772159^2 \cdot 18.000 = 1.242.818;$$

el estimador insesgado de la varianza de la perturbación, será:

$$\hat{\sigma}_{u^2} = \frac{\sum_{i=1}^{60} e_i^2}{n-2} = \frac{1.242.818}{58} = 21.428; \hat{\sigma}_u = 146,3827$$

Se obtendrá un intervalo de confianza del 95% para el caudal esperado para el año 2000 ( $\hat{x} = 71; \hat{y} = 273,6 \text{ m}^3/\text{seg}$ ), de:

$$(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_0) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_u \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}; \text{ con 58 g.l.}$$

$$273,6 \pm 2,002 \cdot 146,3827 \cdot \sqrt{\frac{1}{60} + \frac{(71 - 30,5)^2}{18.000}} = 273,6 \pm 96,2 = \begin{cases} = 369,8 \text{ m}^3/\text{seg} \\ = 177,4 \text{ m}^3/\text{seg} \end{cases}$$

c) El problema también se puede plantear así: si en el año 2000 bajan por Tortosa  $250 \text{ m}^3/\text{seg}$ , ¿indicará esto un cambio significativo en la estructura lineal de la serie cronológica, o bien podrían estas cifras provenir fácilmente de la misma relación que antes?. Para ello, planteamos la hipótesis:

H: sí pertenece a la misma estructura lineal

Rechazar si:  $t > t_{1-\alpha}(n-2)$  g.l. o bien  $t < t_{\alpha}(n-2)$  g.l.

$\hat{x} = 71$ ;  $y_0 = 250 \text{ m}^3/\text{seg}$ ;  $\hat{y} = 273,6 \text{ m}^3/\text{seg}$ ; para ello, se utiliza el estadígrafo:

$$t = \frac{y_0 - \hat{y}}{\hat{\sigma}_u \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}} = \frac{250,0 - 273,6}{146,3827 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{60} + \frac{(71 - 30,5)^2}{18.000}}} = \frac{-23,6}{154,07025} = -0,1532$$

$$\text{Como } \begin{cases} t_{0,05} (58 \text{ g.l.}) = -1,672 \\ t_{0,01} (58 \text{ g.l.}) = -2,393 \end{cases}$$

luego se aceptaría la hipótesis de pertenencia a la misma estructura lineal.

d) **En cuanto a la fiabilidad del coeficiente de correlación** encontrado  $r$ , definimos la variable aleatoria:

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}; e^{2z} = \frac{1+r}{1-r}$$

$$\rho = -0,5504 \text{ y } n = 60$$

Se trata de determinar un intervalo de valores entre los que se puede razonablemente esperar (con una probabilidad del 95%) que se encuentre  $r$ , con media:

$$\mu_z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} = \frac{1}{2} \ln \frac{0,4496}{1,5504} = -0,619$$

y desviación típica o *standard*:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{57}} = 0,132$$

El intervalo será:

$$Z = \mu_z \pm 2\sigma_z = -0,619 \pm 0,265 = \begin{cases} = -0,354 \\ = -0,884 \end{cases}$$

valores estos que corresponden a  $\begin{cases} r_1 = -0,342 \\ r_2 = -0,709 \end{cases}$ . Así pues, puede afirmarse que la probabilidad de que se cumpla la desigualdad:  $-0,342 < r < -0,709$ , es del 95%.

Aún que la relación precedente signifique el problema de determinar la exactitud de  $r$  como estimador de  $\rho$ , tiene la desventaja de no ser fiable si las dos variables analizadas (caudal y tiempo) no poseen una distribución normal conjunta. En su consecuencia, a menos que se esté bastante seguro de que estas variables tal distribución -al menos con buena aproximación- no debe confiarse grandemente en los resultados obtenidos.

## 5.2. ANÁLISIS DE LA $\bar{x}_3$

### a) Ajuste minimocuadrático por regresión lineal:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma x &= 1.711 \\ \Sigma x^2 &= 66.729 \\ \Sigma y &= 28.693 \\ \Sigma y^2 &= 15.158.815 \end{aligned} \right\}$$

sobre  $n = 58$  años. Las medias aritméticas de ambas variables de esta distribución bidimensional son las siguientes:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 29,5; \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = 495(494,71)m^3 / seg.$$

Las desviaciones típicas o “standard” son:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{66.729 - \frac{1.711^2}{58}}{58}} = 16,74; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{15.158.815 - \frac{28.693^2}{58}}{58}} = 128,9m^3 / seg.$$

El coeficiente de variación de Pearson, será:

$$CV = \frac{128,9}{495} \times 100 = 26 \%$$

$$a = 647,261343$$

$$b = -5,171337168$$

$$r = -0,67144; R = r^2 = 0,451 \text{ (coeficiente de determinación o crítico);}$$

$$\hat{x} = 70(31 - 03 - 2000) \rightarrow \hat{y} = 285,3 \text{ m}^3/\text{seg}$$

con lo que se tendrá la siguiente recta de ajuste:

$$y = a + b \cdot x = 647,261343 - 5,171337168 \cdot x$$

Se trata, pues, de una correlación negativa o inversa.

La covarianza de ambas variables será:

$$\sigma_{xy} = r \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y = -0,67144 \cdot 16,74 \cdot 128,9 = -1.448,82;$$

$$\sigma_{xy}^2 = 2.099.090,1;$$

También se tendrá la siguiente varianza residual:

$$\sigma_{ry}^2 = \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = 16.615,21 - \frac{2.099.090,1}{280,2276} = 9.124,55;$$

De este modo, la varianza explicada por la regresión vendrá dada por:

$$\sigma_{yt}^2 = \sigma_y^2 - \sigma_{ry}^2 = 16.615,21 - 9.124,55 = 7.490,66$$

**b) Intervalo de confianza del caudal esperado:**

Procederemos de la misma manera que en el caso anterior, siguiendo correlativamente los correspondientes epígrafes.

$$\sigma_x^2 = 16,74^2 = 280,2276 = \frac{\sum_{i=1}^{58} (x_i - \bar{x})^2}{58};$$

$$\sum_{i=1}^{58} (x_i - \bar{x})^2 = 16.253,2;$$

$$\sigma_y^2 = 128,9^2 = 16.615,21 = \frac{\sum_{i=1}^{58} (y_i - \bar{y})^2}{58};$$

$$\sum_{i=1}^{58} (y_i - \bar{y})^2 = 963.682,18;$$

De donde la suma de los cuadrados de los residuos será:

$$\sum_{i=1}^{58} e_i^2 = \sum_{i=1}^{58} (y_i - \bar{y})^2 - \hat{\beta}^2 \times \sum_{i=1}^{58} (x_i - \bar{x})^2 = 963.682,18 - 5,171337168^2 \times 16.253,2 = 529.027,28$$

El estimador insesgado de la varianza de la perturbación, será:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{58} e_i^2}{n-2} = \frac{529.027,28}{56} = 9.447; \hat{\sigma}_u = 97,195;$$

Se tendrá un intervalo de confianza del 95% para el caudal esperable para el año 2000 ( $\hat{x} = 70; \hat{y} = 285,3 \text{ m}^3/\text{seg}$ ), de:

$$\begin{aligned} & (\hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot x_0) \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_u \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}; \text{ con 56 g. l.} \\ 285,3 \pm 2,004 \cdot 97,195 \cdot \sqrt{\frac{1}{58} + \frac{(70 - 29,5)^2}{16.253,2}} &= 285,3 \pm 67,0 = \begin{cases} 352,3 \text{ m}^3/\text{seg} \\ 218,3 \text{ m}^3/\text{seg} \end{cases} \end{aligned}$$

c) Si suponemos, en este caso, un caudal medio para el año 2000 de 248  $\text{m}^3/\text{seg}$ , vamos a contrastar la hipótesis de pertenencia a la misma estructura lineal, con lo que:

$$\hat{x} = 70; y_0 = 248 \text{ m}^3/\text{seg}; \hat{y} = 285,3 \text{ m}^3/\text{seg};$$

$$t = \frac{248,0 - 285,3}{97,195 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{58} + \frac{(70 - 29,5)^2}{16.253,2}}} = \frac{-37,3}{102,777} = -0,363.$$

$$\text{Con } \begin{cases} t_{0,05} (56 \text{ g. l.}) = -1,674 \\ t_{0,01} (56 \text{ g. l.}) = -2,397 \end{cases}$$

luego se aceptaría la hipótesis de pertenencia a la misma estructura lineal.

d) **Por lo que se refiere a la fiabilidad de r**, veamos, en este caso, que:

$$\rho = -0,67144 \text{ y } n = 58$$

$$\mu_z = \frac{1}{2} \ln \frac{0,32856}{1,67144} = -0,813, \text{ y desviación típica: } \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{65}} = 0,135.$$

El intervalo será:

$$Z = \mu_z \pm 2 \cdot \sigma_z = -0,813 \pm 0,270 = \begin{cases} -0,543 \\ -1,083 \end{cases}$$

valores éstos correspondientes a:  $\begin{cases} r_1 = -0,495 \\ r_2 = -0,794 \end{cases}$

, de lo que puede afirmarse que la probabilidad de que se cumpla la desigualdad:  $-0,495 < r < -0,794$ , es del 95%, con las mismas consideraciones restrictivas - respecto a la exactitud- que en el caso anterior.

### 5.3. ANÁLISIS DE LA $\bar{x}_{3,3}$

a) **Ajuste minimocuadrático por regresión lineal:**

$$\left. \begin{aligned} \Sigma x &= 1.596 \\ \Sigma x^2 &= 60.116 \\ \Sigma y &= 27.519 \\ \Sigma y^2 &= 14.199.197 \end{aligned} \right\}$$

en este caso, sobre  $n = 56$  años. Las medias aritméticas de ambas variables de esta distribución bidimensional son las siguientes:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 28,5; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = 491(491,4)m^3 / seg.$$

Las desviaciones típicas o “standard” son:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{60.116 - \frac{1.596^2}{56}}{56}} = 16,16; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{14.199.197 - \frac{27.519^2}{56}}{56}} = 109,9 \cong 110m^3 / seg.$$

El coeficiente de variación de Pearson, será:

$$CV = \frac{109,9}{491} \times 100 = 22 \%$$

$$a = 624,7772727$$

$$b = -4,679528366$$

$$r = -0,6884; \quad R = r^2 = 0,474 \text{ (coeficiente de determinación o crítico);}$$

$$\hat{x} = 69(31 - 03 - 2000) \rightarrow \hat{y} = 301,9m^3 / seg$$

con lo que se tendrá la siguiente recta de ajuste:

$$y = a + b \cdot x = 624,7772727 - 4,679528366 \cdot x$$

Se trata, pues, de una correlación negativa o inversa.

La covarianza de ambas variables será:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= r \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y = -0,6884 \cdot 16,16 \cdot 109,9 = -1.222,59; \\ \sigma_{xy}^2 &= 1.494.719,7;\end{aligned}$$

También se tendrá la siguiente varianza residual:

$$\sigma_{ry}^2 = \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = 12.078,01 - \frac{1.494.719,7}{261,1456} = 6.354,31;$$

De este modo, la varianza explicada por la regresión vendrá dada por:

$$\sigma_{yt}^2 = \sigma_y^2 - \sigma_{ry}^2 = 12.078,01 - 6.354,31 = 5.723,7$$

#### b) Intervalo de confianza del caudal esperado:

Procediendo de manera idéntica a los casos anteriores, se obtendrá:

$$\sigma_x^2 = 16,16^2 = 261,1456 = \frac{\sum_{i=1}^{56} (x_i - \bar{x})^2}{56}; \sum_{i=1}^{56} (x_i - \bar{x})^2 = 14.624,154;$$

$$\sigma_y^2 = 109,9^2 = 12.078,01 = \frac{\sum_{i=1}^{56} (y_i - \bar{y})^2}{56}; \sum_{i=1}^{56} (y_i - \bar{y})^2 = 676.368,56;$$

De donde, la suma de los cuadrados de los residuos, será:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{56} e_i^2 &= \sum_{i=1}^{56} (y_i - \bar{y})^2 - \hat{\beta}^2 \cdot \sum_{i=1}^{56} (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= 676.368,56 - 4,679528366^2 \cdot 14.624,154 = 356.129,05.\end{aligned}$$

El estimador insesgado de la varianza de la perturbación, será:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{56} e_i^2}{n-2} = \frac{356.129,05}{54} = 6.595; \hat{\sigma}_u = 81,21$$

Se obtendrá un intervalo de confianza del 95% para el caudal estimado para el año 2000 ( $\hat{x} = 69; \hat{y} = 301,9 \text{ m}^3/\text{seg}$ ), con 54 g. l., de

$$301,9 \pm 2,006 \cdot 81,21 \cdot \sqrt{\frac{1}{56} + \frac{(69 - 28,5)^2}{14.624,154}} = 301,9 \pm 58,7 = \begin{cases} 360,6 \text{ m}^3/\text{seg} \\ 243,2 \text{ m}^3/\text{seg} \end{cases}$$

c) Suponiendo, para el año 2000, un caudal medio de  $248 \text{ m}^3/\text{seg}$ , contrastamos ahora la hipótesis de pertenencia a la misma estructura lineal, con lo que tendremos:

$$\hat{x} = 69; y_0 = 248 \text{ m}^3/\text{seg}; \hat{y} = 301,9 \text{ m}^3/\text{seg};$$

$$t = \frac{248,0 - 301,9}{81,21 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{56} + \frac{(69 - 28,5)^2}{14.624,154}}} = \frac{-53,9}{86,328} = -0,624$$

$$\text{Como } \begin{cases} t_{0,05} (54 \text{ g. l.}) = -1,675 \\ t_{0,01} (54 \text{ g. l.}) = -2,400 \end{cases}$$

con lo que se aceptaría la hipótesis de pertenencia a la misma estructura lineal.

d) **Por lo que se refiere a la fiabilidad de r**, veremos que:

$$\rho = -0,6884 \quad \text{y} \quad n = 56$$

$$\mu_z = \frac{1}{2} \ln \frac{0,3116}{1,6884} = -0,845, \text{ y desviación típica: } \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{53}} = 0,137.$$

El intervalo, será:

$$Z = \mu_z \pm 2\sigma_z = -0,845 \pm 0,274 = \begin{cases} -0,571 \\ -1,119 \end{cases}$$

$$\text{valores éstos que corresponden a } \begin{cases} r_1 = -0,516 \\ r_2 = -0,807 \end{cases}$$

de lo que se puede afirmar, en este caso, que la probabilidad de que se cumpla la desigualdad:  $-0,516 < r < -0,807$ , es del 95%, con las mismas consideraciones restrictivas que ya están expuestas en los casos anteriores.

#### 5.4. FUNCIÓN DEL CAUDAL ANUAL

Si asimilamos la curva de distribución de los caudales del río Ebro en su tramo final a una curva normal (distribución campaniforme de Gauss, véase el anexo nº: 3), tal como puede observarse en la figura siguiente, se obtendría una función del tipo:

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{3,452 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-6,5)^2}{23'833}}$$

Dicha asimilación simplificativa, cuya corrección conceptual se analizará estadísticamente a continuación, tiene como objetivo la mayor facilidad operativa en su manejo ulterior, si se tiene en cuenta que la curva normal se halla tabulada en todos sus aspectos en numerosas publicaciones estadísticas, tal como hemos puesto de manifiesto en otros apartados del presente libro.

De hecho, esta curva real de distribución mensual de los caudales descendentes por el río Ebro en su tramo final para la larga serie cronológica analizada, resulta ser la siguiente:

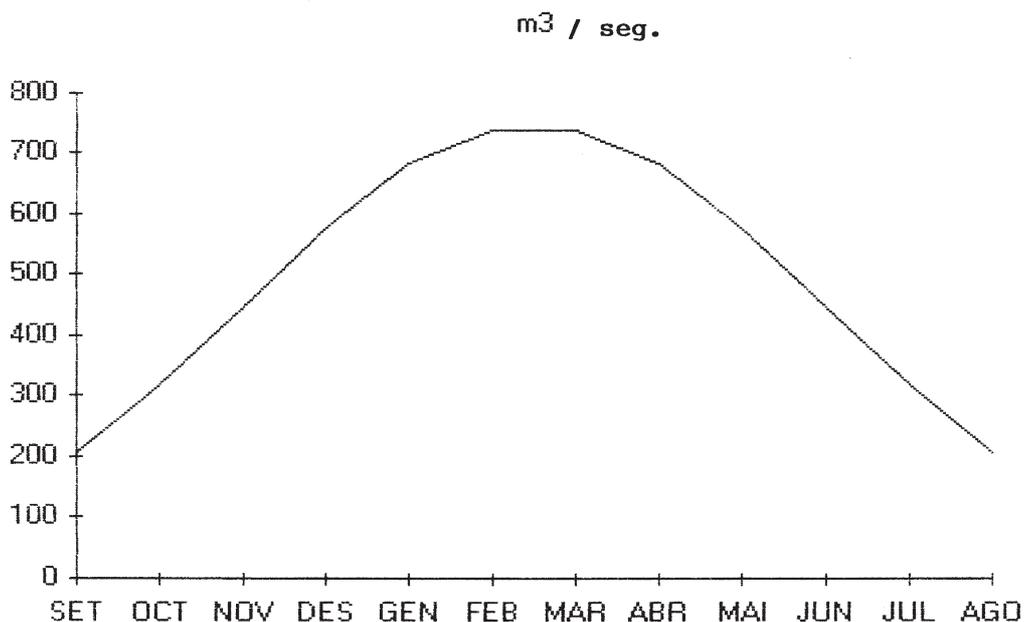


Fig. 5.8. Función del caudal anual aproximadamente normal

, cuyas características teóricas se explicitan suficientemente en el anexo nº: 3 (“Restantes especificaciones metodológicas”).

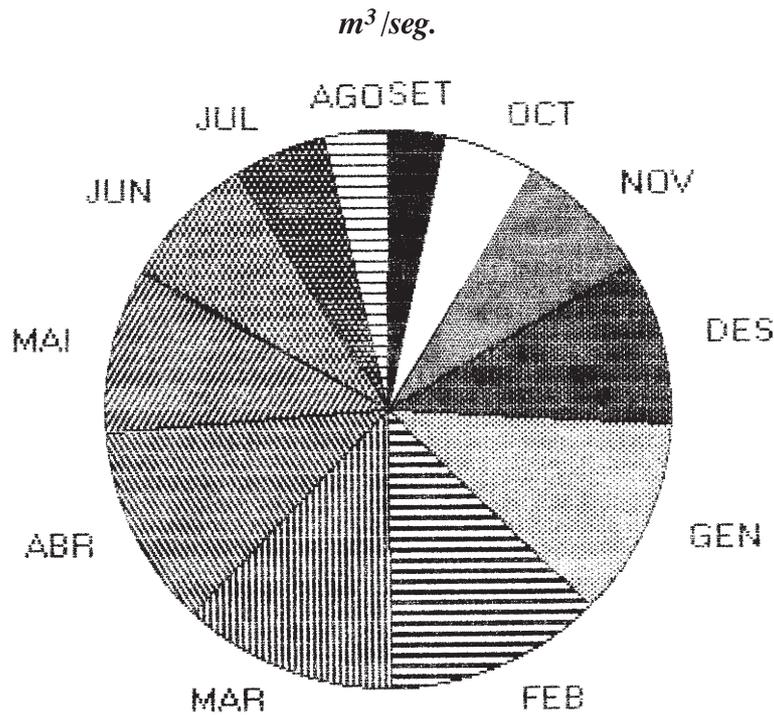


Fig. 5.9. Distribución mensual de los caudales del río Ebro

Después, hemos realizado la corrección:

$$p_i = f(x_i) \cdot \frac{1,000}{0,916},$$

y acumulado los  $p_i$  para obtener la columna de la P. De este modo, se tendría la función corregida:

$$p_i = \frac{1}{7'926 \times e^{\frac{(x-6'5)^2}{23'833}}}$$

A continuación, se realiza un contraste de la bondad del ajuste utilizando el estadígrafo  $\chi^2$  de Pearson, con  $(n - 1)$  g. l., a saber:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - T_i)^2}{T_i}, \text{ puesto que: } \forall T_i > 5$$

De esta manera, se obtendrá:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(198-208)^2}{208} + \frac{(302-321)^2}{321} + \frac{(494-448)^2}{448} + \frac{(610-577)^2}{577} + \frac{(643-684)^2}{684} = \\ &= \frac{(730-738)^2}{738} + \frac{(764-738)^2}{738} + \frac{(665-684)^2}{684} + \frac{(618-577)^2}{577} + \frac{(533-448)^2}{448} = \\ &= \frac{(249-321)^2}{321} + \frac{(145-208)^2}{208} = 66,48.\end{aligned}$$

El valor de  $\chi^2$  con:  $12 - 1 = 11$  g. l., para una probabilidad del 5% es:  $19,675 < 66,48$ , luego se rechaza la hipótesis nula y, en su consecuencia, el ajuste o asimilación a una distribución normal será sólo orientativo, pero no aceptable.

Podemos, no obstante, calcular el coeficiente de determinación o crítico del ajuste anterior, a partir de la siguiente fórmula de la varianza residual:

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n} = \frac{24.507}{12} = 2.042,25; \quad S_y^2 = 43.054,41$$

$$R = r^2 = 1 - \frac{S_e^2}{S_y^2} = 1 - \frac{2.042,25}{43.054,41} = 0,952$$

lo cual implica un coeficiente de correlación de:

$$r = \pm\sqrt{0,952} = \pm 0,976$$

que resulta suficientemente aceptable, razón por la que, salvo que medie la realización de un ajuste mejor a otra función matemática (trigonométrica, cicloide, serie de Fourier, etc.), aceptaremos como válido el presente ajuste normalizado.

Hay que tener en cuenta, a la vista de la distribución de los caudales mensuales medios de toda la serie cronológica analizada, que el año hidráulico “real” en el tramo inferior del río Ebro comienza el 1 de septiembre para concluir el 31 de agosto mientras que, como resulta bien sabido, oficialmente se considera el período anual hidráulico desde el 1 de octubre al 30 de septiembre.

El cuadro de los cálculos correspondientes, es el siguiente:

Tabla 5.11. Función del caudal anual normalizada

Mes	$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$	$f(x_i)$ corregido = $P_i$	$f(x_i)$	$P$	$T_i$
-----	-------	-------	-----------	---------	----------------------------	----------	-----	-------

S - 1	198	198	1	0,035	0,032	0,035	208
O - 2	302	604	4	0,054	0,049	0,089	321
N - 3	494	1.482	9	0,075	0,069	0,164	448
D - 4	610	2.440	16	0,097	0,089	0,261	577
E - 5	643	3.215	25	0,115	0,105	0,376	684
F - 6	730	4.380	36	0,124	0,114	0,500	738
(6,5)	---	---	---	(0,126)	---	---	(750)
M - 7	764	5.348	49	0,124	0,114	0,624	738
A - 8	665	5.320	64	0,115	0,105	0,739	684
M - 9	618	5.562	81	0,097	0,089	0,836	577
J - 10	533	5.330	100	0,075	0,069	0,911	448
Jl - 11	249	2.739	121	0,054	0,049	0,965	321
A - 12	145	1.740	144	0,035	0,032	1,000	208
$\Sigma = 78$	5.951	38.358	---	$\Sigma = 1,000$	$\Sigma=0,916$	---	5.952

$$\bar{x} = \frac{78}{12} = 6,5 \text{ meses} \quad \bar{y} = \frac{5.951}{12} \cong 496 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

La determinación de las fechas del año hidráulico en que, probablemente, se producirán los caudales extremos, una vez analizada toda la serie, resulta ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caudal máximo} \rightarrow \text{tendrá lugar alrededor del 01/03 de cada año.} \\ \text{Caudal mínimo} \rightarrow \text{tendrá lugar alrededor del 01/09 de cada año.} \end{array} \right.$$

Se tienen, pues, como resultado de los cálculos efectuados, los siguientes parámetros estadísticos:

$\mu_x = 6,5 \text{ meses}$
$\sigma_x = 3,452 \text{ meses}$
$\mu_y = 496 \text{ m}^3/\text{seg.}$
$\sigma_y = 207,5 \text{ m}^3/\text{seg.}$

Al objeto de poder realizar un ajuste adecuado diario, habría que buscar una partición temporal operativa del eje de abscisas desde 0,9 hasta 120,1 (ambos inclusive), con lo que tendremos 122 puntos (de 3 días cada uno), que serán los aproximadamente 365 días del año, pudiéndose incluso desagregar la determinación con carácter diario.

## 6. RESUMEN Y CONCLUSIONES

1) Realizados los estudios predictivos pertinentes y a la vista de las cifras de aportaciones hídricas previstas en el tramo inferior del río Ebro, parece lógico esperar que, en el escenario del año 2012 (2º horizonte del Plan), puedan ser superiores las demandas de agua en dicho tramo a sus aportaciones medias

anuales, lo que también puede comportar graves efectos para la agricultura de la zona, así como la degradación medioambiental de los ecosistemas deltaicos.

2) La previsión de puesta en riego, en toda la cuenca, de 435.872 nuevas hectáreas para dicho horizonte temporal, contemplada en el Plan Hidrológico de la Cuenca del Ebro ya analizado, responde, evidentemente, a los buenos deseos de todas las partes implicadas y a la estimación de necesidades futuras -en el momento de elaborar la documentación básica del Plan- de las diferentes zonas en cuanto a la demanda de agua para regadíos, lo que implicaría un incremento exagerado de la demanda de agua, del orden de  $3.569 \text{ hm}^3/\text{año}$  ( $113 \text{ m}^3/\text{seg.}$  en caudal ficticio continuo). Sin embargo, es bien cierto que las previsiones de la reforma de la PAC (Política Agrícola Común de la UE), los acuerdos de la OMC (Organización Mundial del Comercio) sobre la globalización del comercio y la internacionalización de la economía y las prognosis relativas a la actividad agraria conducen a un reforzamiento de los programas de congelación de tierras, jubilaciones anticipadas, disminución de la protección por la vía arancelaria y de los precios garantizados, etc. Y así, el incremento total de las demandas consuntivas previsto será de:  $113$  (riego) +  $5$  (otros usos) =  $118 \text{ m}^3/\text{seg.}$  (total). Debería pensarse, pues, antes que en aumentar de forma notable la superficie regable, en proyectar acciones dirigidas a mejorar los regadíos ya existentes y a ampliar los riegos actuales únicamente con vistas a la reconversión de las producciones excedentarias por otras claramente deficitarias.

3) En el caso del delta del Ebro, espacio natural de extraordinario interés ecológico nacional e internacional, el denominado "caudal de compensación" previsto en el Plan Hidrológico de la Cuenca del Ebro y en el propio PHN de  $100 \text{ m}^3/\text{seg.}$ , resulta claramente insuficiente, como indica el propio Organismo Rector del Parque Natural y las alegaciones presentadas en su día por la Generalitat de Cataluña al actual PHN, amén de otras consideraciones suficientemente expuestas. Estudios recientes demuestran que son necesarios caudales del orden de los  $300 \text{ m}^3/\text{seg.}$  para evitar la penetración de la cuña salina ascendente por el lecho del río, mientras que los  $100 \text{ m}^3/\text{seg.}$  inicialmente previstos escasamente impedirían dicho ascenso hasta las inmediaciones de la isla fluvial de Gracia. Tal como ya se ha señalado anteriormente, este caudal no debería ser inferior a los  $350 \text{ m}^3/\text{seg.}$  aguas arriba del azud de Xerta-Tivenys, y tampoco tendría por qué resultar constante a lo largo del año, sino adaptado a sus condiciones naturales o hidrograma.

4) En cualquier caso, resulta imprescindible, antes de elaborar complejos proyectos orientados a utilizar supuestos "sobrantes regulados" del río Ebro, el llevar a término un previo, riguroso y ecuánime estudio sobre las **existencias reales de caudales regulados**, a partir de las más recientes y esmeradas estadísticas de aforo, comprobando la exactitud en las estaciones foronómicas existentes al efecto y teniendo bien presente el comportamiento actual del río, consecuente del aprovechamiento real de los recursos. Lógicamente, dicho estudio debería constituir un documento básico del Plan Hidrológico Nacional

(PHN), que después del correspondiente proceso parlamentario de aprobación por parte de las Cortes Generales del Estado (Congreso de los Diputados y Senado) entró en vigor a partir del mes de Julio de 2001 en forma de Ley 10/2001, de 5 de julio. Posteriormente, el *Departament de Medi Ambient* de la *Generalitat* de Cataluña aprobó el Decreto 290/2001, de 6 de noviembre, por el que se aprueba la constitución del Consorcio para la Protección Integral del Delta del Ebro así como sus Estatutos (DOGC nº: 3.517 de 20/11/2001), en base a lo establecido en la Disposición Adicional 10ª de la mencionada ley del PHN y demás disposiciones concordantes.

\*\*\*\*\*

(\*) Por lo que se refiere a las caracterización del valor central de la distribución de caudales, veamos que G. Udny Yule, estadístico inglés, en su "Introducción a la Teoría de la Estadística", ha precisado las condiciones que debe cumplir una buena caracterización del valor central de una serie. En resumen son las siguientes:

a) *La característica del valor central debe ser definida objetivamente a partir de los datos de la serie, sin que haya lugar a intervenir ninguna apreciación del estadístico.*

b) *Debe depender de todas las observaciones de la serie, a ser posible.* Señalemos que, no obstante, hay veces que se plantea el problema de decidir si debe tenerse en cuenta una observación ("outlier") que es notablemente distinta de todas las demás de su conjunto o si puede ser rechazada por considerar que tal observación tiene carácter excepcional debido a algún factor extraño a la serie como, por ejemplo, un error de observación o una avenida extraordinaria. En este sentido, recomendamos la aplicación de los denominados "métodos robustos", tal como se propugna en el epígrafe 4 del presente capítulo de nuestro libro.

c) *Debe tener, en la medida de lo posible, una significación concreta, sencilla y fácil de comprender. Si se tiene en cuenta que muchos de los valores centrales de las series han de ser utilizados por personas poco familiarizadas con la Estadística, se comprende la preferencia que en la realidad se ha dado a la media aritmética como característica del valor central de que goza esta propiedad, de una interpretación sencilla.*

d) *Debe ser de cálculo fácil y rápido.*

e) *Debe ser poco sensible a las fluctuaciones del muestreo.* Frecuentemente las observaciones se efectúan, no sobre el conjunto completo de elementos a estudiar, sino sobre una parte de éstos que reciben el nombre de muestra. Las observaciones hechas sobre los elementos componentes de la muestra constituyen la serie estadística de la cual se determina el valor central. Es evidente que "a priori" no puede asegurarse que el valor central correspondiente a la muestra adoptada coincida con el valor central que se obtendría si se hiciese una serie estadística que abarcase todo el conjunto completo de elementos a estudiar, ni que coincidan siquiera con los correspondientes a distintas muestras que se eligiesen al azar. Ahora bien, dado que en la práctica se procede casi siempre por muestreo, conviene que la característica elegida del valor central sea de tal naturaleza que dicho valor central sea sensiblemente el mismo para las distintas muestras. Conviene hacer notar que esta elección del valor central sólo será posible cuando se conozca la ley de distribución del fenómeno en estudio; la variación

del valor central y de otros estadísticos en las distintas muestras entra de lleno en la parte de la Teoría Estadística conocida por la denominación de Teoría de las Muestras.

f) *Debe ser adecuada a los cálculos algebraicos posteriores.* Se comprende fácilmente la importancia de tal condición con sólo pensar en el caso muy frecuente de tratar de determinar el valor central que corresponde a una serie global resultado de reunir varias series estadísticas parciales.

De entre los cuatro medios expresados se ve inmediatamente que la aritmética es la que mejor reúne las anteriores condiciones de Yule, si bien ni ella ni las otras tres proporcionan indicación alguna acerca de la repartición de los datos de la serie o de sus posiciones respectivas ni sobre las desviaciones de unos respecto a otros. Se limitarán a condensar todos los datos de la serie en uno solo, **la media**, como síntesis de todos ellos.

En particular, las medias aritméticas ( $\bar{X}$ ) y cuadrática (C) dan mucho relieve a los elementos grandes de la serie y, desde luego, la segunda todavía más que la primera. Por el contrario, las medias geométrica y armónica destacan la influencia de los valores pequeños y reducen la influencia de los valores grandes, lo que habrá que tener bien presente en los estudios de Hidrología e Hidráulica, especialmente para la determinación prudente de los caudales básicos o mínimos medioambientales en ciertos tramos de las corrientes naturales de los ríos y, especialmente, en su parte más sensible: su tramo final.

Recordemos, por último, que las medias deben calcularse a partir de datos homogéneos y numerosos, condiciones ambas inherentes a toda buena estadística en materia de aportaciones hidráulicas.

\* \* \* \* \*

## **ANEJOS**



**-ANEJO NÚM. 1-****TABLAS Y GRÁFICOS CORRESPONDIENTES  
AL CAPÍTULO I**

*1. Valores del coeficiente de Chèzy (C) y del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ ) en función del radio hidráulico medio (R) y de las diferentes categorías de rugosidad (k), para las diferentes formulaciones clásicas de: Ganguillet y Kütter (simplificada), Manning-Strickler, Bazin, Koeschlin y Forchheimer. Coeficiente promedio de Fanning. Análisis estadístico de las formulaciones modernas propuestas por el autor*



**VALORES DE C=**

según la formulación de Ganguillet-Küttner (simplificada)

R	$\frac{100 \cdot R}{m + \sqrt{R}}$											
	0,12	0,15	0,2	0,26	0,33	0,47	0,52	0,75	1	1,37	1,87	2,5
0,01	45,454545	40,000000	33,333333	27,777778	23,255814	17,543860	16,129032	11,764706	9,090909	6,802721	5,076142	3,846154
0,03	59,073015	53,589838	46,410162	39,982237	34,420376	26,928438	24,086124	18,761279	14,763410	11,223724	8,477127	6,479304
0,05	65,076360	59,850838	52,786405	46,237315	40,390905	32,238265	30,070569	22,966848	18,274400	14,031491	10,680458	8,209952
0,07	68,796734	63,818380	56,949913	50,436080	44,398183	36,017436	33,722090	26,077431	20,222057	16,186171	12,394744	9,570191
0,10	72,491435	67,826684	61,257411	54,878953	48,934413	40,220885	37,815985	29,658557	24,025307	18,753662	14,464539	11,228771
0,11	73,431488	68,857861	62,382149	56,056027	50,125629	41,371835	38,942948	30,662289	24,905897	19,490497	15,064184	11,712642
0,12	74,271573	69,783052	63,397460	57,124729	51,213033	42,430898	39,982237	31,594943	25,728427	20,182248	15,629335	12,170072
0,13	75,028879	70,620215	64,321083	58,102030	52,212360	43,411342	40,946344	32,466207	26,500589	20,834651	16,164367	12,604376
0,14	75,716649	71,383097	65,166852	59,001254	53,136033	44,323730	41,845233	33,283859	27,228574	21,452419	16,672821	13,018238
0,15	76,345280	72,082549	65,945757	59,833050	53,994038	45,176611	42,686988	34,054243	27,917451	22,039419	17,157605	13,413866
0,16	76,923077	72,727273	66,666667	60,606061	54,794521	45,977011	43,478261	34,782609	28,571429	22,598870	17,621145	13,793103
0,17	77,456769	73,324350	67,336837	61,327396	55,544213	46,730775	44,224594	35,473356	29,194044	23,134486	18,065489	14,157507
0,19	78,412991	74,397920	68,548014	62,637768	56,912867	48,117315	45,600429	36,756355	30,356777	24,137125	18,903326	14,846943
0,20	78,843949	74,883358	69,098301	63,236001	57,540630	48,757846	46,237315	37,354571	30,901699	24,609853	19,299628	15,174116
0,25	80,645161	76,923077	71,428571	65,789474	60,240964	51,546392	49,019608	40,000000	33,333333	26,737968	21,097046	16,666667
0,30	82,028464	78,501483	73,252111	67,810729	62,402698	53,818455	51,298210	42,206445	35,388937	28,561095	22,654483	17,971536
0,35	83,136783	79,773680	74,734969	69,469520	64,193018	55,727537	53,220919	44,096934	37,170458	30,159338	24,033395	19,135981
0,40	84,052214	80,829582	75,974693	70,866896	65,712702	57,367895	54,878953	45,748707	38,742589	31,583999	25,273397	20,190407
0,45	84,825884	81,725600	77,033152	72,067651	67,027051	58,801578	56,332626	47,213595	40,149162	32,870134	26,401724	21,156051
0,50	85,491595	82,499263	77,951879	73,115688	68,180711	60,071592	57,623900	48,528137	41,421356	34,042871	27,438009	22,048121
0,55	86,072744	83,176687	78,760006	74,042048	69,205498	61,208955	58,783147	49,719092	42,582189	35,120898	28,396930	22,878064
0,60	86,586134	83,776710	79,478690	74,869434	70,124842	62,236762	59,833050	50,806662	43,649167	36,118524	29,289785	23,654720
0,65	87,044196	84,313328	80,123745	75,614921	70,956476	63,172660	60,790990	51,806479	44,635936	37,046973	30,125477	24,385079
0,70	87,456359	84,797195	80,707272	76,291650	71,714125	64,030429	61,670574	52,730895	45,553342	37,915221	30,911161	25,074776
0,75	87,829928	85,236590	81,238721	76,909935	72,408613	64,821028	62,482650	53,598838	46,410162	38,730871	31,652681	25,728427
0,80	88,170664	85,638061	81,725600	77,478008	73,048622	65,553310	63,236001	54,391413	47,213595	39,499048	32,354883	26,349871
0,85	88,483182	86,006868	82,173964	78,002536	73,641213	66,234527	63,937834	55,142319	47,969630	40,225688	33,021830	26,942335
0,90	88,771229	86,347294	82,588761	78,488989	74,192202	66,870689	64,594137	55,848156	48,683298	40,914742	33,656967	27,508565
0,95	89,037887	86,662866	82,974078	78,941902	74,706430	67,466831	65,209931	56,513658	49,358869	41,569838	34,263243	28,050917
1,00	89,285714	86,956522	83,333333	79,365079	75,187970	68,027121	65,789474	57,142857	50,000000	42,194093	34,843206	28,571429
1,50	91,076374	89,088885	85,962399	82,488574	78,746532	72,267120	70,196216	62,020410	55,051026	47,200975	39,574987	32,881309
2,00	92,178403	90,410517	87,610066	84,470321	81,080298	75,059006	73,115688	65,345379	58,578644	50,794005	43,060950	36,130210
2,50	92,945902	91,335184	88,771229	85,878306	82,732809	77,085900	75,251516	67,826884	61,257411	53,577243	45,814988	38,742589
3,00	93,520696	92,029971	89,648305	86,948124	83,996515	78,656260	76,909935	69,763052	63,397460	55,835669	48,085130	40,926995
3,50	93,972359	92,577303	90,342031	87,798174	85,005648	79,921641	78,250219	72,370973	65,166852	57,268662	50,011076	42,802608
4,00	94,339623	93,023256	90,909091	88,495575	85,836910	80,971660	79,365079	72,727273	66,666667	59,347181	51,679587	44,444444
4,50	94,646013	93,392556	91,384214	89,081687	85,837867	81,362528	80,312876	73,879613	67,961276	60,759831	53,148336	45,902906
5,00	94,906768	93,713507	91,790048	89,583617	87,139857	82,631626	81,132541	74,883358	69,093307	62,008481	54,457646	47,213595
5,50	95,132256	93,988477	92,142096	90,019990	87,664510	83,304963	81,851230	75,768994	70,106492	63,124540	55,636826	48,402627
6,00	95,329812	94,229637	92,451377	90,404097	88,127317	83,901296	82,488574	76,558762	71,010205	64,131334	56,707650	49,489743

**Valores del coeficiente de Fanning  $(f)$ , en conducciones libres, según la fórmula simplificada de Ganguillet y Kütter**

m	0.12	0.15	0.2	0.26	0.33	0.47	0.52	0.75	1	1.37	1.87	2.5
0.01	0.0094864	0.0122500	0.0176400	0.0254016	0.0362404	0.0636804	0.0753424	0.1416100	0.2371800	0.4235364	0.7606564	1.3249600
0.03	0.0056167	0.0068248	0.0090998	0.0122809	0.0165434	0.0270292	0.0313948	0.0568841	0.0899255	0.1555902	0.2727462	0.4668737
0.05	0.0046282	0.0054716	0.0070342	0.0091679	0.0120140	0.0189587	0.0216757	0.0371581	0.0586698	0.0995516	0.1718210	0.2907869
0.07	0.0041411	0.0048124	0.0064032	0.0077050	0.0098985	0.0151088	0.0228222	0.0447762	0.0748114	0.1275795	0.2140005	0.354503
0.10	0.0037298	0.0042604	0.0052232	0.0065080	0.0081852	0.0121158	0.0137058	0.0222821	0.0339561	0.0557299	0.0933680	0.1554503
0.11	0.0036349	0.0041338	0.0050366	0.0062375	0.0078008	0.0114511	0.0129240	0.0208472	0.0315974	0.0515953	0.0863704	0.1428717
0.12	0.0035531	0.0040249	0.0048765	0.0058063	0.0074730	0.0108866	0.0122609	0.0196345	0.0296094	0.0481190	0.0802371	0.1323335
0.13	0.0034818	0.0039300	0.0047375	0.0058060	0.0071897	0.0104004	0.0116903	0.0185949	0.0279090	0.0451527	0.0750134	0.1233711
0.14	0.0034188	0.0038465	0.0046153	0.0056303	0.0069419	0.0099766	0.0111935	0.0176925	0.0264366	0.0425896	0.0705079	0.1156516
0.15	0.0033627	0.0037722	0.0045069	0.0054749	0.0067230	0.0096035	0.0107584	0.0169010	0.0251481	0.0403511	0.0665798	0.1089302
0.16	0.0033124	0.0037056	0.0044100	0.0053361	0.0065280	0.0092720	0.0103684	0.0162006	0.0240100	0.0383780	0.0631230	0.1030225
0.17	0.0032669	0.0036455	0.0043227	0.0052113	0.0063530	0.0089753	0.0100214	0.0155758	0.0229968	0.0366247	0.0600560	0.0977873
0.18	0.0032255	0.0035909	0.0042435	0.0050984	0.0061948	0.0087079	0.0097089	0.0150146	0.0220884	0.0350555	0.0573153	0.0931144
0.19	0.0031877	0.0035411	0.0041713	0.0049956	0.0060511	0.0084655	0.0094258	0.0145075	0.0212689	0.0336422	0.0548504	0.0889164
0.20	0.0031530	0.0034953	0.0041051	0.0049015	0.0059198	0.0082446	0.0091679	0.0140465	0.0205254	0.0323622	0.0526209	0.0851235
0.25	0.0030137	0.0033324	0.0038416	0.0045284	0.0054010	0.0073767	0.0081567	0.0122500	0.0176400	0.0274157	0.0440365	0.0705600
0.30	0.0029129	0.0031805	0.0036527	0.0042624	0.0050333	0.0067670	0.0074482	0.0110027	0.0156502	0.0240274	0.0381898	0.0606856
0.35	0.0028358	0.0030799	0.0035092	0.0040613	0.0047564	0.0063113	0.0069198	0.0100795	0.0141860	0.0215483	0.0339933	0.0535250
0.40	0.0027743	0.0030000	0.0033956	0.0039027	0.0045390	0.0059555	0.0065080	0.0093648	0.0130581	0.0196482	0.0306852	0.0480802
0.45	0.0027240	0.0029345	0.0033029	0.0037738	0.0043627	0.0056686	0.0061764	0.0087927	0.0121591	0.0181407	0.0281185	0.0437912
0.50	0.0026817	0.0028798	0.0032255	0.0036664	0.0042163	0.0054315	0.0059027	0.0083228	0.0114237	0.0169123	0.0260346	0.0403193
0.55	0.0026456	0.0028330	0.0031597	0.0035752	0.0040924	0.0052315	0.0056722	0.0079288	0.0108094	0.0158900	0.0243060	0.0374470
0.60	0.0026143	0.0027926	0.0031028	0.0034966	0.0039858	0.0050601	0.0054749	0.0075930	0.0102874	0.0150244	0.0228467	0.0350284
0.65	0.0025869	0.0027572	0.0030530	0.0034280	0.0038929	0.0049113	0.0053037	0.0073028	0.0098375	0.0142807	0.0215967	0.0329616
0.70	0.0025626	0.0027258	0.0030091	0.0033675	0.0038111	0.0047806	0.0051535	0.0070490	0.0094453	0.0136342	0.0205128	0.0311732
0.75	0.0025408	0.0026978	0.0029698	0.0033135	0.0037383	0.0046647	0.0050204	0.0068248	0.0090998	0.0130662	0.0195630	0.0296094
0.80	0.0025212	0.0026725	0.0029345	0.0032651	0.0036731	0.0045611	0.0049015	0.0066251	0.0087927	0.0125627	0.0187230	0.0282292
0.85	0.0025034	0.0026497	0.0029026	0.0032214	0.0036142	0.0044677	0.0047945	0.0064459	0.0085177	0.0121129	0.0179744	0.0270014
0.90	0.0024872	0.0026288	0.0028735	0.0031815	0.0035607	0.0043831	0.0046975	0.0062840	0.0082598	0.0117084	0.0173024	0.0259012
0.95	0.0024723	0.0026097	0.0028469	0.0031451	0.0035119	0.0043060	0.0046092	0.0061369	0.0080450	0.0113423	0.0166955	0.0249093
1.00	0.0024586	0.0025921	0.0028224	0.0031117	0.0034670	0.0042354	0.0045284	0.0060025	0.0078400	0.0110091	0.0161443	0.0240100
1.50	0.0023629	0.0024695	0.0026524	0.0028805	0.0031585	0.0040730	0.0039777	0.0050955	0.0064673	0.0095719	0.0105703	0.0150146
2.00	0.0023067	0.0023978	0.0025536	0.0027469	0.0029814	0.0037493	0.0036664	0.0045901	0.0052232	0.0068280	0.0093377	0.0130581
2.50	0.0022688	0.00233495	0.0024872	0.0026576	0.0028635	0.0033984	0.0034612	0.0042604	0.0052232	0.0068280	0.0093377	0.0130581
3.00	0.0022410	0.0023142	0.0024388	0.0025926	0.0027780	0.0031680	0.0033135	0.0040429	0.0048765	0.0062868	0.0084768	0.0117014
3.50	0.0022195	0.0022869	0.0024015	0.0025426	0.0027124	0.0030685	0.0032010	0.0038465	0.0046153	0.0058817	0.0078365	0.0106983
4.00	0.0022023	0.0022650	0.0023716	0.0025027	0.0026602	0.0029894	0.0031117	0.0037056	0.0044100	0.0055649	0.0073387	0.0099225
4.50	0.0021880	0.0022470	0.0023470	0.0024699	0.0026172	0.0029247	0.0030387	0.0035909	0.0042435	0.0053091	0.0069387	0.0093020
5.00	0.0021760	0.0022318	0.0023263	0.0024423	0.0025812	0.0028705	0.0029776	0.0034953	0.0041051	0.0050975	0.0066090	0.0087927
5.50	0.0021657	0.0022187	0.0023086	0.0024187	0.0025504	0.0028243	0.0029255	0.0034141	0.0039879	0.0049188	0.0063319	0.0083660
6.00	0.0021567	0.0022074	0.0022931	0.0023982	0.0025237	0.0027843	0.0028805	0.0033440	0.0038870	0.0047656	0.0060949	0.0080025

VALORES DE  $C = (1/n) (R)^{1/6}$

según la formulación de Manning-Strickler

n	0.01	0.013	0.017	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.01	46.43014	35.71546	27.31180	23.21507	18.57206	15.47670	13.26575	11.60754	9.28603	7.73855	6.63288	5.80377
0.03	55.75559	42.88887	32.79735	27.87779	22.30224	18.58518	15.93017	13.93890	11.15112	9.29259	7.96508	6.96945
0.05	60.70835	46.69868	35.71073	30.35417	24.28334	20.23610	17.34524	15.17709	12.14167	10.11805	8.67262	7.58854
0.07	64.20862	49.39120	37.76971	32.10431	25.68345	21.40285	18.34532	16.05215	12.84172	10.70143	9.17266	8.02608
0.10	68.13967	52.41508	40.08209	34.06983	27.25587	22.71320	19.46848	17.03492	13.62793	11.35661	9.73424	8.51746
0.11	69.23027	53.25400	40.72362	34.61513	27.89211	23.07673	19.78008	17.30757	13.84605	11.53837	9.89004	8.65378
0.12	70.24115	54.03160	41.31825	35.12057	28.09646	23.41369	20.06890	17.56029	14.04823	11.70685	10.03445	8.78014
0.13	71.18409	54.75684	41.87293	35.59205	28.47364	23.72801	20.33831	17.79602	14.23682	11.86401	10.16916	8.89801
0.14	72.06841	55.43718	42.39311	36.03420	28.82736	24.02278	20.59097	18.01710	14.41368	12.01140	10.29549	9.00855
0.15	72.90156	56.07806	42.88320	36.45078	29.16062	24.30049	20.82902	18.22539	14.58031	12.15025	10.41451	9.11269
0.16	73.68963	56.68428	43.34677	36.84482	29.47585	24.56319	21.05418	18.42241	14.73793	12.28160	10.52709	9.21120
0.17	74.43767	57.25969	43.78679	37.21884	29.77507	24.81253	21.26791	18.60942	14.88753	12.40627	10.63395	9.30471
0.18	75.14990	57.80756	44.20575	37.57495	30.05996	25.04994	21.47140	18.78747	15.02998	12.52498	10.73570	9.39374
0.19	75.82988	58.33062	44.60573	37.91494	30.33195	25.27660	21.66568	18.95747	15.16598	12.63831	10.83284	9.47873
0.20	76.48065	58.83121	44.98854	38.24033	30.59226	25.49353	21.85162	19.12016	15.29613	12.74677	10.92581	9.56008
0.25	79.37739	61.05947	46.69250	39.68869	31.75096	26.45910	22.67925	19.84435	15.87548	13.22956	11.33963	9.92217
0.30	81.82545	62.94259	48.13254	40.91272	32.73018	27.27512	23.37870	20.45636	16.36509	13.63757	11.68935	10.22818
0.35	83.95407	64.57999	49.38466	41.97703	33.58163	27.98466	23.98688	20.98852	16.79081	13.99234	11.99344	10.49426
0.40	85.84267	66.03275	50.49560	42.92133	34.33707	28.61419	24.52648	21.46067	17.16853	14.30711	12.26324	10.73033
0.45	87.54376	67.34129	51.49624	43.77188	35.01750	29.18122	25.01250	21.88594	17.50875	14.59062	12.50625	10.94297
0.50	89.09399	68.53377	52.40814	44.54699	35.63760	29.69797	25.45543	22.27350	17.81880	14.84899	12.72771	11.13675
0.55	90.51997	69.63068	53.24695	45.25999	36.20799	30.17329	25.86285	22.62999	18.10399	15.08666	12.93142	11.31500
0.60	91.84172	70.64740	54.02445	45.92086	36.73669	30.61388	26.24049	22.96043	18.36834	15.30695	13.12025	11.48021
0.65	93.07464	71.59581	54.74970	46.53732	37.22986	31.02485	26.59275	23.28866	18.61493	15.51243	13.29638	11.63433
0.70	94.23090	72.48523	55.42985	47.11545	37.69236	31.41027	26.92311	23.55772	18.84618	15.70514	13.46156	11.77886
0.75	95.32026	73.32320	56.07064	47.66013	38.12810	31.77339	27.23436	23.83006	19.06405	15.88670	13.61718	11.91503
0.80	96.35068	74.11583	56.67678	48.17534	38.54027	32.11686	27.52877	24.08767	19.27014	16.05844	13.76438	12.04384
0.85	97.32876	74.86820	57.25211	48.66438	38.93150	32.44289	27.80822	24.33219	19.46575	16.22145	13.90411	12.16610
0.90	98.26001	75.58455	57.79991	49.13000	39.30400	32.75330	28.07429	24.56500	19.65200	16.37666	14.03714	12.28250
0.95	99.14909	76.26846	58.32290	49.57455	39.65964	33.04967	28.32831	24.78727	19.82982	16.52484	14.16416	12.39364
1.00	100.00000	76.92300	58.82343	50.00000	40.00000	33.33330	28.57143	25.00000	20.00000	16.66666	14.28571	12.50000
1.50	106.98843	82.29871	62.93426	53.49421	42.79537	35.66277	30.56812	26.74711	21.39769	17.83140	15.28406	13.37355
2.00	112.24102	86.33916	66.02402	56.12051	44.96641	37.41364	32.06886	28.06025	22.44820	18.70683	16.03443	14.03013
2.50	116.49219	89.60929	68.52470	58.24609	46.59688	38.83069	33.28348	29.12305	23.29944	19.41536	16.64174	14.56152
3.00	120.08490	92.37291	70.63806	60.04245	48.03396	40.02826	34.30997	30.02123	24.01698	20.01414	17.15499	15.01061
3.50	123.20880	94.77591	72.47564	61.60440	49.28352	41.06956	35.20251	30.80220	24.64176	20.53479	17.60126	15.40110
4.00	125.98045	96.90795	74.10603	62.99023	50.39218	41.99345	35.99442	31.49512	25.19609	20.99674	17.99721	15.74756
4.50	128.47695	98.82832	75.57455	64.23847	51.39078	42.82561	36.70770	32.11924	25.69539	21.41282	18.35385	16.05962
5.00	130.75202	100.57838	76.91282	65.37601	52.30081	43.58396	37.35772	32.68800	26.15040	21.79199	18.67886	16.34400
5.50	132.84476	102.18817	78.14384	66.42238	53.13790	44.28154	37.95665	33.21119	26.56895	22.14078	18.97782	16.60559
6.00	134.78451	103.68029	79.28487	67.39226	53.91381	44.92813	38.50986	33.69613	26.95690	22.46408	19.25493	16.84806

Coeficiente de Fanning según la formulación de Manning-Strickler $(\lambda = 2g/C^2)$												
n	0.01	0.013	0.017	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
R	0.01	0.013	0.017	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.01	0.009019	0.0153654	0.0262758	0.0363677	0.0568246	0.0818275	0.113761	0.1454709	0.2272982	0.3273097	0.4455046	0.5818835
0.03	0.0063049	0.0106553	0.0182213	0.0252197	0.0394057	0.0567444	0.0772352	0.1008786	0.1576229	0.2269771	0.3089409	0.4035146
0.05	0.0053181	0.0089877	0.0153695	0.0212725	0.0322383	0.0478633	0.0651471	0.0850901	0.1329533	0.1914530	0.2605886	0.3403606
0.07	0.0047541	0.0080345	0.0137394	0.0190164	0.0297132	0.0427871	0.0582379	0.0760658	0.1186528	0.1711482	0.2329515	0.3042632
0.10	0.0042214	0.0071342	0.0121999	0.0168856	0.0263837	0.0379926	0.0517121	0.0675423	0.1053349	0.1519704	0.2068484	0.2701693
0.11	0.0040894	0.0069112	0.0118185	0.0163578	0.0255590	0.0380350	0.0500957	0.0654311	0.1022360	0.1472200	0.2003826	0.2617243
0.12	0.0039726	0.0067137	0.0114808	0.0158903	0.0248286	0.0357533	0.0486641	0.0635613	0.0993146	0.1430131	0.1946565	0.2542453
0.13	0.0038680	0.0065370	0.0111787	0.0154721	0.0241752	0.0348124	0.0473834	0.0618885	0.0967008	0.1392493	0.1895336	0.2475541
0.14	0.0037737	0.0063775	0.0109060	0.0150948	0.0235856	0.0339633	0.0462277	0.0603790	0.0943422	0.1358529	0.1849108	0.2415162
0.15	0.0036879	0.0062326	0.0106581	0.0147517	0.0230496	0.0331914	0.0451771	0.0590069	0.0921982	0.1327655	0.1807085	0.2360274
0.16	0.0036095	0.0061000	0.0104314	0.0144379	0.0225592	0.0324853	0.0442160	0.0577515	0.0902367	0.1299410	0.1768640	0.2310060
0.17	0.0035373	0.0059780	0.0102228	0.0141492	0.0221081	0.0318357	0.0433318	0.0565966	0.0884322	0.1273425	0.1733271	0.2263865
0.18	0.0034706	0.0058653	0.0100299	0.0138822	0.0216910	0.0312351	0.0425143	0.0555289	0.0867639	0.1249402	0.1700573	0.2218150
0.19	0.0034086	0.0057605	0.0098509	0.0136344	0.0213037	0.0306774	0.0417553	0.0545375	0.0852149	0.1227095	0.1670211	0.2181501
0.20	0.0033508	0.0056629	0.0096839	0.0134033	0.0209427	0.0301576	0.0410477	0.0536133	0.0837708	0.1206301	0.1641909	0.2144534
0.25	0.0031107	0.0052571	0.0089900	0.0124429	0.0194421	0.0279986	0.0381065	0.0497717	0.0777683	0.1119864	0.1524288	0.1990868
0.30	0.0029274	0.0049473	0.0084602	0.0117095	0.0182361	0.0263465	0.0358604	0.0468381	0.0731845	0.1053858	0.1434417	0.1873524
0.35	0.0027808	0.0046996	0.0080366	0.0111233	0.0171380	0.0250274	0.0340650	0.0444931	0.0698205	0.1001095	0.1362601	0.1779724
0.40	0.0026598	0.0044951	0.0076869	0.0106392	0.0166238	0.0239383	0.0325826	0.0425569	0.0664951	0.0957530	0.1303304	0.1702275
0.45	0.0025574	0.0043221	0.0073910	0.0102298	0.0159840	0.0230170	0.0313287	0.0409191	0.0639360	0.0920680	0.1253146	0.1636762
0.50	0.0024692	0.0041730	0.0071361	0.0098769	0.0154326	0.0222250	0.0302479	0.0395075	0.0617304	0.0888819	0.1209916	0.1580299
0.55	0.0023920	0.0040425	0.0069130	0.0095681	0.0149502	0.0215283	0.0293024	0.0382725	0.0598008	0.0861133	0.1172096	0.1530901
0.60	0.0023237	0.0039270	0.0067155	0.0092947	0.0144523	0.0209152	0.0284651	0.0371789	0.0590920	0.0836525	0.1138603	0.1487154
0.65	0.0022625	0.0038237	0.0065387	0.0090501	0.0141408	0.0203628	0.0277159	0.0362004	0.0565631	0.0814510	0.1108637	0.1448016
0.70	0.0022073	0.0037304	0.0063792	0.0088294	0.0137959	0.0198661	0.0270399	0.0353175	0.0551835	0.0794643	0.1081597	0.1412698
0.75	0.0021572	0.0036456	0.0062343	0.0086287	0.0134824	0.0194146	0.0264254	0.0345148	0.0539294	0.0776584	0.1057016	0.1380593
0.80	0.0021113	0.0035681	0.0061016	0.0084451	0.0131955	0.0190016	0.0258632	0.0337805	0.0527821	0.0760063	0.1034529	0.1351221
0.85	0.0020691	0.0034967	0.0059796	0.0082763	0.0129316	0.0186216	0.0253460	0.0331050	0.0517266	0.0744863	0.1013841	0.1324200
0.90	0.0020300	0.0034308	0.0058668	0.0081201	0.0126877	0.0182703	0.0248679	0.0324805	0.0507508	0.0730811	0.0994715	0.1299219
0.95	0.0019938	0.0033695	0.0057621	0.0079751	0.0124612	0.0179441	0.0244239	0.0319006	0.0498447	0.0717764	0.0976955	0.1276023
1.00	0.0019600	0.0033124	0.0056644	0.0078400	0.0122500	0.0176400	0.0240100	0.0313600	0.0490000	0.0705601	0.0960400	0.1254400
1.50	0.0017123	0.0028938	0.0049486	0.0068492	0.0107019	0.0154108	0.0209758	0.0273970	0.0428078	0.0616432	0.0839032	0.1095879
2.00	0.0015558	0.0026293	0.0044963	0.0062232	0.0097237	0.0140022	0.0190585	0.0248927	0.0388949	0.0560087	0.0762340	0.0995710
2.50	0.0014443	0.0024409	0.0041741	0.0057773	0.0090270	0.0129989	0.0178929	0.0231091	0.0361079	0.0519954	0.0707715	0.0924363
3.00	0.0013592	0.0022970	0.0039281	0.0054367	0.0084949	0.0122327	0.0168500	0.0217470	0.0339797	0.0489308	0.0666002	0.0869880
3.50	0.0012911	0.0021820	0.0037314	0.0051646	0.0080696	0.0116203	0.0158164	0.0206582	0.0322784	0.0464810	0.0632668	0.0826328
4.00	0.0012350	0.0020871	0.0035690	0.0049398	0.0077184	0.0111146	0.0151281	0.0197592	0.0308738	0.0444583	0.0605126	0.0790369
4.50	0.0011874	0.0020067	0.0034317	0.0047497	0.0074214	0.0106868	0.0145459	0.0189988	0.0296856	0.0427473	0.0581838	0.0759951
5.00	0.0011465	0.0019375	0.0033133	0.0045858	0.0071654	0.0103182	0.0140441	0.0183434	0.0286615	0.0412726	0.0561766	0.0733735
5.50	0.0011106	0.0018770	0.0032097	0.0044425	0.0069414	0.0099956	0.0136051	0.0177700	0.0277656	0.0399825	0.0544206	0.0710800
6.00	0.0010789	0.0018233	0.0031180	0.0043155	0.0067430	0.0097100	0.0132164	0.0172622	0.0269722	0.0388400	0.0528655	0.0690488

**VALORES DE C =**

$$\frac{8.7}{(1 + \frac{r}{\sqrt{R}})}$$

según la formulación de Bazin

R	0,06	0,10	0,16	0,20	0,46	0,60	0,85	1,30	1,45	1,65	1,75
0,01	54,37500	33,46154	29,00000	21,75000	15,53871	12,42857	9,15789	6,21429	5,61290	4,97143	4,70270
0,03	64,61627	55,15579	45,22393	40,37684	31,84421	23,79773	19,48880	14,72710	10,22861	9,28339	7,83528
0,05	68,59424	60,11552	50,71284	45,92417	37,15344	28,45757	23,62024	18,12003	12,76825	11,62387	9,85697
0,07	70,91744	63,13661	54,21428	49,54642	40,77055	31,76763	26,62552	20,65185	14,71200	13,42492	11,42575
0,10	73,12543	66,09798	57,77029	53,29395	44,64553	35,44297	30,02727	23,59043	17,02224	15,57660	13,31500
0,11	73,67220	66,84536	58,68789	54,27247	45,68046	36,44815	30,97113	24,41868	17,88419	16,19534	14,56082
0,12	74,15583	67,51120	59,51240	55,15579	46,62316	37,37265	31,84421	25,19009	18,30509	16,77662	15,09594
0,13	74,58783	68,10975	60,25932	55,95934	47,48778	38,22814	32,65642	25,91232	18,89025	17,32524	15,60181
0,14	74,97694	68,65199	60,94067	56,69516	48,28548	39,02392	33,41569	26,59151	19,44396	17,84510	16,08189
0,15	75,32994	69,14646	61,56597	57,37281	49,02522	39,76752	34,12844	27,23268	19,96977	18,33940	16,53904
0,16	75,65217	69,60000	62,14286	58,00000	49,71429	40,46512	34,80000	27,84000	20,47059	18,81081	16,97561
0,17	75,94795	70,01811	62,67754	58,58305	50,35868	41,12184	35,43480	28,41695	20,94890	19,26157	17,39361
0,18	76,22076	70,40531	63,17516	59,12718	50,96342	41,74203	36,03658	28,96650	21,40680	19,69358	17,79473
0,19	76,47347	70,76532	63,63998	59,63677	51,53274	42,32933	36,60854	29,49119	21,84610	20,10850	18,18045
0,20	76,70848	71,10127	64,07561	60,11552	52,07023	42,88690	37,15344	29,93320	22,26836	20,50775	18,55204
0,25	77,67857	72,50000	65,90909	62,14286	54,31250	45,31250	39,54545	32,22222	24,16667	22,30769	20,23256
0,30	78,41055	73,56832	67,3128	63,72934	56,21162	47,28669	41,51863	34,09250	25,78951	23,85309	21,68238
0,35	78,98905	74,42062	68,47971	65,01942	57,72705	48,94399	43,19365	35,70311	27,20960	25,21047	22,96115
0,40	79,46161	75,12215	69,43435	66,09798	59,00939	50,36693	44,64553	37,11655	28,47343	26,42248	24,10721
0,45	79,85734	75,71332	70,24548	67,01884	60,11552	51,60976	45,92417	38,37493	29,61273	27,51830	25,14687
0,50	80,19521	76,22076	70,94661	67,81813	61,08418	52,71008	47,06447	39,50807	30,65023	28,51889	26,09907
0,55	80,48819	76,66279	71,56112	68,52121	61,94287	53,69496	48,09181	40,53790	31,60281	29,43984	26,97792
0,60	80,74548	77,05256	72,10587	69,14646	62,71182	54,58456	49,02522	41,48101	32,48338	30,29309	27,79428
0,65	80,97386	77,39974	72,59343	69,70766	63,40626	55,39426	49,87936	42,35029	33,30205	31,08804	28,55668
0,70	81,17840	77,71168	73,03335	70,21533	64,03799	56,13609	50,66573	43,15595	34,06692	31,83220	29,27196
0,75	81,36301	77,99403	73,43308	70,67769	64,61627	56,81958	51,39352	43,90623	34,78455	32,53169	29,94573
0,80	81,53075	78,25124	73,79852	71,10127	65,14852	57,45245	52,07023	44,60786	35,46035	33,19155	30,58259
0,85	81,68407	78,48690	74,13439	71,49135	65,64077	58,04101	52,70200	45,26642	36,09887	33,81601	31,18641
0,90	81,82494	78,70388	74,44457	71,85222	66,09798	58,59049	53,29395	45,88659	36,70390	34,40865	31,76049
0,95	81,95496	78,90456	74,73222	72,18745	66,52426	59,10527	53,85040	46,47233	37,27871	34,97250	32,30761
1,00	82,07547	79,09091	75,00000	72,50000	66,92308	59,58904	54,37500	47,02703	37,82609	35,51020	32,83019
1,50	82,93694	80,43270	76,94761	74,78729	69,88238	63,24566	58,39326	51,35706	42,20339	39,83662	37,06513
2,00	83,45913	81,25444	78,15749	76,22076	71,77436	65,64704	61,08418	54,33965	45,33047	42,95650	40,15274
2,50	83,81928	81,82494	79,00523	77,23097	73,12543	67,39330	63,06755	56,58216	47,74469	45,38198	42,57294
3,00	84,08714	82,25122	79,64290	77,99403	74,15583	68,74312	64,61627	58,35997	49,69851	47,35576	44,55634
3,50	84,29650	82,58561	80,14566	78,59757	74,97694	69,83014	65,87348	59,82078	51,33109	49,01249	46,22835
4,00	84,46602	82,85714	80,55566	79,09091	75,66210	70,73171	66,92308	61,05263	52,72727	50,43478	47,67123
4,50	84,60695	83,08341	80,89827	79,50427	76,22076	71,49631	67,81813	62,11207	53,94259	51,67693	48,93641
5,00	84,72655	83,27579	81,19048	79,85734	76,70848	72,15616	68,59424	63,03747	55,01532	52,77654	50,06035
5,50	84,82971	83,44202	81,44357	80,16362	77,13310	72,73368	69,27629	63,85597	55,97296	53,76071	51,06945
6,00	84,91990	83,58755	81,66562	80,43270	77,50733	73,24501	69,88238	64,58744	56,83590	54,64961	51,98345
											50,74560

R	Coeficiente de Fanning $(\lambda=2g/C)$ según la formulación de Bazin														
	0,06	0,10	0,16	0,20	0,30	0,46	0,60	0,85	1,30	1,45	1,65	1,75			
0,01	0,0066291	0,0103580	0,0175051	0,0233056	0,0414322	0,0812070	0,1268860	0,2337033	0,5075439	0,6221297	0,7930374	0,8862597			
0,03	0,0046943	0,0064428	0,0095834	0,0120224	0,0193284	0,0346087	0,0516043	0,0930395	0,1873366	0,2274276	0,2869243	0,3192622			
0,05	0,0041656	0,0054235	0,0076211	0,0092934	0,0141990	0,0242025	0,0351307	0,0596950	0,1202246	0,1450623	0,1818044	0,2017292			
0,07	0,0038972	0,0049169	0,0066685	0,0079842	0,0117913	0,0194217	0,0265199	0,0459556	0,0905500	0,1087508	0,1356015	0,1501366			
0,10	0,0036654	0,0044862	0,0058728	0,0069008	0,0093928	0,0156026	0,0217382	0,0352196	0,0676430	0,0807813	0,1001118	0,1105539			
0,11	0,0036112	0,0043865	0,0056906	0,0066542	0,0093928	0,0147538	0,0204335	0,0328709	0,0626737	0,0747267	0,0924452	0,1020106			
0,12	0,0035642	0,0043004	0,0055340	0,0064428	0,0090168	0,0140329	0,0193284	0,0308885	0,0584941	0,0696382	0,0860074	0,0948394			
0,13	0,0035231	0,0042251	0,0053977	0,0062591	0,0086951	0,0134119	0,0183789	0,0291906	0,0549264	0,0652977	0,0805204	0,0887294			
0,14	0,0034866	0,0041586	0,0052777	0,0060971	0,0084066	0,0128705	0,0175532	0,0277185	0,0518426	0,0615486	0,0757847	0,0834577			
0,15	0,0034540	0,0040994	0,0051710	0,0059545	0,0081549	0,0123936	0,0168276	0,0264287	0,0491485	0,0582755	0,0716532	0,0788600			
0,16	0,0034246	0,0040461	0,0050754	0,0058264	0,0079304	0,0119700	0,0161844	0,0252882	0,0467730	0,0553912	0,0680151	0,0748126			
0,17	0,0033980	0,0039979	0,0049892	0,0057110	0,0077287	0,0115907	0,0156098	0,0242717	0,0446615	0,0528291	0,0647853	0,0712205			
0,18	0,0033737	0,0039541	0,0049109	0,0056064	0,0075464	0,0112489	0,0150928	0,0233595	0,0427713	0,0505367	0,0618975	0,0680095			
0,19	0,0033515	0,0039139	0,0048394	0,0055110	0,0073806	0,0109389	0,0146248	0,0225357	0,0410685	0,0484726	0,0592989	0,0651209			
0,20	0,0033310	0,0038770	0,0047739	0,0054235	0,0072290	0,0106563	0,0141990	0,0218777	0,0395257	0,0466037	0,0569473	0,0625075			
0,25	0,0032483	0,0037289	0,0045120	0,0050754	0,0066291	0,0101887	0,0137033	0,0188775	0,0335600	0,0393864	0,0478800	0,0524376			
0,30	0,0031879	0,0036214	0,0043234	0,0048259	0,0062030	0,0087655	0,0113703	0,0168631	0,0294693	0,0344482	0,0416910	0,0455713			
0,35	0,0031414	0,0035389	0,0041796	0,0046363	0,0058816	0,0081820	0,0105055	0,0153760	0,0264735	0,0308386	0,0371765	0,0405675			
0,40	0,0031041	0,0034731	0,0040654	0,0044862	0,0056288	0,0077262	0,0098333	0,0142272	0,0241756	0,0280743	0,0337258	0,0367458			
0,45	0,0030735	0,0034191	0,0039721	0,0043638	0,0054235	0,0073586	0,0092934	0,0133095	0,0223511	0,0258829	0,0309947	0,0337233			
0,50	0,0030476	0,0033737	0,0038940	0,0042615	0,0052529	0,0070545	0,0088485	0,0125570	0,0208636	0,0240985	0,0287744	0,0312677			
0,55	0,0030255	0,0033349	0,0038274	0,0041745	0,0051083	0,0067981	0,0081549	0,0119271	0,0196248	0,0226144	0,0269302	0,0292293			
0,60	0,0030062	0,0033013	0,0037698	0,0040994	0,0049838	0,0065783	0,0081549	0,0113909	0,0185752	0,0213584	0,0253715	0,0275074			
0,70	0,0029742	0,0032455	0,0036746	0,0039755	0,0047795	0,0062197	0,0076353	0,0105238	0,0176732	0,0202801	0,0240348	0,0260317			
0,75	0,0029608	0,0032221	0,0036347	0,0039237	0,0046943	0,0060710	0,0074206	0,0101673	0,0161988	0,0193430	0,0228745	0,0247513			
0,80	0,0029486	0,0032009	0,0035988	0,0038770	0,0046179	0,0059380	0,0072290	0,0098499	0,0156873	0,0177910	0,0209560	0,0226355			
0,85	0,0029375	0,0031817	0,0035663	0,0038349	0,0045489	0,0058182	0,0070567	0,0095654	0,0150407	0,0171400	0,0201523	0,0217499			
0,90	0,0029274	0,0031642	0,0035366	0,0037964	0,0044862	0,0057095	0,0069008	0,0093086	0,0145489	0,0165547	0,0194304	0,0209546			
0,95	0,0029181	0,0031481	0,0035095	0,0037613	0,0044289	0,0056105	0,0067589	0,0090754	0,0141037	0,0160252	0,0187779	0,0202360			
1,00	0,0029096	0,0031333	0,0034844	0,0037289	0,0043763	0,0055198	0,0066291	0,0088626	0,0136985	0,0155435	0,0181848	0,0195832			
1,50	0,0028494	0,0030296	0,0033103	0,0035043	0,0040135	0,0049000	0,0057482	0,0074311	0,0110043	0,0123507	0,0142667	0,0152766			
2,00	0,0028139	0,0029687	0,0032086	0,0033737	0,0038047	0,0045481	0,0052529	0,0066378	0,0095384	0,0106218	0,0121570	0,0129634			
2,50	0,0027898	0,0029274	0,0031401	0,0032860	0,0036654	0,0043154	0,0048277	0,0061221	0,0085982	0,0095168	0,0108141	0,0114938			
3,00	0,0027720	0,0028972	0,0030900	0,0032221	0,0035642	0,0041476	0,0046943	0,0057547	0,0079354	0,0087400	0,0098732	0,0104657			
3,50	0,0027583	0,0028737	0,0030514	0,0031728	0,0034866	0,0040195	0,0045168	0,0054771	0,0074387	0,0081591	0,0091715	0,0096999			
4,00	0,0027472	0,0028549	0,0030204	0,0031333	0,0034246	0,0039177	0,0043663	0,0052583	0,0070499	0,0077054	0,0086247	0,0091037			
4,50	0,0027381	0,0028394	0,0029949	0,0031008	0,0033737	0,0038343	0,0042615	0,0050805	0,0067359	0,0073394	0,0081845	0,0086243			
5,00	0,0027303	0,0028263	0,0029733	0,0030735	0,0033310	0,0037645	0,0041656	0,0049324	0,0064757	0,0070368	0,0078211	0,0082288			
5,50	0,0027237	0,0028151	0,0029549	0,0030500	0,00332844	0,0037050	0,0040840	0,0048068	0,0062560	0,0067815	0,0075151	0,0078960			
6,00	0,0027179	0,0028053	0,0029389	0,0030296	0,0032627	0,0036554	0,0040135	0,0046985	0,0060675	0,0065627	0,0072531	0,0076113			

K		VALORES DE C = $K(1 + 0.6 \times \sqrt{R})$														
		según la formulación de Koeschlin														
R	18	20	24	28	32	36	40	42	44	46	48	52				
0,01	19,08000	21,20000	25,44000	29,68000	33,92000	38,16000	42,40000	44,52000	46,64000	48,76000	50,88000	55,12000				
0,03	19,87061	22,07846	26,49415	30,90985	35,32554	39,74123	44,15692	46,36477	48,57261	50,78046	52,98831	57,40400				
0,05	20,41495	22,68328	27,21994	31,75659	36,29325	40,82991	45,36656	47,63489	49,90322	52,17155	54,43988	58,97653				
0,07	20,85741	23,17490	27,80988	32,44486	37,07984	41,71482	46,34980	48,66729	50,98478	53,30227	55,61976	60,25474				
0,10	21,41526	23,79473	28,55368	33,31263	38,07157	42,83052	47,58947	49,96894	52,34841	54,72789	57,10736	61,86631				
0,11	21,58195	23,97995	28,77594	33,57193	38,36702	43,16391	47,95789	50,35789	52,75589	55,15388	57,55188	62,34787				
0,12	21,74123	24,15692	28,98831	33,81969	38,65108	43,48246	48,31384	50,72954	53,14523	55,56092	57,97661	62,80800				
0,13	21,89400	24,32666	29,19199	34,05733	38,92266	43,78799	48,65332	51,08599	53,51866	55,95132	58,38399	63,24932				
0,14	22,04099	24,48999	29,38799	34,28598	39,18398	44,08198	48,97998	51,42898	53,87798	56,32697	58,77597	63,67397				
0,15	22,18282	24,64758	29,57710	34,50661	39,43613	44,36564	49,29516	51,75992	54,22468	56,68943	59,15419	64,08371				
0,16	22,32000	24,80000	29,76000	34,72000	39,68000	44,64000	49,60000	52,08000	54,56000	57,04000	59,52000	64,48000				
0,17	22,45296	24,94773	29,93727	34,92682	39,91636	44,90591	49,89545	52,39023	54,88500	57,37977	59,87454	64,86409				
0,18	22,58205	25,09117	30,10940	35,12764	40,14587	45,16410	50,18234	52,69145	55,20057	57,70969	60,21881	65,23704				
0,19	22,70761	25,23068	30,27681	35,32295	40,36909	45,41522	50,46136	52,98443	55,50749	58,03056	60,55363	65,59976				
0,20	22,82991	25,36656	30,43988	35,51319	40,58650	45,65981	50,73313	53,28978	55,80644	58,34310	60,87975	65,95306				
0,25	23,40000	26,00000	31,20000	36,40000	41,60000	46,80000	52,00000	54,60000	57,20000	59,80000	62,40000	67,60000				
0,30	23,91540	26,57267	31,88720	37,20174	42,51627	47,83081	53,14534	55,80261	58,45988	61,11714	63,77441	69,08894				
0,35	24,38937	27,09930	32,51915	37,93901	43,35887	48,77873	54,19859	56,90852	59,61845	62,32838	65,03831	70,45817				
0,40	24,83052	27,58947	33,10736	38,62525	44,14315	49,66104	55,17893	57,93788	60,69683	63,45577	66,21472	71,73261				
0,45	25,24486	28,04984	33,65981	39,26978	44,87975	50,48972	56,09366	58,90467	61,70966	64,51464	67,31963	72,92960				
0,50	25,63675	28,48528	34,18234	39,87939	45,57645	51,27351	56,97036	59,81909	62,66762	65,51615	68,36468	74,06173				
0,55	26,00949	28,89944	34,67933	40,45921	46,23910	52,01899	57,79888	60,68882	63,57876	66,46871	69,35865	75,13854				
0,60	26,36564	29,29516	35,15419	41,01322	46,87226	52,73129	58,59032	61,51984	64,44935	67,37887	70,30838	76,16742				
0,65	26,70724	29,67471	35,60965	41,54459	47,47953	53,41448	59,34942	62,31689	65,28436	68,25183	71,21930	77,15424				
0,70	27,03593	30,03992	36,04790	42,05589	48,06387	54,07186	60,07984	63,08383	66,08782	69,09182	72,09581	78,10379				
0,75	27,35307	30,39230	36,47077	42,54923	48,62769	54,70615	60,78461	63,82384	66,86307	69,90230	72,94153	79,01999				
0,80	27,65981	30,73313	36,87975	43,02638	49,17300	55,31963	61,46625	64,53957	67,61288	70,68619	73,75950	79,90613				
0,85	27,95711	31,06345	37,27614	43,48883	49,70153	55,91422	62,12691	65,23325	68,33960	71,44594	74,55229	80,76498				
0,90	28,24578	31,38420	37,66104	43,93788	50,21472	56,49156	62,76840	65,90682	69,04524	72,18366	75,32208	81,59892				
0,95	28,52654	31,69615	38,03538	44,37461	50,71385	57,05308	63,39231	66,56192	69,73154	72,90115	76,07077	82,41000				
1,00	28,80000	32,00000	38,40000	44,80000	51,20000	57,60000	64,00000	67,20000	70,40000	73,60000	76,80000	83,20000				
1,50	31,22724	34,69694	41,63633	48,57571	55,51510	62,45449	69,39388	72,86357	76,33326	79,80296	83,27265	90,21204				
2,00	33,27351	36,97056	44,36468	51,57879	59,15290	66,54701	73,94113	77,63818	81,33524	85,03229	88,72935	96,12346				
2,50	35,07630	38,97367	46,76840	54,56313	62,35787	70,15260	77,94733	81,84470	85,74207	89,63943	93,53680	101,33153				
3,00	36,70615	40,78461	48,94153	57,09845	65,25538	73,41230	81,56922	85,64768	89,72614	93,80460	97,88306	106,03999				
3,50	38,20495	42,44994	50,93993	59,42992	67,91991	76,40990	84,89989	89,14488	93,38988	97,63487	101,87987	110,36986				
4,00	39,60000	44,00000	52,80000	61,60000	70,40000	79,20000	88,00000	92,40000	96,80000	101,20000	105,60000	114,40000				
4,50	40,91026	45,45584	54,54701	63,63818	72,72935	81,82052	90,91169	95,45727	100,00286	104,54844	109,09403	118,18519				
5,00	42,14953	46,83282	56,19938	65,56594	74,93251	84,29907	93,66563	98,34891	103,03219	107,71548	112,39876	121,76532				
5,50	43,32825	48,14249	57,77099	67,39949	77,02799	86,65649	96,28499	101,09924	105,91349	110,72774	115,54199	125,17049				
6,00	44,45449	49,39388	59,27265	69,15143	79,03020	88,90898	98,78775	103,72714	108,66653	113,60592	118,54530	128,42408				

K		Coeficiente de Fanning según la formulación de Koochlin ( $\lambda=2g/C^3$ )													
		18	20	24	28	32	36	40	42	44	46	48	52		
0.01	0.0538393	0.0436098	0.0302846	0.0222499	0.0170351	0.0134598	0.0109025	0.0098888	0.0090103	0.0082438	0.0075712	0.0064512			
0.03	0.0496402	0.0402086	0.0279226	0.0205146	0.0157065	0.0124100	0.0100521	0.0091176	0.0083076	0.0076009	0.0069807	0.0059480			
0.05	0.0470283	0.0380929	0.0264534	0.0194352	0.0148800	0.0117571	0.0095232	0.0086379	0.0078704	0.0072009	0.0066134	0.0056350			
0.07	0.0450542	0.0364939	0.0253430	0.0186193	0.0142554	0.0112635	0.0091253	0.0082753	0.0075401	0.0068987	0.0063357	0.0053985			
0.10	0.0427375	0.0346174	0.0240399	0.0176619	0.0135224	0.0106844	0.0086543	0.0078497	0.0071524	0.0065439	0.0060100	0.0051209			
0.11	0.0420799	0.0340847	0.0236699	0.0173902	0.0133143	0.0105200	0.0085212	0.0077290	0.0070423	0.0064432	0.0059175	0.0050421			
0.12	0.0414666	0.0335871	0.0233244	0.0171363	0.0131200	0.0103664	0.0083988	0.0076161	0.0069395	0.0063492	0.0058311	0.0049685			
0.13	0.0408890	0.0331201	0.0230000	0.0168980	0.0129375	0.0102222	0.0082800	0.0075102	0.0068430	0.0062609	0.0057500	0.0048994			
0.14	0.0403454	0.0326798	0.0226943	0.0166733	0.0127655	0.0100863	0.0081699	0.0074104	0.0067520	0.0061776	0.0056736	0.0048343			
0.15	0.0398311	0.0322632	0.0224050	0.0164608	0.0126028	0.0099578	0.0080658	0.0073159	0.0066660	0.0060989	0.0056013	0.0047727			
0.16	0.0393430	0.0318678	0.0221304	0.0162591	0.0124484	0.0098358	0.0079670	0.0072263	0.0065843	0.0060242	0.0055326	0.0047142			
0.17	0.0388785	0.0314916	0.0218691	0.0160671	0.0123014	0.0097196	0.0078729	0.0071409	0.0065065	0.0059530	0.0054673	0.0046585			
0.18	0.0384352	0.0311325	0.0216198	0.0158839	0.0121611	0.0096088	0.0077831	0.0070595	0.0064323	0.0058852	0.0054050	0.0046054			
0.19	0.0380113	0.0307892	0.0213814	0.0157088	0.0120270	0.0095028	0.0076973	0.0069817	0.0063614	0.0058203	0.0053453	0.0045546			
0.20	0.0376052	0.0304602	0.0211529	0.0155409	0.0118985	0.0094013	0.0076151	0.0069071	0.0062934	0.0057581	0.0052882	0.0045059			
0.25	0.0357952	0.0289941	0.0201348	0.0147929	0.0113258	0.0089488	0.0072485	0.0065746	0.0059905	0.0054809	0.0050337	0.0042891			
0.30	0.0342689	0.0277578	0.0192763	0.0141622	0.0108429	0.0086672	0.0069395	0.0062943	0.0057351	0.0052472	0.0048191	0.0041062			
0.35	0.0329500	0.0266895	0.0185344	0.0136171	0.0104256	0.0082975	0.0066724	0.0060520	0.0055144	0.0050453	0.0046336	0.0039481			
0.40	0.0317896	0.0257495	0.0178816	0.0131375	0.0100564	0.0079474	0.0064374	0.0058389	0.0053202	0.0048676	0.0044704	0.0038091			
0.45	0.0307546	0.0249112	0.0172995	0.0127098	0.0097309	0.0076887	0.0062278	0.0056488	0.0051469	0.0047091	0.0043249	0.0036851			
0.50	0.0298215	0.0241554	0.0167746	0.0123242	0.0094357	0.0074554	0.0060389	0.0054774	0.0049908	0.0045662	0.0041937	0.0035733			
0.55	0.0289729	0.0234681	0.0162973	0.0119735	0.0091672	0.0072432	0.0058670	0.0053216	0.0048488	0.0044363	0.0040743	0.0034716			
0.60	0.0281955	0.0228383	0.0158600	0.0116522	0.0089212	0.0070489	0.0057096	0.0051788	0.0047187	0.0043173	0.0039650	0.0033785			
0.65	0.0274788	0.0222578	0.0154568	0.0113560	0.0086945	0.0068697	0.0055645	0.0050471	0.0045987	0.0042075	0.0038642	0.0032926			
0.70	0.0268147	0.0217199	0.0150833	0.0110816	0.0084843	0.0067037	0.0054300	0.0049252	0.0044876	0.0041058	0.0037708	0.0032130			
0.75	0.0261965	0.0212192	0.0147355	0.0108261	0.0082887	0.0065491	0.0053048	0.0048116	0.0043841	0.0040112	0.0036839	0.0031389			
0.80	0.0256187	0.0207512	0.0144105	0.0105873	0.0081059	0.0064047	0.0051878	0.0047055	0.0042874	0.0039227	0.0036026	0.0030697			
0.85	0.0250768	0.0203122	0.0141057	0.0103634	0.0079344	0.0062692	0.0050780	0.0046059	0.0041967	0.0038397	0.0035284	0.0030048			
0.90	0.0245668	0.0198991	0.0138188	0.0101526	0.0077731	0.0061417	0.0049748	0.0045123	0.0041114	0.0037616	0.0034547	0.0029437			
0.95	0.0240856	0.0195094	0.0135482	0.0099538	0.0076208	0.0060214	0.0048773	0.0044239	0.0040309	0.0036880	0.0033870	0.0028860			
1.00	0.0236304	0.0191406	0.0132921	0.0097656	0.0074768	0.0059076	0.0047852	0.0043403	0.0039547	0.0036183	0.0033230	0.0028315			
1.50	0.0200997	0.0162807	0.0113061	0.0083065	0.0063597	0.00490249	0.0040702	0.0036918	0.0033638	0.0030776	0.0028285	0.0024084			
2.00	0.0177035	0.0143398	0.0099582	0.0073162	0.0056015	0.0042529	0.0035850	0.0032517	0.0029628	0.0027107	0.0024896	0.0021213			
2.50	0.0159305	0.0129037	0.0089609	0.0065835	0.0050405	0.0038926	0.0032259	0.0029260	0.0026660	0.0024393	0.0022402	0.0019088			
3.00	0.0145472	0.0117832	0.0081828	0.0060118	0.0046028	0.0036368	0.0029458	0.0026719	0.0024345	0.0022274	0.0020457	0.0017431			
3.50	0.0134282	0.0108768	0.0075533	0.0055494	0.0042488	0.0033670	0.0027192	0.0024664	0.0022473	0.0020561	0.0018863	0.0016090			
4.00	0.0124987	0.0101240	0.0070305	0.0051653	0.0039547	0.0031247	0.0025310	0.0022957	0.0020917	0.0019138	0.0017576	0.0014976			
4.50	0.0117109	0.0094859	0.0065874	0.0048397	0.0037054	0.0029277	0.0023715	0.0021510	0.0019599	0.0017932	0.0016469	0.0014032			
5.00	0.0110324	0.0089363	0.0062057	0.0045593	0.0034907	0.0027581	0.0022341	0.0020264	0.0018463	0.0016893	0.0015514	0.0013219			
5.50	0.0104403	0.0084567	0.0058727	0.0043146	0.0033034	0.0026101	0.0021142	0.0019176	0.0017472	0.0015986	0.0014682	0.0012510			
6.00	0.0099180	0.0080336	0.0055789	0.0040988	0.0031381	0.0024795	0.0020084	0.0018217	0.0016598	0.0015186	0.0013947	0.0011884			

**VALORES DE C=  $\delta \times R^{0.2}$**   
según la formulación de Forchheimer

$\delta$	20	30	35	40	45	50	55	60	65	70	80	90
0.01	7,96214	11,94322	13,93375	15,92429	17,91482	19,90536	21,89589	23,88643	25,87697	27,86750	31,84857	35,82965
0.03	9,91869	14,87803	17,35770	19,83738	22,31705	24,79672	27,27639	29,75607	32,23574	34,71541	39,67475	44,63410
0.05	10,98561	16,47841	19,22481	21,97121	24,71761	27,46401	30,21041	32,95682	35,70322	38,44962	43,94242	49,43522
0.07	11,75032	17,62548	20,56306	23,50064	26,43821	29,37579	32,31337	35,25095	38,18853	41,12611	47,00127	52,87643
0.10	12,61915	18,92872	22,08351	25,23829	28,39308	31,54787	34,70265	37,85744	41,01223	44,16701	50,47659	56,78616
0.11	12,86200	19,29300	22,50850	25,72400	28,93500	32,15500	35,37050	38,58600	41,80150	45,01700	51,44800	57,87900
0.12	13,08779	19,63168	22,90363	26,17558	29,44752	32,71947	35,99142	39,26336	42,53531	45,80726	52,35115	58,89505
0.13	13,29899	19,94849	23,27323	26,59798	29,92273	33,24748	36,57222	39,89697	43,22172	46,54647	53,19596	59,84546
0.14	13,49757	20,24636	23,62075	26,99514	30,36953	33,74393	37,11832	40,49271	43,36710	47,24150	53,99028	60,73907
0.15	13,68511	20,52766	23,94894	27,37022	30,79149	34,21277	37,63405	41,05533	44,47660	47,89788	54,74043	61,58299
0.16	13,86290	20,79435	24,26007	27,72579	31,19152	34,65724	38,12297	41,58869	45,05441	48,52014	55,45159	62,38304
0.17	14,03201	21,04801	24,55601	28,06401	31,57201	35,08002	38,58802	42,09602	45,60402	49,11202	56,12803	63,14403
0.18	14,19334	21,29000	24,83834	28,38667	31,93501	35,48334	39,03168	42,58001	46,12834	49,67668	56,77335	63,87001
0.19	14,34765	21,52147	25,10838	28,69530	32,28221	35,86912	39,45603	43,04294	46,62986	50,21677	57,39059	64,56442
0.20	14,49559	21,74339	25,36729	28,99119	32,61508	36,23898	39,86288	43,48678	47,11068	50,73458	57,98237	65,23017
0.25	15,15717	22,73575	26,52504	30,31433	34,10362	37,89291	41,68221	45,47150	49,26079	53,05008	60,62866	68,20725
0.30	15,72006	23,58009	27,51011	31,44012	35,37014	39,30015	43,23017	47,16019	51,09020	55,02022	62,88025	70,74028
0.35	16,21226	24,31839	28,37146	32,42452	36,47759	40,53065	44,58372	48,63678	52,68985	56,74292	64,84905	72,95518
0.40	16,65106	24,97660	29,13936	33,30213	37,46489	41,62766	45,79043	49,95319	54,11596	58,27872	66,80426	74,92979
0.45	17,04796	25,57194	29,83394	34,09593	38,35792	42,61991	46,88190	51,14389	55,40588	59,66787	68,19185	76,71583
0.50	17,41101	26,11652	30,46927	34,82202	39,17478	43,52753	47,88028	52,23303	56,58579	60,93854	69,64405	78,34955
0.55	17,74608	26,61913	31,05565	35,49217	39,92869	44,36521	48,80173	53,33825	57,67477	62,11129	70,98434	79,85738
0.60	18,05761	27,08641	31,60082	36,11522	40,62962	45,14402	49,65842	54,17283	58,68723	63,20163	72,23044	81,25924
0.65	18,34901	27,52352	32,11077	36,69802	41,28528	45,87253	50,45978	55,04703	59,63429	64,22154	73,39605	82,57055
0.70	18,62300	27,93450	32,59025	37,24600	41,90175	46,55750	51,21325	55,86899	60,52474	65,18049	74,49199	83,80349
0.75	18,88175	28,32263	33,04306	37,76350	42,48394	47,20438	51,92481	56,64525	61,36569	66,08613	75,52700	84,96788
0.80	19,12705	28,69057	33,47234	38,25410	43,03586	47,81762	52,59939	57,38115	62,16291	66,94467	76,50820	86,07172
0.85	19,36038	29,04056	33,88066	38,72075	43,56085	48,40094	53,24103	58,08113	62,92122	67,76131	77,44150	87,12169
0.90	19,58297	29,37445	34,27019	39,16593	44,06168	48,95742	53,85316	58,74890	63,64464	68,54039	78,33187	88,12335
0.95	19,79588	29,69381	34,64278	39,59175	44,54072	49,48969	54,43866	59,38763	64,33660	69,28556	79,18350	89,08144
1.00	20,00000	30,00000	35,00000	40,00000	45,00000	50,00000	55,00000	60,00000	65,00000	70,00000	80,00000	90,00000
1.50	21,68944	32,53415	37,95651	43,37887	48,30123	54,22359	59,64595	65,06831	70,49067	75,91302	86,75774	97,60246
2.00	22,97397	34,46095	40,20444	45,94793	51,69143	57,43492	63,17841	68,92190	74,66539	80,40888	91,89587	103,38285
2.50	24,02249	36,03373	42,03936	48,04498	54,05060	60,05622	66,06184	72,06747	78,07309	84,07871	96,08995	108,10120
3.00	24,91462	37,37193	43,60058	49,82924	56,05789	62,28655	68,51520	74,74386	80,97251	87,20117	99,65848	112,11578
3.50	25,69470	38,54205	44,96573	51,38941	57,81308	64,23676	70,66043	77,08411	83,50779	89,93146	102,77881	115,62616
4.00	26,39016	39,58524	46,18278	52,78032	59,37786	65,97540	72,57294	79,17047	85,76801	92,36555	105,56063	118,55571
4.50	27,01920	40,52880	47,28360	54,03840	60,79320	67,54800	74,30280	81,05760	87,81240	94,56720	108,07680	121,58640
5.00	27,59459	41,39189	48,29054	55,18919	62,08783	68,98648	75,88513	82,78378	89,68624	96,58108	110,37837	124,17567
5.50	28,12565	42,18847	49,21988	56,25130	63,28271	70,31412	77,34553	84,37694	91,40836	98,43977	112,50259	126,56541
6.00	28,61938	42,92907	50,08392	57,23876	64,39361	71,54845	78,70330	85,85814	93,01299	100,16784	114,47753	128,78722

$\delta$		Coeficiente de Fanning según la formulación de Forchheimer																	
		20	30	35	40	45	50	55	60	65	70	80	90						
0,01	0,3091691	0,1374085	0,1009532	0,0772923	0,0610704	0,0494671	0,0408819	0,0343521	0,0292704	0,0252383	0,0193231	0,0152676							
0,03	0,1992267	0,0885452	0,0650536	0,0498067	0,0393534	0,0318763	0,0263440	0,0221363	0,0188617	0,0162634	0,0124517	0,0098384							
0,05	0,1624082	0,0721814	0,0530313	0,0406021	0,0320806	0,0259853	0,0214755	0,0180454	0,0153759	0,0132578	0,0101505	0,0080202							
0,07	0,1419570	0,0630920	0,0463533	0,0354893	0,0280409	0,0227131	0,0187712	0,0157730	0,0134397	0,0115883	0,0088723	0,0070102							
0,10	0,1230824	0,0547033	0,0401902	0,0307706	0,0243126	0,0196932	0,0162754	0,0136758	0,0116528	0,0100475	0,0076927	0,0060781							
0,11	0,1184784	0,0526570	0,0386868	0,0296196	0,0234031	0,0189965	0,0156666	0,0131643	0,0112169	0,0096717	0,0074049	0,0058508							
0,12	0,1144257	0,0508559	0,0373635	0,0286064	0,0226026	0,0183081	0,0151307	0,0127140	0,0108332	0,0093409	0,0071516	0,0056507							
0,13	0,1108202	0,0492534	0,0361862	0,0277050	0,0218904	0,0177312	0,0146539	0,0123134	0,0104918	0,0090465	0,0069263	0,0054726							
0,14	0,1075833	0,0478148	0,0351292	0,0268958	0,0212510	0,0171333	0,0142259	0,0119537	0,0101854	0,0087823	0,0067240	0,0053128							
0,15	0,1046549	0,0465133	0,0341730	0,0261637	0,0206726	0,0167448	0,0138387	0,0116283	0,0099082	0,0085433	0,0065409	0,0051681							
0,16	0,1019878	0,0453279	0,0333021	0,0254969	0,0201457	0,0163180	0,0134850	0,0113320	0,0096556	0,0083255	0,0063742	0,0050364							
0,17	0,0995443	0,0442419	0,0325043	0,0248861	0,0196631	0,0159271	0,0131629	0,0110605	0,0094243	0,0081261	0,0062215	0,0049158							
0,18	0,0972942	0,0432419	0,0317695	0,0243236	0,0192186	0,0155671	0,0128654	0,0108105	0,0092113	0,0079424	0,0060809	0,0048047							
0,19	0,0952126	0,0423167	0,0310898	0,0238032	0,0188074	0,0152340	0,0125901	0,0105792	0,0090142	0,0077725	0,00659508	0,0047019							
0,20	0,0932790	0,0414574	0,0304585	0,0233198	0,0184255	0,0149246	0,0123344	0,0103643	0,0088312	0,0076146	0,0058299	0,0046064							
0,25	0,0853140	0,0379173	0,0278576	0,0213285	0,0168521	0,0136502	0,0112812	0,0094793	0,0080771	0,0069644	0,0053321	0,0042130							
0,30	0,0793136	0,0352505	0,0258983	0,0198284	0,0156669	0,0126902	0,0104877	0,0088126	0,0075090	0,0064746	0,0049571	0,0039167							
0,35	0,0745708	0,0331426	0,0243497	0,0186427	0,0147300	0,0119313	0,0098477	0,0078547	0,0066928	0,0057708	0,0044183	0,0034910							
0,40	0,0706923	0,0314188	0,0230832	0,0176731	0,0139639	0,0113108	0,0093477	0,0074932	0,0063848	0,0055052	0,0042149	0,0033303							
0,45	0,0674390	0,0299729	0,0220209	0,0168597	0,0133213	0,0107902	0,0089176	0,0074932	0,0063848	0,0055052	0,0042149	0,0033303							
0,50	0,0646559	0,0287360	0,0211121	0,0161640	0,0127715	0,0103449	0,0085495	0,0071840	0,0061213	0,0052780	0,0040410	0,0031929							
0,55	0,0622373	0,0276610	0,0203224	0,0155693	0,0122938	0,0099580	0,0082297	0,0069153	0,0058923	0,0050806	0,0038898	0,0030734							
0,60	0,0601085	0,0267149	0,0196273	0,0150271	0,0118733	0,0096174	0,0079482	0,0066678	0,0056907	0,0049068	0,0037568	0,0029683							
0,65	0,0582144	0,0258731	0,0190088	0,0145536	0,0114991	0,0093143	0,0076978	0,0064683	0,0055114	0,0047522	0,0036384	0,0028748							
0,70	0,0565141	0,0251174	0,0184536	0,0141285	0,0111633	0,0090423	0,0074729	0,0062793	0,0053504	0,0046134	0,0035321	0,0027908							
0,75	0,0549758	0,0244397	0,0179513	0,0137440	0,0108594	0,0087961	0,0072695	0,0061084	0,0052048	0,0044878	0,0034360	0,0027149							
0,80	0,0535747	0,0238110	0,0174938	0,0133937	0,0105827	0,0085720	0,0070843	0,0059527	0,0050722	0,0043734	0,00333484	0,0026457							
0,85	0,0522912	0,0232405	0,0170747	0,0130728	0,0103291	0,0083666	0,0069145	0,0058101	0,0049506	0,0042687	0,0032882	0,0025823							
0,90	0,0511092	0,0227152	0,0166687	0,0127773	0,0100956	0,0081775	0,0067582	0,0056788	0,0048387	0,0041722	0,0031943	0,0025239							
0,95	0,0500157	0,0222292	0,0163317	0,0125039	0,0098797	0,0080025	0,0066137	0,0055573	0,0047352	0,0040829	0,0031260	0,0024699							
1,00	0,0490000	0,0217778	0,0160000	0,0122500	0,0096790	0,0078400	0,0064793	0,0054444	0,0046391	0,0040000	0,0030625	0,0024198							
1,50	0,0416639	0,0185173	0,0136045	0,0104160	0,0082299	0,0066662	0,0055093	0,0046293	0,0039445	0,0034011	0,0026040	0,0020575							
2,00	0,0371351	0,0165045	0,0121257	0,0092838	0,0073353	0,0059416	0,0049104	0,0041261	0,0035157	0,0030314	0,0023209	0,0018338							
2,50	0,0339641	0,0150952	0,0110903	0,0084910	0,0067090	0,0054343	0,0044911	0,0037738	0,0032155	0,0027726	0,0021228	0,0016772							
3,00	0,0315753	0,0140335	0,0103103	0,0078938	0,0062371	0,0050520	0,0041752	0,0035084	0,0029894	0,0025776	0,0019735	0,0015593							
3,50	0,0296872	0,0131943	0,0096938	0,0074218	0,0058641	0,0047499	0,0039256	0,0032986	0,0028106	0,0024234	0,0018554	0,0014660							
4,00	0,0281431	0,0125080	0,0091896	0,0070358	0,0055591	0,0045029	0,0037214	0,0031270	0,0026644	0,0022974	0,0017589	0,0013898							
4,50	0,0268479	0,0119324	0,0087667	0,0067120	0,0053033	0,0042987	0,0035601	0,0029831	0,0025418	0,0021917	0,0016780	0,0013258							
5,00	0,0257400	0,0114400	0,0084049	0,0064350	0,0050844	0,0041184	0,0034036	0,0028600	0,0024369	0,0021012	0,0016087	0,0012711							
5,50	0,0247771	0,0110121	0,0080905	0,0061943	0,0048942	0,0039643	0,0032763	0,0027530	0,0023458	0,0020226	0,0015486	0,0012236							
6,00	0,0239296	0,0106354	0,0078137	0,0059824	0,0047268	0,0038287	0,0031642	0,0026588	0,0022655	0,0019534	0,0014956	0,0011817							

Coefficiente promedio de Fanning (  $\lambda$  )

Categorías de rugosidad												
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.01	0.009385	0.012974	0.018981	0.024671	0.035748	0.055700	0.075306	0.119778	0.214309	0.300843	0.436043	0.631222
0.03	0.006480	0.008671	0.012154	0.015334	0.021306	0.030986	0.040904	0.060398	0.101041	0.140594	0.199473	0.287703
0.05	0.005553	0.007329	0.010097	0.012596	0.017227	0.024385	0.031939	0.045781	0.074381	0.103110	0.144898	0.208463
0.07	0.005040	0.006594	0.008988	0.011137	0.015090	0.021042	0.027420	0.038628	0.061659	0.085281	0.119144	0.171082
0.10	0.004563	0.005917	0.007977	0.009820	0.013186	0.018128	0.023576	0.032576	0.051113	0.070542	0.097992	0.140399
0.11	0.004446	0.005751	0.007732	0.009502	0.012729	0.017440	0.022586	0.031173	0.048703	0.067180	0.093188	0.133433
0.12	0.004342	0.005604	0.007516	0.009222	0.012330	0.016840	0.021786	0.029961	0.046632	0.064292	0.089069	0.127462
0.13	0.004249	0.005474	0.007324	0.008974	0.011976	0.016312	0.021081	0.028900	0.044828	0.061777	0.085488	0.122273
0.14	0.004165	0.005356	0.007152	0.008752	0.011660	0.015841	0.020455	0.027961	0.043238	0.059563	0.082340	0.117711
0.15	0.004089	0.005249	0.006996	0.008551	0.011374	0.015419	0.019893	0.027122	0.041824	0.057594	0.079544	0.113661
0.16	0.004019	0.005152	0.006853	0.008368	0.011115	0.015036	0.019385	0.026367	0.040555	0.055829	0.077040	0.110034
0.17	0.003955	0.005062	0.006723	0.008200	0.010878	0.014687	0.018922	0.025682	0.039409	0.054234	0.074780	0.106763
0.18	0.003896	0.004979	0.006602	0.008046	0.010660	0.014368	0.018498	0.025057	0.038366	0.052784	0.072729	0.103794
0.19	0.003841	0.004902	0.006491	0.007903	0.010459	0.014074	0.018109	0.024483	0.037413	0.051459	0.070855	0.101082
0.20	0.003789	0.004831	0.006387	0.007771	0.010273	0.013802	0.017748	0.023954	0.036537	0.050241	0.069135	0.098594
0.25	0.003575	0.004533	0.005958	0.007223	0.009505	0.012690	0.016279	0.021815	0.033018	0.045356	0.062251	0.088639
0.30	0.003410	0.004305	0.005632	0.006808	0.008928	0.011861	0.015187	0.020243	0.030459	0.041807	0.057266	0.081438
0.35	0.003278	0.004123	0.005372	0.006479	0.008471	0.011211	0.014332	0.019021	0.028488	0.039076	0.053440	0.075917
0.40	0.003168	0.003971	0.005157	0.006208	0.008097	0.010681	0.013636	0.018034	0.026908	0.036888	0.050382	0.071507
0.45	0.003074	0.003843	0.004976	0.005980	0.007782	0.010238	0.013055	0.017215	0.025603	0.035082	0.047862	0.067877
0.50	0.002993	0.003732	0.004820	0.005783	0.007513	0.009859	0.012560	0.016519	0.024501	0.033558	0.045738	0.064819
0.55	0.002922	0.003635	0.004683	0.005612	0.007278	0.009531	0.012130	0.015918	0.023554	0.032247	0.043915	0.062195
0.60	0.002858	0.003549	0.004562	0.005460	0.007070	0.009242	0.011752	0.015391	0.022727	0.031104	0.042326	0.059911
0.65	0.002801	0.003471	0.004454	0.005324	0.006885	0.008985	0.011416	0.014925	0.021997	0.030095	0.040925	0.057898
0.70	0.002750	0.003401	0.004356	0.005202	0.006718	0.008754	0.011115	0.014508	0.021345	0.029196	0.039677	0.056105
0.75	0.002703	0.003337	0.004268	0.005091	0.006567	0.008557	0.010842	0.014131	0.020760	0.028386	0.038555	0.054494
0.80	0.002659	0.003279	0.004186	0.004989	0.006429	0.008355	0.010594	0.013789	0.020229	0.027653	0.037539	0.053036
0.85	0.002619	0.003225	0.004111	0.004896	0.006302	0.008180	0.010367	0.013476	0.019744	0.026984	0.036613	0.051708
0.90	0.002582	0.003175	0.004042	0.004810	0.006185	0.008019	0.010157	0.013188	0.019300	0.026370	0.035764	0.050491
0.95	0.002548	0.003128	0.003978	0.004730	0.006077	0.007870	0.009963	0.012923	0.018890	0.025805	0.034981	0.049370
1.00	0.002516	0.003085	0.003918	0.004655	0.005976	0.007732	0.009783	0.012676	0.018511	0.025281	0.034258	0.048333
1.50	0.002278	0.002765	0.003478	0.004108	0.005239	0.006729	0.008479	0.010903	0.015800	0.021540	0.029096	0.040951

Coefficiente promedio de Fanning (  $\lambda$  )

R	Categorías de rugosidad											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2,00	0,002126	0,002561	0,003200	0,003764	0,004778	0,006105	0,007669	0,009811	0,014149	0,019262	0,025961	0,036478
2,50	0,002018	0,002416	0,003003	0,003520	0,004451	0,005666	0,007100	0,009048	0,013001	0,017678	0,023784	0,033377
3,00	0,001935	0,002306	0,002852	0,003335	0,004203	0,005334	0,006669	0,008473	0,012139	0,016490	0,022153	0,031055
3,50	0,001869	0,002217	0,002733	0,003188	0,004007	0,005071	0,006328	0,008019	0,011461	0,015554	0,020869	0,029229
4,00	0,001814	0,002145	0,002634	0,003066	0,003845	0,004855	0,006049	0,007647	0,010907	0,014790	0,019822	0,027741
4,50	0,001769	0,002084	0,002552	0,002964	0,003709	0,004673	0,005814	0,007336	0,010443	0,014150	0,018945	0,026496
5,00	0,001729	0,002031	0,002481	0,002877	0,003593	0,004518	0,005613	0,007069	0,010047	0,013603	0,018197	0,025433
5,50	0,001695	0,001985	0,002419	0,002801	0,003491	0,004383	0,005438	0,006838	0,009704	0,013129	0,017547	0,024512
6,00	0,001665	0,001945	0,002364	0,002734	0,003402	0,004264	0,005284	0,006634	0,009402	0,012712	0,016977	0,023702
6,50	0,001638	0,001909	0,002316	0,002674	0,003322	0,004158	0,005147	0,006453	0,009133	0,012342	0,016469	0,022983
7,00	0,001614	0,001877	0,002272	0,002620	0,003251	0,004063	0,005023	0,006290	0,008892	0,012009	0,016015	0,022338
7,50	0,001592	0,001848	0,002233	0,002572	0,003186	0,003977	0,004912	0,006143	0,008675	0,011709	0,015604	0,021755
8,00	0,001572	0,001822	0,002197	0,002528	0,003127	0,003899	0,004810	0,006009	0,008477	0,011435	0,015230	0,021225
8,50	0,001554	0,001797	0,002164	0,002487	0,003073	0,003827	0,004717	0,005887	0,008295	0,011185	0,014888	0,020739
9,00	0,001537	0,001775	0,002134	0,002450	0,003023	0,003761	0,004632	0,005774	0,008129	0,010954	0,014573	0,020293
9,50	0,001522	0,001754	0,002106	0,002415	0,002977	0,003699	0,004552	0,005669	0,007975	0,010742	0,014282	0,019881
10,00	0,001507	0,001735	0,002080	0,002383	0,002935	0,003643	0,004479	0,005573	0,007831	0,010544	0,014012	0,019498
10,50	0,001494	0,001718	0,002056	0,002353	0,002895	0,003590	0,004410	0,005482	0,007698	0,010360	0,013760	0,019141
11,00	0,001482	0,001701	0,002033	0,002325	0,002858	0,003540	0,004346	0,005398	0,007574	0,010187	0,013525	0,018807
11,50	0,001470	0,001685	0,002012	0,002299	0,002823	0,003494	0,004286	0,005319	0,007457	0,010026	0,013304	0,018495
12,00	0,001459	0,001671	0,001992	0,002275	0,002790	0,003450	0,004229	0,005244	0,007347	0,009874	0,013097	0,018201
12,50	0,001449	0,001657	0,001973	0,002251	0,002759	0,003409	0,004176	0,005174	0,007243	0,009731	0,012901	0,017924
13,00	0,001439	0,001644	0,001955	0,002230	0,002729	0,003370	0,004125	0,005108	0,007145	0,009596	0,012717	0,017662
13,50	0,001430	0,001631	0,001939	0,002209	0,002702	0,003333	0,004077	0,005045	0,007053	0,009467	0,012542	0,017414
14,00	0,001421	0,001620	0,001923	0,002189	0,002675	0,003298	0,004032	0,004985	0,006965	0,009346	0,012376	0,017179
14,50	0,001413	0,001609	0,001908	0,002170	0,002650	0,003264	0,003999	0,004929	0,006881	0,009230	0,012218	0,016955
15,00	0,001405	0,001598	0,001893	0,002153	0,002626	0,003233	0,003948	0,004875	0,006802	0,009120	0,012068	0,016742
15,50	0,001397	0,001588	0,001879	0,002136	0,002604	0,003202	0,003908	0,004823	0,006726	0,009015	0,011924	0,016539

***2. Valores observados y su predicción. K (1,6)***

Valor observado y su predicción. Categorias de rugosidad k (1,6)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
1	-0.09495881	-4.66864261	-4.5736838	37	0.062654732	-6.31222093	-6.37487566
2	-0.13507921	-5.03903477	-4.90395555	38	0.072943475	-6.33734086	-6.41028434
3	-0.13589378	-5.19341696	-5.05752318	39	0.081746409	-6.36021207	-6.44195848
4	-0.13167362	-5.2903492	-5.15867558	40	0.090538869	-6.38007254	-6.47061123
5	-0.12387352	-5.38977498	-5.26590145	41	0.098838982	-6.39793016	-6.49676914
6	-0.12119626	-5.41575046	-5.2945542	42	0.106552788	-6.41427929	-6.52083208
7	-0.1187081	-5.43942021	-5.32071211	43	0.114071178	-6.42903971	-6.54311089
8	-0.11629657	-5.46107162	-5.34477505	44	0.121087768	-6.44276419	-6.56385196
9	-0.11398514	-5.481039	-5.36705386	45	0.127847352	-6.45540658	-6.58325394
10	-0.11165991	-5.49945484	-5.38779493	46	0.134556266	-6.46692303	-6.60147929
11	-0.10952526	-5.51672216	-5.40719691	47	0.140739801	-6.47792281	-6.61866262
12	-0.10735241	-5.53277468	-5.42542226	48	0.147186625	-6.48773002	-6.63491664
13	-0.10519931	-5.54780489	-5.44260559	49	0.152702399	-6.49763436	-6.65033676
14	-0.10316291	-5.56202253	-5.45885962	50	0.158706173	-6.50629819	-6.66500437
15	-0.10137342	-5.57565315	-5.47427973	51	0.164626754	-6.51436275	-6.67898951
16	-0.09242755	-5.6337901	-5.54136255	52	0.169859997	-6.52249288	-6.69235287
17	-0.08486978	-5.68104299	-5.59617321	53	0.175143405	-6.53000401	-6.70514741
18	-0.07800684	-5.7205218	-5.64251496	54	0.180537964	-6.53688162	-6.71741958
19	-0.0719968	-5.75465481	-5.68265801	55	0.185403507	-6.54380685	-6.72921036
20	-0.06670895	-5.78477563	-5.71806669	56	0.190475259	-6.55008083	-6.74055609
21	-0.06173822	-5.81147905	-5.74974083	57	0.195094734	-6.55639443	-6.75148916
22	-0.05709339	-5.83548697	-5.77839358	58	0.199989363	-6.56204018	-6.76203854
23	-0.05308171	-5.8576332	-5.80455148	59	0.20451226	-6.56771798	-6.77223024
24	-0.04916435	-5.87777878	-5.82861443	60	0.208659521	-6.5734282	-6.78208772
25	-0.04526113	-5.89615437	-5.85089323	61	0.010364461	-4.34480792	-4.35517239
26	-0.04175871	-5.91339301	-5.87163431	62	-0.06232701	-4.74777115	-4.68544414
27	-0.03876888	-5.92980517	-5.89103628	63	-0.07690444	-4.9159162	-4.83901176
28	-0.03570107	-5.94496271	-5.90926164	64	-0.08143097	-5.02159513	-4.94016417
29	-0.03274602	-5.95919099	-5.92644496	65	-0.08253568	-5.12992572	-5.04739004
30	-0.02974755	-5.97244654	-5.94269899	66	-0.08233874	-5.16838153	-5.07604279
31	-0.02696583	-5.98508494	-5.95811911	67	-0.08207396	-5.18427465	-5.10220069
32	-0.02444483	-6.08445741	-6.08001258	68	-0.08148203	-5.20774567	-5.12626364
33	0.012984383	-6.165513	-6.16649738	69	-0.08099541	-5.22953785	-5.14854244
34	0.027931847	-6.20564836	-6.2335802	70	-0.08043418	-5.2497177	-5.16928352
35	0.040742908	-6.24764795	-6.28839086	71	-0.0796848	-5.26837029	-5.18868549

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,6)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
36	0.0523086	-6.28235175	-6.33473261	72	-0.07908277	-5.28599362	-5.20691085
73	-0.07843204	-5.30252621	-5.22409417	109	0.075077478	-6.35674787	-6.43182534
74	-0.07776379	-5.31811199	-5.2403482	110	0.079898495	-6.36659446	-6.44649295
75	-0.07693348	-5.33270179	-5.25576832	111	0.083939125	-6.37653897	-6.46047809
76	-0.07352017	-5.39637131	-5.32285114	112	0.087851745	-6.38598972	-6.47384146
77	-0.07031635	-5.44797814	-5.37766179	113	0.092302971	-6.39433303	-6.486636
78	-0.06717068	-5.49117423	-5.42400354	114	0.096161625	-6.40274654	-6.49890817
79	-0.06459073	-5.52873733	-5.46414659	115	0.100075961	-6.41062298	-6.51069894
80	-0.0619467	-5.56150197	-5.49955527	116	0.103482724	-6.41856196	-6.52204468
81	-0.05958158	-5.590811	-5.53122941	117	0.10764862	-6.425332913	-6.53297775
82	-0.05726401	-5.61714617	-5.55988216	118	0.111384712	-6.43214241	-6.54352712
83	-0.05504934	-5.64108941	-5.58604007	119	0.11471639	-6.43900243	-6.55371882
84	-0.05320953	-5.66331254	-5.61010301	120	0.118296389	-6.44527992	-6.56357631
85	-0.05130395	-5.68368577	-5.63238182	121	0.117234417	-3.9643168	-4.13666097
86	-0.04956019	-5.70268308	-5.65312289	122	0.05683578	-4.41009695	-4.46693273
87	-0.04769191	-5.72021678	-5.67252487	123	0.024983417	-4.59551693	-4.62050035
88	-0.0460721	-5.73682233	-5.69075023	124	0.009787828	-4.71186492	-4.72165275
89	-0.0445141	-5.75244765	-5.70793355	125	-0.00231425	-4.83119288	-4.82887862
90	-0.04317388	-5.76736146	-5.72418758	126	-0.00485635	-4.86238772	-4.85753137
91	-0.04159593	-5.78120362	-5.73960769	127	-0.00703192	-4.8907212	-4.88368928
92	-0.02921348	-5.89071464	-5.86150117	128	-0.00884643	-4.91659865	-4.90775222
93	-0.0193715	-5.96735747	-5.94798697	129	-0.01033221	-4.94036324	-4.93003103
94	-0.01057321	-6.025642	-6.01506879	130	-0.01164462	-4.96241672	-4.9507721
95	-0.00236141	-6.07224086	-6.06987945	131	-0.01289469	-4.98306877	-4.97017408
96	0.004620847	-6.1160035	-6.1162212	132	-0.01382136	-5.00222208	-4.98839943
97	0.011748518	-6.14461573	-6.15636424	133	-0.01479989	-5.02038265	-5.00658276
98	0.018306769	-6.17346616	-6.19177292	134	-0.01550189	-5.03733868	-5.02183679
99	0.02422007	-6.1999227	-6.22344707	135	-0.0162337	-5.0534906	-5.0372569
100	0.029963449	-6.22213636	-6.25209981	136	-0.0166807	-5.12302042	-5.10433972
101	0.035764421	-6.2424933	-6.27825772	137	-0.02014028	-5.17929066	-5.15915038
102	0.041144932	-6.26117573	-6.30232067	138	-0.02106287	-5.226555	-5.20549213
103	0.046518951	-6.27808052	-6.32459947	139	-0.02176509	-5.26740026	-5.245663518
104	0.051689239	-6.29365131	-6.34534054	140	-0.02208507	-5.30312892	-5.28104386
105	0.056922042	-6.30782048	-6.36474252	141	-0.02226335	-5.33498135	-5.312718
106	0.061331207	-6.32163667	-6.38296788	142	-0.02244456	-5.36381635	-5.34137075



Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1.6)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
107	0.066196345	-6.33395486	-6.4001512	143	-0.0224655	-5.38999416	-5.36752866
108	0.070548845	-6.34585639	-6.41640523	144	-0.02236111	-5.41398271	-5.3915916
145	-0.02233067	-5.43620107	-5.41387041	181	0.216022742	-3.70212681	-3.91814956
146	-0.02199847	-5.45660995	-5.43461148	182	0.070738617	-4.17769269	-4.24842131
147	-0.0219962	-5.47600965	-5.45401345	183	0.027612956	-4.37437598	-4.40198893
148	-0.02185016	-5.49408897	-5.47223881	184	0.005658957	-4.49748238	-4.50314134
149	-0.02159353	-5.51101566	-5.48942213	185	-0.01296695	-4.62333416	-4.61036721
150	-0.02129994	-5.5269761	-5.50567616	186	-0.01723302	-4.65625298	-4.63901996
151	-0.02107768	-5.54217396	-5.52109628	187	-0.02098548	-4.68616335	-4.68517786
152	-0.01830811	-5.66129786	-5.64298975	188	-0.02418296	-4.71342377	-4.68924081
153	-0.01512992	-5.74460447	-5.72947455	189	-0.02695342	-4.73847303	-4.71151961
154	-0.01158612	-5.80814349	-5.79655737	190	-0.02944636	-4.76170704	-4.73226069
155	-0.00836675	-5.85973478	-5.85136803	191	-0.03167771	-4.78334037	-4.75166266
156	-0.00464559	-5.90235537	-5.89770978	192	-0.0337331	-4.80362112	-4.76988802
157	-0.00139885	-5.93925168	-5.93785283	193	-0.03550886	-4.82258021	-4.78707134
158	0.002383596	-5.97087791	-5.97326151	194	-0.03718747	-4.84051284	-4.80332537
159	0.005842078	-5.99909357	-6.00493565	195	-0.03861094	-4.85735642	-4.81874549
160	0.009187352	-6.02440105	-6.0335884	196	-0.04465659	-4.9304849	-4.88582831
161	0.012346129	-6.04740018	-6.05974631	197	-0.04901792	-4.98965689	-4.94063896
162	0.015895533	-6.06791372	-6.08380925	198	-0.05220839	-5.0391891	-4.98698071
163	0.01899328	-6.08709478	-6.10608806	199	-0.05479273	-5.0819165	-5.02712376
164	0.022419824	-6.10440931	-6.12682913	200	-0.05680227	-5.11933471	-5.06253244
165	0.025568622	-6.12066249	-6.14623111	201	-0.05862612	-5.1528327	-5.09420658
166	0.028659545	-6.13579692	-6.16445646	202	-0.05998878	-5.18284812	-5.12285933
167	0.03188266	-6.14975713	-6.18163979	203	-0.06128925	-5.21030649	-5.14901724
168	0.03492895	-6.16296487	-6.19789382	204	-0.06245019	-5.235553038	-5.17308018
169	0.037926544	-6.17538739	-6.21331393	205	-0.06335312	-5.25871211	-5.19535899
170	0.040988604	-6.18699293	-6.22798154	206	-0.06418094	-5.280281	-5.21610006
171	0.043723932	-6.19824274	-6.24196668	207	-0.06501775	-5.30051979	-5.23550204
172	0.046704019	-6.20862603	-6.25633005	208	-0.06560934	-5.31933673	-5.2537274
173	0.049508465	-6.21861612	-6.26812459	209	-0.06614748	-5.33705819	-5.27091072
174	0.052196699	-6.22820005	-6.28039675	210	-0.06666533	-5.35383008	-5.28716475
175	0.054822443	-6.23736509	-6.29218753	211	-0.06722851	-5.36981337	-5.30258486
176	0.057950362	-6.2455829	-6.30353326	212	-0.07034065	-5.49481899	-5.42447834
177	0.060597522	-6.25386881	-6.31446633	213	-0.07130992	-5.58227306	-5.51096314

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1.6)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
178	0.063316003	-6.26169971	-6.32501571	214	-0.07124833	-5.64929429	-5.57804596
179	0.065615	-6.26959241	-6.33520741	215	-0.07042598	-5.7032826	-5.63285662
180	0.068049332	-6.27701556	-6.34506489	216	-0.06916315	-5.74836152	-5.67919837
217	-0.06804008	-5.7873815	-5.71934142	253	0.027303068	-4.54125686	-4.56855993
218	-0.06646548	-5.82121557	-5.75475009	254	0.02452153	-4.56029243	-4.58481396
219	-0.06458296	-5.85100719	-5.78642424	255	0.021997886	-4.57823618	-4.60023407
220	-0.0627018	-5.8777878	-5.81507698	256	0.01137959	-4.6559373	-4.66731689
221	-0.06075465	-5.90198954	-5.84123489	257	0.003564676	-4.71856287	-4.72212755
222	-0.0588196	-5.9241798	-5.86529784	258	-0.00263741	-4.77110671	-4.7684693
223	-0.05700432	-5.94458096	-5.88757664	259	-0.00764931	-4.81626166	-4.80861235
224	-0.05475376	-5.96307147	-5.90831772	260	-0.01192088	-4.8559419	-4.84402103
225	-0.05260711	-5.9803268	-5.92771969	261	-0.01855126	-4.89112043	-4.87569517
226	-0.05073307	-5.99667811	-5.94594505	262	-0.01542526	-4.92289918	-4.90434792
227	-0.04853888	-6.01166725	-5.96312837	263	-0.02138897	-4.95189948	-4.93050583
228	-0.04667359	-6.02605599	-5.9793824	264	-0.02384138	-4.97841015	-4.95456877
229	-0.04459257	-6.03939508	-5.99480251	265	-0.02611721	-5.00296479	-4.97684758
230	-0.04259405	-6.05206417	-6.00947012	266	-0.02810952	-5.02569817	-4.99758865
231	-0.04057998	-6.06403524	-6.02345526	267	-0.02994565	-5.04693627	-5.01699063
232	-0.0384624	-6.07528103	-6.03681863	268	-0.03167225	-5.06688824	-5.03521598
233	-0.03616206	-6.08577523	-6.04961317	269	-0.03322897	-5.08562827	-5.0523993
234	-0.03449538	-6.09638072	-6.06188534	270	-0.03459079	-5.10324413	-5.06865333
235	-0.03207758	-6.10575369	-6.07367611	271	-0.03593038	-5.12000383	-5.08407345
236	-0.0301935	-6.11521535	-6.08502185	272	-0.04565771	-5.25162464	-5.20596692
237	-0.02835554	-6.12431046	-6.09595492	273	-0.05128151	-5.34373323	-5.29245172
238	-0.02652382	-6.13302811	-6.10650429	274	-0.05509194	-5.41462649	-5.35953455
239	-0.02419707	-6.14089306	-6.11669599	275	-0.05761152	-5.47195672	-5.4143452
240	-0.02226688	-6.14882036	-6.12655348	276	-0.0590255	-5.51971245	-5.46068695
241	0.368377186	-3.33126096	-3.69963814	277	-0.06015168	-5.56098168	-5.50083
242	0.18114334	-3.84876656	-4.0299099	278	-0.0607543	-5.59699298	-5.53623868
243	0.122200158	-4.06127736	-4.18347752	279	-0.06085495	-5.62876777	-5.56791282
244	0.090906917	-4.19372301	-4.28462992	280	-0.06100148	-5.65756705	-5.59656557
245	0.063256176	-4.32859962	-4.39185579	281	-0.06066831	-5.68339179	-5.62272348
246	0.056636117	-4.36387242	-4.42050854	282	-0.06040185	-5.70718827	-5.64678642
247	0.050946489	-4.39571996	-4.44666645	283	-0.05972741	-5.72879264	-5.66906523
248	0.045878762	-4.42485063	-4.47072939	284	-0.05918277	-5.74898907	-5.6898063

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1.6)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
249	0.041417102	-4.4515911	-4.4930082	285	-0.05847292	-5.7676812	-5.70920828
250	0.037324042	-4.47642523	-4.51374927	286	-0.05766736	-5.785101	-5.72743363
251	0.033691518	-4.49945973	-4.53315125	287	-0.05688861	-5.80150556	-5.74461696
252	0.030363728	-4.52101288	-4.55137661	288	-0.05599821	-5.8188392	-5.76087099
289	-0.05475673	-5.83104783	-5.7762911	325	0.020091621	-4.73824454	-4.75833616
290	-0.05381146	-5.84477017	-5.79095871	326	0.016668271	-4.76240896	-4.77907723
291	-0.05268935	-5.8576332	-5.80494385	327	0.013584094	-4.78489512	-4.79847921
292	-0.05164791	-5.86995513	-5.81830722	328	0.010641438	-4.80606313	-4.81670457
293	-0.05061193	-5.88171368	-5.83110176	329	0.007946336	-4.82594155	-4.83388789
294	-0.04951306	-5.89288698	-5.84337392	330	0.005444702	-4.84469722	-4.85014192
295	-0.04865534	-5.90382004	-5.8551647	331	0.003174315	-4.86238772	-4.86566203
296	-0.0472526	-5.91376304	-5.86651044	332	-0.01387322	-5.00132873	-4.98745551
297	-0.04636239	-5.92380869	-5.87744351	333	-0.02470686	-5.09864717	-5.07394031
298	-0.04520276	-5.93319564	-5.88799288	334	-0.03224875	-5.17327188	-5.14102313
299	-0.04410893	-5.9422935	-5.89818458	335	-0.03782007	-5.23365385	-5.19583379
300	-0.04266449	-5.95070655	-5.90804206	336	-0.04204171	-5.28421724	-5.24217554
301	0.593351595	-2.88777513	-3.48112673	337	-0.04542769	-5.32774618	-5.28231859
302	0.336210044	-3.47518844	-3.81139848	338	-0.04822675	-5.36595402	-5.31772727
303	0.251179013	-3.71378709	-3.9649661	339	-0.05028445	-5.39968586	-5.34940141
304	0.20488367	-3.86123484	-4.06611851	340	-0.0519677	-5.43002186	-5.37805416
305	0.163046805	-4.01029757	-4.17334438	341	-0.053335563	-5.45754759	-5.40421206
306	0.153008266	-4.0489886	-4.20199713	342	-0.05444608	-5.48272109	-5.42827501
307	0.144156766	-4.08399827	-4.22815504	343	-0.05527985	-5.50583366	-5.45055381
308	0.136363734	-4.11585425	-4.25221798	344	-0.05593263	-5.52722751	-5.47129489
309	0.129343022	-4.14515376	-4.27449679	345	-0.05633831	-5.54703517	-5.49069686
310	0.123083094	-4.17215476	-4.29523786	346	-0.05675185	-5.56567407	-5.50892222
311	0.117331881	-4.19730795	-4.31463983	347	-0.05696486	-5.5830704	-5.52610554
312	0.112072661	-4.22079253	-4.33286519	348	-0.05733319	-5.59969277	-5.54235957
313	0.107296746	-4.24275177	-4.35004851	349	-0.05716808	-5.61494776	-5.55777969
314	0.102876387	-4.26342616	-4.36630254	350	-0.05715578	-5.62960308	-5.57244729
315	0.098780887	-4.28294177	-4.38172266	351	-0.05719612	-5.64362855	-5.58643243
316	0.081864481	-4.366941	-4.44880548	352	-0.05691227	-5.65670807	-5.5997958
317	0.069116563	-4.43449957	-4.50361613	353	-0.05679071	-5.66938105	-5.61259034
318	0.059098044	-4.49085984	-4.54995788	354	-0.05647378	-5.68133629	-5.62486251
319	0.050812117	-4.53928882	-4.59010093	355	-0.05618925	-5.69284253	-5.63665328

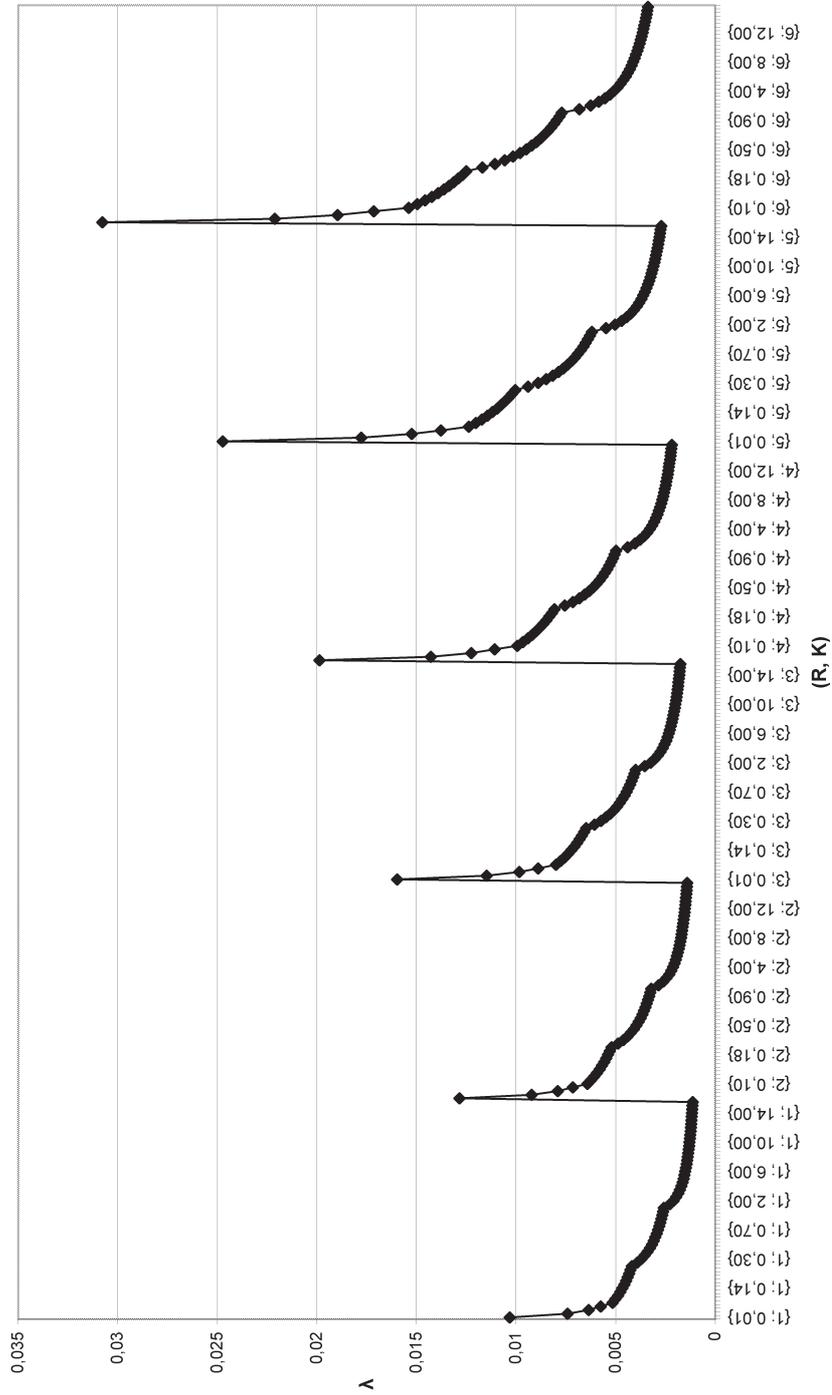
Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,6)

Date	RESID	LFAN	LFANF
320	0,043860622	-4,58164899	-4,62550961
321	0,03781322	-4,61937054	-4,65718376
322	0,032630868	-4,65320564	-4,6858365
323	0,027997445	-4,68399697	-4,71199441
324	0,023858596	-4,71219876	-4,73605736

Date	RESID	LFAN	LFANF
356	-0,05588346	-5,70388248	-5,64799902
357	-0,05550696	-5,71443905	-5,65893209
358	-0,05532038	-5,72480184	-5,66948146
359	-0,05467162	-5,73434478	-5,67967316
360	-0,05444902	-5,74397966	-5,68953065

Representación gráfica de la función:  $\lambda = f(R, K)$  para las categorías de rugosidad K C. {1..6}





***3. Valores observados y su predicción. K (7,12)***

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (7,12)

Date	LFAN	LFANF	RESID	Date	LFAN	LFANF	RESID
361	-2,586195466	-2,704716394	0,118520928	397	-5,10786231	-5,16838276	0,06052045
362	-3,196527421	-3,156461393	-0,040066029	398	-5,147486477	-5,216814676	0,069328199
363	-3,443927445	-3,366510855	-0,07741659	399	-5,182669943	-5,2601385	0,077468557
364	-3,596482605	-3,504868899	-0,091615706	400	-5,214343933	-5,299329667	0,084985734
365	-3,75045703	-3,651530216	-0,098926814	401	-5,243071892	-5,335108398	0,092036506
366	-3,790425034	-3,690721383	-0,099703651	402	-5,269341258	-5,368021641	0,098680383
367	-3,826487717	-3,726500114	-0,099987603	403	-5,293727914	-5,398494544	0,10476663
368	-3,859383118	-3,759413357	-0,099969761	404	-5,316074088	-5,426864138	0,11079005
369	-3,889527928	-3,78988626	-0,099641667	405	-5,337058195	-5,453402121	0,116343926
370	-3,917387368	-3,818255854	-0,099131514	406	-5,356582275	-5,478330724	0,12174845
371	-3,943255708	-3,844793837	-0,098461871	407	-5,374766539	-5,501834036	0,127067498
372	-3,967430013	-3,86972244	-0,097707572	408	-5,392188582	-5,524066263	0,13187768
373	-3,990092661	-3,893225752	-0,096866908	409	-5,408355472	-5,545157861	0,136802389
374	-4,011346227	-3,915457979	-0,095888248	410	-5,42388059	-5,565220182	0,141339593
375	-4,031482445	-3,936549577	-0,094932868	411	-5,438499397	-5,584349027	0,14584963
376	-4,117879345	-4,028305317	-0,089574029	412	-5,452401382	-5,602627415	0,150226033
377	-4,18731548	-4,103275215	-0,084040265	413	-5,46578972	-5,620127759	0,154338039
378	-4,24526048	-4,166661361	-0,078599119	414	-5,478401428	-5,636913601	0,158512172
379	-4,295041925	-4,221568938	-0,073472987	415	-5,490688929	-5,653041002	0,162351743
380	-4,338584077	-4,270000853	-0,068583224	416	-5,502393855	-5,668559675	0,166165819
381	-4,377238118	-4,313324678	-0,06391344	417	-5,513492748	-5,683513905	0,170021157
382	-4,412073556	-4,352515844	-0,059557712	418	-5,524214706	-5,697943316	0,17372861
383	-4,44373184	-4,388294576	-0,055437264	419	-5,534546157	-5,7118883499	0,177337342
384	-4,472739399	-4,421207819	-0,05153158	420	-5,544729545	-5,725366544	0,180636999
385	-4,499459732	-4,451680722	-0,0477901	421	-2,12211525	-2,381070604	0,258955354
386	-4,524327798	-4,480050316	-0,044277482	422	-2,806799287	-2,832815603	0,026016316
387	-4,547467476	-4,506588299	-0,040879177	423	-3,083886121	-3,042865066	-0,041021056
388	-4,569127595	-4,531516902	-0,037610693	424	-3,253777877	-3,18122111	-0,072556767
389	-4,589592156	-4,555020214	-0,034571942	425	-3,424179458	-3,327884426	-0,096295032
390	-4,608877048	-4,57725244	-0,031624608	426	-3,468202943	-3,367075593	-0,101127351
391	-4,627109094	-4,598344039	-0,028765055	427	-3,507858743	-3,402854325	-0,105004418
392	-4,770162761	-4,765069677	-0,005093084	428	-3,543913684	-3,435767567	-0,108146116
393	-4,87056905	-4,883363399	0,012794349	429	-3,5769444597	-3,46624047	-0,110704126
394	-4,947660495	-4,975119139	0,027458644	430	-3,607410072	-3,494610065	-0,112800008
395	-5,010285355	-5,050089038	0,039803682	431	-3,635642051	-3,521148047	-0,114494003

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (7,12)

Date	LFAN	LFANF	RESID	Date	LFAN	LFANF	RESID
396	-5,062771049	-5,113475183	0,050704135	432	-3,661964922	-3,546076651	-0,115888271
433	-3,686602049	-3,569579963	-0,117022087	469	-5,18982177	-5,221512071	0,031690301
434	-3,70977628	-3,591812189	-0,117964091	470	-5,206285281	-5,241574393	0,035289111
435	-3,731619954	-3,612903787	-0,118716167	471	-5,221726764	-5,260703238	0,038976473
436	-3,825157472	-3,704659527	-0,120497945	472	-5,236468963	-5,278981626	0,042511662
437	-3,899946224	-3,779629425	-0,120316799	473	-5,250670713	-5,29648197	0,045811257
438	-3,962211647	-3,843015571	-0,119196076	474	-5,264109195	-5,313267811	0,049158616
439	-4,015496414	-3,897923148	-0,117573266	475	-5,276947341	-5,329395212	0,052447871
440	-4,061974182	-3,946355063	-0,115619119	476	-5,289357625	-5,344913885	0,05555626
441	-4,103244045	-3,989678888	-0,113565157	477	-5,301321876	-5,359868115	0,05854624
442	-4,140304735	-4,028870054	-0,11143468	478	-5,312619151	-5,374297526	0,061678375
443	-4,173972356	-4,064648786	-0,10932357	479	-5,323635175	-5,388237709	0,064602535
444	-4,20471762	-4,097562029	-0,107155591	480	-5,334359138	-5,401720754	0,067361616
445	-4,233050508	-4,128034932	-0,105020126	481	-1,54033638	-2,057424814	0,517088434
446	-4,259384313	-4,156404628	-0,102979787	482	-2,292228904	-2,509169813	0,216940909
447	-4,283884106	-4,182942509	-0,100941597	483	-2,598554746	-2,719219276	0,12066453
448	-4,306844953	-4,207871112	-0,098973841	484	-2,786136075	-2,85757532	0,071439245
449	-4,328447954	-4,231374424	-0,097073529	485	-2,973716411	-3,004238637	0,030522226
450	-4,348746609	-4,25360665	-0,095139959	486	-3,022014649	-3,043429803	0,021415154
451	-4,368044837	-4,274698249	-0,093346588	487	-3,065468278	-3,079208535	0,013740257
452	-4,518717298	-4,441423887	-0,077293411	488	-3,104922336	-3,112121778	0,007199443
453	-4,624251074	-4,55971761	-0,064533464	489	-3,141035541	-3,142594681	0,00155914
454	-4,70521154	-4,65147335	-0,053738191	490	-3,174284942	-3,170964275	-0,003320667
455	-4,770870642	-4,726443248	-0,044427394	491	-3,205096201	-3,197502258	-0,007593944
456	-4,825941553	-4,789829394	-0,03611216	492	-3,233761062	-3,222430861	-0,011330201
457	-4,873441865	-4,844736971	-0,028704894	493	-3,260583628	-3,245934173	-0,014649455
458	-4,914961544	-4,893168886	-0,021792658	494	-3,285737041	-3,268166399	-0,017570642
459	-4,952036252	-4,93649271	-0,015543541	495	-3,309429833	-3,289257998	-0,020171836
460	-4,985259988	-4,975683877	-0,009576111	496	-3,410702412	-3,381013738	-0,029688674
461	-5,015547338	-5,011462609	-0,00408473	497	-3,491373762	-3,459583636	-0,035390126
462	-5,04321014	-5,044375851	0,001165711	498	-3,558272333	-3,519369782	-0,038902551
463	-5,068794208	-5,074848755	0,006054546	499	-3,615331639	-3,574277359	-0,04105428
464	-5,092442057	-5,103218349	0,010776292	500	-3,665045747	-3,622709274	-0,042336473
465	-5,114496934	-5,129756332	0,015259398	501	-3,709041346	-3,666033098	-0,043008248
466	-5,135008749	-5,154684935	0,019676186	502	-3,748459622	-3,705224265	-0,043235357

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (7,12)

Date	LFAN	LFANF	RESID	Date	LFAN	LFANF	RESID
467	-5,154390198	-5,178188247	0,023798049	503	-3,784201634	-3,741002997	-0,043198637
468	-5,172742544	-5,200420473	0,027677929	504	-3,816849199	-3,773916239	-0,042932959
505	-3,846937759	-3,804389142	-0,042548616	541	-1,201166745	-1,173379025	0,53261228
506	-3,874727221	-3,832758736	-0,041968484	542	-1,961878975	-2,185524024	0,223645049
507	-3,900638061	-3,859296719	-0,041341341	543	-2,271958899	-2,395573486	0,123614587
508	-3,924905631	-3,884225323	-0,040680309	544	-2,461803593	-2,533929563	0,072125938
509	-3,947650183	-3,907728635	-0,039921548	545	-2,651547002	-2,680592847	0,029045845
510	-3,969122597	-3,929960861	-0,039161737	546	-2,700379695	-2,719784014	0,019404319
511	-3,989390129	-3,951062459	-0,03833767	547	-2,744320072	-2,755562745	0,011242673
512	-4,147745339	-4,11778097	-0,029967242	548	-2,784224152	-2,788475968	0,004251836
513	-4,258111329	-4,23607182	-0,022039509	549	-2,820720703	-2,818948891	-0,001771812
514	-4,342729001	-4,32782756	-0,014901441	550	-2,854336883	-2,847318485	-0,007018398
515	-4,411331869	-4,402797458	-0,008534411	551	-2,885461831	-2,873856468	-0,011605363
516	-4,468805311	-4,466183604	-0,002621707	552	-2,914447261	-2,898785071	-0,01566219
517	-4,518350494	-4,521091181	0,002740687	553	-2,941547164	-2,922288383	-0,019258781
518	-4,561823381	-4,569523096	0,007699715	554	-2,966969905	-2,94452061	-0,022449295
519	-4,600481197	-4,612846921	0,012365724	555	-2,990923853	-2,965612208	-0,025311645
520	-4,635217107	-4,652038087	0,01682098	556	-3,093212807	-3,057367948	-0,035844859
521	-4,666832846	-4,687816819	0,020983973	557	-3,174691489	-3,132337846	-0,042353643
522	-4,695861051	-4,720730062	0,02486901	558	-3,242246811	-3,195723992	-0,046522819
523	-4,722603283	-4,751202965	0,028599692	559	-3,299868984	-3,250631569	-0,049237415
524	-4,747309953	-4,779572559	0,032262606	560	-3,350067101	-3,299063484	-0,051003616
525	-4,770398665	-4,806110542	0,035711876	561	-3,394479994	-3,342387309	-0,052092685
526	-4,792102355	-4,831039145	0,038893679	562	-3,434330263	-3,381578475	-0,052751788
527	-4,812317364	-4,854542457	0,042225093	563	-3,470418851	-3,417357207	-0,053061644
528	-4,83144363	-4,876774683	0,045331053	564	-3,503396234	-3,45027045	-0,053125784
529	-4,849665063	-4,897866282	0,048201218	565	-3,533723565	-3,480743353	-0,052960213
530	-4,866794724	-4,917928603	0,051133879	566	-3,561859213	-3,509112947	-0,052746266
531	-4,883033395	-4,937057448	0,054023499	567	-3,588021058	-3,535650593	-0,052370128
532	-4,89860209	-4,955335836	0,056733746	568	-3,612511181	-3,560579533	-0,051931648
533	-4,913463212	-4,97283618	0,059372968	569	-3,635528279	-3,584082845	-0,051445434
534	-4,927719794	-4,989622022	0,061902228	570	-3,657187007	-3,606315071	-0,050871936
535	-4,941342468	-5,005749423	0,064406955	571	-3,677702154	-3,627406667	-0,050295484
536	-4,954302221	-5,021268095	0,066965874	572	-3,697843607	-3,794132308	-0,0437113
537	-4,966857672	-5,036222326	0,069364654	573	-3,949621036	-3,91242603	-0,037195005

Valor observado y su prediccion. Categorías de rugosidad k (7,12)

Date	LFAN	LFANF	RESID	Date	LFAN	LFANF	RESID
538	-4.978991289	-5.050651737	0.071660448	574	-4.035434335	-4.00418177	-0.03125258
539	-4.990538592	-5.06459192	0.074053327	575	-4.105001142	-4.079151669	-0.025849474
540	-5.0101774666	-5.078074964	0.076300299	576	-4.163437439	-4.142537814	-0.020899624
577	-4.213804002	-4.197445391	-0.016358611	613	-2.621015074	-2.598642594	-0.022372481
578	-4.258040655	-4.245877307	-0.012163348	614	-2.647119744	-2.62087482	-0.026244924
579	-4.297464922	-4.289201131	-0.008263791	615	-2.671694164	-2.641966418	-0.029727746
580	-4.332931755	-4.328392298	-0.004539457	616	-2.77658068	-2.733722158	-0.042858521
581	-4.36520885	-4.364171029	-0.00103782	617	-2.8600482	-2.808692056	-0.051356143
582	-4.394747199	-4.397084272	0.002337073	618	-2.92919575	-2.872078202	-0.057117548
583	-4.42209891	-4.427557175	0.005458265	619	-2.988121311	-2.926985779	-0.061135531
584	-4.447397502	-4.455926769	0.008529267	620	-3.039433409	-2.975417695	-0.064015714
585	-4.471076452	-4.482464752	0.011388301	621	-3.084825817	-3.018741519	-0.066084298
586	-4.493181684	-4.507393355	0.014211671	622	-3.125499332	-3.057932686	-0.067566646
587	-4.514050593	-4.530896667	0.016846075	623	-3.162353725	-3.093711417	-0.068642307
588	-4.53593987	-4.553128894	0.019534906	624	-3.196014156	-3.12662466	-0.069389496
589	-4.552198301	-4.574220492	0.02202191	625	-3.226983604	-3.157097563	-0.069886041
590	-4.568803042	-4.594282813	0.024479771	626	-3.255669486	-3.185467157	-0.070202329
591	-4.586642881	-4.613411658	0.026768777	627	-3.282374886	-3.21200514	-0.070369746
592	-4.60257356	-4.631690046	0.029116486	628	-3.30735191	-3.236933743	-0.070418167
593	-4.617850239	-4.64919039	0.031340151	629	-3.330813478	-3.260437055	-0.070376423
594	-4.632438613	-4.665976232	0.033537619	630	-3.352950222	-3.282669281	-0.070280941
595	-4.646408934	-4.682103633	0.035694699	631	-3.373835165	-3.30376088	-0.070074285
596	-4.659943212	-4.697622306	0.037679094	632	-3.537154571	-3.470486518	-0.066668053
597	-4.672806835	-4.712576536	0.039769701	633	-3.651159867	-3.588780241	-0.062379626
598	-4.68529623	-4.727005947	0.041709171	634	-3.738742193	-3.680535981	-0.058206213
599	-4.697285475	-4.74094613	0.043660655	635	-3.809782351	-3.755505879	-0.054276473
600	-4.708865422	-4.754429175	0.045563752	636	-3.869490475	-3.818892025	-0.05059845
601	-0.830014417	-1.410133235	0.580118818	637	-3.920962847	-3.873799602	-0.047163245
602	-1.61207639	-1.861878234	0.249801844	638	-3.966215235	-3.922231517	-0.043993718
603	-1.931725232	-2.071927697	0.140202464	639	-4.006498534	-3.965555342	-0.040943192
604	-2.127422433	-2.210283741	0.082861307	640	-4.042872284	-4.004746508	-0.038125776
605	-2.322869436	-2.356947057	0.034077621	641	-4.075895792	-4.04052524	-0.035370552
606	-2.373136321	-2.396138224	0.023001903	642	-4.106275453	-4.073438482	-0.032836971
607	-2.418343929	-2.431916956	0.013573027	643	-4.134229496	-4.103911386	-0.03031811
608	-2.459379264	-2.464830198	0.005450935	644	-4.160227987	-4.13228098	-0.027947008

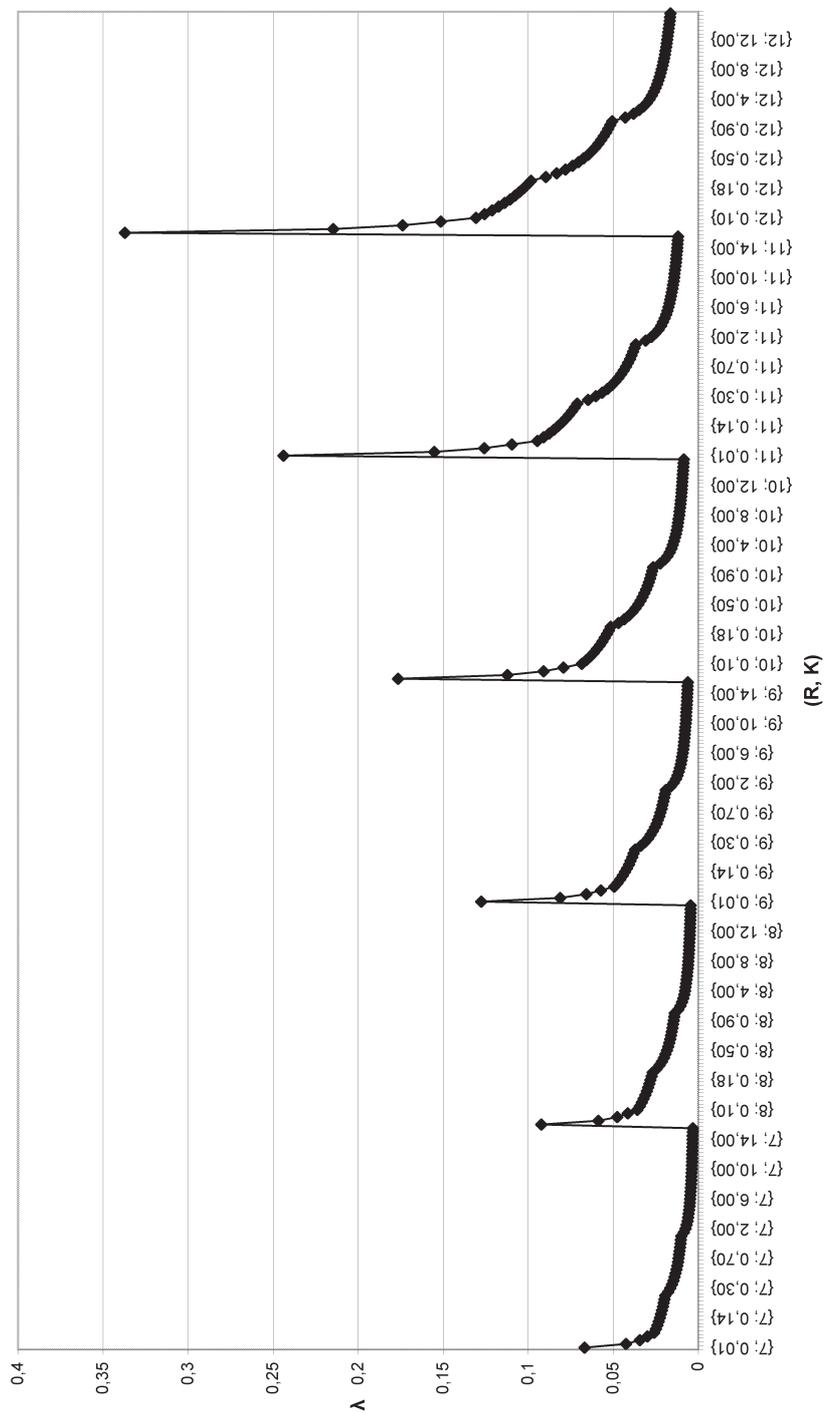
Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (7,12)

Date	LFAN	LFANF	RESID	Date	LFAN	LFANF	RESID
609	-2,496898263	-2,495303101	-0,001595161	645	-4,184488112	-4,158818963	-0,02566915
610	-2,531444951	-2,523672696	-0,007772256	646	-4,20719976	-4,183747566	-0,023452194
611	-2,563430511	-2,550210678	-0,013219833	647	-4,228584777	-4,207250878	-0,02133339
612	-2,593204809	-2,5751139282	-0,018065528	648	-4,248755278	-4,229483104	-0,019272172
649	-4,267841174	-4,250574702	-0,017266471	649	-2,880530344	-2,833451773	-0,04707857
650	-4,285989446	-4,270637024	-0,015352423	686	-2,909664675	-2,861821367	-0,047843308
651	-4,303215454	-4,289765869	-0,013449585	687	-2,936784351	-2,88835935	-0,048425
652	-4,319690537	-4,308044257	-0,01164628	688	-2,962142771	-2,913287954	-0,048854817
653	-4,335372083	-4,325544601	-0,009827482	689	-2,985960176	-2,936791266	-0,049168911
654	-4,350450451	-4,342330442	-0,008120009	690	-3,008412327	-2,959023492	-0,049388835
655	-4,364815598	-4,358457843	-0,006357755	691	-3,029640722	-2,98011509	-0,049525632
656	-4,378672267	-4,373976516	-0,004695751	692	-3,195379049	-3,146840728	-0,048538321
657	-4,391996166	-4,388930746	-0,003065419	693	-3,31104594	-3,265134451	-0,045911489
658	-4,404845005	-4,403360157	-0,001484847	694	-3,399888239	-3,356890191	-0,042998048
659	-4,417197958	-4,41730034	0,000102383	695	-3,471995453	-3,431860089	-0,040135364
660	-4,429202103	-4,430783385	0,001581282	696	-3,532593912	-3,495246235	-0,037347677
661	-0,460097656	-1,086487445	0,62638979	697	-3,584843816	-3,550153812	-0,034690004
662	-1,245826581	-1,538232444	0,292405863	698	-3,630761501	-3,598585727	-0,032175773
663	-1,567993712	-1,748281907	0,180288195	699	-3,671707736	-3,641909552	-0,029798184
664	-1,765612305	-1,886637951	0,121025646	700	-3,708592485	-3,681100718	-0,027491767
665	-1,96326691	-2,033301268	0,070034358	701	-3,742195846	-3,71687945	-0,025316396
666	-2,0141558	-2,072492434	0,058336634	702	-3,773000467	-3,749792693	-0,023207774
667	-2,059936998	-2,108271166	0,048334168	703	-3,801466015	-3,780265596	-0,021200419
668	-2,101499029	-2,141184409	0,039685379	704	-3,827911663	-3,80863519	-0,019276473
669	-2,139522811	-2,171657312	0,032134501	705	-3,852575547	-3,835173173	-0,017402374
670	-2,174534945	-2,200026906	0,025491961	706	-3,875739293	-3,860101776	-0,015637517
671	-2,20696587	-2,226664889	0,019599019	707	-3,89747928	-3,883605088	-0,013874192
672	-2,237143854	-2,251493492	0,014349638	708	-3,917990777	-3,905837314	-0,012153463
673	-2,265347113	-2,274996804	0,009649691	709	-3,937443383	-3,926928913	-0,01051447
674	-2,29182321	-2,29722903	0,00540582	710	-3,955922648	-3,946991234	-0,008931414
675	-2,316744871	-2,318320629	0,001575758	711	-3,973526138	-3,966120079	-0,007406059
676	-2,423183338	-2,410076369	-0,013106969	712	-3,990254854	-3,984398467	-0,005856387
677	-2,507913284	-2,485046267	-0,022867018	713	-4,006278741	-4,001898811	-0,00437993
678	-2,578114641	-2,548432413	-0,029682228	714	-4,021614682	-4,018684653	-0,002930029
679	-2,637959932	-2,60333999	-0,034619942	715	-4,036339984	-4,034812054	-0,001527786

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (7,12)

Date	LFAN	LFANF	RESID	Date	LFAN	LFANF	RESID
680	-2.690058035	-2.651771905	-0.03828613	716	-4.050480799	-4.050330726	-0.000150072
681	-2.736156509	-2.695095729	-0.041060779	717	-4.064067571	-4.065284957	0.001217385
682	-2.777480668	-2.734286896	-0.043193772	718	-4.077192503	-4.079714368	0.002521864
683	-2.814895151	-2.770065628	-0.044829624	719	-4.089834747	-4.093654551	0.003819804
684	-2.849072437	-2.80297887	-0.046093567	720	-4.102034051	-4.107137595	0.005103545

Representación gráfica de la función:  $\lambda = f(R, K)$  para las categorías de rugosidad  $K \in \{7..12\}$



***4. Valores observados y su predicción. K (1,12)***

**Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)**

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
1	-0.236273561	-4.668642609	-4.432369048	37	0.252577234	-6.312220927	-6.564798161
2	-0.215657344	-5.039034769	-4.823377425	38	0.269377594	-6.337340864	-6.606718458
3	-0.188230399	-5.193416957	-5.005185966	39	0.284005369	-6.360212072	-6.644217442
4	-0.165409006	-5.290349197	-5.124940191	40	0.298066886	-6.380072538	-6.678139399
5	-0.137890192	-5.389774977	-5.251884785	41	0.311177563	-6.397930156	-6.709107719
6	-0.129943721	-5.415750463	-5.285806742	42	0.323316519	-6.414279294	-6.737595812
7	-0.122645145	-5.439420208	-5.316775063	43	0.334931957	-6.429039709	-6.763971667
8	-0.115808462	-5.461071618	-5.345263156	44	0.345762808	-6.442764192	-6.788527
9	-0.109399993	-5.481039003	-5.37163901	45	0.3566090395	-6.455406585	-6.81149698
10	-0.103260494	-5.499454838	-5.396194343	46	0.366150932	-6.466923027	-6.833073959
11	-0.09755784	-5.516722164	-5.419164324	47	0.375494463	-6.477922814	-6.853417277
12	-0.092033375	-5.532774678	-5.440741303	48	0.384930385	-6.48773002	-6.872660405
13	-0.086720273	-5.547804893	-5.461084621	49	0.393281901	-6.497634359	-6.890916261
14	-0.081694781	-5.56202253	-5.480327748	50	0.401983032	-6.506298192	-6.908281225
15	-0.077069543	-5.575653147	-5.498583604	51	0.410475465	-6.514362752	-6.924838218
16	-0.055787218	-5.633790103	-5.578002885	52	0.418166218	-6.522492878	-6.940659096
17	-0.038149825	-5.681042988	-5.642893162	53	0.425802528	-6.530004009	-6.955806538
18	-0.022764689	-5.720521799	-5.69775711	54	0.433453926	-6.536881616	-6.970335541
19	-0.009372382	-5.754654805	-5.745282423	55	0.44048778	-6.543806851	-6.984294631
20	0.002427087	-5.784775634	-5.78720272	56	0.447646	-6.550080835	-6.997726835
21	0.013222654	-5.81147905	-5.824701704	57	0.454276056	-6.55639443	-7.010670486
22	0.023136895	-5.835486966	-5.858623661	58	0.461119703	-6.562040175	-7.023159878
23	0.031958782	-5.857633199	-5.889591981	59	0.467507842	-6.567717976	-7.035225819
24	0.040301292	-5.877778783	-5.918080074	60	0.473467884	-6.573428199	-7.046896083
25	0.048301562	-5.896154367	-5.944455929	61	-0.179868959	-4.344807924	-4.164938965
26	0.05561825	-5.913393012	-5.969011262	62	-0.191823813	-4.747771155	-4.555947342
27	0.062176075	-5.929805167	-5.991981242	63	-0.178160315	-4.915916198	-4.737755883
28	0.068595508	-5.944962713	-6.013558222	64	-0.164085026	-5.021595134	-4.857510108
29	0.074710553	-5.959190987	-6.033901539	65	-0.145471013	-5.129925715	-4.984454702
30	0.080698126	-5.972446541	-6.053144667	66	-0.140004867	-5.158381526	-5.018376659
31	0.086315583	-5.98508494	-6.071400523	67	-0.134929671	-5.184274651	-5.049344498
32	0.131252667	-6.084457414	-6.215710081	68	-0.129912596	-5.207745668	-5.077833073
33	0.164586343	-6.153512989	-6.318099342	69	-0.125528924	-5.229537851	-5.104208927
34	0.191870266	-6.205648357	-6.397518623	70	-0.120953436	-5.249717697	-5.12876426
35	0.214760947	-6.247647953	-6.4624089	71	-0.11663605	-5.26837029	-5.151734241

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
36	0.234921097	-6.282351751	-6.517272848	72	-0.112682397	-5.285993617	-5.17331122
73	-0.108871674	-5.302526211	-5.193654538	109	0.266738312	-6.356747866	-6.623486178
74	-0.105214329	-5.318111994	-5.212897665	110	0.274256686	-6.366594455	-6.640851142
75	-0.101548272	-5.332701793	-5.231153521	111	0.280869169	-6.376538966	-6.657408135
76	-0.085798505	-5.396371307	-5.310572802	112	0.287239298	-6.385989715	-6.673229013
77	-0.072515062	-5.447978141	-5.375463079	113	0.294043426	-6.394333029	-6.688376455
78	-0.060847198	-5.491174225	-5.430327027	114	0.300158918	-6.402746541	-6.702905458
79	-0.050884987	-5.528737327	-5.47785234	115	0.306241566	-6.410622982	-6.716864548
80	-0.04172933	-5.561501967	-5.519772637	116	0.311734797	-6.418561955	-6.730296752
81	-0.033539375	-5.590810996	-5.557271621	117	0.317911273	-6.425329213	-6.743240403
82	-0.02595259	-5.617146168	-5.591193578	118	0.323587384	-6.432142411	-6.755729795
83	-0.018927507	-5.641089405	-5.622161898	119	0.328793304	-6.439002432	-6.767795736
84	-0.012662551	-5.663312542	-5.650649991	120	0.334186084	-6.445279916	-6.779466
85	-0.006659927	-5.683685773	-5.677025846	121	-0.066807918	-3.9643168	-3.897508882
86	-0.0011019	-5.702883079	-5.701881179	122	-0.121579687	-4.410096945	-4.288517259
87	0.004334378	-5.720216781	-5.724551159	123	-0.125191129	-4.595516929	-4.4703258
88	0.00930581	-5.736822329	-5.746128139	124	-0.121784899	-4.711864925	-4.590080025
89	0.01402381	-5.752447647	-5.766471456	125	-0.114168259	-4.831192878	-4.717024619
90	0.018353128	-5.767361456	-5.785714584	126	-0.111441141	-4.862387718	-4.750946576
91	0.022766818	-5.781203622	-5.80397044	127	-0.108806301	-4.890721197	-4.781914897
92	0.057665354	-5.890714644	-5.948279998	128	-0.106195662	-4.916598652	-4.81040299
93	0.083311787	-5.967357472	-6.050669259	129	-0.103584397	-4.940363241	-4.836778844
94	0.104446541	-6.025641999	-6.13008854	130	-0.101082544	-4.962416722	-4.861334177
95	0.12273796	-6.072240857	-6.194978817	131	-0.098764609	-4.983068766	-4.884304158
96	0.138242416	-6.111600348	-6.249842765	132	-0.096339658	-5.002220795	-4.905881137
97	0.152752351	-6.144615727	-6.297368078	133	-0.094158191	-5.020382646	-4.926224455
98	0.16582222	-6.173466155	-6.339288375	134	-0.091871095	-5.037338677	-4.945467582
99	0.177560362	-6.199226996	-6.376787359	135	-0.089767166	-5.053490604	-4.963723438
100	0.188572951	-6.222136365	-6.410709316	136	-0.079877706	-5.123020425	-5.043142719
101	0.199184334	-6.242493302	-6.441677636	137	-0.071257664	-5.17929066	-5.108032996
102	0.208989995	-6.261175734	-6.470165729	138	-0.063658056	-5.226555	-5.162896944
103	0.218461062	-6.278080521	-6.496541584	139	-0.056978007	-5.267400264	-5.210422257
104	0.2274445611	-6.293651306	-6.521096917	140	-0.050786369	-5.303128924	-5.252342554
105	0.236246417	-6.30782048	-6.544066897	141	-0.045139813	-5.334981351	-5.289841538
106	0.244007205	-6.321636671	-6.565643877	142	-0.040052854	-5.363816349	-5.323763495

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
107	0.252032338	-6.333954856	-6.585987194	143	-0.03526234	-5.389994155	-5.354731815
108	0.259373937	-6.34586385	-6.605230322	144	-0.030732802	-5.41395271	-5.383219909
145	-0.026605311	-5.436201074	-5.409595763	181	-0.072048015	-3.702126814	-3.630078799
146	-0.022458849	-5.456609946	-5.434151096	182	-0.156595518	-4.177682694	-4.021087176
147	-0.01888579	-5.476009655	-5.457121076	183	-0.171480258	-4.374375976	-4.202895717
148	-0.015390915	-5.494088971	-5.478698056	184	-0.174832438	-4.497482381	-4.322649942
149	-0.011974287	-5.51101566	-5.499041373	185	-0.17373962	-4.623334157	-4.449594536
150	-0.008691598	-5.526976099	-5.518284501	186	-0.172736483	-4.656252976	-4.483516493
151	-0.005633602	-5.542173959	-5.536540357	187	-0.171678532	-4.686163345	-4.514484814
152	0.019552052	-5.6611297863	-5.680849915	188	-0.170450865	-4.713423771	-4.542972907
153	0.038634707	-5.744604469	-5.783239176	189	-0.169124272	-4.738473033	-4.569348761
154	0.054514967	-5.80814349	-5.862658457	190	-0.167802949	-4.761707044	-4.593904094
155	0.067813958	-5.859734776	-5.927548734	191	-0.166466297	-4.783340372	-4.616874075
156	0.08005731	-5.902355372	-5.982412682	192	-0.16517007	-4.803621125	-4.638451054
157	0.090686319	-5.93251676	-6.029937995	193	-0.163785834	-4.822580205	-4.658794372
158	0.100980379	-5.970877913	-6.071858292	194	-0.162475345	-4.840512845	-4.678037499
159	0.110263701	-5.999093574	-6.109357276	195	-0.161063067	-4.857356423	-4.696293355
160	0.118878185	-6.024401047	-6.143279233	196	-0.154772264	-4.9304849	-4.775712636
161	0.126847374	-6.047400179	-6.174247553	197	-0.149053974	-4.989656888	-4.840602913
162	0.134821927	-6.067913719	-6.202735646	198	-0.143722224	-5.039189102	-4.895466861
163	0.142016723	-6.087094778	-6.229111501	199	-0.138924322	-5.081916496	-4.942992174
164	0.149257528	-6.104409306	-6.253666834	200	-0.13442224	-5.119334711	-4.984912471
165	0.155974328	-6.120662486	-6.276636814	201	-0.130421245	-5.1528327	-5.022411455
166	0.162416876	-6.135796918	-6.298213794	202	-0.126514705	-5.182848117	-5.056333412
167	0.168799985	-6.149757126	-6.318557111	203	-0.123004757	-5.210306489	-5.087301732
168	0.174835373	-6.162964865	-6.337800239	204	-0.119740553	-5.235530378	-5.115789826
169	0.180668709	-6.175387385	-6.356056095	205	-0.116546432	-5.258712112	-5.142165668
170	0.186428127	-6.18692931	-6.373421059	206	-0.113559991	-5.280281004	-5.166721013
171	0.191735307	-6.198242744	-6.389978052	207	-0.110828797	-5.30051979	-5.189690993
172	0.197172903	-6.208626027	-6.40579893	208	-0.108068761	-5.319336734	-5.211126793
173	0.202330252	-6.21861612	-6.420946372	209	-0.105446904	-5.337058195	-5.23161129
174	0.207275324	-6.228200052	-6.435475375	210	-0.102975658	-5.353830076	-5.250854418
175	0.21206938	-6.237365086	-6.449434465	211	-0.100703094	-5.369813368	-5.269110274
176	0.217283766	-6.24582903	-6.462866669	212	-0.081399155	-5.494818987	-5.413419832
177	0.221941507	-6.253868812	-6.47581032	213	-0.066463964	-5.582273057	-5.515809093

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
178	0.226600006	-6.261699706	-6.488299712	214	-0.054065916	-5.649294289	-5.595228374
179	0.230773246	-6.269592407	-6.500365653	215	-0.043163949	-5.7032826	-5.660118651
180	0.235020358	-6.277015559	-6.512035917	216	-0.033378919	-5.748361518	-5.714982599
217	-0.024873587	-5.787381499	-5.762507912	253	-0.149892571	-4.54125686	-4.391364289
218	-0.016787362	-5.821215572	-5.804428209	254	-0.149885011	-4.560292427	-4.410607416
219	-0.00980002	-5.851007194	-5.841927193	255	-0.149372912	-4.578236785	-4.428863272
220	-0.001929633	-5.877778783	-5.87584915	256	-0.14765475	-4.655937303	-4.508282553
221	0.004827929	-5.901989541	-5.90681747	257	-0.145390043	-4.718562873	-4.57317283
222	0.011125763	-5.9241798	-5.935305563	258	-0.143069935	-4.771106714	-4.628036778
223	0.017100456	-5.944580961	-5.961681418	259	-0.140699565	-4.816261656	-4.675662091
224	0.023165278	-5.963071473	-5.986236751	260	-0.138459516	-4.855941904	-4.717482389
225	0.028879928	-5.980326803	-6.009206731	261	-0.136139053	-4.891120426	-4.754981372
226	0.034105596	-5.996678114	-6.030783711	262	-0.133995851	-4.92289918	-4.788903329
227	0.039459774	-6.011667254	-6.051127028	263	-0.13202315	-4.951894799	-4.819871649
228	0.044314164	-6.026055992	-6.070370156	264	-0.130050404	-4.978410147	-4.848359743
229	0.049230931	-6.039395081	-6.088626012	265	-0.128229191	-5.002964788	-4.874735597
230	0.053926807	-6.052064169	-6.105990976	266	-0.126407242	-5.025698172	-4.899290993
231	0.058512729	-6.06403524	-6.122547969	267	-0.124675364	-5.046936274	-4.92226091
232	0.063087814	-6.075281033	-6.138368847	268	-0.123050346	-5.066888236	-4.94383789
233	0.067741062	-6.085775227	-6.153516289	269	-0.121447066	-5.085628273	-4.964181207
234	0.071664575	-6.096380717	-6.168045293	270	-0.119819791	-5.103244126	-4.983424335
235	0.076250689	-6.105753694	-6.182004382	271	-0.11832364	-5.120003831	-5.001680191
236	0.080221232	-6.115215355	-6.195436586	272	-0.105634889	-5.251624639	-5.145989749
237	0.084069776	-6.12431046	-6.208380237	273	-0.096535422	-5.34373323	-5.24837901
238	0.087841518	-6.133028111	-6.220869629	274	-0.086928198	-5.414626489	-5.327798291
239	0.092042509	-6.140893061	-6.23293557	275	-0.079268155	-5.471956723	-5.392688568
240	0.095785476	-6.148820358	-6.244605834	276	-0.072159932	-5.519712447	-5.447552516
241	0.03138776	-3.331260955	-3.362648716	277	-0.065903847	-5.560981676	-5.495077829
242	-0.095109463	-3.848766556	-3.753657093	278	-0.059994854	-5.59699298	-5.536998126
243	-0.125811724	-4.061277359	-3.935465634	279	-0.054270661	-5.628767771	-5.57449711
244	-0.138503147	-4.193723006	-4.055219859	280	-0.049147984	-5.657567051	-5.608419067
245	-0.146435165	-4.328599618	-4.182164453	281	-0.044004398	-5.683391785	-5.639387387
246	-0.147786014	-4.363872424	-4.21608641	282	-0.039312788	-5.707188268	-5.66787548
247	-0.148665231	-4.395719962	-4.247054731	283	-0.034541303	-5.728792638	-5.694251335
248	-0.149307808	-4.424850632	-4.275542824	284	-0.0301824	-5.748989067	-5.718806668

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
249	-0.14967242	-4.451591098	-4.301918678	285	-0.025904553	-5.767881201	-5.741776648
250	-0.149951219	-4.47642523	-4.326474012	286	-0.021747368	-5.785100996	-5.763353628
251	-0.15001574	-4.499459732	-4.349443992	287	-0.017808618	-5.801505563	-5.783696945
252	-0.149991907	-4.521012878	-4.371020971	288	-0.013899124	-5.816839197	-5.802940073
253	-0.009851897	-5.831047826	-5.821195929	325	-0.130939026	-4.73824454	-4.607305514
259	-0.006209275	-5.844770168	-5.838560893	326	-0.130548115	-4.762408962	-4.631860847
291	-0.002515314	-5.857633199	-5.855117886	327	-0.13006429	-4.784895117	-4.654830827
292	0.000983634	-5.86995513	-5.870938764	328	-0.129190429	-4.806063128	-4.676407807
293	0.004372523	-5.881713683	-5.886086206	329	-0.128702964	-4.825941553	-4.696751124
294	0.007728226	-5.892886984	-5.90061521	330	-0.128702964	-4.844697217	-4.715994252
295	0.010754262	-5.903820037	-5.914574299	331	-0.12813761	-4.862387718	-4.734250108
296	0.014243464	-5.913763039	-5.928006503	332	-0.122769069	-5.001328735	-4.878559666
297	0.017144255	-5.923805899	-5.940950154	333	-0.117688244	-5.098647171	-4.980948927
298	0.020243907	-5.933195639	-5.953439546	334	-0.11290367	-5.173271878	-5.060368208
299	0.023211984	-5.942293503	-5.965505487	335	-0.108395368	-5.233653853	-5.125258485
300	0.026469196	-5.950706555	-5.977175751	336	-0.104094809	-5.284217242	-5.180122433
301	0.027443501	-2.887775132	-3.095218633	337	-0.100098431	-5.327746177	-5.227647746
302	0.011038572	-3.475188438	-3.48622701	338	-0.096385972	-5.365954015	-5.269568043
303	-0.045751538	-3.71378709	-3.688035552	339	-0.092618834	-5.399885861	-5.307067027
304	-0.073445062	-3.861234839	-3.787789776	340	-0.089032874	-5.430021858	-5.340888984
305	-0.095563204	-4.010297575	-3.91473437	341	-0.085590288	-5.457547592	-5.371957304
306	-0.100332533	-4.048988861	-3.948665637	342	-0.082275692	-5.48272109	-5.400445397
307	-0.104373622	-4.08399827	-3.979624648	343	-0.07901241	-5.505833662	-5.426821252
308	-0.107741505	-4.115854246	-4.008112741	344	-0.075850928	-5.527227513	-5.451376585
309	-0.110665168	-4.145153763	-4.034488595	345	-0.072688604	-5.547035169	-5.474346565
310	-0.1113110835	-4.172154764	-4.059043929	346	-0.069750528	-5.565674073	-5.495923545
311	-0.115294045	-4.197307953	-4.082013909	347	-0.066803537	-5.583070399	-5.516266862
312	-0.117201642	-4.22079253	-4.103590888	348	-0.064182776	-5.599892766	-5.53550999
313	-0.118817562	-4.242751767	-4.123934206	349	-0.061181915	-5.614947761	-5.553765846
314	-0.120248822	-4.263426155	-4.143177333	350	-0.058472267	-5.629603076	-5.57113081
315	-0.12150858	-4.28294177	-4.161433189	351	-0.055940749	-5.643628552	-5.587687803
316	-0.126088527	-4.366940997	-4.24085247	352	-0.053199386	-5.656708067	-5.603508081
317	-0.128756824	-4.434499572	-4.305742747	353	-0.050724925	-5.669381048	-5.618656123
318	-0.130253145	-4.49085984	-4.360606695	354	-0.048151159	-5.681336286	-5.633185127
319	-0.131156809	-4.539288817	-4.408132008	355	-0.045698318	-5.692842535	-5.647144216

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
320	-0.131596685	-4.581648991	-4.450052306	356	-0.043306059	-5.70388248	-5.66057642
321	-0.131819246	-4.619370535	-4.487551289	357	-0.040918984	-5.714439055	-5.673520071
322	-0.131323389	-4.653205635	-4.521473246	358	-0.038792379	-5.724801842	-5.686009463
323	-0.1315554	-4.683996967	-4.552441566	359	-0.036269376	-5.734344478	-5.698075404
324	-0.131269099	-4.712198759	-4.580929666	360	-0.034233997	-5.743979664	-5.709745668
361	0.241593084	-2.586195466	-2.82778855	397	-0.147644647	-5.10786231	-4.960217663
362	0.022269506	-3.196527421	-3.218796927	398	-0.145348517	-5.147486477	-5.00213796
363	-0.043321977	-3.443927445	-3.400605469	399	-0.143032999	-5.182669943	-5.039636944
364	-0.076122911	-3.596482605	-3.520359693	400	-0.140785032	-5.214343933	-5.073558901
365	-0.103152742	-3.75045703	-3.647304287	401	-0.138544671	-5.243071892	-5.104527221
366	-0.109198789	-3.790425034	-3.681226244	402	-0.136325944	-5.269341258	-5.133015314
367	-0.114293153	-3.826487717	-3.712194565	403	-0.134336745	-5.293727914	-5.159391169
368	-0.11870046	-3.859383118	-3.740682658	404	-0.132127586	-5.316074088	-5.183946502
369	-0.122469415	-3.889527928	-3.767058512	405	-0.130141713	-5.337058195	-5.206916482
370	-0.125773522	-3.917387368	-3.791613846	406	-0.128088813	-5.356582275	-5.228493462
371	-0.128671882	-3.943255708	-3.814583826	407	-0.12592976	-5.374766539	-5.248836779
372	-0.131269207	-3.967430013	-3.836160805	408	-0.124108675	-5.392188582	-5.268079907
373	-0.133588538	-3.990092661	-3.856504123	409	-0.122019709	-5.408355472	-5.286335763
374	-0.135598976	-4.011346227	-3.87574725	410	-0.120179863	-5.42388059	-5.303700727
375	-0.137479339	-4.031482445	-3.894003106	411	-0.118241677	-5.438499397	-5.32025772
376	-0.144456958	-4.117879345	-3.973422387	412	-0.116322784	-5.452401382	-5.336078598
377	-0.149002816	-4.18731548	-4.038312665	413	-0.11456368	-5.46578972	-5.35122604
378	-0.152083867	-4.24526048	-4.093176612	414	-0.112646385	-5.478401428	-5.365755044
379	-0.154339999	-4.295041925	-4.140701925	415	-0.110975126	-5.490689259	-5.379714133
380	-0.155961854	-4.338584077	-4.182622223	416	-0.109247518	-5.502393855	-5.393146337
381	-0.157116912	-4.377238118	-4.220121206	417	-0.10740276	-5.513492748	-5.406089988
382	-0.158030393	-4.412073556	-4.254043163	418	-0.105635326	-5.524214706	-5.41857938
383	-0.158720357	-4.44373184	-4.285011483	419	-0.103900837	-5.534546157	-5.430645321
384	-0.159239822	-4.472739399	-4.313499577	420	-0.10241396	-5.544729545	-5.442315585
385	-0.1595843	-4.499459732	-4.339875431	421	0.438243217	-2.12211525	-2.560358467
386	-0.159897034	-4.524327798	-4.364430764	422	0.144567557	-2.806799287	-2.951366844
387	-0.160066732	-4.547467476	-4.387400744	423	0.049289264	-3.083886121	-3.133175386
388	-0.160149871	-4.569127595	-4.408977724	424	-0.000848266	-3.25377877	-3.252929611
389	-0.160271115	-4.589592156	-4.429321042	425	-0.044305254	-3.424179458	-3.379874205
390	-0.160312879	-4.608877048	-4.448564169	426	-0.054406782	-3.4682202943	-3.413796161

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
391	-0.160289068	-4.627109094	-4.466820025	427	-0.063094261	-3.507858743	-3.444764482
392	-0.159033177	-4.770162761	-4.611129583	428	-0.070661109	-3.543913684	-3.473252575
393	-0.157050206	-4.87056905	-4.713518844	429	-0.077316167	-3.576944597	-3.499628429
394	-0.154722237	-4.947660495	-4.792938125	430	-0.083226631	-3.607410072	-3.524183763
395	-0.152456953	-5.010285355	-4.857828402	431	-0.088488308	-3.635642051	-3.547153743
396	-0.150078699	-5.062771049	-4.91269235	432	-0.093234199	-3.661964922	-3.568730722
433	-0.09752801	-3.686602049	-3.58907404	469	-0.170916091	-5.18982177	-5.01890568
434	-0.101459112	-3.70977628	-3.608317167	470	-0.170014637	-5.206285281	-5.036270644
435	-0.105046931	-3.731619954	-3.626573023	471	-0.168899128	-5.221726764	-5.052827637
436	-0.119165168	-3.825157472	-3.705992304	472	-0.167821448	-5.236469963	-5.068648515
437	-0.129063643	-3.899946224	-3.770882582	473	-0.166874756	-5.250670713	-5.083795957
438	-0.136465118	-3.962211647	-3.825746529	474	-0.165784235	-5.264109195	-5.098324961
439	-0.14224571	-4.015496414	-3.873271842	475	-0.164663291	-5.276947341	-5.11228405
440	-0.146782043	-4.061974182	-3.91519214	476	-0.163641371	-5.289357625	-5.125716254
441	-0.150552922	-4.103244045	-3.952691123	477	-0.162661971	-5.301321876	-5.138659905
442	-0.153691654	-4.140304735	-3.98661308	478	-0.161469854	-5.312619151	-5.151149297
443	-0.156390956	-4.173972356	-4.0175814	479	-0.160419937	-5.323635175	-5.163215238
444	-0.158648126	-4.20471762	-4.046069494	480	-0.159473636	-5.334359138	-5.174885502
445	-0.16069709	-4.233055058	-4.072445348	481	0.752592004	-1.54033638	-2.292928384
446	-0.162383632	-4.259384313	-4.097000681	482	0.391707857	-2.292228904	-2.683936761
447	-0.163913445	-4.283884106	-4.119970661	483	0.267190556	-2.598554746	-2.865745303
448	-0.165297312	-4.306844953	-4.141547641	484	0.199363453	-2.786136075	-2.985499528
449	-0.166556995	-4.328447954	-4.161890959	485	0.138727711	-2.973716411	-3.112444122
450	-0.167612523	-4.348746609	-4.181134086	486	0.124351429	-3.022014649	-3.146366078
451	-0.168654895	-4.368044837	-4.199389942	487	0.111866121	-3.065468278	-3.177334399
452	-0.175017798	-4.518717298	-4.3436995	488	0.100900157	-3.104922335	-3.205822492
453	-0.178162313	-4.624251074	-4.446088761	489	0.091162806	-3.141035541	-3.232198346
454	-0.179703498	-4.70521154	-4.525508042	490	0.082468738	-3.174284942	-3.25675368
455	-0.180472323	-4.770870642	-4.590398319	491	0.074627458	-3.205096201	-3.27972366
456	-0.180679286	-4.825941553	-4.645262267	492	0.067539577	-3.233761062	-3.301300639
457	-0.180654285	-4.873441865	-4.69278758	493	0.061060329	-3.260583628	-3.321643957
458	-0.180253667	-4.914961544	-4.734707877	494	0.055150043	-3.285737041	-3.340887084
459	-0.179829391	-4.952036252	-4.772206861	495	0.049713107	-3.309429833	-3.35914294
460	-0.17913117	-4.985259988	-4.806128818	496	0.02785981	-3.410702412	-3.438562221
461	-0.1784502	-5.015547338	-4.837097138	497	0.012078737	-3.491373762	-3.503452499

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
462	-0.177624909	-5.04321014	-4.865585231	498	4.41132E-05	-3.558272333	-3.558316446
463	-0.176833122	-5.068794208	-4.891961086	499	-0.009489879	-3.615331639	-3.605841759
464	-0.175925638	-5.092442057	-4.916516419	500	-0.01728369	-3.665045747	-3.647762057
465	-0.175010535	-5.114496934	-4.939486399	501	-0.023780306	-3.709041346	-3.68526104
466	-0.17394537	-5.135008749	-4.961063379	502	-0.029276624	-3.748459622	-3.719182997
467	-0.172983502	-5.154390198	-4.981406696	503	-0.034050316	-3.784201634	-3.750151317
468	-0.17209272	-5.172742544	-5.000649824	504	-0.038209788	-3.816849199	-3.778639411
505	-0.041922494	-3.846937759	-3.805015265	541	0.824331556	-1.201166745	-2.025498301
506	-0.045156622	-3.874727221	-3.829570598	542	0.454627703	-1.961878975	-2.416506678
507	-0.048097482	-3.900638061	-3.852540578	543	0.326356632	-2.271968899	-2.59831522
508	-0.050788073	-3.924905631	-3.874117558	544	0.256265852	-2.461803593	-2.718069445
509	-0.053189308	-3.947650183	-3.894460876	545	0.193467037	-2.651547002	-2.845014039
510	-0.055418594	-3.969122597	-3.913704003	546	0.178556301	-2.700379695	-2.878935995
511	-0.05743027	-3.989390129	-3.931959859	547	0.165584244	-2.744320072	-2.909904316
512	-0.071475922	-4.147745339	-4.076269417	548	0.154168257	-2.784224152	-2.938392409
513	-0.079452651	-4.258111329	-4.178658678	549	0.14404756	-2.820720703	-2.964768264
514	-0.084651042	-4.342729001	-4.258077959	550	0.134986713	-2.854336883	-2.989323597
515	-0.0883363633	-4.411331869	-4.322968236	551	0.126831745	-2.885461831	-3.012293577
516	-0.090973128	-4.468805311	-4.377832184	552	0.119423295	-2.914447261	-3.033870556
517	-0.092992997	-4.518350494	-4.425357497	553	0.112666709	-2.941547164	-3.054213874
518	-0.094545587	-4.561823381	-4.467277794	554	0.106487097	-2.966969905	-3.073457001
519	-0.095704419	-4.600481197	-4.504776778	555	0.100789005	-2.990923853	-3.091712858
520	-0.096518373	-4.635217107	-4.538698735	556	0.077919331	-3.093212807	-3.171132138
521	-0.097165791	-4.666832846	-4.569667055	557	0.061330926	-3.174691489	-3.236022416
522	-0.097705903	-4.695861051	-4.598155148	558	0.048639552	-3.242246811	-3.290886363
523	-0.09807228	-4.722603283	-4.624531003	559	0.038542692	-3.299868984	-3.338411676
524	-0.098223617	-4.747309953	-4.649086336	560	0.030264873	-3.350067101	-3.380331974
525	-0.098342349	-4.770398665	-4.672056316	561	0.023350963	-3.394479994	-3.417830957
526	-0.09846906	-4.792102355	-4.693633296	562	0.017422651	-3.434330263	-3.451752914
527	-0.098340751	-4.812317364	-4.713976613	563	0.012302384	-3.470418851	-3.482721235
528	-0.09822389	-4.83144363	-4.733219741	564	0.007813094	-3.503396234	-3.511209328
529	-0.098189466	-4.849665063	-4.751475597	565	0.003861617	-3.533723565	-3.537585182
530	-0.097954163	-4.866794724	-4.768840561	566	0.000281302	-3.561859213	-3.562140515
531	-0.097636396	-4.883033395	-4.785397554	567	-0.002910562	-3.588021058	-3.585110495
532	-0.097383658	-4.89860209	-4.801218432	568	-0.005823706	-3.612511181	-3.606687475

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
533	-0.097097338	-4.913463212	-4.816365874	569	-0.008497486	-3.635528279	-3.627030793
534	-0.096824916	-4.927719794	-4.830894878	570	-0.010913087	-3.657187007	-3.64627392
535	-0.0964885	-4.941342468	-4.844853967	571	-0.013172377	-3.677702154	-3.664529776
536	-0.096016049	-4.954302221	-4.858286171	572	-0.0290004273	-3.837843607	-3.808839334
537	-0.09562785	-4.966857672	-4.871229822	573	-0.038392441	-3.949621036	-3.911228595
538	-0.095272075	-4.978991289	-4.883719214	574	-0.044786474	-4.03543435	-3.990647876
539	-0.094753438	-4.990538592	-4.895785155	575	-0.049462989	-4.105001142	-4.055538153
540	-0.094319247	-5.001774666	-4.907455419	576	-0.053035338	-4.163437439	-4.110402101
577	-0.055876588	-4.213804002	-4.157927414	613	0.165768717	-2.621015074	-2.786783791
578	-0.058192944	-4.258040655	-4.199847711	614	0.158907175	-2.647119744	-2.806026918
579	-0.060118227	-4.297464922	-4.237346695	615	0.152588861	-2.671694164	-2.824282775
580	-0.061663103	-4.332931755	-4.271268652	616	0.127121376	-2.776580068	-2.903702055
581	-0.062971878	-4.36520885	-4.302236972	617	0.108544133	-2.8600482	-2.968592333
582	-0.064022134	-4.394747199	-4.330725065	618	0.094260531	-2.92919575	-3.023456628
583	-0.06499799	-4.42209891	-4.35710092	619	0.082860283	-2.988121311	-3.070981593
584	-0.065741249	-4.447397502	-4.381656253	620	0.073468482	-3.039433409	-3.112901891
585	-0.066450218	-4.471076452	-4.404626233	621	0.065575058	-3.084825817	-3.150400874
586	-0.066978471	-4.493181684	-4.426203213	622	0.0588235	-3.125499332	-3.184322831
587	-0.067504062	-4.514050593	-4.44654653	623	0.052937427	-3.162353725	-3.215291152
588	-0.068152787	-4.533593987	-4.465789658	624	0.047765089	-3.196014156	-3.243779245
589	-0.068392564	-4.552198301	-4.484045514	625	0.043171495	-3.226983604	-3.270155099
590	-0.068675411	-4.569803042	-4.501410478	626	0.039040947	-3.255669486	-3.294710432
591	-0.068875411	-4.586642881	-4.517967471	627	0.035305526	-3.282374886	-3.317680412
592	-0.068785211	-4.60257356	-4.533788349	628	0.031905482	-3.30735191	-3.339257392
593	-0.068914448	-4.617850239	-4.548935791	629	0.028787231	-3.330813478	-3.36960071
594	-0.068973818	-4.632438613	-4.563464795	630	0.025893615	-3.352950222	-3.378843837
595	-0.06898505	-4.646408934	-4.577423884	631	0.023264528	-3.373835165	-3.397099693
596	-0.069087124	-4.659943212	-4.590856088	632	0.004254688	-3.537154571	-3.541409251
597	-0.069007099	-4.672806835	-4.603799739	633	-0.007361355	-3.651159867	-3.643798512
598	-0.069007099	-4.68529623	-4.616289131	634	-0.0155244	-3.738742193	-3.723217793
599	-0.068930403	-4.697285475	-4.628355072	635	-0.021674281	-3.809782351	-3.78810807
600	-0.068840086	-4.708865422	-4.640025336	636	-0.026518457	-3.869490475	-3.842972018
601	0.928053801	-0.830014417	-1.758068218	637	-0.030465516	-3.920962847	-3.890497331
602	0.537000205	-1.61207639	-2.149076595	638	-0.033797606	-3.966215235	-3.932417628
603	0.399159904	-1.931725232	-2.330885137	639	-0.036581922	-4.006498534	-3.969916612

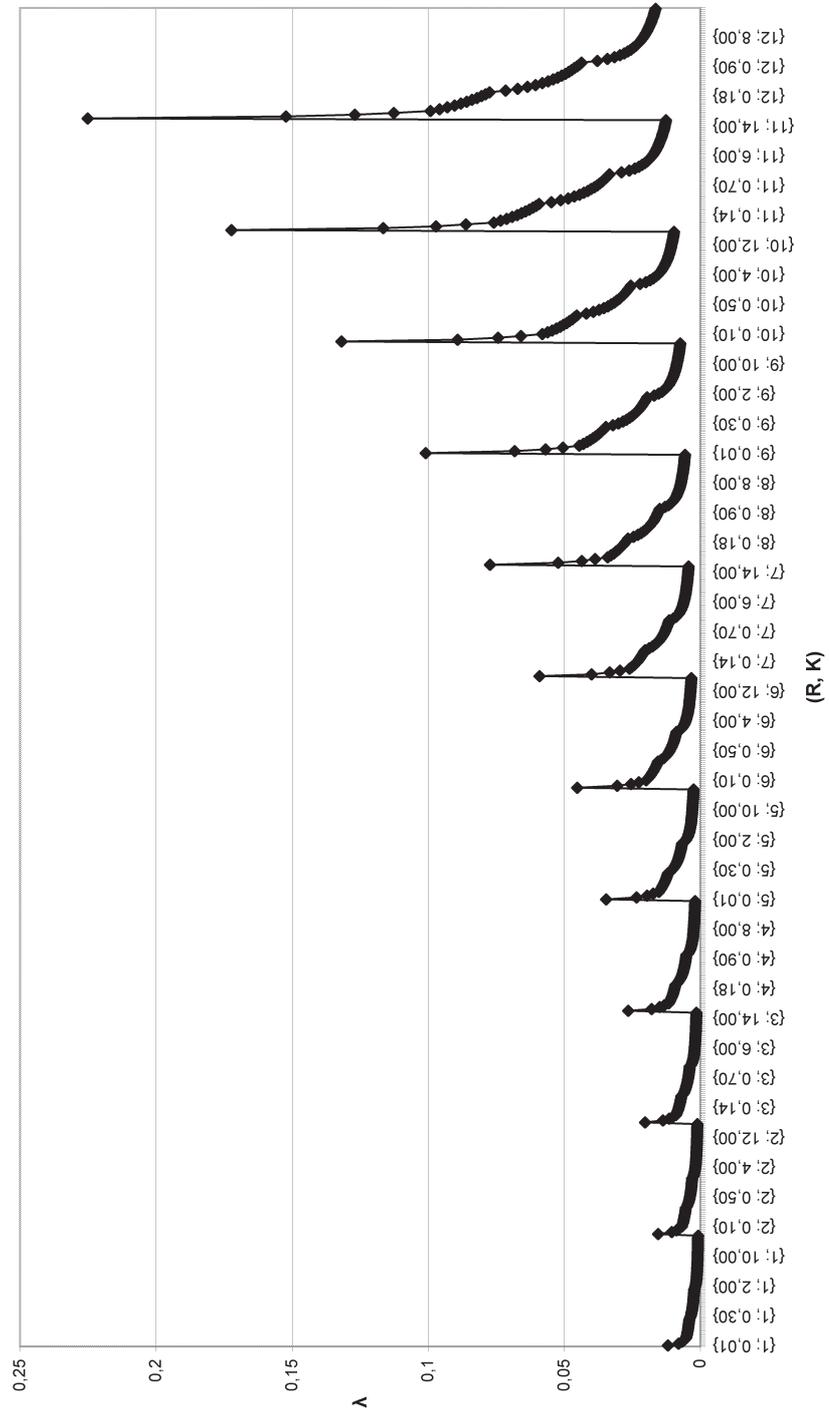
Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
604	0.323216928	-2.127422433	-2.450639362	640	-0.039033715	-4.042872284	-4.003838569
605	0.254714519	-2.322869436	-2.577583956	641	-0.041088903	-4.075895792	-4.034806889
606	0.238369592	-2.373136321	-2.611505913	642	-0.042980471	-4.106275453	-4.063294982
607	0.224130304	-2.418343929	-2.642474233	643	-0.044558659	-4.134229496	-4.089670837
608	0.211583062	-2.459379264	-2.670962326	644	-0.046001817	-4.160227987	-4.11422617
609	0.200439918	-2.496898263	-2.697338181	645	-0.047291962	-4.184488112	-4.13719615
610	0.190448562	-2.531444951	-2.721893514	646	-0.048426663	-4.20719976	-4.15877313
611	0.181432982	-2.563430511	-2.744863494	647	-0.049468833	-4.228584777	-4.179116447
612	0.173235664	-2.593204809	-2.766440473	648	-0.050395701	-4.248755276	-4.198359575
649	-0.051225743	-4.267841174	-4.216615431	685	0.122194672	-2.880530344	-3.002725016
650	-0.052009052	-4.285989446	-4.233980395	686	0.117615674	-2.909664675	-3.027280349
651	-0.052678066	-4.303215454	-4.250537388	687	0.113465979	-2.936784351	-3.050250329
652	-0.053332271	-4.319690537	-4.266358266	688	0.109684539	-2.962142771	-3.071827309
653	-0.053866374	-4.335372083	-4.281505708	689	0.10621045	-2.985960176	-3.092170627
654	-0.05441574	-4.350450451	-4.296034712	690	0.103001428	-3.008412327	-3.111413754
655	-0.054821797	-4.364815598	-4.309993801	691	0.100028888	-3.029640722	-3.12966961
656	-0.055246262	-4.378672267	-4.323426005	692	0.078600119	-3.195379049	-3.273979168
657	-0.05562651	-4.391996166	-4.336369656	693	0.065322489	-3.311104594	-3.376368429
658	-0.055985956	-4.404845005	-4.348859048	694	0.055899471	-3.399888239	-3.45578771
659	-0.056272969	-4.417197958	-4.360924989	695	0.048682534	-3.471995453	-3.520677987
660	-0.05660685	-4.429202103	-4.372595253	696	0.042948023	-3.532593912	-3.575541935
661	1.030540479	-0.460097656	-1.490638135	697	0.038223432	-3.584843816	-3.623067248
662	0.635819931	-1.245826581	-1.881646512	698	0.034226045	-3.630761501	-3.664987545
663	0.495461342	-1.567993712	-2.063455054	699	0.030778793	-3.671707736	-3.702486529
664	0.417596973	-1.765612305	-2.183209279	700	0.027816	-3.708592485	-3.736408486
665	0.346886963	-1.96326691	-2.310153873	701	0.02518096	-3.742195846	-3.767376806
666	0.32992003	-2.0141558	-2.34407583	702	0.022864433	-3.773000467	-3.795864899
667	0.315107152	-2.059936998	-2.37504415	703	0.02074739	-3.801466015	-3.822240754
668	0.302033214	-2.101499029	-2.403532243	704	0.018884424	-3.827911663	-3.846796087
669	0.290385286	-2.139522811	-2.429908098	705	0.01719062	-3.852575547	-3.869766067
670	0.279928486	-2.174534945	-2.454463431	706	0.015603753	-3.875739293	-3.891343047
671	0.270467541	-2.20696587	-2.477433411	707	0.014207084	-3.89747928	-3.911686364
672	0.261866536	-2.237143854	-2.49901039	708	0.012938715	-3.917990777	-3.930929492
673	0.254006595	-2.265347113	-2.519353708	709	0.011741965	-3.937443383	-3.949185348
674	0.246773625	-2.29182321	-2.538596836	710	0.010627664	-3.9559222648	-3.966550312

Valor observado y su predicción. Categorías de rugosidad k (1,12)

Date	RESID	LFAN	LFANF	Date	RESID	LFAN	LFANF
675	0,24010782	-2,316744871	-2,566852692	711	0,009581167	-3,973526138	-3,983107305
676	0,213088635	-2,423183338	-2,636271972	712	0,00867333	-3,990254854	-3,998928183
677	0,193248965	-2,507913284	-2,70116225	713	0,007796884	-4,006278741	-4,014075625
678	0,177911557	-2,578114641	-2,756026197	714	0,006989947	-4,021614682	-4,0286604629
679	0,165591579	-2,637959932	-2,803551511	715	0,006223878	-4,03633994	-4,042563718
680	0,155413772	-2,690058035	-2,845471808	716	0,005515124	-4,050480799	-4,055995922
681	0,146814283	-2,736156509	-2,882970791	717	0,004872002	-4,064067571	-4,068939573
682	0,13941208	-2,777480668	-2,916892748	718	0,004236462	-4,077192503	-4,081428965
683	0,132965917	-2,814895151	-2,947861069	719	0,003660159	-4,089834747	-4,093494906
684	0,127276724	-2,849072437	-2,976349162	720	0,003131119	-4,102034051	-4,10516517

Representación gráfica de la función:  $\lambda = f(R, K)$  para las categorías de rugosidad  $K \in \{1..12\}$





***5. Valores observados y su predicción. Todas las categorías de rugosidad***

Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=1

	LFAN	LFANFRUGO1		LFAN	LFANFRUGO1
1	-4,668642609	-4,835056759	31	-5,98508494	-5,954238962
2	-5,039034769	-5,102049568	32	-6,08445741	-6,052778063
3	-5,193416957	-5,226194154	33	-6,153513	-6,122692668
4	-5,290349197	-5,307966102	34	-6,20564836	-6,176922649
5	-5,389774977	-5,39464786	35	-6,24764795	-6,22123177
6	-5,415750463	-5,417810839	36	-6,28235175	-6,258694598
7	-5,439420208	-5,438956981	37	-6,31222093	-6,291146375
8	-5,461071618	-5,458409546	38	-6,33734086	-6,319770871
9	-5,481039003	-5,476419809	39	-6,36021207	-6,345376356
10	-5,499454838	-5,493186962	40	-6,38007254	-6,368539334
11	-5,516722164	-5,508871586	41	-6,39793016	-6,389685477
12	-5,532774678	-5,523605026	42	-6,41427929	-6,409138042
13	-5,547804893	-5,537496083	43	-6,42903971	-6,427148304
14	-5,56202253	-5,550635895	44	-6,44276419	-6,443915457
15	-5,575653147	-5,563101567	45	-6,45540658	-6,459600082
16	-5,633790103	-5,617331548	46	-6,46692303	-6,474333522
17	-5,681042988	-5,661640669	47	-6,47792281	-6,488224578
18	-5,720521799	-5,699103496	48	-6,48773002	-6,50136439
19	-5,754654805	-5,731555274	49	-6,49763436	-6,513830063
20	-5,784775634	-5,76017977	50	-6,50629819	-6,525687406
21	-5,81147905	-5,785785255	51	-6,51436275	-6,536993041
22	-5,835486966	-5,808948233	52	-6,52249288	-6,547796034
23	-5,857633199	-5,830094375	53	-6,53000401	-6,558139183
24	-5,877778783	-5,849546941	54	-6,53688162	-6,568060044
25	-5,896154367	-5,867557203	55	-6,54380685	-6,577591749
26	-5,913393012	-5,884324356	56	-6,55008083	-6,58676368
27	-5,929805167	-5,900008981	57	-6,55639443	-6,595602011
28	-5,944962713	-5,91474242	58	-6,56204018	-6,604130161
29	-5,959190987	-5,928633477	59	-6,56771798	-6,612369164
30	-5,972446541	-5,941773289	60	-6,5734282	-6,620337987

Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=2

	LFAN	LFANFRUGO2		LFAN	LFANFRUGO2
1	-4,34480792	-4,513341139	31	-5,78120362	-5,752609335
2	-4,74777115	-4,808981737	32	-5,89071464	-5,861721483
3	-4,9159162	-4,946446787	33	-5,96735747	-5,939137785
4	-5,02159513	-5,036992701	34	-6,025642	-5,999186533
5	-5,12992572	-5,132975237	35	-6,07224086	-6,048249933
6	-5,15838153	-5,158623556	36	-6,11160035	-6,089732447
7	-5,18427465	-5,182038637	37	-6,14461573	-6,125666234
8	-5,20774567	-5,203578423	38	-6,17346616	-6,157362082
9	-5,22953785	-5,223521151	39	-6,199227	-6,185714983
10	-5,2497177	-5,242087385	40	-6,22213636	-6,211363302
11	-5,26837029	-5,259454938	41	-6,2424933	-6,234778383
12	-5,28599362	-5,275769246	42	-6,26117573	-6,256318169
13	-5,30252621	-5,291150785	43	-6,27808052	-6,276260897
14	-5,31811199	-5,305700473	44	-6,29365131	-6,294827131
15	-5,33270179	-5,319503687	45	-6,30782048	-6,312194684
16	-5,39637131	-5,379552435	46	-6,32163667	-6,328508992
17	-5,44797814	-5,428615835	47	-6,33395486	-6,343890531
18	-5,49117423	-5,470098349	48	-6,34585639	-6,358440219
19	-5,52873733	-5,506032137	49	-6,35674787	-6,372243433
20	-5,56150197	-5,537727984	50	-6,36659446	-6,385373045
21	-5,590811	-5,566080885	51	-6,37653897	-6,397891752
22	-5,61714617	-5,591729204	52	-6,38598972	-6,409853884
23	-5,64108941	-5,615144285	53	-6,39433303	-6,421306833
24	-5,66331254	-5,636684071	54	-6,40274654	-6,432292181
25	-5,68368577	-5,656626799	55	-6,41062298	-6,442846619
26	-5,70268308	-5,675193034	56	-6,41856196	-6,45300268
27	-5,72021678	-5,692560586	57	-6,42532913	-6,462789346
28	-5,73682233	-5,708874895	58	-6,43214241	-6,472232549
29	-5,75244765	-5,724256433	59	-6,43900243	-6,481355581
30	-5,76736146	-5,738806121	60	-6,44527992	-6,490179443

Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=3

	LFAN	LFANFRUGO3		LFAN	LFANFRUGO3
1	-3,9643168	-4,153150163	31	-5,54217396	-5,512495467
2	-4,41009695	-4,477436432	32	-5,66129786	-5,63217988
3	-4,59551693	-4,62822096	33	-5,74460447	-5,717097322
4	-4,71186492	-4,727540189	34	-5,80814349	-5,782964408
5	-4,83119288	-4,832822815	35	-5,85973478	-5,836781735
6	-4,86238772	-4,860956291	36	-5,90235537	-5,882283637
7	-4,8907212	-4,886640143	37	-5,93925168	-5,921699178
8	-4,91659865	-4,910266996	38	-5,97087791	-5,956466148
9	-4,94036324	-4,932142045	39	-5,99909357	-5,987566263
10	-4,96241672	-4,952507228	40	-6,02440105	-6,015699739
11	-4,98306877	-4,971557585	41	-6,04740018	-6,041383591
12	-5,0022208	-4,989452645	42	-6,06791372	-6,065010444
13	-5,02038265	-5,006324556	43	-6,08709478	-6,086885493
14	-5,03733868	-5,022284014	44	-6,10440931	-6,107250676
15	-5,0534906	-5,037424671	45	-6,12066249	-6,126301033
16	-5,12302042	-5,103291756	46	-6,13579692	-6,144196093
17	-5,17929066	-5,157109084	47	-6,14975713	-6,161068004
18	-5,226555	-5,202610986	48	-6,16296487	-6,177027463
19	-5,26740026	-5,242026526	49	-6,17538739	-6,192168119
20	-5,30312892	-5,276793497	50	-6,18699293	-6,206569906
21	-5,33498135	-5,307893612	51	-6,19824274	-6,220301595
22	-5,36381635	-5,336027088	52	-6,20862603	-6,233422781
23	-5,38999416	-5,361710939	53	-6,21861612	-6,245985446
24	-5,41395271	-5,385337792	54	-6,22820005	-6,258035204
25	-5,43620107	-5,407212841	55	-6,23736509	-6,269612299
26	-5,45660995	-5,427578025	56	-6,2455829	-6,280752417
27	-5,47600965	-5,446628381	57	-6,25386881	-6,291487348
28	-5,49408897	-5,464523441	58	-6,26169971	-6,301845537
29	-5,51101566	-5,481395352	59	-6,26959241	-6,311852532
30	-5,5269761	-5,497354811	60	-6,27701556	-6,321531369

## Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=4

	LFAN	LFANFRUGO4		LFAN	LFANFRUGO4
1	-3,70212681	-3,906815967	31	-5,36981337	-5,340031491
2	-4,17768269	-4,248724762	32	-5,49481899	-5,466219854
3	-4,37437598	-4,407703298	33	-5,58227306	-5,555751923
4	-4,49748238	-4,512419783	34	-5,64929429	-5,62519839
5	-4,62333416	-4,623423729	35	-5,7032826	-5,681940286
6	-4,65625298	-4,653086049	36	-5,74836152	-5,729914875
7	-4,68616335	-4,680165625	37	-5,7873815	-5,771472354
8	-4,71342377	-4,70507642	38	-5,82121557	-5,808128649
9	-4,73847303	-4,728140214	39	-5,85100719	-5,840918822
10	-4,76170704	-4,749612092	40	-5,87777878	-5,870581141
11	-4,78334037	-4,769697693	41	-5,90198954	-5,897660717
12	-4,80362112	-4,788565215	42	-5,9241798	-5,922571513
13	-4,82258021	-4,806353988	43	-5,94458096	-5,945635306
14	-4,84051284	-4,823180723	44	-5,96307147	-5,967107185
15	-4,85735642	-4,839144161	45	-5,9803268	-5,987192786
16	-4,9304849	-4,908590628	46	-5,99667811	-6,006060308
17	-4,98965689	-4,965332524	47	-6,01166725	-6,02384908
18	-5,0391891	-5,013307113	48	-6,02605599	-6,040675816
19	-5,0819165	-5,054864592	49	-6,03939508	-6,056639253
20	-5,11933471	-5,091520887	50	-6,05206417	-6,071823669
21	-5,1528327	-5,12431106	51	-6,06403524	-6,086301573
22	-5,18284812	-5,153973379	52	-6,07528103	-6,100135797
23	-5,21030649	-5,181052955	53	-6,08577523	-6,113381149
24	-5,23553038	-5,205963751	54	-6,09638072	-6,126085721
25	-5,25871211	-5,229027544	55	-6,10575369	-6,138291944
26	-5,280281	-5,250499423	56	-6,11521535	-6,150037443
27	-5,30051979	-5,270585024	57	-6,12431046	-6,161355738
28	-5,31933673	-5,289452546	58	-6,13302811	-6,172276816
29	-5,33705819	-5,307241318	59	-6,14089306	-6,182827616
30	-5,35383008	-5,324068054	60	-6,14882036	-6,193032426

Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=5

	LFAN	LFANFRUGO5		LFAN	LFANFRUGO5
1	-3,33126096	-3,565232887	31	-5,12000383	-5,088518644
2	-3,84876656	-3,928628893	32	-5,25162464	-5,222637297
3	-4,06127736	-4,097598413	33	-5,34373323	-5,317795996
4	-4,19372301	-4,208895791	34	-5,41462649	-5,391606817
5	-4,32859962	-4,326875765	35	-5,47195672	-5,451914649
6	-4,36387242	-4,358402209	36	-5,51971245	-5,502904195
7	-4,39571996	-4,387183597	37	-5,56098168	-5,547073348
8	-4,42485063	-4,413659908	38	-5,59699298	-5,586033303
9	-4,4515911	-4,438173143	39	-5,62876777	-5,62088417
10	-4,47642523	-4,460994419	40	-5,65756705	-5,652410613
11	-4,49945973	-4,482342296	41	-5,68339179	-5,681192002
12	-4,52101288	-4,502395545	42	-5,70718827	-5,707668312
13	-4,54125686	-4,521302251	43	-5,72879264	-5,732181547
14	-4,56029243	-4,53918646	44	-5,74898907	-5,755002823
15	-4,57823618	-4,556153118	45	-5,7676812	-5,776350701
16	-4,6559373	-4,629963939	46	-5,785101	-5,796403949
17	-4,71856287	-4,690271771	47	-5,80150556	-5,815310655
18	-4,77110671	-4,741261317	48	-5,8168392	-5,833194865
19	-4,81626166	-4,78543047	49	-5,83104783	-5,850161522
20	-4,8559419	-4,824390424	50	-5,84477017	-5,866300201
21	-4,89112043	-4,859241291	51	-5,8576332	-5,881687966
22	-4,92289918	-4,890767735	52	-5,86995513	-5,8963916
23	-4,9518948	-4,919549123	53	-5,88171368	-5,910469354
24	-4,97841015	-4,946025434	54	-5,89288698	-5,923972343
25	-5,00296479	-4,970538669	55	-5,90382004	-5,936945665
26	-5,02569817	-4,993359945	56	-5,91376304	-5,949429309
27	-5,04693627	-5,014707822	57	-5,9238059	-5,9614589
28	-5,06688824	-5,034761071	58	-5,93319564	-5,973066312
29	-5,08562827	-5,053667777	59	-5,9422935	-5,984280175
30	-5,10324413	-5,071551986	60	-5,95070655	-5,995126304

## Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=6

	LFANF	LFANFRUGO6		LFAN	LFANFRUGO6
1	-2,88777513	-3,190834663	31	-4,86238772	-4,823149515
2	-3,47518844	-3,580240718	32	-5,00132873	-4,966867703
3	-3,71378709	-3,761304223	33	-5,09864717	-5,068837381
4	-3,86123484	-3,880567704	34	-5,17327188	-5,147931208
5	-4,01029757	-4,006992089	35	-5,23365385	-5,21255557
6	-4,04898886	-4,040775036	36	-5,28421724	-5,267194689
7	-4,08399827	-4,071616451	37	-5,32774618	-5,314525247
8	-4,11585425	-4,099987802	38	-5,36595402	-5,356273758
9	-4,14515376	-4,12625557	39	-5,39968586	-5,393619074
10	-4,17215476	-4,150710278	40	-5,43002186	-5,427402022
11	-4,19730795	-4,173586129	41	-5,45754759	-5,458243436
12	-4,22079253	-4,195074687	42	-5,48272109	-5,486614787
13	-4,24275177	-4,21533464	43	-5,50583366	-5,512882556
14	-4,26342616	-4,23449891	44	-5,52722751	-5,537337263
15	-4,28294177	-4,252679955	45	-5,54703517	-5,560213114
16	-4,366941	-4,331773782	46	-5,56567407	-5,581701673
17	-4,43449957	-4,396398144	47	-5,5830704	-5,601961625
18	-4,49085984	-4,451037264	48	-5,59969277	-5,621125896
19	-4,53928882	-4,498367822	49	-5,61494776	-5,63930694
20	-4,58164899	-4,540116333	50	-5,62960308	-5,656600744
21	-4,61937054	-4,577461648	51	-5,64362855	-5,673089888
22	-4,65320564	-4,611244596	52	-5,65670807	-5,688845934
23	-4,68399697	-4,64208601	53	-5,66938105	-5,703931302
24	-4,71219876	-4,670457362	54	-5,68133629	-5,718400767
25	-4,73824454	-4,69672513	55	-5,69284253	-5,732302654
26	-4,76240896	-4,721179837	56	-5,70388248	-5,745679813
27	-4,78489512	-4,744055688	57	-5,71443905	-5,758570422
28	-4,80606313	-4,765544247	58	-5,72480184	-5,771008634
29	-4,82594155	-4,785804199	59	-5,73434478	-5,783025129
30	-4,84469722	-4,80496847	60	-5,74397966	-5,794647569

Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=7

	LFAN	LFANFRUGO7		LFAN	LFANFRUGO7
1	-2,58619547	-2,901251228	31	-4,62710909	-4,588898028
2	-3,19652742	-3,303857308	32	-4,77016276	-4,737487953
3	-3,44392745	-3,491058474	33	-4,87056905	-4,842914183
4	-3,5964826	-3,61436473	34	-4,94766049	-4,924689119
5	-3,75045703	-3,745074628	35	-5,01028536	-4,991504107
6	-3,79042503	-3,780002745	36	-5,06277105	-5,047995375
7	-3,82648772	-3,811889617	37	-5,10786231	-5,096930337
8	-3,85938312	-3,841222695	38	-5,14748648	-5,140094032
9	-3,88952793	-3,868380884	39	-5,18266994	-5,178705274
10	-3,91738737	-3,893664553	40	-5,21434393	-5,21363339
11	-3,94325571	-3,917315846	41	-5,24307189	-5,245520262
12	-3,96743001	-3,939532821	42	-5,26934126	-5,274853341
13	-3,99009266	-3,960479541	43	-5,29372791	-5,30201153
14	-4,01134623	-3,98029344	44	-5,31607409	-5,327295199
15	-4,03148245	-3,999090783	45	-5,33705819	-5,350946491
16	-4,11787935	-4,080865719	46	-5,35658227	-5,373163466
17	-4,18731548	-4,147680708	47	-5,37476654	-5,394110187
18	-4,24526048	-4,204171975	48	-5,39218858	-5,413924085
19	-4,29504192	-4,253106937	49	-5,40835547	-5,432721428
20	-4,33858408	-4,296270633	50	-5,42388059	-5,450601454
21	-4,37723812	-4,334881874	51	-5,4384994	-5,467649544
22	-4,41207356	-4,36980999	52	-5,45240138	-5,483939686
23	-4,44373184	-4,401696862	53	-5,46578972	-5,499536416
24	-4,4727394	-4,431029941	54	-5,47840143	-5,514496365
25	-4,49945973	-4,45818813	55	-5,49068926	-5,528869495
26	-4,5243278	-4,483471799	56	-5,50239386	-5,542700112
27	-4,54746748	-4,507123092	57	-5,51349275	-5,556027684
28	-4,56912759	-4,529340066	58	-5,52421471	-5,568887524
29	-4,58959216	-4,550286787	59	-5,53454616	-5,581311353
30	-4,60887705	-4,570100685	60	-5,54472954	-5,593327769

## Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=8

	<b>LFANF</b>	<b>LFANFRUGO8</b>		<b>LFAN</b>	<b>LFANFRUGO8</b>
<b>1</b>	-2,3810706	-2,516946521	<b>31</b>	-4,27469825	-4,319567001
<b>2</b>	-2,8328156	-2,946980793	<b>32</b>	-4,44142389	-4,478279856
<b>3</b>	-3,04286507	-3,146935343	<b>33</b>	-4,55971761	-4,590888419
<b>4</b>	-3,18122111	-3,278642038	<b>34</b>	-4,65147335	-4,678234406
<b>5</b>	-3,32788443	-3,418256761	<b>35</b>	-4,72644325	-4,749601274
<b>6</b>	-3,36707559	-3,455564412	<b>36</b>	-4,78982939	-4,809941101
<b>7</b>	-3,40285432	-3,489623629	<b>37</b>	-4,84473697	-4,862209836
<b>8</b>	-3,43576757	-3,520955071	<b>38</b>	-4,89316889	-4,908314129
<b>9</b>	-3,46624047	-3,549963456	<b>39</b>	-4,93649271	-4,949555823
<b>10</b>	-3,49461006	-3,576969616	<b>40</b>	-4,97568388	-4,986863474
<b>11</b>	-3,52114805	-3,602232191	<b>41</b>	-5,01146261	-5,020922691
<b>12</b>	-3,54607665	-3,625962733	<b>42</b>	-5,04437585	-5,052254134
<b>13</b>	-3,56957996	-3,648336484	<b>43</b>	-5,07484875	-5,081262518
<b>14</b>	-3,59181219	-3,669500236	<b>44</b>	-5,10321835	-5,108268678
<b>15</b>	-3,61290379	-3,689578178	<b>45</b>	-5,12975633	-5,133531254
<b>16</b>	-3,70465953	-3,776924166	<b>46</b>	-5,15468493	-5,157261796
<b>17</b>	-3,77962943	-3,848291033	<b>47</b>	-5,17818825	-5,179635546
<b>18</b>	-3,84301557	-3,90863086	<b>48</b>	-5,20042047	-5,200799298
<b>19</b>	-3,89792315	-3,960899596	<b>49</b>	-5,22151207	-5,220877241
<b>20</b>	-3,94635506	-4,007003888	<b>50</b>	-5,24157439	-5,239975373
<b>21</b>	-3,98967889	-4,048245583	<b>51</b>	-5,26070324	-5,258184892
<b>22</b>	-4,02887005	-4,085553234	<b>52</b>	-5,27898163	-5,275584826
<b>23</b>	-4,06464879	-4,119612451	<b>53</b>	-5,29648197	-5,292244109
<b>24</b>	-4,09756203	-4,150943893	<b>54</b>	-5,31326781	-5,308223228
<b>25</b>	-4,12803493	-4,179952278	<b>55</b>	-5,32939521	-5,323575551
<b>26</b>	-4,15640453	-4,206958438	<b>56</b>	-5,34491388	-5,338348401
<b>27</b>	-4,18294251	-4,232221014	<b>57</b>	-5,35986812	-5,352583936
<b>28</b>	-4,20787111	-4,255951556	<b>58</b>	-5,37429753	-5,366319874
<b>29</b>	-4,23137442	-4,278325306	<b>59</b>	-5,38823771	-5,379590096
<b>30</b>	-4,25360665	-4,299489058	<b>60</b>	-5,40172075	-5,39242515

Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=9

	LFANF	LFANFRUGO9		LFAN	LFANFRUGO9
1	-2,05742481	-2,01030864	31	-3,95105246	-3,928715974
2	-2,50916981	-2,467965097	32	-4,1177781	-4,097623355
3	-2,71921928	-2,680763231	33	-4,23607182	-4,217465049
4	-2,85757532	-2,820929779	34	-4,32782756	-4,310421489
5	-3,00423864	-2,969512307	35	-4,40279746	-4,386372431
6	-3,0434298	-3,009216322	36	-4,4661836	-4,450588037
7	-3,07920854	-3,045463249	37	-4,52109118	-4,506214125
8	-3,11212178	-3,078807188	38	-4,5695231	-4,555279812
9	-3,14259468	-3,109678855	39	-4,61284692	-4,599170565
10	-3,17096427	-3,138419688	40	-4,65203809	-4,63887458
11	-3,19750226	-3,165304943	41	-4,68781682	-4,675121506
12	-3,22243086	-3,190559757	42	-4,72073006	-4,708465446
13	-3,24593417	-3,21437063	43	-4,75120296	-4,739337112
14	-3,2681664	-3,236893783	44	-4,77957256	-4,768077946
15	-3,289258	-3,258261383	45	-4,80611054	-4,7949632
16	-3,38101374	-3,351217822	46	-4,83103914	-4,820218015
17	-3,45598364	-3,427168764	47	-4,85454246	-4,844028887
18	-3,51936978	-3,49138437	48	-4,87677468	-4,866552041
19	-3,57427736	-3,547010458	49	-4,89786628	-4,88791964
20	-3,62270927	-3,596076145	50	-4,9179286	-4,908244494
21	-3,6660331	-3,639966898	51	-4,93705745	-4,927623656
22	-3,70522426	-3,679670913	52	-4,95533584	-4,946141231
23	-3,741003	-3,71591784	53	-4,97283618	-4,963870582
24	-3,77391624	-3,749261779	54	-4,98962202	-4,98087608
25	-3,80438914	-3,780133446	55	-5,00574942	-4,997214522
26	-3,83275874	-3,808874279	56	-5,0212681	-5,012936269
27	-3,85929672	-3,835759534	57	-5,03622233	-5,028086188
28	-3,88422532	-3,861014348	58	-5,05065174	-5,04270442
29	-3,90772863	-3,884825221	59	-5,06459192	-5,056827022
30	-3,92996086	-3,907348374	60	-5,07807496	-5,070486503

## Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=10

	LFANF	LFANFRUGO10		LFAN	LFANFRUGO10
1	-1,73377902	-1,674110108	31	-3,62740667	-3,618206308
2	-2,18552402	-2,137894917	32	-3,79413231	-3,789375482
3	-2,39557349	-2,353542573	33	-3,91242603	-3,910821944
4	-2,53392953	-2,495586052	34	-4,00418177	-4,005023138
5	-2,68059285	-2,646158208	35	-4,07915167	-4,081991117
6	-2,71978401	-2,686393889	36	-4,14253781	-4,147066617
7	-2,75556275	-2,723126188	37	-4,19744539	-4,203437579
8	-2,78847599	-2,756916627	38	-4,24587731	-4,253160291
9	-2,81894889	-2,788201688	39	-4,28920113	-4,297638773
10	-2,84731849	-2,817327382	40	-4,3283923	-4,337874454
11	-2,87385647	-2,84457265	41	-4,36417103	-4,374606753
12	-2,89878507	-2,870165644	42	-4,39708427	-4,408397192
13	-2,92228838	-2,894295362	43	-4,42755718	-4,439682252
14	-2,94452061	-2,917120116	44	-4,45592677	-4,468807947
15	-2,96561221	-2,938773844	45	-4,48246475	-4,496053214
16	-3,05736795	-3,032975038	46	-4,50739336	-4,521646209
17	-3,13233785	-3,109943017	47	-4,53089667	-4,545775927
18	-3,19572399	-3,175018517	48	-4,55312889	-4,568600681
19	-3,25063157	-3,231389479	49	-4,57422049	-4,590254408
20	-3,29906348	-3,281112191	50	-4,59428281	-4,610851426
21	-3,34238731	-3,325590673	51	-4,61341166	-4,630490089
22	-3,38157848	-3,365826354	52	-4,63169005	-4,649255629
23	-3,41735721	-3,402558653	53	-4,64919039	-4,667222388
24	-3,45027045	-3,436349092	54	-4,66597623	-4,684455602
25	-3,48074335	-3,467634152	55	-4,68210363	-4,701012827
26	-3,50911295	-3,496759847	56	-4,69762231	-4,7169451
27	-3,53565093	-3,524005114	57	-4,71257654	-4,732297888
28	-3,56057953	-3,549598109	58	-4,72700595	-4,747111868
29	-3,58408285	-3,573727827	59	-4,74094613	-4,761423582

Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=11

	LFAN	LFANFRUGO11		LFAN	LFANFRUGO11
1	-0,83001442	-1,322082352	31	-3,37383516	-3,312292126
2	-1,61207639	-1,796868044	32	-3,53715457	-3,487521399
3	-1,93172523	-2,017630819	33	-3,65115987	-3,611848546
4	-2,12742243	-2,163043541	34	-3,73874219	-3,708284174
5	-2,32286944	-2,317187239	35	-3,80978235	-3,787077819
6	-2,37313632	-2,358377302	36	-3,86949047	-3,853696896
7	-2,41834393	-2,395980884	37	-3,92096285	-3,911404966
8	-2,45937926	-2,430572826	38	-3,96621523	-3,962307091
9	-2,49689826	-2,462599961	39	-4,00649853	-4,007840594
10	-2,53144495	-2,492416511	40	-4,04287228	-4,049030657
11	-2,56343051	-2,520308031	41	-4,07589579	-4,086634239
12	-2,59320481	-2,546508087	42	-4,10627545	-4,12122618
13	-2,62101507	-2,571210156	43	-4,1342295	-4,153253316
14	-2,64711974	-2,59457631	44	-4,16022799	-4,183069866
15	-2,67169416	-2,616743659	45	-4,18448811	-4,210961386
16	-2,77658068	-2,713179286	46	-4,20719976	-4,237161442
17	-2,8600482	-2,791972931	47	-4,22858478	-4,261863511
18	-2,92919575	-2,858592009	48	-4,24875528	-4,285229664
19	-2,98812131	-2,916300079	49	-4,26784117	-4,307397014
20	-3,03943341	-2,967202204	50	-4,28598945	-4,328482589
21	-3,08482582	-3,012735706	51	-4,30321545	-4,348587077
22	-3,12549933	-3,05392577	52	-4,31969054	-4,367797731
23	-3,16235372	-3,091529351	53	-4,33537208	-4,386190659
24	-3,19601416	-3,126121293	54	-4,35045045	-4,403832641
25	-3,2269836	-3,158148429	55	-4,3648156	-4,4207826
26	-3,25566949	-3,187964979	56	-4,37867227	-4,437092784
27	-3,28237489	-3,215856499	57	-4,39199617	-4,452809736
28	-3,30735191	-3,242056554	58	-4,404845	-4,467975101
29	-3,33081348	-3,266758624	59	-4,41719796	-4,482626286
30	-3,35295022	-3,290124777	60	-4,4292021	-4,496797017

## Valor observado y su predicción. Categoría de rugosidad: k=12

	LFAN	LFANFRUGO12		LFAN	LFANFRUGO12
1	-0,46009766	-0,948912668	31	-3,02964072	-2,967697949
2	-1,24582658	-1,430515351	32	-3,19537905	-3,14544317
3	-1,56799371	-1,654447846	33	-3,31104594	-3,271555411
4	-1,76561231	-1,80194841	34	-3,39988824	-3,369375665
5	-1,96326691	-1,958305308	35	-3,47199545	-3,449300632
6	-2,0141558	-2,00008678	36	-3,53259391	-3,516876229
7	-2,059937	-2,038230276	37	-3,58484382	-3,575412874
8	-2,10149903	-2,07331889	38	-3,6307615	-3,627045853
9	-2,13952281	-2,105805872	39	-3,67170774	-3,673233128
10	-2,17453494	-2,136050529	40	-3,70859249	-3,715014599
11	-2,20696587	-2,164342517	41	-3,74219585	-3,753158095
12	-2,23714385	-2,190918754	42	-3,77300047	-3,788246709
13	-2,26534711	-2,215975497	43	-3,80146601	-3,820733691
14	-2,29182321	-2,239677142	44	-3,82791166	-3,850978349
15	-2,31674487	-2,262162771	45	-3,85257555	-3,879270336
16	-2,42318334	-2,359983025	46	-3,87573929	-3,905846573
17	-2,50791328	-2,439907992	47	-3,89747928	-3,930903316
18	-2,57811464	-2,507483588	48	-3,91799078	-3,954604961
19	-2,63795993	-2,566020233	49	-3,93744338	-3,97709059
20	-2,69005804	-2,617653213	50	-3,95592265	-3,998478912
21	-2,73615651	-2,663840487	51	-3,97352614	-4,018872062
22	-2,77748067	-2,705621959	52	-3,99025485	-4,038358543
23	-2,81489515	-2,743765454	53	-4,00627874	-4,057015557
24	-2,84907244	-2,778854068	54	-4,02161468	-4,074910844
25	-2,88053034	-2,811341051	55	-4,03633984	-4,092104171
26	-2,90966468	-2,841585708	56	-4,0504808	-4,108648537
27	-2,93678435	-2,869877695	57	-4,06406757	-4,124591154
28	-2,96214277	-2,896453932	58	-4,0771925	-4,139974264
29	-2,98596018	-2,921510675	59	-4,08983475	-4,154835811
30	-3,00841233	-2,94521232	60	-4,10203405	-4,169210005



***6. Valores estimados del coeficiente de Fanning***

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{1; 0,01}	1	0,01	0,011885692	{1; 0,01}	1	0,01	0,01031882
{1; 0,03}	1	0,03	0,008039278	{1; 0,03}	1	0,03	0,007416643
{1; 0,05}	1	0,05	0,006702874	{1; 0,05}	1	0,05	0,006360916
{1; 0,07}	1	0,07	0,0059464	{1; 0,07}	1	0,07	0,005749017
{1; 0,10}	1	0,10	0,005237505	{1; 0,10}	1	0,10	0,005164521
{1; 0,11}	1	0,11	0,005062824	{1; 0,11}	1	0,11	0,005018656
{1; 0,12}	1	0,12	0,004908444	{1; 0,12}	1	0,12	0,004889091
{1; 0,13}	1	0,13	0,004770589	{1; 0,13}	1	0,13	0,00477286
{1; 0,14}	1	0,14	0,00464641	{1; 0,14}	1	0,14	0,004667711
{1; 0,15}	1	0,15	0,004533709	{1; 0,15}	1	0,15	0,004571903
{1; 0,16}	1	0,16	0,00443076	{1; 0,16}	1	0,16	0,004484062
{1; 0,17}	1	0,17	0,004336184	{1; 0,17}	1	0,17	0,004403085
{1; 0,18}	1	0,18	0,004248866	{1; 0,18}	1	0,18	0,004328079
{1; 0,19}	1	0,19	0,004167888	{1; 0,19}	1	0,19	0,004258305
{1; 0,20}	1	0,20	0,004092493	{1; 0,20}	1	0,20	0,00419315
{1; 0,25}	1	0,25	0,003780051	{1; 0,25}	1	0,25	0,003921112
{1; 0,30}	1	0,30	0,003542558	{1; 0,30}	1	0,30	0,003711995
{1; 0,35}	1	0,35	0,003353441	{1; 0,35}	1	0,35	0,003543914
{1; 0,40}	1	0,40	0,0031978	{1; 0,40}	1	0,40	0,00340448
{1; 0,45}	1	0,45	0,003066522	{1; 0,45}	1	0,45	0,003286052
{1; 0,50}	1	0,50	0,002953664	{1; 0,50}	1	0,50	0,003183609
{1; 0,55}	1	0,55	0,002855153	{1; 0,55}	1	0,55	0,003093692
{1; 0,60}	1	0,60	0,002768092	{1; 0,60}	1	0,60	0,003013823
{1; 0,65}	1	0,65	0,002690349	{1; 0,65}	1	0,65	0,002942174
{1; 0,70}	1	0,70	0,002620319	{1; 0,70}	1	0,70	0,002877356
{1; 0,75}	1	0,75	0,002556761	{1; 0,75}	1	0,75	0,002818296
{1; 0,80}	1	0,80	0,002498704	{1; 0,80}	1	0,80	0,002764147
{1; 0,85}	1	0,85	0,002445368	{1; 0,85}	1	0,85	0,00271423
{1; 0,90}	1	0,90	0,002396126	{1; 0,90}	1	0,90	0,002667993
{1; 0,95}	1	0,95	0,002350459	{1; 0,95}	1	0,95	0,002624982

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{1; 1,00}	1	1,00	0,00230794	{1; 1,00}	1	1,00	0,002584818
{1; 1,50}	1	1,50	0,001997807	{1; 1,50}	1	1,50	0,002288216
{1; 2,00}	1	2,00	0,001803383	{1; 2,00}	1	2,00	0,002098652
{1; 2,50}	1	2,50	0,001665703	{1; 2,50}	1	2,50	0,001962498
{1; 3,00}	1	3,00	0,001561051	{1; 3,00}	1	3,00	0,001857836
{1; 3,50}	1	3,50	0,001477715	{1; 3,50}	1	3,50	0,001773712
{1; 4,00}	1	4,00	0,001409131	{1; 4,00}	1	4,00	0,001703926
{1; 4,50}	1	4,50	0,001351282	{1; 4,50}	1	4,50	0,001644653
{1; 5,00}	1	5,00	0,001301551	{1; 5,00}	1	5,00	0,001593381
{1; 5,50}	1	5,50	0,001258141	{1; 5,50}	1	5,50	0,001548378
{1; 6,00}	1	6,00	0,001219777	{1; 6,00}	1	6,00	0,001508404
{1; 6,50}	1	6,50	0,001185519	{1; 6,50}	1	6,50	0,001472544
{1; 7,00}	1	7,00	0,001154466	{1; 7,00}	1	7,00	0,001440103
{1; 7,50}	1	7,50	0,001126653	{1; 7,50}	1	7,50	0,001410544
{1; 8,00}	1	8,00	0,001101017	{1; 8,00}	1	8,00	0,001383443
{1; 8,50}	1	8,50	0,001077567	{1; 8,50}	1	8,50	0,00135846
{1; 9,00}	1	9,00	0,001055868	{1; 9,00}	1	9,00	0,001335318
{1; 9,50}	1	9,50	0,001035745	{1; 9,50}	1	9,50	0,001313791
{1; 10,00}	1	10,00	0,001017008	{1; 10,00}	1	10,00	0,001293689
{1; 10,50}	1	10,50	0,000999501	{1; 10,50}	1	10,50	0,001274854
{1; 11,00}	1	11,00	0,000983089	{1; 11,00}	1	11,00	0,001257151
{1; 11,50}	1	11,50	0,000967659	{1; 11,50}	1	11,50	0,001240464
{1; 12,00}	1	12,00	0,000953112	{1; 12,00}	1	12,00	0,001224696
{1; 12,50}	1	12,50	0,000939365	{1; 12,50}	1	12,50	0,001209759
{1; 13,00}	1	13,00	0,000926343	{1; 13,00}	1	13,00	0,00119558
{1; 13,50}	1	13,50	0,000913984	{1; 13,50}	1	13,50	0,001182093
{1; 14,00}	1	14,00	0,000902231	{1; 14,00}	1	14,00	0,001169241
{1; 14,50}	1	14,50	0,000891033	{1; 14,50}	1	14,50	0,001156972
{1; 15,00}	1	15,00	0,000880346	{1; 15,00}	1	15,00	0,001145241
{1; 15,50}	1	15,50	0,000870133	{1; 15,50}	1	15,50	0,001134009

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{2; 0,01}	2	0,01	0,015529405	{2; 0,01}	2	0,01	0,012838769
{2; 0,03}	2	0,03	0,010503822	{2; 0,03}	2	0,03	0,009227855
{2; 0,05}	2	0,05	0,008757727	{2; 0,05}	2	0,05	0,007914309
{2; 0,07}	2	0,07	0,007769345	{2; 0,07}	2	0,07	0,007152979
{2; 0,10}	2	0,10	0,006843131	{2; 0,10}	2	0,10	0,006425744
{2; 0,11}	2	0,11	0,006614898	{2; 0,11}	2	0,11	0,006244257
{2; 0,12}	2	0,12	0,006413192	{2; 0,12}	2	0,12	0,006083052
{2; 0,13}	2	0,13	0,006233076	{2; 0,13}	2	0,13	0,005938435
{2; 0,14}	2	0,14	0,006070827	{2; 0,14}	2	0,14	0,005807608
{2; 0,15}	2	0,15	0,005923576	{2; 0,15}	2	0,15	0,005688403
{2; 0,16}	2	0,16	0,005789066	{2; 0,16}	2	0,16	0,00557911
{2; 0,17}	2	0,17	0,005665498	{2; 0,17}	2	0,17	0,005478358
{2; 0,18}	2	0,18	0,00555141	{2; 0,18}	2	0,18	0,005385034
{2; 0,19}	2	0,19	0,005445609	{2; 0,19}	2	0,19	0,005298221
{2; 0,20}	2	0,20	0,005347099	{2; 0,20}	2	0,20	0,005217155
{2; 0,25}	2	0,25	0,004938874	{2; 0,25}	2	0,25	0,004878683
{2; 0,30}	2	0,30	0,004628576	{2; 0,30}	2	0,30	0,004618498
{2; 0,35}	2	0,35	0,004381482	{2; 0,35}	2	0,35	0,00440937
{2; 0,40}	2	0,40	0,004178127	{2; 0,40}	2	0,40	0,004235885
{2; 0,45}	2	0,45	0,004006605	{2; 0,45}	2	0,45	0,004088535
{2; 0,50}	2	0,50	0,003859148	{2; 0,50}	2	0,50	0,003961074
{2; 0,55}	2	0,55	0,003730437	{2; 0,55}	2	0,55	0,003849199
{2; 0,60}	2	0,60	0,003616686	{2; 0,60}	2	0,60	0,003749826
{2; 0,65}	2	0,65	0,00351511	{2; 0,65}	2	0,65	0,003660679
{2; 0,70}	2	0,70	0,003423611	{2; 0,70}	2	0,70	0,003580032
{2; 0,75}	2	0,75	0,00334057	{2; 0,75}	2	0,75	0,00350655
{2; 0,80}	2	0,80	0,003264714	{2; 0,80}	2	0,80	0,003439177
{2; 0,85}	2	0,85	0,003195028	{2; 0,85}	2	0,85	0,00337707
{2; 0,90}	2	0,90	0,003130689	{2; 0,90}	2	0,90	0,003319541
{2; 0,95}	2	0,95	0,003071022	{2; 0,95}	2	0,95	0,003266026

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{2; 1,00}	2	1,00	0,003015469	{2; 1,00}	2	1,00	0,003216054
{2; 1,50}	2	1,50	0,002610261	{2; 1,50}	2	1,50	0,002847019
{2; 2,00}	2	2,00	0,002356233	{2; 2,00}	2	2,00	0,002611162
{2; 2,50}	2	2,50	0,002176346	{2; 2,50}	2	2,50	0,002441758
{2; 3,00}	2	3,00	0,002039611	{2; 3,00}	2	3,00	0,002311536
{2; 3,50}	2	3,50	0,001930728	{2; 3,50}	2	3,50	0,002206869
{2; 4,00}	2	4,00	0,001841118	{2; 4,00}	2	4,00	0,002120041
{2; 4,50}	2	4,50	0,001765536	{2; 4,50}	2	4,50	0,002046292
{2; 5,00}	2	5,00	0,001700558	{2; 5,00}	2	5,00	0,001982499
{2; 5,50}	2	5,50	0,001643841	{2; 5,50}	2	5,50	0,001926506
{2; 6,00}	2	6,00	0,001593716	{2; 6,00}	2	6,00	0,00187677
{2; 6,50}	2	6,50	0,001548956	{2; 6,50}	2	6,50	0,001832153
{2; 7,00}	2	7,00	0,001508636	{2; 7,00}	2	7,00	0,001791789
{2; 7,50}	2	7,50	0,001472043	{2; 7,50}	2	7,50	0,001755012
{2; 8,00}	2	8,00	0,001438617	{2; 8,00}	2	8,00	0,001721292
{2; 8,50}	2	8,50	0,001407909	{2; 8,50}	2	8,50	0,001690208
{2; 9,00}	2	9,00	0,001379558	{2; 9,00}	2	9,00	0,001661415
{2; 9,50}	2	9,50	0,001353265	{2; 9,50}	2	9,50	0,001634631
{2; 10,00}	2	10,00	0,001328785	{2; 10,00}	2	10,00	0,00160962
{2; 10,50}	2	10,50	0,001305911	{2; 10,50}	2	10,50	0,001586185
{2; 11,00}	2	11,00	0,001284468	{2; 11,00}	2	11,00	0,001564158
{2; 11,50}	2	11,50	0,001264307	{2; 11,50}	2	11,50	0,001543397
{2; 12,00}	2	12,00	0,001245301	{2; 12,00}	2	12,00	0,001523777
{2; 12,50}	2	12,50	0,001227339	{2; 12,50}	2	12,50	0,001505193
{2; 13,00}	2	13,00	0,001210326	{2; 13,00}	2	13,00	0,001487552
{2; 13,50}	2	13,50	0,001194178	{2; 13,50}	2	13,50	0,001470771
{2; 14,00}	2	14,00	0,001178821	{2; 14,00}	2	14,00	0,00145478
{2; 14,50}	2	14,50	0,00116419	{2; 14,50}	2	14,50	0,001439515
{2; 15,00}	2	15,00	0,001150228	{2; 15,00}	2	15,00	0,00142492
{2; 15,50}	2	15,50	0,001136883	{2; 15,50}	2	15,50	0,001410944

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{3; 0,01}	3	0,01	0,020290146	{3; 0,01}	3	0,01	0,015974112
{3; 0,03}	3	0,03	0,013723905	{3; 0,03}	3	0,03	0,01148138
{3; 0,05}	3	0,05	0,011442522	{3; 0,05}	3	0,05	0,009847055
{3; 0,07}	3	0,07	0,010151139	{3; 0,07}	3	0,07	0,0088998
{3; 0,10}	3	0,10	0,008940981	{3; 0,10}	3	0,10	0,007994968
{3; 0,11}	3	0,11	0,008642781	{3; 0,11}	3	0,11	0,007769161
{3; 0,12}	3	0,12	0,008379239	{3; 0,12}	3	0,12	0,007568588
{3; 0,13}	3	0,13	0,008143906	{3; 0,13}	3	0,13	0,007388655
{3; 0,14}	3	0,14	0,007931918	{3; 0,14}	3	0,14	0,007225878
{3; 0,15}	3	0,15	0,007739525	{3; 0,15}	3	0,15	0,007077562
{3; 0,16}	3	0,16	0,00756378	{3; 0,16}	3	0,16	0,006941579
{3; 0,17}	3	0,17	0,007402329	{3; 0,17}	3	0,17	0,006816223
{3; 0,18}	3	0,18	0,007253267	{3; 0,18}	3	0,18	0,006700108
{3; 0,19}	3	0,19	0,00711503	{3; 0,19}	3	0,19	0,006592094
{3; 0,20}	3	0,20	0,006986322	{3; 0,20}	3	0,20	0,006491232
{3; 0,25}	3	0,25	0,00645295	{3; 0,25}	3	0,25	0,006070102
{3; 0,30}	3	0,30	0,006047526	{3; 0,30}	3	0,30	0,005746377
{3; 0,35}	3	0,35	0,005724682	{3; 0,35}	3	0,35	0,005486178
{3; 0,40}	3	0,40	0,005458987	{3; 0,40}	3	0,40	0,005270326
{3; 0,45}	3	0,45	0,005234881	{3; 0,45}	3	0,45	0,005086992
{3; 0,50}	3	0,50	0,005042219	{3; 0,50}	3	0,50	0,004928405
{3; 0,55}	3	0,55	0,004874051	{3; 0,55}	3	0,55	0,004789208
{3; 0,60}	3	0,60	0,004725428	{3; 0,60}	3	0,60	0,004665567
{3; 0,65}	3	0,65	0,004592713	{3; 0,65}	3	0,65	0,00455465
{3; 0,70}	3	0,70	0,004473164	{3; 0,70}	3	0,70	0,004454308
{3; 0,75}	3	0,75	0,004364665	{3; 0,75}	3	0,75	0,004362881
{3; 0,80}	3	0,80	0,004265554	{3; 0,80}	3	0,80	0,004279055
{3; 0,85}	3	0,85	0,004174505	{3; 0,85}	3	0,85	0,004201781
{3; 0,90}	3	0,90	0,004090442	{3; 0,90}	3	0,90	0,004130203
{3; 0,95}	3	0,95	0,004012484	{3; 0,95}	3	0,95	0,004063619

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{3; 1,00}	3	1,00	0,0039399	{3; 1,00}	3	1,00	0,004001444
{3; 1,50}	3	1,50	0,00341047	{3; 1,50}	3	1,50	0,003542287
{3; 2,00}	3	2,00	0,003078567	{3; 2,00}	3	2,00	0,003248831
{3; 2,50}	3	2,50	0,002843533	{3; 2,50}	3	2,50	0,003038057
{3; 3,00}	3	3,00	0,00266488	{3; 3,00}	3	3,00	0,002876034
{3; 3,50}	3	3,50	0,002522617	{3; 3,50}	3	3,50	0,002745806
{3; 4,00}	3	4,00	0,002405537	{3; 4,00}	3	4,00	0,002637774
{3; 4,50}	3	4,50	0,002306784	{3; 4,50}	3	4,50	0,002546016
{3; 5,00}	3	5,00	0,002221886	{3; 5,00}	3	5,00	0,002466643
{3; 5,50}	3	5,50	0,002147781	{3; 5,50}	3	5,50	0,002396976
{3; 6,00}	3	6,00	0,00208229	{3; 6,00}	3	6,00	0,002335095
{3; 6,50}	3	6,50	0,002023808	{3; 6,50}	3	6,50	0,002279581
{3; 7,00}	3	7,00	0,001971128	{3; 7,00}	3	7,00	0,00222936
{3; 7,50}	3	7,50	0,001923317	{3; 7,50}	3	7,50	0,002183601
{3; 8,00}	3	8,00	0,001879643	{3; 8,00}	3	8,00	0,002141647
{3; 8,50}	3	8,50	0,001839522	{3; 8,50}	3	8,50	0,002102972
{3; 9,00}	3	9,00	0,001802479	{3; 9,00}	3	9,00	0,002067147
{3; 9,50}	3	9,50	0,001768127	{3; 9,50}	3	9,50	0,002033822
{3; 10,00}	3	10,00	0,001736142	{3; 10,00}	3	10,00	0,002002704
{3; 10,50}	3	10,50	0,001706255	{3; 10,50}	3	10,50	0,001973546
{3; 11,00}	3	11,00	0,001678238	{3; 11,00}	3	11,00	0,00194614
{3; 11,50}	3	11,50	0,001651896	{3; 11,50}	3	11,50	0,001920308
{3; 12,00}	3	12,00	0,001627064	{3; 12,00}	3	12,00	0,001895897
{3; 12,50}	3	12,50	0,001603596	{3; 12,50}	3	12,50	0,001872775
{3; 13,00}	3	13,00	0,001581367	{3; 13,00}	3	13,00	0,001850825
{3; 13,50}	3	13,50	0,001560269	{3; 13,50}	3	13,50	0,001829947
{3; 14,00}	3	14,00	0,001540204	{3; 14,00}	3	14,00	0,00181005
{3; 14,50}	3	14,50	0,001521088	{3; 14,50}	3	14,50	0,001791057
{3; 15,00}	3	15,00	0,001502845	{3; 15,00}	3	15,00	0,001772898
{3; 15,50}	3	15,50	0,001485409	{3; 15,50}	3	15,50	0,001755509

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{4; 0,01}	4	0,01	0,026510353	{4; 0,01}	4	0,01	0,019875135
{4; 0,03}	4	0,03	0,017931147	{4; 0,03}	4	0,03	0,014285236
{4; 0,05}	4	0,05	0,014950375	{4; 0,05}	4	0,05	0,012251794
{4; 0,07}	4	0,07	0,013263102	{4; 0,07}	4	0,07	0,011073212
{4; 0,10}	4	0,10	0,011681955	{4; 0,10}	4	0,10	0,009947411
{4; 0,11}	4	0,11	0,011292338	{4; 0,11}	4	0,11	0,00966646
{4; 0,12}	4	0,12	0,010948003	{4; 0,12}	4	0,12	0,009416905
{4; 0,13}	4	0,13	0,010640526	{4; 0,13}	4	0,13	0,009193031
{4; 0,14}	4	0,14	0,01036355	{4; 0,14}	4	0,14	0,008990503
{4; 0,15}	4	0,15	0,010112176	{4; 0,15}	4	0,15	0,008805967
{4; 0,16}	4	0,16	0,009882554	{4; 0,16}	4	0,16	0,008636775
{4; 0,17}	4	0,17	0,009671609	{4; 0,17}	4	0,17	0,008480806
{4; 0,18}	4	0,18	0,009476851	{4; 0,18}	4	0,18	0,008336335
{4; 0,19}	4	0,19	0,009296235	{4; 0,19}	4	0,19	0,008201943
{4; 0,20}	4	0,20	0,00912807	{4; 0,20}	4	0,20	0,008076449
{4; 0,25}	4	0,25	0,008431186	{4; 0,25}	4	0,25	0,007552475
{4; 0,30}	4	0,30	0,007901473	{4; 0,30}	4	0,30	0,007149694
{4; 0,35}	4	0,35	0,007479657	{4; 0,35}	4	0,35	0,006825952
{4; 0,40}	4	0,40	0,00713251	{4; 0,40}	4	0,40	0,006557387
{4; 0,45}	4	0,45	0,006839702	{4; 0,45}	4	0,45	0,006329281
{4; 0,50}	4	0,50	0,006587977	{4; 0,50}	4	0,50	0,006131965
{4; 0,55}	4	0,55	0,006368255	{4; 0,55}	4	0,55	0,005958776
{4; 0,60}	4	0,60	0,006174069	{4; 0,60}	4	0,60	0,005804941
{4; 0,65}	4	0,65	0,006000669	{4; 0,65}	4	0,65	0,005666936
{4; 0,70}	4	0,70	0,00584447	{4; 0,70}	4	0,70	0,00554209
{4; 0,75}	4	0,75	0,005702709	{4; 0,75}	4	0,75	0,005428335
{4; 0,80}	4	0,80	0,005573215	{4; 0,80}	4	0,80	0,005324039
{4; 0,85}	4	0,85	0,005454254	{4; 0,85}	4	0,85	0,005227894
{4; 0,90}	4	0,90	0,005344442	{4; 0,90}	4	0,90	0,005138836
{4; 0,95}	4	0,95	0,005242563	{4; 0,95}	4	0,95	0,005055992

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{4; 1,00}	4	1,00	0,005147727	{4; 1,00}	4	1,00	0,004978633
{4; 1,50}	4	1,50	0,004455994	{4; 1,50}	4	1,50	0,004407345
{4; 2,00}	4	2,00	0,004022342	{4; 2,00}	4	2,00	0,004042225
{4; 2,50}	4	2,50	0,003715255	{4; 2,50}	4	2,50	0,003779978
{4; 3,00}	4	3,00	0,003481834	{4; 3,00}	4	3,00	0,003578388
{4; 3,50}	4	3,50	0,003295958	{4; 3,50}	4	3,50	0,003416357
{4; 4,00}	4	4,00	0,003142985	{4; 4,00}	4	4,00	0,003281942
{4; 4,50}	4	4,50	0,003013958	{4; 4,50}	4	4,50	0,003167776
{4; 5,00}	4	5,00	0,002903034	{4; 5,00}	4	5,00	0,00306902
{4; 5,50}	4	5,50	0,002806212	{4; 5,50}	4	5,50	0,002982339
{4; 6,00}	4	6,00	0,002720643	{4; 6,00}	4	6,00	0,002905346
{4; 6,50}	4	6,50	0,002644233	{4; 6,50}	4	6,50	0,002836275
{4; 7,00}	4	7,00	0,002575403	{4; 7,00}	4	7,00	0,00277379
{4; 7,50}	4	7,50	0,002512935	{4; 7,50}	4	7,50	0,002716856
{4; 8,00}	4	8,00	0,002455872	{4; 8,00}	4	8,00	0,002664656
{4; 8,50}	4	8,50	0,002403451	{4; 8,50}	4	8,50	0,002616536
{4; 9,00}	4	9,00	0,002355053	{4; 9,00}	4	9,00	0,002571963
{4; 9,50}	4	9,50	0,002310169	{4; 9,50}	4	9,50	0,0025305
{4; 10,00}	4	10,00	0,002268378	{4; 10,00}	4	10,00	0,002491782
{4; 10,50}	4	10,50	0,002229329	{4; 10,50}	4	10,50	0,002455504
{4; 11,00}	4	11,00	0,002192723	{4; 11,00}	4	11,00	0,002421405
{4; 11,50}	4	11,50	0,002158307	{4; 11,50}	4	11,50	0,002389265
{4; 12,00}	4	12,00	0,002125861	{4; 12,00}	4	12,00	0,002358893
{4; 12,50}	4	12,50	0,002095199	{4; 12,50}	4	12,50	0,002330123
{4; 13,00}	4	13,00	0,002066156	{4; 13,00}	4	13,00	0,002302813
{4; 13,50}	4	13,50	0,002038589	{4; 13,50}	4	13,50	0,002276836
{4; 14,00}	4	14,00	0,002012373	{4; 14,00}	4	14,00	0,002252081
{4; 14,50}	4	14,50	0,001987397	{4; 14,50}	4	14,50	0,00222845
{4; 15,00}	4	15,00	0,001963562	{4; 15,00}	4	15,00	0,002205855
{4; 15,50}	4	15,50	0,001940781	{4; 15,50}	4	15,50	0,00218422

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{5; 0,01}	5	0,01	0,034637446	{5; 0,01}	5	0,01	0,024728822
{5; 0,03}	5	0,03	0,023428172	{5; 0,03}	5	0,03	0,01777382
{5; 0,05}	5	0,05	0,019533607	{5; 0,05}	5	0,05	0,015243793
{5; 0,07}	5	0,07	0,017329078	{5; 0,07}	5	0,07	0,01377739
{5; 0,10}	5	0,10	0,015263209	{5; 0,10}	5	0,10	0,012376659
{5; 0,11}	5	0,11	0,01475415	{5; 0,11}	5	0,11	0,012027096
{5; 0,12}	5	0,12	0,014304255	{5; 0,12}	5	0,12	0,011716598
{5; 0,13}	5	0,13	0,013902517	{5; 0,13}	5	0,13	0,011438052
{5; 0,14}	5	0,14	0,013540631	{5; 0,14}	5	0,14	0,011186065
{5; 0,15}	5	0,15	0,013212195	{5; 0,15}	5	0,15	0,010956463
{5; 0,16}	5	0,16	0,01291218	{5; 0,16}	5	0,16	0,010745954
{5; 0,17}	5	0,17	0,012636567	{5; 0,17}	5	0,17	0,010551895
{5; 0,18}	5	0,18	0,012382102	{5; 0,18}	5	0,18	0,010372143
{5; 0,19}	5	0,19	0,012146117	{5; 0,19}	5	0,19	0,010204931
{5; 0,20}	5	0,20	0,011926398	{5; 0,20}	5	0,20	0,010048791
{5; 0,25}	5	0,25	0,011015875	{5; 0,25}	5	0,25	0,009396858
{5; 0,30}	5	0,30	0,010323772	{5; 0,30}	5	0,30	0,008895713
{5; 0,35}	5	0,35	0,009772643	{5; 0,35}	5	0,35	0,008492911
{5; 0,40}	5	0,40	0,009319073	{5; 0,40}	5	0,40	0,008158761
{5; 0,45}	5	0,45	0,008936501	{5; 0,45}	5	0,45	0,007874949
{5; 0,50}	5	0,50	0,008607607	{5; 0,50}	5	0,50	0,007629447
{5; 0,55}	5	0,55	0,008320526	{5; 0,55}	5	0,55	0,007413963
{5; 0,60}	5	0,60	0,00806681	{5; 0,60}	5	0,60	0,00722256
{5; 0,65}	5	0,65	0,007840252	{5; 0,65}	5	0,65	0,007050853
{5; 0,70}	5	0,70	0,007636168	{5; 0,70}	5	0,70	0,006895519
{5; 0,75}	5	0,75	0,007450948	{5; 0,75}	5	0,75	0,006753984
{5; 0,80}	5	0,80	0,007281756	{5; 0,80}	5	0,80	0,006624217
{5; 0,85}	5	0,85	0,007126326	{5; 0,85}	5	0,85	0,006504593
{5; 0,90}	5	0,90	0,006982822	{5; 0,90}	5	0,90	0,006393786
{5; 0,95}	5	0,95	0,006849739	{5; 0,95}	5	0,95	0,006290711

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{5; 1,00}	5	1,00	0,00672583	{5; 1,00}	5	1,00	0,00619446
{5; 1,50}	5	1,50	0,005822037	{5; 1,50}	5	1,50	0,005483658
{5; 2,00}	5	2,00	0,005255442	{5; 2,00}	5	2,00	0,005029373
{5; 2,50}	5	2,50	0,004854215	{5; 2,50}	5	2,50	0,004703083
{5; 3,00}	5	3,00	0,004549235	{5; 3,00}	5	3,00	0,004452263
{5; 3,50}	5	3,50	0,004306377	{5; 3,50}	5	3,50	0,004250662
{5; 4,00}	5	4,00	0,004106508	{5; 4,00}	5	4,00	0,004083421
{5; 4,50}	5	4,50	0,003937926	{5; 4,50}	5	4,50	0,003941375
{5; 5,00}	5	5,00	0,003792996	{5; 5,00}	5	5,00	0,003818502
{5; 5,50}	5	5,50	0,003666492	{5; 5,50}	5	5,50	0,003710653
{5; 6,00}	5	6,00	0,003554691	{5; 6,00}	5	6,00	0,003614857
{5; 6,50}	5	6,50	0,003454856	{5; 6,50}	5	6,50	0,003528919
{5; 7,00}	5	7,00	0,003364926	{5; 7,00}	5	7,00	0,003451175
{5; 7,50}	5	7,50	0,003283307	{5; 7,50}	5	7,50	0,003380337
{5; 8,00}	5	8,00	0,003208752	{5; 8,00}	5	8,00	0,00331539
{5; 8,50}	5	8,50	0,00314026	{5; 8,50}	5	8,50	0,003255518
{5; 9,00}	5	9,00	0,003077024	{5; 9,00}	5	9,00	0,00320006
{5; 9,50}	5	9,50	0,003018381	{5; 9,50}	5	9,50	0,003148471
{5; 10,00}	5	10,00	0,002963779	{5; 10,00}	5	10,00	0,003100298
{5; 10,50}	5	10,50	0,002912759	{5; 10,50}	5	10,50	0,00305516
{5; 11,00}	5	11,00	0,002864931	{5; 11,00}	5	11,00	0,003012734
{5; 11,50}	5	11,50	0,002819964	{5; 11,50}	5	11,50	0,002972745
{5; 12,00}	5	12,00	0,002777572	{5; 12,00}	5	12,00	0,002934956
{5; 12,50}	5	12,50	0,002737509	{5; 12,50}	5	12,50	0,002899161
{5; 13,00}	5	13,00	0,002699563	{5; 13,00}	5	13,00	0,002865181
{5; 13,50}	5	13,50	0,002663545	{5; 13,50}	5	13,50	0,00283286
{5; 14,00}	5	14,00	0,002629292	{5; 14,00}	5	14,00	0,002802059
{5; 14,50}	5	14,50	0,002596659	{5; 14,50}	5	14,50	0,002772657
{5; 15,00}	5	15,00	0,002565517	{5; 15,00}	5	15,00	0,002744545
{5; 15,50}	5	15,50	0,002535752	{5; 15,50}	5	15,50	0,002717626

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{6; 0,01}	6	0,01	0,045256004	{6; 0,01}	6	0,01	0,030767823
{6; 0,03}	6	0,03	0,030610382	{6; 0,03}	6	0,03	0,022114347
{6; 0,05}	6	0,05	0,025521887	{6; 0,05}	6	0,05	0,018966465
{6; 0,07}	6	0,07	0,022641532	{6; 0,07}	6	0,07	0,017141953
{6; 0,10}	6	0,10	0,019942344	{6; 0,10}	6	0,10	0,015399151
{6; 0,11}	6	0,11	0,019277226	{6; 0,11}	6	0,11	0,014964221
{6; 0,12}	6	0,12	0,01868941	{6; 0,12}	6	0,12	0,014577897
{6; 0,13}	6	0,13	0,018164513	{6; 0,13}	6	0,13	0,014231327
{6; 0,14}	6	0,14	0,017691687	{6; 0,14}	6	0,14	0,013917803
{6; 0,15}	6	0,15	0,017262565	{6; 0,15}	6	0,15	0,013632131
{6; 0,16}	6	0,16	0,016870576	{6; 0,16}	6	0,16	0,013370212
{6; 0,17}	6	0,17	0,01651047	{6; 0,17}	6	0,17	0,013128763
{6; 0,18}	6	0,18	0,016177996	{6; 0,18}	6	0,18	0,012905114
{6; 0,19}	6	0,19	0,015869666	{6; 0,19}	6	0,19	0,012697068
{6; 0,20}	6	0,20	0,015582589	{6; 0,20}	6	0,20	0,012502796
{6; 0,25}	6	0,25	0,014392935	{6; 0,25}	6	0,25	0,011691655
{6; 0,30}	6	0,30	0,013488658	{6; 0,30}	6	0,30	0,011068127
{6; 0,35}	6	0,35	0,012768574	{6; 0,35}	6	0,35	0,010566956
{6; 0,40}	6	0,40	0,012175956	{6; 0,40}	6	0,40	0,010151204
{6; 0,45}	6	0,45	0,011676102	{6; 0,45}	6	0,45	0,009798082
{6; 0,50}	6	0,50	0,011246381	{6; 0,50}	6	0,50	0,009492626
{6; 0,55}	6	0,55	0,010871291	{6; 0,55}	6	0,55	0,009224519
{6; 0,60}	6	0,60	0,010539795	{6; 0,60}	6	0,60	0,008986374
{6; 0,65}	6	0,65	0,010243782	{6; 0,65}	6	0,65	0,008772735
{6; 0,70}	6	0,70	0,009977134	{6; 0,70}	6	0,70	0,008579467
{6; 0,75}	6	0,75	0,009735133	{6; 0,75}	6	0,75	0,008403367
{6; 0,80}	6	0,80	0,009514073	{6; 0,80}	6	0,80	0,008241911
{6; 0,85}	6	0,85	0,009310993	{6; 0,85}	6	0,85	0,008093073
{6; 0,90}	6	0,90	0,009123496	{6; 0,90}	6	0,90	0,007955207
{6; 0,95}	6	0,95	0,008949615	{6; 0,95}	6	0,95	0,007826959

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{6; 1,00}	6	1,00	0,00878772	{6; 1,00}	6	1,00	0,007707202
{6; 1,50}	6	1,50	0,007606858	{6; 1,50}	6	1,50	0,006822817
{6; 2,00}	6	2,00	0,006866566	{6; 2,00}	6	2,00	0,006257591
{6; 2,50}	6	2,50	0,006342338	{6; 2,50}	6	2,50	0,005851618
{6; 3,00}	6	3,00	0,005943862	{6; 3,00}	6	3,00	0,005539545
{6; 3,50}	6	3,50	0,005626553	{6; 3,50}	6	3,50	0,005288712
{6; 4,00}	6	4,00	0,005365412	{6; 4,00}	6	4,00	0,00508063
{6; 4,50}	6	4,50	0,005145148	{6; 4,50}	6	4,50	0,004903894
{6; 5,00}	6	5,00	0,004955789	{6; 5,00}	6	5,00	0,004751015
{6; 5,50}	6	5,50	0,004790503	{6; 5,50}	6	5,50	0,004616829
{6; 6,00}	6	6,00	0,004644427	{6; 6,00}	6	6,00	0,004497638
{6; 6,50}	6	6,50	0,004513987	{6; 6,50}	6	6,50	0,004390713
{6; 7,00}	6	7,00	0,004396487	{6; 7,00}	6	7,00	0,004293983
{6; 7,50}	6	7,50	0,004289848	{6; 7,50}	6	7,50	0,004205846
{6; 8,00}	6	8,00	0,004192436	{6; 8,00}	6	8,00	0,004125038
{6; 8,50}	6	8,50	0,004102948	{6; 8,50}	6	8,50	0,004050545
{6; 9,00}	6	9,00	0,004020326	{6; 9,00}	6	9,00	0,003981544
{6; 9,50}	6	9,50	0,003943705	{6; 9,50}	6	9,50	0,003917356
{6; 10,00}	6	10,00	0,003872364	{6; 10,00}	6	10,00	0,003857419
{6; 10,50}	6	10,50	0,003805703	{6; 10,50}	6	10,50	0,003801257
{6; 11,00}	6	11,00	0,003743213	{6; 11,00}	6	11,00	0,003748471
{6; 11,50}	6	11,50	0,00368446	{6; 11,50}	6	11,50	0,003698716
{6; 12,00}	6	12,00	0,003629072	{6; 12,00}	6	12,00	0,003651698
{6; 12,50}	6	12,50	0,003576728	{6; 12,50}	6	12,50	0,003607162
{6; 13,00}	6	13,00	0,003527149	{6; 13,00}	6	13,00	0,003564884
{6; 13,50}	6	13,50	0,00348009	{6; 13,50}	6	13,50	0,00352467
{6; 14,00}	6	14,00	0,003435336	{6; 14,00}	6	14,00	0,003486348
{6; 14,50}	6	14,50	0,003392699	{6; 14,50}	6	14,50	0,003449765
{6; 15,00}	6	15,00	0,00335201	{6; 15,00}	6	15,00	0,003414788
{6; 15,50}	6	15,50	0,00331312	{6; 15,50}	6	15,50	0,003381295

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{7; 0,01}	7	0,01	0,059129819	{7; 0,01}	7	0,01	0,066866712
{7; 0,03}	7	0,03	0,039994392	{7; 0,03}	7	0,03	0,042561577
{7; 0,05}	7	0,05	0,033345952	{7; 0,05}	7	0,05	0,034497967
{7; 0,07}	7	0,07	0,029582587	{7; 0,07}	7	0,07	0,030040396
{7; 0,10}	7	0,10	0,026055928	{7; 0,10}	7	0,10	0,025942389
{7; 0,11}	7	0,11	0,02518691	{7; 0,11}	7	0,11	0,024945332
{7; 0,12}	7	0,12	0,024418891	{7; 0,12}	7	0,12	0,024068589
{7; 0,13}	7	0,13	0,02373308	{7; 0,13}	7	0,13	0,023289301
{7; 0,14}	7	0,14	0,023115303	{7; 0,14}	7	0,14	0,022590306
{7; 0,15}	7	0,15	0,022554628	{7; 0,15}	7	0,15	0,021958428
{7; 0,16}	7	0,16	0,022042469	{7; 0,16}	7	0,16	0,021383354
{7; 0,17}	7	0,17	0,021571969	{7; 0,17}	7	0,17	0,020856881
{7; 0,18}	7	0,18	0,02113757	{7; 0,18}	7	0,18	0,020372387
{7; 0,19}	7	0,19	0,020734718	{7; 0,19}	7	0,19	0,019924457
{7; 0,20}	7	0,20	0,020359634	{7; 0,20}	7	0,20	0,019508615
{7; 0,25}	7	0,25	0,018805275	{7; 0,25}	7	0,25	0,017798239
{7; 0,30}	7	0,30	0,017623781	{7; 0,30}	7	0,30	0,016512685
{7; 0,35}	7	0,35	0,016682946	{7; 0,35}	7	0,35	0,015498483
{7; 0,40}	7	0,40	0,015908653	{7; 0,40}	7	0,40	0,014670432
{7; 0,45}	7	0,45	0,015255562	{7; 0,45}	7	0,45	0,01397684
{7; 0,50}	7	0,50	0,014694105	{7; 0,50}	7	0,50	0,013384233
{7; 0,55}	7	0,55	0,014204026	{7; 0,55}	7	0,55	0,012869831
{7; 0,60}	7	0,60	0,013770906	{7; 0,60}	7	0,60	0,0124175
{7; 0,65}	7	0,65	0,013384147	{7; 0,65}	7	0,65	0,012015449
{7; 0,70}	7	0,70	0,013035754	{7; 0,70}	7	0,70	0,011654822
{7; 0,75}	7	0,75	0,012719565	{7; 0,75}	7	0,75	0,011328823
{7; 0,80}	7	0,80	0,012430735	{7; 0,80}	7	0,80	0,01103213
{7; 0,85}	7	0,85	0,012165399	{7; 0,85}	7	0,85	0,010760511
{7; 0,90}	7	0,90	0,011920422	{7; 0,90}	7	0,90	0,01051055
{7; 0,95}	7	0,95	0,011693236	{7; 0,95}	7	0,95	0,010279453

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{7; 1,00}	7	1,00	0,011481709	{7; 1,00}	7	1,00	0,010064912
{7; 1,50}	7	1,50	0,009938839	{7; 1,50}	7	1,50	0,008519248
{7; 2,00}	7	2,00	0,008971601	{7; 2,00}	7	2,00	0,00756879
{7; 2,50}	7	2,50	0,008286663	{7; 2,50}	7	2,50	0,006905212
{7; 3,00}	7	3,00	0,007766031	{7; 3,00}	7	3,00	0,006406454
{7; 3,50}	7	3,50	0,007351445	{7; 3,50}	7	3,50	0,006012972
{7; 4,00}	7	4,00	0,007010248	{7; 4,00}	7	4,00	0,005691712
{7; 4,50}	7	4,50	0,00672246	{7; 4,50}	7	4,50	0,005422618
{7; 5,00}	7	5,00	0,00647505	{7; 5,00}	7	5,00	0,005192703
{7; 5,50}	7	5,50	0,006259094	{7; 5,50}	7	5,50	0,004993129
{7; 6,00}	7	6,00	0,006068237	{7; 6,00}	7	6,00	0,004817638
{7; 6,50}	7	6,50	0,005897809	{7; 6,50}	7	6,50	0,004661654
{7; 7,00}	7	7,00	0,005744287	{7; 7,00}	7	7,00	0,004521741
{7; 7,50}	7	7,50	0,005604956	{7; 7,50}	7	7,50	0,004395262
{7; 8,00}	7	8,00	0,005477682	{7; 8,00}	7	8,00	0,004280154
{7; 8,50}	7	8,50	0,00536076	{7; 8,50}	7	8,50	0,004174773
{7; 9,00}	7	9,00	0,005252809	{7; 9,00}	7	9,00	0,004077796
{7; 9,50}	7	9,50	0,005152698	{7; 9,50}	7	9,50	0,003988137
{7; 10,00}	7	10,00	0,005059488	{7; 10,00}	7	10,00	0,0039049
{7; 10,50}	7	10,50	0,004972391	{7; 10,50}	7	10,50	0,003827339
{7; 11,00}	7	11,00	0,004890744	{7; 11,00}	7	11,00	0,003754821
{7; 11,50}	7	11,50	0,004813979	{7; 11,50}	7	11,50	0,003686812
{7; 12,00}	7	12,00	0,004741611	{7; 12,00}	7	12,00	0,003622852
{7; 12,50}	7	12,50	0,004673221	{7; 12,50}	7	12,50	0,003562547
{7; 13,00}	7	13,00	0,004608442	{7; 13,00}	7	13,00	0,003505552
{7; 13,50}	7	13,50	0,004546956	{7; 13,50}	7	13,50	0,00345157
{7; 14,00}	7	14,00	0,004488483	{7; 14,00}	7	14,00	0,003400338
{7; 14,50}	7	14,50	0,004432775	{7; 14,50}	7	14,50	0,003351625
{7; 15,00}	7	15,00	0,004379612	{7; 15,00}	7	15,00	0,003305227
{7; 15,50}	7	15,50	0,0043288	{7; 15,50}	7	15,50	0,003260961

TABLAS Y GRÁFICOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO I

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{8; 0,01}	8	0,01	0,077256832	{8; 0,01}	8	0,01	0,092416105
{8; 0,03}	8	0,03	0,052255191	{8; 0,03}	8	0,03	0,058824115
{8; 0,05}	8	0,05	0,043568586	{8; 0,05}	8	0,05	0,047679445
{8; 0,07}	8	0,07	0,038651513	{8; 0,07}	8	0,07	0,041518662
{8; 0,10}	8	0,10	0,034043711	{8; 0,10}	8	0,10	0,035854829
{8; 0,11}	8	0,11	0,032908284	{8; 0,11}	8	0,11	0,034476803
{8; 0,12}	8	0,12	0,031904819	{8; 0,12}	8	0,12	0,033265062
{8; 0,13}	8	0,13	0,031008764	{8; 0,13}	8	0,13	0,032188012
{8; 0,14}	8	0,14	0,030201598	{8; 0,14}	8	0,14	0,031221935
{8; 0,15}	8	0,15	0,029469042	{8; 0,15}	8	0,15	0,030348619
{8; 0,16}	8	0,16	0,028799874	{8; 0,16}	8	0,16	0,029553813
{8; 0,17}	8	0,17	0,028185135	{8; 0,17}	8	0,17	0,028826178
{8; 0,18}	8	0,18	0,027617567	{8; 0,18}	8	0,18	0,028156561
{8; 0,19}	8	0,19	0,027091215	{8; 0,19}	8	0,19	0,027537479
{8; 0,20}	8	0,20	0,026601144	{8; 0,20}	8	0,20	0,026962746
{8; 0,25}	8	0,25	0,024570277	{8; 0,25}	8	0,25	0,024598846
{8; 0,30}	8	0,30	0,02302658	{8; 0,30}	8	0,30	0,022822089
{8; 0,35}	8	0,35	0,021797319	{8; 0,35}	8	0,35	0,021420366
{8; 0,40}	8	0,40	0,020785656	{8; 0,40}	8	0,40	0,020275921
{8; 0,45}	8	0,45	0,019932353	{8; 0,45}	8	0,45	0,019317311
{8; 0,50}	8	0,50	0,019198773	{8; 0,50}	8	0,50	0,018498273
{8; 0,55}	8	0,55	0,018558455	{8; 0,55}	8	0,55	0,01778732
{8; 0,60}	8	0,60	0,017992556	{8; 0,60}	8	0,60	0,017162157
{8; 0,65}	8	0,65	0,01748723	{8; 0,65}	8	0,65	0,016606484
{8; 0,70}	8	0,70	0,017032033	{8; 0,70}	8	0,70	0,016108064
{8; 0,75}	8	0,75	0,016618912	{8; 0,75}	8	0,75	0,015657502
{8; 0,80}	8	0,80	0,016241539	{8; 0,80}	8	0,80	0,015247444
{8; 0,85}	8	0,85	0,01589486	{8; 0,85}	8	0,85	0,014872042
{8; 0,90}	8	0,90	0,015574782	{8; 0,90}	8	0,90	0,014526572
{8; 0,95}	8	0,95	0,015277949	{8; 0,95}	8	0,95	0,014207174

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{8; 1,00}	8	1,00	0,015001576	{8; 1,00}	8	1,00	0,013910658
{8; 1,50}	8	1,50	0,012985719	{8; 1,50}	8	1,50	0,011774404
{8; 2,00}	8	2,00	0,011721962	{8; 2,00}	8	2,00	0,010460781
{8; 2,50}	8	2,50	0,010827048	{8; 2,50}	8	2,50	0,009543655
{8; 3,00}	8	3,00	0,010146808	{8; 3,00}	8	3,00	0,008854324
{8; 3,50}	8	3,50	0,009605126	{8; 3,50}	8	3,50	0,008310495
{8; 4,00}	8	4,00	0,009159331	{8; 4,00}	8	4,00	0,007866483
{8; 4,50}	8	4,50	0,008783317	{8; 4,50}	8	4,50	0,007494569
{8; 5,00}	8	5,00	0,008460061	{8; 5,00}	8	5,00	0,007176806
{8; 5,50}	8	5,50	0,0081779	{8; 5,50}	8	5,50	0,006900976
{8; 6,00}	8	6,00	0,007928533	{8; 6,00}	8	6,00	0,00665843
{8; 6,50}	8	6,50	0,007705859	{8; 6,50}	8	6,50	0,006442845
{8; 7,00}	8	7,00	0,007505273	{8; 7,00}	8	7,00	0,006249472
{8; 7,50}	8	7,50	0,007323229	{8; 7,50}	8	7,50	0,006074667
{8; 8,00}	8	8,00	0,007156937	{8; 8,00}	8	8,00	0,005915576
{8; 8,50}	8	8,50	0,00700417	{8; 8,50}	8	8,50	0,005769931
{8; 9,00}	8	9,00	0,006863126	{8; 9,00}	8	9,00	0,005635898
{8; 9,50}	8	9,50	0,006732325	{8; 9,50}	8	9,50	0,005511981
{8; 10,00}	8	10,00	0,006610539	{8; 10,00}	8	10,00	0,005396941
{8; 10,50}	8	10,50	0,006496742	{8; 10,50}	8	10,50	0,005289744
{8; 11,00}	8	11,00	0,006390064	{8; 11,00}	8	11,00	0,005189518
{8; 11,50}	8	11,50	0,006289767	{8; 11,50}	8	11,50	0,005095522
{8; 12,00}	8	12,00	0,006195214	{8; 12,00}	8	12,00	0,005007124
{8; 12,50}	8	12,50	0,006105857	{8; 12,50}	8	12,50	0,004923776
{8; 13,00}	8	13,00	0,006021219	{8; 13,00}	8	13,00	0,004845004
{8; 13,50}	8	13,50	0,005940884	{8; 13,50}	8	13,50	0,004770396
{8; 14,00}	8	14,00	0,005864486	{8; 14,00}	8	14,00	0,004699588
{8; 14,50}	8	14,50	0,0057917	{8; 14,50}	8	14,50	0,004632262
{8; 15,00}	8	15,00	0,005722239	{8; 15,00}	8	15,00	0,004568135
{8; 15,50}	8	15,50	0,005655849	{8; 15,50}	8	15,50	0,004506955

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{9; 0,01}	9	0,01	0,100940915	{9; 0,01}	9	0,01	0,127727777
{9; 0,03}	9	0,03	0,068274697	{9; 0,03}	9	0,03	0,081300477
{9; 0,05}	9	0,05	0,056925102	{9; 0,05}	9	0,05	0,065897492
{9; 0,07}	9	0,07	0,050500636	{9; 0,07}	9	0,07	0,057382708
{9; 0,10}	9	0,10	0,044480252	{9; 0,10}	9	0,10	0,049554757
{9; 0,11}	9	0,11	0,042996745	{9; 0,11}	9	0,11	0,047650195
{9; 0,12}	9	0,12	0,041685655	{9; 0,12}	9	0,12	0,045975454
{9; 0,13}	9	0,13	0,040514903	{9; 0,13}	9	0,13	0,044486687
{9; 0,14}	9	0,14	0,03946029	{9; 0,14}	9	0,14	0,04315166
{9; 0,15}	9	0,15	0,038503159	{9; 0,15}	9	0,15	0,041944655
{9; 0,16}	9	0,16	0,037628849	{9; 0,16}	9	0,16	0,040846158
{9; 0,17}	9	0,17	0,036825654	{9; 0,17}	9	0,17	0,039840498
{9; 0,18}	9	0,18	0,03608409	{9; 0,18}	9	0,18	0,038915024
{9; 0,19}	9	0,19	0,035396379	{9; 0,19}	9	0,19	0,038059394
{9; 0,20}	9	0,20	0,03475607	{9; 0,20}	9	0,20	0,03726506
{9; 0,25}	9	0,25	0,032102613	{9; 0,25}	9	0,25	0,033997926
{9; 0,30}	9	0,30	0,030085677	{9; 0,30}	9	0,30	0,031542281
{9; 0,35}	9	0,35	0,02847957	{9; 0,35}	9	0,35	0,029604967
{9; 0,40}	9	0,40	0,027157769	{9; 0,40}	9	0,40	0,028023236
{9; 0,45}	9	0,45	0,026042874	{9; 0,45}	9	0,45	0,026698347
{9; 0,50}	9	0,50	0,025084406	{9; 0,50}	9	0,50	0,025566359
{9; 0,55}	9	0,55	0,02424779	{9; 0,55}	9	0,55	0,024583755
{9; 0,60}	9	0,60	0,023508407	{9; 0,60}	9	0,60	0,02371972
{9; 0,65}	9	0,65	0,022848168	{9; 0,65}	9	0,65	0,022951728
{9; 0,70}	9	0,70	0,022253424	{9; 0,70}	9	0,70	0,022262864
{9; 0,75}	9	0,75	0,021713655	{9; 0,75}	9	0,75	0,021640145
{9; 0,80}	9	0,80	0,021220593	{9; 0,80}	9	0,80	0,021073407
{9; 0,85}	9	0,85	0,020767635	{9; 0,85}	9	0,85	0,020554565
{9; 0,90}	9	0,90	0,020349434	{9; 0,90}	9	0,90	0,020077093
{9; 0,95}	9	0,95	0,019961603	{9; 0,95}	9	0,95	0,019635656

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{9; 1,00}	9	1,00	0,019600504	{9; 1,00}	9	1,00	0,019225841
{9; 1,50}	9	1,50	0,016966666	{9; 1,50}	9	1,50	0,016273337
{9; 2,00}	9	2,00	0,015315482	{9; 2,00}	9	2,00	0,014457787
{9; 2,50}	9	2,50	0,014146219	{9; 2,50}	9	2,50	0,013190232
{9; 3,00}	9	3,00	0,013257443	{9; 3,00}	9	3,00	0,012237511
{9; 3,50}	9	3,50	0,012549702	{9; 3,50}	9	3,50	0,011485888
{9; 4,00}	9	4,00	0,011967242	{9; 4,00}	9	4,00	0,010872221
{9; 4,50}	9	4,50	0,011475957	{9; 4,50}	9	4,50	0,010358202
{9; 5,00}	9	5,00	0,011053602	{9; 5,00}	9	5,00	0,009919023
{9; 5,50}	9	5,50	0,010684942	{9; 5,50}	9	5,50	0,0095378
{9; 6,00}	9	6,00	0,010359128	{9; 6,00}	9	6,00	0,009202579
{9; 6,50}	9	6,50	0,010068189	{9; 6,50}	9	6,50	0,00890462
{9; 7,00}	9	7,00	0,009806112	{9; 7,00}	9	7,00	0,00863736
{9; 7,50}	9	7,50	0,009568259	{9; 7,50}	9	7,50	0,008395763
{9; 8,00}	9	8,00	0,009350988	{9; 8,00}	9	8,00	0,008175885
{9; 8,50}	9	8,50	0,00915139	{9; 8,50}	9	8,50	0,007974589
{9; 9,00}	9	9,00	0,008967107	{9; 9,00}	9	9,00	0,007789343
{9; 9,50}	9	9,50	0,008796206	{9; 9,50}	9	9,50	0,007618078
{9; 10,00}	9	10,00	0,008637086	{9; 10,00}	9	10,00	0,007459082
{9; 10,50}	9	10,50	0,008488403	{9; 10,50}	9	10,50	0,007310925
{9; 11,00}	9	11,00	0,008349022	{9; 11,00}	9	11,00	0,007172403
{9; 11,50}	9	11,50	0,008217976	{9; 11,50}	9	11,50	0,007042493
{9; 12,00}	9	12,00	0,008094437	{9; 12,00}	9	12,00	0,006920318
{9; 12,50}	9	12,50	0,007977686	{9; 12,50}	9	12,50	0,006805123
{9; 13,00}	9	13,00	0,007867102	{9; 13,00}	9	13,00	0,006696253
{9; 13,50}	9	13,50	0,00776214	{9; 13,50}	9	13,50	0,006593137
{9; 14,00}	9	14,00	0,00766232	{9; 14,00}	9	14,00	0,006495274
{9; 14,50}	9	14,50	0,00756722	{9; 14,50}	9	14,50	0,006402224
{9; 15,00}	9	15,00	0,007476466	{9; 15,00}	9	15,00	0,006313594
{9; 15,50}	9	15,50	0,007389723	{9; 15,50}	9	15,50	0,006229038

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{10; 0,01}	10	0,01	0,131885662	{10; 0,01}	10	0,01	0,17653184
{10; 0,03}	10	0,03	0,089205191	{10; 0,03}	10	0,03	0,112364931
{10; 0,05}	10	0,05	0,07437623	{10; 0,05}	10	0,05	0,091076553
{10; 0,07}	10	0,07	0,065982261	{10; 0,07}	10	0,07	0,079308317
{10; 0,10}	10	0,10	0,05811625	{10; 0,10}	10	0,10	0,068489351
{10; 0,11}	10	0,11	0,056177955	{10; 0,11}	10	0,11	0,065857066
{10; 0,12}	10	0,12	0,054464933	{10; 0,12}	10	0,12	0,063542416
{10; 0,13}	10	0,13	0,052935271	{10; 0,13}	10	0,13	0,061485052
{10; 0,14}	10	0,14	0,051557353	{10; 0,14}	10	0,14	0,059639666
{10; 0,15}	10	0,15	0,050306801	{10; 0,15}	10	0,15	0,057971471
{10; 0,16}	10	0,16	0,049164461	{10; 0,16}	10	0,16	0,056453245
{10; 0,17}	10	0,17	0,048115036	{10; 0,17}	10	0,17	0,055063328
{10; 0,18}	10	0,18	0,047146135	{10; 0,18}	10	0,18	0,053784235
{10; 0,19}	10	0,19	0,046247597	{10; 0,19}	10	0,19	0,052601674
{10; 0,20}	10	0,20	0,045410994	{10; 0,20}	10	0,20	0,051503829
{10; 0,25}	10	0,25	0,041944086	{10; 0,25}	10	0,25	0,046988342
{10; 0,30}	10	0,30	0,039308831	{10; 0,30}	10	0,30	0,043594408
{10; 0,35}	10	0,35	0,037210351	{10; 0,35}	10	0,35	0,040916857
{10; 0,40}	10	0,40	0,035483335	{10; 0,40}	10	0,40	0,038730757
{10; 0,45}	10	0,45	0,034026654	{10; 0,45}	10	0,45	0,036899634
{10; 0,50}	10	0,50	0,032774355	{10; 0,50}	10	0,50	0,035335121
{10; 0,55}	10	0,55	0,031681264	{10; 0,55}	10	0,55	0,033977069
{10; 0,60}	10	0,60	0,030715215	{10; 0,60}	10	0,60	0,032782891
{10; 0,65}	10	0,65	0,02985257	{10; 0,65}	10	0,65	0,031721453
{10; 0,70}	10	0,70	0,0290755	{10; 0,70}	10	0,70	0,030769379
{10; 0,75}	10	0,75	0,028370258	{10; 0,75}	10	0,75	0,029908722
{10; 0,80}	10	0,80	0,027726041	{10; 0,80}	10	0,80	0,029125437
{10; 0,85}	10	0,85	0,027134223	{10; 0,85}	10	0,85	0,028408348
{10; 0,90}	10	0,90	0,026587817	{10; 0,90}	10	0,90	0,027748437
{10; 0,95}	10	0,95	0,026081091	{10; 0,95}	10	0,95	0,027138329

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{10; 1,00}	10	1,00	0,025609293	{10; 1,00}	10	1,00	0,026571927
{10; 1,50}	10	1,50	0,02216801	{10; 1,50}	10	1,50	0,022491288
{10; 2,00}	10	2,00	0,020010641	{10; 2,00}	10	2,00	0,019982026
{10; 2,50}	10	2,50	0,018482926	{10; 2,50}	10	2,50	0,018230145
{10; 3,00}	10	3,00	0,017321685	{10; 3,00}	10	3,00	0,016913395
{10; 3,50}	10	3,50	0,016396976	{10; 3,50}	10	3,50	0,015874581
{10; 4,00}	10	4,00	0,015635956	{10; 4,00}	10	4,00	0,015026436
{10; 4,50}	10	4,50	0,01499406	{10; 4,50}	10	4,50	0,014316012
{10; 5,00}	10	5,00	0,014442227	{10; 5,00}	10	5,00	0,013709025
{10; 5,50}	10	5,50	0,013960549	{10; 5,50}	10	5,50	0,01318214
{10; 6,00}	10	6,00	0,013534853	{10; 6,00}	10	6,00	0,012718833
{10; 6,50}	10	6,50	0,013154723	{10; 6,50}	10	6,50	0,012307025
{10; 7,00}	10	7,00	0,012812303	{10; 7,00}	10	7,00	0,011937647
{10; 7,50}	10	7,50	0,012501533	{10; 7,50}	10	7,50	0,011603736
{10; 8,00}	10	8,00	0,012217655	{10; 8,00}	10	8,00	0,011299844
{10; 8,50}	10	8,50	0,011956867	{10; 8,50}	10	8,50	0,011021634
{10; 9,00}	10	9,00	0,011716089	{10; 9,00}	10	9,00	0,010765607
{10; 9,50}	10	9,50	0,011492797	{10; 9,50}	10	9,50	0,010528902
{10; 10,00}	10	10,00	0,011284897	{10; 10,00}	10	10,00	0,010309155
{10; 10,50}	10	10,50	0,011090632	{10; 10,50}	10	10,50	0,010104388
{10; 11,00}	10	11,00	0,010908522	{10; 11,00}	10	11,00	0,009912938
{10; 11,50}	10	11,50	0,010737303	{10; 11,50}	10	11,50	0,009733389
{10; 12,00}	10	12,00	0,010575891	{10; 12,00}	10	12,00	0,009564532
{10; 12,50}	10	12,50	0,01042335	{10; 12,50}	10	12,50	0,009405322
{10; 13,00}	10	13,00	0,010278865	{10; 13,00}	10	13,00	0,009254853
{10; 13,50}	10	13,50	0,010141724	{10; 13,50}	10	13,50	0,009112338
{10; 14,00}	10	14,00	0,010011303	{10; 14,00}	10	14,00	0,008977082
{10; 14,50}	10	14,50	0,00988705	{10; 14,50}	10	14,50	0,008848477
{10; 15,00}	10	15,00	0,009768474	{10; 15,00}	10	15,00	0,008725982
{10; 15,50}	10	15,50	0,009655139	{10; 15,50}	10	15,50	0,008609118

TABLAS Y GRÁFICOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO I

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{11; 0,01}	11	0,01	0,172316921	{11; 0,01}	11	0,01	0,243983661
{11; 0,03}	11	0,03	0,116552199	{11; 0,03}	11	0,03	0,155298937
{11; 0,05}	11	0,05	0,097177227	{11; 0,05}	11	0,05	0,12587639
{11; 0,07}	11	0,07	0,086209978	{11; 0,07}	11	0,07	0,109611578
{11; 0,10}	11	0,10	0,07593254	{11; 0,10}	11	0,10	0,094658745
{11; 0,11}	11	0,11	0,073400036	{11; 0,11}	11	0,11	0,091020679
{11; 0,12}	11	0,12	0,071161865	{11; 0,12}	11	0,12	0,087821614
{11; 0,13}	11	0,13	0,069163265	{11; 0,13}	11	0,13	0,084978143
{11; 0,14}	11	0,14	0,067362929	{11; 0,14}	11	0,14	0,082427646
{11; 0,15}	11	0,15	0,065729003	{11; 0,15}	11	0,15	0,080122044
{11; 0,16}	11	0,16	0,064236464	{11; 0,16}	11	0,16	0,078023712
{11; 0,17}	11	0,17	0,062865324	{11; 0,17}	11	0,17	0,076102714
{11; 0,18}	11	0,18	0,061599394	{11; 0,18}	11	0,18	0,074334888
{11; 0,19}	11	0,19	0,060425398	{11; 0,19}	11	0,19	0,072700477
{11; 0,20}	11	0,20	0,059332323	{11; 0,20}	11	0,20	0,071183151
{11; 0,25}	11	0,25	0,054802589	{11; 0,25}	11	0,25	0,064942322
{11; 0,30}	11	0,30	0,051359463	{11; 0,30}	11	0,30	0,060251586
{11; 0,35}	11	0,35	0,048617667	{11; 0,35}	11	0,35	0,056550958
{11; 0,40}	11	0,40	0,046361211	{11; 0,40}	11	0,40	0,05352956
{11; 0,45}	11	0,45	0,044457966	{11; 0,45}	11	0,45	0,050998777
{11; 0,50}	11	0,50	0,042821759	{11; 0,50}	11	0,50	0,048836471
{11; 0,55}	11	0,55	0,041393566	{11; 0,55}	11	0,55	0,046959515
{11; 0,60}	11	0,60	0,040131362	{11; 0,60}	11	0,60	0,045309049
{11; 0,65}	11	0,65	0,039004262	{11; 0,65}	11	0,65	0,043842042
{11; 0,70}	11	0,70	0,037988971	{11; 0,70}	11	0,70	0,042526186
{11; 0,75}	11	0,75	0,037067528	{11; 0,75}	11	0,75	0,041336676
{11; 0,80}	11	0,80	0,036225818	{11; 0,80}	11	0,80	0,040254102
{11; 0,85}	11	0,85	0,035452571	{11; 0,85}	11	0,85	0,039263018
{11; 0,90}	11	0,90	0,034738656	{11; 0,90}	11	0,90	0,038350959
{11; 0,95}	11	0,95	0,034076587	{11; 0,95}	11	0,95	0,037507731

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{11; 1,00}	11	1,00	0,033460153	{11; 1,00}	11	1,00	0,03672491
{11; 1,50}	11	1,50	0,028963901	{11; 1,50}	11	1,50	0,031085082
{11; 2,00}	11	2,00	0,026145163	{11; 2,00}	11	2,00	0,027617045
{11; 2,50}	11	2,50	0,024149107	{11; 2,50}	11	2,50	0,02519578
{11; 3,00}	11	3,00	0,022631872	{11; 3,00}	11	3,00	0,023375908
{11; 3,50}	11	3,50	0,021423682	{11; 3,50}	11	3,50	0,021940169
{11; 4,00}	11	4,00	0,020429361	{11; 4,00}	11	4,00	0,020767952
{11; 4,50}	11	4,50	0,019590684	{11; 4,50}	11	4,50	0,01978608
{11; 5,00}	11	5,00	0,018869679	{11; 5,00}	11	5,00	0,018947167
{11; 5,50}	11	5,50	0,018240337	{11; 5,50}	11	5,50	0,018218961
{11; 6,00}	11	6,00	0,017684138	{11; 6,00}	11	6,00	0,017578627
{11; 6,50}	11	6,50	0,017187474	{11; 6,50}	11	6,50	0,01700947
{11; 7,00}	11	7,00	0,01674008	{11; 7,00}	11	7,00	0,016498955
{11; 7,50}	11	7,50	0,01633404	{11; 7,50}	11	7,50	0,016037459
{11; 8,00}	11	8,00	0,015963136	{11; 8,00}	11	8,00	0,015617451
{11; 8,50}	11	8,50	0,015622399	{11; 8,50}	11	8,50	0,015232938
{11; 9,00}	11	9,00	0,015307808	{11; 9,00}	11	9,00	0,014879085
{11; 9,50}	11	9,50	0,015016063	{11; 9,50}	11	9,50	0,014551937
{11; 10,00}	11	10,00	0,014744428	{11; 10,00}	11	10,00	0,014248224
{11; 10,50}	11	10,50	0,01449061	{11; 10,50}	11	10,50	0,013965217
{11; 11,00}	11	11,00	0,014252671	{11; 11,00}	11	11,00	0,013700615
{11; 11,50}	11	11,50	0,014028963	{11; 11,50}	11	11,50	0,013452463
{11; 12,00}	11	12,00	0,013818068	{11; 12,00}	11	12,00	0,013219086
{11; 12,50}	11	12,50	0,013618763	{11; 12,50}	11	12,50	0,012999042
{11; 13,00}	11	13,00	0,013429984	{11; 13,00}	11	13,00	0,012791081
{11; 13,50}	11	13,50	0,013250801	{11; 13,50}	11	13,50	0,01259411
{11; 14,00}	11	14,00	0,013080398	{11; 14,00}	11	14,00	0,012407175
{11; 14,50}	11	14,50	0,012918053	{11; 14,50}	11	14,50	0,01222943
{11; 15,00}	11	15,00	0,012763126	{11; 15,00}	11	15,00	0,012060131
{11; 15,50}	11	15,50	0,012615047	{11; 15,50}	11	15,50	0,011898613

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{12; 0,01}	12	0,01	0,225142908	{12; 0,01}	12	0,01	0,337208441
{12; 0,03}	12	0,03	0,152282787	{12; 0,03}	12	0,03	0,214637785
{12; 0,05}	12	0,05	0,126968166	{12; 0,05}	12	0,05	0,173973048
{12; 0,07}	12	0,07	0,112638765	{12; 0,07}	12	0,07	0,151493543
{12; 0,10}	12	0,10	0,099210645	{12; 0,10}	12	0,10	0,130827318
{12; 0,11}	12	0,11	0,095901768	{12; 0,11}	12	0,11	0,125799167
{12; 0,12}	12	0,12	0,092977458	{12; 0,12}	12	0,12	0,121377757
{12; 0,13}	12	0,13	0,090366161	{12; 0,13}	12	0,13	0,117447812
{12; 0,14}	12	0,14	0,088013908	{12; 0,14}	12	0,14	0,113922784
{12; 0,15}	12	0,15	0,085879082	{12; 0,15}	12	0,15	0,110736224
{12; 0,16}	12	0,16	0,083928985	{12; 0,16}	12	0,16	0,107836132
{12; 0,17}	12	0,17	0,082137504	{12; 0,17}	12	0,17	0,105181132
{12; 0,18}	12	0,18	0,080483488	{12; 0,18}	12	0,18	0,102737829
{12; 0,19}	12	0,19	0,078949587	{12; 0,19}	12	0,19	0,10047892
{12; 0,20}	12	0,20	0,077521416	{12; 0,20}	12	0,20	0,098381832
{12; 0,25}	12	0,25	0,071603034	{12; 0,25}	12	0,25	0,089756417
{12; 0,30}	12	0,30	0,067104372	{12; 0,30}	12	0,30	0,083273377
{12; 0,35}	12	0,35	0,063522043	{12; 0,35}	12	0,35	0,07815876
{12; 0,40}	12	0,40	0,060573842	{12; 0,40}	12	0,40	0,073982903
{12; 0,45}	12	0,45	0,058087133	{12; 0,45}	12	0,45	0,070485121
{12; 0,50}	12	0,50	0,055949324	{12; 0,50}	12	0,50	0,067496612
{12; 0,55}	12	0,55	0,054083301	{12; 0,55}	12	0,55	0,064902481
{12; 0,60}	12	0,60	0,052434151	{12; 0,60}	12	0,60	0,062621381
{12; 0,65}	12	0,65	0,050961524	{12; 0,65}	12	0,65	0,060593839
{12; 0,70}	12	0,70	0,049634983	{12; 0,70}	12	0,70	0,058775201
{12; 0,75}	12	0,75	0,048431059	{12; 0,75}	12	0,75	0,057131187
{12; 0,80}	12	0,80	0,047331312	{12; 0,80}	12	0,80	0,055634967
{12; 0,85}	12	0,85	0,046321016	{12; 0,85}	12	0,85	0,054265196
{12; 0,90}	12	0,90	0,045388242	{12; 0,90}	12	0,90	0,053004644
{12; 0,95}	12	0,95	0,044523207	{12; 0,95}	12	0,95	0,051839224

Valores estimados del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ )

Valor	K	R	$\lambda$	Valor	K	R	$\lambda$
{12; 1,00}	12	1,00	0,043717797	{12; 1,00}	12	1,00	0,050757291
{12; 1,50}	12	1,50	0,03784316	{12; 1,50}	12	1,50	0,042962517
{12; 2,00}	12	2,00	0,034160302	{12; 2,00}	12	2,00	0,038169362
{12; 2,50}	12	2,50	0,031552329	{12; 2,50}	12	2,50	0,034822946
{12; 3,00}	12	3,00	0,029569965	{12; 3,00}	12	3,00	0,03230771
{12; 3,50}	12	3,50	0,027991389	{12; 3,50}	12	3,50	0,030323383
{12; 4,00}	12	4,00	0,026692246	{12; 4,00}	12	4,00	0,02870327
{12; 4,50}	12	4,50	0,025596462	{12; 4,50}	12	4,50	0,027346229
{12; 5,00}	12	5,00	0,024654423	{12; 5,00}	12	5,00	0,026186772
{12; 5,50}	12	5,50	0,023832148	{12; 5,50}	12	5,50	0,025180323
{12; 6,00}	12	6,00	0,02310544	{12; 6,00}	12	6,00	0,024295321
{12; 6,50}	12	6,50	0,022456518	{12; 6,50}	12	6,50	0,023508692
{12; 7,00}	12	7,00	0,021871969	{12; 7,00}	12	7,00	0,022803112
{12; 7,50}	12	7,50	0,021341452	{12; 7,50}	12	7,50	0,022165281
{12; 8,00}	12	8,00	0,020856842	{12; 8,00}	12	8,00	0,02158479
{12; 8,50}	12	8,50	0,020411648	{12; 8,50}	12	8,50	0,021053358
{12; 9,00}	12	9,00	0,020000616	{12; 9,00}	12	9,00	0,020564299
{12; 9,50}	12	9,50	0,019619432	{12; 9,50}	12	9,50	0,02011215
{12; 10,00}	12	10,00	0,019264524	{12; 10,00}	12	10,00	0,01969239
{12; 10,50}	12	10,50	0,018932894	{12; 10,50}	12	10,50	0,019301248
{12; 11,00}	12	11,00	0,018622013	{12; 11,00}	12	11,00	0,018935543
{12; 11,50}	12	11,50	0,018329723	{12; 11,50}	12	11,50	0,018592573
{12; 12,00}	12	12,00	0,018054176	{12; 12,00}	12	12,00	0,018270024
{12; 12,50}	12	12,50	0,017793771	{12; 12,50}	12	12,50	0,017965903
{12; 13,00}	12	13,00	0,017547119	{12; 13,00}	12	13,00	0,01767848
{12; 13,50}	12	13,50	0,017313006	{12; 13,50}	12	13,50	0,017406249
{12; 14,00}	12	14,00	0,017090364	{12; 14,00}	12	14,00	0,017147886
{12; 14,50}	12	14,50	0,016878249	{12; 14,50}	12	14,50	0,016902226
{12; 15,00}	12	15,00	0,016675827	{12; 15,00}	12	15,00	0,016668239
{12; 15,50}	12	15,50	0,016482353	{12; 15,50}	12	15,50	0,016445006



***7. Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión***

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

**Valor 1**  $y=0,0026 * x^{-0,2430}$

R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
0,01	0,009385248	0,007961105	0,001424
0,03	0,006480451	0,006095831	0,000385
0,05	0,005553429	0,005384230	0,000169
0,07	0,005040232	0,004961517	0,000079
0,10	0,004563123	0,004549601	0,000014
0,11	0,004445682	0,004444542	0,000000
0,12	0,004341820	0,004352435	-0,000011
0,13	0,004248974	0,004268597	-0,000020
0,14	0,004165223	0,004192415	-0,000027
0,15	0,004089090	0,004122714	-0,000034
0,16	0,004019421	0,004058562	-0,000039
0,17	0,003955298	0,003999210	-0,000044
0,18	0,003895976	0,003944047	-0,000048
0,19	0,003840850	0,003892568	-0,000052
0,20	0,003789416	0,003844351	-0,000055
0,25	0,003574962	0,003641446	-0,000066
0,30	0,003410223	0,003483637	-0,000073
0,35	0,003277726	0,003355558	-0,000078
0,40	0,003167671	0,003248424	-0,000081
0,45	0,003074051	0,003156768	-0,000083
0,50	0,002992939	0,003076973	-0,000084
0,55	0,002921631	0,003006528	-0,000085
0,60	0,002858197	0,002943626	-0,000085
0,65	0,002801210	0,002886924	-0,000086
0,70	0,002749592	0,002835401	-0,000086
0,75	0,002702504	0,002788261	-0,000086
0,80	0,002659287	0,002744874	-0,000086
0,85	0,002619411	0,002704734	-0,000085
0,90	0,002582444	0,002667426	-0,000085
0,95	0,002548033	0,002632610	-0,000085
1,00	0,002515881	0,002600000	-0,000084
1,50	0,002278103	0,002356043	-0,000078

**Valor 2**  $y=0,0032 * x^{-0,2691}$

R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
0,01	0,012973530	0,011049687	0,001924
0,03	0,008671052	0,008221606	0,000449
0,05	0,007329338	0,007165676	0,000164
0,07	0,006594376	0,006545368	0,000049
0,10	0,005916684	0,005946343	-0,000030
0,11	0,005750760	0,005795771	-0,000045
0,12	0,005604330	0,005661641	-0,000057
0,13	0,005473682	0,005540996	-0,000067
0,14	0,005356039	0,005431589	-0,000076
0,15	0,005249273	0,005331677	-0,000082
0,16	0,005151719	0,0052339879	-0,000088
0,17	0,005062057	0,005156089	-0,000093
0,18	0,004979221	0,005076404	-0,000097
0,19	0,004902338	0,0050003079	-0,000101
0,20	0,004830690	0,004934496	-0,000104
0,25	0,004532851	0,004646911	-0,000114
0,30	0,004305074	0,004424423	-0,000119
0,35	0,004122534	0,004244644	-0,000122
0,40	0,003971367	0,004094828	-0,000123
0,45	0,003843105	0,003967076	-0,000124
0,50	0,003732223	0,003856179	-0,000124
0,55	0,003634933	0,003758533	-0,000124
0,60	0,003548635	0,003671550	-0,000123
0,65	0,003471037	0,003593313	-0,000122
0,70	0,003400935	0,003522363	-0,000121
0,75	0,003337066	0,003457570	-0,000121
0,80	0,003278514	0,003398040	-0,000120
0,85	0,003224544	0,003343054	-0,000119
0,90	0,003174559	0,003292026	-0,000117
0,95	0,003128070	0,003244476	-0,000116
1,00	0,003084668	0,003200000	-0,000115
1,50	0,002764691	0,002869220	-0,000105

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

Valor 1					Valor 2				
$y=0,0026 * x^{-0,2430}$					$y=0,0032 * x^{-0,2691}$				
R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia	R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia		
2,00	0,002126307	0,002196965	-0,000071	2,00	0,002561259	0,002655479	-0,000094		
2,50	0,002017790	0,002081009	-0,000063	2,50	0,002416164	0,002500716	-0,000085		
3,00	0,001934911	0,001990824	-0,000056	3,00	0,002305503	0,002380985	-0,000075		
3,50	0,001868789	0,001917630	-0,000049	3,50	0,002217290	0,002284238	-0,000067		
4,00	0,001814366	0,001856405	-0,000042	4,00	0,002144722	0,002203615	-0,000059		
4,50	0,001768514	0,001804026	-0,000036	4,50	0,002083598	0,002134865	-0,000051		
5,00	0,001729172	0,001758424	-0,000029	5,00	0,002031158	0,002075187	-0,000044		
5,50	0,001694918	0,001718166	-0,000023	5,50	0,001985499	0,002022639	-0,000037		
6,00	0,001664733	0,001682219	-0,000017	6,00	0,001945261	0,001975830	-0,000031		
6,50	0,001637865	0,001649816	-0,000012	6,50	0,001909439	0,001933726	-0,000024		
7,00	0,001613745	0,001620371	-0,000007	7,00	0,001877273	0,001895545	-0,000018		
7,50	0,001591932	0,001593432	-0,000001	7,50	0,001848176	0,001860677	-0,000013		
8,00	0,001572078	0,001568637	0,000003	8,00	0,001821686	0,001828641	-0,000007		
8,50	0,001553906	0,001545698	0,000008	8,50	0,001797433	0,001799050	-0,000002		
9,00	0,001537190	0,001524377	0,000013	9,00	0,001775116	0,001771590	0,000004		
9,50	0,001521746	0,001504480	0,000017	9,50	0,001754490	0,001746001	0,000008		
10,00	0,001507419	0,001485844	0,000022	10,00	0,001735350	0,001722067	0,000013		
10,50	0,001494081	0,001468332	0,000026	10,50	0,001717526	0,001699605	0,000018		
11,00	0,001481624	0,001451827	0,000030	11,00	0,001700872	0,001678461	0,000022		
11,50	0,001469953	0,001436229	0,000034	11,50	0,001685265	0,001658503	0,000027		
12,00	0,001458991	0,001421452	0,000038	12,00	0,001670599	0,001639617	0,000031		
12,50	0,001448668	0,001407422	0,000041	12,50	0,001656784	0,001621704	0,000035		
13,00	0,001438924	0,001394072	0,000045	13,00	0,001643740	0,001604678	0,000039		
13,50	0,001429707	0,001381345	0,000048	13,50	0,001631397	0,001588463	0,000043		
14,00	0,001420972	0,001369192	0,000052	14,00	0,001619694	0,001572993	0,000047		
14,50	0,001412678	0,001357566	0,000055	14,50	0,001608579	0,001558210	0,000050		
15,00	0,001404789	0,001346428	0,000058	15,00	0,001598003	0,001544059	0,000054		
15,50	0,001397273	0,001335743	0,000062	15,50	0,001587924	0,001530494	0,000057		

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

Valor 3				Valor 4			
y=0,0040 * x <sup>-0,2952</sup>				y=0,0048 * x <sup>-0,3112</sup>			
R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia	R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
0,01	0,018980594	0,015576145	0,003404	0,01	0,024671130	0,020120614	0,004551
0,03	0,012153738	0,011261955	0,000892	0,03	0,015334442	0,014294241	0,001040
0,05	0,010096701	0,009685545	0,000411	0,05	0,012596040	0,012193314	0,000403
0,07	0,008987633	0,008769747	0,000218	0,07	0,011137088	0,010981122	0,000156
0,10	0,007977480	0,007893325	0,000084	0,10	0,009819896	0,009827459	-0,000008
0,11	0,007732130	0,007674337	0,000058	0,11	0,009501735	0,009540252	-0,000039
0,12	0,007516284	0,007479726	0,000037	0,12	0,009222424	0,009285388	-0,000063
0,13	0,007324253	0,007305062	0,000019	0,13	0,008974401	0,009056952	-0,000083
0,14	0,007151790	0,007146987	0,000005	0,14	0,008752035	0,008850467	-0,000098
0,15	0,006995651	0,007002899	-0,000007	0,15	0,008551034	0,008662468	-0,000111
0,16	0,006885308	0,006870744	-0,000017	0,16	0,008368057	0,008490223	-0,000122
0,17	0,006722754	0,006748876	-0,000026	0,17	0,008200460	0,008331545	-0,000131
0,18	0,006602377	0,006635957	-0,000034	0,18	0,008046119	0,008184656	-0,000139
0,19	0,006490859	0,006530883	-0,000040	0,19	0,007903303	0,008048095	-0,000145
0,20	0,006387116	0,006432739	-0,000046	0,20	0,007770588	0,007920648	-0,000150
0,25	0,005957787	0,006022657	-0,000065	0,25	0,007222864	0,007389283	-0,000166
0,30	0,005631610	0,005707078	-0,000075	0,30	0,006808386	0,006981699	-0,000173
0,35	0,005371611	0,005453196	-0,000082	0,35	0,006479038	0,006654681	-0,000176
0,40	0,005157260	0,005242421	-0,000085	0,40	0,006208216	0,006383813	-0,000176
0,45	0,004976081	0,005063277	-0,000087	0,45	0,005979803	0,006154057	-0,000174
0,50	0,004819971	0,004908220	-0,000088	0,50	0,005783361	0,005955549	-0,000172
0,55	0,004683396	0,004772049	-0,000089	0,55	0,005611781	0,005781498	-0,000170
0,60	0,004562421	0,004651036	-0,000089	0,60	0,005460018	0,005627047	-0,000167
0,65	0,004454160	0,004542427	-0,000088	0,65	0,005324375	0,005488613	-0,000164
0,70	0,004356434	0,004444133	-0,000088	0,70	0,005202073	0,005363481	-0,000161
0,75	0,004267564	0,004354536	-0,000087	0,75	0,005090968	0,005249551	-0,000159
0,80	0,004186232	0,004272360	-0,000086	0,80	0,004989380	0,005145169	-0,000156
0,85	0,004111381	0,004196580	-0,000085	0,85	0,004895968	0,005049008	-0,000153
0,90	0,004042158	0,004126365	-0,000084	0,90	0,004809646	0,004959992	-0,000150
0,95	0,003977860	0,004061028	-0,000083	0,95	0,004729524	0,004877235	-0,000148
1,00	0,003917906	0,004000000	-0,000082	1,00	0,004654864	0,004800000	-0,000145
1,50	0,003478011	0,003548770	-0,000071	1,50	0,004108467	0,004230986	-0,000123

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

**Valor 4**  $y=0,0048 * x^{-0,3112}$

R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
2,00	0.003764472	0.003868661	-0.000104
2,50	0.003520498	0.003609128	-0.000089
3,00	0.003335067	0.003410053	-0.000075
3,50	0.003187571	0.003250329	-0.000063
4,00	0.003066400	0.003118029	-0.000052
4,50	0.002964422	0.003005810	-0.000041
5,00	0.002876970	0.002908853	-0.000032
5,50	0.002800839	0.002823842	-0.000023
6,00	0.002733743	0.002748404	-0.000015
6,50	0.002673999	0.002680789	-0.000007
7,00	0.002620336	0.002619671	0.000001
7,50	0.002571774	0.002564025	0.000008
8,00	0.002527541	0.002513041	0.000014
8,50	0.002487022	0.002466074	0.000021
9,00	0.002449717	0.002422596	0.000027
9,50	0.002415218	0.002382175	0.000033
10,00	0.002383184	0.002344451	0.000039
10,50	0.002353333	0.002309123	0.000044
11,00	0.002325423	0.002275935	0.000049
11,50	0.002299251	0.002244668	0.000055
12,00	0.002274641	0.002215134	0.000060
12,50	0.002251442	0.002187172	0.000064
13,00	0.002229522	0.002160638	0.000069
13,50	0.002208767	0.002135410	0.000073
14,00	0.002189076	0.002111379	0.000078
14,50	0.002170359	0.002088447	0.000082
15,00	0.002152539	0.002066530	0.000086
15,50	0.002135544	0.002045550	0.000090

**Valor 3**  $y=0,0040 * x^{-0,2952}$

R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
2,00	0.003200122	0.003259837	-0.000060
2,50	0.003002648	0.003062025	-0.000049
3,00	0.002852378	0.002892103	-0.000040
3,50	0.002732759	0.002763447	-0.000031
4,00	0.002634443	0.002666635	-0.000022
4,50	0.002551675	0.002565852	-0.000014
5,00	0.002480685	0.002487276	-0.000007
5,50	0.002418880	0.002418271	0.000001
6,00	0.002364411	0.002356947	0.000007
6,50	0.002315912	0.002301908	0.000014
7,00	0.002272354	0.002252097	0.000020
7,50	0.002232941	0.002206693	0.000026
8,00	0.002197047	0.002165049	0.000032
8,50	0.002164172	0.002126648	0.000038
9,00	0.002133910	0.002091065	0.000043
9,50	0.002105929	0.002057956	0.000048
10,00	0.002079954	0.002027029	0.000053
10,50	0.002055753	0.001998043	0.000058
11,00	0.002033130	0.001970792	0.000062
11,50	0.002011921	0.001945100	0.000067
12,00	0.001991982	0.001920816	0.000071
12,50	0.001973190	0.001897807	0.000075
13,00	0.001955439	0.001875961	0.000079
13,50	0.001938634	0.001855177	0.000083
14,00	0.001922694	0.001835367	0.000087
14,50	0.001907546	0.001816453	0.000091
15,00	0.001893127	0.001798365	0.000095
15,50	0.001879379	0.001781042	0.000098

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

Valor 5 $y=0,0062 * x^{-0,3308}$					Valor 6 $y=0,0080 * x^{-0,3545}$				
R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia	R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia		
0,01	0,035747618	0,028444067	0,007304	0,01	0,056999856	0,040934547	0,014765		
0,03	0,021306276	0,019776980	0,001529	0,03	0,030955688	0,019776980	0,011179		
0,05	0,017226919	0,016702151	0,000525	0,05	0,024384650	0,016702151	0,007682		
0,07	0,015090269	0,014942844	0,000147	0,07	0,021042445	0,014942844	0,006100		
0,10	0,013185556	0,013279805	-0,000094	0,10	0,018128146	0,013279805	0,004848		
0,11	0,012729156	0,012867643	-0,000138	0,11	0,017439541	0,012867643	0,004572		
0,12	0,012329708	0,012502548	-0,000170	0,12	0,016840055	0,012502548	0,004338		
0,13	0,011975980	0,012175848	-0,000200	0,13	0,016311711	0,012175848	0,004136		
0,14	0,011659636	0,011880987	-0,000221	0,14	0,015841239	0,011880987	0,003960		
0,15	0,011374336	0,011612900	-0,000239	0,15	0,015418603	0,011612900	0,003806		
0,16	0,011115164	0,011367600	-0,000252	0,16	0,015036053	0,011367600	0,003668		
0,17	0,010878238	0,011141898	-0,000264	0,17	0,014687498	0,011141898	0,003546		
0,18	0,010660443	0,010933206	-0,000273	0,18	0,014368074	0,010933206	0,003435		
0,19	0,010459250	0,010739400	-0,000280	0,19	0,014073843	0,010739400	0,003334		
0,20	0,010272581	0,010568713	-0,000286	0,20	0,013801578	0,010568713	0,003243		
0,25	0,009505228	0,009807383	-0,000302	0,25	0,012689793	0,009807383	0,002882		
0,30	0,008927867	0,009233364	-0,000305	0,30	0,011861236	0,009233364	0,002628		
0,35	0,008471169	0,008774330	-0,000303	0,35	0,011210722	0,008774330	0,002436		
0,40	0,008097024	0,008395184	-0,000298	0,40	0,010681020	0,008395184	0,002286		
0,45	0,007782456	0,008074376	-0,000292	0,45	0,010237912	0,008074376	0,002164		
0,50	0,007512645	0,00797806	-0,000285	0,50	0,009859483	0,00797806	0,002062		
0,55	0,007277532	0,007555787	-0,000278	0,55	0,009530942	0,007555787	0,001975		
0,60	0,007070000	0,007341406	-0,000271	0,60	0,009241887	0,007341406	0,001900		
0,65	0,006884853	0,007149570	-0,000265	0,65	0,008984750	0,007149570	0,001835		
0,70	0,006718186	0,006976430	-0,000258	0,70	0,008753875	0,006976430	0,001777		
0,75	0,006567002	0,006819012	-0,000252	0,75	0,008544931	0,006819012	0,001726		
0,80	0,006428954	0,006674973	-0,000246	0,80	0,008354539	0,006674973	0,001680		
0,85	0,006302171	0,006542442	-0,000240	0,85	0,008180017	0,006542442	0,001638		
0,90	0,006185141	0,006419900	-0,000235	0,90	0,008019202	0,006419900	0,001599		
0,95	0,006076628	0,006306098	-0,000229	0,95	0,007870329	0,006306098	0,001564		
1,00	0,005975608	0,006200000	-0,000224	1,00	0,007731939	0,006200000	0,001532		
1,50	0,005239005	0,005421765	-0,000183	1,50	0,006728643	0,005421765	0,001307		

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

**Valor 5**  $y=0,0062 * x^{-0,3508}$

R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
2,00	0,004777524	0,004929592	-0,000152
2,50	0,004451135	0,004578815	-0,000128
3,00	0,004203490	0,004310821	-0,000107
3,50	0,004006723	0,004096510	-0,000090
4,00	0,003845185	0,003919496	-0,000074
4,50	0,003709291	0,003769719	-0,000060
5,00	0,003592781	0,003640595	-0,000048
5,50	0,003491363	0,003527603	-0,000036
6,00	0,003401980	0,003427514	-0,000026
6,50	0,003322385	0,003337951	-0,000016
7,00	0,003250883	0,003257116	-0,000006
7,50	0,003186164	0,003183621	0,000003
8,00	0,003127203	0,003116374	0,000011
8,50	0,003073179	0,003054498	0,000019
9,00	0,003023428	0,002997287	0,000026
9,50	0,002977405	0,002944155	0,000033
10,00	0,002934661	0,002894621	0,000040
10,50	0,002894815	0,002848277	0,000047
11,00	0,002857551	0,002804781	0,000053
11,50	0,002822596	0,002763840	0,000059
12,00	0,002789717	0,002725201	0,000065
12,50	0,002758713	0,002688647	0,000070
13,00	0,002729410	0,002653990	0,000075
13,50	0,002701655	0,002621062	0,000081
14,00	0,002675315	0,002589718	0,000086
14,50	0,002650271	0,002559830	0,000090
15,00	0,002626418	0,002531283	0,000095
15,50	0,002603663	0,002503975	0,000100

**Valor 6**  $y=0,0080 * x^{-0,3545}$

R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
2,00	0,006104978	0,004929592	0,0011175
2,50	0,005666595	0,004578815	0,001087
3,00	0,005333879	0,004310821	0,001023
3,50	0,005070607	0,004096510	0,000974
4,00	0,004854817	0,003919496	0,000935
4,50	0,004673499	0,003769719	0,000904
5,00	0,004518184	0,003640595	0,000878
5,50	0,004383083	0,003527603	0,000855
6,00	0,004264078	0,003427514	0,000837
6,50	0,004158148	0,003337951	0,000820
7,00	0,004063017	0,003257116	0,000806
7,50	0,003976934	0,003183621	0,000793
8,00	0,003898522	0,003116374	0,000782
8,50	0,003826685	0,003054498	0,000772
9,00	0,003760536	0,002997287	0,000763
9,50	0,003699348	0,002944155	0,000755
10,00	0,003642519	0,002894621	0,000748
10,50	0,003589545	0,002848277	0,000741
11,00	0,003540001	0,002804781	0,000735
11,50	0,003493526	0,002763840	0,000730
12,00	0,003449809	0,002725201	0,000725
12,50	0,003408582	0,002688647	0,000720
13,00	0,003369615	0,002653990	0,000716
13,50	0,003332703	0,002621062	0,000712
14,00	0,003297668	0,002589718	0,000708
14,50	0,003264355	0,002559830	0,000705
15,00	0,003232623	0,002531283	0,000701
15,50	0,003202350	0,002503975	0,000698

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

Valor 7				Valor 8			
y=0,0102 * x <sup>-0,3665</sup>				y=0,0133 * x <sup>-0,3914</sup>			
R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia	R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
0,01	0,075306280	0,055156941	0,020149	0,01	0,119777933	0,080658779	0,039119
0,03	0,040904131	0,036875272	0,004029	0,03	0,060398420	0,052469434	0,007929
0,05	0,031939193	0,030579309	0,001360	0,05	0,045780785	0,042961040	0,002820
0,07	0,027420415	0,027031599	0,000389	0,07	0,038627969	0,037659996	0,000968
0,10	0,023506748	0,023719207	-0,000212	0,10	0,032575804	0,032753042	-0,000177
0,11	0,022585936	0,022904971	-0,000319	0,11	0,031173322	0,031553718	-0,000380
0,12	0,021785578	0,022186063	-0,000400	0,12	0,029961384	0,030497209	-0,000536
0,13	0,021081208	0,021544674	-0,000463	0,13	0,028900386	0,029556582	-0,000656
0,14	0,020454797	0,020967384	-0,000513	0,14	0,027961318	0,028711582	-0,000750
0,15	0,019892735	0,020443852	-0,000551	0,15	0,027122390	0,027946635	-0,000824
0,16	0,019384525	0,019965960	-0,000581	0,16	0,026366883	0,027249534	-0,000883
0,17	0,018921930	0,019527230	-0,000605	0,17	0,025681735	0,026610555	-0,000929
0,18	0,018498378	0,019122418	-0,000624	0,18	0,025056569	0,026021839	-0,000965
0,19	0,018108557	0,018747224	-0,000639	0,19	0,024483031	0,025476953	-0,000994
0,20	0,017748118	0,018398087	-0,000650	0,20	0,023984309	0,024970573	-0,001016
0,25	0,016279089	0,016953336	-0,000674	0,25	0,021815435	0,022882208	-0,001067
0,30	0,015187257	0,015857519	-0,000670	0,30	0,020242740	0,021306219	-0,001063
0,35	0,014331820	0,014986466	-0,000655	0,35	0,019020846	0,020058729	-0,001038
0,40	0,013636406	0,014270697	-0,000634	0,40	0,018034248	0,019037300	-0,001003
0,45	0,013055466	0,013667774	-0,000612	0,45	0,017214692	0,018179597	-0,000965
0,50	0,012559887	0,013150058	-0,000590	0,50	0,016518894	0,017445153	-0,000926
0,55	0,012130058	0,012698641	-0,000569	0,55	0,015917889	0,016806361	-0,000888
0,60	0,011752204	0,012300074	-0,000548	0,60	0,015391453	0,016243636	-0,000852
0,65	0,011416320	0,011944485	-0,000528	0,65	0,014924971	0,015742632	-0,000818
0,70	0,011114933	0,011624432	-0,000509	0,70	0,014507581	0,015292563	-0,000785
0,75	0,010842333	0,011334183	-0,000492	0,75	0,014131012	0,014885131	-0,000754
0,80	0,010594064	0,011069237	-0,000475	0,80	0,013788840	0,014513836	-0,000725
0,85	0,010366595	0,010826003	-0,000459	0,85	0,013475985	0,014173499	-0,000698
0,90	0,010157078	0,010601573	-0,000444	0,90	0,013188371	0,013859933	-0,000672
0,95	0,009963194	0,010393563	-0,000430	0,95	0,012922680	0,013569712	-0,000647
1,00	0,009783026	0,010200000	-0,000417	1,00	0,012676183	0,013300000	-0,000624
1,50	0,008478558	0,008791495	-0,000313	1,50	0,010902633	0,011348266	-0,000446

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

**Valor 8**  $y=0,0133 * x^{-0,3914}$

R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
2,00	0,009811496	0,010139779	-0,000328
2,50	0,009048200	0,009291759	-0,000244
3,00	0,008473312	0,008651798	-0,000178
3,50	0,008018941	0,008145231	-0,000126
4,00	0,007647394	0,007730460	-0,000083
4,50	0,007335778	0,007382174	-0,000046
5,00	0,007069250	0,007083938	-0,000015
5,50	0,006837693	0,006824545	0,000013
6,00	0,006633932	0,006596039	0,000038
6,50	0,006452716	0,006392597	0,000060
7,00	0,006290095	0,006209838	0,000080
7,50	0,006143032	0,006044393	0,000099
8,00	0,006009151	0,005893621	0,000116
8,50	0,005886555	0,005755421	0,000131
9,00	0,005773713	0,005628091	0,000146
9,50	0,005669374	0,005510241	0,000159
10,00	0,005572500	0,005400720	0,000172
10,50	0,005482225	0,005298564	0,000184
11,00	0,005397818	0,005202961	0,000195
11,50	0,005318658	0,005113220	0,000205
12,00	0,005244212	0,005028751	0,000215
12,50	0,005174021	0,004949041	0,000225
13,00	0,005107687	0,004873649	0,000234
13,50	0,005044863	0,004802186	0,000243
14,00	0,004985244	0,004734315	0,000251
14,50	0,004928560	0,004669735	0,000259
15,00	0,004874574	0,004608181	0,000266
15,50	0,004823075	0,004549418	0,000274

**Valor 7**  $y=0,0102 * x^{-0,3665}$

R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
2,00	0,007669049	0,007911752	-0,000243
2,50	0,007099729	0,007290464	-0,000191
3,00	0,006669346	0,006819228	-0,000150
3,50	0,006328253	0,006444648	-0,000116
4,00	0,006048739	0,006136845	-0,000088
4,50	0,005813910	0,005877570	-0,000064
5,00	0,005612775	0,005654936	-0,000042
5,50	0,005437824	0,005460812	-0,000023
6,00	0,005283718	0,005289416	-0,000006
6,50	0,005146543	0,005136502	0,000010
7,00	0,005023349	0,004998869	0,000024
7,50	0,004911866	0,004874053	0,000038
8,00	0,004810314	0,004760118	0,000050
8,50	0,004717272	0,004655519	0,000062
9,00	0,004631591	0,004559007	0,000073
9,50	0,004552331	0,004469557	0,000083
10,00	0,004478711	0,004386319	0,000092
10,50	0,004410081	0,004308581	0,000101
11,00	0,004345890	0,004235744	0,000110
11,50	0,004285670	0,004167297	0,000118
12,00	0,004229019	0,004102799	0,000126
12,50	0,004175592	0,0040401873	0,000134
13,00	0,004125088	0,003984189	0,000141
13,50	0,00407245	0,003929460	0,000148
14,00	0,004031832	0,003877433	0,000154
14,50	0,003988646	0,003827884	0,000161
15,00	0,003947507	0,003780617	0,000167
15,50	0,003908256	0,003735456	0,000173

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

Valor 9 $y=0,0197 * x^{-0,4166}$					Valor 10 $y=0,0268 * x^{-0,4222}$				
R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia	R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia		
0,01	0,214308872	0,134173339	0,080136	0,01	0,300842730	0,187298713	0,113544		
0,03	0,101041248	0,084898010	0,016143	0,03	0,140594217	0,117786143	0,022808		
0,05	0,074381191	0,068623888	0,005757	0,05	0,103110310	0,094935722	0,008175		
0,07	0,061658517	0,059648343	0,002010	0,07	0,085281339	0,082363426	0,002918		
0,10	0,051113308	0,051412204	-0,000299	0,10	0,070542335	0,070849174	-0,000307		
0,11	0,048703389	0,049410817	-0,000707	0,11	0,067179753	0,068054806	-0,000875		
0,12	0,046632162	0,047651801	-0,001020	0,12	0,064291634	0,065600096	-0,001308		
0,13	0,044827850	0,046089015	-0,001261	0,13	0,061777173	0,063420244	-0,001643		
0,14	0,043238124	0,044687832	-0,001450	0,14	0,059562931	0,061466649	-0,001904		
0,15	0,041823858	0,043421679	-0,001598	0,15	0,057594030	0,059702025	-0,002108		
0,16	0,040555158	0,042269766	-0,001715	0,16	0,056828563	0,058097218	-0,002269		
0,17	0,039408753	0,041215560	-0,001807	0,17	0,054233928	0,056629048	-0,002395		
0,18	0,038366235	0,040245720	-0,001879	0,18	0,052784342	0,055278817	-0,002494		
0,19	0,037412827	0,039349342	-0,001937	0,19	0,051459123	0,054031251	-0,002572		
0,20	0,036536522	0,038517415	-0,001981	0,20	0,050241471	0,052873728	-0,002632		
0,25	0,033017942	0,035098166	-0,002080	0,25	0,045356189	0,048119879	-0,002764		
0,30	0,030458926	0,032531007	-0,002072	0,30	0,041807197	0,044554769	-0,002748		
0,35	0,028487955	0,030507560	-0,002020	0,35	0,039076078	0,041747384	-0,002671		
0,40	0,026907866	0,028856791	-0,001949	0,40	0,036888064	0,039458908	-0,002571		
0,45	0,025603170	0,027475012	-0,001872	0,45	0,035082375	0,037544685	-0,002462		
0,50	0,024501177	0,026295130	-0,001794	0,50	0,033557903	0,035911179	-0,002353		
0,55	0,023553561	0,025271506	-0,001718	0,55	0,032247476	0,0344494803	-0,002247		
0,60	0,022726772	0,024371845	-0,001645	0,60	0,031104495	0,033250588	-0,002146		
0,65	0,021996695	0,023572548	-0,001576	0,65	0,030095478	0,032145692	-0,002050		
0,70	0,021345483	0,022855903	-0,001510	0,70	0,029195667	0,031155477	-0,001960		
0,75	0,020759612	0,022208320	-0,001449	0,75	0,028386299	0,030261046	-0,001875		
0,80	0,020228611	0,021619166	-0,001391	0,80	0,027652861	0,029447620	-0,001795		
0,85	0,019744236	0,021079985	-0,001336	0,85	0,026983925	0,028703452	-0,001720		
0,90	0,019299887	0,020583954	-0,001284	0,90	0,026370350	0,028019063	-0,001649		
0,95	0,018890215	0,020125495	-0,001235	0,95	0,025804723	0,027386712	-0,001582		
1,00	0,018510826	0,019700000	-0,001189	1,00	0,025280963	0,026800000	-0,001519		
1,50	0,015800364	0,016638210	-0,000838	1,50	0,021540377	0,022583386	-0,001043		

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

**Valor 10**  $y=0,0268 * x^{-0,4222}$

R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
2,00	0,019262258	0,020000457	-0,000738
2,50	0,017678289	0,018202227	-0,000524
3,00	0,016490138	0,016853659	-0,000364
3,50	0,015553776	0,015791714	-0,000238
4,00	0,014789736	0,014926056	-0,000136
4,50	0,014149984	0,014201966	-0,000052
5,00	0,013603499	0,013584062	0,000019
5,50	0,013129199	0,013048292	0,000081
6,00	0,012712175	0,012577645	0,000135
6,50	0,012341536	0,012159698	0,000182
7,00	0,012009108	0,011785131	0,000224
7,50	0,011708620	0,011446796	0,000262
8,00	0,011435162	0,011139103	0,000296
8,50	0,011184831	0,010857607	0,000327
9,00	0,010954475	0,010598725	0,000356
9,50	0,010741518	0,010359526	0,000382
10,00	0,010543830	0,010137592	0,000406
10,50	0,010359632	0,009930901	0,000429
11,00	0,010187426	0,009737754	0,000450
11,50	0,010025936	0,009556705	0,000469
12,00	0,009874074	0,009386617	0,000488
12,50	0,009730898	0,009226126	0,000505
13,00	0,009595593	0,009074609	0,000521
13,50	0,009467449	0,008931160	0,000536
14,00	0,009345842	0,008795075	0,000551
14,50	0,009230223	0,008665731	0,000564
15,00	0,009120104	0,008542580	0,000578
15,50	0,009015055	0,008425133	0,000590

**Valor 9**  $y=0,0197 * x^{-0,4166}$

R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
2,00	0,014149037	0,014759007	-0,000610
2,50	0,013000770	0,013448827	-0,000448
3,00	0,012139460	0,012465150	-0,000326
3,50	0,011460726	0,011689811	-0,000229
4,00	0,010906956	0,011057273	-0,000150
4,50	0,010443322	0,010527806	-0,000084
5,00	0,010047328	0,010075702	-0,000028
5,50	0,009703683	0,009683473	0,000020
6,00	0,009401574	0,009338743	0,000063
6,50	0,009133101	0,009032470	0,000101
7,00	0,008892337	0,008757868	0,000134
7,50	0,008674730	0,008509728	0,000165
8,00	0,008476722	0,008283978	0,000193
8,50	0,008295481	0,008077376	0,000218
9,00	0,008128721	0,007887308	0,000241
9,50	0,007974573	0,007711637	0,000263
10,00	0,007831493	0,007548597	0,000283
10,50	0,007698190	0,007396713	0,000301
11,00	0,007573579	0,007254743	0,000319
11,50	0,007456734	0,007121632	0,000335
12,00	0,007346865	0,006996476	0,000350
12,50	0,007243290	0,006878496	0,000365
13,00	0,007145419	0,006767019	0,000378
13,50	0,007052735	0,006661456	0,000391
14,00	0,006964788	0,006561291	0,000403
14,50	0,006881178	0,006466069	0,000415
15,00	0,006801552	0,006375388	0,000426
15,50	0,006725599	0,006288891	0,000437

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

Valor 11				Valor 12			
$y=0,0364 * x^{-0,4322}$				$y=0,0514 * x^{-0,4384}$			
R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia	R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
0,01	0,436043332	0,266379858	0,169663	0,01	0,055699856	0,387046477	-0,331347
0,03	0,199473031	0,165687436	0,033786	0,03	0,030955688	0,239107479	-0,208152
0,05	0,144897677	0,132863763	0,012034	0,05	0,024384650	0,191132557	-0,166748
0,07	0,119143671	0,114881477	0,004262	0,07	0,021042445	0,164919549	-0,143877
0,10	0,097992176	0,098469421	-0,000477	0,10	0,018128146	0,141046761	-0,122919
0,11	0,093187992	0,094495573	-0,001308	0,11	0,017439541	0,135274696	-0,117835
0,12	0,089068800	0,091007933	-0,001939	0,12	0,016840055	0,130211716	-0,113372
0,13	0,085488175	0,087913398	-0,002425	0,13	0,016311711	0,125721731	-0,109410
0,14	0,082339602	0,085142196	-0,002803	0,14	0,015841239	0,121702805	-0,105862
0,15	0,079543603	0,082640844	-0,003097	0,15	0,015418603	0,118076837	-0,102658
0,16	0,077039567	0,080367550	-0,003328	0,16	0,015036053	0,114782827	-0,099747
0,17	0,074780399	0,078289111	-0,003509	0,17	0,014687498	0,111772332	-0,097085
0,18	0,072728902	0,076378761	-0,003650	0,18	0,014368074	0,109006314	-0,094638
0,19	0,070855270	0,074614645	-0,003759	0,19	0,014073843	0,106452911	-0,092379
0,20	0,069135314	0,072978716	-0,003843	0,20	0,013801578	0,104085820	-0,090284
0,25	0,062250750	0,066269198	-0,004018	0,25	0,012689793	0,094385704	-0,081696
0,30	0,057266161	0,061247671	-0,003982	0,30	0,011861236	0,087135105	-0,075274
0,35	0,053440392	0,057300073	-0,003860	0,35	0,011210722	0,081444111	-0,070230
0,40	0,050381947	0,054086771	-0,003705	0,40	0,010681020	0,076810399	-0,066129
0,45	0,047862388	0,051402345	-0,003540	0,45	0,010237912	0,072944870	-0,062707
0,50	0,045738403	0,049114140	-0,003376	0,50	0,009859483	0,069652173	-0,059793
0,55	0,043914980	0,047132083	-0,003217	0,55	0,009530942	0,066801792	-0,057271
0,60	0,042326324	0,045392533	-0,003066	0,60	0,009241887	0,064301575	-0,055060
0,65	0,040925240	0,043849054	-0,002924	0,65	0,008984750	0,062084316	-0,053100
0,70	0,039676876	0,042466846	-0,002790	0,70	0,008753875	0,060099677	-0,051346
0,75	0,038554859	0,041219233	-0,002664	0,75	0,008544931	0,058309090	-0,049764
0,80	0,037538809	0,040085370	-0,002547	0,80	0,008354539	0,056682431	-0,048328
0,85	0,036612699	0,039048695	-0,002436	0,85	0,008180017	0,055195778	-0,047016
0,90	0,035763718	0,038095859	-0,002332	0,90	0,008019202	0,053829854	-0,045811
0,95	0,034981491	0,037215961	-0,002234	0,95	0,007870329	0,052568924	-0,044699
1,00	0,034257512	0,036400000	-0,002142	1,00	0,007731939	0,051400000	-0,043668
1,50	0,029096496	0,030548841	-0,001452	1,50	0,006728643	0,043029343	-0,036301

Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión

**Valor 12**  $y=0,0514 * x^{-0,4384}$

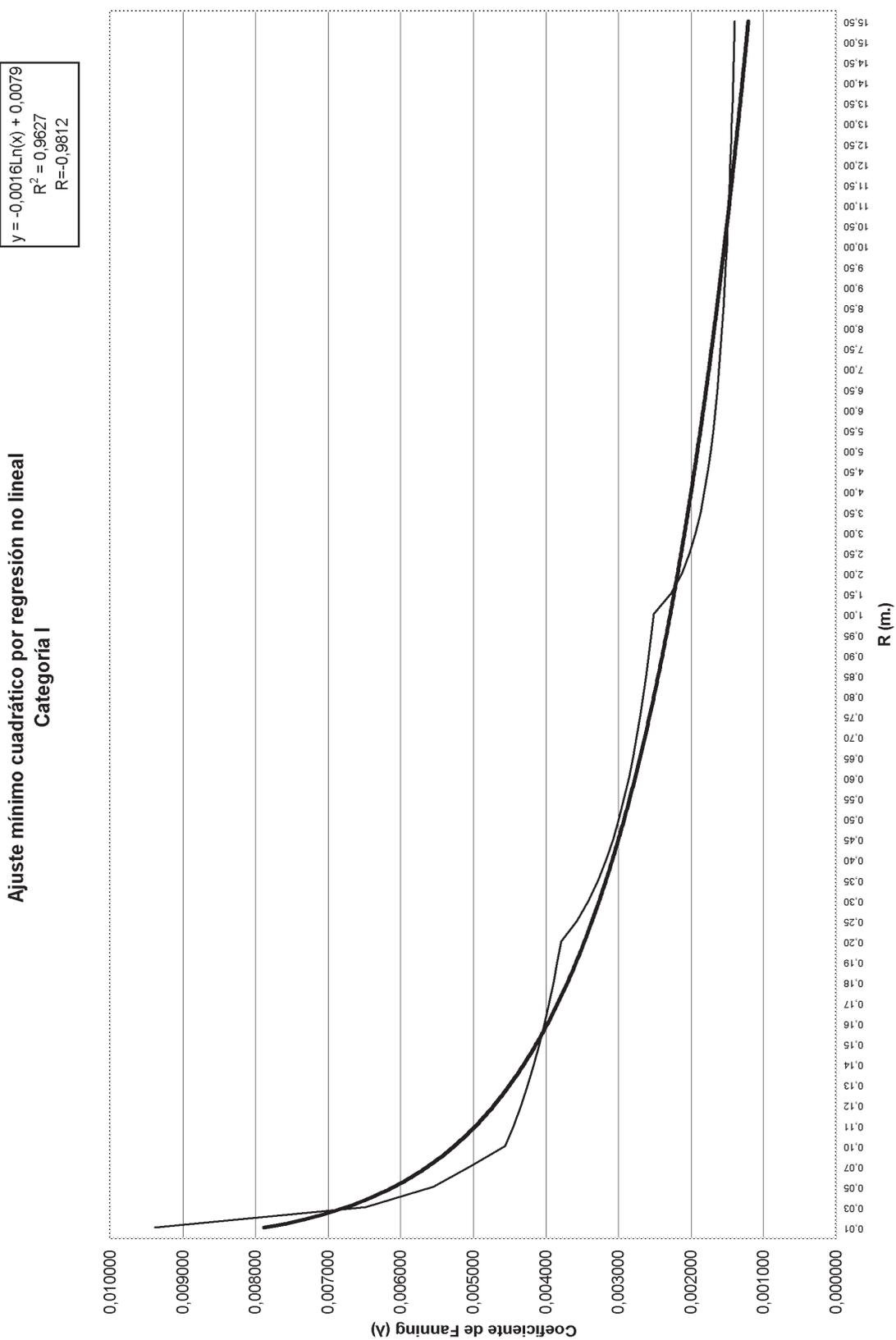
R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
2,00	0,006104978	0,037930762	-0,031826
2,50	0,005665951	0,034395864	-0,028730
3,00	0,005333879	0,031753614	-0,026420
3,50	0,005070607	0,029678619	-0,024608
4,00	0,004854817	0,027991103	-0,023136
4,50	0,004673499	0,026582435	-0,021909
5,00	0,004518184	0,025382516	-0,020864
5,50	0,004383083	0,024343786	-0,019961
6,00	0,004264078	0,023432661	-0,019169
6,50	0,004158148	0,022624652	-0,018467
7,00	0,004063017	0,021901413	-0,017838
7,50	0,003976934	0,021248891	-0,017272
8,00	0,003898522	0,020656107	-0,016758
8,50	0,003826685	0,020114343	-0,016288
9,00	0,003760536	0,019616576	-0,015856
9,50	0,003699348	0,019157070	-0,015458
10,00	0,003642519	0,018731093	-0,015089
10,50	0,003589545	0,018334697	-0,014745
11,00	0,003540001	0,017964559	-0,014425
11,50	0,003493526	0,017617861	-0,014124
12,00	0,003449809	0,017292192	-0,013842
12,50	0,003408582	0,016985478	-0,013577
13,00	0,003369615	0,016695920	-0,013326
13,50	0,003332703	0,016421953	-0,013089
14,00	0,003297668	0,016162204	-0,012865
14,50	0,003264355	0,015915467	-0,012651
15,00	0,003232623	0,015680673	-0,012448
15,50	0,003202350	0,015456875	-0,012255

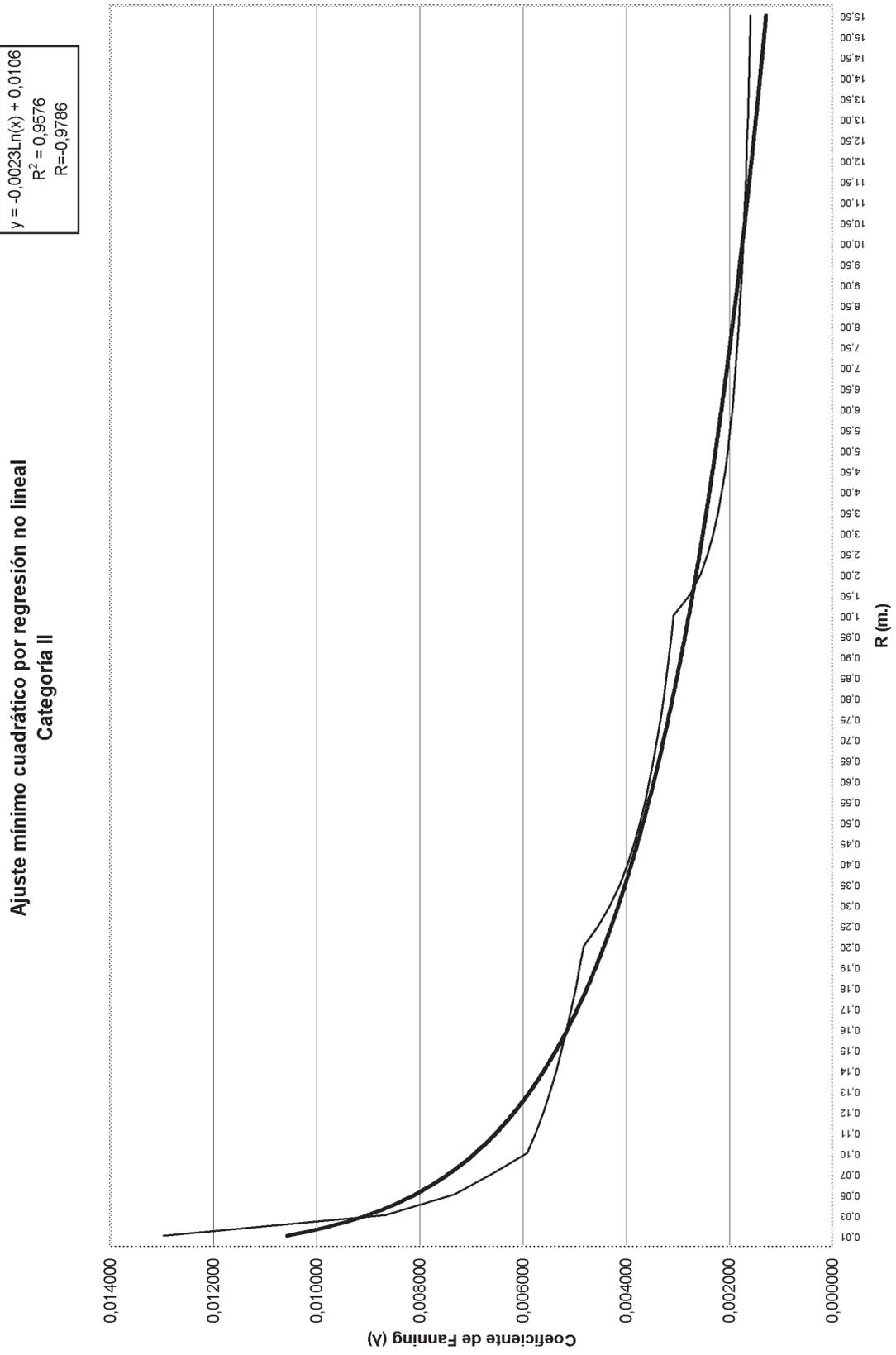
**Valor 11**  $y=0,0364 * x^{-0,4322}$

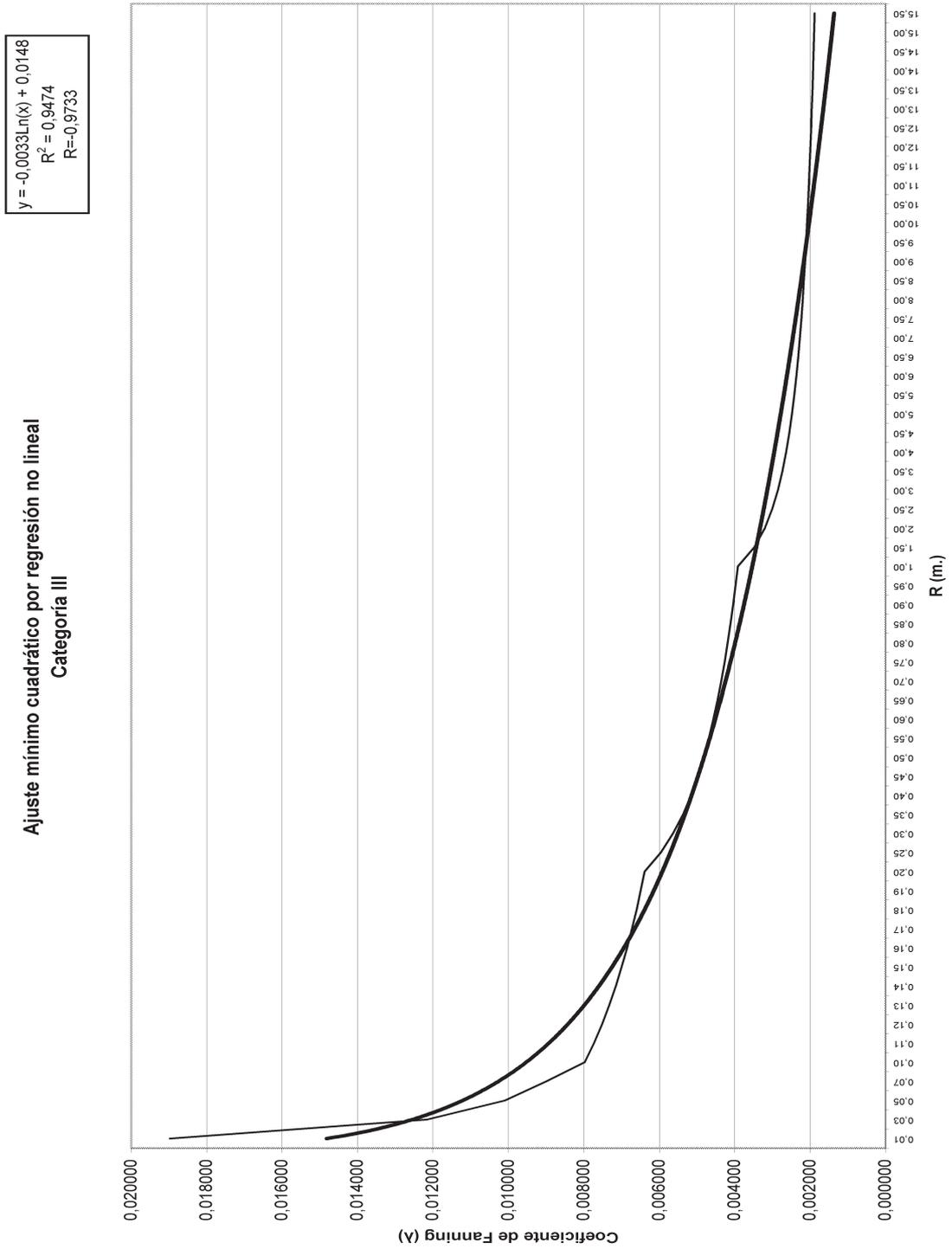
R (m.)	Original	Curva Regresión	Diferencia
2,00	0,025961131	0,026977159	-0,001016
2,50	0,023784428	0,024496933	-0,000713
3,00	0,022153373	0,022640686	-0,000487
3,50	0,020868975	0,021181425	-0,000312
4,00	0,019821595	0,019993603	-0,000172
4,50	0,018945041	0,019001283	-0,000056
5,00	0,018196595	0,018155430	0,000041
5,50	0,017547251	0,017422747	0,0000125
6,00	0,016976507	0,016779709	0,0000197
6,50	0,016469391	0,016209150	0,0000260
7,00	0,016014674	0,015698206	0,0000316
7,50	0,015603743	0,015237015	0,0000367
8,00	0,015229858	0,014817874	0,0000412
8,50	0,014887661	0,014434659	0,0000453
9,00	0,014572828	0,014082436	0,0000490
9,50	0,014281825	0,013757174	0,0000525
10,00	0,014011730	0,013455548	0,0000556
10,50	0,013760105	0,013174780	0,0000585
11,00	0,013524894	0,012912534	0,0000612
11,50	0,013304351	0,012666825	0,0000638
12,00	0,013096982	0,012435958	0,0000661
12,50	0,012901499	0,012218471	0,0000683
13,00	0,012716784	0,012013099	0,0000704
13,50	0,012541865	0,011818739	0,0000723
14,00	0,012375886	0,011634423	0,0000741
14,50	0,012218096	0,011459301	0,0000759
15,00	0,012067828	0,011292621	0,0000775
15,50	0,011924491	0,011133713	0,0000791

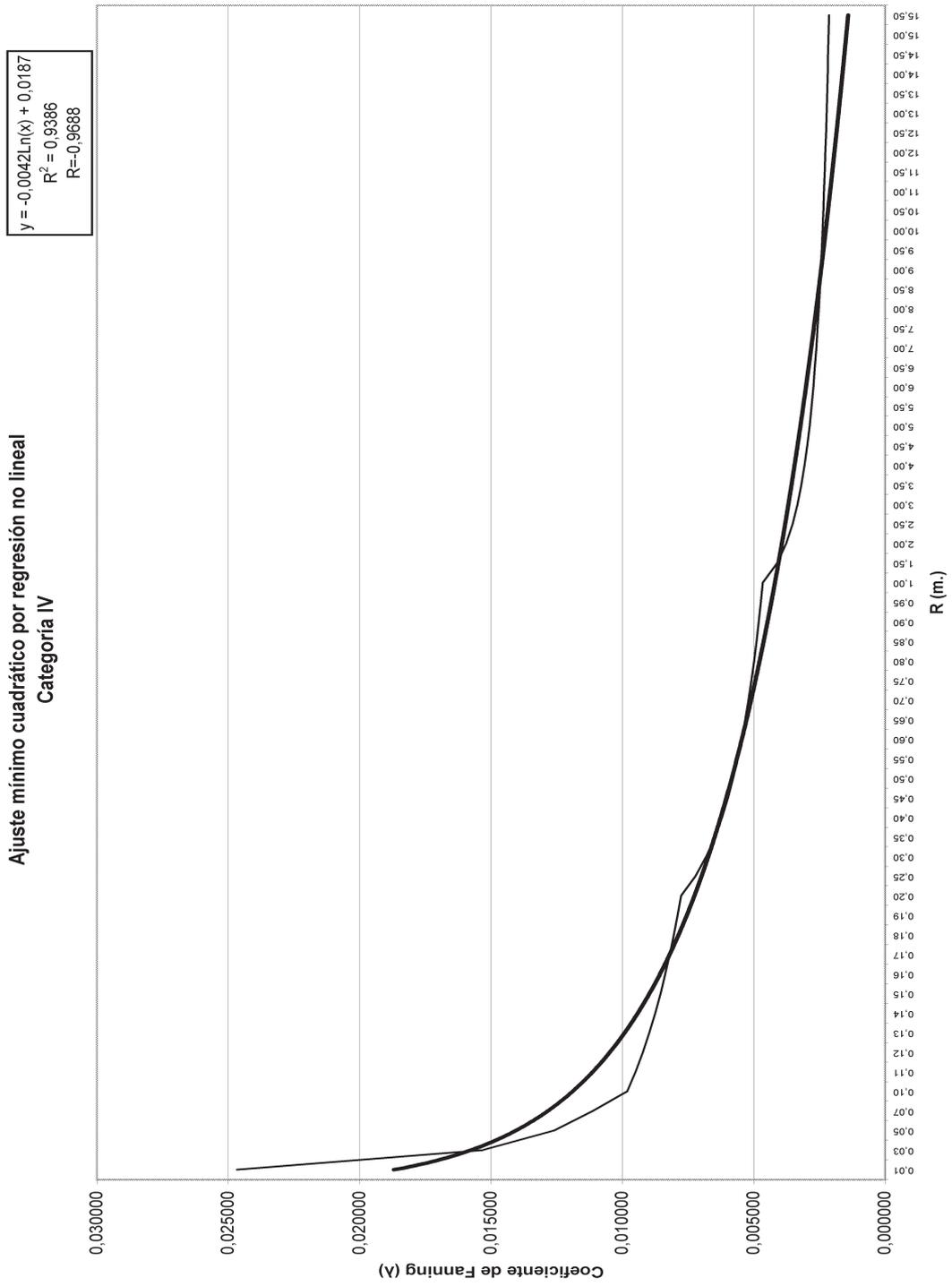


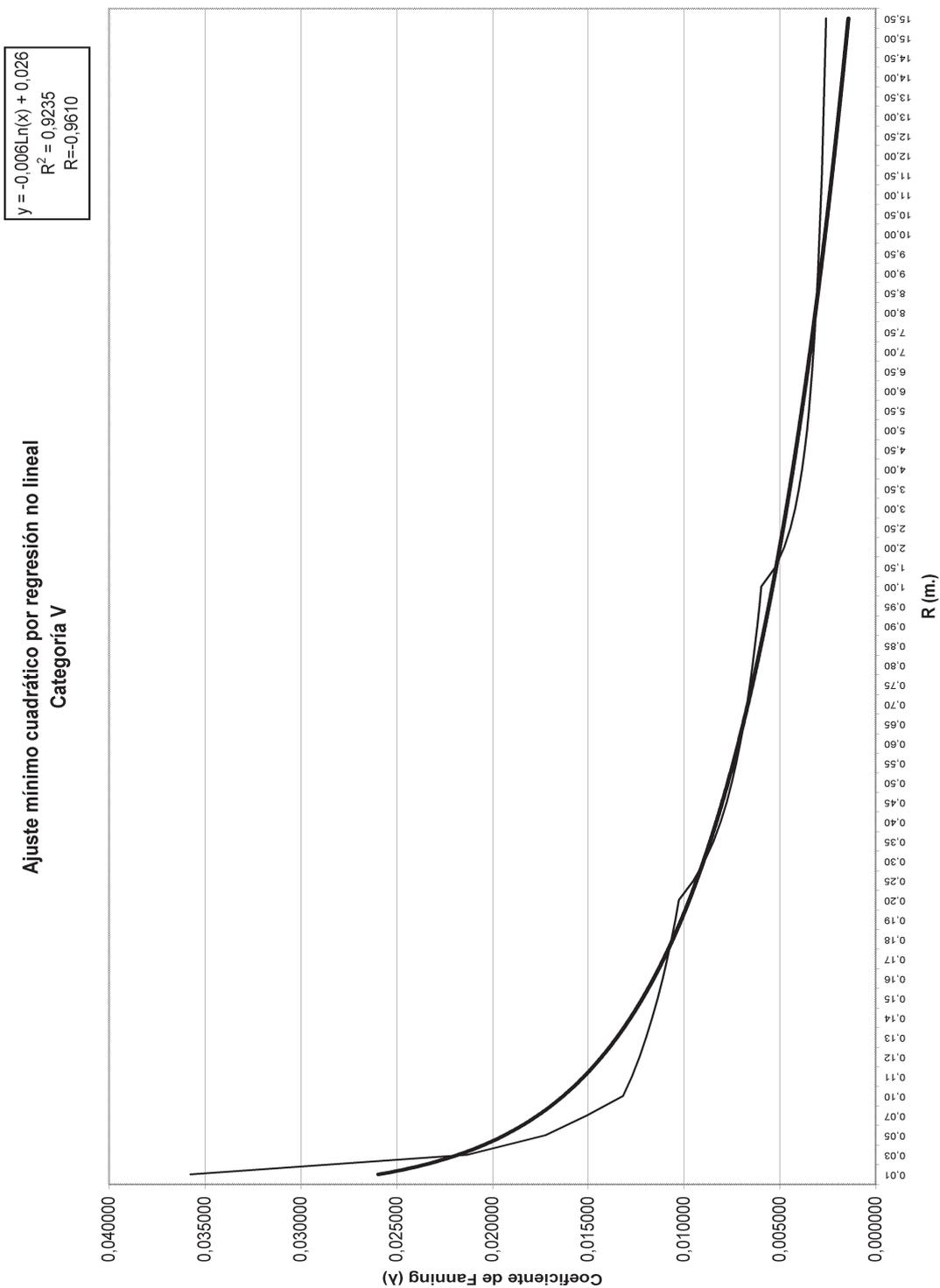
***8. Ajustes mínimo-cuadráticos por regresión no lineal***

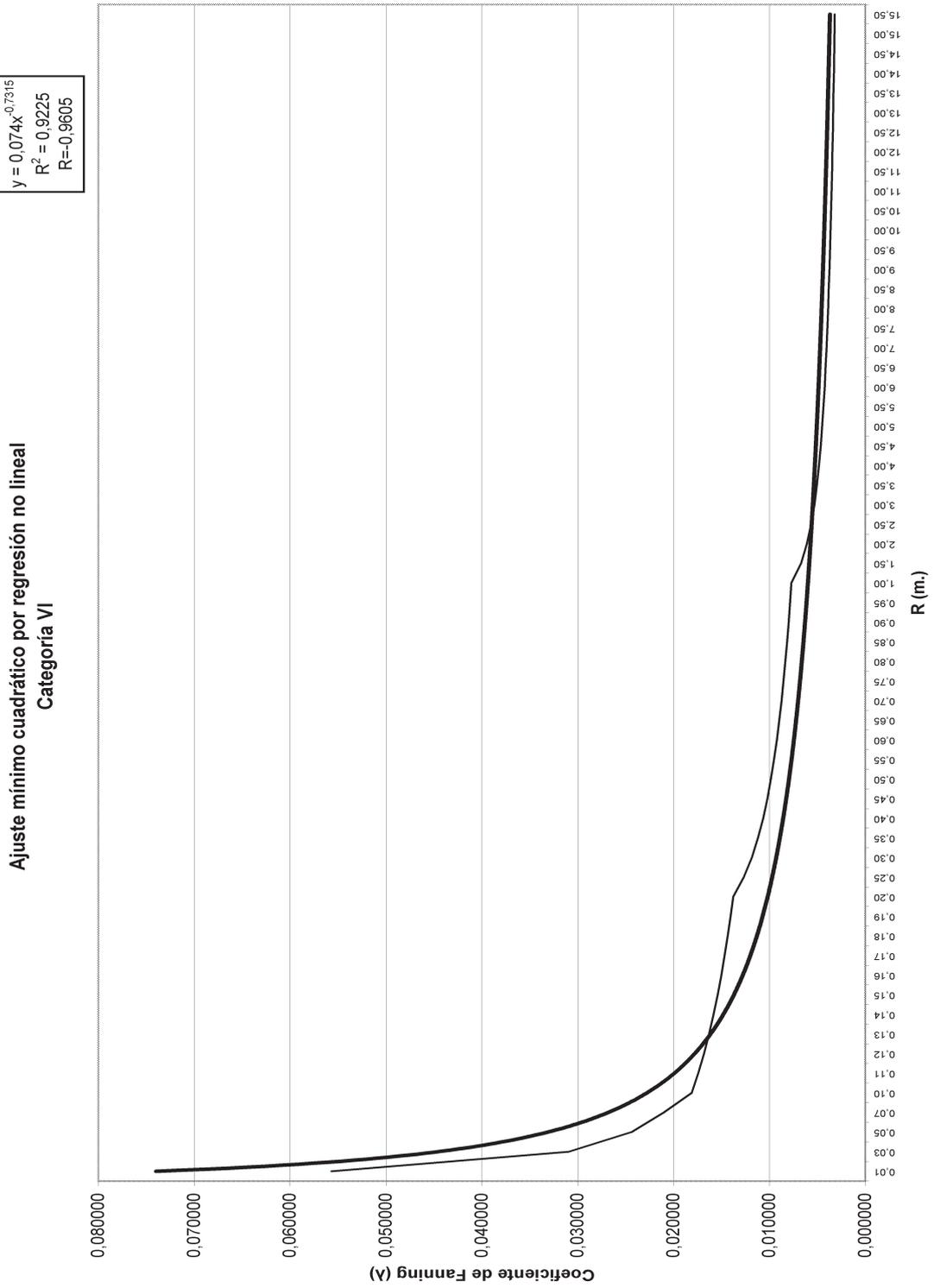


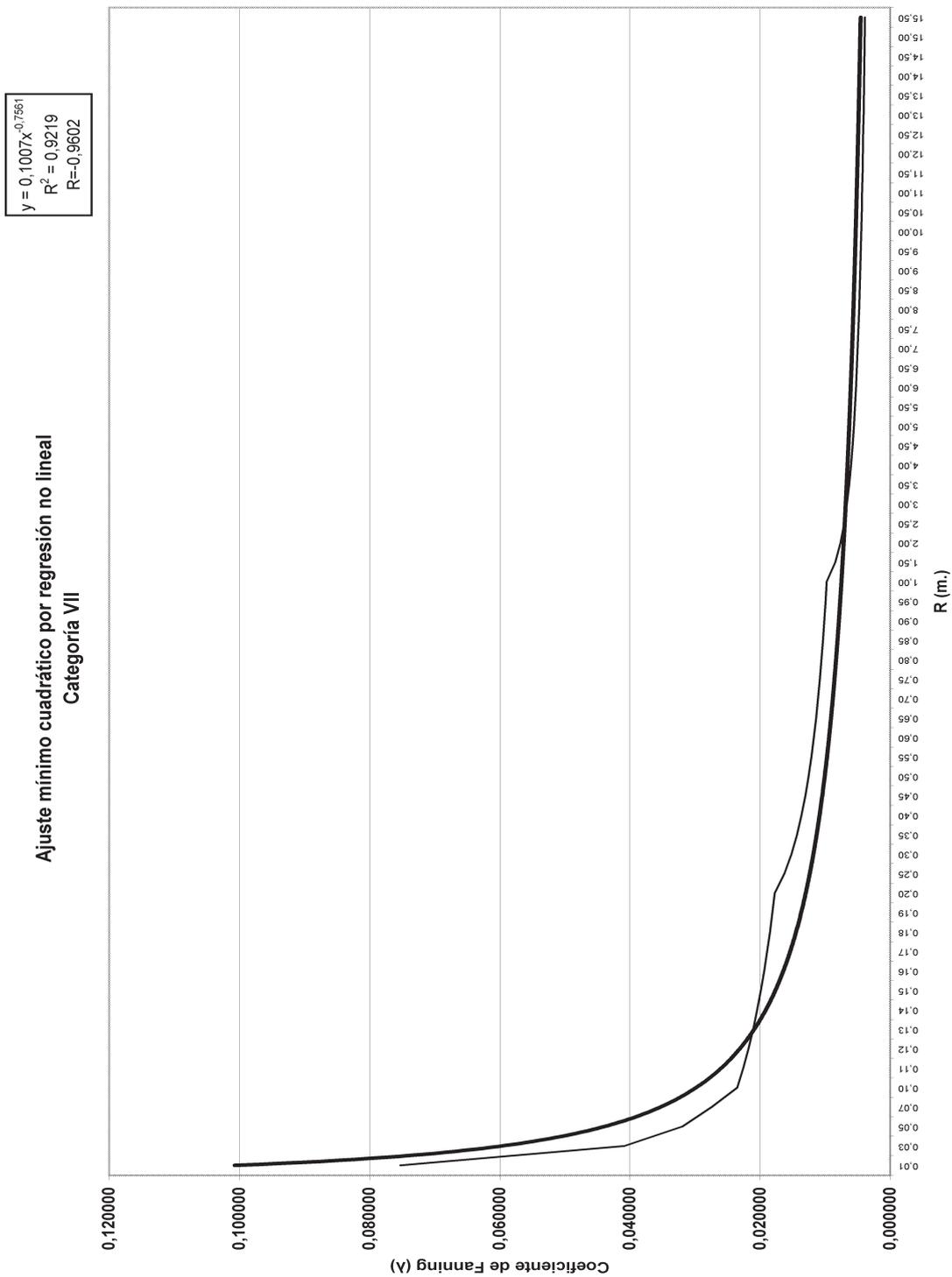


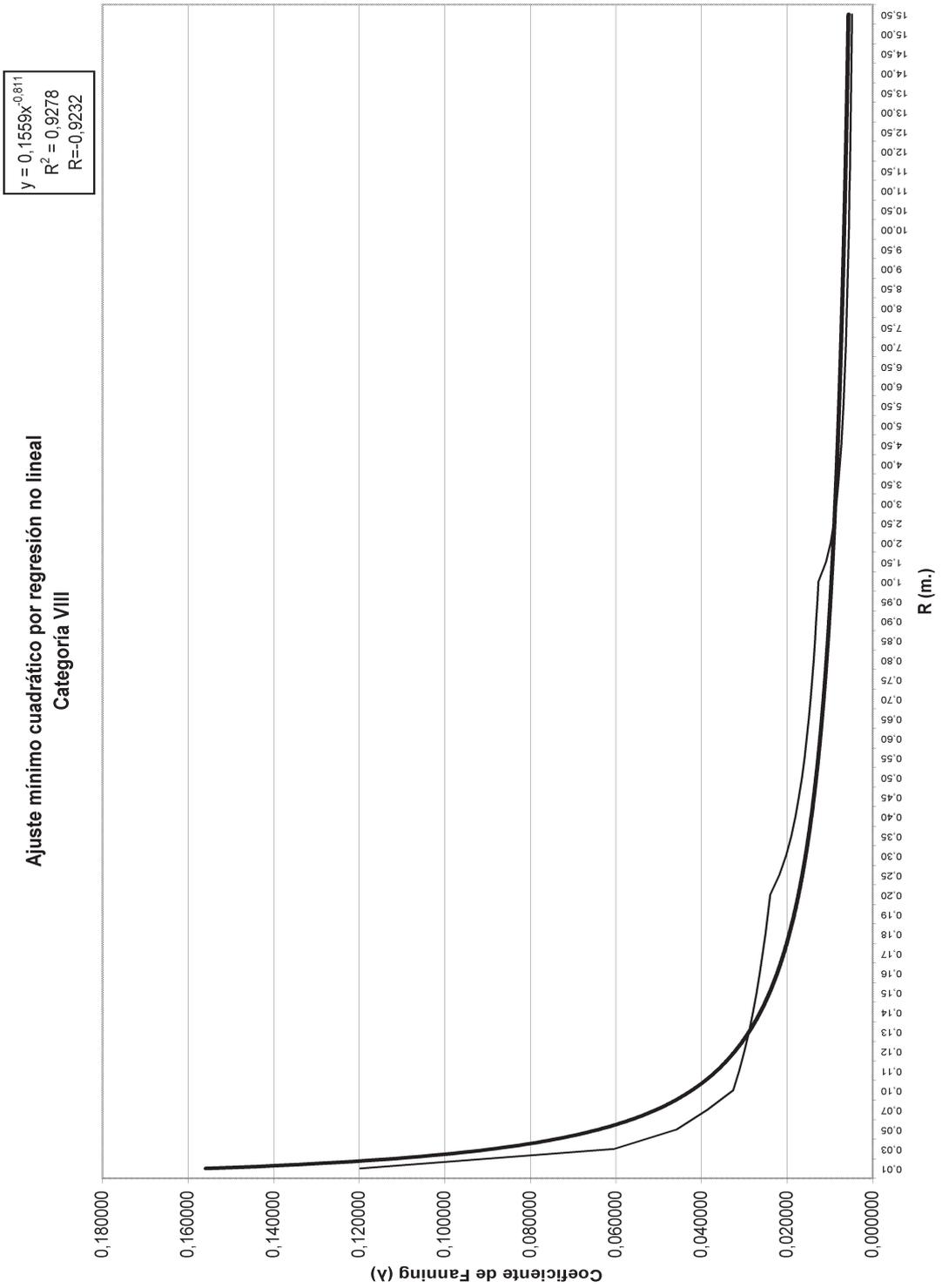


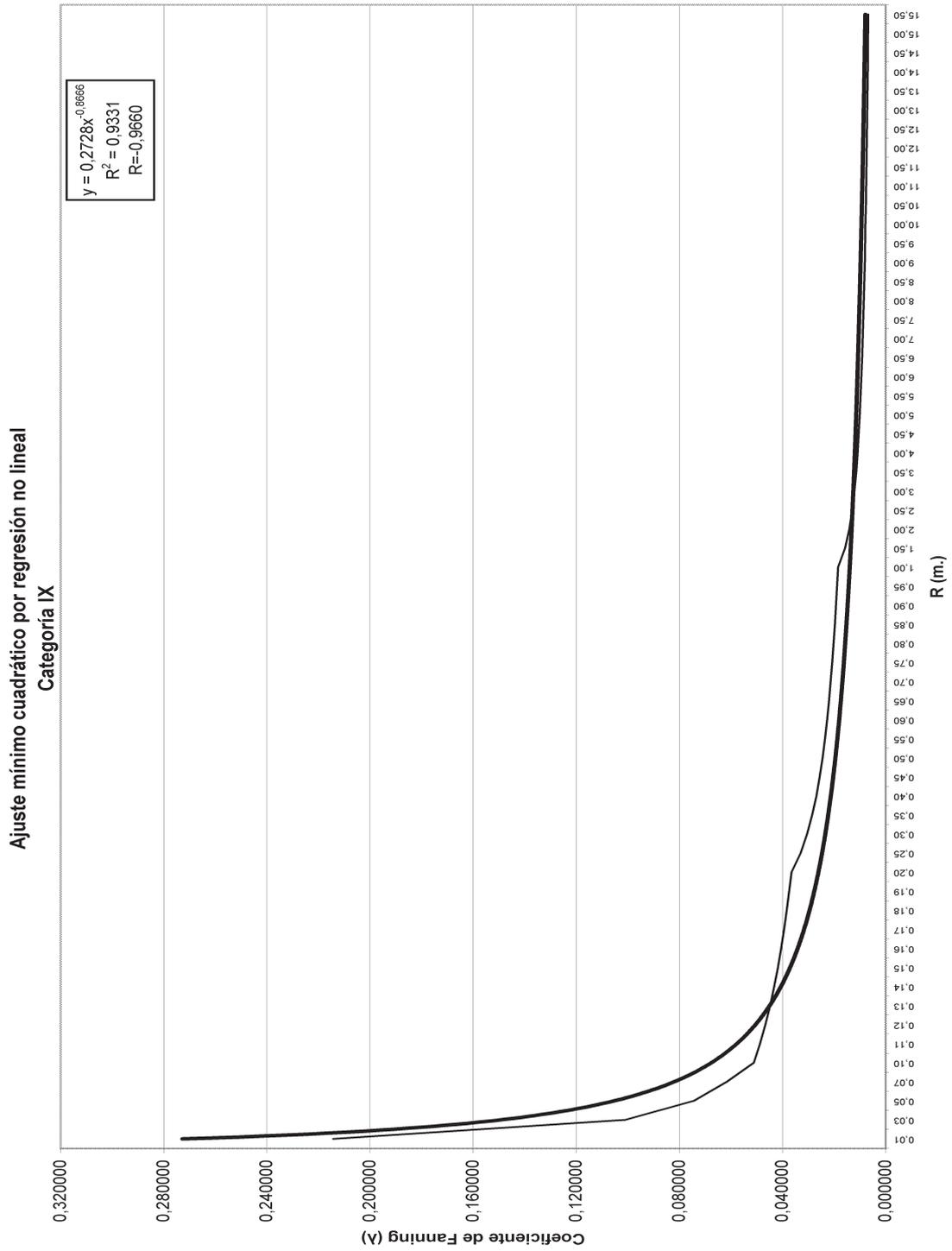


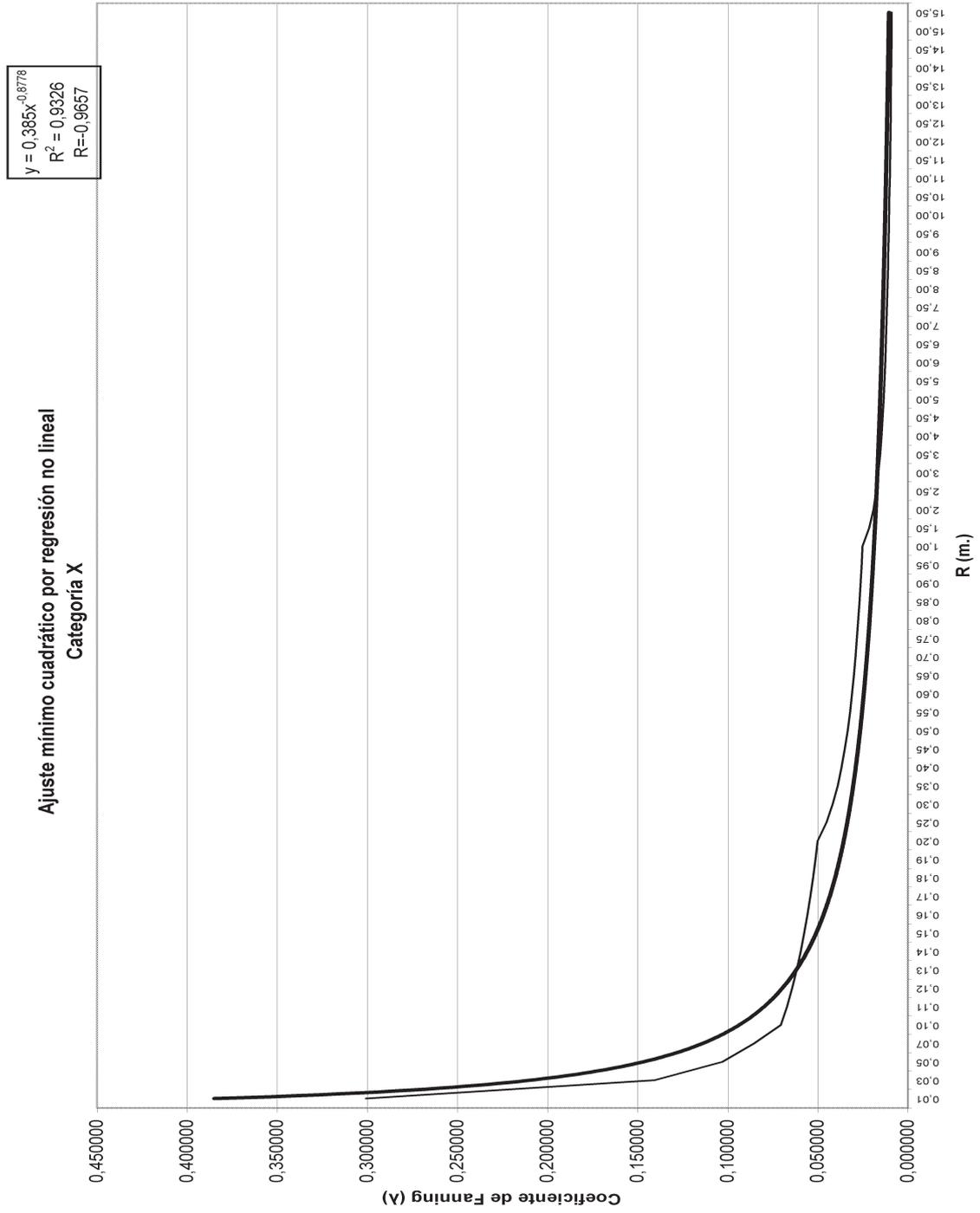


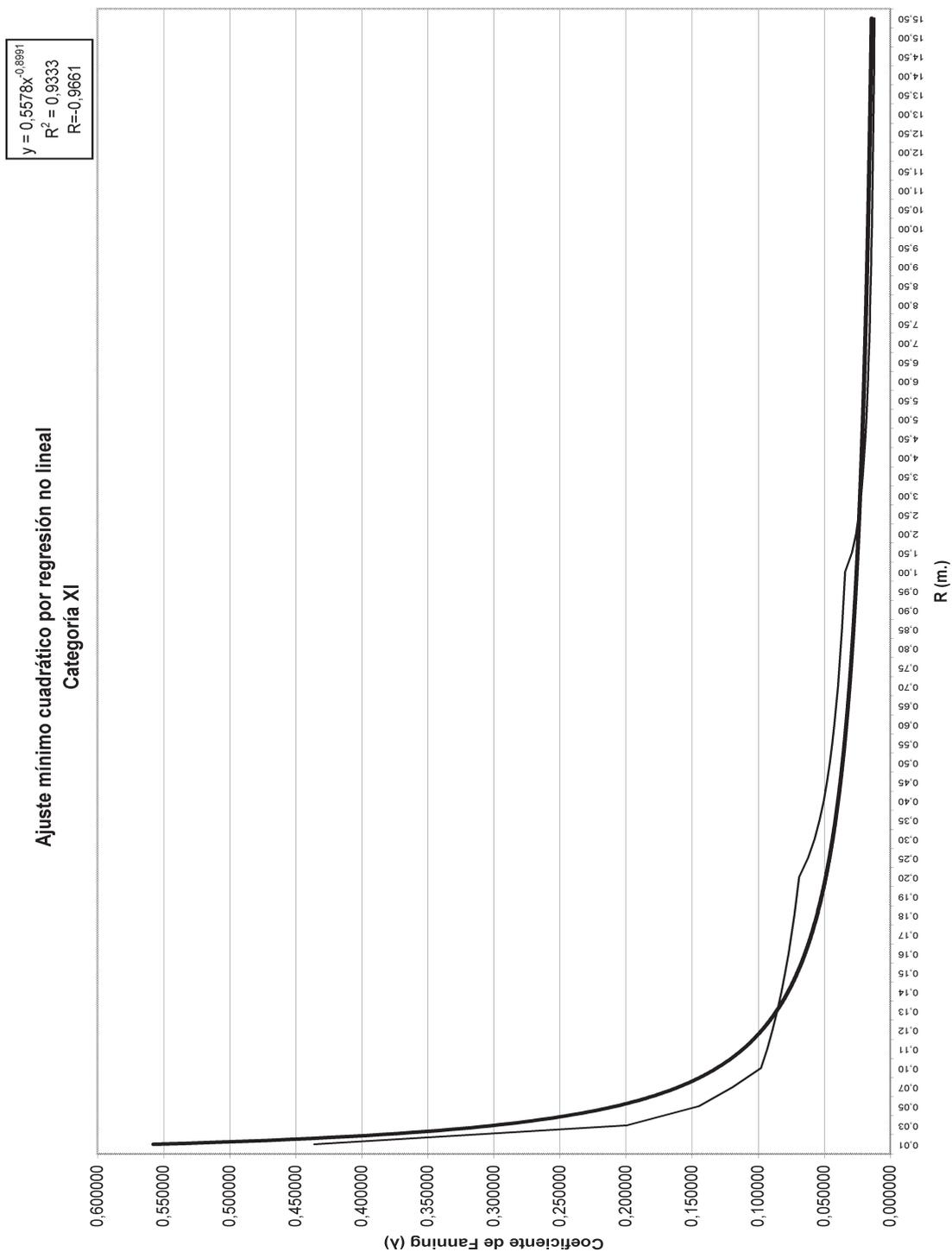


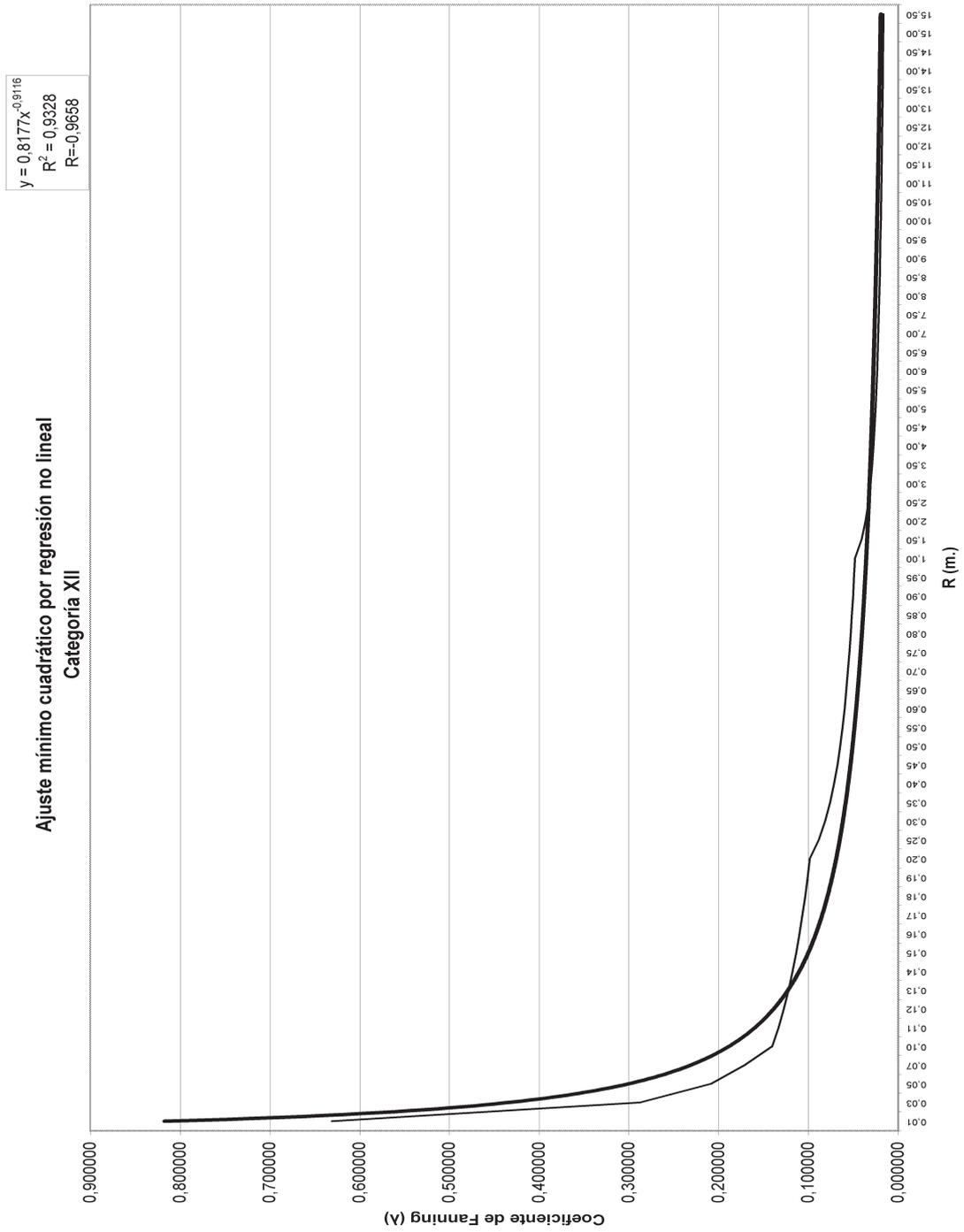


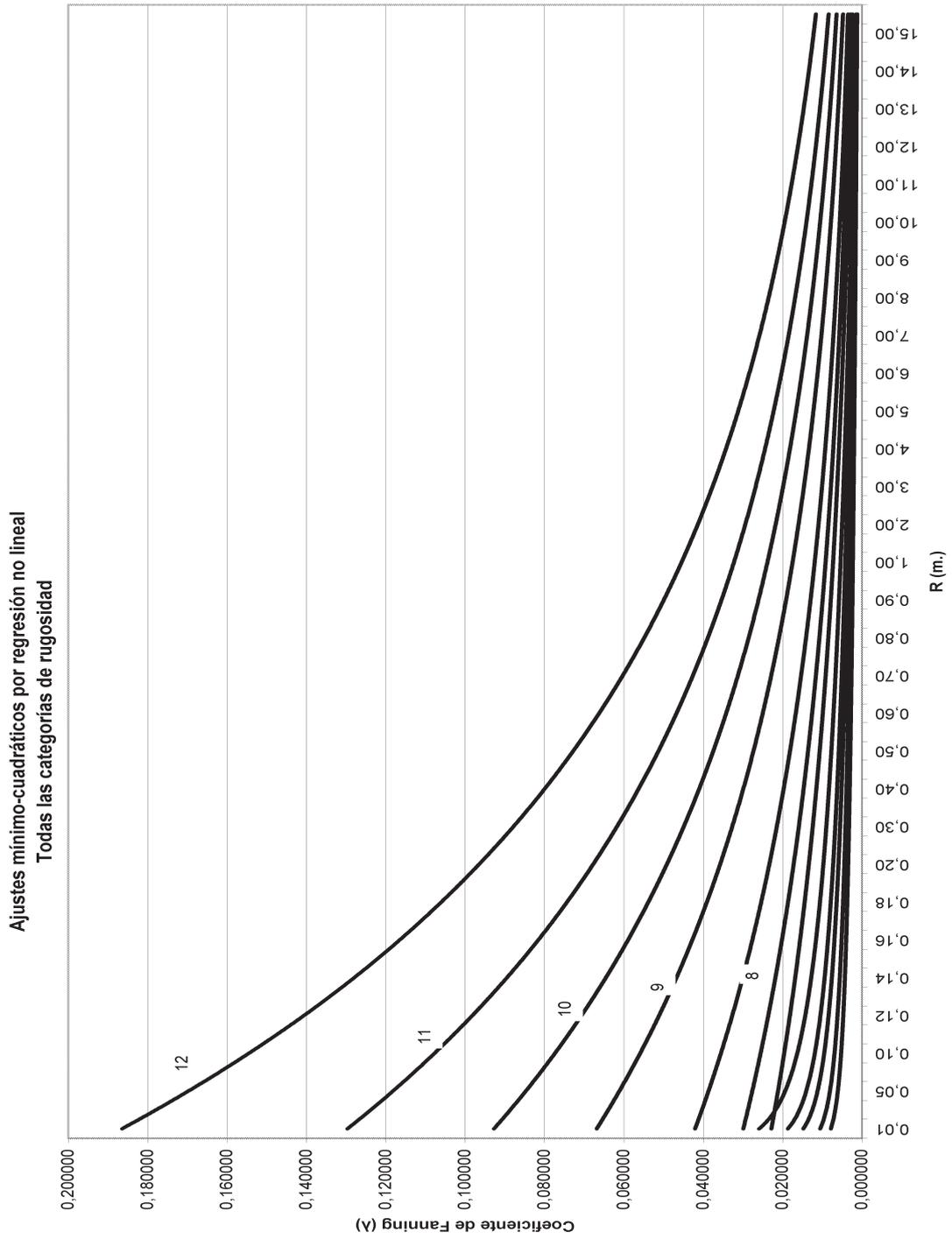




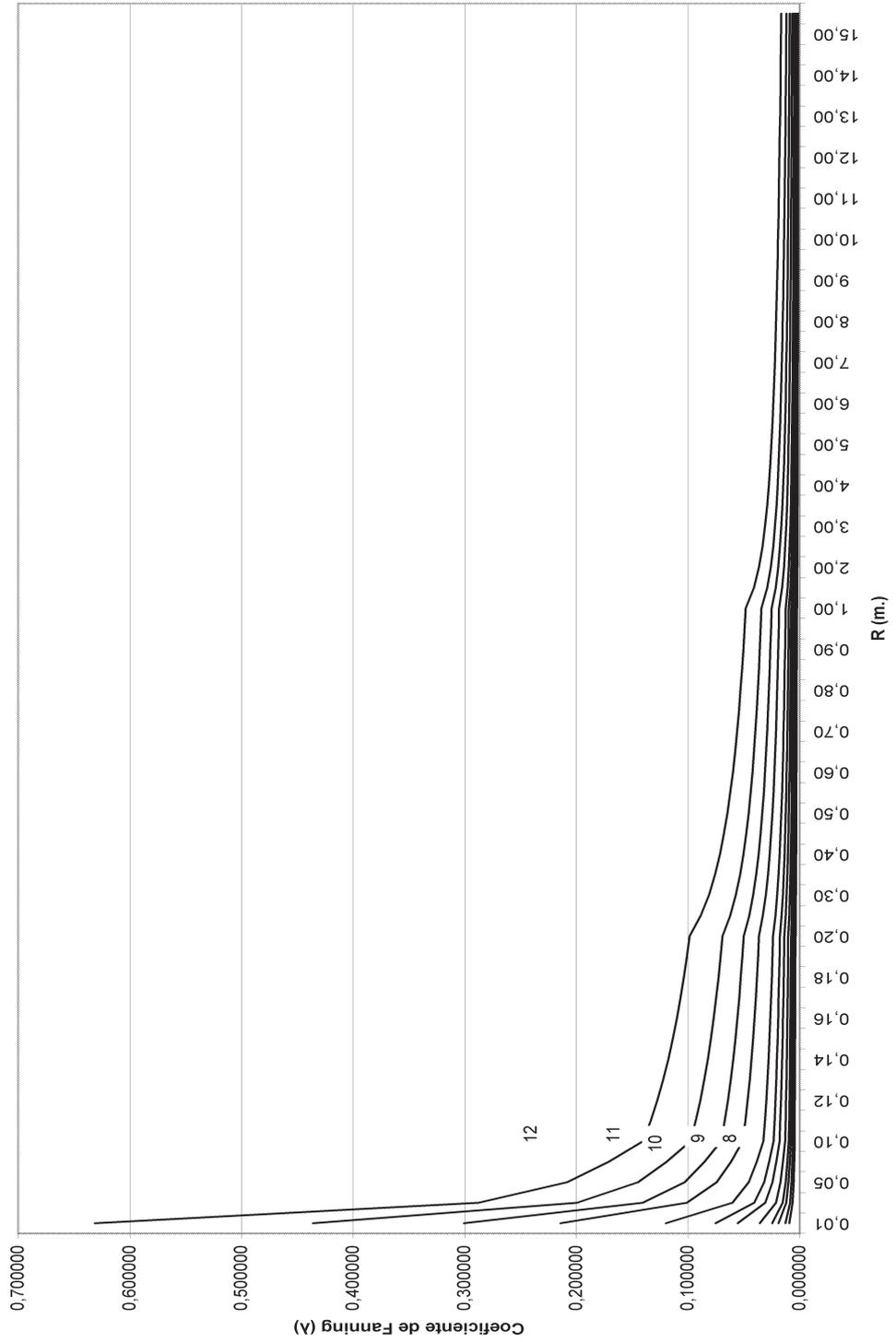








Función del Coeficiente de Fanning  
Todas las categorías de rugosidad



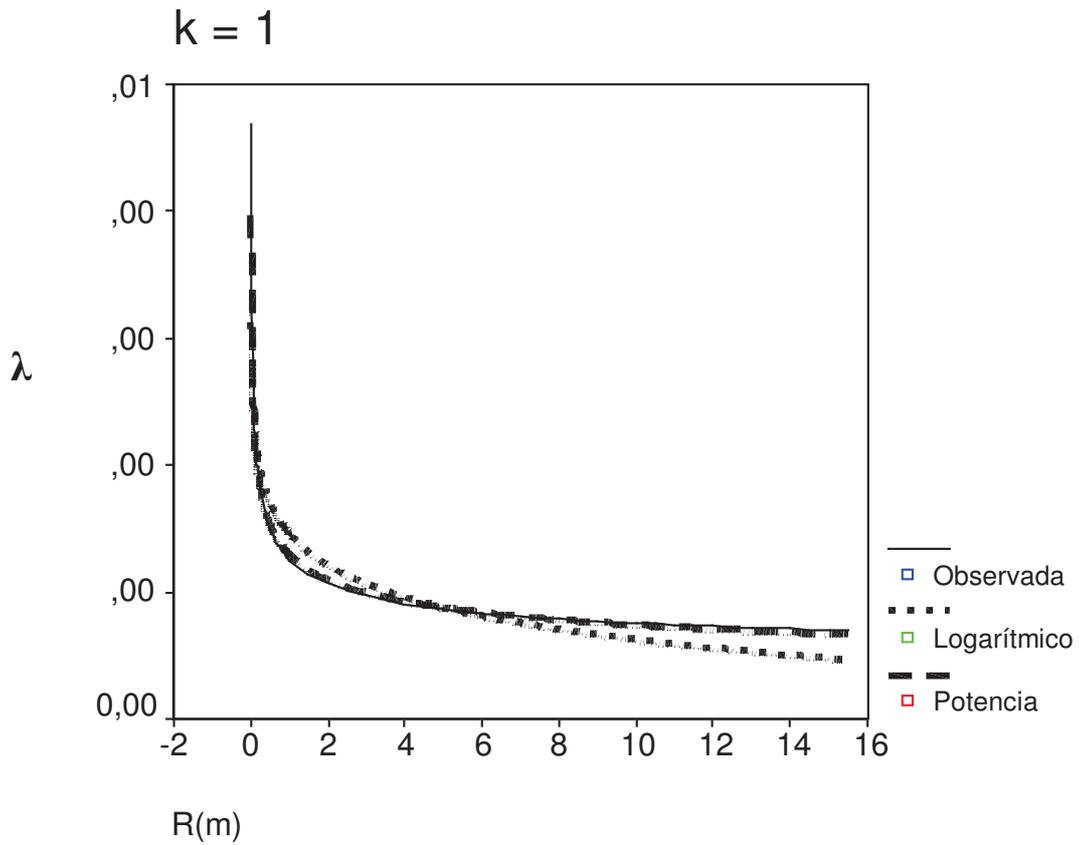


***9. Estimaciones curvilíneas***

Para  $k = 1$   
 $\lambda = 0,0026 \cdot R^{-0,2430}$  (Potencial)

Variable independiente: R (m)

V.Dependiente:	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
	LIN	,456	58	48,53	,000	,0036	-,0002	
	<b>LOG</b>	,875	58	407,49	,000	<b>,0029</b>	<b>-,0007</b>	
	QUA	,589	57	40,87	,000	,0040	-,0006	3,0E-05
	COM	,684	58	125,54	,000	,0034	,9257	
	<b>POW</b>	,995	58	11711,2	,000	<b>,0026</b>	<b>-,2430</b>	
	EXP	,684	58	125,54	,000	,0034	-,0772	

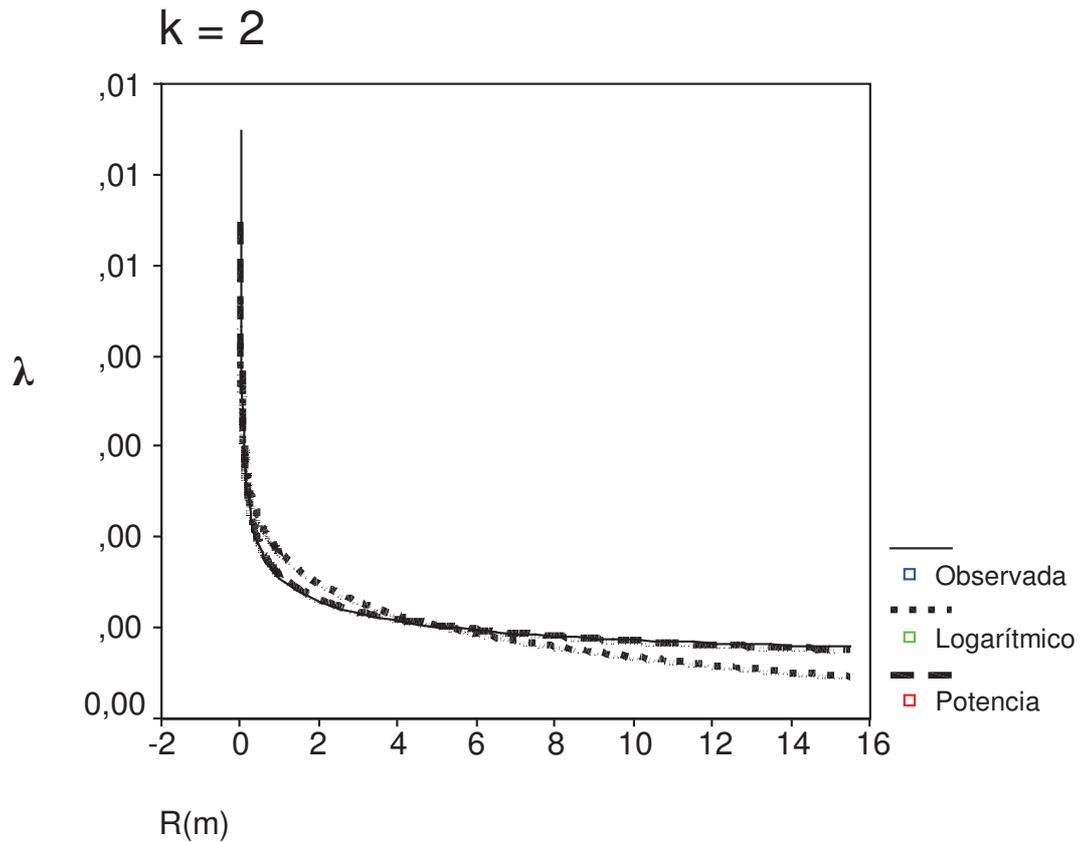


Para  $k = 2$

$$\lambda = 0,0032 \cdot R^{-0,2691} \quad (\text{Potencial})$$

Variable independiente: R(m)

V.dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
LIN	,438	58	45,13	,000	,0046	-,0003		
<b>LOG</b>	,859	58	353,71	,000	<b>,0037</b>	<b>-,0010</b>		
QUA	,568	57	37,52	,000	,0051	-,0008		4,2E-05
COM	,692	58	130,24	,000	,0043	,9177		
<b>POW</b>	,996	58	15046,2	,000	<b>,0032</b>	<b>-,2691</b>		
EXP	,692	58	130,24	,000	,0043	-,0859		



Para  $k = 3$

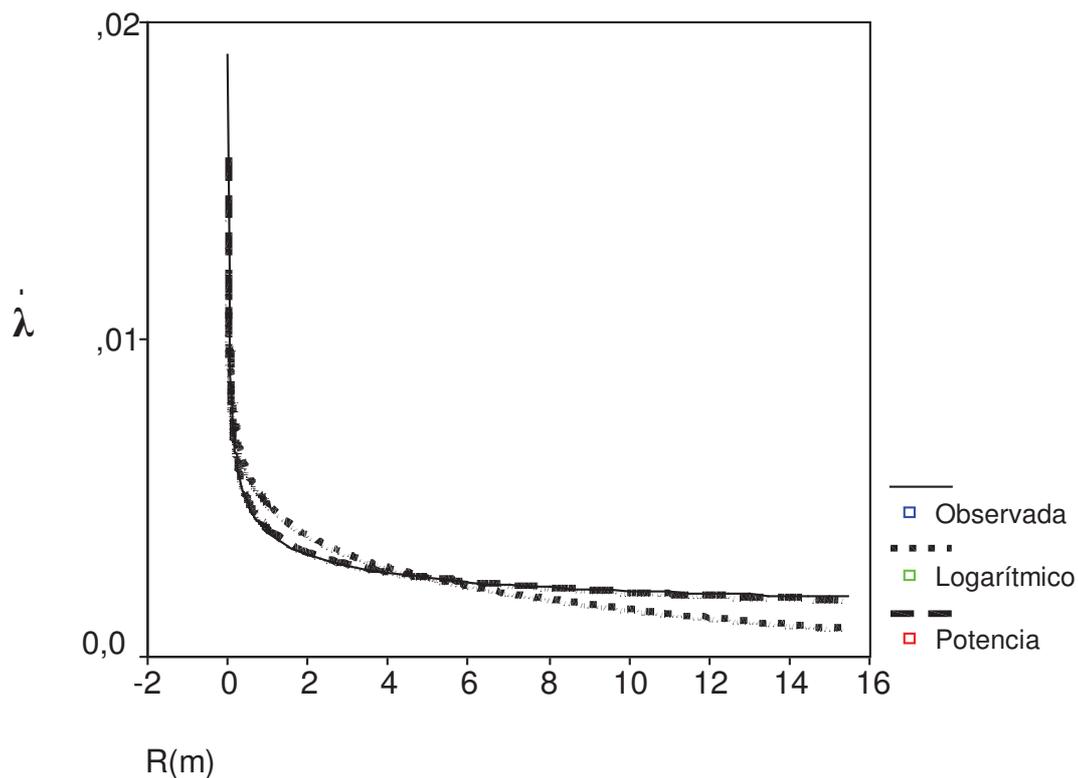
$$\lambda = 0,0040 \cdot R^{-0,2952}$$

(Potencial)

Variable independiente: R(m)

V.dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
LIN	,410	58	40,35	,000	,0062	-,0004		
<b>LOG</b>	,833	58	288,63	,000	<b>,0048</b>	<b>-,0014</b>		
QUA	,536	57	32,94	,000	,0069	-,0012	5,9E-05	
COM	,694	58	131,71	,000	,0057	,9099		
<b>POW</b>	,996	58	15526,5	,000	<b>,0040</b>	<b>-,2952</b>		
EXP	,694	58	131,71	,000	,0057	-,0944		

$k = 3$



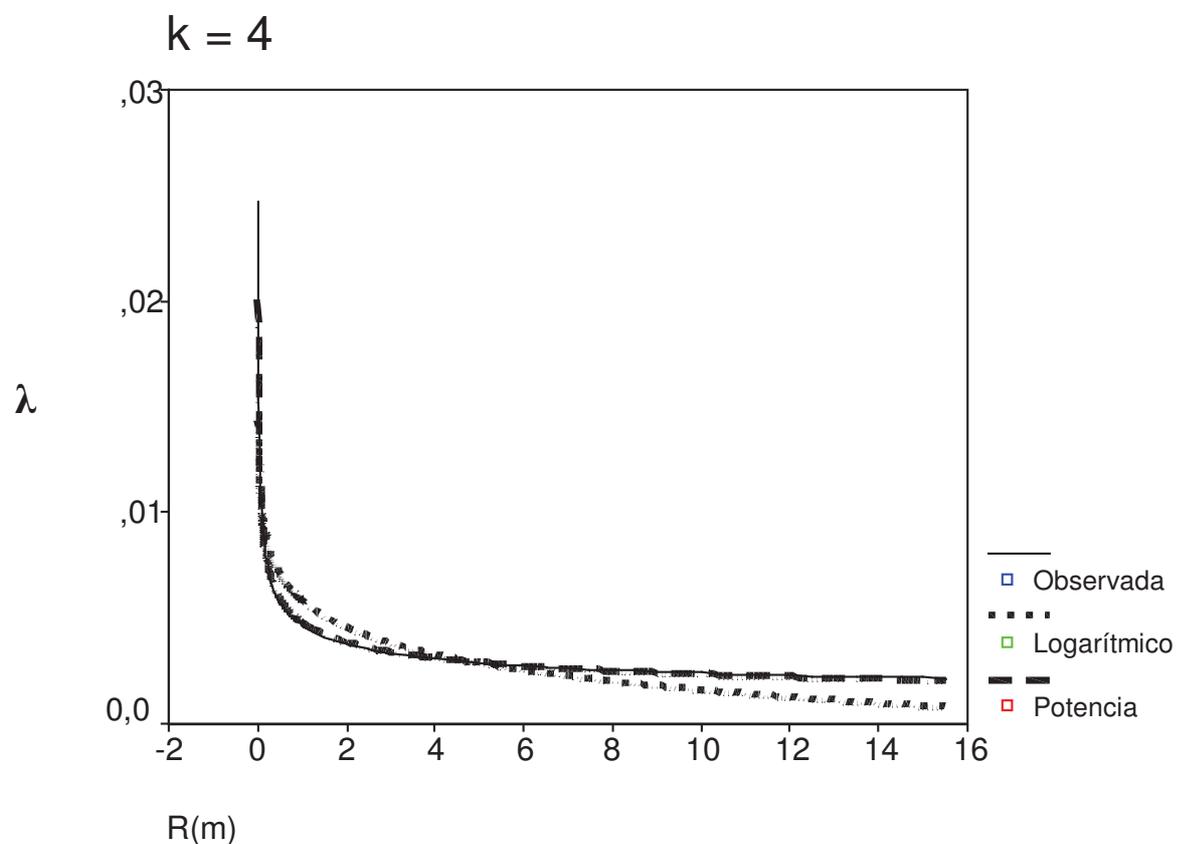
Para  $k = 4$

$$\lambda = 0,0048 \cdot R^{-0,3112}$$

(Potencial)

Variable independiente: R(m)

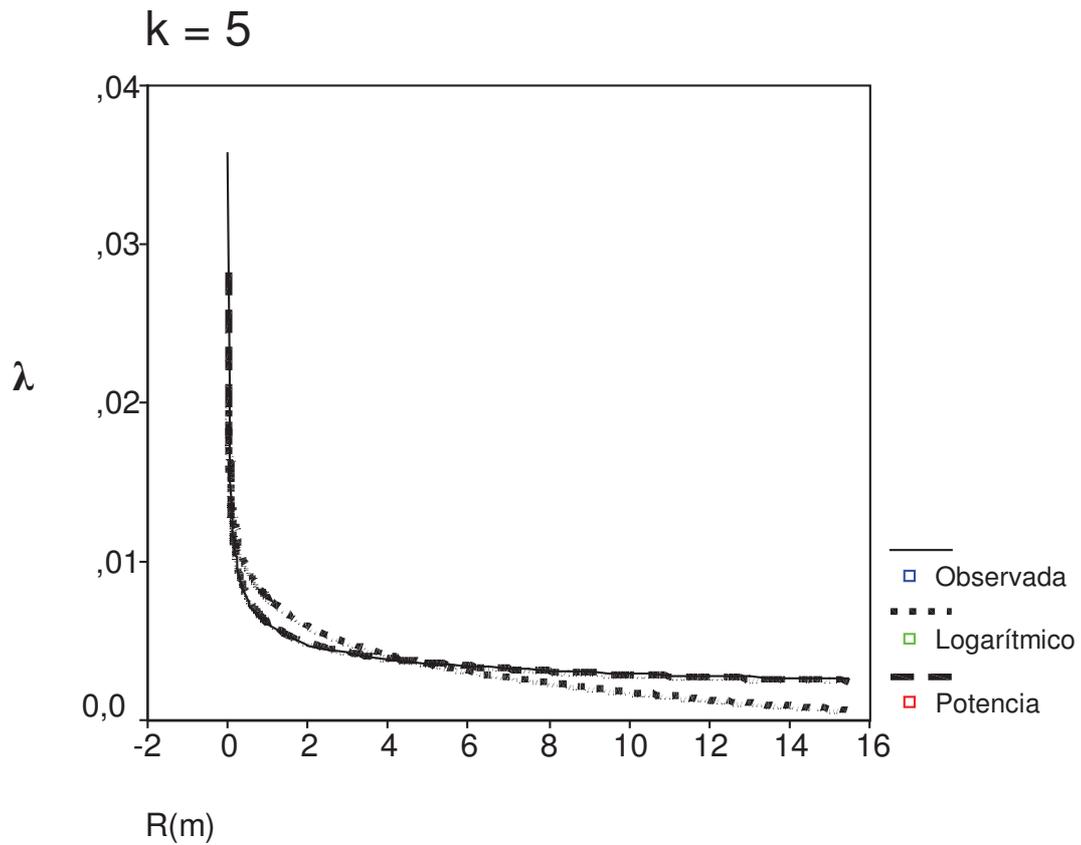
V.dependiente	Mth	Rsqu	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
LIN	,392	58	37,47	,000	,0075	-,0005		
<b>LOG</b>	,814	58	253,96	,000	<b>,0058</b>	<b>-,0018</b>		
QUA	,515	57	30,25	,000	,0085	-,0015	7,6E-05	
<b>POW</b>	,996	58	15598,9	,000	<b>,0048</b>	<b>-,3112</b>		
S	,391	58	37,22	,000	-5,5390	,0275		
EXP	,696	58	132,65	,000	,0069	-,0996		



Para  $k = 5$   
 $\lambda = 0,0062 \cdot R^{-0,3308}$  (Potencial)

Variable independiente: R (m)

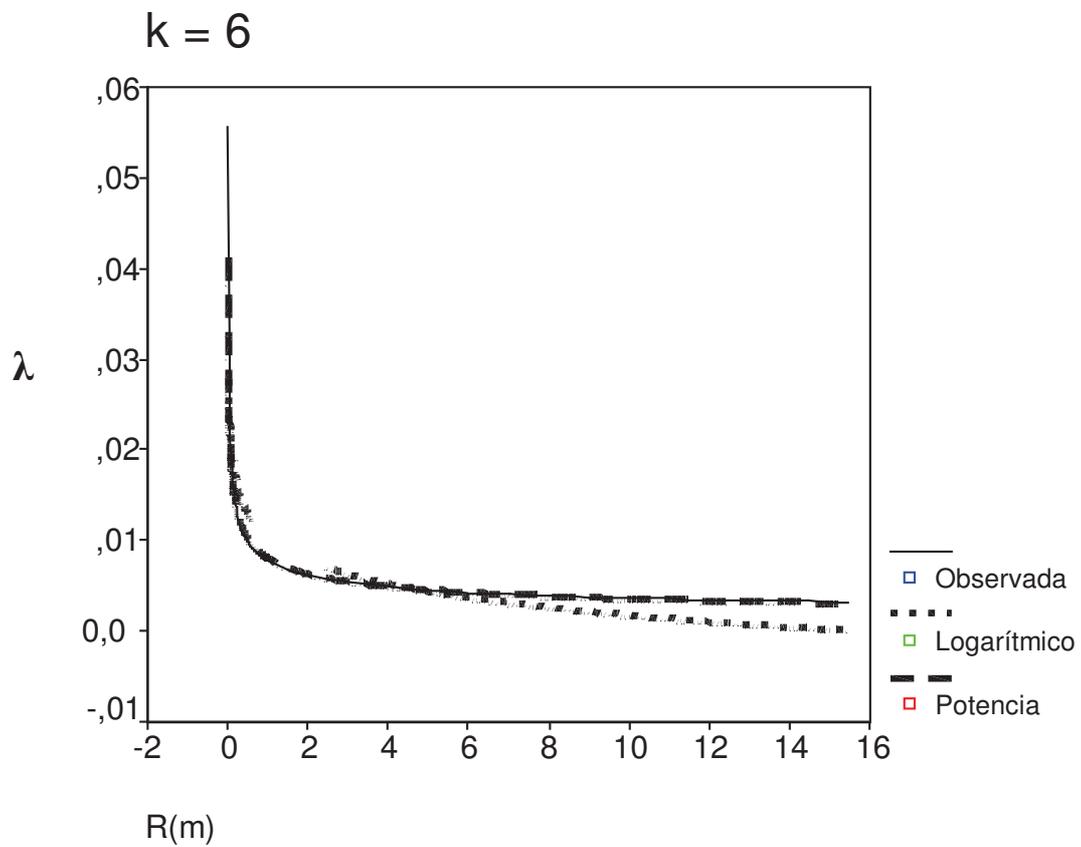
V.dependiente	Mth	Rsqu	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
LIN	,367	58	33,60	,000	,0100	-,0007		
<b>LOG</b>	<b>,786</b>	58	212,70	<b>,000</b>	<b>,0077</b>	<b>-,0026</b>		
QUA	,484	57	26,74	,000	,0114	-,0021	,0001	
<b>POW</b>	<b>,996</b>	58	14263,3	<b>,000</b>	<b>,0062</b>	<b>-,3308</b>		
S	,395	58	37,80	,000	-5,3007	,0294		
EXP	,695	58	132,47	,000	,0090	-,1059		



Para  $k = 6$   
 $\lambda = 0,0080 \cdot R^{-0,3545}$  (Potencial)

Variable independiente: R(m)

V.dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
LIN	,324	58	27,78	,000	,0137	-,0010		
<b>LOG</b>	,734	58	160,18	,000	<b>,0105</b>	<b>-,0038</b>		
QUA	,432	57	21,65	,000	,0157	-,0030	,0002	
COM	,688	58	127,97	,000	,0121	,8932		
<b>POW</b>	,994	58	10010,6	,000	<b>,0080</b>	<b>-,3545</b>		
EXP	,688	58	127,97	,000	,0121	-,1129		



TABLAS Y GRÁFICOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO I

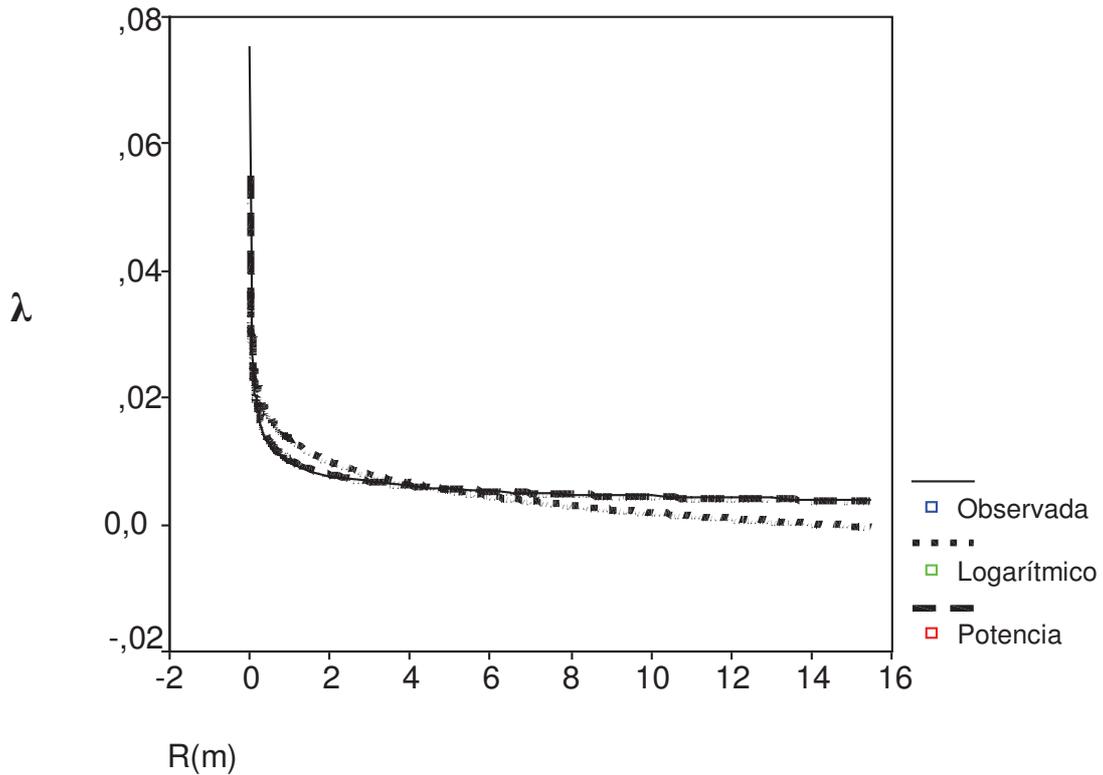
Para  $k = 7$

$$\lambda = 0,0102 \cdot R^{-0,3665} \quad (\text{Potencial})$$

Variable independiente: R (m)

V.dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
LIN	,312	58	26,27	,000	,0178	-,0013		
<b>LOG</b>	<b>,719</b>	58	148,04	<b>,000</b>	<b>,0135</b>	<b>-,0050</b>		
QUA	,417	57	20,36	,000	,0203	-,0039	,0002	
COM	,690	58	129,23	,000	,0155	,8896		
<b>POW</b>	<b>,994</b>	58	10226,5	<b>,000</b>	<b>,0102</b>	<b>-,3665</b>		
EXP	,690	58	129,23	,000	,0155	-,1169		

$k = 7$

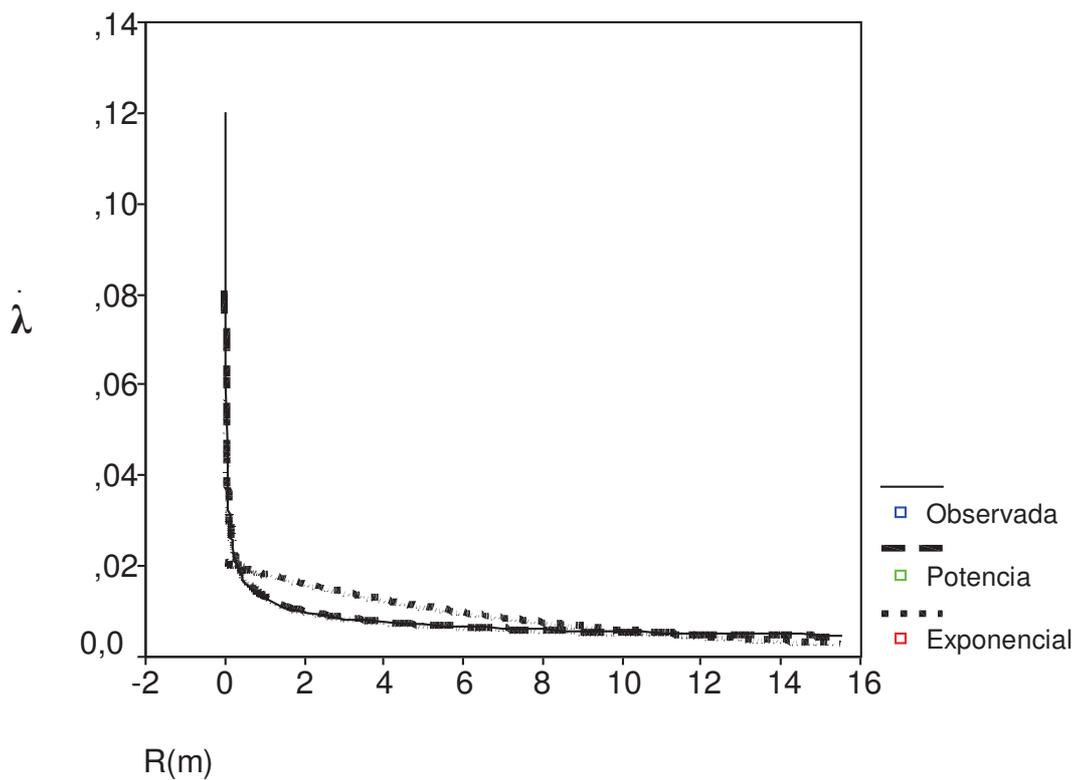


Per a k = 8  
 $\lambda = 0,0133 \cdot R^{-0,3914}$  (Potencial)

Variable independiente: R(m)

V.dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
LIN	,268	58	21,25	,000	,0246	-,0018		
LOG	,660	58	112,55	,000	,0185	-,0075		
QUA	,363	57	16,23	,000	,0284	-,0057		,0003
COM	,681	58	123,88	,000	,0208	,8832		
<b>POW</b>	<b>,992</b>	<b>58</b>	<b>7333,24</b>	<b>,000</b>	<b>,0133</b>	<b>-,3914</b>		
<b>EXP</b>	<b>,681</b>	<b>58</b>	<b>123,88</b>	<b>,000</b>	<b>,0208</b>	<b>-,1242</b>		

k = 8



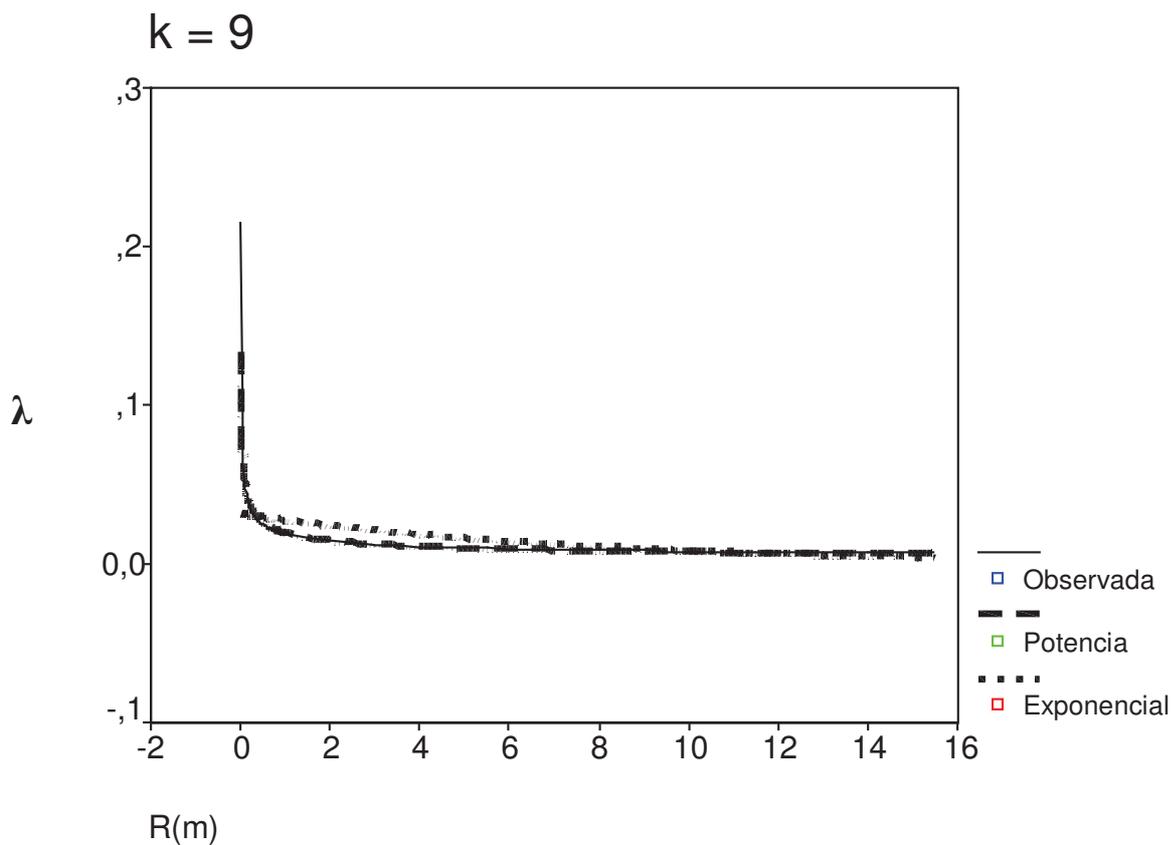
Para  $k = 9$

$$\lambda = 0,0197 \cdot R^{-0,4166}$$

(Potencial)

Variable independiente: R(m)

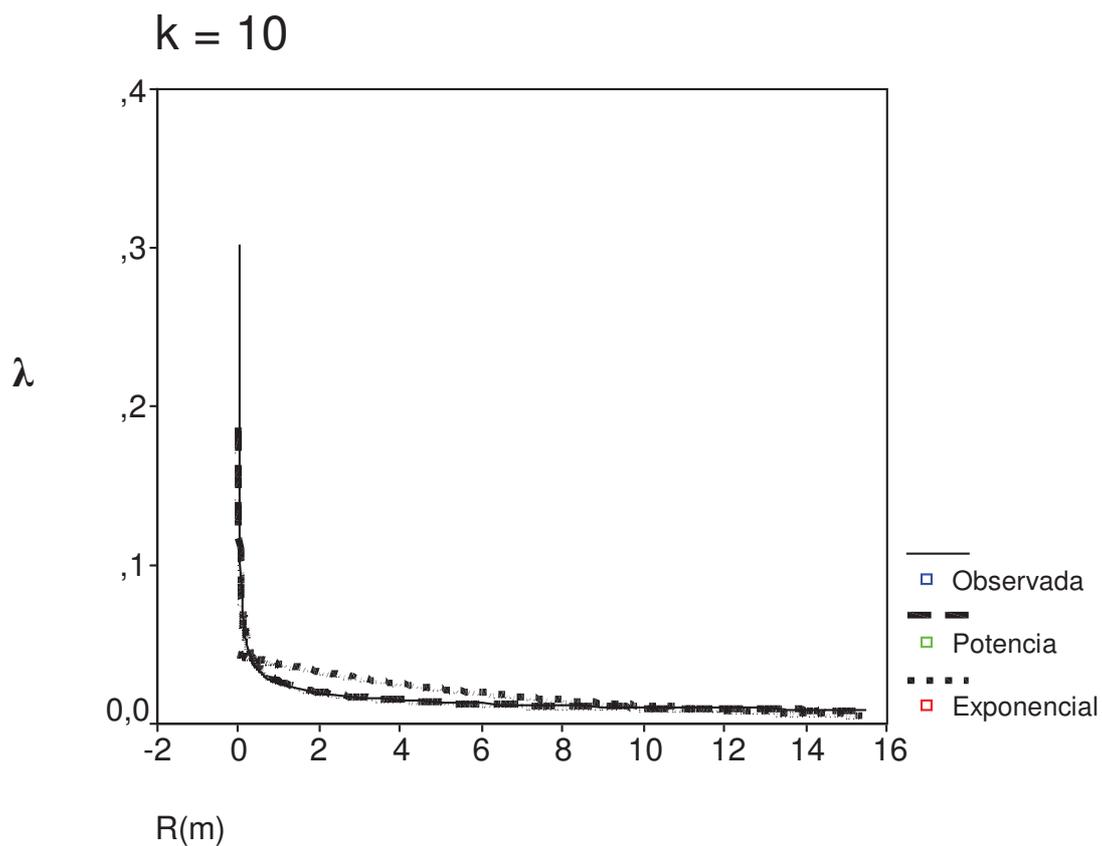
V.dependiente	Mth	Rsqu	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
LIN	,230	58	17,36	,000	,0387	-,0030		
LOG	,605	58	88,85	,000	,0288	-,0125		
QUA	,316	57	13,14	,000	,0450	-,0095	,0005	
COM	,672	58	118,88	,000	,0315	,8768		
<b>POW</b>	<b>,990</b>	<b>58</b>	<b>5673,76</b>	<b>,000</b>	<b>,0197</b>	<b>-,4166</b>		
<b>EXP</b>	<b>,672</b>	<b>58</b>	<b>118,88</b>	<b>,000</b>	<b>,0315</b>	<b>-,1315</b>		



Para  $k = 10$   
 $\lambda = 0,0268 \cdot R^{-0,4222}$  (Potencial)

Variable independiente: R(m)

V.dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
	LIN	,227	58	16,99	,000	,0534	-,0041	
	LOG	,599	58	86,65	,000	,0397	-,0174	
	QUA	,311	57	12,84	,000	,0622	-,0132	,0007
	COM	,674	58	119,85	,000	,0433	,8751	
	<b>POW</b>	<b>,990</b>	<b>58</b>	<b>5820,31</b>	<b>,000</b>	<b>,0268</b>	<b>-,4222</b>	
	<b>EXP</b>	<b>,674</b>	<b>58</b>	<b>119,85</b>	<b>,000</b>	<b>,0433</b>	<b>-,1334</b>	



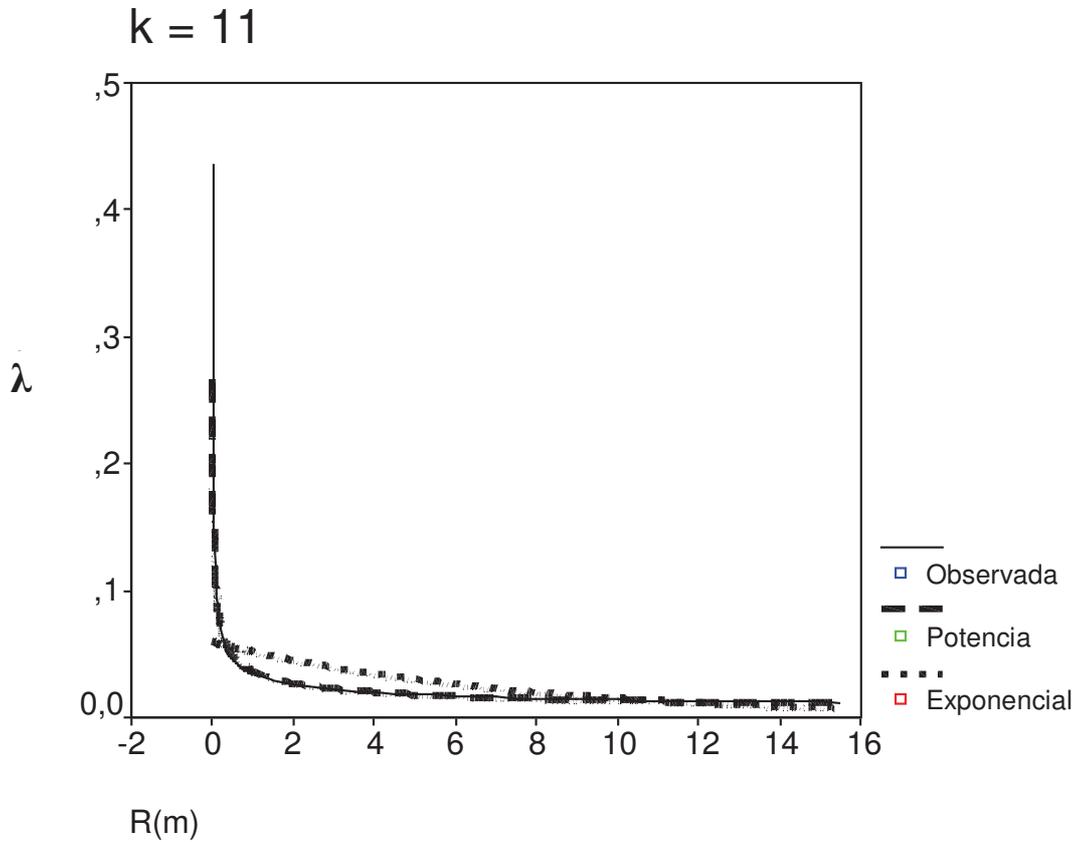
Para  $k = 11$

$$\lambda = 0,0364 \cdot R^{-0,4322}$$

(Potencial)

Variable independiente: R (m)

V.dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
LIN	,216	58	15,97	,000	,0743	-,0058		
LOG	,583	58	80,93	,000	,0551	-,0248		
QUA	,297	57	12,05	,000	,0867	-,0186		,0010
COM	,673	58	119,43	,000	,0594	,8724		
<b>POW</b>	<b>,990</b>	<b>58</b>	<b>5629,16</b>	<b>,000</b>	<b>,0364</b>	<b>-,4322</b>		
<b>EXP</b>	<b>,673</b>	<b>58</b>	<b>119,43</b>	<b>,000</b>	<b>,0594</b>	<b>-,1365</b>		



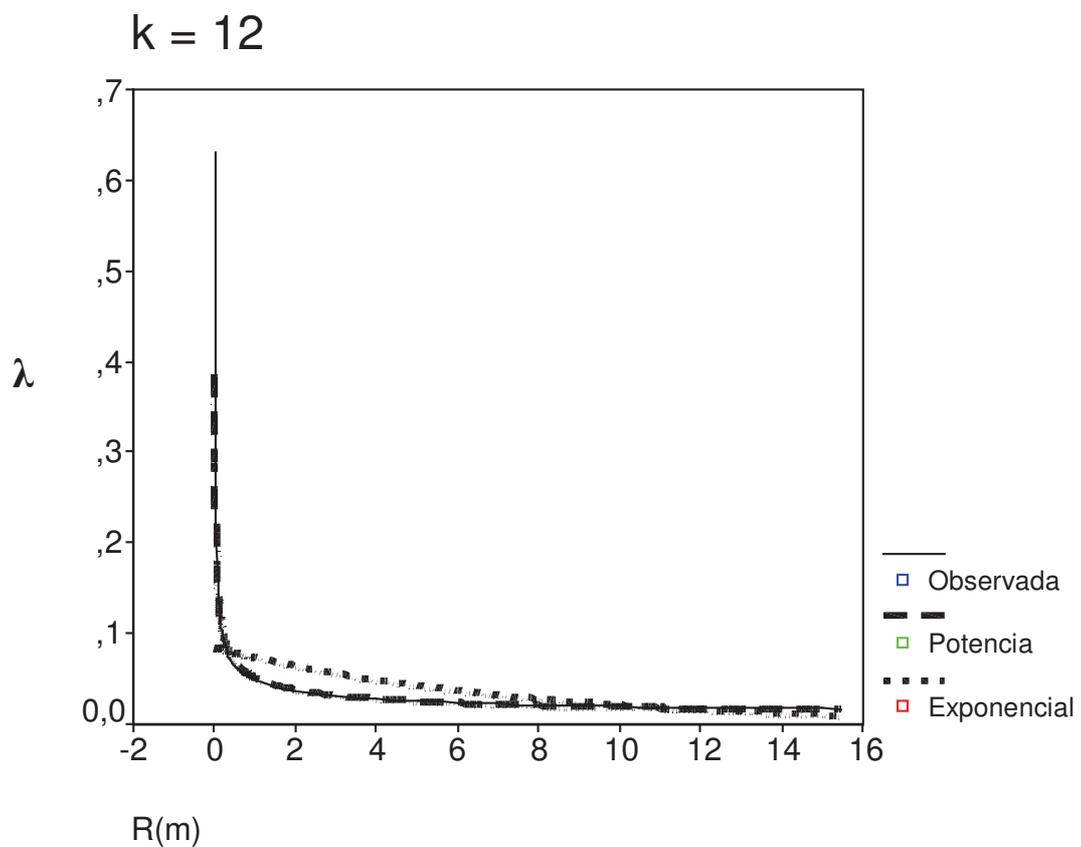
Para  $k = 12$

$$\lambda = 0,0514 \cdot R^{-0,4384}$$

(Potencial)

Variable independiente: R(m)

V.dependiente	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1	b2
LIN	,213	58	15,73	,000	,1063	-,0083		
LOG	,579	58	79,76	,000	,0786	-,0358		
QUA	,294	57	11,87	,000	,1242	-,0268		,0014
COM	,674	58	120,07	,000	,0845	,8706		
<b>POW</b>	<b>,990</b>	<b>58</b>	<b>5834,41</b>	<b>,000</b>	<b>,0514</b>	<b>-,4384</b>		
<b>EXP</b>	<b>,674</b>	<b>58</b>	<b>120,07</b>	<b>,000</b>	<b>,0845</b>	<b>-,1386</b>		





**-ANEJO NÚM. 2-**

**TABLAS Y GRÁFICOS CORRESPONDIENTES AL  
CAPÍTULO V**

*1. Caudales aforados en la EA n°: 27 de Tortosa, con sus medias  
móviles*



Caudales aforados en la E.A. Núm. 27 de Tortosa, expresados en m3/seg., con sus medias móviles

Núm. Años	Núm. Orden	Año hidráulico	X <sub>t</sub>	X <sub>s</sub>	X <sub>s+3</sub>
36	53	1964-1965	342	474	461
37	54	1965-1966	598	460	482
38	55	1966-1967	441	511	489
39	56	1967-1968	493	497	504
40	57	1968-1969	557	503	497
41	58	1969-1970	460	491	502
42	59	1970-1971	455	511	499
43	60	1971-1972	619	494	491
44	61	1972-1973	408	467	456
45	62	1973-1974	375	407	411
46	63	1974-1975	437	360	389
47	64	1975-1976	268	399	401
48	65	1976-1977	483	444	459
49	66	1977-1978	570	535	485
50	67	1978-1979	541	475	465
51	68	1979-1980	314	385	381
52	69	1980-1981	299	284	332
53	70	1981-1982	238	328	319
54	71	1982-1983	447	346	359
55	72	1983-1984	352	402	358
56	73	1984-1985	406	326	337
57	74	1985-1986	221	284	316
58	75	1986-1987	224	338	310
59	76	1987-1988	570	309	309
60	77	1988-1989	133	280	260
61	78	1989-1990	136	190	226
62	79	1990-1991	300	209	224
63	80	1991-1992	192	274	250
64	81	1992-1993	331	267	276
65	82	1993-1994	277	286	279
66	83	1994-1995	249	284	300
67	84	1995-1996	326	330	323
68	85	1996-1997	416	356	333
69	86	1997-1998	325	314	
70	87	1998-1999	201		

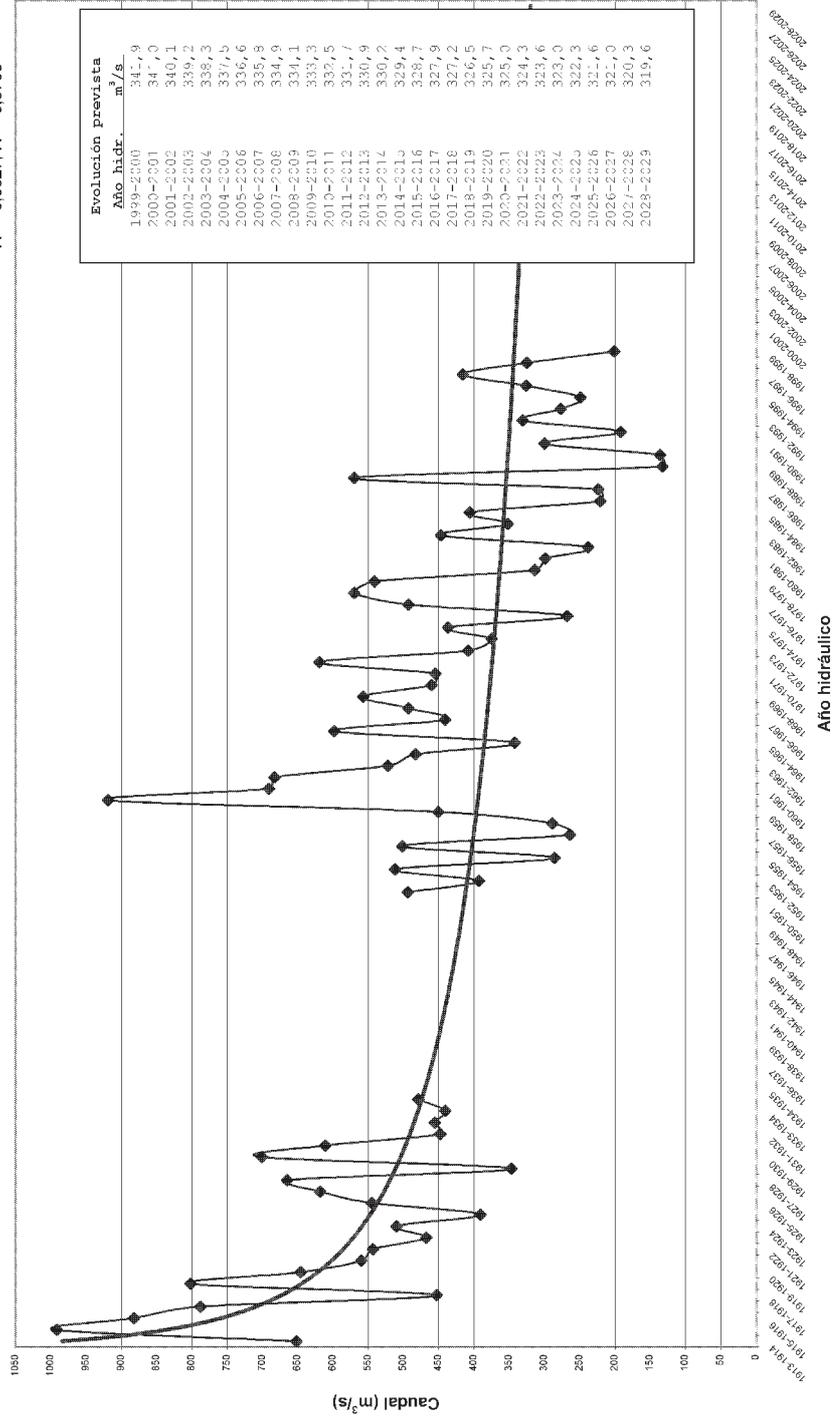
Núm. Años	Núm. Orden	Año hidráulico	X <sub>t</sub>	X <sub>s</sub>	X <sub>s+3</sub>
1	1	1913-1914	652		
2	2	1914-1915	992	842	
3	3	1915-1916	882	887	812
4	4	1916-1917	788	708	759
5	5	1917-1918	453	681	674
6	6	1918-1919	802	634	661
7	7	1919-1920	646	669	629
8	8	1920-1921	560	583	592
9	9	1921-1922	543	524	538
10	10	1922-1923	468	507	496
11	11	1923-1924	510	456	482
12	12	1924-1925	391	482	485
13	13	1925-1926	545	518	536
14	14	1926-1927	618	609	557
15	15	1927-1928	665	543	574
16	16	1928-1929	347	571	556
17	17	1929-1930	701	553	570
18	18	1930-1931	611	587	548
19	19	1931-1932	448	505	513
20	20	1932-1933	456	448	471
21	21	1933-1934	441	459	459
22	22	1934-1935	479	471	462
23	40	1951-1952	494	455	464
24	41	1952-1953	393	466	439
25	42	1953-1954	512	397	432
26	43	1954-1955	286	433	394
27	44	1955-1956	502	351	379
28	45	1956-1957	264	352	346
29	46	1957-1958	289	335	413
30	47	1958-1959	451	553	525
31	48	1959-1960	919	687	668
32	49	1960-1961	691	764	694
33	50	1961-1962	683	632	653
34	51	1962-1963	522	563	548
35	52	1963-1964	483	449	495



*2. Ajustes mínimo-cuadráticos por regresión no lineal*

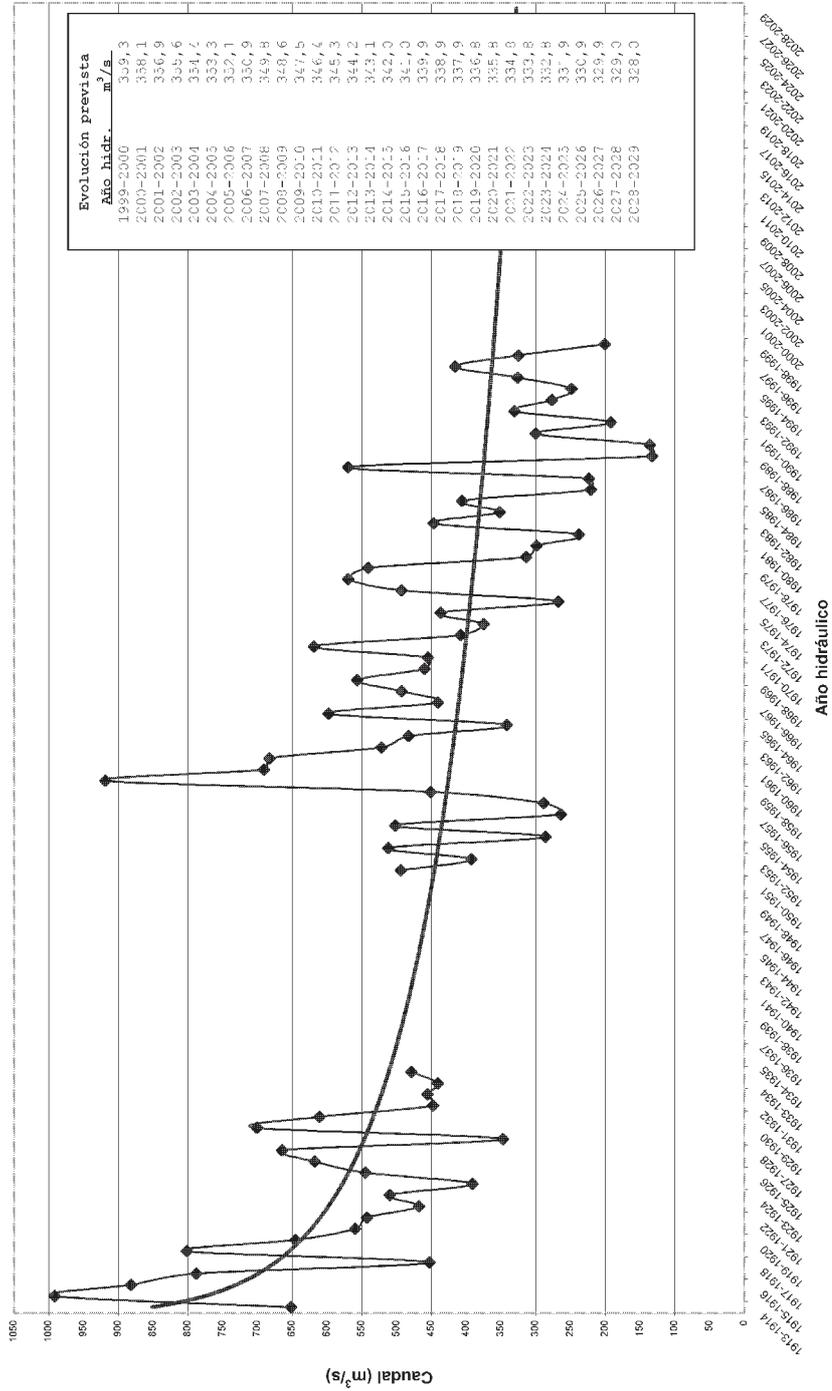


Media ( $X_t$ ) del caudal de 70 años en  
la estación foronómica num. 27 - Tortosa



Línea de tendencia de tipo logarítmico  
 $y = -109,86 \ln(x) + 851,21$   
 $R^2 = 0,3874; R = -0,6224$

Media ( $X_t$ ) del caudal de 70 años en  
 la estación toronómica núm. 27 - Tortosa

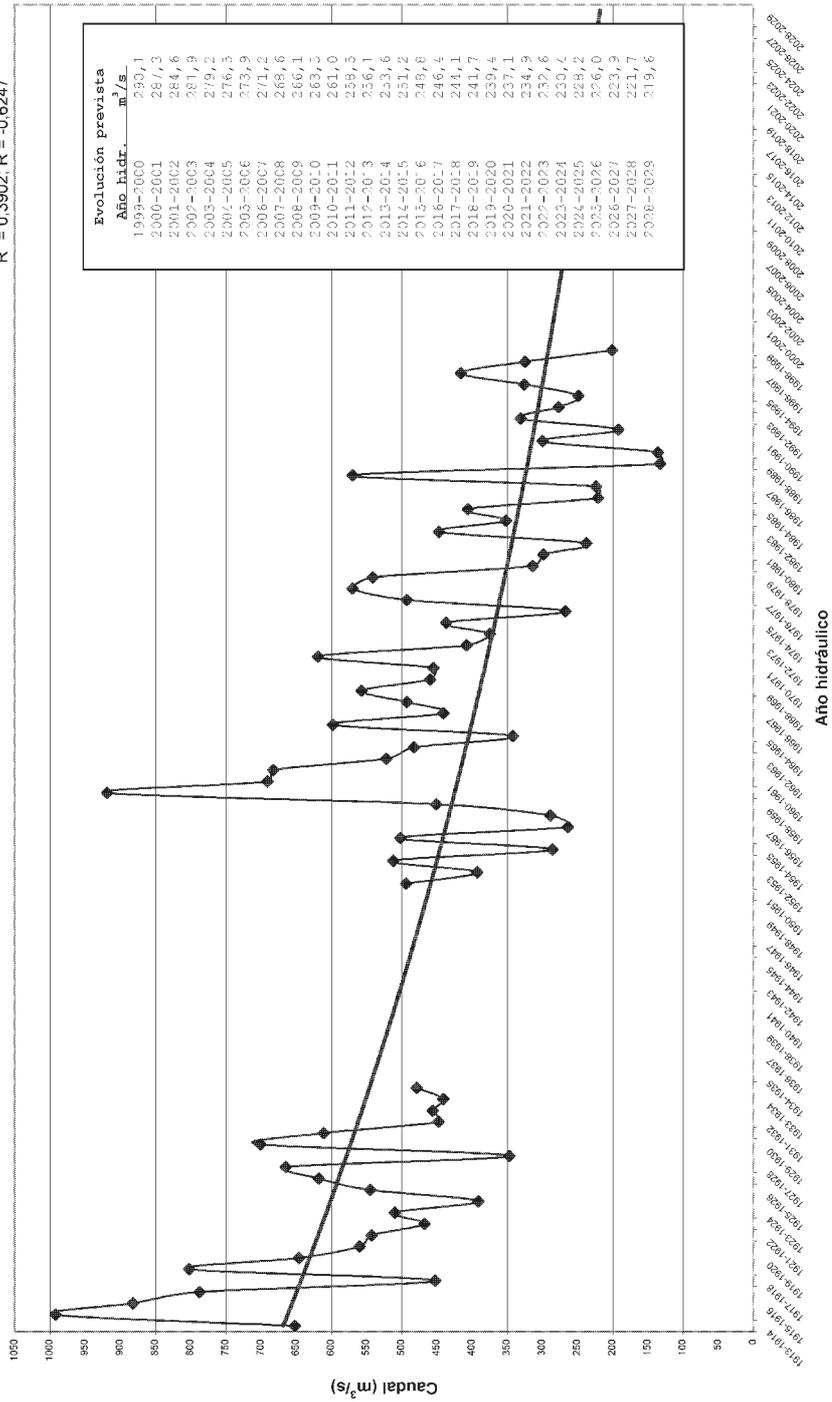


Media ( $\bar{X}_t$ ) del caudal de 70 años en  
la estación foronómica núm. 27 - Tortosa

Línea de tendencia de tipo exponencial

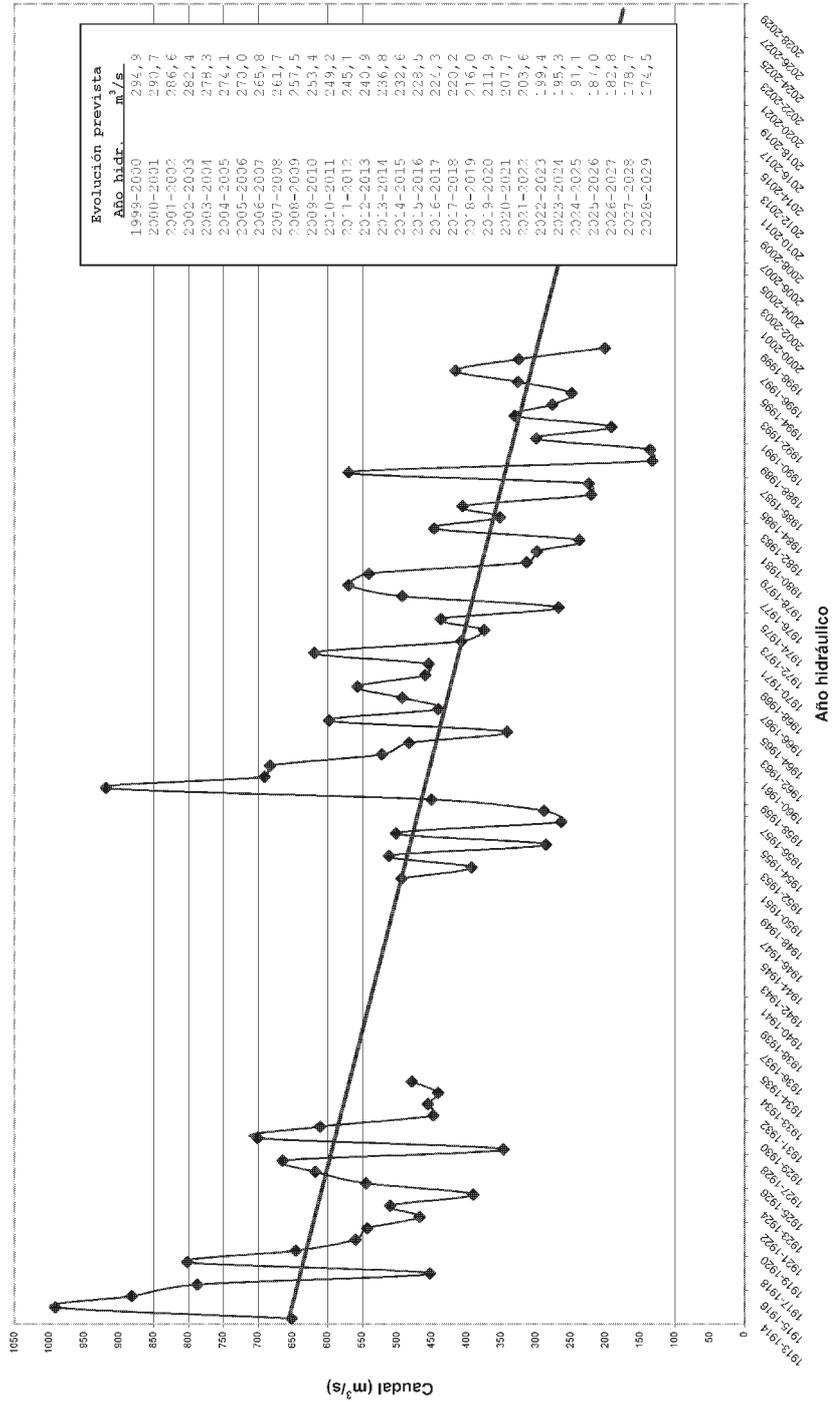
$$y = 675,19e^{-0,0005x}$$

$R^2 = 0,3902; R = -0,6247$



Media (X<sub>t</sub>) del caudal de 70 años en la estación foronómica núm. 27 - Tortosa

Línea de tendencia de tipo lineal  
 $Y = -4,1487X + 659,94$   
 $R^2 = 0,3881$ ;  $R = -0,623$

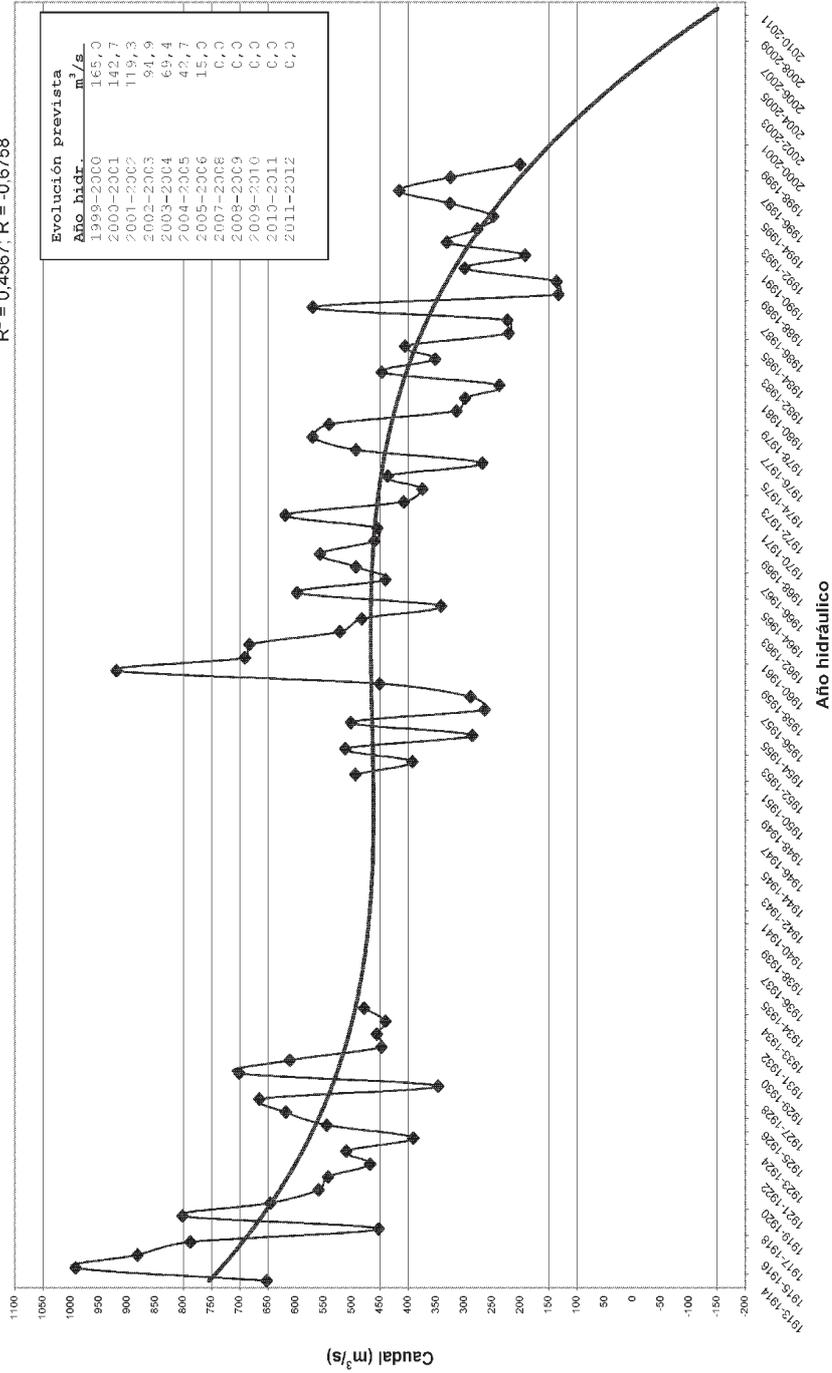


Media (X<sub>t</sub>) del caudal de 70 años en la estación foronómica núm. 27 - Tortosa

Línea de tendencia de tipo parabólico

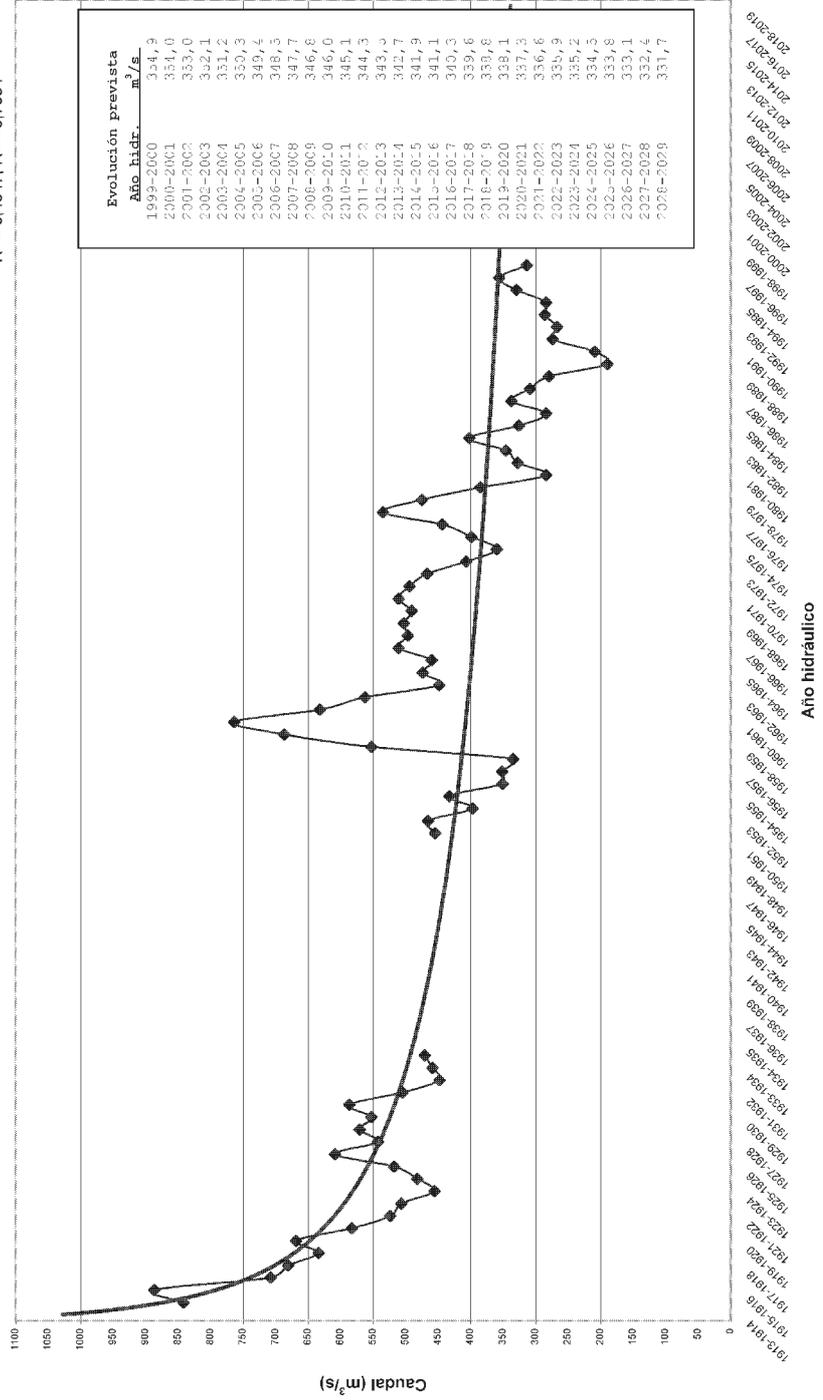
$$y = -0,00039x^3 + 0,5177x^2 - 22,301x + 776,14$$

$R^2 = 0,4567$ ;  $R = -0,6758$



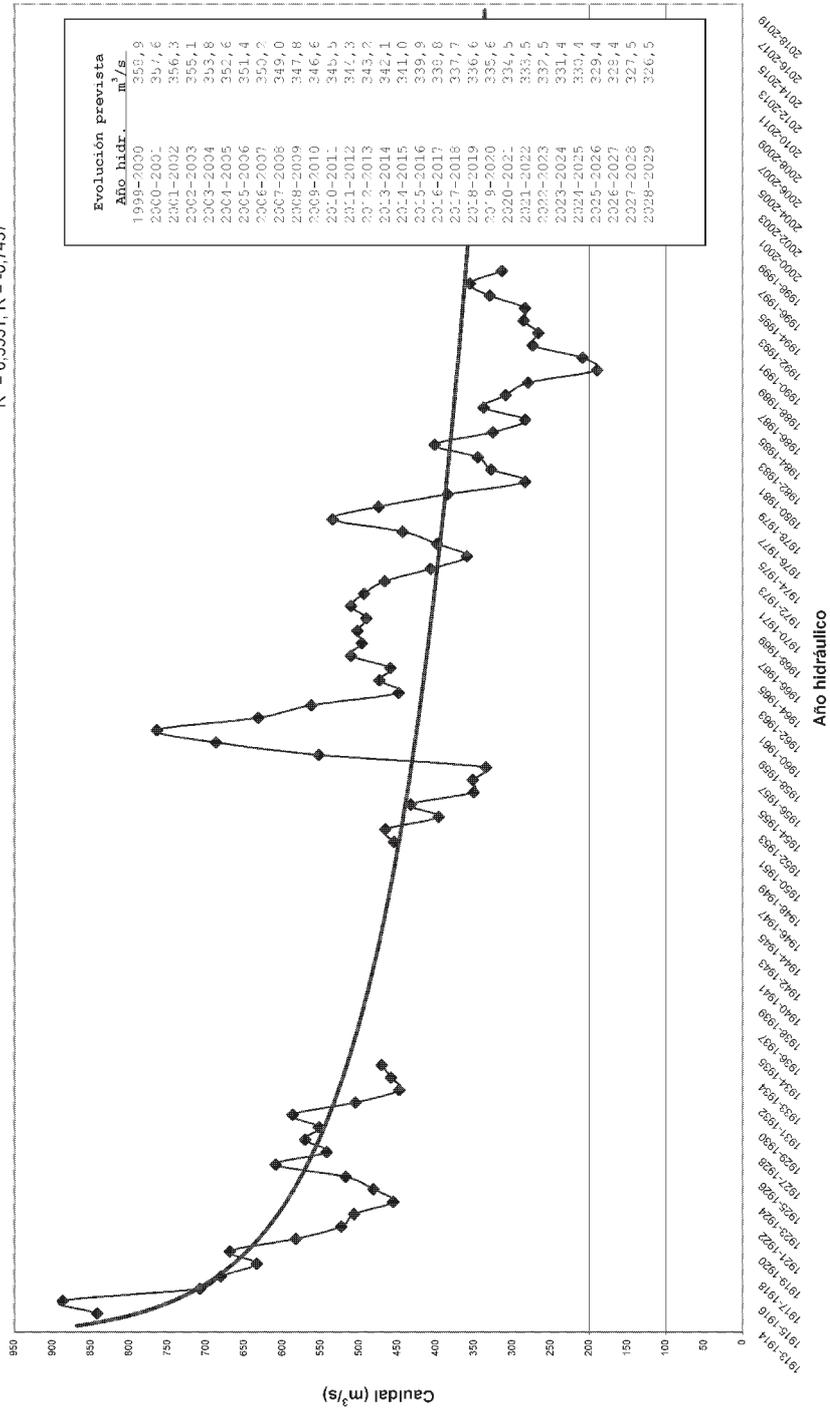
Media móvil de orden 3 (X<sub>3</sub>) del caudal de 68 años en la estación toronómica núm. 27 - Tortosa

Línea de tendencia de tipo potencial  
 $y = 1.027,9x^{-0,2375}$   
 $R^2 = 0,4947$ ;  $R = -0,7034$



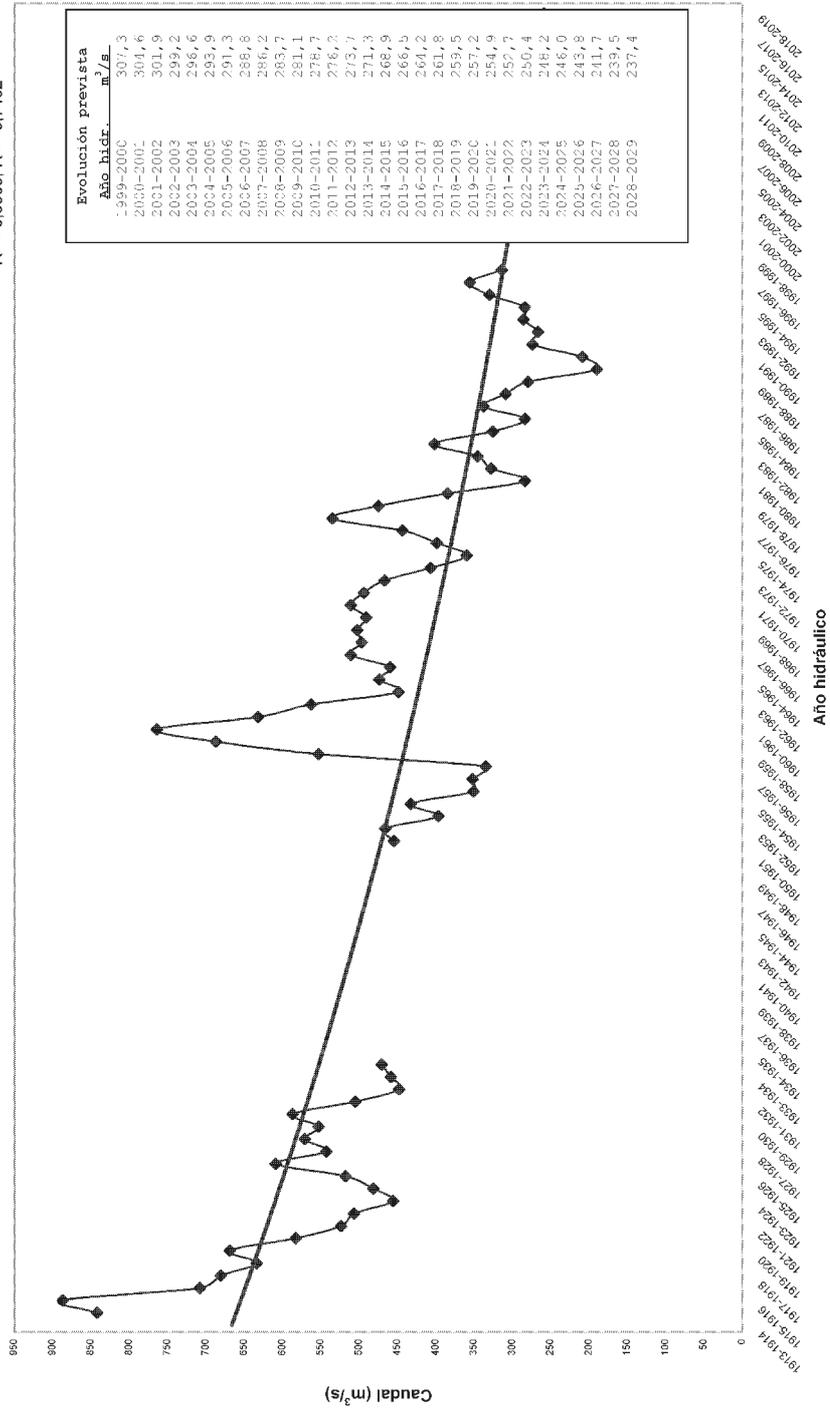
Media móvil de orden 3 (X<sub>3</sub>) del caudal de 68 años en la estación foronómica núm. 27 - Tortosa

Línea de tendencia de tipo logarítmico  
 $y = -113,85 \ln(x) + 868,41$   
 $R^2 = 0,5531, R = -0,7437$



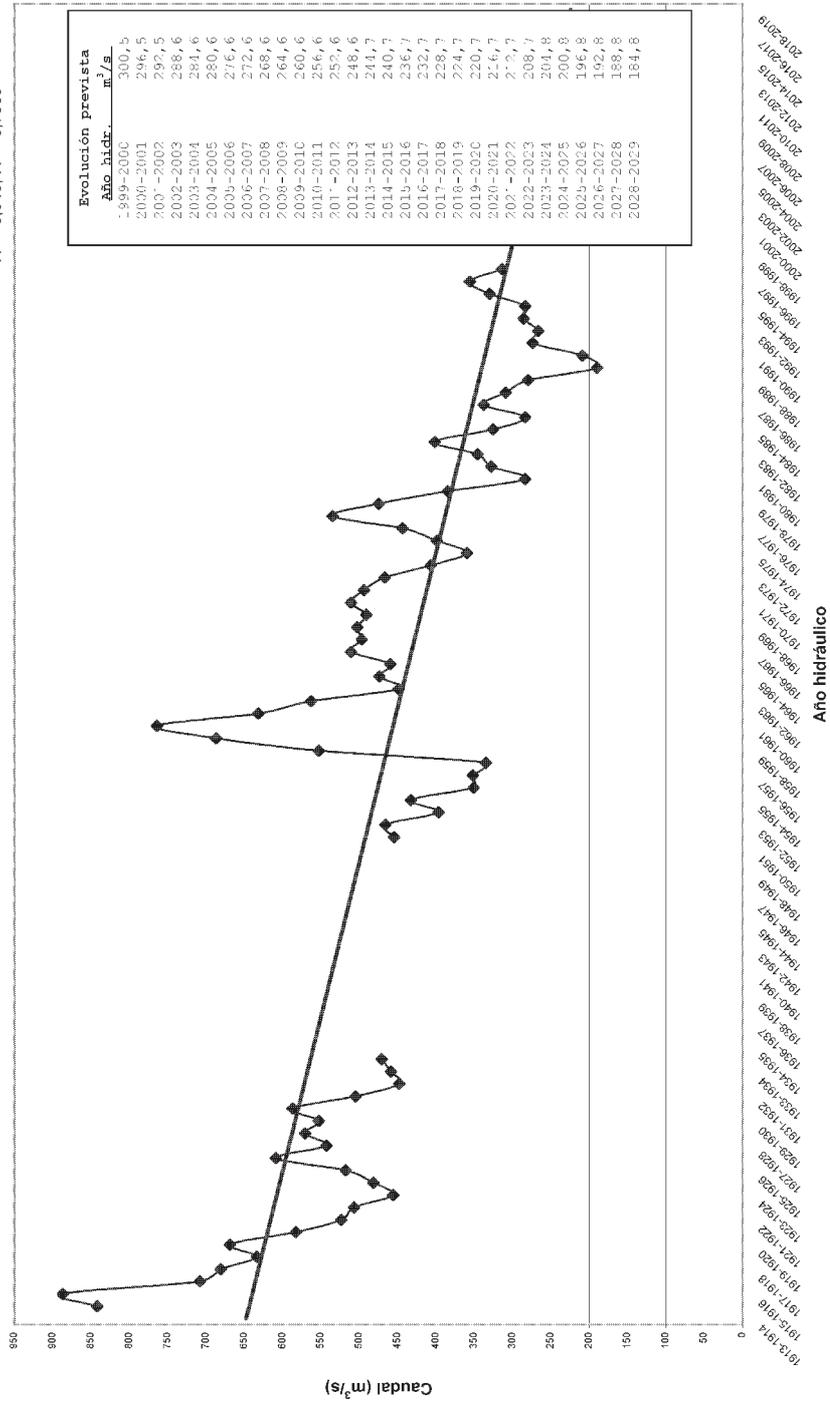
Línea de tendencia de tipo exponencial  
 $y = 672,54e^{-0,0086x}$   
 $R^2 = 0,5568$ ;  $R = -0,7462$

Media móvil de orden 3 (X<sub>3</sub>) del caudal de 68 años en  
 la estación toronómica núm. 27 - Tortosa



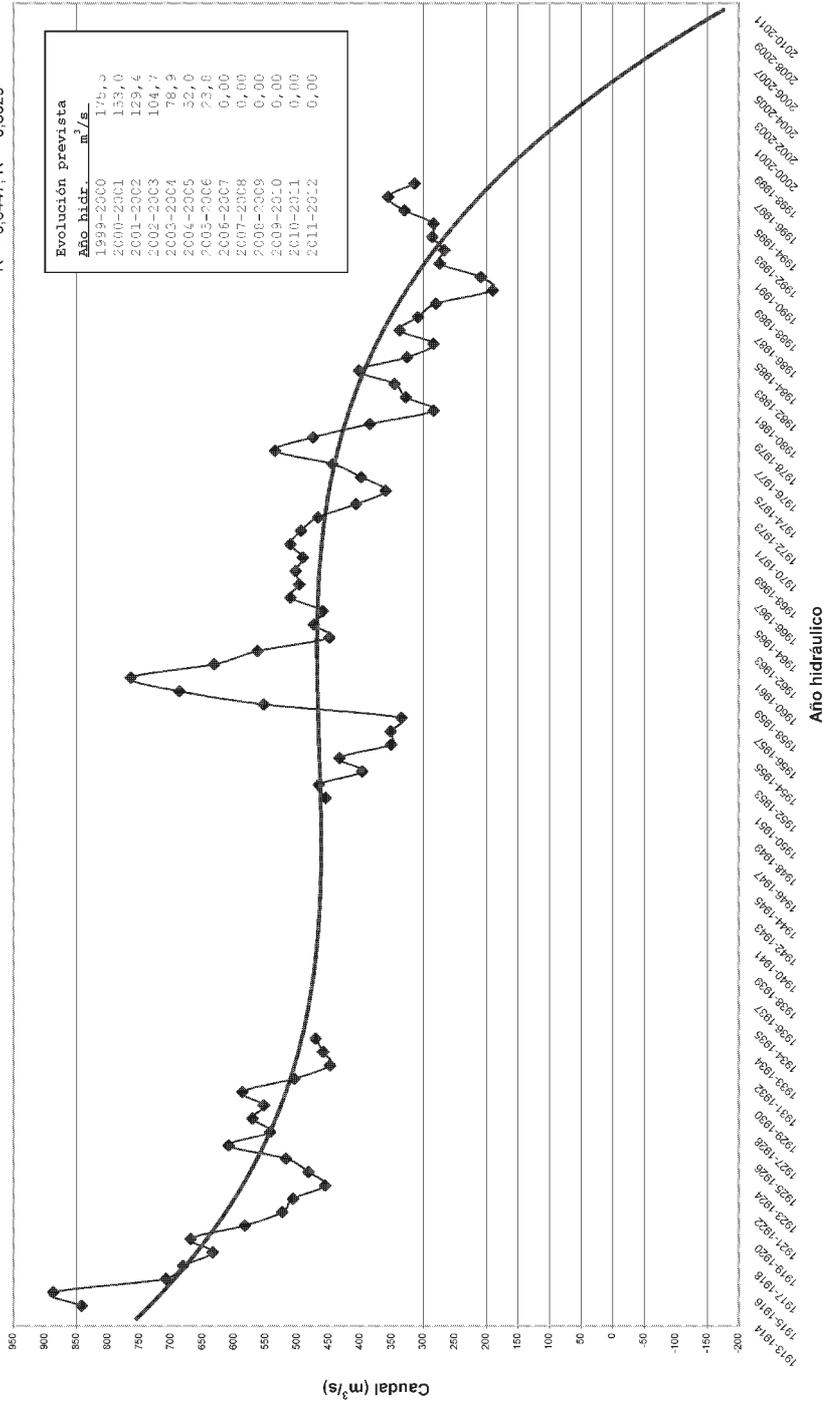
Medía móvil de orden 3 (X<sub>3</sub>) del caudal de 68 años en la estación fononómica núm. 27 - Tortosa

Línea de tendencia de tipo lineal  
 $y = -3,9907x + 651,71$   
 $R^2 = 0,543; R = -0,7369$



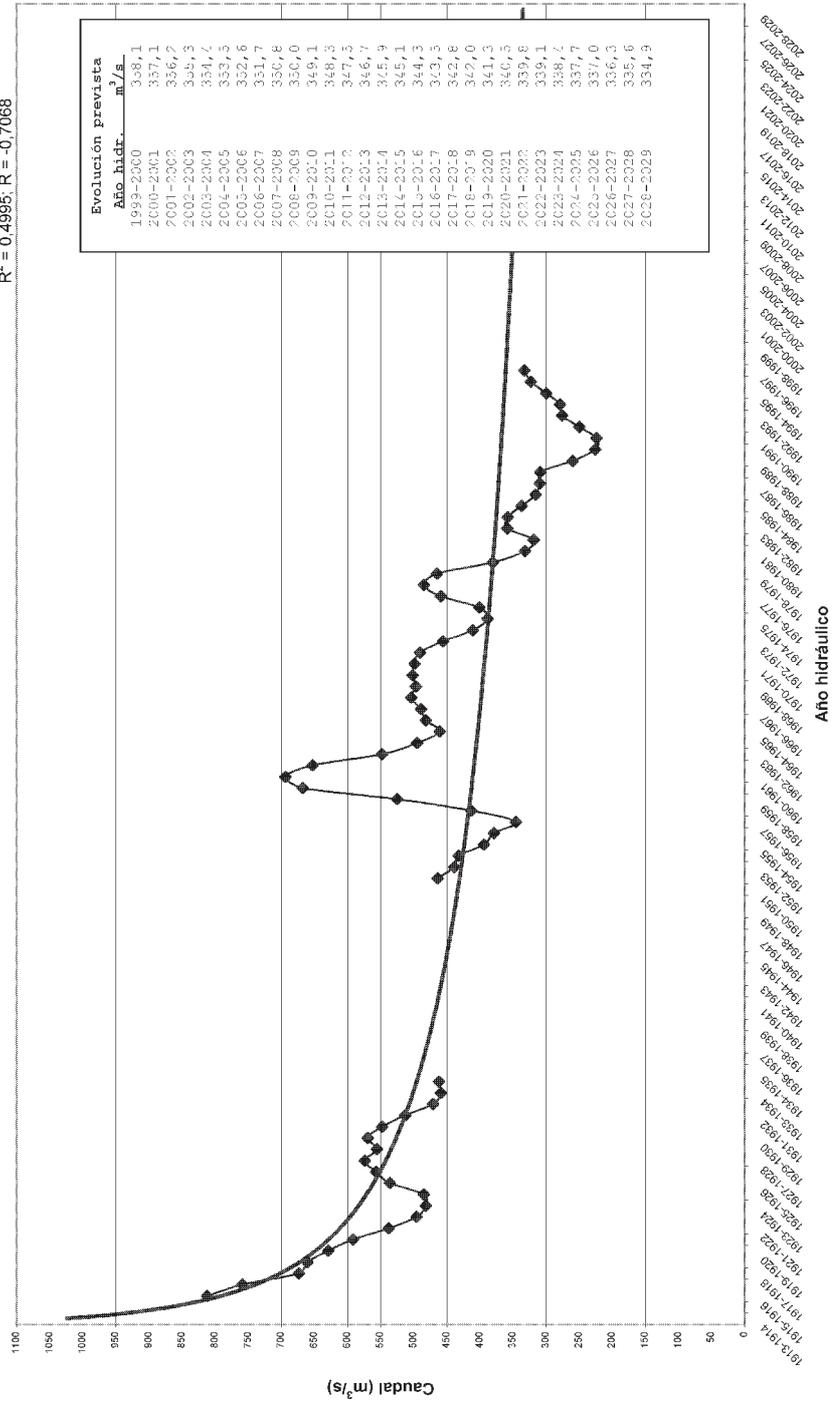
Medía móvil de orden 3 (X<sub>3</sub>) del caudal de 68 años en la estación fonómica núm. 27 - Tortosa

Línea de tendencia de tipo parabólico  
 $y = -0,004x^2 + 0,5319x - 22,67x + 777,29$   
 $R^2 = 0,6447; R = -0,8029$



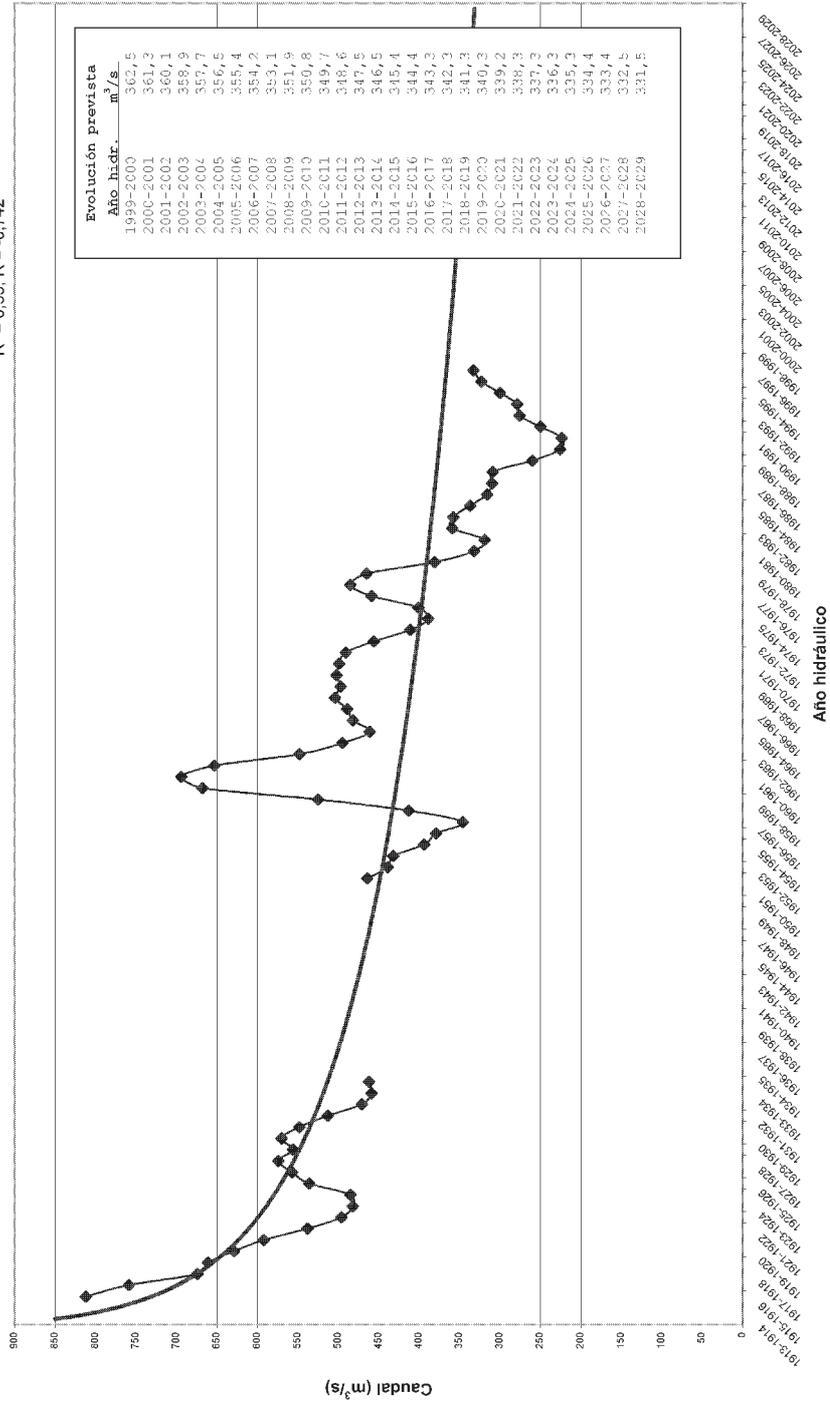
Media móvil de orden 3x3 ( $X_{3,3}$ ) del caudal de 66 años en la estación fononómica núm. 27 - Tortosa

Línea de tendencia de tipo potencial  
 $y = 1,024,1x^{0,2347}$   
 $R^2 = 0,4995; R = -0,7068$



Media móvil de orden 3x3 ( $X_{3,3}$ ) del caudal de 66 años en la estación fonómica núm. 27 - Tortosa

Linea de tendencia de tipo logarítmico  
 $y = -108,86 \ln(x) + 849,95$   
 $R^2 = 0,55; R = -0,742$

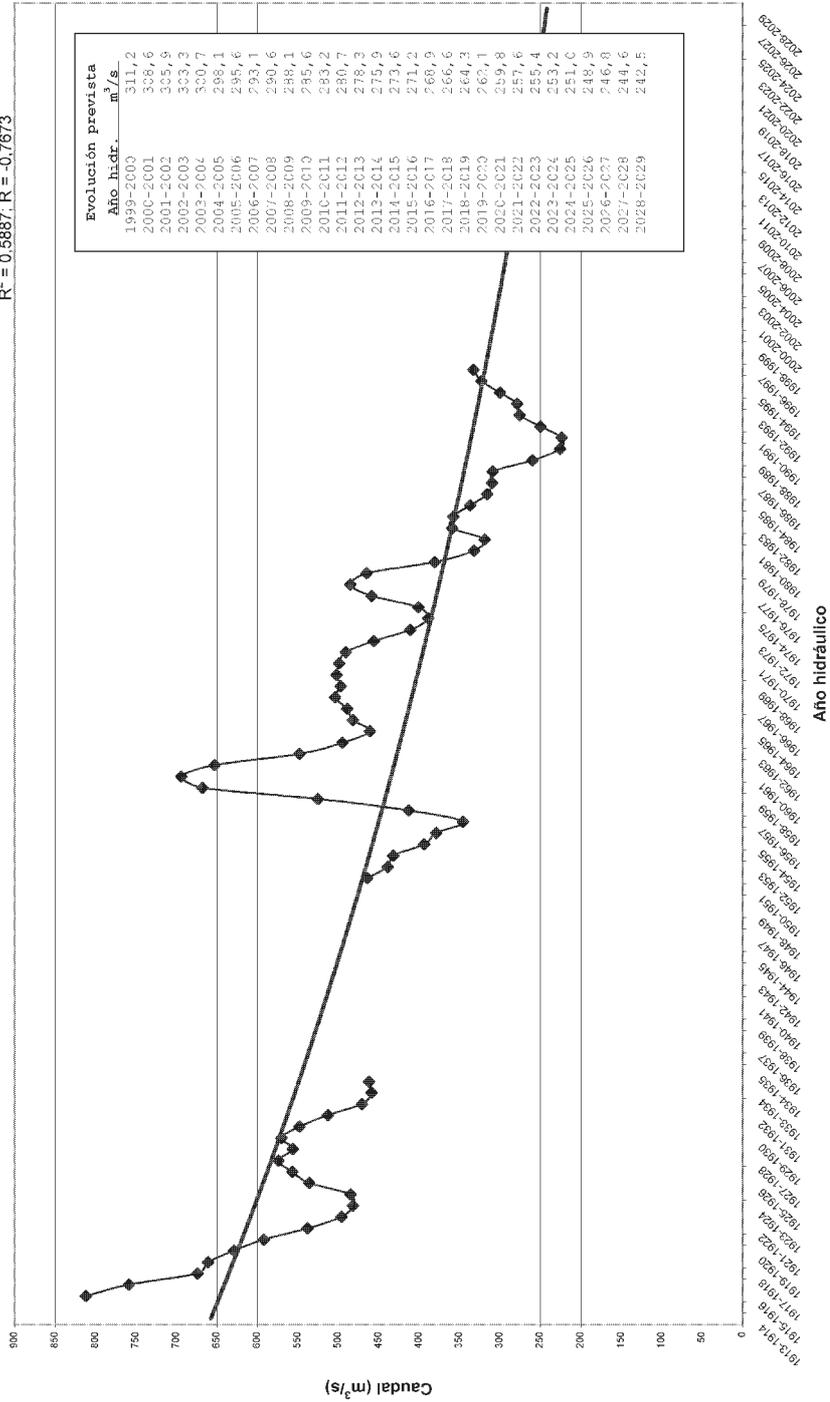


Media móvil de orden 3x3 (X<sub>3,3</sub>) del caudal de 66 años en la estación fononómica núm. 27 - Tortosa

Línea de tendencia de tipo exponencial

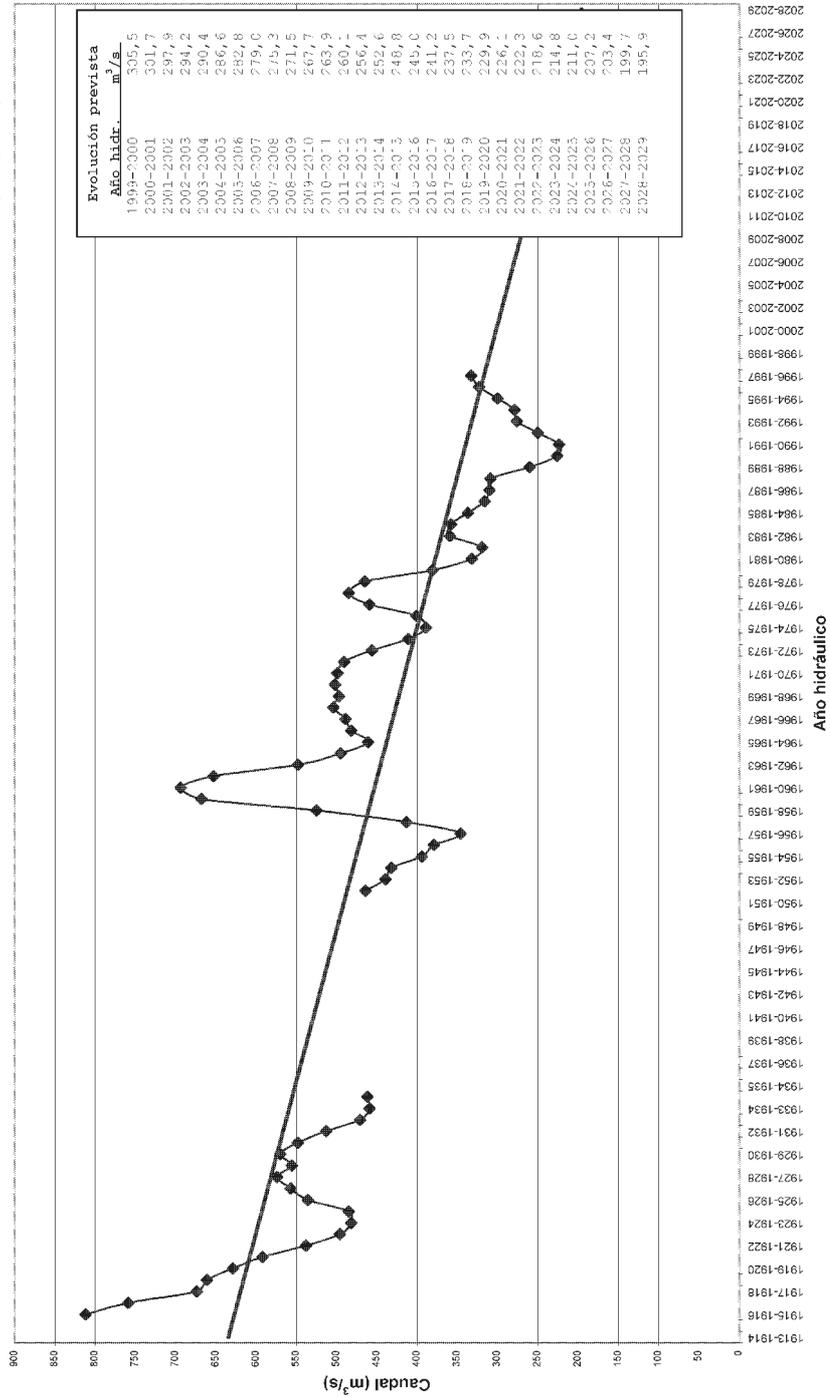
$$y = 663,41e^{-0,0088x}$$

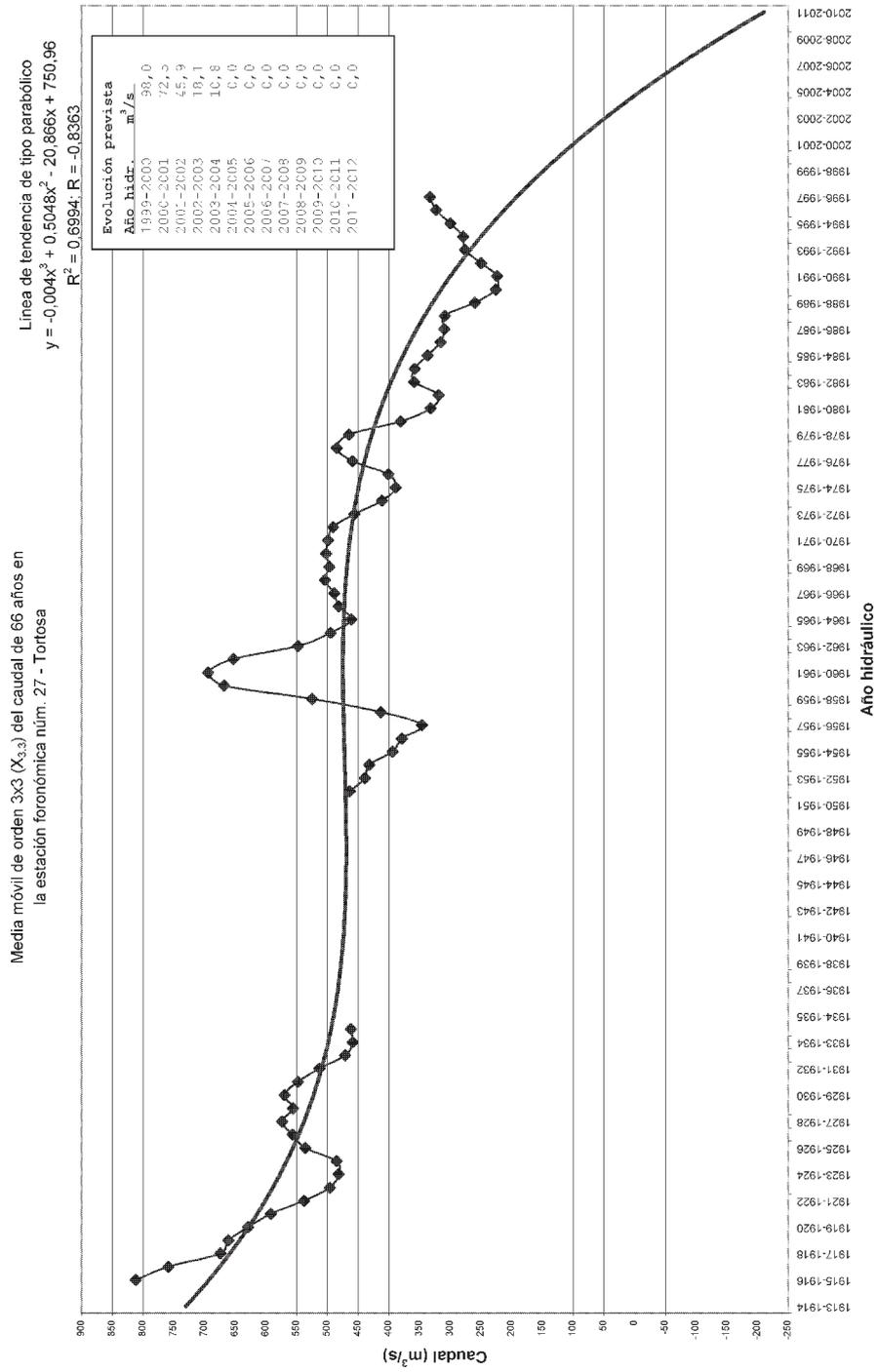
$$R^2 = 0,5887; R = -0,7673$$



Línea de tendencia de tipo lineal  
 $y = -3,7806x + 638,2$   
 $R^2 = 0,5792$ ;  $R = -0,7611$

Media móvil de orden 3x3 ( $X_{3,3}$ ) del caudal de 66 años en  
 la estación fonómica núm. 27 - Tortosa







### ***3. Medias móviles de la serie histórica***



Núm. Años	Núm. Orden	Año hidráulico		$X_1$	$X_3$	$X_{3-3}$
1	1	1913-1914	500	652		
2	2	1914-1915	5115	992	842	
3	3	1915-1916	5480	882	887	812
4	4	1916-1917	5845	788	708	759
5	5	1917-1918	6211	453	681	674
6	6	1918-1919	6576	802	634	661
7	7	1919-1920	6941	646	669	629
8	8	1920-1921	7306	560	583	592
9	9	1921-1922	7672	543	524	538
10	10	1922-1923	8037	468	507	496
11	11	1923-1924	8402	510	456	482
12	12	1924-1925	8767	391	482	485
13	13	1925-1926	9133	545	518	536
14	14	1926-1927	9498	618	609	557
15	15	1927-1928	9863	665	543	574
16	16	1928-1929	10228	347	571	556
17	17	1929-1930	10594	701	553	570
18	18	1930-1931	10959	611	587	548
19	19	1931-1932	11324	448	505	513
20	20	1932-1933	11689	456	448	471
21	21	1933-1934	12055	441	459	459
22	22	1934-1935	12420	479	471	462
	23	1934-1935	12785			
	24	1935-1936	13150			
	25	1936-1937	13516			
	26	1937-1938	13881			
	27	1938-1939	14246			
	28	1939-1940	14611			
	29	1940-1941	14977			
	30	1941-1942	15342			
	31	1942-1943	15707			
	32	1943-1944	16072			
	33	1944-1945	16438			
	34	1945-1946	16803			
	35	1946-1947	17168			
	36	1947-1948	17533			
	37	1948-1949	17899			
	38	1949-1950	18264			
	39	1950-1951	18629			
23	40	1951-1952	18994	494	455	464
24	41	1952-1953	19360	393	466	439
25	42	1953-1954	19725	512	397	432
26	43	1954-1955	20090	286	433	394

TABLAS Y GRÁFICOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO V

Núm. Años	Núm. Orden	Año hidráulico		X <sub>1</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>3-3</sub>
27	44	1955-1956	20455	502	351	379
28	45	1956-1957	20821	264	352	346
29	46	1957-1958	21186	289	335	413
30	47	1958-1959	21551	451	553	525
31	48	1959-1960	21916	919	687	668
32	49	1960-1961	22282	691	764	694
33	50	1961-1962	22647	683	632	653
34	51	1962-1963	23012	522	563	548
35	52	1963-1964	23377	483	449	495
36	53	1964-1965	23743	342	474	461
37	54	1965-1966	24108	598	460	482
38	55	1966-1967	24473	441	511	489
39	56	1967-1968	24838	493	497	504
40	57	1968-1969	25204	557	503	497
41	58	1969-1970	25569	460	491	502
42	59	1970-1971	25934	455	511	499
43	60	1971-1972	26299	619	494	491
44	61	1972-1973	26665	408	467	456
45	62	1973-1974	27030	375	407	411
46	63	1974-1975	27395	437	360	389
47	64	1975-1976	27760	268	399	401
48	65	1976-1977	28126	493	444	459
49	66	1977-1978	28491	570	535	485
50	67	1978-1979	28856	541	475	465
51	68	1979-1980	29221	314	385	381
52	69	1980-1981	29587	299	284	332
53	70	1981-1982	29952	238	328	319
54	71	1982-1983	30317	447	346	359
55	72	1983-1984	30682	352	402	358
56	73	1984-1985	31048	406	326	337
57	74	1985-1986	31413	221	284	316
58	75	1986-1987	31778	224	338	310
59	76	1987-1988	32143	570	309	309
60	77	1988-1989	32509	133	280	260
61	78	1989-1990	32874	136	190	226
62	79	1990-1991	33239	300	209	224
63	80	1991-1992	33604	192	274	250
64	81	1992-1993	33970	331	267	276
65	82	1993-1994	34335	277	286	279
66	83	1994-1995	34700	249	284	300
67	84	1995-1996	35065	326	330	323
68	85	1996-1997	35431	416	356	333
69	86	1997-1998	35796	325	314	
70	87	1998-1999	36161	201		

Núm. Años	Núm. Orden	Año hidráulico		
71	88	1999-2000	341,9	359,3
72	89	2000-2001	341,0	358,1
73	90	2001-2002	340,1	356,9
74	91	2002-2003	339,2	355,6
75	92	2003-2004	338,3	354,4
76	93	2004-2005	337,5	353,3
77	94	2005-2006	336,6	352,1
78	95	2006-2007	335,8	350,9
79	96	2007-2008	334,9	349,8
80	97	2008-2009	334,1	348,6
81	98	2009-2010	333,3	347,5
82	99	2010-2011	332,5	346,4
83	100	2011-2012	331,7	345,3
84	101	2012-2013	330,9	344,2
85	102	2013-2014	330,2	343,1
86	103	2014-2015	329,4	342,0
87	104	2015-2016	328,7	341,0
88	105	2016-2017	327,9	339,9
89	106	2017-2018	327,2	338,9
90	107	2018-2019	326,5	337,9
91	108	2019-2020	325,7	336,8
92	109	2020-2021	325,0	335,8
93	110	2021-2022	324,3	334,8
94	111	2022-2023	323,6	333,8
95	112	2023-2024	323,0	332,8
96	113	2024-2025	322,3	331,9
97	114	2025-2026	321,6	330,9
98	115	2026-2027	321,0	329,9
99	116	2027-2028	320,3	329,0
100	117	2028-2029	319,6	328,0



## **-ANEJO NÚM. 3-**

### **RESTANTES ESPECIFICACIONES METODOLÓGICAS**

#### **I. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL**

##### **1. LA DISTRIBUCIÓN TEÓRICA DE PROBABILIDAD**

Tanto en el capítulo III como en el V de nuestro libro se han utilizado profusamente conceptos relacionados con la distribución teórica de probabilidad normal, tipificada o no; de ahí el interés de desarrollar aquí algunas ampliaciones conceptuales que puedan resultar de utilidad para una mejor comprensión de los estudios y determinaciones efectuadas en ambos capítulos. Por otra parte, el significado físico del CV (coeficiente de variación de Pearson) se deduce claramente si aceptamos que todos los valores de la variable elegida en el estudio (el caudal del río Ebro, el radio hidráulico de una tubería, el caudal de un canal o el tiempo transcurrido), se distribuyen de acuerdo con la curva campaniforme de una distribución normal y, por lo tanto, se tendrá lo siguiente:

a) Prácticamente, todos los valores observados se hallarán comprendidos en el entorno:  $(1 \pm 3 CV) \bar{X}$ .

b) Aproximadamente, el 95% de las observaciones se encuentran comprendidas en el entorno:  $(1 \pm 2 CV) \bar{X}$ .

c) Si se toman las  $n/4$  observaciones de valores más bajos del total de los  $n$  valores medidos de la variable en cuestión (cuyo valor superior será el primer cuartil  $Q_1$  de la distribución de frecuencias), su media aritmética será igual a:  $q_{25} = (1 - 1.27 CV) \bar{X}$ .

d) EL 68'27% de las observaciones realizadas estarán en el intervalo:  $(1 \pm CV) \bar{X}$ .

Por tanto, y según los valores que adopte dicho coeficiente CV (o el CU<sub>1</sub>), podríamos establecer una clasificación de las subzonas regables según su grado o índice de uniformidad en relación a la correspondiente característica o variable hidráulica.

Otros coeficientes de uniformidad hidráulica, como ya se ha visto, podrían definirse a partir de las expresiones:

$$CU_2 = (Q_1 / \bar{X}) \times 100 \text{ (de menor aplicabilidad) y } CU_3 = (q_{25} / \bar{X}) \times 100,$$

siendo  $q_{25}$ , como ya se ha dicho, el valor medio del cuarto inferior de los valores de la variable hidráulica analizada.

Desde luego, la ecuación matemática de la función de la **distribución normal sin tipificar** viene dada por la expresión:

$$y = 1 / \sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{-1/2(x-\alpha)^2 / \sigma^2}$$

, en la que se ha tomado, como es usual,  $\bar{X} = \alpha$ , y que coincide con la expresión matemática de la célebre "ley de los errores", debida a Karl Gauss, siendo  $y = f(x)$  la denominada "función de densidad normal".

De esta definición se deduce que no hay una única distribución normal sino una familia de distribuciones, resultante de los diferentes valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\sigma$ .

Veamos ahora que la expresión de la función de densidad normal sin tipificar está bien definida, es decir, es una función de densidad. Evidentemente  $f(x) > 0$  por la propia definición, pero necesitamos probar que la integral impropia de primera especie extendida a toda la recta real vale la unidad (probabilidad total).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx = 1$$

Para ello hacemos el cambio de variable:

$$z = \frac{x - \alpha}{\sigma}$$

de donde:

$$dx = \sigma \cdot dz$$

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos la “tipificación”:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sigma \cdot dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz$$

Haciendo un nuevo cambio de variable:

$$\frac{z^2}{2} = v$$

de donde:

$$z = \sqrt{2v} \quad y \quad dz = \frac{1}{\sqrt{2v}} dv$$

resultando que la integral anterior será<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v} \cdot \frac{1}{\sqrt{2v}} \cdot dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \cdot dv = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1 \end{aligned}$$

con lo cual tenemos probado que la expresión anteriormente relacionada es una función de densidad.

Así mismo, se tendrá que:

$$F(x_i) = P(x \leq x_i) = P(-\infty < x \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x) \cdot dx$$

, es la denominada “función de distribución normal”, que es la probabilidad de que la variable aleatoria estadística tome un valor  $\leq x_i$ .

<sup>1</sup> Como vimos, en el epígrafe correspondiente del capítulo III, la función gamma de  $p$ ,  $\Gamma(p)$ , se define como:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot dx, \quad \forall p > 0$$

y se puede ver que:

$$\Gamma(p) = (p-1)!, \quad \Gamma(1) = 1 \quad y \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} \cdot dx = \sqrt{\pi}$$

Las áreas comprendidas bajo la curva normal y hasta el eje de abscisas representan probabilidades; en estas condiciones, veamos que la probabilidad de que:  $x \in ]x_1, x_2]$  será:

$$\begin{aligned} P(x_1 < x \leq x_2) &= F(x_2) - F(x_1) = P(x \leq x_2) - P(x \leq x_1) = \\ &= \int_{-\infty}^{x_2} f(x) \cdot dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx. \end{aligned}$$

Como ya hemos visto, cuando la variable aleatoria estadística que estamos investigando  $x$  viene expresada en unidades de desviación:  $Z = (x-\alpha)/\sigma$ , se tiene la **distribución normal tipificada**, así:

$$y = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2}$$

, y decimos que la variable  $Z$  se distribuye normalmente con media cero ( $\alpha = 0$ ) y varianza uno ( $\sigma^2 = 1$ ).

Vamos a proceder, seguidamente, al estudio más pormenorizado de ambas curvas.

1) **Como acabamos de ver, la ecuación de la curva normal tipificada es:**

$$y = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} \quad ; \quad \alpha = 0 \quad ; \quad \sigma^2 = 1 \quad ,$$

que es la función de densidad normal reducida.

□ *Extremos relativos y puntos de inflexión:*

Se tiene:

$$\begin{aligned} y' &= 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} \cdot (-z) = 0 \quad ; \quad z = 0 \text{ (origen)} \quad ; \\ y'' &= 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} \cdot (z^2 - 1) \quad ; \quad \forall Z = 0 \rightarrow y'' = 1/\sqrt{2\pi} < 0 \end{aligned}$$

luego existe un **máximo relativo o local** en el punto  $(0, 1/\sqrt{2\pi})$ , de intersección con el eje de ordenadas OY, y no habrá intersección con el eje de abscisas OZ a distancia finita, esto es:

$$\forall y = 0 : \quad Z = +\infty \quad \text{y} \quad Z = -\infty \quad .$$

De  $y'' = 0$ , o sea:  $Z^2 - 1 = 0$ , saldrán los **puntos de inflexión**, que son:  $Z = +1$ ; o sea, los puntos de coordenadas:  $(1, 1/\sqrt{2\pi \cdot e})$  y  $(-1, 1/\sqrt{2\pi \cdot e})$ .

□ *Crecimientos y decrecimientos:*

Veamos que  $\begin{cases} \forall Z < 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow \text{CRECIENTE} \\ \forall Z > 0 \rightarrow y' < 0 \rightarrow \text{DECRECIENTE} \end{cases}$

□ *Asíntotas:*

$$\lim_{Z \rightarrow +\infty} 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\infty} = 1/\sqrt{2\pi} \cdot 1/e^{\infty} = 1/\infty = 0$$

$$\lim_{Z \rightarrow -\infty} 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\infty} = 1/\sqrt{2\pi} \cdot 1/e^{\infty} = 1/\infty = 0$$

, luego tiene por asíntota horizontal (rama hiperbólica) el eje OZ. No tiene otras ramas infinitas o ramas parabólicas.

□ *Simetrías:*

- Respecto al eje OY, pues al cambiar (Z) por (-Z), no sufre variación (se trata de una función par).

□ *Concavidades y convexidades:*

De:  $y'' = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} \cdot (z^2 - 1)$ , se deduce que, según los diferentes intervalos de la recta real:

$\forall Z \in ]-\infty, -1[ \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ CÓNCAVA
$\forall Z \in ]-1, 1[ \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ CONVEXA
$\forall Z \in ]1, +\infty[ \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ CÓNCAVA

Su representación gráfica, en definitiva, será la siguiente:

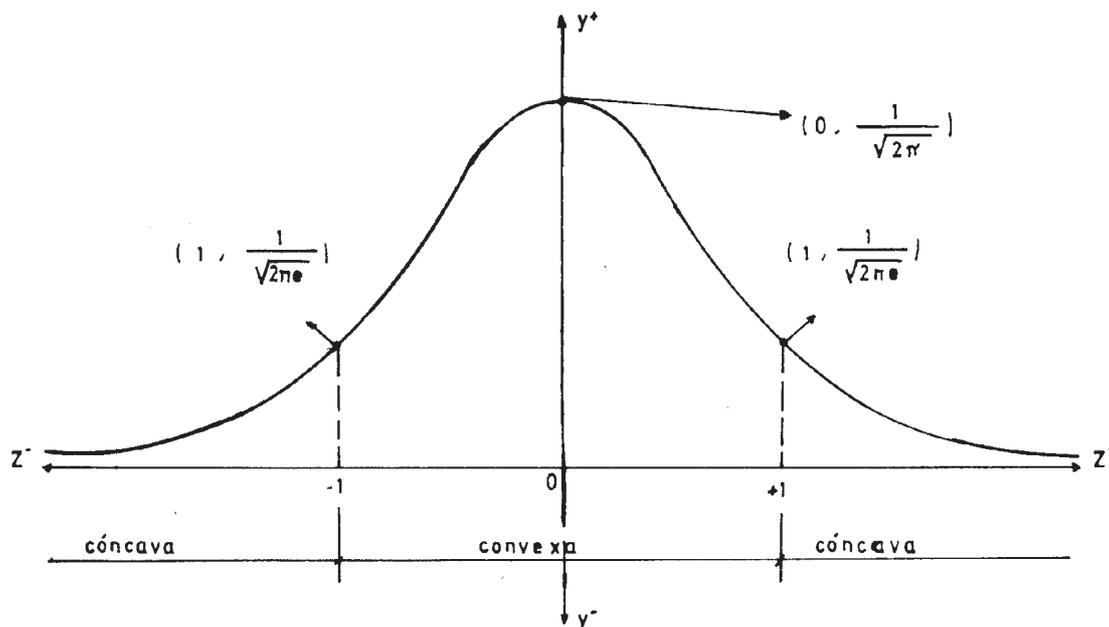


Fig. A3-1. Curva de distribución normal tipificada

Veamos que en esta distribución teórica de probabilidad, como en todas las simétricas, se cumple, como puede observarse fácilmente, la igualdad entre la media aritmética, la mediana y la moda, valores que, en este caso, coinciden con cero.

**2) La ecuación de la curva normal sin tipificar es:**

$$y = 1/\sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{-(X-\alpha)^2/2\sigma^2} \text{ (función de densidad normal)}$$

□ *Asíntotas:*

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} y = 1/\sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{-(X-\alpha)^2/2\sigma^2} = 1/\sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\infty} = 0 ;$$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} y = 1/\sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{-(X-\alpha)^2/2\sigma^2} = 1/\sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\infty} = 0$$

, luego tiene por asíntota horizontal (rama hiperbólica) el eje de abscisas OX. No tiene otras ramas infinitas o ramas parabólicas.

□ *Cortes con los ejes:*

Cortará al eje OY en el punto  $(0, 1/\sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\alpha^2/2\sigma^2})$  y no cortará al eje OX a distancia finita.

□ *Extremos relativos y puntos de inflexión:*

$$\begin{aligned}
 y' &= 1/\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-(x-\alpha)^2/2\sigma^2} \cdot [(\alpha-x)/\sigma^2] = y \cdot (\alpha-x)/\sigma^2 = 0 \ ; \ \rightarrow x = \alpha \\
 y'' &= y' \cdot (\alpha-x)/\sigma^2 - y \cdot 1/\sigma^2 = y \cdot [(\alpha-x)/\sigma^2]^2 - y \cdot 1/\sigma^2 = \\
 &= y \cdot (\alpha-x)^2/\sigma^4 - y\sigma^2/\sigma^4 = y \cdot [(\alpha-x)^2 - \sigma^2]/\sigma^4 \ ; \\
 \forall x = \alpha &\rightarrow y'' = y \cdot (-\sigma^2)/\sigma^4 = -y/\sigma^2 < 0
 \end{aligned}$$

luego existe un máximo relativo o local en el punto  $(\alpha, 1/\sigma\sqrt{2\pi})$ .

Por otra parte, de  $y''=0$ , o sea:  $(\alpha-x)^2 = \sigma^2$ , saldrán los **puntos de inflexión**, que son:  $\pm(\alpha-x) = \pm\sigma$ ; o sea:  $x = \alpha+\sigma$ , o bien  $x = \alpha-\sigma$ , esto es, los puntos de las coordenadas cartesianas rectangulares:

$$(\alpha + \sigma, 1/\sigma\sqrt{2\pi e}) \quad \text{y} \quad (\alpha - \sigma, 1/\sigma\sqrt{2\pi e})$$

, siendo convexa la curva entre dichos puntos, y cóncava en el resto del intervalo de existencia, como puede comprobarse del estudio de la segunda derivada  $y''$ . Así pues, es cóncava hacia la región positiva de OY, para:  $-\infty < x < \alpha-\sigma$ , y para  $\alpha+\sigma < x < +\infty$ , y cóncava hacia la región negativa del eje de ordenadas (convexa hacia las  $y^+$ ) en el intervalo o dominio de definición:  $\alpha-\sigma < x < \alpha+\sigma$ .

□*Simetrías:*

La curva es simétrica con respecto a la ordenada correspondiente al punto  $\alpha$ , por ser una función par con respecto a la diferencia:  $(x-\alpha)$ .

□*Crecimientos y decrecimientos:*

$$\text{Veamos que } \begin{cases} \forall x < \alpha \rightarrow y' > 0 \rightarrow \text{CRECIENTE} \\ \forall x > \alpha \rightarrow y' < 0 \rightarrow \text{DECRECIENTE} \end{cases}$$

Su representación gráfica será:

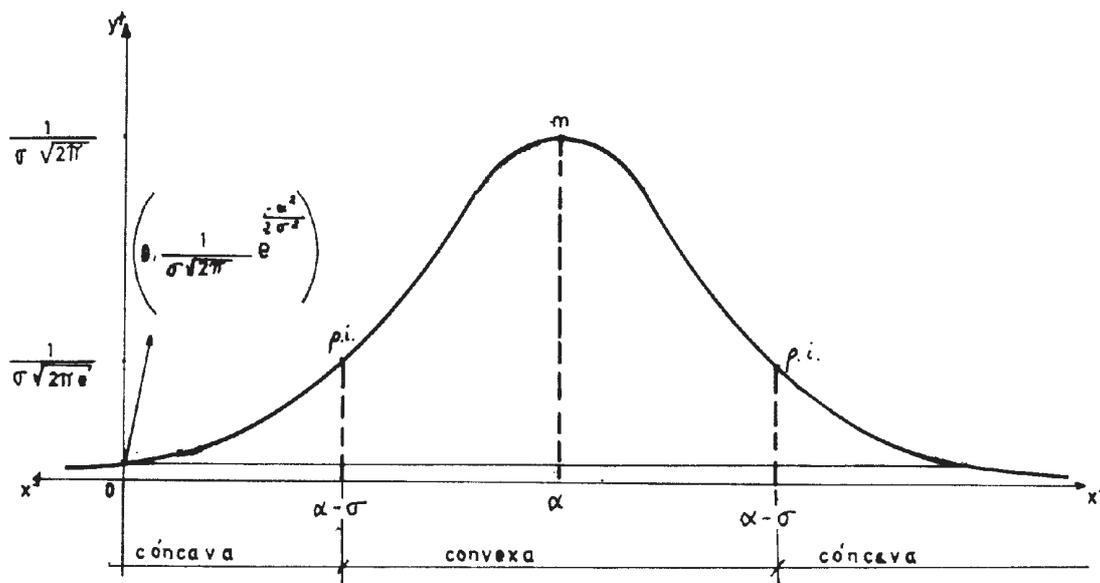


Fig. A3-2. Curva de distribución normal sin tipificar

## 2. LAS ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL

El estudio detenido que acabamos de realizar, desde el punto de vista del análisis matemático, de las distribuciones normales tipificadas y sin tipificar, nos permitirá aprovechar los conocimientos que la ciencia estadística proporciona acerca de dicha distribución teórica de frecuencias para obtener ciertas conclusiones de tipo cuantitativo, de gran aplicación en el análisis de la uniformidad de las variables hidráulicas.

Y así, se tendrá lo siguiente:

% de casos	INTERVALOS
50'00	$[(1 - 0'68 \cdot CV) \bar{X}, (1 + 0'68 \cdot CV) \bar{X}]$
64'24	$[(1 - 0'92 \cdot CV) \bar{X}, (1 + 0'92 \cdot CV) \bar{X}]$
68'27	$[(1 - CV) \bar{X}, (1 + CV) \bar{X}]$
95'00	$[(1 - 1'96 \cdot CV) \bar{X}, (1 + 1'96 \cdot CV) \bar{X}]$
95'45	$[(1 - 2 \cdot CV) \bar{X}, (1 + 2 \cdot CV) \bar{X}]$
99'00	$[(1 - 2'58 \cdot CV) \bar{X}, (1 + 2'58 \cdot CV) \bar{X}]$
99'73	$[(1 - 3 \cdot CV) \bar{X}, (1 + 3 \cdot CV) \bar{X}]$

, intervalos que podrían representarse, gráficamente, del siguiente modo:

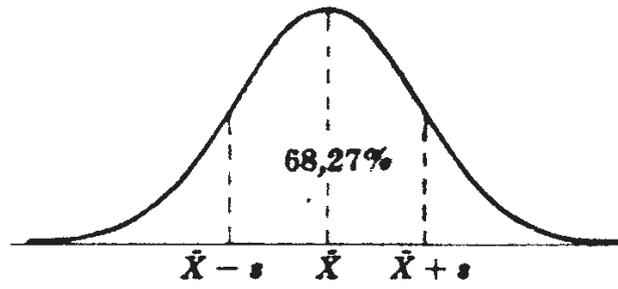


Fig. A3-3. Área del 68'27%

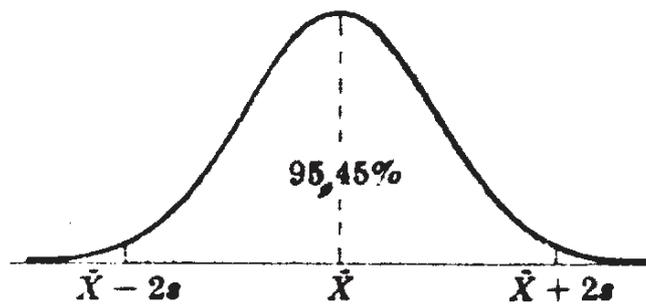


Fig. A3-4. Área del 95'45%

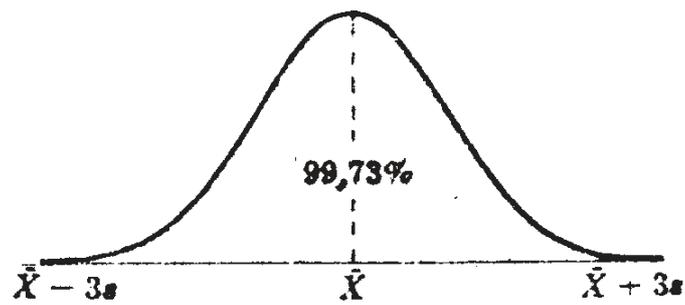


Fig. A3-5. Área del 99'73%

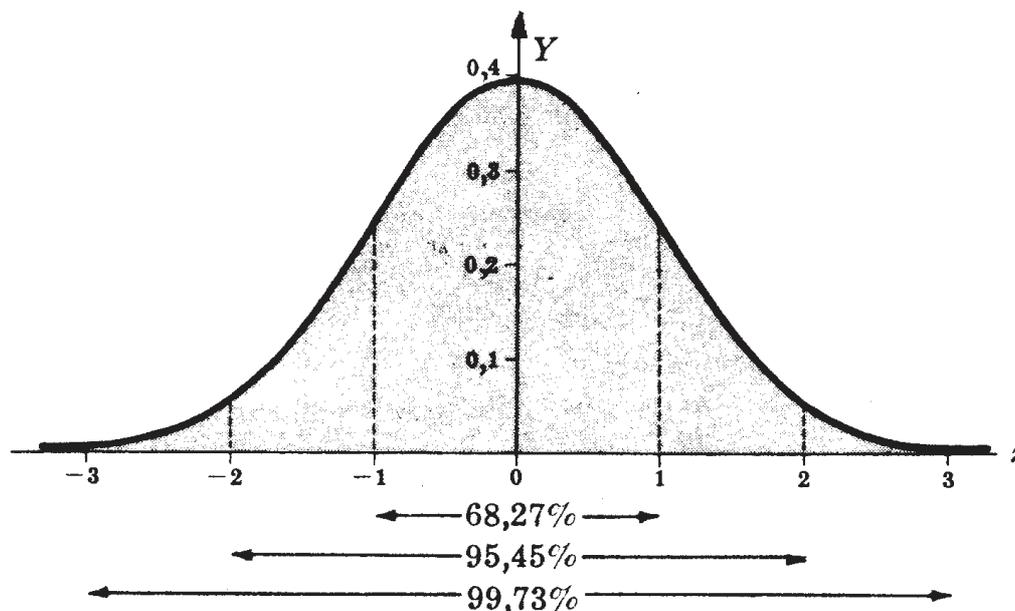


Fig. A3-6. Diferentes áreas bajo la curva de distribución normal

En la siguiente tabla se presentan las áreas:  $\int_0^x f(x)dx$  (multiplicadas por 1.000) bajo la curva de distribución normal. A saber:

Tabla A3-1. Áreas bajo la curva normal

x	1.000 A						
0,0	000	1,0	341	2,0	477	3,0	498,6
0,1	040	1,1	364	2,1	482	3,1	499,0
0,2	079	1,2	385	2,2	486	3,2	499,3
0,3	118	1,3	403	2,3	489	3,3	499,5
0,4	156	1,4	419	2,4	492	3,4	499,7
0,5	191	1,5	433	2,5	493,8	3,5	499,77
0,6	226	1,6	445	2,6	495,3	3,6	499,84
0,7	258	1,7	455	2,7	496,5	3,7	499,89
0,8	288	1,8	464	2,8	497,4	3,8	499,93
0,9	316	1,9	471	2,9	498,1	3,9	499,95

De aquí, pueden resolverse las siguientes cuestiones:

- a) Área total bajo la curva normal y probabilidad de que la variable hidráulica tome un valor cualquiera de su recorrido o campo de variación (de  $-\infty$  a  $+\infty$ ).

La simple observación de la tabla anterior nos dice que el área bajo la curva normal, desde 0 a 3'9, toma el valor:

$$499'95 / 1.000 = 0'49995 \approx 0'5$$

Por la simetría de la curva de Gauss, ésta es la mitad del área total, que vale la unidad. Por otra parte, la probabilidad de que la variable hidráulica en estudio  $x$  tome cualquier valor es la certeza absoluta; por ello, su valor es la unidad, en virtud del axioma o postulado que reza que “la probabilidad de un suceso cierto vale 1” (probabilidad total).

**b) Área bajo la curva determinada por las ordenadas en los extremos de los intervalos (1, 2) y (-1, -2). ¿Cuál es el valor de la probabilidad de que la variable hidráulica  $x$  tome un valor comprendido entre 1 y 2? ¿Y entre -2 y -1?**

Según puede verse en la tabla anterior, las áreas bajo la curva comprendidas entre el eje de ordenadas ( $x=0$ ) y las ordenadas  $x=2$  y  $x=1$ , son, respectivamente:

$$477 / 1.000 = 0'477 \quad \text{y} \quad 341 / 1.000 = 0'341 \quad ;$$

entonces, el área pedida será la diferencia:

$$\int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 0'477 - 0'341 = 0'136 = \int_1^2 f(x)dx = 13'6\%$$

que es también la probabilidad de que la variable hidráulica  $x$  tome un valor comprendido entre 1 y 2, por la propiedad aditiva del intervalo de integración.

El área comprendida entre las ordenadas  $x = -2$  y  $x = -1$  es la misma anterior y la probabilidad de que  $x$  tome un valor del intervalo  $(-2, -1)$  es también igual, en virtud de la simetría de la figura, a:

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx = 0'136 \quad \text{y} \quad P(-2 < x < -1) = 0'136 \quad .$$

**c) Intervalo  $(-a, a)$  cuyas ordenadas extremas delimiten el 50 por 100 del área total existente bajo la curva normal y su expresión probabilística.**

Hemos de encontrar ahora un valor  $x = a$ , tal que delimite hasta el eje de ordenadas el 25 por 100 del área total (por simetría, el intervalo  $[-a, 0]$  delimitará el otro 25 por 100).

Según la tabla, este valor comprendido entre  $x = 0'6$  y  $x = 0'7$ , y las áreas respectivas, a saber, 0'226 y 0'258, incluyen la de valor 0'250 pedido.

De la proporción:

$$\frac{0'258 - 0'226}{0'7 - 0'6} = \frac{0'250 - 0'226}{a - 0'6}$$

obtendremos el valor:  $a = 0'68$ , con lo que:

$$\int_{-0'68}^{0'68} f(x) \cdot dx = 0'50 \quad \text{y} \quad P(-0'68 < x < 0'68) = 0'50 \quad .$$

**d) Valor de  $a$  tal que las colas (áreas a la izquierda de  $-a$  y a la derecha de  $+a$ ) que existen bajo la curva normal sumen el 5 por 100 del área total.**

El área de cada cola debe medir el 2'5 por 100 del área total; entonces el valor de  $a$  ha de satisfacer la condición:

$$\int_0^a f(x) \cdot dx = 0'500 - 0'025 = 0'475$$

Según la tabla, este valor de  $a$  está comprendido entre 1'9 y 2'0 y se puede estimar según la proporción:

$$\frac{477 - 471}{2 - 1'9} = \frac{475 - 471}{a - 1'9} \quad ; \quad a = 1'9667 \approx 2.$$

En la práctica, se suelen tomar los valores de  $-2$  y  $2$  para definir la cola del 5 por 100, o lo que es igual:

$$P(-2 < x < 2) = 0'95 \quad .$$

### 3. AJUSTE A UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

La distribución que venimos estudiando en el capítulo III de la variable hidráulica "caudal máximo de las acequias de riego", en la zona regable considerada, se ajusta muy aceptablemente a una distribución normal. De este modo, como ya se ha visto, la distribución teórica de los caudales antedichos vendrá dada por la función de densidad:

$$y = 1/6'36 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{(x-168'32)^2}{80'8992}}$$

Mediante los métodos adecuados de la Estadística Matemática, sería posible justificar la bondad de este ajuste contrastando la **hipótesis de normalidad** mediante el empleo del estadígrafo  $\chi^2$  de Pearson, tal como ya se realiza en el apartado correspondiente de esta misma obra.

En la Fig. A3-7 se ha representado gráficamente la función anterior. En realidad, tal representación significa el **ajuste de una función de densidad normal** a la distribución de los caudales observados o proyectados (en su caso). Utilizando una tabla de la distribución normal, podemos obtener las áreas de las superficies que están limitadas por la curva normal, el eje de abscisas y las

ordenadas en los extremos o límites de los intervalos de clase. Dado que, como es bien sabido, dicha área total es igual a la unidad, resultará que cada una de ellas expresa la probabilidad  $p_i$  de que la variable hidráulica "caudal" tome un valor perteneciente al correspondiente intervalo de clase.

Para proceder al ajuste es necesario transformar los valores observados de la variable hidráulica analizada (en este caso representados por el límite superior  $L_i$  de cada intervalo de clase) en *valores tipificados* o "estandarizados", lo que se consigue restando de cada  $L_i$  la media 168 (columna 2.<sup>a</sup> de la Tabla 3.8.) y dividiendo dicha diferencia por la desviación típica 6'36 l./seg. de la distribución observada (3.<sup>a</sup> columna), al objeto de poder emplear las tablas de la distribución normal, obtenidas para una distribución de media  $\alpha = 0$  y desviación típica  $\sigma = 1$ . Así:

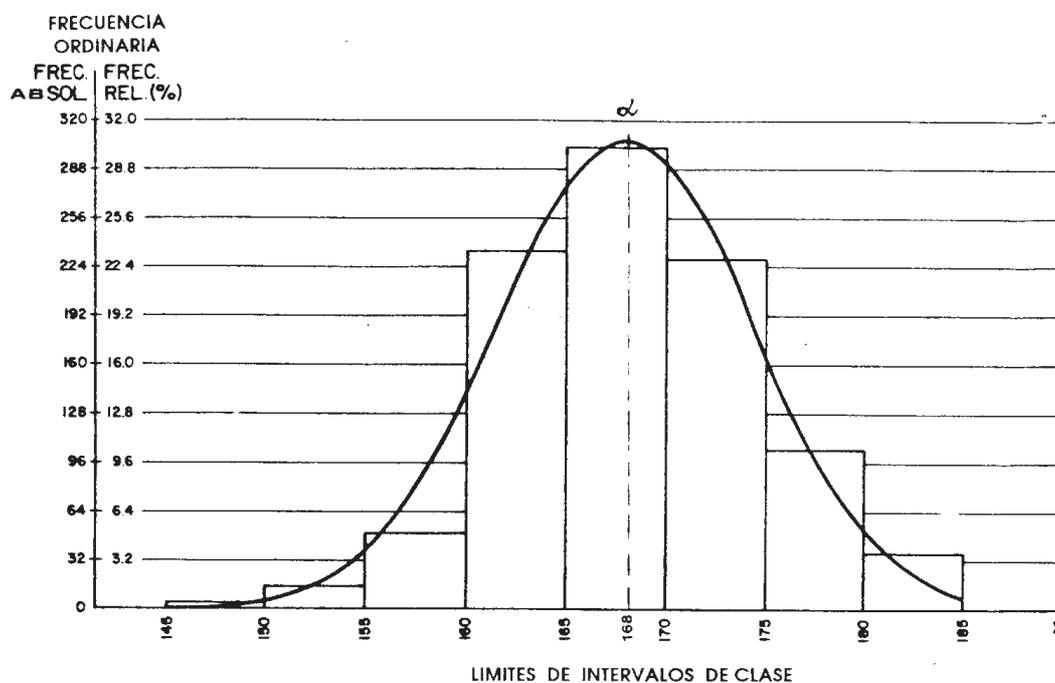


Fig. A3-7. Ajuste de una función de densidad normal

Tabla A3-2. Ajuste de una distribución normal a la de caudales

AJUSTE DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL A LA DE LOS CAUDALES						
$L_i$	$L_i - 168$	$t = \frac{L_i - 168}{6,36}$	P	$p_i$	$T_i$	$n_i$
150	-18	-2,817	0,002	0,002	2	3
155	-13	-2,034	0,021	0,019	19	15
160	-8	-1,252	0,105	0,084	84	50
165	-3	-0,469	0,319	0,214	214	240
170	2	0,313	0,622	0,303	303	312
175	7	1,095	0,864	0,242	242	235
180	12	1,878	0,971	0,107	107	108
∞	∞	∞	1,000	0,029	29	37
				1,000	1.000	1.000

Las áreas bajo la curva normal se obtienen como diferencia entre los valores correspondientes de la función de distribución. A partir de estos valores tipificados se puede emplear la Tabla de la Distribución Normal, calculando, mediante las oportunas interpolaciones, en su caso, los valores P, tales que:

$$P_1 = \int_{-\infty}^{-2,817} f(t) \cdot dt = 0,002 ; P_2 = \int_{-\infty}^{-2,034} f(t) \cdot dt = 0,021 ; \text{etc.}$$

siendo:

$$t = Z = (x - \alpha) / \sigma$$

La diferencia entre dos  $P_i$  consecutivas determina las probabilidades  $p_i$  de que la variable hidráulica tome un valor comprendido entre  $L_{i-1}$  y  $L_i$ , de tal manera que:

$$p_1 = P_1 = 0,002 ;$$

$$p_2 = P_2 - P_1 = 0,021 - 0,002 = 0,019 ; \text{etc...}$$

Las frecuencias teóricas son proporcionales a las correspondientes áreas bajo la curva normal. Distribuyendo la frecuencia total o tamaño poblacional del ejemplo que se plantea en el capítulo III,  $n = 1.000$  acequias de riego, en nuestro caso, proporcionalmente respecto a las probabilidades  $p_i$ , se obtienen *frecuencias teóricas*  $T_i$ , que corresponderían a los caudales observados si la variable hidráulica  $Q$  se ajustara *exactamente* al modelo teórico de la distribución normal. En nuestro ejemplo, las discrepancias entre los valores observados  $n_i$  y los teóricos  $T_i$  son lo suficientemente pequeños como para que pueda aceptarse la hipótesis de que la *variable aleatoria estadística, o sea, el caudal de las acequias de riego o bien, en otro caso también estudiado en el capítulo V, el del río Ebro en la estación foronómica que nos ocupa, sigue una distribución normal.*

---

En cualquier caso puede realizarse, como ya se ha apuntado, un contraste de la bondad del ajuste utilizando el estadígrafo  $\chi^2$  de Pearson, con (n-1) grados de libertad, a saber:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(n_i - T_i)^2}{T_i}$$

siempre que  $\forall T_i > 5$ . Pero de esto nos ocuparemos, con mayor detenimiento, en el siguiente epígrafe.

## II. LA PRUEBA DEL CHI-CUADRADO

### 1. FRECUENCIAS OBSERVADAS Y TEÓRICAS

En diferentes partes de nuestro estudio se recurre al uso de la distribución teórica de probabilidad “Chi-cuadrado” con el objetivo de contrastar ciertas hipótesis.

Como ya se ha visto muchas veces, los resultados obtenidos de las muestras de una población o universo no siempre concuerdan exactamente con los resultados teóricos estimados, según las reglas de probabilidad. Por ejemplo, aunque las consideraciones teóricas basadas en la equiprobabilidad laplaciana (*a priori*) o en la probabilidad frecuencialista de Von Mises (*a posteriori*) nos lleven a esperar obtener 50 caras y 50 cruces cuando se lanza al aire 100 veces una moneda bien hecha, es raro que se obtengan exactamente estos resultados.

Supongamos ahora que, en una determinada muestra, se observan una serie de posibles sucesos:  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$  (ver el cuadro siguiente) que pasan con frecuencias:  $o_1, o_2, o_3, \dots, o_k$ , llamadas *frecuencias observadas* y que, según las reglas de probabilidad, se espera que ocurran con frecuencias:  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$  llamadas *frecuencias teóricas o esperadas*.

Tabla A3-3. Frecuencia observada y esperada de la prueba del Chi-cuadrado

SUCESOS	$E_1$	$E_2$	$E_3$	...	$E_k$
Frecuencia observada	$o_1$	$o_2$	$o_3$	...	$O_k$
Frecuencia esperada	$e_1$	$e_2$	$e_3$	...	$E_k$

A menudo se desea saber si las frecuencias observadas difieren significativamente de las frecuencias esperadas. Para el caso en que solamente son posibles dos sucesos:  $E_1$  y  $E_2$  (que suele denominarse *dicotomía o clasificación dicotómica*), como, por ejemplo, caras y cruces, defectuoso o no defectuoso, blanco y negro, etc., el problema queda resuelto satisfactoriamente con los métodos clásicos. En este apartado aclaratorio, se considera el problema general.

### 2. DEFINICIÓN DE $\chi^2$

Una medida de la discrepancia o divergencia existente entre las frecuencias realmente observadas y las esperadas o teóricas, es la suministrada por el conocido estadígrafo  $\chi^2$  de Pearson, dado por la expresión:

$$\chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} + \dots + \frac{(o_k - e_k)^2}{e_k} = \sum_{j=1}^k \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} \quad (1)$$

donde si el total de frecuencias es N, tendremos:

$$\sum o_j = \sum e_j = N \quad (2)$$

Una explicación equivalente a la ofrecida por la (1) es la siguiente:

$$\chi^2 = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N \quad (3)$$

Si  $\chi^2 = 0$ , las frecuencias observadas y las teóricas concuerdan exactamente; mientras que si  $\chi^2 > 0$ , no coinciden exactamente. Para mayores valores de  $\chi^2$ , mayores son también las discrepancias existentes entre las frecuencias observadas y las teóricamente estimadas.

La distribución muestral de  $\chi^2$  se aproxima muy estrechamente a la distribución teórica de probabilidad Chi-cuadrado, cuya gráfica puede verse en la siguiente figura A3-8 para diferentes valores de  $\nu$ , de configuración analítica:

$$Y = Y_0 (\chi^2)^{1/2(\nu-2)} \cdot e^{-1/2\chi^2} = Y_0 \chi^{\nu-2} \cdot e^{-1/2\chi^2} \quad (4)$$

si las frecuencias estimadas son al menos iguales a 5; la aproximación mejora para valores superiores. Aquí  $\nu$  es el número de grados de libertad,  $Y_0$  es una constante que depende de  $\nu$  con lo cual, lógicamente, el área total bajo la curva vale 1. Algunas distribuciones  $\chi^2$  correspondientes a diferentes valores de  $\nu$  se muestran en la siguiente figura:

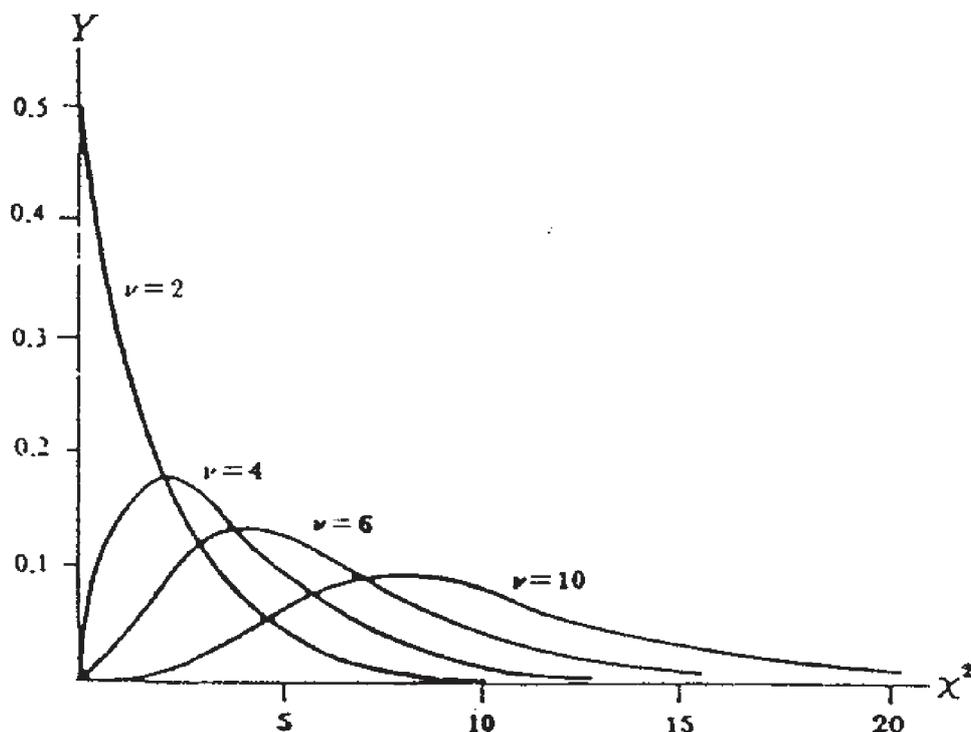


Fig. A3-8. Distribuciones de Chi-cuadrado para diferentes valores de  $\nu$

El valor máximo que alcanza  $Y$  se presenta en  $\chi^2 = \nu - 2$ , para  $\nu \geq 2$ .

El número de grados de libertad  $\nu$  viene dado por:

a)  $\nu = k - 1$ , si las frecuencias esperadas pueden calcularse sin haber de estimar parámetros poblacionales con los estadísticos muestrales. Advirtiéndose que el restar 1 a  $k$  es a causa de la condición restrictiva (2) que denota que si son conocidas  $(k-1)$  de las frecuencias esperadas, la frecuencia restante puede ser determinada.

b)  $\nu = k - 1 - m$ , si las frecuencias esperadas solamente pueden calcularse estimando  $m$  parámetros de la población a partir de los estadísticos muestrales.

### 3. ENSAYOS DE SIGNIFICACIÓN

En la práctica, las frecuencias son esperadas de acuerdo con una hipótesis  $H_0$ . Si bajo esta hipótesis el valor calculado de  $\chi^2$  dado por las expresiones (1) o (3) es mayor que algún valor crítico (tal como puede ser  $\chi^2_{0.95}$  o  $\chi^2_{0.99}$ , que son valores críticos en los niveles de significación del 0.05 y 0.01, respectivamente), se deduce que las frecuencias observadas difieren *significativamente* de las esperadas y se rechaza  $H_0$  al nivel de significación correspondiente. En caso contrario, se aceptará, o al menos no se rechazará. Este procedimiento se llama *ensayo o prueba de Chi-cuadrado* de la hipótesis, y es lo que hemos realizado

justamente en el ajuste MCO de algunas de las variables hidráulicas analizadas en nuestro libro.

Se debe advertir que, en aquellas circunstancias en que  $\chi^2$  esté muy próximo a cero, ha de mirarse el procedimiento empleado con cierto recelo, ya que es raro que las frecuencias observadas concuerden suficientemente bien con las esperadas. Para examinar objetivamente estas situaciones, se puede determinar si el valor calculado de  $\chi^2$  es menor que:  $\chi^2_{0.05}$  o bien  $\chi^2_{0.01}$ , respectivamente. Este es, justamente, el caso que nos ocupa del ajuste de algunas funciones desarrolladas en nuestro libro.

#### 4. LA PRUEBA CHI-CUADRADO PARA LA BONDAD DEL AJUSTE

La prueba Chi-cuadrado puede ser utilizada para determinar de qué manera ciertas distribuciones teóricas de probabilidad, como pueden ser la normal, binomial, hipergeométrica,  $\gamma$  ó  $\beta$  de Euler, etc., se ajustan a distribuciones empíricas, es decir, aquellas que se obtienen de los datos muestrales. En nuestro caso, como ya se ha visto, se ha utilizado para determinar la bondad del ajuste de diversas funciones de variables hidráulicas de interés.

#### 5. TABLAS DE CONTINGENCIA

La tabla A3-3, en la cual las frecuencias observadas ocupan una sola fila, es una *tabla de clasificación simple*. Ya que el número de columnas es  $k$ , también se llama tabla  $1 \cdot k$ . Desarrollando esta idea, se llega a las *tablas de clasificación doble o tablas  $h \cdot k$* , en las cuales las frecuencias observadas ocupan  $h$  filas y  $k$  columnas. Estas tablas se llaman, normalmente, *tablas de contingencia*.

Correspondiéndose con cada frecuencia real u observada en una tabla de contingencia  $h \cdot k$ , hay una *frecuencia teórica o esperada* que se calcula bajo alguna hipótesis y según las reglas clásicas de la probabilidad. Estas frecuencias, que ocupan las casillas de una tabla de contingencia, se llaman frecuencias elementales. La frecuencia total de cada fila o columna es la llamada *frecuencia marginal*.

Para estudiar el acuerdo entre las frecuencias observadas y las esperadas, se calcula, como ya se ha dicho, el estadístico:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}, \quad (5)$$

donde la suma se extiende a todas las casillas de la tabla de contingencia; los símbolos  $o_j$  y  $e_j$  representan, respectivamente, las frecuencias observadas y las esperadas en la casilla  $j$ . Esta suma, que es análoga a (1), contiene  $h \cdot k$  términos. La suma de todas las frecuencias observadas se denota por  $N$  y es igual a la suma de todas las frecuencias esperadas.

Como antes, el estadístico (5) tiene una distribución muestral muy estrechamente aproximada a la dada por (4), con tal de que las frecuencias esperadas no sean demasiado pequeñas. El número de grados de libertad de esta distribución Chi-cuadrado viene dado, por  $h > 1$ ,  $k > 1$  por:

(a)  $\nu = (h-1)(k-1)$ , si las frecuencias esperadas pueden calcularse sin tener que estimar parámetros poblacionales con los estadísticos muestrales.

(b)  $\nu = (h-1)(k-1) - m$ , si las frecuencias observadas pueden solamente calcularse estimando  $m$  parámetros poblacionales con los estadísticos muestrales.

Los ensayos de significación para tablas  $h \cdot k$  son análogos a los de las tablas  $1 \cdot k$ . Las frecuencias esperadas se buscan bajo una determinada hipótesis  $H_0$ . Una hipótesis normalmente supuesta es aquella en la cual las dos clasificaciones son independientes entre sí.

Las tablas de contingencia pueden extenderse a un número mayor de dimensiones. Así, por ejemplo, se pueden tener tablas  $h \cdot k \cdot l$  donde estén presentes tres clasificaciones.

## 6. CORRECCIÓN DE YATES PARA LA CONTINUIDAD

Cuando se aplican a datos discretos los resultados para distribuciones continuas, se deben hacer unas determinadas correcciones, como ya se ha señalado en el texto. Una corrección análoga es aplicable cuando se utiliza la distribución Chi-cuadrado. La corrección consiste en poner la expresión (1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \chi^2(\text{corregida}) &= \frac{(|o_1 - e_1| - 0.5)^2}{e_1} + \frac{(|o_2 - e_2| - 0.5)^2}{e_2} + \dots + \frac{(|o_k - e_k| - 0.5)^2}{e_k} = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{(|o_j - e_j| - 0.5)^2}{e_j} \end{aligned} \quad (6)$$

que se conoce frecuentemente como *corrección de YATES*. También existe una modificación análoga de la formulación (4).

En general, la corrección se hace solamente cuando el número de grados de libertad es  $\nu = 1$ . En muestras grandes, se obtienen prácticamente los mismos

resultados que la  $\chi^2$  no corregida, pero pueden aparecer ciertas dificultades en relación con los valores críticos. Para muestras pequeñas, donde cada frecuencia esperada se encuentra entre 5 y 10, puede ser que sea mejor comparar los valores de  $\chi^2$  corregido y de  $\chi^2$  no corregido. Si ambos valores conducen a la misma conclusión según una cierta hipótesis, tal como despreciarla en el nivel de significación del 0'05, raramente se presentan dificultades. Si conducen a conclusiones diferentes, se puede o bien incrementar las dimensiones muestrales o, si esto no fuera posible, se pueden utilizar métodos de probabilidad exactos, de acuerdo con la *distribución multinomial*. Esta última se basa en que si los sucesos  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , pueden ocurrir con probabilidades respectivas:  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , entonces la probabilidad de que:  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , ocurran  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , veces respectivamente, viene dada por la expresión:

$$(N! / X_1! \cdot X_2! \cdot \dots \cdot X_k!) \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k} = \frac{N!}{X_1! \cdot X_2! \cdot \dots \cdot X_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k} = \frac{N! \cdot \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}}{\prod_{i=1}^k X_i!},$$

donde:  $X_1 + X_2 + \dots + X_k = \sum_{i=1}^k X_i = N$ .

Esta distribución teórica de probabilidad, que constituye una generalización de la conocida distribución binomial, se llama *distribución multinomial*, ya que la expresión anterior es el término general del desarrollo multinomial:  $(p_1 + p_2 + \dots + p_k)^N$ . Los números teóricos a veces para que ocurran los sucesos:  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , en  $N$  repeticiones, son:  $Np_1, Np_2, \dots, Np_k$ , respectivamente.

### III. FUNCIONES DE DENSIDAD Y DE DISTRIBUCIÓN

#### 1. GENERALIDADES

En el estudio de diversas funciones aplicadas a la distribución de las variables hidráulicas, se tratan profusamente los conceptos estadísticos de "función de distribución" y de "función de densidad" (véanse específicamente los capítulos I y III de nuestro libro).

Conviene, al respecto, recordar la definición de "función de distribución  $F(x)$  para una variable aleatoria continua", como:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) \cdot du \quad (1)$$

En los puntos de continuidad de  $f(x)$ , el signo  $\leq$  se puede, si se desea, sustituir por el  $<$ .

La probabilidad de que la variable  $X$  se halle entre  $x$  y  $x+\Delta x$  vendrá dada por la expresión:

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(u) \cdot du \quad ,$$

de tal manera que si  $x$  es suficientemente pequeño, tendremos aproximadamente :

$$P(x \leq X \leq x+\Delta x) = f(x) \cdot \Delta x$$

Por otra parte, veamos que al diferenciar ambos miembros de la expresión (1), obtendremos:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad ,$$

para todos los puntos donde la función  $f(x)$  es continua, es decir, que la derivada de la función de distribución es, justamente, la "función de densidad".

De hecho, para obtener la última expresión, hemos hecho servir la circunstancia -ya familiar en el cálculo infinitesimal- de que:

$$\frac{d\varphi}{dx} \int_a^x f(u) \cdot du = f(x)$$

Se trata de un caso especial de la denominada "regla de Leibnitz para la diferenciación de una integral", en el caso de que los límites de integración dependen del parámetro  $x$ . En efecto, tenemos que:

$$\int_{a_1(x)}^{a_2(x)} F(u, x) \cdot du = \varphi(a_1, a_2, x),$$

de tal manera que si  $a_1(x)$  y  $a_2(x)$  son funciones derivables de  $x$ , la derivada de la integral habrá de calcularse como una función compuesta, mediante la aplicación de la "regla de la cadena", o sea:

$$\frac{d}{dx} \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} F(u, x) \cdot du = \frac{\delta \varphi}{\delta x} + \frac{\delta \varphi}{\delta a_1} \cdot \frac{\delta a_1}{\delta x} + \frac{\delta \varphi}{\delta a_2} \cdot \frac{\delta a_2}{\delta x},$$

Por otra parte, tendremos que el primer sumando de esta expresión, considerando los límites de integración como fijos o constantes, será:

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x} = \frac{d}{dx} \int_{a_1}^{a_2} F(u, x) \cdot du = \int_{a_1}^{a_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F'_x(u, x + \theta \cdot \Delta x) du = \int_{a_1}^{a_2} F'_x(u, x) \cdot du,$$

Además,  $\delta\varphi/\delta a_2$  (siendo  $a_2$  el límite superior de integración) es, por las mismas propiedades de la integral, el valor que toma la función subintegral para:  $u = a_2$ , o sea:

$$\delta\varphi/\delta a_2 = F(a_2, x).$$

Por último,  $\delta\varphi/\delta a_1$  es, análogamente, igual a  $-F(a_1, x)$ , dado que el cambio de signo queda justificado por la inversión de los límites de integración, siempre considerando que:

$$\int_{a_1}^{a_2} = -\int_{a_2}^{a_1}, \text{ con lo que } a_1 \text{ pasará a ser el límite superior de integración.}$$

De esta manera, si los límites de integración  $a_1$  y  $a_2$  son, a la vez, funciones derivables de  $x$ , y siguen verificándose las hipótesis del problema, para cada  $x$  de un cierto intervalo y para cada  $u$  del intervalo cerrado entre  $a_1(x)$  y  $a_2(x)$ , la derivada de la integral, será:

$$\frac{d}{dx} \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} F(u, x) \cdot du = \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \frac{dF}{dx} + F[a_2(x), x] \frac{da_2}{dx} - F[a_1(x), x] \frac{da_1}{dx}$$

donde  $a_1$ ,  $a_2$  y  $F$  se suponen funciones derivables con respecto a la variable  $x$ .

## 2. INTERPRETACIONES GRÁFICAS

Si  $f(x)$  es la función de densidad para una variable aleatoria estadística  $X$  entonces podremos representar:  $y = f(x)$  gráficamente por una curva como la de la Fig. A3-9. Ya que  $f(x) \geq 0$ , la curva no puede estar nunca por debajo del eje  $x$ . El área total limitada por la curva y el eje  $x$  ha de ser 1 debido a la conocida propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1.$$

Ello constituye una proposición matemática del hecho de que una variable aleatoria de valor real debe hallarse comprendida siempre entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . Entones, definimos la probabilidad de que  $X$  se encuentre entre  $a$  y  $b$  como:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) \cdot dx .$$

Podemos demostrar que esta definición cumple con los axiomas clásicos de las probabilidades, lo cual no haremos aquí por razones obvias de espacio y de oportunidad.

Una función  $f(x)$  que cumple los requisitos anteriores se denomina "función de probabilidad o distribución de probabilidad" para a una variable aleatoria continua, pero más frecuentemente se conoce como "función de densidad de probabilidad" o, simplemente, como "función de densidad". Cualquier función que cumpla las propiedades anteriores, automáticamente es una función de densidad.

Geoméricamente, la probabilidad de que  $X$  se halle comprendida entre los valores  $a$  y  $b$ , es decir,  $P(a < X < b)$ , se representa por el área sombreada de la siguiente Fig. A3-9. A saber:

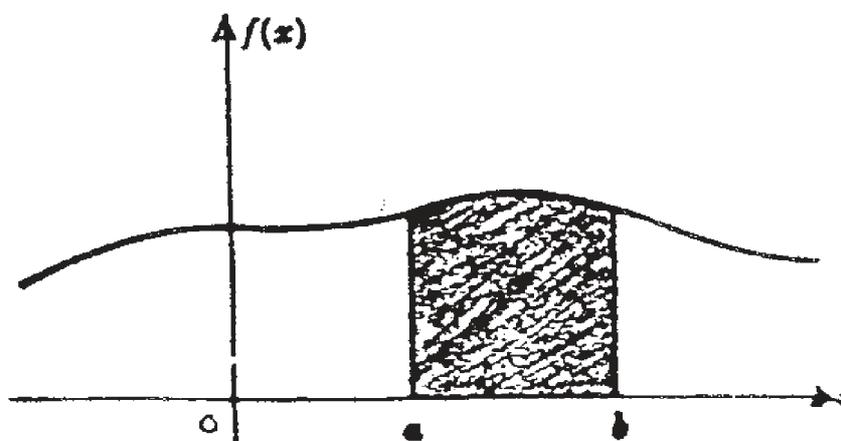


Fig. A3-9. Representación de la probabilidad:  $a < X < b$

La función de distribución:  $F(x) = P(X \leq x)$  es una función monótonicamente creciente que aumenta desde cero hasta 1 y se representa por una curva como la de la siguiente Fig. A3-10 (78-SPIEGEL, 1981; pp. 42 y 43).

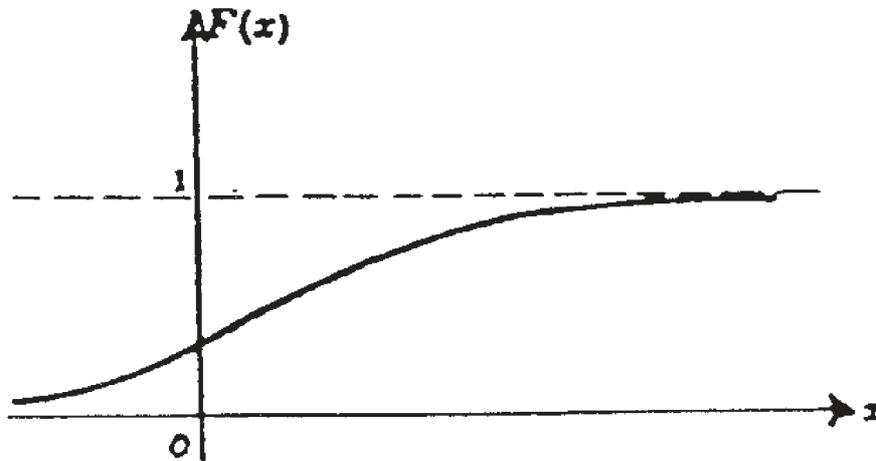


Fig. A3-10. Representación gráfica de la función de distribución

A las denominadas “distribuciones conjuntas”, las ideas anteriores se generalizan a dos o más variables aleatorias estadísticas. El caso típico más usual es el de dos variables aleatorias que son ambas discretas o bien ambas continuas. En los casos en que una variable es discreta y la otra es continua, se pueden realizar, sin excesivos problemas, las modificaciones pertinentes. También pueden hacerse generalizaciones a los casos de más de dos variables.





## - BIBLOGRAFÍA Y FONDOS DOCUMENTALES -

- (\*) Bibliografía local.  
 (\*\*) Bibliografía general.  
 (\*\*\*) Bibliografía recomendada.

- 1) ALCAIDE, A. *Estadística Económica*. Ed. SAETA. Madrid, 1973. (\*\*)
- 2) ALFAMI, A. *Irrigazione a pioggia*. Edizioni Agricole. Bologna, 1957. (\*\*\*)
- 3) AMORÓS CASTAÑER, M. *Riego por goteo en cítricos*. Agroguías Mundi-prensa. Madrid, 1991. (\*\*\*)
- 4) ANDRIANI, M. G. *et alt.* “Influenza del metodo e del regime irriguo sulle rese del mandorlo (cv “Genco”) nel tavoliere di puglia”, en *Irrigazione e Drenaggio*. Octubre-diciembre, 1989. pp. 109-112. (\*)
- 5) AA. VV. “La tolerància a la sequera en la millora genètica de l’ametller”, en *Butlletí informatiu. IRTA*, 62. Julio de 1999. (\*\*\*)
- 6) AA. VV. *Hütte. Manual del Ingeniero*. Ed.: Gustavo Gili. Barcelona, 1938. (\*\*\*)
- 7) BASMANN, R. L. “A Note on the Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in Two Leading Over-identified Cases”, en *Journal of the American Statistical Association*, 56. 1961. (\*\*)
- 8) BAZIN, H. en *Annales des ponts et chaussées* (7) 7<sup>4</sup> (1897). (\*\*\*)
- 9) BENÍTEZ, A. *Captación de aguas subterráneas*. Ed.: Dossat, S.A. Madrid, 1963. (\*\*\*)
- 10) BLANES, O. *Manual de Instalaciones y aparatos para riego*. Ed.: CEAC. Barcelona, 1981. (\*\*\*)
- 11) BORNEMANN, K. R. *Zivilingenieur* (2) 15 (1869). (\*\*\*)
- 12) BRABBÉE, K. *Beihefte zum Gesundheitsingenieur*, tomo I, n<sup>o</sup>. 1. 1913. (\*\*\*)
- 13) BRAHMS, A. *Anfangsgründe der Deich- u. Wasserbaukunst*, 2 partes, Aurich, 1754 y 1757, 1<sup>a</sup> parte. (\*\*\*)
- 14) CASAS, J. M. y SANTOS, J. *Introducción a la estadística para la economía y administración de empresas*. Ed.: CEURA, S. A. Madrid, 1995. (\*\*)
- 15) COPELAND, R. D. y YITAYEW, C. M. *Evaluation of a subsurface trickle irrigation system. Presented at the international winter meeting of the American Society of Agricultural Engineers. ASAE paper, 902.531*. Chicago, 1990. (\*\*\*)
- 16) CUBILLO, F. *et alt.* *Caudales ecológicos*. Ed.: Agencia del Medio Ambiente de la Comunidad de Madrid. Madrid, 1990. (\*\*\*)
- 17) CUNNINGHAM, A. *Hydraulic Experiments at Roorkee*. 1874/75. (\*\*\*)

- 18)CHASE, R. G. "Phosphorus application through a subsurface trickle system", en *Proceedings of the third International Drip/Trickle Irrigation Congress*. Fresno, 1985. pp. 393-400. (\*\*\*)
- 19)D'AUBUISSON, J. F. *Annales des ponts et chaussées*. (2) 2 (1841). (\*\*\*)
- 20)DEL AMOR, F. M. *et alt.* "El riego localizado subterráneo en almendro. Aspectos hidráulicos", en *Fruticultura Profesional*, 85. 1997. pp. 42-47. (\*\*\*)
- 21)DEL AMOR, F. M. y DEL AMOR, F. "Riego por goteo subterráneo en almendro. Aspectos de manejo y respuesta del cultivo", en *Fruticultura profesional*, 104. Barcelona, 1999. (\*\*\*)
- 22)DUBUAT, L. G. *Principes d'hydraulique*, 1, n. éd. París, 1816. (\*\*\*)
- 23)EMBED IRUJO, A. *La calidad de las aguas*. Ed.: Civitas, S.A. Madrid, 1994. (\*\*)
- 24)EYTELWEIN, J. A. *Handbuch der Mechanik fester Körper*. Berlín, 1801. (\*\*\*)
- 25)FEISTEL, S. "Senior project survey", en *Permanent row crop drip-management and design (with a California emphasis)*. Published by C. M. Burt and D. Kasapligil. Irrigation Training and research center. California, 1992. (\*)
- 26)FERERES, E. "Irrigation of almonds", en MICKE, W. y KESTER, D. *Almond Orchard Management. Division of Agricultural Science. University of California, Publication 4.092*. 1978. pp. 71-78. (\*\*\*)
- 27)FERERES, E. *et alt.* California Agriculture. July-August, 1981. pp. 11-12. (\*)
- 28)FORCHHEIMER, P. *Tratado de hidráulica*. Ed.: Labor, S.A. Barcelona, 1950. (\*\*\*)
- 29)FRANQUET BERNIS, J. M. *Análisis territorial ("División, Organización y Gestión del Territorio")*. Volumen I. CADUP Estudios, 1990/91. Ed.: UNED. Tortosa, 1991. (\*\*)
- 30)FRANQUET BERNIS, J. M. *Estructura de la propietat agrària (aplicació a la Regió Catalana de l'Ebre)*. Ed.: Diputació de Tarragona. Tortosa, 1998. (\*\*)
- 31)FRANQUET BERNIS, J. M. "El riego en el almendro", *El arbolar. Divulgación Agrícola*, 2. Reus, febrero de 1999. pp. 15-18. (\*\*\*)
- 32)FRANQUET BERNIS, J. M. *Con el agua al cuello (55 respuestas al Plan Hidrológico Nacional)*. Ed.: Littera Books, S.L. Barcelona, 2001. (\*\*)
- 33)GENERALITAT DE CATALUNYA, DARP. *Estadístiques agràries i pesqueres de Catalunya*. Barcelona, 1991. (\*)
- 34)GERHARDT, P. JASMUND, R. ENGELS, H. "Gewässerkunde", en *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*, 3ª parte, tomo I. Leipzig, 1923 (5ª ed.) (\*\*\*)
- 35)GIRONA, J. "Estrategias de riego deficitario en el cultivo del almendro", en *Fruticultura Profesional*, 47. Barcelona, 1992. pp. 38-45. (\*\*\*)
- 36)GIRONA, J. Project CEE 8.001-CT-91-0301. Second Scientific Report. Participant 02. 1994. (\*\*)

- 37) GIRONA, J. Project CEE 8.001-CT-91-0301. Third Scientific Report. Participant 02. 1995. (\*\*)
- 38) GIRONA, J. “Reg deficitari controlat a l’ametller”, en *Catalunya Rural i Agrària*, 23. Barcelona, mayo de 1996. pp. 27-34. (\*\*\*)
- 39) GIRONA, J. *et alt.* “Efectos acumulados de 3 años de un riego deficitario controlado en almendro (*Prunus dulcis* L.)”, en *XII Jornadas Técnicas sobre Riegos (Anejo I)*. Pamplona, 1994. pp. 1-8. (\*\*\*)
- 40) GOLDHAMER, D. A. y SAHCKEL, K. “Irrigation cutoff and drought irrigation strategy effects on almond: 1st year results”, en *17th Annual Almond Research Conference*. Modesto, 1989. pp. 35-37. (\*\*\*)
- 41) GOLDHAMER, D. A. y SAHCKEL, K. “Irrigation cutoff and drought irrigation strategy effects on almond: 2nd year results”, en *18th Annual Almond Research Conference*. Fresno, 1990. pp. 30-35. (\*\*\*)
- 42) GÓMEZ POMPA, P. *Riegos a presión, aspersión y goteo*. Biblioteca agrícola Aedos. Barcelona, 1979 (2ª edición). (\*\*\*)
- 43) GÓMEZ POMPA, P. *Técnica y tecnología del riego por aspersión*. Serie Técnica. Ministerio de Agricultura. Secretaría General Técnica. Madrid, 1981. (\*\*\*)
- 44) GRASSELLY, C. y CROSSA-REYNAUD, P. *El almendro*. Ed.: Mundiprensa. Madrid, 1984. (\*\*)
- 45) HAGEN, G. *Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften*. Berlín, 1868. (\*\*\*)
- 46) HAGEN, G. *Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften*. Berlín, 1869. (\*\*\*)
- 47) HAGEN, G. *Über die Bewegung des Wassers*. Berlín, 1870. (\*\*\*)
- 48) HAGEN, G. *Untersuchungen über die gleichförmige Bewegung des Wassers*. Berlín, 1876. (\*\*\*)
- 49) HARDER, P. E. *Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen*. Hamburgo, 1878. (\*\*\*)
- 50) HERNÁNDEZ ABREU, J.M. y RODRIGO LÓPEZ, J. *Jornadas sobre riego por goteo*. Ministerio de Agricultura. Instituto Nacional de Reforma y Desarrollo Agrario (I.R.Y.D.A.). (\*\*\*)
- 51) HESSLE, C. en *Zeitschrift für Gewässerkunde* 2 (1899). (\*\*\*)
- 52) HOEL, P. G. *Introducción a la estadística matemática*. Ed.: Ariel. Barcelona, 1980. (\*\*)
- 53) HUMPHREYS, A. A. y ABBOT, H. L. *Report upon the physics and hydraulics of the Mississippi River*, Filadelfia (USA), 1861. (\*)
- 54) HUTMACHER, R. B. *et alt.* “Growth and yield responses of almond (*Prunus amygdalus*, L.) to trickle irrigation”, en *Irrigation Science*, 14. pp. 117-126. (\*\*\*)
- 55) I.R.Y.D.A. *Manual Técnico. Normas para la redacción de proyectos de riego localizado*. Madrid, 1986. (\*\*\*)
- 56) JOHNSTON, J. *Métodos de econometría*. Ed: Vicens-Vives. Barcelona, 1967. (\*\*)

- 57) KRUSE, E. G. y ISRAELI, I. *Evaluation of a subsurface drip irrigation system. Presented at the international summer meeting of the American Society of Agricultural Engineers. ASAE paper, 872.034.* 1987. (\*\*\*)
- 58) KÜTTER, W. R. en *Allgemeine Bauzeitung*, 35 (1870). (\*\*\*)
- 59) LAMM, F. R. *et alt.* "Water requirement of subsurface drip-irrigated corn in northwest Kansas", en *Transactions of the ASAE*, 38 (2). 1995. pp. 441-448. (\*)
- 60) MACAULAY, F. W. *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 208. London, 1921. (\*\*)
- 61) MAIR, J. G. *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 84. London, 1886. (\*\*)
- 62) MEDINA SAN JUAN, J.A. *Riego por goteo (Teoría y práctica)*. Ed.: Mundi-Prensa. Madrid, 1979. (\*\*\*)
- 63) MICKE, W. y KESTER, D. *Almond Orchard Management. Division of Agricultural Science. University of California, Publication 4.092.* 1978. (\*\*\*)
- 64) MOLENAAR, A. *El riego por aspersión*. ONU para la Agricultura y la Alimentación (FAO). Roma, 1960. (\*\*\*)
- 65) MURUA, J. R. *et alt.* "California leads Spain in almond production, exports to world", en *California Agriculture, Nov. Dec*, 47 (6). 1993. pp. 11-14. (\*\*)
- 66) OLIVIER, H. *Riego y Clima*. Compañía Editorial Continental, S.A. México 22, 1963. (\*\*\*)
- 67) ORON, G. *et alt.* "Subsurface microirrigation with effluent", en *Journal of irrigation and Drainage Engineering Review*, 18 (4). 1991. pp. 34-39. (\*\*\*)
- 68) PIZARRO CABELLO, F. *Riegos localizados de alta frecuencia*. Ed.: Mundi-Prensa. Madrid, 1987. (\*\*\*)
- 69) PHENE, C. *et alt.* "Effect of high frequency subsurface and surface drip irrigation on root distribution of sweet corn", en *Irrigation Science*, 12. 1990. pp. 135-140. (\*\*)
- 70) PHENE, C. y RUSKIN, R. "Potential of subsurface drip irrigation for management of nitrate wastewater", en *Proceedings of the fifth international microirrigation congress*. Orlando, 1995. pp. 155-167. (\*\*)
- 71) PULIDO SAN ROMÁN, A. *Estadística y Técnicas de Investigación Social*. Ed. ANAYA. Madrid, 1971. (\*\*)
- 72) RAPP, J. *Unsere natürlichen Wasserläufe*. Weilheim, 1883. (\*\*\*)
- 73) REYNOLDS, O. *Proceedings of the Royal Institution of Great-Britain. Papers*, 2. (\*\*)
- 74) RUBIO SANJUÁN, I. *Elementos de Hidráulica General y Aplicada (con motores hidráulicos)*. Ed.: Labor, S.A. Barcelona, 1972. (\*\*\*)
- 75) SAPH y SCHODER. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 51. New York, 1903. (\*\*\*)
- 76) SCHILLER, L. *Zwei neue Ähnlichkeitsgesetze für das Temperaturfeld usw. Physikalische Zeitschrift*, 29, 1928. (\*\*)

- 
- 77)SCHILLER, L. y BURBACH, TH. “Wärmeübergang strömender Flüssigkeiten in Rohren”, en *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 72, Berlin (S. 1028). (\*\*\*)
- 78)SPIEGEL, M. R. *Teoría y problemas de probabilidad y estadística*. Ed.: McGraw-Hill. México, 1981 (1ª ed. 1975). (\*\*)
- 79)TORRECILLAS, A. *et alt.* “The response of young almond trees to different drip irrigated conditions. Development and yield”, en *Journal of Horticultural Science*, 64. 1989. pp. 1-7. (\*\*\*)
- 80)TORRES SOTELO, J.E. *Apuntes de hidráulica general y agrícola. Primera y Segunda Parte*. Universidad Politécnica de Valencia. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos. Valencia, 1970. (\*\*\*)
- 81)Tubos SAENGER. *Manual técnico*. Barcelona, 1989. (\*\*)
- 82)UNWIN, W. C. *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 80. London, 1885. (\*\*\*)
- 83)UNWIN, W. C. *Treatise on hydraulics*. London, 1907. (\*\*\*)
- 84)URALITA, S.A. *Manual general*. Ed.: Dossat, S.A. Madrid,1966. (\*\*\*)
- 85)URBANO TERRÓN, P. *Tratado de Fitotecnia General*. Ed.: Mundi-Prensa. Madrid, 1992. (\*\*)
- 86)USDA, Foreign Agricultural Service, Horticultural products review, 1994, en *Short Almond Course*, 1995. ANR Publications. University of California. Division of agriculture and natural resources. (\*\*)
- 87)VARGAS, F. J. *El almendro en la provincia de Tarragona*. Ed.: Diputació de Tarragona. Tarragona, 1975. (\*\*)

---

Así mismo, juzgamos recomendable, para el mejor entendimiento de algunas de las consideraciones realizadas en el Capítulo IV, la lectura del documento:

AEOFRUSE & CCAE. *Frutos de cáscara y algarroba: un sector amenazado* (documento de reflexión). Andalucía, 1999 (\*)



## ÍNDICE GENERAL

	<u>Pág.</u>
PRÓLOGO .....	5
<b>CAPÍTULO I – CONDUCCIONES LIBRES: DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE FANNING.....</b>	<b>9</b>
<b>Resumen .....</b>	<b>9</b>
<b>Resum .....</b>	<b>10</b>
<b>Abstract-Summary .....</b>	<b>11</b>
<b>1. Introducción .....</b>	<b>12</b>
<b>2. Ecuación general del movimiento uniforme en canales .....</b>	<b>14</b>
2.1. Formulación teórica del proceso .....	14
2.2. Determinación de la función $f(V)$ .....	18
2.3. Aplicación de la teoría de modelos .....	20
2.3.1. Síntesis histórica del concepto de “modelo” .....	20
2.3.2. Definición y clases de modelos .....	22
2.3.3. Modelos para el conocimiento científico .....	23
2.3.4. Modelos de simulación .....	24
2.3.5. Los modelos y la teoría de sistemas .....	27
2.3.6. Los modelos matemático-hidráulicos .....	28
2.3.6.1. Variables exógenas y endógenas.....	28
2.3.6.2. Problemas que se plantean .....	28
2.3.6.3. Formulación de los modelos matemático-hidráulicos .....	32
2.3.7. La función $f(V)$ y el coeficiente de Fanning .....	33
<b>3. Fórmulas clásicas para la determinación de la pérdida de     carga .....</b>	<b>35</b>
3.1. Fórmula de Chèzy .....	35
3.1.1. Descripción general .....	35
3.1.2. Una aplicación del concepto de elasticidad funcional .....	37
3.1.2. Restantes consideraciones de interés .....	39
3.2. Fórmula de Ganguillet y Kütter .....	42
3.3. Fórmula de Manning-Strickler .....	48
3.4. Fórmula de Bazin .....	49
3.5. Fórmulas de Koeschlin y de Biel .....	51
3.6. Fórmula de Forchheimer .....	53
<b>4. Formulación propuesta para el cálculo de las conducciones libres 54</b>	<b>54</b>
4.1. Fórmulas universales para el cálculo de las conducciones libres .....	54
4.2. Interpolación y ajuste de las fórmulas .....	57
4.2.1. Interpolación lineal y parabólica .....	57
4.2.2. Ajuste minimocuadrático lineal y polinomial .....	61
4.3. Fórmulas para la velocidad y el caudal .....	66

	<u>Pág.</u>
4.4. Bondad del ajuste y fiabilidad del coeficiente de correlación no lineal .....	70
4.5. Relación entre el coeficiente promedio de Fanning ( $\lambda$ ), el radio hidráulico medio (R) y las categorías de rugosidad (K) de las paredes y solera de las conducciones libres .....	71
4.5.1. Definición de las variables del problema .....	71
4.5.2. Relaciones de regresión multivariante .....	72
4.5.2.1. Considerando todas las categorías de rugosidad .....	72
4.5.2.2. Considerando las primeras 6 categorías de rugosidad .....	72
4.5.2.3. Considerando las últimas 6 categorías de rugosidad .....	73
4.5.3. Capacidad de predicción .....	73
4.5.4. Explicación sucinta sobre los estadísticos utilizados .....	74
4.5.4.1. Estadístico “t” .....	74
4.5.4.2. Estadístico “F” .....	74
4.5.4.3. Evaluación de la capacidad predictiva .....	74
4.5.5. Clasificación de los cauces según las categorías de rugosidad .....	75
4.5.6. Representación gráfica tridimensional de la función de ajuste .....	76
4.5.7. Nuevas fórmulas para el cálculo de velocidades y caudales .....	77
<b>5. Comportamiento hidráulico en las curvas .....</b>	<b>78</b>
5.1. Pérdida de carga: formulación teórica del proceso .....	78
5.2. Elevación del nivel de la lámina de agua en la orilla cóncava .....	80
5.3. Defensa contra los efectos negativos expuestos .....	82
<b>6. Estudio de la función <math>\lambda = f(R)</math>.....</b>	<b>83</b>
6.1. La concepción teórica del problema .....	83
6.2. Significación del parámetro $\alpha$ .....	85
6.2.1. En relación al coeficiente de Fanning .....	85
6.2.2. En relación a la distribución de los valores de R en una zona regable.....	89
6.3. Función logarítmico-normal o ecuación de Mc Alister .....	93
6.4. Resumen y conclusiones .....	95
<b>7. Aplicaciones hidráulicas de los teoremas del valor medio y de Cauchy.....</b>	<b>97</b>
7.1. Teorema del valor medio o fórmula de los incrementos finitos .....	97
7.1.1. Funciones de una sola variable independiente.....	97
7.1.2. Funciones multivariantes .....	99
7.2. Teorema del valor medio de Cauchy .....	101
7.3. Aplicación a las fórmulas de este autor del teorema del “valor medio” de Cauchy.....	102
7.4. La “elasticidad” de la función “velocidad” .....	109
7.5. Generalización del teorema de Cauchy para n funciones, siendo $n > 2$ aplicaciones hidráulicas .....	109
<b>8. Curva de capacidad de un canal.....</b>	<b>113</b>

	<u>Pág.</u>
<b>9. Resolución de dos casos prácticos .....</b>	<b>115</b>
9.1. Canal de riego.....	115
9.2. Caso del canal Xerta-Sénia .....	131
9.2.0. Antecedentes .....	131
9.2.1. Estudio teórico de la sección circular .....	133
9.2.2. Comprobación hidráulica del canal construido.....	134
9.2.3. Tramos del canal en movimiento variado .....	141
9.2.4. Estudio del canal principal .....	144
9.2.5. Acueducto Toscà .....	146
9.2.5.1. Trabajando como conducción libre .....	146
9.2.5.2. Trabajando como conducción ligeramente forzada .....	150
 <b>CAPÍTULO II – CONDUCCIONES FORZADAS: UNA CONTRIBUCIÓN TEÓRICA A LA DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN APROXIMADA DE CHRISTIANSEN.....</b>	 <b>153</b>
<b>Resumen .....</b>	<b>153</b>
<b>Resum .....</b>	<b>154</b>
<b>Abstract-Summary .....</b>	<b>155</b>
<b>1. Introducción .....</b>	<b>156</b>
<b>2. Justificación de la función aproximada .....</b>	<b>157</b>
<b>3. Tubería que distribuye un gasto o caudal uniformemente     repartido.....</b>	<b>165</b>
<b>4. Aproximación de funciones.....</b>	<b>168</b>
<b>5. Coeficiente de Christiansen generalizado .....</b>	<b>172</b>
<b>6. Cálculo práctico del coeficiente universal de Christiansen . .....</b>	<b>176</b>
<b>7. Elección de la fórmula de cálculo .....</b>	<b>177</b>
<b>8. Velocidades aconsejables de circulación del agua .....</b>	<b>181</b>
<b>9. Resolución de un caso práctico.....</b>	<b>186</b>
9.1. Planteamiento del problema.....	186
9.2. Cálculo de la conducción mixta .....	186
9.3. Método del diámetro equivalente.....	195
9.4. Método de la longitud equivalente .....	196
9.5. Restantes determinaciones: influencia de la temperatura sobre las condiciones de circulación del agua.....	205
9.5.1. Generalidades .....	205
9.5.2. Relación entre la temperatura y la viscosidad cinemática del agua	208
9.5.3. Influencia sobre los emisores de riego .....	211
9.5.4. Perfil de temperaturas en las tuberías.....	212
9.5.5. Consideración del efecto de la temperatura en el diseño hidráulico.....	212

	<u>Pág.</u>
<b>CAPÍTULO III – UNIFORMIDAD Y DISTRIBUCIÓN DE LAS VARIABLES HIDRÁULICAS .....</b>	<b>217</b>
<b>Resumen .....</b>	<b>217</b>
<b>Resum .....</b>	<b>218</b>
<b>Abstract-Summary .....</b>	<b>219</b>
<b>1. El concepto de “coeficiente de uniformidad hidráulica” .....</b>	<b>220</b>
<b>2. Otros coeficientes de uniformidad hidráulica.....</b>	<b>228</b>
2.1. Basados en la desviación media absoluta .....	228
2.2. Basados en otras medidas de dispersión y concentración.....	229
2.2.1. Índice de Gini y curva de Lorenz .....	229
2.2.2. Índice de Williamson .....	230
2.2.3. Índice de concentración de Lorenz .....	231
<b>3. Otras características interesantes de la distribución espacial de las variables hidráulicas .....</b>	<b>234</b>
3.1. Ecuaciones de ligadura entre los coeficientes de uniformidad .....	234
3.2. Agrupamiento en "clases" y otras características de las distribuciones hidráulicas .....	239
3.2.1. Los intervalos de clase .....	239
3.2.2. Forma de la distribución de frecuencias .....	241
3.2.3. Otros coeficientes de uniformidad hidráulica .....	241
<b>4. Ajustes a una distribución “gamma” y/o exponencial .....</b>	<b>242</b>
4.1. Distribución “gamma” .....	242
4.2. Características de la distribución “gamma” .....	246
4.3. Distribución exponencial .....	250
<b>5. Ajuste a una distribución “beta” .....</b>	<b>251</b>
5.1. Conceptualización .....	251
5.2. Características .....	253
5.3. Ejercicio de aplicación .....	256
<b>6. Ejemplo práctico .....</b>	<b>262</b>
6.1. Datos y enfoque del problema.....	262
6.2. "Normalización" del problema.....	265
6.3. Características de la distribución espacial .....	270
6.3.1. Medidas centrales o promedios.....	270
6.3.2. Medidas de dispersión o concentración .....	271
6.3.3. Otras características de la distribución espacial.....	273
6.3.4. Índice de Gini y curva de Lorenz.....	275
6.3.5. Índice de Williamson .....	276
6.3.6. Índice de concentración de Lorenz .....	277
6.4. Ajuste a una distribución normal .....	278
6.4.1. La hipótesis de normalidad y el estadígrafo $\chi^2$ .....	278
6.4.2. Determinación y fiabilidad del coeficiente de correlación no lineal .....	281
6.5. Distribución exponencial .....	282
6.6. Corrección por agrupamiento en "clases" .....	283

	<u>Pág.</u>
<b>CAPÍTULO IV – RIEGO DEFICITARIO CONTROLADO EN EL</b>	
<b>ALMENDRO .....</b>	<b>285</b>
<b>Resumen .....</b>	<b>285</b>
<b>Resum .....</b>	<b>286</b>
<b>Abstract-Summary .....</b>	<b>287</b>
<b>1. Antecedentes.....</b>	<b>288</b>
1.1. La problemática situación actual .....	288
1.2. La puesta en riego del almendro .....	291
<b>2. Sistemas de explotación del almendro .....</b>	<b>293</b>
2.1. Sistemas de plantación y formación.....	293
2.2. Sistemas de riego y fertilización .....	294
2.3. Sistemas de mantenimiento del suelo .....	295
2.4. Sistemas de protección .....	297
2.5. Sistemas de mecanización .....	298
2.6. Interacción entre los sistemas anteriores.....	300
<b>3. Volumen de agua de riego y necesidades hídricas .....</b>	<b>301</b>
3.1. Conceptos previos .....	301
3.2. Las necesidades de agua.....	303
3.3. Fórmulas empíricas .....	305
3.3.1. Método de Thornthwaite (1948-1955).....	305
3.3.2. Método de Turc (1955) .....	306
3.3.3. Método de Penman (1948-1956).....	306
3.3.4. Método de Blaney y Criddle (1950-1964) .....	307
3.3.5. Método mixto de Thornthwaite y Blaney-Criddle.....	309
3.4. Medición directa: método de la cubeta evaporimétrica .....	309
3.5. Determinación del agua necesaria para el riego.....	310
<b>4. El riego localizado.....</b>	<b>313</b>
<b>5. Estrategias de riego deficitario controlado de alta frecuencia</b>	
<b>en el almendro.....</b>	<b>317</b>
<b>6. Fertirrigación .....</b>	<b>319</b>
<b>7. Tolerancia a la sequía en la mejora genética del almendro.....</b>	<b>321</b>
7.1. Introducción .....	321
7.2. Variedades.....	322
7.2.1. Conceptos previos .....	322
7.2.2. Caracterización ecofisiológica .....	322
<b>8. El riego localizado subterráneo en el almendro.....</b>	<b>323</b>
8.1. Conceptos previos .....	323
8.2. Manejo.....	323
<b>9. Resumen y conclusiones .....</b>	<b>324</b>

	<u>Pág.</u>
<b>CAPÍTULO V – UNA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS A LA PROSPECTIVA DE LAS APORTACIONES DEL RÍO EBRO EN SU TRAMO FINAL .....</b>	<b>327</b>
<b>Resumen .....</b>	<b>327</b>
<b>Resum .....</b>	<b>328</b>
<b>Abstract-Summary .....</b>	<b>329</b>
<b>1. Algunos curiosos antecedentes .....</b>	<b>330</b>
<b>2. Los estudios posteriores .....</b>	<b>332</b>
2.1. Los caudales medioambientales.....	332
2.2. Nuestros estudios anteriores.....	338
2.3. Excedentes <i>versus</i> déficits .....	347
<b>3. Los ajustes estadísticos más recientes.....</b>	<b>348</b>
3.1. Las aportaciones del río Ebro en Tortosa.....	348
3.2. Comparación con las cifras del PHN .....	353
3.3. Medias móviles y ajuste estadístico .....	357
<b>4. La aplicación de los “métodos robustos” en el análisis de los caudales históricos del río Ebro .....</b>	<b>367</b>
<b>5. Análisis estadístico de los caudales.....</b>	<b>370</b>
5.1. Análisis de la $\bar{x}_1$ .....	370
5.2. Análisis de la $\bar{x}_3$ .....	373
5.3. Análisis de la $\bar{x}_{3,3}$ .....	376
5.4. Función del caudal anual.....	379
<b>6. Resumen y conclusiones .....</b>	<b>383</b>
 <b>ANEJOS .....</b>	 <b>387</b>
 <b>ANEJO NÚM. 1: TABLAS Y GRÁFICOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO I.....</b>	 <b>389</b>
1. Valores del coeficiente de Chèzy (C) y del coeficiente de Fanning ( $\lambda$ ) en función del radio hidráulico medio (R) y de las diferentes categorías de rugosidad (k), para las diferentes formulaciones clásicas de: Ganguillet y Kütter (simplificada), Manning-Strickler, Bazin, Koeschlin y Forchheimer. Coeficiente promedio de Fanning. Análisis estadístico de las formulaciones modernas propuestas por el autor .....	389
2. Valores observados y su predicción. K (1,6).....	403
3. Valores observados y su predicción. K (7,12) .....	413
4. Valores observados y su predicción. K (1,12) .....	421
5. Valores observados y su predicción. Todas las categorías .....	435
6. Valores estimados del coeficiente de Fanning .....	449

	<u>Pág.</u>
7. Diferencias en el ajuste mínimo-cuadrático no lineal para cada curva de regresión .....	475
8. Ajustes mínimo-cuadráticos por regresión no lineal .....	489
9. Estimaciones curvilíneas .....	503
<b>ANEJO NÚM. 2: TABLAS Y GRÁFICOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO V .....</b>	<b>517</b>
1. Caudales aforados en la EA nº: 27 de Tortosa, con sus medias móviles .....	519
2. Ajustes mínimo-cuadráticos por regresión no lineal .....	523
3. Medias móviles de la serie histórica.....	541
<b>ANEJO NÚM. 3: RESTANTES ESPECIFICACIONES METODOLÓGICAS .....</b>	<b>547</b>
I. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL .....	547
1. La distribución teórica de probabilidad .....	547
2. Las áreas bajo la curva normal.....	554
3. Ajuste a una distribución normal .....	558
II. LA PRUEBA DEL CHI-CUADRADO .....	562
1. Frecuencias observadas y teóricas .....	562
2. Definición de $\chi^2$ .....	562
3. Ensayos de significación.....	564
4. La prueba chi-cuadrado para la bondad del ajuste.....	565
5. Tablas de contingencia.....	565
6. Corrección de Yates para la continuidad .....	566
III. FUNCIONES DE DENSIDAD Y DE DISTRIBUCIÓN.....	568
1. Generalidades .....	568
2. Interpretaciones gráficas .....	570
BIBLIOGRAFÍA Y FONDOS DOCUMENTALES .....	573
INDICE GENERAL .....	579
INDICE DE FIGURAS .....	587
INDICE DE TABLAS.....	591



**-ÍNDICE DE FIGURAS-**

	<u>Pág.</u>
CAPÍTULO I	
Fig. 1.1. Corriente líquida en una conducción libre .....	13
Fig. 1.2. Movimiento uniforme en un canal .....	14
Fig. 1.3. Sección transversal rectangular con isotacas .....	19
Fig. 1.4. Entradas y salidas de un sistema hidráulico .....	26
Fig. 1.5. Representación gráfica de la función: $\lambda = f(C)$ .....	39
Fig. 1.6. Distribución de velocidades en una sección longitudinal de un canal..	45
Fig. 1.7. Representación gráfica de la función semilogarítmica: $\lambda = f(R)$ .....	67
Fig. 1.8. Representación gráfica tridimensional .....	76
Fig. 1.9. Planta de la traza en tramo curvo de una conducción libre.....	79
Fig. 1.10. Representación gráfica simplificada de la función $\lambda = f(R)$ .....	84
Fig. 1.11. Función $\lambda = f(R)$ según los valores de $\alpha$ . .....	85
Fig. 1.12. Representación logarítmica de la función $\lambda = f(R)$ .....	86
Fig. 1.13. Valores del parámetro $\alpha$ para cada una de las categorías de rugosidad .....	96
Fig. 1.14. Interpretación geométrica de la fórmula de los incrementos finitos ..	97
Fig. 1.15. Significación geométrica del concepto de “media cuadrática integral” .....	107
Fig. 1.16. Diferentes formas de la “curva de capacidad” de un canal .....	114
Fig. 1.17. Sección transversal inicial .....	116
Fig. 1.18. Sección transversal óptima .....	124
Fig. 1.19. Representación gráfica de las variables del problema .....	125
Fig. 1.20. Ajuste de la curva de capacidad del canal a la función potencial .....	127
Fig. 1.21. Sección transversal definitiva .....	129
Fig. 1.22. Sección transversal del canal en segmento circular .....	133
Fig. 1.23. Características dimensionales del canal Xerta-Sénia .....	135
Fig. 1.24. Sección transversal del cauce cilíndrico .....	143
Fig. 1.25. Curva continua de remanso. Sección longitudinal .....	143
Fig. 1.26. Sección transversal trapezoidal .....	144
Fig. 1.27. Sección transversal del acueducto .....	146
Fig. 1.28. Sección transversal rectangular.....	149
Fig. 1.29. Ábaco de la fórmula de Bazin.....	151
Fig. 1.30. Ábaco de la fórmula de Koeschlin.....	152

CAPÍTULO II

Fig. 2.1. Tubería con servicio en ruta y derivaciones equidistantes de caudal constante .....	157
Fig. 2.2. Representación gráfica para $m = 2'00$ .....	159
Fig. 2.3. Tubería saliente de un depósito con tomas de idéntico caudal .....	165
Fig. 2.4. Aproximación entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto: $x = n_0$ .....	170
Fig. 2.5. Tubería mixta de dos diámetros .....	187
Fig. 2.6. Nomograma para el cálculo de las pérdidas de carga según la formulación de Colebrook-White.....	190
Fig. 2.7. Ábaco para el cálculo de las pérdidas de carga según la formulación de Manning .....	191
Fig. 2.8. Ábaco de Moody .....	201
Fig. 2.9. Comportamiento de un emisor “normal” con $t > 23^{\circ}\text{C}$ , sobre lateral de pendiente $\geq 0\%$ .....	213
Fig. 2.10. Comportamiento de un emisor “normal” con $t < 23^{\circ}\text{C}$ , sobre lateral de pendiente $\geq 0\%$ .....	214
Fig. 2.11. Comportamiento de un emisor “inverso” con $t > 23^{\circ}\text{C}$ , sobre lateral de pendiente $\geq 0\%$ .....	214
Fig. 2.12. Comportamiento de un emisor “inverso” con $t > 23^{\circ}\text{C}$ , sobre lateral de pendiente $< 0\%$ .....	215
Fig. 2.13. Escalas de viscosidad .....	216

CAPÍTULO III

Fig. 3.1. Coeficientes de uniformidad en función del coeficiente de variación de Pearson.....	235
Fig. 3.2. Relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones hidráulicas aproximadamente normales (I)..	237
Fig. 3.3. Relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones hidráulicas aproximadamente normales (II).	238
Fig. 3.4. Representación gráfica de la función de densidad de distribuciones $\Gamma(\alpha,a)$ .....	245
Fig. 3.5. Representación gráfica de la función de densidad de la distribución $\beta(p,q)$ .....	254
Fig. 3.6. Histograma de rectángulos yuxtapuestos.....	264
Fig. 3.7. Diagrama acumulativo ascendente de los caudales .....	265
Fig. 3.8. Área bajo la curva normal entre los puntos $x_1$ y $x_2$ .....	267
Fig. 3.9. Valores de los diferentes coeficientes de uniformidad .....	273
Fig. 3.10. Distribución campaniforme o gaussiana de $Q$ .....	279

CAPÍTULO IV

Fig. 4.1. Elección del sistema de plantación y formación. Factores que influyen en la elección e interacción con los otros sistemas tecnológicos .....	293
Fig. 4.2. Elección del sistema de riego y fertilización. Factores que influyen en la elección e interacción con los otros sistemas tecnológicos .....	295
Fig. 4.3. Factores que más influyen en la elección del sistema de mantenimiento del suelo y la interacción con los demás sistemas .....	296
Fig. 4.4. Elección del sistema de protección. Factores que influyen en la elección e interacción con los otros sistemas tecnológicos .....	298
Fig. 4.5. Elección del sistema de mecanización. Factores que influyen en la elección e interacción con los otros sistemas tecnológicos .....	299
Fig. 4.6. Interacción entre los sistemas tecnológicos básicos de producción....	300
Fig. 4.7. Relación entre A y ET (E. Ferreres et al, 1981).....	318

CAPÍTULO V

Fig. 5.1. Proyección del caudal en Flix .....	340
Fig. 5.2. Proyección del caudal en Tortosa .....	342
Fig. 5.3. Aportaciones anuales del río Ebro en Tortosa .....	353
Fig. 5.4. Dicotomía posicional entre el PHN-2001 y el autor .....	355
Fig. 5.5. Función descendente de caudales del Ebro .....	362
Fig. 5.6. Función parabólica cúbica de caudal descendente.....	363
Fig. 5.7. Serie histórica descendente de caudales.....	369
Fig. 5.8. Función del caudal anual aproximadamente normal .....	380
Fig. 5.9. Distribución mensual de los caudales del río Ebro .....	380

ANEJO NÚM. 3

Fig. A3-1. Curva de distribución normal tipificada .....	552
Fig. A3-2. Curva de distribución normal sin tipificar .....	554
Fig. A3-3. Área del 68'27% .....	555
Fig. A3-4. Área del 95'45% .....	555
Fig. A3-5. Área del 99'73% .....	555
Fig. A3-6. Diferentes áreas bajo la curva de distribución normal .....	556
Fig. A3-7. Ajuste de una función de densidad normal .....	559
Fig. A3-8. Distribuciones de Chi-cuadrado para diferentes valores de $\nu$ .....	564
Fig. A3-9. Representación de la probabilidad: $a < X < b$ .....	570
Fig. A3-10. Representación gráfica de la función de distribución .....	571



## -ÍNDICE DE TABLAS-

	<u>Pág.</u>
<b>CAPÍTULO I</b>	
Tabla 1.1. Valores del coeficiente <b>n</b> de Ganguillet-Kütter y Manning .....	42
Tabla 1.2. Valores del coeficiente <b>m</b> de Ganguillet y Kütter (fórmula simplificada) .....	47
Tabla 1.3. Valores del coeficiente <b>γ</b> de Bazin .....	49
Tabla 1.4. Valores del coeficiente <b>K</b> de Koeschlin y <b>f</b> de Biel .....	51
Tabla 1.5. Valores del coeficiente <b>δ</b> de Forchheimer .....	54
Tabla 1.6. Ajuste potencial de la función $\lambda = f(R)$ para cada categoría de rugosidad .....	56
Tabla 1.7. Clasificación de los cauces según categorías de rugosidad .....	76
Tabla 1.8. Frecuencias acumuladas descendentes .....	91
Tabla 1.9. Valor del parámetro $\alpha$ .....	96
Tabla 1.10. Variables hidráulicas en función del calado de la sección óptima.	125
Tabla 1.11. Valores a adoptar para el perfil más económico .....	129
<b>CAPÍTULO II</b>	
Tabla 2.1. Coeficiente de Reducción F ( $r = \frac{1}{2}$ ) .....	174
Tabla 2.2. Coeficiente de Reducción F ( $r = 1$ ) .....	175
Tabla 2.3. Fórmulas de cálculo aplicables a los RLAF .....	180
Tabla 2.4. Datos del problema .....	186
Tabla 2.5. Coeficientes de rugosidad de Manning para distintos tipos de tuberías .....	192
Tabla 2.6. Valores de la expresión $f = f(Re)$ según el régimen hidráulico .....	204
Tabla 2.7. Factor multiplicador o corrector de la pérdida de carga en función de la temperatura del agua, para tuberías de plástico .....	207
Tabla 2.8. Viscosidad cinemática en función de la temperatura del agua .....	209
<b>CAPÍTULO III</b>	
Tabla 3.1. La función normal tipificada	
Tabla 3.1.1. Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z .....	225
Tabla 3.1.2. Áreas bajo la curva normal tipificada de $-\infty$ a z .....	226
Tabla 3.1.3. Ordenadas (y) de la curva normal tipificada en z .....	227
Tabla 3.2. Función gamma incompleta .....	247
Tabla 3.3. Frecuencias de la distribución de caudales .....	262
Tabla 3.4. Cálculos auxiliares de la distribución de caudales (I) .....	270
Tabla 3.5. Cálculos auxiliares de la distribución de caudales (II).....	274
Tabla 3.6. Cálculos auxiliares para la determinación de G .....	275
Tabla 3.7. Ordenación creciente de los porcentajes acumulados de caudales .	277
Tabla 3.8. Ajuste a una distribución normal .....	279

CAPÍTULO IV

Tabla 4.1. Porcentaje medio diario de horas de iluminación (p) según la latitud	308
Tabla 4.2. Ficha hídrica del almendro (zona mediterránea)	314
Tabla 4.3. Valor de $K_c$ para el cultivo del almendro	315
Tabla 4.4. Dosis óptimas de agua	316
Tabla 4.5. Situaciones productivas comparativas de Catalunya y California	324

CAPÍTULO V

Tabla 5.1. Volúmenes anuales necesarios para el riego con arreglo a dotaciones similares a las del II Plan de Desarrollo Económico y Social de España	331
Tabla 5.2. Dotaciones medias de riego durante diferentes períodos en el valledel Ebro	331
Tabla 5.3. Balance previsto de agua de riego en el valle del Ebro (año 2000)	333
Tabla 5.4. Caudales en la estación foronómica de Flix	339
Tabla 5.5. Caudales en la estación foronómica de Tortosa	341
Tabla 5.6. Aportaciones del río Ebro en Tortosa ( $m^3/seg$ )	349
Tabla 5.7. Aportaciones del río Ebro en Tortosa ( $hm^3/año$ )	350
Tabla 5.8. Resumen de las aportaciones ( $hm^3/año$ )	351
Tabla 5.9. Características de las funciones ajustadas del caudal (Q) del río Ebro	360
Tabla 5.10. Predicciones del caudal según las diferentes funciones de ajuste	361
Tabla 5.11. Función del caudal anual normalizada	382

ANEJO NÚM. 3

Tabla A3-1. Áreas bajo la curva normal	556
Tabla A3-2. Ajuste de una distribución normal a la de caudales	560
Tabla A3-3. Frecuencia observada y esperada de la prueba del Chi-cuadrado	562

JOSE M<sup>a</sup> FRANQUET BERNIS (Tortosa, 1950) es Ingeniero Agrónomo Superior (especialidad ECONOMIA AGRARIA) por la Universidad Politécnica de Valencia, donde concluyó su carrera el año 1974, habiendo realizado, posteriormente, estudios de Doctorado y de ingeniería técnica industrial. Dos años antes, en 1972, ya se había distinguido por recibir el 1<sup>o</sup> premio del Concurso para Universitarios convocado por el semanario especializado *Valencia-fruits*, así como el primer premio "Cofradía de San Isidro" de los Cuerpos Agronómicos del Estado español.

Es también Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad de Barcelona (1995), con una tesis titulada: "*Estructura de la Propietat Agrària: aplicació a la regió catalana de l'Ebre*", que obtuvo la máxima calificación de *APTO CUM LAUDE* por unanimidad del Tribunal. También se encuentra en posesión del título de Ingeniero Técnico en Explotaciones Agropecuarias por la *Universitat Politècnica de Catalunya* (1997). Desde 1976 es Profesor-tutor de Matemáticas y Estadística en las Facultades de Economía y Dirección y Administración de Empresas del Centro Asociado de Tortosa de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), donde también ha ocupado numerosos cargos directivos y representativos. **Desde el curso académico 1999-00 es Profesor Asociado de Hidráulica, Riegos y Proyectos en la Universidad Internacional de Cataluña (UIC).**

El profesor Franquet se halla en posesión de otros títulos universitarios como son el de Diplomado en Cooperación y Diplomado en Investigación Operativa por la Universidad de Valencia, así como los de

Diplomado en Economía de la Empresa y Diplomado en Planificación de Empresas por la Universidad Politécnica de Madrid. Tiene el reconocimiento profesional de *European Engineer - EUR ING* (FEANI, París, 1993).

Ejerció de Ingeniero de la Comunidad de Regantes-Sindicato Agrícola del Ebro (1974/75), ha sido asesor del Parlamento de Cataluña para temas hidrológicos (1991) y miembro de la Comisión de Expertos para la Organización Territorial de Cataluña (2000). También fue experto docente en formación empresarial-cooperativa y comunitaria del Ministerio de Trabajo y Seguridad Social (1979). Ha sido Ponente de la Universidad Internacional Menéndez y Pelayo (1995), de la *Universitat Tècnica d'Estiu de Catalunya* (1995), vocal por Tarragona de la Junta de Gobierno del Colegio Oficial y de la Asociación de Ingenieros Agrónomos de Cataluña (1980-1990), así como Presidente del Instituto de Estudios Dertosenses y miembro de la *Societat Catalana d'Ordenació del Territori* (filial del *Institut d'Estudis Catalans*).

Es autor de diversos libros en materias de agricultura, climatología, planificación territorial, piscicultura, construcción, hidráulica y economía, como: *L'organització territorial en vegueries: un model racional per a Catalunya* (1991), *Anàlisi Territorial. Divisió, organització y gestión del territorio* (1991), *Teoría, diseño y construcción de terrazas-voladizo* (1994), *Cálculo estructural de los túneles-invernaderos* (1995), *Jornada de tècnics y científics sobre el Plan Hidrológico Nacional* (1995), *Les limitacions dels conreus per les temperatures extremes. Aplicació a les comarques meridionals de l'Ebre* (1998), *Fitopatologia i malherbologia cítrica a les Terres de l'Ebre* (1998), *El vent i la pluja a les comarques meridionals de l'Ebre. Estudi de recurrència* (2001), *Con el agua al cuello. 55 respuestas*

*al Plan Hidrológico Nacional (2001), Cultiu intensiu de l'anguila europea (2002), ¿Porqué los ricos son más ricos en los países pobres? (2002) y otros.*

Ha dirigido diversos Proyectos Fin de Carrera y Tesinas y formado parte de varios Tribunales de Oposición y Tesis Doctorales. Es, además, ingeniero consultor (siendo autor de numerosos estudios y proyectos de regadíos y abastecimientos de agua), perito judicial y forense, político, empresario agrario, poeta, asesor editorial, conferenciante y autor de una gran cantidad de artículos y otros trabajos técnicos que han visto la luz en diferentes periódicos y revistas especializadas.

