- **Els efectes de l'experiència primerenca en l'emotivitat i les capacitats cognitives**
  Pilar Ferré Romeu
  24 pág., 1997
- **CADUP ESTUDIOS 1997-98 "Psicología hoy"**
  A. A. V. V.
  128 pág., 1998
- **Reflexiones sobre la responsabilidad de los ciudadanos ante la Europa post-euro**
  José Sánchez Asiaín
  31 pág., 1999
- **La Generación de 1898, según las memorias de D. Pío Baroja**
  Javier Martínez Palacio
  88 pág., 1999
- **La màgia dels números parlants**
  Eugeni Perea Simón
  32 pág., 2000
- **El vent i la pluja a les comarques meridionals de l'Ebre**
  José Mª. Franquet Bernis
  104 pág., 2001
- **Les limitacions dels conreus per les temperatures extremes**
  José Mª. Franquet Bernis
  80 pág., 2002
- **La seducción de las palabras**
  Natalia Català Torres
  32 pág., 2002
- **Classificació climàtica de la Regió Catalana de l'Ebre**
  José Mª. Franquet Bernis
  96 pág., 2004
- **L'escriptor tortosí Jaume Tió i Noé segons les seves obres**
  Juan Antonio González
  50 pág., 2005

JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS (Tortosa, 1950), es Ingeniero Agrónomo (especialidad Economía agraria), por la Universidad Politécnica de Valencia, donde finalizó la carrera en el año 1974, realizando posteriormente, los estudios de Doctorado e Ingeniería Técnica Industrial.

Es Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales, por la Universidad de Barcelona (1995). Es, asimismo, Doctor por la Universidad Internacional de Cataluña (2007). También es poseedor del título de Ingeniero Técnico en Explotaciones Agropecuarias, por la Universidad Politécnica de Cataluña (1997).

El profesor Franquet tiene en su haber otros títulos universitarios como son: Diplomado en Cooperación y Diplomado en Investigación Operativa por la Universidad de Valencia, Diplomado en Economía de la Empresa y Diplomado en Planificación de Empresas por la Universidad Politécnica de Madrid. Tiene, así mismo, el reconocimiento profesional de Doctor Ingeniero Superior, *European Engineer* - EUR ING (FEANI, París, 1993).

En 1974 inicia su carrera docente, como profesor de la escuela de Investigación Operativa de la Universidad de Valencia. En 1976 se incorpora al Centro Asociado de Tortosa de la Universidad Nacional de Educación a Distancia como profesor-tutor de Matemáticas, Estadística y Métodos y Modelos Operativos de Gestión, área disciplinaria que sigue bajo su responsabilidad. También en este Centro asumirá funciones diversas, siendo la principal, desde el punto de vista académico, la de haber sido Coordinador de la División de Ciencias Económicas y Empresariales, y en otro tipo de contexto, Subdirector para Actividades Económicas y Relaciones Institucionales, Vice-presidente del claustro, Director del Área de Ciencias y Tecnología, así como representante del Profesorado del Centro ante los Órganos de Gobierno de la UNED y del mismo Centro, elegido y reelegido por sus compañeros desde 1985. Actualmente es Director del mismo. También (1999–2005) ha sido Profesor Asociado de Hidráulica y Riegos y Proyectos de la Facultad de Ciencias Experimentales y Tecnología de la Universidad Internacional de Cataluña.

Es autor de numerosos artículos técnicos así como de diversos libros en materia de agricultura, construcción, hidráulica, poesía, planificación territorial, climatología, piscicultura y economía.

UNED TORTOSA

ISBN 978-84-930671-5-1

9 788493 067151

Josep M. Franquet Bernis

El estudio operativo de la psicología

UNED

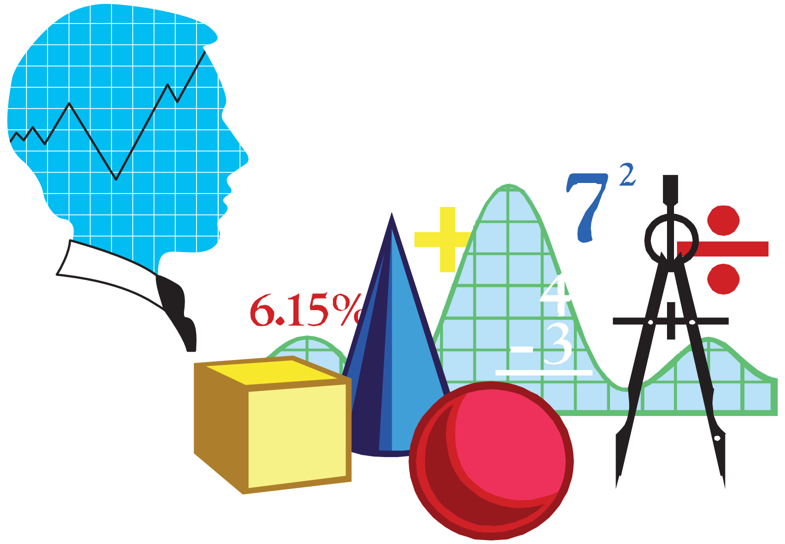
2008

UNED TORTOSA Cadup Estudios

El estudio operativo de la psicología

Una aproximación matemática

Josep Maria Franquet Bernis



Psicología

Otras publicaciones del Centro Asociado de Tortosa-UNED

- **La educación en la crítica: unas consideraciones pedagógicas**
  Miguel Ángel García Bordas
  20 pág., 1975
- **La internacionalización del sistema tributario**
  Antonio Barrera de Irimo
  28 pág., 1976
- **Proteccionismo y política de precios**
  Tomás Allende y García Baxter
  24 pág., 1976
- **Los jesuitas españoles y la cultura hispano-italiana del s. XVIII**
  Guido Ettore Mazzeo
  20 pág., 1977
- **Costums de Tortosa**
  A. A. V. V.
  408 pág., 1978
- **Tortosa: Cuatro estudios Histórico-Educativos**
  A. A. V. V.
  184 pág., 1983
- **CADUP - ESTUDIOS 1987**
  A. A. V. V.
  190 pág., 1987
- **CADUP - ESTUDIOS 1988**
  A. A. V. V.
  256 pág., 1989
- **CADUP - ESTUDIOS 1989**
  A. A. V. V.
  346 pág., 1990
- **CADUP - ESTUDIOS 1990/91 "Análisis Territorial"**
  José Mª. Franquet Bernis
  574 pág., 1991
- **CADUP - ESTUDIOS 1992/95 "Revolución y Restauración Católica en la Diócesis de Tortosa (1862/1879)"**
  Carmen Ibáñez Gisbert
  504 pág., 1995
- **CADUP - ESTUDIOS 1996**
  A. A. V. V.
  190 pág., 1996
- **Cinco años después de la firma del Tratado de la U.E.**
  Jordi Sardà Pons
  20 pág., 1997

EL ESTUDIO OPERATIVO DE LA PSICOLOGÍA

UNA APROXIMACIÓN MATEMÁTICA

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
CENTRO ASOCIADO DE TORTOSA

EL ESTUDIO OPERATIVO DE LA PSICOLOGÍA

UNA APROXIMACIÓN MATEMÁTICA

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS

2008

Primera edición, abril de 2008

e-mail: jfbernis@iies.es

ISBN: 978-84-930671-5-1

Depósito legal: T - 454-2008

Edita: UNED-Tortosa. C/ Cervantes, 17. 43500 TORTOSA
Imprime: **Coop. Gráfica Dertosense**. C/ Cervantes, 21. 43500 Tortosa
Tel.: 977 44 00 28 - Fax: 977 78 39 22
e-mail: graficadertosense@hotmail.com

Printed in Spain

La publicación de este libro ha sido posible gracias al patrocinio de las siguientes instituciones:

Universidad Nacional de Educación a Distancia

Ajuntament de Tortosa

DIPUTACIÓ DE TARRAGONA

Excm. Ajuntament de Cambrils

Metrópolis S.A. de Seguros

Caixa Tarragona

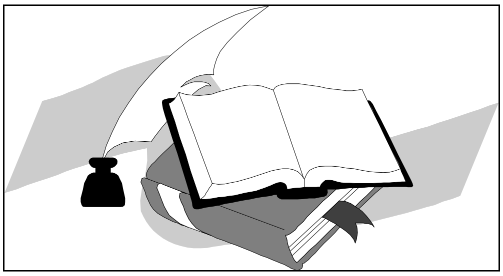
***A Pepi**,*
psicóloga y maravillosa personilla,
cuya presencia querida –o cuyo recuerdo entrañable–
han sido para mí el mejor "estímulo"
en la realización de tan prosaico
como deficiente trabajo.

"El estudio y la aplicación de las Matemáticas es como un largo y anchuroso río, el Nilo, que comienza por la modestia y termina por la magnificencia".

C. Colton

ÍNDICE GENERAL

Pág.



PRÓLOGO

A menudo resulta problemático aventurarse en introducciones que no pretendan reflejar ni una nerviosa síntesis del trabajo al que preceden, ni una alevosa mención a posibles predecesores, ni siquiera una leve apología de la exposición posterior. Sin embargo, sí voy a tratar de definir mi postura acerca de la utilidad y eficacia que, desde un punto de vista orgullosamente científico, adorna el móvil principal de esta humilde obra.

Aunque el título puede inducir a error, cuando nos referimos a la disciplina denominada "Psicología matemática" debemos tener en cuenta que no se trata de un saber sobre la mente y la conducta; es simplemente el conjunto de conocimientos matemáticos, principalmente estadísticos, como tendremos ocasión de comprobar, que el psicólogo utiliza para construir una psicología científica; o también, la aplicación de los modelos matemáticos para el estudio de la conducta humana. La psicología diferencial, la experimental, la psicometría y la psicofisiología son las disciplinas psicológicas que más utilizan los recursos de la matemática para sus investigaciones sobre la mente y el comportamiento. Ahora bien, mediante nuestro estudio pretendemos la introducción de nuevas herramientas matemáticas, basadas fundamentalmente en la Teoría General de Sistemas y en la Investigación Operativa, que puedan resultar de utilidad para la consecución de los mismos o parecidos fines.

La aplicación de la Teoría de Sistemas y de la Investigación Operativa al estudio de la Psicología, constituye, probablemente, uno de los recursos intelectuales ciertamente inexplorados -por su novedad- y más prometedores -por el ingente aporte de instrumentos operativos que representa- de entre los que la ciencia psicológica podría jamás hacerse apropiación, al tiempo que la enriquece mediante una concepción más profunda y amplia de su campo de acción. La eficacia intachable que aquellas técnicas matemáticas han venido demostrando en su aplicación al enfoque y resolución de cuestiones científicas de diversa índole, induce claramente a pensar -sin excesivo optimismo- en el magnífico porvenir que, con la sistematización de su contexto, aguarda a la ciencia social que es objeto de nuestro estudio, abriendo nuevos caminos y descubriendo prometedores horizontes en un futuro no más lejano que el mismo comienzo de su aplicación.

De la concepción anteriormente expresada surge la genuina intención que mueve nuestro ánimo en estos comienzos: la colaboración en el avance y profundización de la Psicología experimental mediante el suministro de un material de trabajo eminentemente metodológico y que conduzca, en consecuencia, a una nueva concepción de dicha ciencia en la cual, la claridad y la eficiencia sean las características más sobresalientes y, sin duda alguna, también las más meritorias.

Es por esta razón, y pretendo con ello justificar los recursos empleados, que consideramos preferible subordinar un tratamiento integral y excesivamente teórico de la problemática planteada a un desarrollo escueto y transparente de los temas psicológicos contemplados. Y es por ello, también, que el nivel matemático que se maneja viene a ser sólo el indispensable para justificar una exposición acorde de la doctrinología psicológica empleada por la Teoría de Sistemas. Por otra parte, ya en la segunda parte de nuestro trabajo se hace hincapié sobre la aplicación de otras diversas técnicas científicas al estudio de la Psicología, y se proyecta esgrimir una instrumentación que exija mayor base matemática, mucho más por perentoria necesidad que por banal ostentación científica. De este modo, pretendemos justificar el hecho de la inclusión del primer epígrafe del Capítulo 1, dado que, ya desde un principio, se pensara en la conjunción de los dos trabajos en uno solo, a pesar de las innegables diferencias temáticas y metodológicas existentes entre ambos. En el anexo 2 se presentan, en fin, algunos ejercicios completos de aplicación de la Estadística descriptiva (deductiva) y de la Estadística inferencial (inductiva) a los variados problemas que plantea la Psicología aplicada.

De todo lo dicho, puede deducirse fácilmente que casi todas las aspiraciones que conmueven a este modesto autor -cuya formación psicológica es más bien escasa- se concretan en la visión (más o menos alejada en el tiempo) de una crítica-reforma racional y constructiva de su trabajo, efectuada por profesionales de la Psicología que, como resulta evidente, son los únicos capaces de complementar el instrumental operativo que se propone con unos conocimientos específicos de la ciencia social que nos ocupa.

Ciñéndonos, concretamente, a la realidad tangible que el aspecto formal del trabajo nos deja entrever, es conveniente hacer notar que la terminología empleada en algunos casos puede parecer extraña y abstracta. En efecto: a fin de dotar a las ideas que se intentan inculcar de una propiedad insoslayable, hemos optado por la no trascripción al lenguaje vulgar de multitud de conceptos que vienen revestidos, en la matemática moderna, de una simbología original y característica. En todo caso, el desconocimiento de esta última, por parte del lector, puede ser rápidamente paliado con la consulta apropiada a los numerosos libros y publicaciones existentes al respecto.

A lo largo de cualquier investigación, como la que ahora presentamos, se acumula toda una serie de débitos intelectuales y profesionales que resulta harto difícil describir en toda su extensión; pese a ello, algunos nos parecen especialmente relevantes. Tampoco olvida, quien esto escribe, la formidable deuda de gratitud contraída con los que fueron sus guías y maestros, algunos de ellos ya desaparecidos. Mi reconocimiento, en fin, a la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) a través del Patronato de nuestro Centro Asociado de Tortosa, que ha posibilitado la publicación del libro, a las profesoras Cinta Alegría, Raquel Revuelta y Ann Thorson, competentes compañeras en las tareas docentes universitarias, por sus orientaciones y ayuda y, en general, a todos cuantos se han interesado por la elaboración de la presente obra, aportando sugerencias y valiosos consejos dirigidos a la mejor consecución de nuestro empeño. Muy particularmente, quisiera agradecer a mi hijo José María (¡cuántas horas!) su cuidadoso esmero puesto en la composición y tratamiento del texto, e incluso sus acertadas observaciones en relación a aspectos diversos de la obra, bien propias de un experto profesional.

Y por último, ya una vez hecha nuestra aquella antigua observación de que “si mucho tienes, más habrás de menester”, quisiera hacer hincapié en la especial relevancia que poseen los gráficos, ejemplos y esquemas que -a modo de paradigma- tienen como misión proporcionar una perfecta comprensión de los problemas psicológicos sistémicamente tratados. La finalidad de su inclusión, amén de la elegancia y claridad que aspiran poseer los conceptos en ellos expresados, no es otra que la esperanza de que confieran a nuestra obra un carácter mucho más ilustrativo y exacto.

Tortosa, enero de 2008

EL AUTOR

CAPÍTULO 1
Disquisiciones generales

1. Justificación de la aplicación de las matemáticas al presente estudio

Resulta un hecho indudable que, precisamente, una de las causas que más contribuyen al enriquecimiento y rigurosidad de todas las ciencias y, en general, de multitud de disciplinas, podemos encontrarla en la aplicación de las Matemáticas a su contexto. A casi nadie puede escapar, hoy en día, por otra parte, la perentoria necesidad de dejar a un lado las formas substanciales y las cualidades ocultas, para referir o precisar los hechos naturales a leyes matemáticas.

¿No es bien cierto, para todo aquél que haya profundizado -aunque sólo sea ligeramente- en el estudio de las ciencias exactas, que no puede resultarle difícil reconocer el hecho de que las matemáticas posean, no sólo la genuina verdad, sino la suprema belleza: una belleza fría y tremendamente austera, como una tumba de mármol?

Procuremos, no obstante, dar un breve repaso histórico a la evolución que la aplicación de las Matemáticas ha experimentado a lo largo de la existencia de esta importantísima ciencia social que es hoy objeto de nuestro estudio: **la Psicología.**

Observemos, de este modo, cómo Fechner, sucesor inmediato de Weber (que publicó en 1840 unos famosos trabajos sobre las relaciones existentes entre los estímulos y las sensaciones) fue quien planteó en primer lugar el problema de si las ciencias objetivas podrían aportar a los problemas del conocimiento del hombre un enfoque verdaderamente útil. Partiendo de esta nueva orientación, llegó a establecer una serie de leyes matemáticas **relacionando la intensidad de los estímulos con las respuestas sensoriales** (dichas relaciones serán oportunamente contempladas en posteriores epígrafes del presente estudio), con lo que el problema derivado de la necesidad de obtener mensuraciones del comportamiento humano pasa a ser el núcleo de los métodos de la psicología experimental. Más adelante, en este mismo capítulo, tendremos ocasión de ocuparnos de la ley de Weber-Fechner.

La aplicación de ciertas técnicas matemáticas a los estudios psicológicos fue continuada posteriormente por **Wundt, Cattell, Bessel** ("ecuación personal") y **Galton**[1] (que fue el primero en crear procedimientos matemáticos sencillos

[1] Sir Francis Galton (16 de febrero de 1822 – 17 de enero de 1911), explorador y científico británico, con un amplio espectro de intereses. No tuvo cátedras universitarias y realizó la mayoría de sus investigaciones por su cuenta. Sus múltiples contribuciones recibieron reconocimiento formal cuando, a

para aplicarlos a los resultados de sus trabajos experimentales; sus más importantes contribuciones fueron: a) la de la curva de distribución normal que lleva su nombre, y b) sus trabajos dedicados al estudio de las correlaciones).

De hecho, a Galton se le puede considerar como el «padre» de la psicología diferencial, al aplicar los principios de su primo, Darwin, al estudio de las diferencias individuales. Esto se oponía a las ideas psicológicas que más difusión tenían en su época: las de Wilhelm Wundt.

Para algunos, las ideas que propuso Galton supusieron un cisma dentro de la psicología, que obliga a ver las dos corrientes que nacieron como enfrentadas. Otros psicólogos, sin embargo, ven ambas como subdisciplinas integrables. Centró su interés en el estudio de las diferencias individuales de las capacidades humanas, siempre desde una perspectiva adaptativa y biológica. Para ello, se centró en el estudio de los procesos mentales simples.

Las investigaciones de Galton fueron fundamentales, sin duda alguna, para la constitución de la ciencia de la estadística. En este sentido:

- Inventó el uso de la línea de regresión, siendo el primero en explicar el fenómeno de la regresión a la media.
- En los años setenta y ochenta del siglo XIX fue pionero en el uso de la distribución normal.
- Inventó la máquina *Quincunx*, un instrumento para demostrar la ley del error y la distribución normal.
- Descubrió las propiedades de la distribución normal bivariada y su relación con el análisis de regresión.
- En 1888 introdujo el concepto de "correlación", concepto éste de singular importancia al que nos referiremos, con mayor especificidad, en el capítulo 9 de nuestro libro.

Inaugurado durante la Exhibición Internacional sobre Salud del año 1884 (*International Health Exhibition*) y mantenido en funcionamiento durante seis años en Londres, el laboratorio antropométrico le permitió a Galton no sólo recoger una inmensa cantidad de datos, sino además llevar a efecto una práctica profesional bien común en nuestros días: cobrar por los informes que realizaba, siendo el único psicólogo de la época que pudo percibir emolumentos de sus sujetos experimentales en vez de pagarles por acudir a las pruebas. Además, elaboró de esta manera los primeros análisis estadísticos, necesarios para la evaluación de los datos recogidos en su investigación.

---

la edad avanzada de 87 años, se le concedió el título de *Sir* o caballero del Reino. De intereses muy variados, Galton contribuyó a diferentes áreas de la ciencia como la psicología, la biología, la tecnología, la geografía, la estadística o la meteorología. A menudo, sus investigaciones fueron continuadas dando lugar a nuevas disciplinas. Primo de Charles Darwin, aplicó sus principios a numerosos campos, principalmente al estudio del ser humano y de las diferencias individuales.

Galton pensó en aplicar la selección artificial al ser humano para mejorar la raza, formalizándose así, por primera vez, la teoría de la eugenesia. Las repercusiones del movimiento eugenésico no tardaron en llegar. Éstas y otras teorías similares sirvieron de base a los ideales de superioridad de raza, como los del nazismo alemán, pero también tuvieron gran aceptación en el resto de Europa y en los Estados Unidos. La práctica de la eugenesia se reflejó en la limpieza étnica, así como en la esterilización de personas con discapacidad intelectual, delincuentes, pobres o enfermos mentales.

La dicotomía clásica existente entre herencia y medio ambiente, o entre Innatismo y Aprendizaje, fue enunciada por primera vez por Galton en la forma *Nature*/*Nurture*. A menudo se ha visto esta idea como generadora de polos enfrentados entre los que no cabían posiciones intermedias. Hoy se visiona más como una gradación de elementos influyentes. Galton subrayaba que la propia naturaleza o conjunto de dotaciones innatas del individuo era un factor determinante del éxito en la vida. Para demostrarlo, estudió a una serie de hombres eminentes. Comprobó que los padres que presentaban características sobresalientes tendían a tener hijos con iguales características, y pensó que esto debía explicarse fundamentalmente en función de la naturaleza (cualidades congénitas) y no de la crianza (cualidades adquiridas). Con el objeto de someter a un análisis riguroso los datos por él recogidos, contrató al matemático Karl Pearson, inventor de un procedimiento de análisis estadístico descriptivo denominado «coeficiente de correlación», muy empleado en una variedad de situaciones de investigación.

A Galton le preocupaba, además, la medición de la inteligencia, y propuso una técnica conocida como el «Método biométrico», que consiste en evaluar ciertas características físicas, como la fuerza con que se aprieta el puño, la circunferencia del cráneo y el tiempo de reacción refleja. Si bien hoy el método biométrico ha perdido crédito, aún tiene cabida en la biología, las investigaciones sobre ejercitación física y la psicología fisiológica.

Puede decirse que el eje en torno del cual giró toda la obra de Galton fue su aseveración de que la herencia o genotipo importa más que el medio. Aunque esta concepción general fue perdiendo popularidad entre los científicos de la conducta a lo largo del siglo XX, en los últimos tiempos ha recobrado alguna vigencia.

Sin embargo, fue Karl Pearson[2], gran matemático inglés, discípulo de Galton, quien acabó de establecer la fórmula para la obtención de un coeficiente

[2] Karl Pearson (27 de marzo de 1857- 27 de abril de 1936) fue un prominente matemático británico, que estableció la disciplina de la estadística matemática. Desarrolló una intensa investigación sobre la aplicación de los métodos estadísticos en la biología y fue el fundador de la bioestadística. Fue un positivista radical, en la tradición de Berkeley y Ernst Mach. Era partidario de la eugenesia y un protegido y biógrafo de Sir Francis Galton. En 1911 fundó el primer departamento de estadística en la Universidad de Londres, donde fue profesor y donde dirigió el *Laboratorio Francis Carltons*. Fundó en 1902 la revista *Biometrika*, desde entonces una de las más importantes en el campo de la estadística.

de correlación que permitiera medir el grado de concordancia o discordancia entre dos fenómenos, o de dependencia o independencia entre dos variables aleatorias estadísticas. Pearson fue quien desarrolló y sistematizó gran parte de los métodos estadísticos cuya utilización fue exclusiva durante un considerable número de años.

Un nuevo avance en este dominio fue aportado por Fischer, estadístico británico que abrió nuevas posibilidades al análisis de los datos experimentales, poniendo a punto la técnica del análisis de la varianza o variancia y covarianza, que permite la investigación simultánea de los efectos de varias variables sobre un único dato experimental. Dichos derroteros esperanzadores fueron seguidos por Spearman[3], Burt, Thurstone, Stouffer y Guttman (estos últimos elaboraron modelos matemáticos de psicología social), que utilizaron numerosos diseños experimentales. De hecho, Charles Spearman realizó importantes aportaciones a la psicología y a la estadística, desarrollando el Análisis Factorial al que nos referiremos posteriormente, con mayor especificidad, en el capítulo 9 de nuestro trabajo. Gracias a él propuso la existencia de un factor general de la inteligencia, que subyace a las habilidades para la ejecución de las tareas intelectuales. A esta teoría de la inteligencia la denominó "Teoría Bifactorial", ya que la inteligencia se compondría tanto del 1) **factor general (g)**, que sería hereditario o congénito, e intentó comprobar que correspondía a una propiedad específica del cerebro, una suerte de energía mental a nivel de la corteza cerebral, que varía de un individuo a otro, pero se mantiene estable a través del tiempo; así como del 2) **factor específico (S),** que representa la habilidad específica de un sujeto frente a determinada tarea, que también tendría una localización especifica en el cerebro. Por lo tanto, si bien la inteligencia es hereditaria en cuanto a su Factor g, es posible que la educación o aprendizaje tengan importante incidencia en el Factor S.

De hecho, una de las técnicas más útiles para aumentar la sensibilidad de un experimento es programarlo de tal forma que la variación total de la variable en estudio pueda separarse en componentes que sean de interés o importancia experimental. Descomponiendo la variación total de esta manera, el investigador puede utilizar métodos estadísticos para suprimir los efectos de ciertas variables que interfieren y aumentar así la sensibilidad de su experimento. El análisis de la variancia es una técnica utilísima para llevar a cabo el análisis de un experimento programado desde este punto de vista.

Al programar un experimento, el psicólogo investigador, por lo general, piensa en la verificación de una hipótesis o en la estimación de algunos parámetros. Aunque el análisis de la técnica de la variancia permite al

[3] Psicólogo inglés, n. y m. en Londres. Estudió en las universidades de Leipzig, Wurzburgo y Gotinga y enseñó e investigó en la Universidad de Londres (1907-31). Formuló la teoría de que la inteligencia se compone de un factor general y otros específicos. Creyó en la existencia de un factor general que interviene en todas las fases de la conducta humana y atribuyó a las capacidades específicas un papel determinante en cada actividad. Escribió *The Abilities of Man* (1927), *Creative Mind* (1930) y *Psychology Down the Ages* (1937).

experimentador programar experimentos sensibles para uno u otro de estos problemas básicos, la explicación de la técnica se hace mayormente desde el punto de vista de la verificación de hipótesis.

Hoy en día, la Estadística se aplica en Psicología en el estudio objetivo del comportamiento, de la inteligencia, de las opiniones, ... Por otra parte, no solamente se emplea para la comprensión correcta de los diversos problemas que plantea la psicometría, sino incluso para poder entender los más sencillos resultados de las exploraciones psicométricas e interpretarlos correctamente. Resulta, pues, indispensable un conocimiento -por somero que éste sea- de los conceptos estadísticos más fundamentales.

Veamos, en fin, que el empleo de las Matemáticas y de la Estadística en Psicología es muy ventajoso, puesto que constituye un medio de expresión riguroso y de claridad excepcional, máxime en aquellos casos en que el lenguaje ordinario resulta impotente para describir la compleja trabazón fenomenológica, no existiendo equivalentes verbales manejables.

Por doquier puede observarse que **el poder del número se respeta tanto más cuanto menos se comprende**. Pero ocurre también, en ocasiones, que el empleo de la alta matemática resulta un refinamiento inútil y superfluo, complejo y dispersivo, algo así como "cazar perdices a cañonazos". Por ello, la utilización del método matemático en Psicología constituye un poderoso instrumento analítico -de lo que debe ser consciente el psicólogo- que debe aplicarse en todos aquellos casos en que resulte conveniente, pero sin olvidar, al respecto, aquella famosa frase de Fournier que reza así: *Las matemáticas carecen de símbolos para las ideas confusas*.

2. Breve recorrido histórico sobre los inicios de la psicología aplicada

Siguiendo el excelente trabajo de E. Cerdà, veamos que el nacimiento y desarrollo de la psicología aplicada se hallan estrechamente ligados al desarrollo de la psicología experimental y al de la psicología diferencial. De hecho, la psicología aplicada aún no es centenaria, puesto que sus antecedentes más remotos pueden fijarse en 1840, año en el que se publican los trabajos de Weber[4] sobre las relaciones entre los estímulos y las sensaciones. Fechner, sucesor inmediato de Weber, fue quien primero se planteó el tema de si las ciencias objetivas podrían aportar a los problemas del conocimiento del hombre un enfoque verdaderamente útil.

Fechner[5], partiendo de esta nueva orientación, llegó a establecer una serie de leyes matemáticas relacionando la intensidad de los estímulos con las respuestas sensoriales, con lo que el problema derivado de la necesidad de obtener mensuraciones del comportamiento humano pasa a constituir el núcleo

[4] *Vide Handwörterbuch Physiologie*, 3 (2) (1846), pp. 481-588.
[5] *Vide Elemente der Psychophysik*, 1860.

fundamental de los métodos de la psicología experimental. A ellas nos hemos referido en otros apartados de nuestro trabajo.

En 1879, Wundt montó en Leipzig el primer laboratorio de psicología experimental, sosteniendo que el estudio de ciertos procesos fisiológicos asequibles a la mensuración debían hacerse emparejados con el estudio de los procesos mentales que les acompañaban. Wundt[6] establece así un puente entre la psicología introspectiva y la psicofisiología, realizando experiencias encaminadas a averiguar las formas en que tienen lugar los procesos de las sensaciones y las percepciones, y sobre las modalidades de relación entre las palabras y las ideas. Comenzó a medir los tiempos de reacción en pruebas de complejidad variable, donde intentaba identificar los componentes psíquicos internos y también descubrir las leyes que regían la dinámica de la psique. Wundt y sus ideas de la psicología dominaron en el ámbito académico, hasta los inicios del 1900, cuando los métodos introspectivos, y el concepto de estudiar la psique de manera científica, fueron hechos a un lado por ser incapaces de aclarar fenómenos como el del pensamiento sin imágenes. La psicología experimental recibe, de tal suerte, un vigoroso impulso a través de la obra de Wilhelm Wundt.

En esta época comenzamos a ver maneras diferentes del pensamiento con el alemán Hermann Ebbinghaus[7] quien dirigió una monumental investigación sobre la memoria que implicaba el aprendizaje de largas series de sílabas sin sentido, lo cual sentó un precedente para las generaciones futuras de psicólogos especializados en el aprendizaje. Sin embargo, se comenzaron a hacer experimentos de laboratorio con animales, para intentar dotar a la psicología de un rigor científico.

Su más grande continuador fue J. McK. Cattell[8], profesor de la Universidad de Pensilvania, que estudió de modo particular los mecanismos de la atención y de la asociación de palabras. Fue quien inventó el taquistoscopio y quien estudió asimismo las asociaciones de palabras, preparando tablas de frecuencia para todas las respuestas dadas. Es también Cattell quien por primera vez, en 1890, usa el término "*test* mental"[9] y asimismo a quien se deben los primeros trabajos científicos sobre las diferencias individuales que, como es sabido, se pusieron de manifiesto, por primera vez, no precisamente en el campo de la psicología, sino en el mucho más antiguo de la astronomía.

---

[6] *Vide Grundzüge der physiologischen Psychologie*, 1874.

[7] (1850-1909) Psicólogo experimental alemán, uno de los primeros exploradores del campo de la memoria, n. en Barmen y m. en Halle. Fue profesor de psicología de las universidades de Berlín, Breslau y Halle. En 1885 terminó su famosa monografía *Über das Gedächtnis* (Sobre la memoria), fruto de cinco años de una original experimentación consigo mismo, que abrió el camino a ulteriores investigaciones. En ella aborda problemas de significación, aprendizaje espaciado y superaprendizaje memorístico. Hizo asimismo notables aportaciones al campo de la psicología social y a la sistematización de la ciencia.

[8] *Vide Physical and mental measurements of the students of Columbia University*, en "Psicol. Rev." 3 (1986), pp. 618-648.

[9] *Vide Mental tests and measuraments*, "Mind", 15, (1890), pp. 373-380.

En el año 1869, Francis Galton, uno de los más eminentes discípulos de Darwin, publica *Hereditary Genius*[10], en el que, mediante la aplicación del método de las historias familiares, intentó demostrar que la inteligencia se transmite por vía hereditaria, como ya hemos tenido ocasión de comentar. En conexión con estos estudios de la herencia humana, Galton, adquiriendo plena conciencia de que para describir los grados de semejanza entre los individuos era necesario establecer algunos métodos mensurativos, concibe varios *tests* e instrumentos de medida y, en 1882, inaugura su famoso laboratorio antropométrico en el *South Kensington Museum* de Londres, en el que sometía a los individuos a pruebas de discriminación sensorial, y capacidades motrices y a otras mensuraciones de procesos elementales. Galton fue asimismo uno de los primeros en crear procedimientos matemáticos sencillos para aplicarlos a los resultados de sus trabajos experimentales. Fueron sus más importantes contribuciones la de la curva de distribución normal que lleva su nombre y los trabajos que dedicó al estudio de las correlaciones.

En abril de 1904 el psicólogo inglés Charles Spearman[11] publica en el "Americal Journal of Psychology" un trabajo, ya clásico en la historia de la psicología, titulado *La inteligencia general, determinada y medida objetivamente*, en el que, aplicando el método del coeficiente de correlación de Karl Pearson, estudia los factores comunes a varias pruebas, sentando así las bases del análisis factorial, al que nos referiremos con mayor extensión en el capítulo 9 del presente libro, método con el que posteriormente harían nuevas aportaciones a la psicología figuras de la talla de C. Burt, L. L. Thurstone o R. B. Cattell.

Al mismo tiempo, en 1905 aparecen en Francia los trabajos de Binet y Simon[12] sobre el estudio experimental de la inteligencia que debían de abocar a la elaboración de los primeros *tests* de desarrollo. Y un año más tarde, con los estudios de J. M. Lahy[13] sobre las aptitudes para el aprendizaje de la mecanografía, nacen los primeros *tests* de aptitudes.

Es también en esta época cuando comienzan las experiencias sobre procesos de adquisición y de aprendizaje, y cuando Frank B. Gilbreth[14], transfiriéndolos al sector del trabajo industrial, emprende en 1911 el estudio sistemático de los movimientos, siguiendo los trabajos que al respecto había previamente desarrollado F. W. Taylor. Este ingeniero mecánico y economista estadounidense fue el promotor de la organización científica del trabajo, habiendo efectuado sus primeras observaciones en la industria del acero, a las

[10] *Vide Hereditary genius: an inquiry into its laws and consequences*. Ed.: Macmillan. London, 1896.
[11] *Vide General intelligence objetively determined and measured*, en "Amer. J. Psychology", 15, (1904).
[12] *Vide Méthodes nouvelles pour le diagnostic du niveau intellectuel des anormaux*, « Année Psychol.», 11, (1905), pp. 191-244.
[13] *Vide Les conditions psychophysiologiques de l'aptitude au travail dactylographique*, en « J. de Physiol. et de Path.», 1913, pp. 826-835.
[14] *Vide Motion study*, Van Nostrand, 1911.

que siguieron una serie de estudios analíticos sobre tiempos de ejecución y remuneración del trabajo.

También en 1911, Münsterberg[15], profesor de la Universidad de Harvard, da un impulso importante a las aplicaciones de la psicología a la esfera del trabajo y define la psicotecnia como "la ciencia de la aplicación práctica de la psicología". Thorndike[16], a la vez, traslada al campo de la pedagogía ciertos descubrimientos que él había hecho en el estudio de la conducta de ciertos animales, elaborando así sus tres leyes del aprendizaje: ley del ejercitamiento, ley de la conexión asociativa y ley del efecto. Se comprueba entonces que la relación estímulo – respuesta tiene lugar a diferentes niveles del sistema nervioso.

Según E. Cerdà, es, sin embargo, al filósofo ruso Pavlov[17] a quien corresponde el mérito de haber reconocido la intervención del cerebro en la ejecución de ciertos comportamientos necesarios para la conservación de la vida. Esta actividad nerviosa superior se ejerce también sobre el modelo de los "actos reflejos", a los cuales dio Pavlov el nombre de "reflejos condicionados". Esta nueva concepción abrió el camino a gran número de investigaciones en el campo de la psico-biología.

Puede verse, a través de los hechos hasta aquí expuestos, que los psicólogos que habían permanecido durante siglos interesados exclusivamente en los datos que les suministraba la introspección, fueron abandonando progresivamente esta actitud, cambiando desde la perspectiva filosófica –en cuya atmósfera quedan todavía psicólogos que se empeñan en seguir intelectualmente viviendo– a la perspectiva objetiva y experimental.

Y si bien es cierto que en su vertiente constructiva la psicología aplicada ha abordado el estudio del psiquismo generalmente mediante los procesos de análisis y métodos de comparación que le han brindado la psicología experimental y la psicología diferencial, con la finalidad de registrar y controlar las manifestaciones y el determinismo de los fenómenos psíquicos, en cambio, en su faceta aplicada propiamente dicha hemos de considerarla como una actividad científica orientada al estudio de un individuo (sistema individual) o un grupo (sistema colectivo) en particular abstrayendo de ellos unos resultados sintéticos e individuales en consonancia con la unidad fundamental que constituye cada individuo o cada grupo.

Con posterioridad, la importancia y la relevancia adquirida en nuestros días por la Psicología experimental queda fuera de toda duda. De hecho, es en este campo o rama de la Psicología en el que creemos que las propuestas contenidas en nuestro libro pueden revestir mayor interés y utilidad.

---

[15] *Vide Psychology and industrial efficiency*, Houghton Mifflin Company, Cambridge Riverside, 1913.
[16] *Vide Measurament and evaluation in Psychlogy and Education*, Bureau of Publications, New York, 1927.
[17] *Vide Lectures on condicional Reflexes*, Livenight, New York, 1928.

3. La Psicología como ciencia

En definitiva, definimos la Psicología como la ciencia cuyo objeto es estudiar los fenómenos conductuales de los organismos y determinar las condiciones materiales de su aparición. Un enfoque de la Psicología supone:

1º. Ocuparse exclusivamente de fenómenos que tienen lugar en el mundo físico, rechazando cualquier tipo de dualismo "*cuerpo – mente*". Para que un fenómeno conductual concreto pueda estudiarse debe:

a) Poder definirse operacionalmente.
b) Disponerse de técnicas e instrumentos que permitan observarlo, registrarlo o medirlo de forma fiable.

2º. Aceptar el determinismo. La principal misión de la Psicología consistirá en encontrar las leyes que rigen los fenómenos conductuales. Estas leyes:

a) Son posiblemente las mismas para el hombre que para las otras especies.
b) Explican tanto los fenómenos conductuales "*normales*" como los "*patológicos*".

3º. Aceptar la necesidad de disociar los fenómenos para proceder a su estudio.

4º. Aceptar el procedimiento experimental como técnica de elección para el estudio de los fenómenos conductuales.

Esta aceptación comporta dar prioridad a:

a) La elaboración de técnicas e instrumentos que permitan *observar, medir* y *registrar* los fenómenos conductuales de forma fiable.
b) La elaboración de técnicas de *control* que permitan:
    - Alterar la variable ambiental elegida, de la forma deseada.
    - Neutralizar las demás variables ambientales que podrían afectar, paralelamente, a la conducta, obscureciendo la relación funcional entre ésta y la variable ambiental elegida.

5º. Rechazar que pueda proporcionar argumentos de carácter teleológico.

6º. Reprimir la tendencia existente a "*interpretar*" los datos, generalizando abusivamente.

7º. Dar gran importancia a la investigación pura.

Desde luego, todas las ciencias tratan de sistematizar sus descubrimientos. En Astronomía fue posible construir un conocimiento acumulativo a través de los siglos debido a que, ya a partir de los antiguos astrónomos babilonios y egipcios, se dio importancia especial a un aspecto: la posición relativa de los astros en función del tiempo -observemos que este tipo de dato es aplicable a cualquier cuerpo celeste de cualquier tamaño y características, conocido o por descubrir-. Para Newton, las variables de la física fueron el espacio, el tiempo y la masa, siendo todas ellas mensurables y susceptibles de tratamiento matemático. Guerlac[18], al efectuar un repaso histórico de la Química, señala que las diferencias en apariencia, olor, gusto, densidad, etc., servían principalmente para distinguir substancias que pertenecían a la misma clase general, pero que existía la necesidad de encontrar un índice cuantitativo del comportamiento químico que pudiera usarse con toda clase de substancias. Este índice es el peso y su importancia fue puesta de relieve por Dalton, en 1803, en su famosa *ley de las proporciones múltiples*, inmediatamente seguida por la aparición de una Tabla de pesos atómicos que se viene ampliando y perfeccionando hasta nuestros días. Guerlac (1961) no vacila en considerar esta variable como “el concepto cuantitativo más fundamental de la Química”. De hecho, la Química sólo realizó avances importantes a partir del momento en el que el peso fue aceptado como variable crítica fundamental.

Si contemplamos, desde este punto de vista, el panorama que ofrece la llamada Psicología Experimental, el mismo no puede considerarse especialmente satisfactorio. Disponemos ya de bastantes datos cuya fiabilidad ofrece pocas dudas procedentes de campos que ostentan rótulos tan atractivos como “Percepción”, “Aprendizaje”, “Personalidad”, “Motivación”, “Dinámica de Grupos”, etc. Pero, ¿cómo integrarlos? ¿Acaso es posible? ¿Cómo puede relacionarse, por ejemplo, el tiempo que tarda una rata en recorrer un laberinto concreto con las puntuaciones obtenidas por un sujeto humano en un *test* de personalidad, o el número de sílabas sin sentido que es capaz de recordar el mismo sujeto en otras circunstancias? Quizás el problema esté mal planteado en estos términos, pero, en cualquier caso, si el objetivo básico de la Psicología es descubrir las leyes que rigen la conducta, ¿cuál o cuáles son las variables críticas que pueden desempeñar en nuestra ciencia un papel similar al del espacio, la masa y el tiempo en Física o al del peso atómico en Química?

Tal como ya hemos dicho, aunque es imprescindible definir operacionalmente nuestras variables, el hecho de que lo consigamos no debe tranquilizarnos excesivamente, ya que no nos asegura que dichas variables posean una utilidad real. Los límites del operacionismo han sido establecidos, de forma inequívoca, por Skinner[19], cuando lo define “como una forma de hablar acerca de: 1) las propias observaciones; 2) los procedimientos manipulativos y de

[18] *Vide Quantification in chemistry*. En H. Woolf (Ed.). *Quantification*. Indianapolis: Bobbs-Merrill 1961, pp. 64-84.

[19] *Vide* The operational analysis of psychological terms. *Psychological Review*, 1945, 52, pp. 270-277. Reproducido en B. F. Skinner, *Cumulative record* (3ª edición). New York: Appleton-Century-Crofts, 1972.

cálculo implicados en su elaboración; 3) los pasos lógicos y matemáticos que median entre las primeras proposiciones y las últimas, y 4) *nada más*". En otras palabras: un concepto puede encontrarse definido operacionalmente y carecer de relevancia.

Las mediciones cuidadosas tampoco son, por sí solas (*per se et essentialiter*, como dirían los teólogos), indicadoras de que nos encontramos en el buen camino. Wundt y sus discípulos mostraban a sus sujetos experimentales el grabado de un perro; a continuación les preguntaban "¿qué es esto? y entonces medían, con la máxima precisión posible, el tiempo que tardaban en responder "un perro". Es extraño tener que decir –comenta Russell[20]– que, a pesar de tanto aparato para las medidas, resultaba que no había nada que hacer con esas valiosas informaciones salvo olvidarlas ... No cabe duda de que la medición es la marca de contraste de la ciencia exacta; por eso, los psicólogos de orientación científica buscan a su alrededor algo mensurable ligado con el objeto de sus investigaciones. Se equivocaron, no obstante, al pensar que los intervalos de tiempo eran el objeto adecuado para recibir la medición.

4. El conductismo y la Teoría de Sistemas

El "conductismo" o "behaviorismo" es una doctrina psicológica iniciada y propugnada por los fisiólogos rusos Pavlov[21] y Betcherew, quienes protestaron contra la insana costumbre de confiar exclusivamente en la introspección como método científico y, en general, contra la opinión -extendida en su época- que hacía de la Psicología filosófica el tratado de la conciencia y **no** el estudio del comportamiento humano. La Psicología, según dichos autores, debe limitarse a lo que pueden observar y medir igualmente bien distintos observadores, libres de apreciaciones subjetivas y condicionamientos apriorísticos. Lo importante es el estudio de la extrospección. La introspección debería evitarse, limitando los experimentos al estudio de animales o muchachos.

En nuestra opinión, la exclusiva aceptación de esta teoría supone el derrumbamiento del formidable edificio psicológico, en su principal aspecto filosófico, al negarse la validez de la introspección, limitando la investigación al conocimiento externo; algo parecido a lo que sucede con la Física: la aceptación de las revolucionarias teorías relativistas supone, a comienzos del siglo XX, la desintegración de las viejas concepciones de Newton y Galileo y, con ellas, el hundimiento del grandioso edificio de la Física clásica. Algo que tampoco se desea.

[20] *Vide The scientific Outlook*. London: George Allen and Urwin, 1949. Existe traducción castellana en *La perspectiva científica*. Esplugues de Llobregat, Barcelona. Ed.: Ariel, 1969.

[21] Sobre todo Pavlov es conocido por formular la "ley del reflejo condicionado", que desarrolló entre 1890 y 1900 después de que su ayudante E.B. Twimyer observara que la salivación de los perros que utilizaban en sus experimentos se producía ante la presencia de comida o de los propios experimentadores, y luego determinó que podía ser resultado de una actividad psíquica. Realizó el conocido experimento consistente en hacer sonar una campana justo antes de dar alimento a un perro, llegando a la conclusión de que, cuando el perro tenía hambre, comenzaba a salivar nada más oír el sonido de la campana.

Imagino que, en Psicología, ambas teorías pueden no ser necesariamente incompatibles o excluyentes. En todo caso, los antiguos fundamentos de la Mecánica pueden plantearse como una particularización del caso general relativista en que **v** << **c**. No obstante*, ¿sucede lo mismo con las doctrinas psicológicas en litigio?*

Las observaciones básicas de Pavlov eran simples. Si se ponen alimentos o ciertos ácidos diluidos en la boca de un perro hambriento, éste empieza a segregar un flujo de saliva procedente de determinadas glándulas. Éste es el reflejo de salivación; pero eso no es todo. Pavlov observó que el animal también salivaba cuando la comida todavía no había llegado a la boca: la comida simplemente vista u olida provocaba la misma respuesta. Además, el perro salivaba igualmente ante la mera presencia de la persona que, por lo general, le acercaba la comida. Esto llevó a Pavlov a desarrollar un método experimental para estudiar la adquisición de nuevas conexiones de estímulo-respuesta. Indudablemente, las que había observado en sus perros no podían ser innatas o connaturales de esta clase de animal.

Pero, a diferencia de los behavioristas o conductistas clásicos, Pavlov tiene más agudeza en cuanto a las "conductas" humanas; lejos está de considerarlas un sistema de reflejos condicionados, no al menos del esquemático modelo "estímulo/respuesta". En el *Homo sapiens sapiens*, certeramente, Pavlov considera que se produce un salto cualitativo respecto al primer sistema de señales; en el humano la cuestión ya **no** se restringe a reflejos condicionados o a estímulos substitutivos. La complejidad del cerebro humano facilita un segundo sistema de señales que es el lenguaje verbal o simbólico; en éste, las substituciones a partir de los estímulos parecen ser infinitas y sin embargo altamente ordenadas (lógicas). Pues bien, ¿por qué entiende Pavlov tal capacidad del segundo sistema de señales?: en gran medida porque considera que en el ser humano existe una capacidad de autocondicionamiento que, aunque parezca contradictorio, le resulta liberador: el ser humano puede reaccionar ante estímulos que él mismo va generando... y que puede transmitir. La psicología (preeminentemente experimental) de Pavlov y sus epígonos se denomina **reflexología** (conviene **no** confundir esta reflexología con la forma de terapia conocida como reflexogenoterapia, vulgarmente llamada también "reflexología").

J. B. Watson (*Behaviorism*)[22], el fundador de la escuela conductista o behaviorista, fue uno de los primeros en propugnar que el contenido consciente

[22] John Broadus Watson nació en Greenville (Carolina del Sur) el 9 de enero de 1878 y murió en Nueva York el 25 de septiembre de 1958. Se graduó en la Universidad de Chicago en 1903. Su disertación *"Animal education: an experimental study on the psychical development of the white rat, correlated with the growth of its nervous system"*, es el primer documento moderno científico acerca del comportamiento de la rata blanca. En el documento, Watson describe la relación entre la mielinización cerebral y la capacidad de aprendizaje en ratas a lo largo de su desarrollo biológico. Watson permaneció en la Universidad de Chicago varios años realizando investigaciones acerca de la relación existente entre *inputs* sensoriales y aprendizaje y comportamiento de las aves. En octubre de 1920 Watson fue invitado a abandonar su cátedra en la Universidad John Hopkins debido a los rumores que corrían acerca de la relación que mantenía con su asistente Rosalie Rayner (la cual sería su colaboradora en el famoso

del pensamiento no puede ser suficiente para la creación de una ciencia, mientras que la "observación del comportamiento en todo lo que tiene de mensurable" puede servir de base para la construcción de un sistema verdaderamente científico. Sin embargo, Watson y sus seguidores llevaron esta nueva y sana orientación hasta límites mucho más allá de lo razonable, y si bien es cierto que han aportado una enorme cantidad de datos experimentales de incuestionable interés, hay que reconocer también que llegaron a perder de vista que su orientación era incapaz de dar respuestas adecuadas a todos los problemas que plantea la Psicología.

Los behavioristas tienen tendencia a considerar la personalidad como un fenómeno en constante evolución, según el cual, la personalidad del individuo es "la totalidad de un organismo en acción". A este grupo pertenecen las definiciones de Watson, Bowder y Kempf (*The automatic functions and the Personality*). Para este último, en esencia, **personalidad**, es *la integración de los sistemas de hábitos que representan las características de ajuste de un individuo a su medio*.

En 1913 Watson publica el que, a menudo, ha sido considerado su trabajo más importante, el artículo: *"La psicología desde el punto de vista conductista"* y que dará punto de partida al Conductismo. En él, Watson describe las líneas generales de la que será su nueva filosofía. El conductismo pone el énfasis sobre la conducta observable (tanto humana como animal), que considera que ha de ser el objeto de estudio de la Psicología, y las relaciones entre estímulo y respuesta, más que en el estado mental interno de la gente (aunque Watson nunca negó la existencia del mundo privado o íntimo). En su opinión, el análisis de la conducta y las relaciones era el único método objetivo para conseguir la penetración en las acciones humanas y extrapolar el método propio de las Ciencias Naturales (el método científico) a la Psicología.

En 1920-1930, Clark Hull[23] cree que el aprendizaje sólo se produce si su fruto le es agradable al individuo (fondo hedonista: no hay nada nuevo), como consta en sus "*Essentials of Behaviour System*" (1952).

Hull aclara que su concepción de la teoría toma como ejemplo a los principios y corolarios de la geometría euclidiana que se derivan de unas cuantas

experimento acerca del condicionamiento del miedo con el pequeño Albert), pasando a trabajar posteriormente como psicólogo para la empresa Thompson (hecho por el cual fue ampliamente criticado por sus colegas de la época).

[23] Hull desarrolló un sistema hipotético-deductivo en la psicología; consistía éste en la postulación de variables participantes, términos definidos de manera precisa que permitieran ser utilizados en simbología matemática. Se trataba de desarrollar un sistema tan científico como cualquier ciencia natural o formal y se vio influenciado, para esto, por las lecturas de Newton, Euclides (Marx y Hillix, 1976). La otra gran influencia en Hull fue la de Pavlov, de quien tomó los principios del condicionamiento y también de Thorndike con la ley del efecto. Con estas dos aportaciones teóricas, Hull trata de integrar un nuevo sistema. Sus principales publicaciones son: "Mathematical-deductive Theory of rote learning" por Hull y otros, publicada en 1940, "Principles of behavior" en 1943, "Essentials of Behaviour System" en 1952, que fue publicado en forma póstuma.

definiciones, hipótesis y axiomas; también sirve de ejemplo Newton con su sistema deductivo referente a la mecánica celeste. De esta manera, formula postulados que se llevan a experimentación para la comprobación o invalidación. Sus variables participantes, o mejor llamadas “variables intervinientes”, son las inferencias que hacía Hull acerca de los sucesos que acaecían dentro del organismo. En la fórmula paradigmática del reflejo existen sólo dos elementos, E (estímulo) y R (respuesta) E - R, pero en el paradigma de Hull existen tres elementos: E - O – R, donde O es el organismo que se ve afectado por E y determina R. Cuando tratamos de explicar el funcionamiento de O (al cual no tenemos acceso interno, modelo de la “caja negra”) postulamos las mencionadas variables y si anclamos estas inferencias con lo que sí podemos observar, que es la entrada (*input*) y la salida (*output*), el resultado de nuestra investigación podrá ser explicado por (O) . Marx y Hillix (1976) lo resumen de la siguiente manera: “Las variables de 'entrada' o de estímulo, son factores objetivos tales como el número de ensayos reforzados, la privación del incentivo, la intensidad del estímulo condicionado o la cantidad de la recompensa. Estos factores se asocian directamente con los procesos resultantes, que hipotéticamente funcionan en el organismo: las variables intervinientes de primer orden. Ejemplos de éstas, son: la fuerza del hábito (E HR), que es una función del número de ensayos (N); el impulso (IM), como función de condiciones impulsivas (CIM) tales como la privación del incentivo; el dinamismo de la intensidad del estímulo (V), como función de la intensidad del estímulo (E); y el refuerzo del incentivo (K), como función de la cantidad de recompensa (W)”.

Hull inició con la definición de términos seguido de cierto número de postulados principales, los cuales podrían ser hallazgos empíricos, consiguientemente verificables por separado, o bien, hallazgos no directamente comprobables pero sí factibles de ser verificados indirectamente, con el fin de que, por medio de una lógica estricta y ecuaciones matemáticas, de los postulados se derivasen corolarios y teoremas del sistema, esto es, deducciones y predicciones, los cuales podrían ser comprobados.

En general, son tres las críticas principales que pueden hacerse a dicho autor, a saber:

1.- La ignorancia de que, aún sin esperanza alguna de recompensa, puede existir un aprendizaje “latente” (comprobado experimentalmente).

2.- Da por supuesto que la fuerza de un hábito aumenta en igual proporción que cada recompensa subsiguiente al esfuerzo (hecho **no** confirmado experimentalmente).

3.- Considera la excitación de los receptores sensoriales como rasgo esencial de un estado de necesidad producido al faltar algún artículo indispensable para la supervivencia, sin describir ni justificar este mecanismo.

Sin embargo, Hull y sus colaboradores merecen buen crédito por haber hecho un gran número de cuidadosos experimentos con miras a fijar en detalle las condiciones en que las ratas adquieren o pierden determinados hábitos, así como por lo que han insistido en exigir una evidencia indiscutible. ¡Es una pena que las evidencias que aduce el propio Hull para probar sus tesis sean tan deficientes en este aspecto!

De la misma forma que los físicos utilizan los electrones y los protones como variables intermedias, deben usarse las actitudes y motivaciones para explicar la conducta humana. Dada la enorme cantidad y complejidad de variables que se deben manejar, es muy posible que, como indica B. F. Skinner[24], la predicción y control de la conducta humana se parezca más, en cuanto a exactitud, a la meteorología que a la física. De este modo, se contrapone a la psicología "popularmente comprensible, psicoanalítica, artístico-literaria" una psicología auténticamente científica que se caracterizaría por "la estructuración de hipótesis, la deducción y puesta a punto de conclusiones comprobables, el control cuidadoso de numerosas variables relevantes, la comprobación rigurosa y el manejo matemático de los datos, peculiaridades todas ellas de la metodología científica que no participa del atractivo de las especulaciones a rienda suelta, de la esperanza de las panaceas y del sobresalto producido por teorías omnicomprensivas".

Llegados a este punto, quisiera contrastar dos procedimientos diferentes que se emplean en Psicología para el estudio de los problemas mentales superiores. El **primero** es el método tradicional de examinar el resultado último como un concepto o generalización. El **segundo**, es el método, más nuevo, de tratar de descubrir cómo se llega al resultado final mientras se está yendo hacia él. En uno se toma como modelo la respuesta o "producto"; en el otro, un "proceso".

Siguiendo con la exposición anterior, veamos que en el **primer procedimiento**, se tiende a identificar el pensar con el resolver un problema, y a restringirse problemas cuyas soluciones las tienen ya los experimentadores; pero también se propende a buscar las diferencias formales existentes entre los problemas y los resultados últimos de la actividad mental, según las revela el análisis lógico o matemático. Me pregunto si es éste el caso del conductismo.

Sin embargo, el **segundo procedimiento** parece conducirnos al problema de la "caja negra" (*black box*), enjuiciable, por tanto, en el contexto de la Teoría de Sistemas, y resoluble por dos métodos distintos: **a)** <u>A base de un análisis retrospectivo</u> (situación presente $\rightarrow$ situación origen). **b)** <u>Observando el curso del desarrollo</u> (estímulo $\rightarrow$ acción $\rightarrow$ respuesta). Por cada uno de ambos

[24] Burrhus Frederic Skinner (20 de marzo de 1904 - 18 de agosto de 1990). Psicólogo y autor norteamericano. Condujo un trabajo pionero en psicología experimental y defendió el conductismo, que considera el comportamiento como una función de las historias ambientales de refuerzo. Escribió trabajos controvertidos en los cuales propuso el uso extendido de técnicas psicológicas de modificación del comportamiento, principalmente el condicionamiento operante para mejorar la sociedad e incrementar la felicidad humana, como una forma de ingeniería social.

procedimientos se pueden obtener grandes provechos, a mi juicio, y no hay razón alguna para insistir en uno de ellos con exclusión sectaria del otro.

Por último, quisiera referirme a la extraordinaria importancia que, según creo, reviste el hecho de la concepción conductista de la Psicología cara a la aplicación de la Teoría de Sistemas a la susodicha ciencia social. En efecto, **el estudio del comportamiento del individuo y las diversas mensuraciones que ello puede comportar, encuentran un marco adecuado y propicio para su enfoque a través de la concepción del individuo como "sistema psicológico"**, con un "*vector estímulo*" o "de entrada" significado por sus coordenadas o componentes, un "*vector respuesta*" o "de salida" que también debe ser interpretado a través de sus componentes (en ellas podrá leerse el "mensaje" de su significado), y una cierta *ley de transformación* (podría ser una matriz de cambio, o bien una matriz asociada a una aplicación lineal u homomorfismo) del primer vector en el segundo vector, que parece venir implícita al sistema, y que constituye un enigma que sólo el psicólogo puede descifrar.

De este modo, y a lo largo del presente estudio, podrá deducirse claramente que las principales conclusiones que de él puedan extraerse alcanzan todo su valor y significación desde el punto de vista conductista, pudiendo parecer en consecuencia –y equivocadamente–, que los móviles inspiradores de este trabajo son de raigambre decididamente behaviorista. Sin embargo no es así, sino, precisamente, es a través de una objetiva toma de conciencia de la multiplicidad de aplicaciones científicas que reviste el estudio del individuo como sistema, cuando el interesado en esta obra –y conste que no es éste nuestro objetivo– pueda (si ha el caso) declararse apóstata de ideologías psicoanalíticas o estrictamente filosóficas, proclamándose, simultáneamente, neófito prosélito de una concepción empírica, sistemática y altamente científica de la Psicología.

5. Estudio de los efectos de los estímulos sobre el sistema psicológico

Se denomina *"excitabilidad"* o *"irritabilidad"* a la capacidad de todo organismo viviente para responder con determinadas manifestaciones vitales, denominadas "reacciones" o "respuestas", a ciertas acciones energéticas que sobre él actúan a través del "vector estímulo".

En general, los vectores-estímulo pueden, por su propia naturaleza, ser de tipo mecánico, químico, osmótico, térmico, eléctrico, lumínico, radiológico, sonoro y otros. Se sabe que aplicando a un músculo estímulos eléctricos de intensidad progresivamente creciente (choques de inducción), y midiendo la intensidad de la excitación, obtenida en cada caso por la altura de la contracción correspondiente, se observan los siguientes hechos:

- *Los estímulos, para obtener una respuesta, deben poseer una intensidad o grado mínimo indispensable denominado "umbral"* o "minimal"; si es inferior a este valor, el estímulo es "subminimal". Al estímulo que produce el mayor efecto posible se le denomina "maximal"; "submaximal" si el efecto obtenido es menor, y "supramáximo" cuando la magnitud del estímulo supera a la necesaria para provocar la respuesta máxima.

- *La duración del excitante en el nivel o por encima del nivel de la intensidad umbral, tiene influencia en la eficacia del estímulo y en la persistencia del efecto.* Se denomina "*cronaxia"* a la relación entre la intensidad y el tiempo que debe durar el estímulo.
- *En algunos casos, la aplicación del vector estímulo sólo es efectiva cuando su intensidad aumenta o disminuye, pero no mientras permanezca constante* (caso de una corriente galvánica). Por otra parte, las variaciones bruscas en la intensidad del estímulo son más eficaces que las establecidas gradualmente.
- *El período de tiempo comprendido entre la aplicación del vector estímulo* (siempre que sea eficaz) *y la salida del sistema del vector respuesta se denomina "tiempo perdido" o "excitación latente".* Utilizando estímulos subminimales, la respuesta no se obtiene, pero si estos estímulos se repiten, se obtendrá una reacción o fenómeno llamado "*adición latente*" o "*sumación de las excitaciones*". El efecto de cada uno de los estímulos subminimales se ha ido acumulando progresivamente en el sistema, hasta llegar a producir un estado límite de excitación que sí alcanza el umbral. Es menester, para conseguir la "adición latente", que un estímulo suceda a otro antes de que se disipe el estado de excitación creado en el sistema por el primero de dichos *inputs*. Aún con estímulos de cierta magnitud, tanto en intensidad como en duración, se registran fenómenos parecidos; es decir: que un estímulo aislado puede no ir seguido de respuesta, o bien ser ésta insignificante. Las reacciones completas requieren estímulos reiterados en forma más o menos rápida o prolongada ("*excitabilidad reiterativa*").

Los sistemas psicológicos excitables que, en principio, identificaremos con los individuos o personas humanas, se dividen en dos categorías: "sistemas isobólicos y sistemas heterobólicos". En los primeros no existen, en absoluto, estímulos submaximales, siendo, a la vez, el estímulo umbrálico y maximal. El campo de excitabilidad de los sistemas isobólicos está dividido en dos zonas: **a)** *la "sub-umbrálica*", en la cual la excitación es nula, y **b)** *la "supra-umbrálica"*, en la cual la excitación es máxima. Se dice que obedecen a la ley del "todo o nada", y en ellos, los estímulos o no producen efecto alguno o bien producen un efecto máximo. Puede tratarse de individuos poco dotados o bien con deficiencias psicosomáticas, raros en la especie humana.

Por otra parte, en los sistemas heterobólicos, el estímulo umbrálico y el maximal son diferentes, existiendo entre ellos toda una serie gradual de estímulos submaximales que determinan efectos de intensidades crecientes (excitaciones, contracciones musculares, sensaciones). **A este tipo de sistemas, en definitiva, pertenecen los sistemas psicológicos que son objeto de nuestro estudio**.

Para ciertos sistemas heterobólicos y, consecuentemente, en potencia para los psicológicos, se ha observado que la relación entre las intensidades de los estímulos y las intensidades de los efectos provocados responden a una conocida ley de valor limitado denominada **"Ley de Weber–Fechner"**, a la que ya nos hemos referido anteriormente, que puede tener la siguiente expresión: "La intensidad de la sensación crece proporcionalmente al logaritmo de la intensidad del estímulo".

La mencionada **ley de Weber-Fechner** establece una relación cuantitativa entre la magnitud de un cierto estímulo físico y cómo éste es percibido. Fue propuesta en primer lugar por Ernst Heinrich Weber (1795-1878), y elaborada hasta su forma actual por Gustav Theodor Fechner (1801-1887). Ernst Heinrich Weber[25] estableció su *ley de la sensación* (o *Ley de Weber*) en la que formulaba la relación matemática que existía entre la intensidad de un estímulo y la sensación producida por éste. Estos y otros descubrimientos llevaron a la convicción de que era posible explicar, mediante principios físico-químicos, todos los actos humanos.

Fechner siguió los estudios empezados por Weber, que había concluido que existen tres tipos de umbrales en la percepción de las sensaciones: un **umbral máximo**, que es la magnitud a partir de la cual no percibimos ningún cambio en la sensación; un **umbral mínimo**, que es la mínima magnitud o cantidad de estímulo necesaria para captar una sensación; y finalmente, un **umbral diferencial**, que es la cantidad de estímulo que hay que añadir para que el S. psicológico pueda captar un cambio en una sensación.

Las investigaciones de Weber fueron en todo momento dirigidas a comparar sus observaciones anatómicas con las observaciones realizadas al microscopio. Se dedicó, sobre todo, a la observación del movimiento y percepción de los animales, comparando y explicando en todo momento con leyes físicas (en el campo de la Mecánica y de la Termodinámica) las observaciones realizadas.

Es muy conocido el estudio acerca del corazón humano, en el que descubrió que era estimulado por dos tipos de nervios: los que activan los latidos del corazón y los que los inhiben. Weber fue uno de los primeros científicos en percibir que el sistema nervioso autónomo está constituido por dos sistemas nerviosos diferentes. Weber investigó también la mecánica de la percepción. Estuvo tan dedicado a este estudio que poco a poco fue creando una nueva

[25] Weber fue hijo del famoso teólogo Michael Weber criándose en un entorno científico. La familia tenía relaciones con el físico famoso (experto en acústica) E. F. F. Chladni. Estudió en las ciudades de Wittemberg y Leipzig, llegando en 1818 a ser profesor de anatomía comparativa en Halle, y en 1840 de Psicología. Investigó sobre las sensaciones; los sentidos táctiles de la piel le llevaron a la denominada ley de Weber (que viene a decir que cuando se comparan dos objetos y se tiene que observar la distinción entre ellos, no percibimos la diferencia entre los objetos, sino la razón de esta diferencia a la magnitud de los objetos comparados). Colaboró con Gauss en el estudio del geomagnetismo. Llegó a ser rector de la *Alma mater* de Leipzig, muriendo en esta ciudad el 26 de enero de 1878.

disciplina que unía las dos ciencias: la física y la psicología (psicofísica). Hizo aportaciones dentro de este novedoso campo indagando, por ejemplo la relación existente entre el par *sensación-estímulo* viendo la existencia de relaciones entre ellos y comprobando que, para que la sensación aumente en progresión aritmética, debe producirse un aumento del estímulo en progresión geométrica.

Se concluye, pues, que *el menor cambio discernible en la magnitud de un estímulo es proporcional a la magnitud del estímulo*. Es fácil de entender con un ejemplo. Si estamos sosteniendo en nuestra mano un peso de 100 gramos, tal vez no lo podamos distinguir de otro peso de 105 gramos, pero si de uno de 110 gramos. En este caso, el umbral para discernir el cambio de peso es de 10 gramos. Pero en el caso de sostener un peso de 1.000 gramos, 10 gramos no serán suficientes para que notemos la diferencia, al ser el umbral proporcional a la magnitud del estímulo. En su lugar, nos hará falta añadir 100 gramos para notar la diferencia.

O sea, sabiendo que:

$E\ (s_2 - s_1) = Q\ (E_2 - E_1)$; esto es:
$E \cdot \Delta s = Q \cdot \Delta E$; pasando al límite:
$ds = (Q \cdot dE) / E$; e integrando:
$\mathbf{s} = Q \cdot \int (dE / E) = Q \cdot \ln E + C = 2'3 \cdot Q \cdot \log E + C = \mathbf{K \cdot \log E + G}$

de lo que se infiere que $\Rightarrow \forall\ E = 1 \rightarrow s = G$ (lo que constituye un dato interesante para la construcción de la tabla correspondiente).

La ley anterior también puede establecerse matemáticamente del siguiente modo:

$$ds = Q \times \frac{dE}{E}$$

donde 'ds' corresponde al cambio percibido en el estímulo, 'dE' corresponde a cambio de magnitud del estímulo y E corresponde a la magnitud del mismo. Integrando la ecuación diferencial anterior de variables separadas, se tiene:

$$s = Q \cdot \ln E + C$$

donde *C* es la constante de integración, y **ln** es el logaritmo natural o neperiano.

Para determinar el valor de *C* mediante una integral particular, se asigna a s = 0, es decir no hay percepción o sensación; y entonces:

$$C = -\,Q \cdot \ln E_0$$

en que E_0 es el nivel o umbral de estímulo por debajo del cual no se percibe sensación. Por lo tanto la ecuación anterior resulta del siguiente modo:

$$s = Q \times \ln \frac{E}{E_0}$$

Siendo, en la formulación anterior:

s = intensidad de la sensación. E = intensidad o magnitud del estímulo. E_0 = nivel de estímulo sin sensación. K = cte. específica. G = umbral diferencial. Q = cte. experimental. *C* = cte. de integración.

Así pues, la relación existente entre el estímulo y la percepción corresponde a una escala logarítmica. Esta relación logarítmica nos hace comprender que si un estímulo crece como una progresión geométrica (es decir multiplicada por un factor constante), la percepción evolucionará como una progresión aritmética (es decir con cantidades constantes añadidas), como ya se ha dicho antes.

Esta ley se denomina también "**ley de psicofísica**", puesto que Fechner[26] creyó haber logrado relacionar matemáticamente lo físico, ponderable, con lo psíquico, imponderable; es decir: el cuerpo con el alma.

Inmediatamente después de provocada la reacción, se muestra ineficaz un nuevo estímulo, análogo al primero, y aún de magnitud superior. Ello es debido a que, una vez producida la respuesta, el sistema pasa por un "*período refractario absoluto*", generalmente muy breve, al que sigue un "*período refractario relativo*", durante el cual se recupera la excitabilidad, si bien para ponerla de manifiesto se requieren estímulos de magnitud superior al inicial, reapareciendo poco después la excitabilidad primitiva.

Las excitaciones continuadas agotan la excitabilidad celular, denominándose a tal estado "fatiga", que desaparece con el reposo.

La "*adaptación*" consiste en una habituación al estímulo, con lo cual éste pierde la efectividad, a no ser que aumente su intensidad. Y en general, los

[26] Gustav Theodor Fechner (1801-1887) fue músico y matemático; en 1860 creó la ecuación que cuenta exactamente la relación entre el estímulo físico y la sensación (relación entre alma y materia). Pensó que cada materia estaba dotada de un cierto espíritu, por lo que buscó una fórmula, con la que tuvo éxito, para poner en relación el mundo del espíritu con el de la materia.

sistemas psicológicos están dispuestos para reaccionar a un estímulo, o a un conjunto de estímulos, con mayor facilidad que otros (*estímulos adecuados*), los cuales, a pesar de su poca magnitud, provocan respuesta imposible de obtener utilizando otras formas de energía (*estímulos inadecuados*).

6. La frecuencia de respuesta como variable independiente: las aportaciones de Skinner

Señala R. Bayés que para Pavlov, las variables críticas fueron la latencia –medida en segundos– y la intensidad de la respuesta medida en gotas de saliva. Estas variables (proporcionando, en cada caso, un indicador de intensidad adecuado al reflejo estudiado), han demostrado sobradamente su valor para el análisis de toda la conducta refleja, tanto incondicionada como condicionada, en un gran número de especies, entre ellas el hombre. Sin embargo, la mayor parte de nuestra conducta es dudosamente analizable tomando como unidades de medida la magnitud y la latencia de la respuesta, y fue necesario esperar a que otro científico de la talla de Skinner[27] (al que ya nos hemos referido en este mismo capítulo), en otro momento de *serendipity*, según nos contara en un instructivo relato, encontrara la variable adecuada y los procedimientos para controlarla y medirla de forma eficaz.

En definitiva, se deben a Skinner:

a) La introducción de la frecuencia de respuesta como sensible variable dependiente.
b) Las técnicas que poseen tal grado de control que hacen posible obtener de cualquier organismo individual de especies distintas frecuencias de respuesta que sean predecibles, minuto a minuto, a lo largo de investigaciones de duración considerable.
c) Las técnicas que permiten registrar directamente estas frecuencias, de forma continua y con un elevado grado de fiabilidad, durante toda la investigación, haciendo posible la replicación de experimentos.

Gracias a estos elementos se ha podido abordar con éxito el análisis de los factores que gobiernan la probabilidad de ocurrencia de una respuesta dada en un momento determinado, atacando a fondo el reducto de la variabilidad individual.

[27] *Vide* A case history in scientific method. *American Psychologist*, 1956, 11, pp. 221-233. Reproducido en *Cumulative record* (3ª edición). New York: Appleton-Century-Crofts, 1972.

CAPÍTULO 2
Los modelos psicológicos

1. Definición y conceptos previos

1.1. Síntesis histórica del concepto de "modelo"

Sería conveniente comenzar nuestra exposición definiendo particularmente lo que pudiera ser el concepto de "modelo psicológico" y, con mayor generalidad, el propio de "modelo".

Se habrá notado la aparición, en varias ocasiones, de la noción de "modelo" o de "interpretación" de una teoría matemática por medio de otra. No se trata, en absoluto, de una idea reciente o novedosa y, sin duda, puede verse en ella una manifestación permanente del sentimiento profundo de la unidad de las distintas "ciencias matemáticas". Respecto a ello, decía Descartes[1] que "no por ello dejan de acordarse en tanto que no tienen en cuenta otra cosa que las relaciones o proporciones que se encuentran en dichas ciencias".

Precisando el "acuerdo" del que hablaba Descartes, parece entreverse, por vez primera, la noción general de isomorfismo (que él llamaba "semejanza") y la posibilidad de "identificar" relaciones u operaciones isomorfas, dando, como ejemplos de ello, el de la adición y el de la multiplicación. No obstante, tan audaces ideas no tuvieron ningún eco entre sus contemporáneos, y habrá que esperar hasta el gran desarrollo del álgebra de mediados del siglo XIX para vislumbrar siquiera el comienzo de la materialización de los sueños leibnizianos (Franquet, 1990/91).

Es, precisamente, en este momento histórico, cuando los modelos se multiplican y se acostumbra a pasar de una teoría a otra mediante un simple cambio de lenguaje; el ejemplo más claro de lo que antecede es, seguramente, el de la dualidad en geometría proyectiva, donde la costumbre, muy frecuente en la época, de escribir en columnas contiguas los teoremas "duales", tuvo mucho que ver con la toma de conciencia de la noción de isomorfía. Por otra parte, mediante el descubrimiento de las coordenadas homogéneas -junto con Feuerbach y Plücker- A. F. Möbius no sólo pudo entender, en términos puramente

[1] Como científico, R. Descartes produjo al menos dos importantes revoluciones. En matemáticas simplificó la notación algebraica y creó la geometría analítica. Fue el creador del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, lo cual abrió el camino al desarrollo del cálculo infinitesimal (diferencial e integral) por parte del matemático y físico inglés Isaac Newton y el filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz, con curiosa simultaneidad. Inventó la regla del paralelogramo, que permitió combinar, por primera vez, fuerzas no paralelas. En química, el sistema propuesto por Descartes consiguió desplazar al aristotélico, al proporcionar una explicación unificada de innumerables fenómenos de tipo magnético y óptico, en astronomía y en fisiología orgánica. De este modo, sentó los principios del determinismo físico y biológico, así como de la psicología fisiológica.

algebraicos, las nociones fundamentales de puntos impropios y de puntos imaginarios introducidos por Poncelet (1788-1867)[2] y apreciar en todo su valor (junto con Poncelet, Gergonne[3], Plücker[4] y Chasles[5]) el principio de dualidad, sino que pudo dar un tratamiento completo y moderno del invariante fundamental de la geometría proyectiva: la "razón doble" de cuatro puntos alineados.

El empleo, cada vez más extendido, de la noción de "modelo", permitiría también al siglo XIX llevar a cabo la unificación de las Matemáticas soñada por los pitagóricos. A principios del siglo, los números enteros y las magnitudes continuadas parecían tan incompatibles entre sí como en la antigüedad; los números reales continuaban estando ligados a la noción de magnitud geométrica (longitud, superficie, volumen), a la que se había recurrido para obtener "modelos" de los números negativos e imaginarios puros y mixtos. Incluso, los números racionales estaban tradicionalmente relacionados con la idea de la división de una magnitud en partes iguales. Sólo quedaban aparte los números enteros, como "productos exclusivos de nuestro espíritu", tal como decía Gauss en 1832, oponiéndolos a la noción de espacio.

Los primeros esfuerzos para aproximar la Aritmética y el Análisis Matemático se refirieron a los números racionales, positivos y negativos, y fueron debidos a Martin Ohm en 1822, siendo continuados hacia 1860 por varios autores, fundamentalmente Grassmann[6], Hankel[7] y Weierstrass[8] (en sus cursos

[2] Matemático francés nacido en Moselle y fallecido en París. Participó en el intento de invasión de Rusia por parte de Napoleón, donde fue abandonado por muerto en el campo de batalla. Durante su año y medio de prisión, ya en Francia, meditó sobre geometría. Sus pensamientos vieron la luz en 1822 cuando publicó su libro sobre geometría proyectiva, de forma que una serie de problemas difícilmente resolubles por procedimientos de la antigua geometría de las formas eran ahora fácilmente resueltos aplicando los nuevos métodos.

[3] Joseph Diaz Gergonne (19 de junio de 1771 en Nancy, Francia - 4 de mayo de 1859, Montpellier, Francia) fue un matemático y lógico francés. En 1791, Gergonne fue capitán del ejército francés. Participó en la Batalla de Valmy el 20 de septiembre de 1792. Más adelante, se reintegró al ejército para participar en 1794 en la invasión francesa de España. Al pasar a la vida civil fue profesor en la recién creada École Centrale como profesor de "matemáticas trascendentales". En 1810, Gergonne funda la revista *Annales de mathématiques pures et appliquées* que en la época fue conocida como los *Annales de Gergonne* la publicación se mantuvo por 22 años hasta su retiro. Fue también profesor y más tarde rector de la Universidad de Montpellier. Gergonne introdujo la terminología de las coordenadas polares. Descubrió el principio de dualidad en Geometría proyectiva, cuando notó que cada teorema en el plano conectando puntos y líneas tenía un correspondiente con puntos y líneas intercambiados, siempre que el teorema no hiciera intervenir nociones métricas. En 1816, encontró una solución elegante al problema clásico de Apolonio consistente en hallar una circunferencia que toque otras tres circunferencias dadas.

[4] Julius Plücker (1801-1868), natural de Elberfeld, estudió física y matemáticas en varias universidades alemanas, y desde 1836 fue profesor de la de Bonn. Sus primeros trabajos matemáticos fueron de geometría sintética, pero en cuanto entró de lleno en la famosa polémica que enfrentaba a los geómetras analíticos con los sintéticos, se decantó por los primeros. En 1846, quizás harto de tanta controversia, abandonó las matemáticas para volver a la física, en la que hizo notables descubrimientos. En contra de lo que hubiera podido esperarse de él, se interesó más por la física experimental que por la física matemática. Según Clebsch, la contradicción expresada es sólo aparente: Plücker tendía más a crear que a analizar, y esta tendencia era la fuente común de sus descubrimientos en física y en geometría.

[5] (Epernon, 1793-París, 1880). Matemático francés. Profesor en la Universidad de París, sus trabajos versaron sobre temas de geometría proyectiva y descriptiva; en especial sobre las secciones cónicas.

[6] Hermann Grassmann fue un matemático brillante cuyas creaciones en el análisis vectorial sólo pueden compararse con las de Hamilton. Grassmann presentó su sistema en numerosas formas diferentes; de hecho escribió cuatro libros en los que presentó su sistema y los cuatro difieren substancialmente entre

no publicados). A este último, parece deberse la idea de obtener un "modelo" de los números racionales positivos y de los enteros negativos considerando clases de pares de números naturales o enteros positivos. Pero faltaba realizar, sin duda, la tarea más importante: la de obtener un modelo de los números irracionales o inconmensurables dentro de la teoría de los números racionales; hacia el año 1870, la solución de este problema era realmente urgente a la vista de la perentoriedad -surgida después de la aparición de fenómenos "patológicos" en Análisis- de prescindir del uso de cualquier intuición geométrica vaga de "magnitud" para definir el cuerpo de los números reales. Como sabemos, este problema fue resuelto en esta época, y casi simultáneamente, por Cantor[9],

ellos. Hermann Grassmann nació en Stettin, cerca del Báltico. Su padre Justus Günther Grassmann, a pesar de ser un teólogo y estudioso en las ciencias físicas y matemáticas, insistía en que él sería felíz si Hermann se convirtiera en jardinero o en carpintero. A pesar de esto, Grassmann ingresa en 1827 en la Universidad de Berlin donde por seis semestres estudió principalmente filología y teología, pero de manera autónoma, leyó algunos escritos matemáticos de su padre. A su regreso a Stettin, inició sus estudios en matemáticas, física, historia natural, teología y filología, preparándose solo para presentar el examen estatal requerido para ser maestro. En 1839 escribió al comité examinador científico de Berlín sobre su deseo de escribir un trabajo que probara su competencia. Entonces, él inicia su trabajo en el estudio de la marea titulándolo *Theorie der Ebbe und Flut*. Este estudio lo completó en 1840 y es importante porque contenía la presentación de un sistema de análisis espacial basado en vectores. La información concerniente al origen de este trabajo puede encontrarse en una carta escrita por Grassmann en 1847 a Saint-Venant acerca del documento publicado a finales de 1845, en el cual Saint-Venant comunicó resultados idénticos a los resultados descubiertos con anterioridad por Grassmann. Grassmann presentó en este trabajo una parte sorprendente del análisis vectorial: adición y sustracción de vectores, las dos principales formas de producto vectorial, la diferencial en vectores y los elementos de la función vectorial lineal, todo ello presentado de manera equivalente con sus homólogos modernos. Este trabajo fue algo más que el primer sistema importante del análisis vectorial; fue también el más grande trabajo en la nueva álgebra de su tiempo que puede compararse con la geometría no-euclidiana. Para el otoño de 1843, Grassmann había terminado de escribir otra de sus grandes obras; su *Ausdehnungslehre*, que se convirtió en un clásico. Es un libro difícil de leer y contiene una gran parte del análisis vectorial moderno y hecho de tal forma que difícilmente puede resumirse. En el periodo de 1844 a 1861, Grassmann publicó 17 documentos científicos en los que se incluyen importantes documentos de física, varios sobre lenguas y libros de texto matemáticos. Editó un documento sobre política y también materiales sobre la evangelización de China. Este periodo de su vida terminó con su segundo *Ausdehnungslehre*. Después de 1862, Grassmann publicó un libro de texto en alemán y en latín sobre matemáticas, además de varios escritos sobre religión y sobre música así como un libro sobre terminología botánica alemana. También inventó el “Heliostat” de Grassmann. Esta combinación de actividades se debió a su creciente desacuerdo con la poca atención que recibían sus creaciones matemáticas.

[7] (Halle, 1839-Schramberg, 1873). Matemático alemán. Sus trabajos versaron sobre geometría proyectiva y sobre la teoría de funciones de variable compleja. Estableció una representación de la función gamma por medio de una integral compleja y obtuvo soluciones a la ecuación diferencial de Bessel.

[8] Las ideas de Riemann (1826-1866) concernientes a la geometría del espacio tuvieron profundos efectos en el desarrollo de la teoría física moderna. Los escritos de Riemann de 1854 llegaron a ser un clásico en las matemáticas y estos resultados fueron incorporados dentro de la teoría de la relatividad y gravitación de Einstein. Influyó notablemente en el desarrollo de la teoría física moderna y proveía los conceptos y métodos usados después en la Teoría de la Relatividad. Era un original pensador y un anfitrión de numerosos métodos, teoremas y conceptos que llevan su nombre.

[9] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, nacido en Mar. 3, 1845, muerto en Ene. 6, 1918, era un matemático ruso-alemán mejor conocido como el creador de la TEORIA CONJUNTISTA y por su descubrimiento de los números transfinitos. También adelantó el estudio de las series trigonométricas, fue el primero en probar la no numerabilidad de los números reales e hizo contribuciones significantes a la teoría de la dimensión. Cantor recibió su doctorado en 1867 y aceptó una posición en la Universidad de Halle en 1869, donde permaneció. Estrechamente relacionado al trabajo de Cantor en la teoría de los conjuntos transfinitos estuvo su definición del continuo como un conexo, conjunto perfecto. Nunca dudó de su absoluta confianza en su trabajo, pero seguidamente del descubrimiento de las paradojas de la teoría

Dedekind[10], Méray[11] y Weierstrass, siguiendo, por cierto, métodos bastante diferentes.

A partir de este momento, los números enteros pasan a ser el fundamento de todas las matemáticas clásicas. Además, los "modelos" basados en la Aritmética van adquiriendo cada vez más importancia con la extensión del método axiomático y la concepción de los objetos matemáticos como creaciones libres, prodigiosas y admirables del espíritu humano.

1.2. Definición y clases de modelos

Realizada una pequeña síntesis histórica del problema, veamos que en toda aplicación de la Matemática a los estudios de los fenómenos reales, como los psicológicos, se presenta un triple proceso, a saber:

a) Conceptualización.
b) Razonamiento lógico.
c) Desconceptualización.

, y debemos advertir, y lo haremos con palabras del profesor Richardson[12], que: "matematizar la teoría de un fenómeno no consiste simplemente en introducir ecuaciones y fórmulas en él, sino en moldearlo y fundirlo en un todo coherente, con sus postulados claramente enunciados, sus definiciones establecidas, sin fallos y con sus conclusiones rigurosamente obtenidas".

---

de conjuntos, dejó la teoría de los conjuntos transfinitos a matemáticos más jóvenes tales como David Hilbert, Bertrand Russell y Ernst Zermelo.

[10] (Brunswick, actual Alemania, 1831-id., 1916). Matemático alemán. Estudió en la Universidad de Gotinga, donde tuvo como profesor a Gauss. Mientras trabajaba como *privatdozent* en dicha institución (1854-1858), entró en contacto con la obra de Dirichlet y se percató de la necesidad de abordar una redefinición de la teoría de los números irracionales en términos de sus propiedades aritméticas. En 1872 desarrolló el método denominado "corte de Dedekind", mediante el cual definió un número irracional en función de las propiedades relativas de las dos particiones de elementos en que éste dividía el continuo de los números reales. Siete años más tarde propuso el concepto de «ideal», un conjunto de enteros algebraicos que satisfacen ecuaciones polinómicas que tienen como coeficientes números enteros ordinarios; así, el ideal principal de un entero «a» es el conjunto de múltiplos de dicho entero. Esta teoría posibilitó la aplicación de métodos de factorización a muchas estructuras algebraicas anteriormente descuidadas por el análisis matemático.

[11] Charles Méray nació el 12 de noviembre de 1835 en Chalon-sur-Saône, Francia. Inició sus estudios en la Escuela Normal Superior en París en 1854, a la edad de dieciocho años y se graduó en 1857. Luego de su graduación, comenzó a enseñar en el Liceo de St. Quentin, durante dos años, después de los cuales dejó la enseñanza durante siete. Posteriormente, regresa a dar lecciones en 1856, en la Universidad de Lyon, para ser más tarde nombrado, en 1867, Profesor de Matemáticas en la Universidad de Dijon, en donde trabajó por el resto de su vida. Méray pudo haber sido un reconocido matemático alrededor del mundo por sus ideas, pero la suerte no estuvo de su lado. En 1869, publicó el primer estudio de teoría aritmética acerca de los números irracionales; su base fue el trabajo de Lagrange. Esta fue la primera teoría coherente y rigurosa sobre números irracionales que se vio impresa. Murió el 2 de febrero de 1911 en Dijon, Francia.

[12] *Vide* H.W. RICHARDSON en *Economía regional*, Ed. Vicens-Vives, Barcelona, 1973, citado en la bibliografía.

De este modo, podríamos definir el "modelo" como *una representación objetiva de algún aspecto de un problema por medio de una estructura, facilitando el tratamiento teórico y subjetivo, dirigido a resolver algunas cuestiones del problema.*

Por tanto, cuando se van a aplicar las Matemáticas o la Investigación Operativa a una situación real, una labor previa que debe realizar el investigador es la recogida de datos mediante observaciones y medidas, por lo que induce relaciones y, a través de un proceso más o menos complejo de abstracción, construye un modelo o teoría. En esto consiste precisamente la fase de "conceptualización".

Sobre estos modelos, el investigador trabaja obteniendo teoremas y consecuencias; es la fase conocida como "razonamiento lógico" y puesta en marcha del modelo. Por último, mediante la fase de "desconceptualización", se interpretan estos resultados y se aplican a la situación real.

De un modo muy general, podemos clasificar los modelos utilizados en tres grandes tipos:

a) *Modelos pictóricos o icónicos:*
Son representaciones de estados, objetos o sucesos. En ellos, se representan las propiedades más interesantes de la situación real por medio de una transformación de escala. Por ejemplo, un mapa de carreteras representa la posición relativa de las distintas ciudades y las carreteras que las unen. En este último caso, se habrá recalcado la anchura de la vía de comunicación a una escala gráfica improcedente, dotándola, incluso, de un atractivo colorido.

b) Modelos analógicos:
Consisten en hacer una substitución adecuada de una propiedad de la situación real por otra en el modelo asociado, de acuerdo con ciertas reglas. Por ejemplo, las distintas alturas de una cadena montañosa quedan delimitadas por las curvas de nivel que, como es sabido, constituyen el lugar geométrico de los puntos del terreno que tienen idéntica altitud o cota taquimétrica con respecto al nivel medio del mar o a cualquier otro plano relativo de comparación. Y sin embargo, es obvio que en la realidad del terreno no aparecen las curvas de nivel surcando valles y montañas o serpenteando por las llanuras a la vista arrobada del observador.

c) Modelos simbólicos:
Consisten en expresar las magnitudes que intervienen en el problema de un modo abstracto (Franquet, 2003). A este último grupo pertenecen los modelos matemáticos. Generalmente, en su formulación, se siguen las siguientes etapas:

1.ª Se definen las variables que se consideran como más importantes en la explicación del proceso considerado.

2.ª Se establecen relaciones analíticas entre estas variables, como consecuencia de relaciones lógicas plausibles entre las mismas.

3.ª Se estudia la bondad del ajuste del modelo a los datos u observaciones realizados mediante la experimentación.

4.ª En caso de ser aceptado el modelo, se resuelve.

5.ª Se interpretan los resultados y se estudia su relación con la realidad.

6.ª Se hacen previsiones y proyecciones, que constituyen, en definitiva, el objetivo final de la formulación y estudio del modelo.

Respecto de la aplicabilidad de la metodología de los modelos matemáticos en el campo psicológico, podemos señalar tres modalidades principales:

1.ª Se relacionan magnitudes psicológicas mediante el empleo de ecuaciones en diferencias finitas y sistemas de las mismas.

2.ª Se relacionan los flujos de entradas y salidas de un sistema psicológico a través de matrices y determinantes.

3.ª Se construyen simulaciones de las unidades más elementales de la Psicología que van integrándose en niveles más altos con sus iteraciones recíprocas, hasta llegar a la simulación global.

2. Modelos para el conocimiento científico

Siguiendo a Angel Alcaide[13], veamos que el método científico se basa muchas veces, en la utilización de *modelos* que, mediante un proceso de abstracción, simplifican la realidad que se quiere estudiar. Cuando en la Geometría elemental se establece el concepto de "línea", se debe pensar en una figura con una sola dimensión (la longitud), sin que pueda encontrarse en la realidad una línea -por fina que sea- que carezca de anchura e, incluso de altura o "grosor".

Aunque la creación de los modelos supone, en general, un meritorio trabajo científico, la tarea no se concluye hasta contrastar el modelo con la realidad y ello exige disponer de los datos adecuados. Bross[14], en su libro sobre *La decisión estadística* apunta que el empleo de los modelos presenta las siguientes *ventajas*:

a) Es el procedimiento seguido en los sistemas de predicción que ha tenido más éxito.

b) El modelo proporciona una estructura de referencia para la consideración del problema: los "fallos" del modelo señalan a veces una pista sobre las deficiencias de aquél; estos "fracasos" en el modelo del éter hicieron posible el formidable trabajo de A. Einstein.

[13] *Vide* ALCAIDE INCHAUSTI, Ángel: *Lecciones de Econometría y Métodos estadísticos*. Citado en la bibliografía.
[14] *Vide* BROSS, Irwin D.J.: *La decisión estadística.* Ed. Aguilar. Madrid, 1958.

c) El modelo pone de manifiesto el problema de la abstracción, decidiendo su elaborador qué atributos del mundo real tienen que incorporarse al propio modelo.

d) Al expresar un problema en lenguaje simbólico se tiene la ventaja de la facilidad de manipulación de dicho lenguaje.

e) Los modelos matemáticos, proporcionan el medio más barato para realizar la predicción.

Pero frente a estas ventajas señala también Bross algunas *desventajas*, a saber:

A) Un modelo matemáticamente factible puede exigir grandes simplificaciones, lo que puede restarle exactitud.

B) El lenguaje simbólico está sujeto también a limitaciones.

C) Un científico puede aficionarse tanto a su modelo que, incluso podría llegar a insistir en que dicho modelo es el mundo real, perdiendo, precisamente, la noción de la realidad.

3. Modelos de simulación

Veamos ahora, dado que le hemos mencionado, unas ideas aclaratorias sobre el concepto de SIMULACIÓN.

Hasta hace relativamente pocos años, la Psicología no se ha prestado a un desarrollo científico experimental. Faltaba el equivalente a los laboratorios donde se pueden hacer repetidas pruebas y comprobar hipótesis científicas (como, por ejemplo, el sometimiento de un circuito electrónico, de un metal, de un ácido, ... a diversos estímulos o "inputs" y posterior observación de sus reacciones).

De forma muy general, entendemos por SIMULACIÓN la creación de un modelo que reproduce fielmente una estructura psicológica, sus relaciones con el mundo circundante y la forma de reaccionar ante ciertos estímulos o "inputs". Una vez construido el Modelo, se pretende medir la eficacia de diversos estímulos, sin necesidad de recurrir a experiencias reales, sino basándose en experiencias "simuladas".

Las políticas a las que someteremos nuestro modelo están representadas por los "inputs" de la figura siguiente, mientras que su eficacia podrá ser evaluada a través de los correspondientes "outputs".

Fijémonos en que esta forma de proceder ha sido ya utilizada en diversos campos de la ciencia y de la ingeniería. Por ejemplo, la industria aeronáutica, antes de lanzar un nuevo avión al mercado, construye un Modelo o prototipo que se somete en un túnel de viento a distintas condiciones simuladas de presión, turbulencias, temperatura, etc. Lo mismo sucede con la fabricación de automóviles de turismo o de microaspersores para riego localizado de alta frecuencia. Observando las reacciones del modelo a estos "inputs" se obtienen conclusiones acerca de su futuro comportamiento en condiciones reales de trabajo (vuelo, conducción, irrigación). De esta forma se determina si el modelo es satisfactorio y cuáles son las condiciones que ofrecen mejor rendimiento. De la misma manera, se pretende que el psicólogo experimentador llegue a conclusiones fidedignas sobre la eficacia de las distintas terapias a aplicar.

Al simular el individuo o alguna de sus partes, es preciso llegar a un compromiso entre Realidad y Simplicidad. En general, el estudio de nuestro universo o de cualquier fenómeno muy complejo con el relacionado requiere cierta labor de simplificación por parte del investigador, labor consistente en trasladar un fenómeno real a un Modelo de Estructura más simple, pero que ponga de relieve sus aspectos más importantes.

Suponiendo que fuera posible construir un modelo tan complicado como el mismo fenómeno que se pretender analizar, nada se habría adelantado, ya que sería difícil de manipular y comprender como la propia realidad.

La simulación se puede aplicar, en principio, a todo problema relativo a un sistema psicológico. Ahora bien, para poder simular correctamente el comportamiento de dicho sistema, será necesario:

a) Precisar unos objetivos que exijan acrecentamiento del conocimiento.

b) Establecer una maqueta con flujos físicos o informáticos.

c) Definir las transformaciones de cada bloque o subsistema físico.

d) Disponer de series fiables de valores para actuar como VE ("Variables de entrada") en el sistema contemplado.

La simulación exige, pues, partir de un pre-modelo con el triple objetivo de:

1) Contribuir a la elaboración de un modelo.

2) Validar las hipótesis de trabajo.

3) Medir las consecuencias de ciertas acciones correctoras del sistema y buscar -por acrecentamiento del conocimiento- su transformación en modelo.

Para simular el sistema psicológico es preciso expresar la transformación que se opera en cada uno de sus bloques. Veamos, como características más importantes de este proceso, las siguientes:

a) Se observa cómo la simulación de un gran sistema puede apoyarse en *investigaciones de optimización local*, que "ponen en cuestión" las prácticas actuales. La utilidad de la simulación es muy grande, en este caso, puesto que de otra forma resulta imposible prever las consecuencias, sobre el sistema global, de la combinación de un conjunto de acciones modificadora de diversos bloques.

b) Permite una *visión dinámica* de la evolución de un sistema, al reproducir ficticiamente el recorrido de varias trayectorias: en pocos minutos, con ordenadores suficientemente potentes, se pueden simular varios meses o años de funcionamiento de un sistema en condiciones diversas. No hay, por tanto, dificultad alguna en introducir transformaciones aleatorias complejas que, de otro modo, sería prácticamente imposible calcular.

c) Montar una gran simulación resulta caro en estudios, en programación y en duración de paso por ordenador; además, la interpretación de los resultados es delicada. Sin embargo, la simulación es un *instrumento potente y útil*, que permite "empujar" la modelización lo más lejos posible hasta la consecución de condiciones simples, sintéticas y generales, pudiéndose llegar al establecimiento de un bloque único, el MODELO, que recubre al sistema global cuya maqueta se ha expuesto, expresando las relaciones existentes entre las VE, VS, VA y VES (respectivamente, las variables de entrada, salida, de acción y esenciales).

d) Veamos, en fin, que la simulación constituye una *técnica didáctica* excelente, que permite visualizar el comportamiento de un sistema psicológico y controlar hipótesis sobre datos ya conocidos. Con ello, se facilita grandemente la comunicación entre los "especialistas" y los "prácticos".

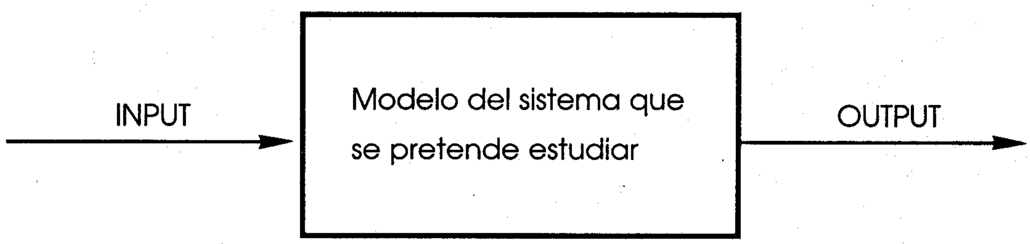


FIG. 2.1. Modelo del sistema psicológico.

La diferencia entre un modelo estático y un modelo dinámico se encuentra en la presencia de “variables con retardos” (“lags”, en inglés), o que vienen referidas a distintos momentos del tiempo, en alguna o algunas de las ecuaciones que constituyen el modelo dinámico. Algunos modelos económicos son un buen ejemplo de ello. Como estas variables con “lags” (retrasos, demoras, retardos o desplazamientos en el tiempo) son endógenas, aplicando el principio locacional, pero se comportan como exógenas, los miembros de la *Cowles Commission* han optado por denominarlas *predeterminadas,* e incluyen en este término tanto a las variables endógenas "desplazadas" como a las exógenas, desplazadas o no. De hecho, pueden considerarse como "variables explicativas" al conjunto de las exógenas y las predeterminadas.

Tanto los modelos estáticos como los dinámicos pueden ser "históricos", siempre y cuando en sus ecuaciones figure explícita la variable independiente "tiempo".

El ejemplo del modelo económico causal de la "telaraña" (R. Risco: "Curso elemental de Econometría") permite aclarar la terminología empleada por Ragnar Risco[15] en su definición del sistema dinámico. En efecto, las ecuaciones que definen el modelo son "ecuaciones funcionales", al ser del tipo de los denominados "ecuaciones en diferencias o recurrentes" en la terminología clásica del Análisis Matemático, y su solución no es un valor determinado, sino un conjunto de ellos.

La presencia de variables origina las ecuaciones funcionales y a ellas se refiere Risco cuando dice que "las variables en diferentes momentos del tiempo se incluyen de una manera esencial". Si en lugar de variables con retardos a desplazamientos finitos de tiempo figuran, en el modelo, variables con desplazamientos infinitesimales (esto es, si en lugar de diferencias finitas figuraran derivadas), las ecuaciones funcionales o recurrentes antedichas se convertirían en "ecuaciones diferenciales", pasando del campo discreto al continuo.

A los modelos estáticos no históricos los denomina Samuelson[16] "modelos estacionarios" y a los dinámicos no históricos "modelos causales".

---

[15] Economista noruego (1895-1973). Obtuvo el primer Premio Nobel de Economía que se concedió, en 1969, compartido con Jan Tinbergen, por haber desarrollado y aplicado modelos dinámicos al análisis de los procesos económicos. Estudió y enseñó en la Universidad de Oslo. Fue un miembro destacado de la llamada Escuela Sueca, fundada por K. Wicksell. Él puso nombre a la "Econometría" la rama que aúna el análisis estadístico y el aparato matemático con la economía. En 1930 fundó la *Econometric Society* junto con Irving Fisher y otros. Fue director de la prestigiosa revista *Econometrica* de 1933 a 1935.

[16] Paul Anthony Samuelson es un economista estadounidense, nacido en Gary, Indiana, de ascendencia judía, el 15 de mayo de 1915. Obtuvo el Premio Nobel de Economía en 1970, por el trabajo científico a través del cual ha desarrollado la teoría económica estática y dinámica y haber contribuido activamente a elevar el nivel del análisis en la ciencia económica. Es autor del manual "Curso de economía moderna", publicado por vez primera en 1945 y que es el libro de texto de Economía para estudiantes universitarios más vendido de la historia. En dicho manual, Samuelson señala las tres preguntas básicas que tiene que responder todo sistema económico: qué bienes y servicios (y en qué cantidad) se van a producir; cómo se van a producir esos bienes (utilizando los factores clásicos de producción: tierra, trabajo y capital); y para quién son dichos bienes y servicios. Además de pedagogo y divulgador, tiene muchas aportaciones originales. Está especialmente interesado en los aspectos dinámicos de la economía. Entre sus principales méritos figuran el desarrollo de las curvas de indiferencia, que permitieron evaluar la utilidad marginal decreciente de un bien sin recurrir a su cuantificación y el haber realizado aportaciones, entre otros economistas reconocidos, a la llamada "síntesis neoclásica", es decir, la fusión en un conjunto coherente de la economía de Keynes con la de sus predecesores.

4. Los modelos y la teoría de sistemas

4.1. La modelización

El profesor Lorenzo Ferrer Figueras, catedrático de Matemáticas de la Universidad de Valencia, desarrolla una interesante teoría acerca de las posibilidades del conocimiento y de la acción, donde se pone de manifiesto la importancia de la modelización y de la posterior experimentación sobre la realidad o sobre el propio modelo (simulación).

Una maqueta es una representación estática del individuo F observado, que no explica como éste funciona o evoluciona. Sin embargo, la modelización es una representación dinámica, en cuanto explica cómo funciona y/o evoluciona dicho sistema psicológico. Por ello, la explicación puede tener diversos niveles, de los que consideramos los tres siguientes:

1. Análisis de los factores del Sistema.

2. Conocimiento del funcionamiento de un bloque o subsistema.

3. Estudio del comportamiento dinámico de un gran sistema.

El modelo, entendido como una estructura explicativa de un fenómeno, tiene las siguientes características: A) Constituye una representación simplificada de la realidad. B) Es prospectivo, en tanto que explica el comportamiento futuro del Sistema (Ferrer, 1972).

Según Minsky[17], "para un operador O, un objeto M es un modelo de un objeto A, en la medida en que O puede utilizar a M para responder a las cuestiones que le interesen respecto a A". De acuerdo con esta definición, cualquier razonamiento o decisión están basados en modelos; a veces explícitos y, otras veces, implícitos (Ferrer, 1972).

El modelo es un sistema homomorfo del sistema que representa. Por tanto, modelo y sistema tienen el mismo comportamiento. El modelo en fin, será útil y eficaz en la medida que sea:

- simple y elegante (facilita la comprensión).
- general ——— (suscitará asociaciones, analogías).
- formalizado ——— (facilita la simplicidad y posibilita la aplicación de técnicas de resolución).

[17] Hyman Philip Minsky, uno de los más destacados "post-keynesianos americanos", nació en Chicago y estudió en la *George Washington High School* de New York. Se licenció en matemáticas por la *University of Chicago* en 1941, pero se interesó posteriormente por la Economía y obtuvo el doctorado en Harvard en 1954, especializándose en finanzas.

4.2. Los modelos matemáticos

4.2.1. Variables exógenas y endógenas

En los análisis para la elaboración de teorías, muchos casos pueden ser cuantificados y expresados en el lenguaje formalizado de las matemáticas. La razón de ello es doble: de un lado, se debe al hecho de que gran parte de las magnitudes socioeconómicas son susceptibles de cuantificación, pudiendo ser expresadas como variables que toman valores dentro del conjunto (cuerpo o campo) de los números reales. De otro lado, las variables están interrelacionadas, pudiendo ser expresadas estas relaciones mediante funciones matemáticas adecuadas. Pues bien, las teorías, expresadas en lenguaje matemático, reciben la denominación de "modelos matemáticos".

Para poder profundizar más en la idea de "modelo matemático" es necesario no perder de vista que al ser el modelo la expresión formal de un análisis (o bien de una teoría) de carácter deductivista y que en dicho análisis se cumplen unos supuestos de partida, el modelo matemático consiste en la expresión de tales supuestos en lenguaje matemático a través de un conjunto de ecuaciones (a veces también de inecuaciones).

El conjunto de estas ecuaciones constituyen la "formulación" del modelo. Estas ecuaciones son las relaciones que, según los supuestos de partida, se dan entre las variables socioeconómicas. De estas variables, unas se suponen conocidas (variables exógenas o datos), y las demás son las incógnitas (variables endógenas) cuyos valores han de ser calculados en función de las exógenas.

Dicho lo anterior, veamos qué problemas se nos plantean al utilizar el modelo matemático y qué recursos matemáticos serán necesarios para resolverlos.

4.2.2. Problemas que se plantean

A) Primer problema

El primer problema con que nos enfrentamos es el de expresar los conceptos, y los supuestos de la respectiva teoría, en lenguaje matemático. En las teorías socioeconómicas de enfoque marginalista, la resolución de un problema viene facilitada porque en dicho enfoque se admiten los siguientes extremos:

a) Que las variables socioeconómicas son susceptibles de ser expresadas por números reales y que admiten variaciones infinitamente pequeñas. Es decir, son variables reales continuas.

b) Que las relaciones existentes entre las variables socioeconómicas pueden ser expresadas por funciones reales de diversos tipos, que suelen ser continuas y derivables repetida o iterativamente.

De hecho, la expresión de los conceptos en forma matemática está posibilitada por las dos características anteriores. Pero las dos características que admite el enfoque marginalista no solamente posibilitan la expresión de los conceptos en términos matemáticos sino que, además, permiten expresar los supuestos de la teoría en forma de ecuaciones (o inecuaciones) que forman el modelo matemático. Los supuestos de la teoría especifican cuáles son las relaciones que existen entre las variables socioeconómicas, y al ser estas relaciones expresables por medio de funciones reales, basta con utilizar el gran arsenal de funciones reales de que dispone la Matemática para poder expresar los supuestos de la teoría en forma de ecuaciones o inecuaciones. De este modo, queda la teoría expresada como un sistema de ecuaciones que constituyen la formulación del modelo matemático de la teoría en cuestión. Además, en muchos casos puede hacerse una representación gráfica del modelo, lo que le hace mucho más intuitivo.

B) Segundo problema

El segundo problema que se nos plantea, una vez ya formulado el modelo, es el de deducir las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros que pueden figurar en las relaciones que forman el modelo.

Si se tiene en cuenta que un modelo matemático no es otra cosa que un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son las variables endógenas, se comprende fácilmente que el problema de deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros, requiere la utilización de "técnicas matemáticas" para resolver sistemas de ecuaciones. Estas técnicas son muy variables dependiendo de la naturaleza de las ecuaciones que forman el modelo.

Las más usuales, en cualquier caso, son las siguientes:

- Cuando el modelo consiste en un sistema de ecuaciones lineales, ha de recurrirse a las "técnicas de resolución de sistemas lineales", donde la discusión del conocido teorema de Rouché-Frobenius-Krönecker adquiere singular relevancia. Si el número de ecuaciones es elevado, resulta preciso recurrir a los Métodos Matriciales, que presentan la gran ventaja de ser resueltos con el auxilio del ordenador y el *software* adecuado.

- Cuando el modelo consista en optimizar (maximizar o minimizar) una función cuyas variables estén sometidas a restricciones dadas por igualdades, la resolución del modelo requiere el empleo de las técnicas matemáticas propias del "Cálculo de Extremos Relativos" (máximos y mínimos locales) propias del Cálculo Infinitesimal clásico, como el método de los multiplicadores u operadores de Lagrange.
- Cuando el modelo consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal cuyas variables estén sometidas a restricciones dadas por desigualdades lineales, ha de recurrirse a las técnicas de la "Programación lineal", que es una parte de la Investigación Operativa.
- Cuando el modelo consiste en optimizar una función no lineal cuyas variables están sometidas a restricciones dadas por desigualdades lineales o no lineales, la resolución del modelo ha de hacerse a través de las técnicas matemáticas de la "Programación no lineal", también propias de la Investigación de Operaciones.

Mediante el empleo de las técnicas anteriores, o bien de otras varias no mencionadas, se resuelve el problema de deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros. Es precisamente en esta fase deductiva donde las Matemáticas colaboran en forma esencial con el análisis psicológico. La deducción matemática presenta la ventaja de su rapidez y de llegar allí donde la deducción verbal le es a veces imposible, como ya hemos señalado en la Introducción al presente libro. El dominio de las mencionadas técnicas matemáticas resulta de vital importancia si se quiere llegar a emplear el lenguaje matemático en los análisis psicológicos. Dicho dominio exige que, previamente, se conozcan las propiedades esenciales de las funciones reales, tanto de una variable como de varias.

C) Tercer problema

El tercero y último de los problemas que presenta un modelo matemático es el de deducir las conclusiones del modelo. Estas conclusiones suelen expresarse analizando cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas, antes calculados, al producirse una alteración en una de las variables exógenas o en uno de los parámetros. Las variaciones que experimentan las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas o parámetros constituyen las "Predicciones del Modelo". Estas predicciones son las que deben servir de base a la hora de tomar decisiones terapéuticas o bien por parte del psicólogo experimentador.

La deducción de las conclusiones del modelo suele requerir el uso de las derivadas parciales. Para analizar como se ve afectado el valor de una de las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas, basta con calcular la derivada parcial de la variable endógena respecto a la exógena.

La exposición efectuada hasta aquí ha pretendido resaltar dos cuestiones, sin ánimo de dejarlas resueltas:

- La primera de ellas es un intento de clarificar de qué manera las Matemáticas van a servir a las teorías psicológicas.
- La segunda de las cuestiones es la de anticipar cuáles van a ser las necesidades matemáticas, o parte de dichas necesidades, que demandan los análisis de enfoque marginalista.

Resumiendo todo lo expuesto hasta ahora, cabe destacar lo siguiente:

- Que muchas de las teorías psicológicas, de carácter deductivista, pueden ser expuestas en forma matemática a través de los modelos matemáticos.

- Que el manejo de un modelo matemático presenta tres problemáticas diferenciadas temporalmente, a saber:

1. Formulación del modelo.
2. Deducción de los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros.
3. Deducción de las conclusiones del modelo, analizando cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas o parámetros.

- Que la resolución de las anteriores disyuntivas requiere, desde el lado matemático, conocer las siguientes cuestiones:

a) Las propiedades generales de las funciones reales, tanto de una como de varias variables reales, así como los conceptos matemáticos de las mismas, orientado este estudio a exponer los conceptos en forma matemática y a expresar los supuestos de la teoría en la forma de un sistema de ecuaciones o inecuaciones que constituyen la formulación del modelo.

b) El desarrollo de técnicas matemáticas diversas (resolución de sistemas lineales, cálculo de extremos relativos, programación lineal y lineal paramétrica, programación no lineal, cuadrática, dinámica, en números enteros, hiperbólica, etc.) con las que se haga posible deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros.

c) El cálculo de derivadas parciales, tanto de funciones simples o explícitas como de funciones compuestas o implícitas, con las que se haga posible la deducción de las conclusiones del modelo cuando se analicen cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas ante una alteración de una de las variables exógenas o parámetros.

4.2.3. Formulación de los modelos matemáticos

Una vez resuelto el problema de saber expresar matemáticamente las relaciones de los modelos especificados en la teoría, estamos en condiciones de abordar la "formulación de los modelos". No obstante creemos necesario hacer antes algunas puntualizaciones en forma de preguntas, a saber:

a) ¿Cuáles son las variaciones endógenas y exógenas?

En primer lugar, para formular el modelo matemático de una cierta teoría psicológica, es necesario conocer qué es lo que trata de determinar dicha teoría. O dicho en otros términos: conocer cuáles son las variables endógenas y cuáles las exógenas. Las primeras son las que la teoría trata de determinar en términos de las exógenas.

b) ¿Aparecen explicitadas todas las relaciones?

Una vez aclarado este punto, es necesario fijarse en las especificaciones contenidas en los supuestos de la teoría e ir expresándolas en términos matemáticos. Ahora bien, ocurre que las Relaciones de Definición y de Condición no suelen venir explicitadas, y sin embargo han de aparecer en la formulación del modelo. Por ello, al formular un modelo debe tenerse sumo cuidado con las Relaciones de Definición y de Condición. Las Relaciones de Comportamiento siempre vienen especificadas en los supuestos de la teoría.

c) ¿Es el modelo completo?

Después de haber expresado en forma matemática las Relaciones que forman el modelo, debe procederse, a modo de comprobación, a observar si el modelo es completo. Para ello, ha de suceder que el número de ecuaciones sea igual al número de variables endógenas (incógnitas). De lo contrario, lo más probable es que falten ecuaciones (tal vez alguna de las Relaciones de Definición o de Condición no explicitadas) aunque también puede ser que se trate de un sistema compatible indeterminado en los términos definidos por el teorema de Rouché-Frobenius-Krönecker, es decir un modelo en el que haya más variables endógenas que ecuaciones y por tanto con infinitas soluciones para las variables endógenas. También podríamos encontrarnos con sistemas incompatibles (sin solución).

Veamos, en fin, que una de las características fundamentales de los modelos de análisis psicológico puede ser la aparición de la variable temporal que, según su presencia o no, se clasifican en *dinámicos* (no inerciales o inerciales) y *estáticos*. No nos extenderemos más en este tipo de modelos, cuyo estudio sería más propio de otra investigación.

4.3. Otra clasificación de los modelos

Pueden esquematizarse del siguiente modo:

- MODELO DE REFERENCIA
  - Modelo de información creciente
  - Modelo de conocimiento
    - Modelo de análisis
    - Modelo funcional
    - Modelo de comportamiento dinámico del sistema

, cuyas definiciones respectivas son las siguientes:

- ***Modelos de referencia:*** son estructuras lógicas, proyectadas sobre la maqueta de un F (individuo observado o sujeto a experimentación) real, que permiten ampliar el proceso de acrecentamiento del conocimiento. Enriquecen y desarrollan los modelos implícitos a través de los cuales se ordenan y estructuran nuestras percepciones; para ello, explicitan las hipótesis de base o de partida, los objetivos finales, los factores en juego y sus interacciones.

- ***Modelo de información creciente:*** es una estructura de acogida e interpretación progresiva de la información. Debe tener las propiedades de un sistema: ser adaptativo y ser capaz de aprender.

- ***Modelo de conocimiento:*** reducen la indeterminación y explican las transformaciones.

- ***Modelo de análisis:*** reduce la variedad de un conjunto de elementos (serie de observaciones estadísticas sobre los factores) y halla clasificaciones explicativas (modelos de segmentación con técnicas matemáticas, estadísticas e informáticas).

- ***Modelo funcional:*** explica satisfactoriamente el comportamiento de las estructuras funcionales, define la naturaleza de las variables en juego (VE, VS, VI, VES, VA), así como su articulación lógica. Por último, permite comprender el funcionamiento de los bloques o subsistemas. Desde luego, la elaboración de estos modelos será necesaria para preparar la acción sobre el sistema.

- ***Modelo de comportamiento dinámico de un sistema:*** con gran frecuencia, el sistema aparece en régimen transitorio. Forrester[18] ha presentado un modelo de dinámica, basado en el mecanismo de "feedback" o retroalimentación industrial, que permite explorar los regímenes transitorios de un gran sistema y el establecimiento de curvas de respuesta de las VES (variables esenciales) para ciertas categorías de perturbaciones en las VE (variables de entrada). El modelo tiene en cuenta las interacciones entre los flujos que circulan. En cada red se tienen en cuenta los siguientes conceptos: los niveles, las tasas de flujos, las funciones de decisiones y los canales de información.

Con relación a esto último, conviene aclarar que los niveles son los puntos de acumulación de los flujos y resultan de la diferencia entre los flujos de entrada y de salida. Las tasas definen el flujo instantáneo entre los niveles, y corresponden a la actividad. Los niveles miden el estado que llega del sistema, a causa de la actividad. La fijación de las tasas, que corresponde al Sistema Gestor, viene dada por las VA (variables de acción), resultando funciones de decisión que representan elecciones o acciones programadas basadas en el valor de los niveles (Ferrer, 1972).

En particular, la dinámica de un bloque de un sistema vendrá dada por la siguiente formulación:

$$E \rightarrow \boxed{\phi} \rightarrow S$$

[18] En la década de los años 70, hubo un avance decisivo en el campo de la computación y, como consecuencia, se desarrollaron programas para realizar simulaciones por ordenador. También se propusieron modelos con la intención de prever la evolución de la economía mundial. En el año 1972, se presentó el *Primer Informe del Club de Roma* titulado *The Limits to Growth*. Fue obra de Jay Forrester y Dennis Meadow, del MIT y en él, los autores desarrollaron el modelo **World2** formulado desde la perspectiva de la Dinámica de Sistemas. Este modelo fue uno de los primeros *Modelos Globales* que se han utilizado y también, junto con sus revisiones, uno de los más importantes. El modelo atrajo la atención de la comunidad dedicada a realizar prospecciones del futuro e impulsó el desarrollo de muchos modelos posteriores. Su característica principal era la habilidad para unir y combinar elementos, como la producción industrial, la población, cuestiones medioambientales, la alimentación y la energía en un mundo a escala aunque de forma agregada, es decir, sin considerar diferencias de desarrollo entre las distintas zonas geográficas. Mesarovic y Pestel desarrollaron el modelo **World Interdependence Model (WIM)**, que considera el mundo divido en regiones y con el que se preparó el *Segundo Informe del Club de Roma* en el año 1974 bajo el título *Mankind at the Turning Point*. Este tipo de modelos se denominan *Modelos Globales* y están caracterizados por los siguientes puntos:
- El modelo pretende hacer prospecciones del futuro.
- El modelo abarca todo el mundo o, al menos, las influencias recíprocas entre zonas amplias del planeta.
- El modelo intenta unir áreas diferentes pero relacionadas como la economía, la alimentación, el medio ambiente,...

$$\frac{d\phi}{dt} = S - E, \text{ de donde:}$$

$$\phi = \int (S - E)dt = S \cdot T \text{, y : } \frac{\phi}{T} = S; \text{ siendo:}$$

ϕ = nivel de flujo (corresponde al estado del sistema).
S = tasa de flujo de salida = flujo instantáneo (corresponde a la actividad).
E = tasa flujo de entrada = ídem anterior.
T = demora (constante).

De las expresiones anteriores, se deduce que:

$$\frac{d\phi}{dt} = T\frac{dS}{dt};$$

de donde, sustituyendo en la ecuación inicial, se tiene:

$$S - T\frac{dS}{dt} = E,$$

o lo que es lo mismo, se llega a la denominada "ecuación de transferencia":

$$(1 - T\frac{d}{dt})S = E$$

El modelo psicológico o de dinámica industrial está constituido, en definitiva, por el conjunto de todas las ecuaciones que ligan las tasas y los niveles de flujo de los diferentes bloques del sistema. Así:

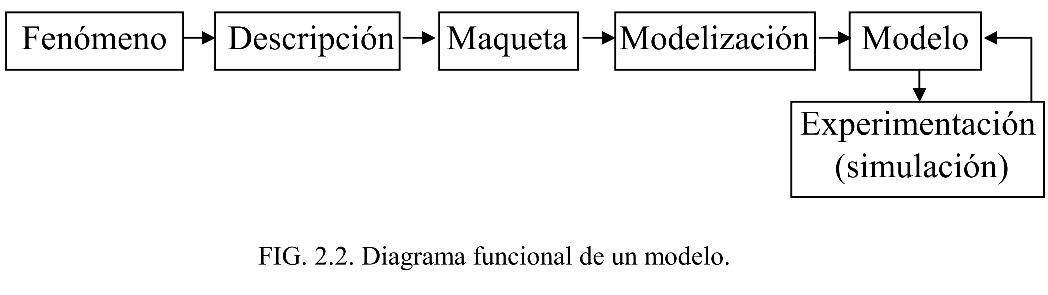


FIG. 2.2. Diagrama funcional de un modelo.

CAPÍTULO 3
La Psicología como Sistema

1. Introducción

Siguiendo el excelente trabajo de Mariano Yela titulado "Teoría general de sistemas y Psicología" (véase "Teoría general de sistemas". Revista de la Universidad Complutense de Madrid. Vol. XXIII, nº: 89, Enero-Marzo 1974), citado en la bibliografía, veamos que los psicólogos han estudiado los sistemas desde diversos puntos de vista. Algunos han tratado de analizar empíricamente los factores que intervienen en la plasmación de decisiones en casos relativamente simples en las que las variables son controlables. Otros han examinado los efectos sobre el funcionamiento de pequeños grupos de diferentes esquemas de comunicación, de variables psicológicas, del ambiente social, con la idea de que tal estudio de pequeños grupos pueda sugerir métodos de estudio de sistemas más complejos.

A menudo se presentan entre dos psicólogos divergencias en lo que se refiere a la metodología del examen de sistemas desde su punto de vista. Muchos prefieren sacrificar rigor y precisión en aras de la profundidad, considerando tales aspectos como las motivaciones inconscientes, las modas colectivas que operan en lo profundo del espíritu de una sociedad, etc. Otros, en cambio, ante la imposibilidad de obtener datos cuantitativos precisos en ciertas áreas, prefieren dedicarse a otras de cuantificación más sencilla y de contrastar en ellas hipótesis que se espera puedan conducir a resultados válidos en otras zonas más profundas.

La Teoría General de Sistemas (TGS) ofrece perspectivas e instrumentos conceptuales que permiten abordar numerosos fenómenos psicológicos de forma más fiel, comprensiva y fecunda y, a veces, más rigurosa, de lo que era usual en la psicología anterior. Es difícil, sin embargo, aquilatar su influjo en la psicología contemporánea; creemos que, al menos de modo directo, ha sido más bien escaso. Ninguna de las grandes corrientes de la psicología teórica se basa en la TGS ni ha utilizado explícitamente sus principios. La razón reside, tal vez, en que no ha habido tiempo para ello ni el ambiente tampoco ha sido propicio. Las ideas organicistas tuvieron en su momento, en los primeros decenios de nuestro siglo, un eco importante en la psicología alemana, sensibilizada a favor de los conceptos "holistas" por la reacción general que, contra el asociacionismo mecanicista, promovieron la *Denkpsychologie*, la psicología fenomenológica y comprensiva, la escuela de las "cualidades formales" y, sobre todo, la psicología de la Forma, cuyo concepto central -la *Gestalt*- es justamente un sistema unitario irreductible a la suma de sus componentes. La naciente psicología genética y evolutiva -Werner, Piaget[1], Bühler[2]- inició, asimismo, una trayectoria conceptualmente similar.

Pero el desarrollo de estas ideas quedó en buena parte interrumpido en Europa con los sucesos previos a la Segunda Guerra Mundial. Sus principales representantes, incluido el propio Ludwig von Bertalanffy[3], emigraron a Norteamérica. La psicología científica adquirió un sesgo norteamericano, característicamente conductista y hostil al movimiento que estudiamos.

A propósito de este último investigador, veamos que fue pionero en la concepción "organicista" de la biología, concepción que trascendió la dicotomía "mecanicista vs. vitalista" en la explicación de la vida, a través de la consideración del organismo como un sistema abierto, dotado de propiedades específicas capaces de ser investigadas por la ciencia. La concepción conjunta entre los conceptos de niveles de organización y del activo como opuesto al organismo pasivo (o reactivo), constituyó una declaración temprana de una teoría holística de la vida y la naturaleza. Este concepto encontró resistencia general en los biólogos experimentales que pretendían explicar los procesos de la vida mediante la investigación física y química de las leyes a niveles subcelulares. El

[1] (Neuchâtel, Suiza, 1896-Ginebra, 1980). Psicólogo suizo. Jean Piaget se licenció y doctoró (1918) en biología por la Universidad de su ciudad natal. A partir de 1919 inició su trabajo en instituciones psicológicas de Zurich y París, donde desarrolló su teoría sobre la naturaleza del conocimiento. Publicó varios estudios sobre psicología infantil y, basándose fundamentalmente en el crecimiento de sus hijos, elaboró una teoría de la inteligencia sensoriomotriz que describía el desarrollo espontáneo de una inteligencia práctica, basada en la acción, que se forma a partir de los conceptos incipientes que tiene el niño de los objetos permanentes del espacio, del tiempo y de la causa.

[2] Karl Bühler (Meckesheim, Baden, 27 de mayo de 1879 - Los Ángeles, 24 de octubre de 1963), pedagogo, psicólogo, lingüista y filósofo alemán. En 1899 empezó a estudiar medicina en Friburgo y allí se doctoró en esa materia, pero cursó estudios paralelos de Psicología y Filosofía en Estrasburgo. Amplió los de Psicología en la Universidad de Berlin y en la de Bonn. Aunque se formó en la Psicología de la Gestalt, desarrolló su propia teoría, el Funcionalismo, para explicar los procesos cognoscitivos. De 1918 a 1922 fue profesor de Filosofía y de Pedagogía en Dresde; allí se casó en 1916 con Bertha Charlotte Bühler (1893–1974), otra importante psicóloga, fundadora de la psicología del desarrollo. Entre 1922 y 1938 fue profesor de Psicología en la Universidad de Viena y en su Instituto Pedagógico, formando parte del Círculo de Viena. Sus teorías sobre la evolución intelectiva del niño inspiraron la reforma educativa en Austria. Los progresos de los nacionalsocialistas y el hostigamiento hacia él y su mujer les impulsaron a abandonar el país en 1938; estuvieron en Oslo, en Londres y finalmente marcharon en 1939 a los Estados Unidos, donde se establecieron definitivamente. Hasta 1945 Karl Bühler fue profesor en Minnesota, y después, hasta su jubilación en 1955, lo fue de Psiquiatría en la Universidad del Sur de California, en Los Ángeles, donde falleció el 24 de octubre de 1963. Tuvo importantes discípulos, entre ellos los filósofos Ludwig Wittgenstein y Karl Popper, el historiador del arte Ernst Gombrich y el antropólogo y etólogo Konrad Lorenz.

[3] Nació el 19 de septiembre de 1901, en Atzgersdorf una pequeña villa cerca de Viena y falleció el 12 de junio de 1972 en Búfalo, Nueva York. Fue educado por tutores privados en su casa hasta los 10 años, edad en la que comenzó a recibir educación formal. Quizás en parte debido a este hecho, el pequeño Ludwig comenzó la escuela con muchas ventajas académicas. Esas ventajas fueron tales que pudo aprobar sus exámenes con honores a pesar de una pobre atención a sus clases. Sus registros de atención reflejan deseos de continuar sus estudios en casa en lugar de gastar tiempo en ir a tomarlas. De todos modos, su continuo estudio en casa tendió a perpetuar su superioridad intelectual. Sus intereses se desarrollaron tempranamente y siempre fueron amplios. Ellos abarcaron desde experimentos hasta biología teórica, pasando por filosofía de las ciencias y del hombre, psicología y psiquiatría, teoría del simbolismo, historia y una gran variedad de problemas sociales. También un tópico arcano como el origen del servicio postal en la edad media. En la mayoría de los campos encarados fue un verdadero pionero, con ideas que se adelantaban a las visiones dominantes de sus tiempos.

tema resurgió en los años sesenta en los debates sobre si la vida fue finalmente explicada en los términos de las propiedades del ADN y de las leyes de la biofísica y bioquímica.

Aunque tomó parte activa en los debates sobre reduccionismo, su concepción organicista fue ampliamente ignorada. El concepto organicista de la vida elaborado por Bertalanffy dentro de una Teoría General de la Biología, más tarde llegó a ser el fundamento para la Teoría General de los Sistemas. El desarrollo fue lógico: la concepción organicista se refirió al organismo como un sistema organizado y definido por leyes fundamentales de sistemas biológicos a todos los niveles de organización. La tarea fue tomada por Bertalanffy quien, interesado en las amplias implicaciones de su concepción, fue más allá de la biología para considerar la psicología y los niveles de organización sociales e históricos.

Concibió una teoría general capaz de elaborar principios y modelos que fueran aplicables a todos los sistemas, cualquiera sea la naturaleza de sus partes y el nivel de organización. Bosquejó el armazón para tal teoría en un seminario de Charles Morris en la Universidad de Chicago en 1937 y más tarde en lecturas en Viena. La publicación del manuscrito en el cual la teoría fuera descrita por primera vez, fue impedida por la agitación general al final de la Segunda Guerra Mundial. Von Bertalanffy primero publicó un "paper" sobre la misma titulado "Zu einer allgemeinen Systemlehre" en 1949, seguido al año siguiente por la "Teoría de los sistemas abiertos en Física y Biología" y un "Bosquejo de la Teoría General de Sistemas". La formulación clásica de los principios, alcances y objetivos de la teoría fueron dados en "La Teoría General de Sistemas" y desarrollados con gran detalle en 1969 en el libro del mismo título. Von Bertalanffy utilizó estos principios para explorar y explicar temas científicos y filosóficos, incluyendo una concepción humanista de la naturaleza humana, opuesta a la concepción mecanicista y robótica.

Según M. Yela, la TGS sólo empieza a difundirse en los ambientes psicológicos a partir de la segunda mitad del siglo XX. Crecen entonces las alusiones y las citas, se escriben ensayos y se aprovechan sus conceptos, se emprenden algunas investigaciones empíricas y se formalizan modelos inspirados en sus principios o en otros similares y, finalmente, se provoca un cambio fundamental en la psicología aplicada. Con todo, el influjo sigue siendo más bien incipiente e indirecto en el campo de la psicología. Los principios y problemas de la TGS son más bien programáticos, descriptivos y heurísticos. Abren vías de extraordinario interés, pero no suelen ofrecer nuevos métodos precisos. Es más fácil utilizar cualitativamente sus conceptos que fundamentar en ellos estudios experimentales. Y eso es, en buena parte, lo que se hace. Para alcanzar una mayor precisión se requiere una formalización matemática y una cuantificación de las variables no siempre fácil de conseguir en psicología. Más hacedero resulta el empeño en las cuestiones tecnológicas de la psicología industrial y de la ingeniería humana o en la elaboración de micromodelos para el estudio de tal o cual campo limitado, y, efectivamente, son éstos los modos concretos según los cuales la TGS está ejerciendo su influjo más señalado y profundo en la psicología.

En el campo de la psicología general, la TGS ha influido más bien indirectamente, como una corriente del pensamiento contemporáneo que ha contribuido a formar una actitud, junto a otras varias tendencias parcialmente convergentes: la cibernética, las teorías de la información, la decisión, el riesgo y los juegos, la psicometría multidimensional, la psicotemática enfocada cada vez más al análisis de múltiples variables interdependientes, el empleo en psicología de modelos matemáticos no métricos, como los topológicos, etc. En el mismo sentido "sistemático" han ejercido su influjo numerosas corrientes funcionalistas, estructuralistas, generativas y personalistas, de importancia creciente durante los últimos decenios en psicología y en las ciencias humanas.

Como resultado de todo ello existe en la psicología actual, según M. Yela, una tendencia, no unánime ni generalizada, pero patente y progresiva, a superar el esquema estímulo - reacción, realmente difícil de mantener frente a las críticas, las nuevas observaciones empíricas y los abundantes resultados experimentales procedentes de la psicología de la personalidad, la psicología social, la psicología cognoscitiva, el psicoanálisis estructural, la psicolingüística, la teoría psicogenética de la inteligencia e incluso las teorías de la motivación y del aprendizaje del neobehaviorismo y de las nuevas corrientes interpersonales, sociales y culturales del psicoanálisis.

Como queda dicho, el influjo más decisivo de la TGS acontece en la psicología aplicada y, especialmente, en la psicología industrial y del trabajo. En este campo, la bibliografía directamente inspirada en la TGS es muy copiosa. Baste señalar que son cada vez más numerosos los textos e investigaciones que aparecen bajo el título de Psicología de las Organizaciones y, más explícitamente, Psicología de los Sistemas.

M. Yela se extiende ligeramente también sobre los modelos parciales que han aparecido en psicología bajo el influjo de la actitud general antes mencionada. Son, dice, muy numerosos. Entre los más formalizados figuran la psicofísica de la detección de señales, los modelos perceptivos y psicolingüísticos basados en la teoría de la información y en principios estructurales, los modelos cibernéticos para el estudio de varios aspectos de la memoria, del aprendizaje y de la motivación, los usados en investigaciones sobre inteligencia simulada y artificial mediante computadores electrónicos, la teoría del comportamiento como conjunto de estructuras y planes, la teoría psicogenética de la inteligencia, el análisis factorial de las interdependencias multivariables, etc.

Como ejemplo de estos modelos, y enlazando con los conceptos expuestos en el capítulo anterior, resumiremos sumariamente algunos de ellos.

La psicofísica clásica solía limitarse a estudiar funciones en que el estímulo era la única variable independiente y la sensación, la dependiente. Por ejemplo, el umbral absoluto se definía como la mínima cantidad del estímulo que producía una sensación. La psicofísica actual considera la detección de los estímulos como un sistema de decisiones en función de una multiplicidad de variables físicas, fisiológicas, psicológicas y sociales. El mismo umbral, llamado clásicamente absoluto, es sólo relativo respecto de una compleja interacción de todas estas variables.

El modelo, simplificado al máximo, es como sigue (Swets, Tanner y Birdsall, 1961). El sujeto tiene que decidir en un gran número de ocasiones si hay sólo "ruido" o hay, además "señal". Los resultados posibles son cuatro: dos tipos de acierto (detección correcta de la señal o de su ausencia) y dos tipos de error (falsa alarma o inadvertencia). Sea un continuo de observación "x". En cada caso "x" puede ser debido al ruido "**R**" o a la señal "**RS**", según las funciones de probabilidad $f_R(x)$ y $f_{RS}(x)$. Cada valor "x" implica una razón de probabilidad:

$$\lambda(x) = \frac{f_{RS}(x)}{f_R(x)}$$

que puede suponerse sometida a una transformación monotónica para que las distribuciones sean normales. Suponiendo, además, que ambas tengan la misma varianza, tenemos la figura siguiente:

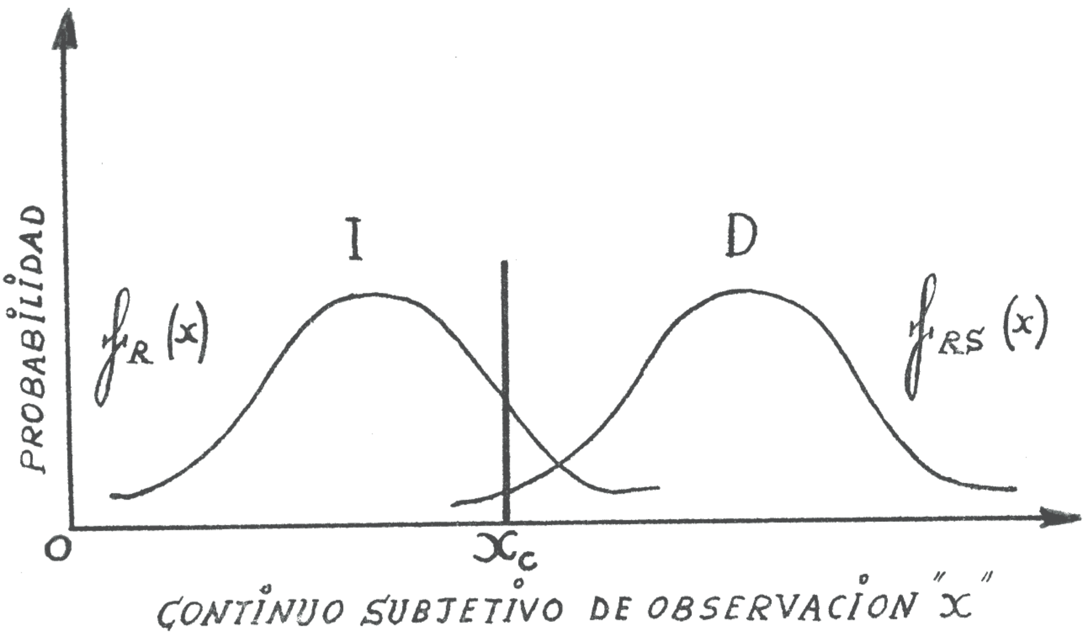


FIG. 3.1. Funciones normales de probabilidad de "ruido" y "señal".

La distancia expresada por:

$$"d" = \frac{\overline{X}_{fRS}(x) - \overline{X}_{fR}(x)}{S_{fR}(x)}$$ constituye el denominado "índice de detectabilidad".

El problema del sujeto es elegir un criterio "x_c" tal que, para cada observación "x_i", decida que hay señal si $x_j > x_c$, y que no la hay si $x_j < x_c$. Cada "x_i" determina dos regiones "**D**" e "**I**" y los cuatro resultados posibles:

(RS.D): ocurrencia conjunta de señal y región **D**, detección correcta; **(RS.I)**: inadvertencia; **(R.D)**: falsa alarma, y **(R.I)**: negativa correcta.

Cada criterio define cuatro probabilidades condicionales, de las que las dos importantes y suficientes son la de detección correcta y la de falsa alarma:

$$P_{RS}(D) = \frac{P(RS.D)}{P(RS)}$$

$$P_{R}(D) = \frac{P(R.D)}{P(R)}$$

donde **P(RS)** es la probabilidad *a priori* de presentación de la señal, conocida por el sujeto, y su complementario: **P(R)** = 1- **P(RS)**, la de sólo ruido.

Si cada acierto y error se sancionan de cierta manera, cabe estimar el valor esperado de las decisiones del sujeto en función de las probabilidades *a priori* y la valoración de los resultados.

Fijado el modelo, la magnitud de la señal y del ruido, las probabilidades *a priori* y la matriz de valoración, se pueden calcular, para cada criterio "x_c", los valores $\mathbf{P_R(D)}$ y $\mathbf{P_{RS}(D)}$, que, representados a medida que el criterio se desplaza a lo largo de "x", definen una curva llamada "característica operativa del receptor" **(COR)**. En un experimento concreto se puede calcular:

1) La detectabilidad "d", que indica la fuerza efectiva de la señal y la capacidad sensorial del sujeto, y determina una curva **COR**;

2) La razón $\frac{f_{RS}(D)}{f_R(D)}$

que identifica un punto en esa curva e indica el criterio efectivamente seguido por el sujeto y la manera cómo en su decisión han influido sus expectativas (las probabilidades *a priori*) y su motivación (la matriz de consecuencias).

Los experimentos prueban que, en general, las **COR** halladas empíricamente responden al modelo de la teoría de la decisión y no a la teoría clásica del umbral absoluto. La detección depende, ciertamente, de la intensidad del estímulo, pero también de factores cognoscitivos (aquí hemos mencionado sólo las expectativas) y motivacionales (preferencias, temores, valoraciones, etc.).

Menos formalizado matemáticamente, pero de gran coherencia lógica y enorme caudal de observaciones empíricas, es el modelo psicogenético de la inteligencia ofrecido por Piaget. Según éste, la inteligencia es una estructura, no un agregado de conexiones adquiridas por aprendizaje. Pero esta estructura no es automática, ni congénita, ni está preformada desde el nacimiento. Es la forma final de un proceso. Cada etapa tiene una peculiar estructura que, en su interacción con el medio y regida por leyes de organización interna, se modifica y origina otra estructura más compleja. El proceso fundamental es la equilibración adaptativa de dos funciones básicas, la asimilación (incorporación del medio al organismo) y la acomodación (modificación del organismo para ajustarse al medio). El final del proceso es la inteligencia formal, que supone un equilibrio dinámico entre la asimilación intencional, que no deforma lo asimilado, y la acomodación simbólica, que no altera mecánicamente al sujeto. El conjunto de operaciones del pensamiento formal revela una estructura de grupo multiplicativo o abeliano, universal y reversible.

2. El sistema de gestión

En general, en todo proceso bien definido de gestión se puede distinguir entre quien gestiona en sentido propio (psicólogo experimentador, en nuestro caso), que dirige y “pilota” el sistema, y quien es gestionado, dirigido y “pilotado” (sistema psicológico o individuo). Esta dualidad se puede exponer a partir de las frases “*Sistema de pilotaje, dirección o gestión*” (“*Sistema gestor*”) y “*Sistema físico*”, y usaremos ambas terminologías para expresar sus conceptos.

Llamaremos “*sistema de gestión*”, pues, a un psicólogo que posee un conjunto de reglas, procedimientos y medios que permiten aplicar métodos a un organismo (*sistema físico o psicológico*) para realizar ciertos objetivos y obtener información por observación de la conducta de dicho sistema.

(**NOTA**: Para el logro de una mayor brevedad, nos serviremos frecuentemente del símbolo “S.” para expresar la palabra “sistema” o “sistemas”).

Así, por ejemplo, un S. de gestión de personal en una empresa, aplica al S. psicológico “personal” (obreros y directivos) métodos de avance, evaluación y selección.

El sistema de gestión se superpone al sistema físico psicológico: es una red de percepción, control y regulación, destinada a pilotar los procesos psicológicos en cuestión. Congruentemente, en este sentido también podríamos denominarlos “*S. operador*” y “*S. operado*”.

Los "medios" de los que dispone un S. de gestión son los "órganos" utilizados para efectuar operaciones acerca de la información (control, transmisión, stockage, cálculo, ...), pudiendo ser un *individuo* (psicólogo experimentador), *soportes* (materiales e inmateriales: experiencia humana, software, ...), *máquinas* (que detectan, captan, transmiten información, calculan, imprimen: desde el cronómetro al ordenador). Los "*procedimientos*" de un S. de gestión comprenden todas las operaciones necesarias para tratar la información y las reglas, a través de los medios del sistema.

3. Variables de un sistema psicológico

Son de diversas clases, a saber:

- **Variables de entrada o estímulos (V.E.):** son variables cuyos valores son impuestos al S., ya sea por el universo exterior al mismo, o bien sea por un operador o gestor (psicólogo).
- **Variables de salida o respuestas (V.S.):** son variables que actúan sobre el exterior, esto es, sobre otros sistemas (resto del mundo o sistema complementario).
- **Variables de acción (V.A.):** son las entradas procedentes del S. Gestor (órdenes o instrucciones).
- **Variables esenciales o criterios (V.C. o bien V.ES.):** son aquellas cuyo valor informa acerca de la salud o eficacia del S. psicológico, pudiendo ser "internas" o "intermedias". Son de gran importancia, y es el psicólogo quien las elige. Han de ser significantes y significativas. La consecución de objetivos supone que dichas variables alcancen valores deseables, determinados *a priori*.

Veamos, por ejemplo, un S. psicológico: el "personal de la producción de un pueblo", cuyos elementos son "individuos" y cuyo "estado" viene dado en función de su edad, salario y antigüedad. Las diversas variables actuantes serán:

- **V.E.:**
  - del exterior → (sistema de producción): necesidades por cada función.
  - del exterior → (mercado de trabajo): oferta.

- **V.A.:**

  Mutaciones, avance, contrato, descontratación, nivel de salarios (en este caso, el psicólogo está representado por los empresarios contratantes).

- **V.S.:**
  - hacia "S. producción": número de horas productivas por función.
  - hacia "S. mercado de trabajo": incidencia sobre el mercado de trabajo.

- **V.C.:** Efectivo por función, masa salarial, tasa de rotación del personal.

Veamos, ahora, la **representación gráfica** de un S. psicológico (en el sentido cibernético o melesiano del término):

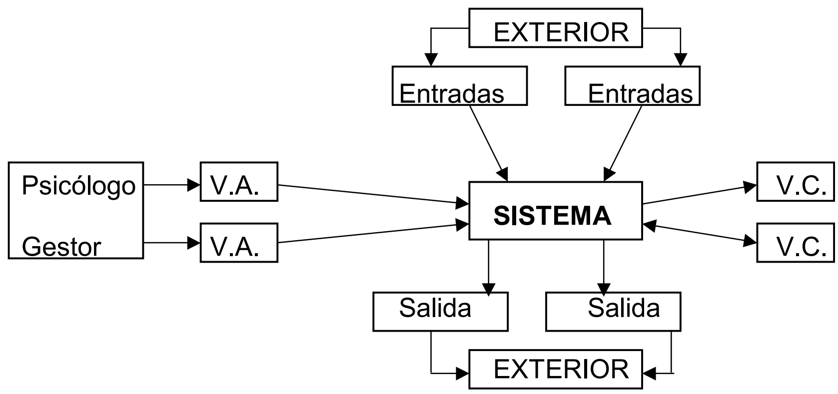


FIG. 3.2. Representación gráfica de un sistema psicológico.

4. El concepto de "probabilidad subjetiva"

Con independencia de que en el capítulo 9 de este libro trataremos de los diferentes conceptos de probabilidad de aplicación a la Psicología, veamos que la obra del gran economista inglés John Maynard Keynes[4] (1921) expone una teoría de la probabilidad que pertenece también a los sistemas lógicos (como la axiomática de Jeffreys), y la define estableciendo unos ciertos "grados de creencia racional" entre dos proposiciones. Sostiene que la relación usada en la deducción "p implica q" es la forma extrema de una relación que puede ser llamada "p aproximadamente implica q", y de aquí que "si un conocimiento de **h**

[4] Nace en Cambridge, en 1883. Hijo de John Neville Keynes, estudia en Eton y en el King's College de Cambridge. Se gradúa en matemáticas y se especializa en economía estudiando con A. Marshall y A. Pigou. Entra como funcionario del *India Office* en 1906. Permanece dos años en Asia hasta que en 1908 entra como profesor de Economía en Cambridge, puesto que mantiene hasta 1915. En 1916 ingresa en el Tesoro británico donde ocupa cargos importantes. Representa a este organismo en la Conferencia de Paz de París, puesto del que dimite en 1919 por estar en contra del régimen de reparaciones que se estaba imponiendo a Alemania. Vuelve a Cambridge como profesor, simultaneando su trabajo docente con actividades privadas en empresas de seguros e inversiones lo que le proporciona importantes ingresos. En la década de los años treinta los países de occidente sufrieron la más grave crisis económica conocida hasta la fecha: la **Gran Depresión** que siguió a la caída de la bolsa de Wall Street en 1929. El marginalismo no estaba capacitado para explicar ese fenómeno. En 1936 **J.M. Keynes** publica su "Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero", el libro que, sin duda alguna, ha influido de forma más profunda en la forma de vida de las sociedades industriales tras la segunda Guerra Mundial (1939-45). Las decisiones de ahorro las toman unos individuos en función de sus ingresos mientras que las decisiones de inversión las toman los empresarios en función de sus expectativas. No hay ninguna razón por la que ahorro e inversión deban coincidir. Cuando las expectativas de los empresarios son favorables, grandes volúmenes de inversión provocan una fase expansiva. Cuando las expectativas son desfavorables la contracción de la demanda puede provocar una depresión. El Estado puede impedir la caída de la demanda aumentando sus propios gastos. Durante la segunda guerra mundial Keynes se reincorpora al Tesoro. En 1944 encabeza la delegación británica en la Conferencia de Bretton Woods de la que surgirán el Banco Mundial y el Fondo Monetario Internacional. Muere dos años después, en 1946, en Sussex.

justifica una creencia racional en **a** de grado **P**, decimos que hay una relación de probabilidad de grado **P** entre **a** y **h**", y se escribe del siguiente modo:

$$a/h = P$$

Para Keynes, la creencia racional se deriva del conocimiento, es decir, cuando tenemos un grado de creencia racional en **a** es porque conocemos alguna proposición **h** y también conocemos que a/h = P. Por tanto, algunas proposiciones de la forma a/h = P deben estar en nuestra premisas, pudiendo ser obtenidas o bien por conocimiento directo o bien por razonamiento de otras premisas.

Las probabilidades, según Keynes, en general, no son mensurables numéricamente; las que lo son forman una clase muy especial, y sostiene que algunas no pueden compararse entre sí. He aquí una diferencia importante con la obra de Jeffreys.

Caracteriza esta relación lógica mediante un sistema de axiomas tras una serie de definiciones preliminares. Se observa en su axiomática que si mantenemos una proposición condicionadora **h**, fija, entonces las relaciones de probabilidad que se obtengan, supuesto que se puede asociar un número del intervalo (0,1), se podrán sumar y multiplicar entre sí, resultando equivalente a la teoría elemental de Kolmogoroff[5].

Ese nuevo concepto de probabilidad surge cuando los tradicionales conceptos de "probabilidad frecuencialista" (Von Mises, 1920)[6], basados en la

[5] Andrei Nikolaevich Kolmogoroff (1903-1987) completó sus estudios en la Universidad Estatal de Moscú en 1925 donde llegó a ser profesor en 1930. En 1935 recibió el grado doctoral en Física y Matemáticas; y desde 1938 hasta su muerte mantuvo la Cátedra en el Departamento de Lógica Matemática. Fue miembro de la Academia de Ciencias y Ciencias Pedagógicas de la Unión Soviética. Más aún, fue miembro de la Academia de Ciencias de USA, del Instituto Francés, de la *Royal Society* en Londres. Fue miembro honorífico además de en las anteriores, de la Academia Internacional de Historia y Ciencias, y recibió premios nacionales e internacionales. Escribió muchos libros y más de 200 artículos sobre Teoría de Funciones, Lógica Matemática, Teoría de las Probabilidades y aplicaciones, Problemas de Estacionalidad, Educación e Historia de las matemáticas. En 1985, 1986 y 1987 Nauka publica tres volúmenes de los trabajos de Kolmogoroff (en ruso) con comentarios de él y de sus alumnos. En estos libros se tratan temas tan diversos como teoría de las series trigonométricas, teoría de la medida y conjuntos, teoría de la integración, teoría de la aproximación, construcciones lógicas, topología, teoría de la superposición de funciones, temas de mecánica clásica, teoría ergódica, teoría de la turbulencia, difusión y modelos en la dinámica de la población, artículos sobre la fundamentación de la teoría de la probabilidad, teoremas límites, teoría de procesos estocásticos, estadística matemática, teoría de los algoritmos, teoría de la información, ...

[6] (1883-1953). Matemático y filósofo austriaco, n. en Viena y m. en Nueva York. Realizó estudios de ingeniería (1906) y tecnología (1908) y marchó a Alemania para ampliar su formación académica, pero la llegada al poder del nazismo le hizo trasladarse a la Universidad de Estambul (1933) y más tarde a la de Harvard (1939), en Estados Unidos, donde enseñó matemática aplicada y aerodinámica. Partiendo de un positivismo moderado, aceptaba la metafísica pero sólo como un punto de partida de la ciencia, acrítico y primitivo. Su contribución mayor al campo de la lógica es, sin embargo, la teoría de la frecuencia en la que consideraba que la probabilidad era el límite al que se aproximan una serie de frecuencias estadísticas cuando el número de estas mismas frecuencias crece sin límites o tiende hacia infinito. Entre sus obras más notables se cuentan *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Fundamentos del cálculo de

regularidad estadística, o los clásicos implícitos a la equiprobabilidad laplaciana, no resuelven satisfactoriamente los problemas que no pueden considerarse dentro del modelo del experimento. Este tipo de cuestiones pueden presentarse a menudo en el campo de la Psicología; de ahí el interés que también en nuestro caso pueden tener las teorías probabilísticas de carácter subjetivo basadas en el "grado de creencia racional" que puede tener una persona sobre la ocurrencia o no de un determinado suceso.

De hecho, las teorías subjetivistas y personalistas de la probabilidad se han desarrollado en los últimos setenta y cinco años sin que hayan obtenido un interés práctico hasta la aparición de los métodos bayesianos de estimación. La matemática moderna ha facilitado el desarrollo conjunto de las teorías frecuencialistas y de las subjetivistas con el estudio del *Álgebra de Boole de los sucesos aleatorios o estocásticos*, que actualmente constituye el camino más utilizado para fundamentar el concepto de probabilidad o la denominada "Estadística Matemática".

Otra interpretación se debe a Carnap, y se conoce con el nombre de necesaria o "teoría de la confirmación", pero la función adoptada por Carnap es sumamente complicada. El propósito de esta teoría es desarrollar métodos para codificar información "a priori" para determinar una distribución, también "a priori", sobre los estados de la Naturaleza. La evidencia utilizable es nuestra información "a priori" y el problema fundamental es el siguiente: dada una cierta información "a priori", ¿es una distribución "a priori" tan razonable como cualquier otra? A esto no responde la teoría subjetiva. Esta teoría ha sido desarrollada por Carnap, pero su función, como hemos mencionado, resulta harto complicada.

Desde el punto de vista subjetivo, la probabilidad mide la confianza de un individuo particular que está en la verdad de una proposición particular. Es necesario notar que las magnitudes de las probabilidades no son estimadas por el individuo, sino que están sujetas a ciertas reglas de consistencia, establecidas como axiomas que el individuo está dispuesto a aceptar.

Este punto de vista tiene sus mayores defensores en Ramsey[7], De Finetti[8], Koopman, Good, Savage[9] y Anscombe-Aumann.

---

probabilidades, 1919), *Wahrscheinlichkeit*, *Statistik und Wahreit* (Probabilidad, estadística y verdad, 1928) y *Kleines Lehrbuch des Positivismus* (Breve tratado de positivismo, 1939).

[7] Ramsey también hizo contribuciones fundamentales en economía. Por ejemplo, el concepto de precio de Ramsey, en el que se precisa la trayectoria óptima que debe seguir el precio de un monopolista regulado, que quiera maximizar el bienestar del consumidor. Además, también estableció una teoría del comportamiento óptimo de una Hacienda Pública, en torno de cómo debe ser la imposición más adecuada. Finalmente, el modelo de Ramsey es uno de los más usados por la Macroeconomía. En él, los consumidores se presentan como individuos que maximizan su utilidad a lo largo de un horizonte infinito. Esto es especialmente adecuado para estudiar el crecimiento de las economías, la respuesta óptima del gobierno frente a shocks... Ramsey desarrolló su modelo a finales de los años 20, pero el uso del cálculo de variaciones, la herramienta matemática que utilizó para resolverlo, hizo que la mayor parte de los economistas ignoraran su trabajo. No fue hasta 1965 cuando Cass y Koopman desarrollaron paralelamente un modelo muy similar, aceptado por los economistas. Entonces se comprobó que dicho

Se pueden señalar dos tendencias diferentes dentro de la escuela subjetivista. Una, orientada desde el punto de vista intuitivo, y otra, en la que la DECISIÓN juega un papel central.

Dentro de la primera tendencia destacan Koopman y Good. Para Koopman (1940), la probabilidad es directamente intuible por el individuo y es prioritaria a la experiencia objetiva. Este punto de vista está en la línea de Keynes, pero Koopman es subjetivista debido a que sostiene que la probabilidad difiere de una persona a otra en instantes diferentes. Después de presentar los axiomas de su sistema, Koopman obtiene varios teoremas sobre comparación de probabilidades. Puede considerarse que su teoría es más comparativa que cuantitativa. Entonces, para poder cuantificar la probabilidad, introduce una hipótesis adicional: "para cualquier entero **n**, existe al menos un conjunto de **n** proposiciones que son mutuamente excluyentes, tienen una unión no nula y pueden considerarse como equiparables para el individuo, dado que una de ellas sea cierta" con lo cual obtiene probabilidades numéricas y los usuales teoremas de probabilidad cuantitativa (como se obtiene de los axiomas de Kolmogoroff). En artículos posteriores sostiene que toda aplicación de las probabilidades frecuentistas o frecuencialistas en las ciencias experimentales presupone implícitamente una intuitiva concepción "a priori" de la probabilidad.

Good (1950) también se sitúa en la línea de Koopman. Así en el prefacio de su libro dice textualmente: "*Cuando deseamos decidir si aceptar un particular curso de acción, nuestra decisión depende de los valores que posean para*

---

modelo (una versión mejorada del modelo de crecimiento de Solow) era en realidad equivalente al desarrollado casi 40 años antes por Ramsey. Además, Ramsey fue un buen amigo de John Maynard Keynes, cuyos trabajos sobre probabilidad le estimularon a desarrollar propuestas sobre la probabilidad subjetiva (probabilidad Bayesiana). Nuevamente, sus trabajos no llegaron a ser conocidos hasta que se publicaron desarrollos similares en los años 50, realizados por Bruno de Finetti.

[8] Bruno de Finetti (1906-1985) y Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) descubrieron independientemente, poco antes de 1930, el hecho fundamental que sirve de base al llamado bayesianismo: un agente racional -esto es, un agente que, apostando de acuerdo con sus estimaciones subjetivas no se exponga a perder, pase lo que pase- tiene que ajustar sus estimaciones subjetivas a las reglas del cálculo de probabilidades. Ramsey explica su descubrimiento en el ensayo "Truth and probability", redactado en 1926 y publicado póstumamente en su libro *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays* (London: Routledge & Kegan Paul, 1931). De Finetti comunica sus ideas ya al Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Bolonia en 1928 (como consta en las actas de este congreso, publicadas en 1932), en una ponencia que incluye el célebre "teorema de representación" que da lugar a la tesis de los bayesianos, según la cual las estimaciones subjetivas de los agentes racionales necesariamente convergen si se basan en la misma experiencia. La demostración de este teorema es también el contenido principal del artículo "Funzione caracteristica di un fenomeno aleatorio", aparecido en 1930 en *Memorie della Reale Accademia del Lincei* (IV, 5: 86-133). El ensayo publicado en 1931 bajo el título "Sul significato soggetivo della probabilita" en la revista polaca *Fundamenta Mathematicae* (17: 298-329) expone, desde una perspectiva filosófica, las ideas del autor en forma más breve y accesible que su trabajo "La prevision: ses lois logiques, ses sources subjectives", publicado en 1937 en *Annales de l'Institut Henri Poincaré* (7: 1-68) y muy difundido en traducción inglesa (en Henry E. Kyburg Jr. y Howard E. Smokler, eds., *Studies in Subjective Probability*, New York, Wiley, 1964, pp. 53-118).

[9] En 1951, Savage argumenta que al utilizar los valores $\mathbf{x_{ij}}$ para realizar la elección, el decisor compara el resultado de una alternativa bajo un estado de la naturaleza con todos los demás resultados, independientemente del estado de la naturaleza bajo el que ocurran. Sin embargo, el estado de la naturaleza no es controlable por el decisor, por lo que el resultado de una alternativa sólo debería ser comparado con los resultados de las demás alternativas bajo el mismo estado de la naturaleza.

nosotros las posibles consecuencias. Una decisión racional dependerá también de nuestros grados de creencia sobre cada una de las alternativas que puedan ocurrir. La probabilidad como se comprenderá en lo que sigue, es la lógica (más que la psicológica) de los grados de creencia y de su posible MODIFICACIÓN A LA LUZ DE LA EXPERIENCIA".

La segunda tendencia arranca en Ramsey (1950), que en su libro "*Truth and Probability*" realiza una crítica de los puntos de vista frecuentista y keynesiano comparándola con su propia formulación, en la que el concepto de decisión juega una importante función.

La posición sostenida por Ramsey es fundamental, pues puede decirse que la mayoría de los trabajos sobre la Teoría de la Decisión moderna emanan con ciertas modificaciones de su concepción de probabilidad.

Para Ramsey, los conceptos de probabilidad y utilidad están íntimamente ligados y algunas nociones básicas son: a) una proposición éticamente neutra p de grado de creencia p/2, y b) la noción de igualdad entre diferencias de utilidad. En palabras de Ramsey, entendemos por **proposición éticamente neutra**, si siendo x e y dos consecuencias cualesquiera, entonces el individuo es indiferente a elegir entre (x, p, y) y (y, p, x), en donde (a, p, b) es la opción que da **a** si la proposición p se obtiene y **b** si p no se obtiene y, por **diferencia en utilidad** (valor) entre α y ß, igual a la existente entre γ y δ, si siendo p una proposición éticamente neutra de grado de creencia ½, el individuo no tiene preferencia entre las opciones (1) α si p es cierto, δ si p es falso y (2) ß si p es cierto, γ si p es falso.

Estas ideas han servido de base para la axiomatización de la utilidad dada por Suppes y Winet (1955), y para los experimentos sobre medida de la utilidad y probabilidad subjetiva de Davidson, Suppes y Siegel (1957). Una ampliación sobre el concepto de "utilidad" puede verse en el capítulo 5 de nuestro libro.

El punto de vista de L. Savage (1954) es completamente similar al de Ramsey, pues él mismo lo afirma al decir: «Los conceptos de probabilidad y utilidad de Ramsey son esencialmente los mismos que exponemos en este libro, pero el desarrollo lógico de ellos es distinto al utilizado por él, las definiciones de probabilidad y utilidad son simultáneas y dependientes entre sí».

Savage considera tres conjuntos primitivos y una relación binaria, a saber:

a) Un conjunto E de estados de la Naturaleza e_1, e_2, ... Y por A, B, C, designa subconjuntos de E;
b) un espacio C de consecuencias c_1, c_2,....;
c) un espacio de actos f, g, ... Un acto es una aplicación de E en C; y
d) una relación binaria $\leq$ (es no preferido a).

Establece un conjunto de cuatro axiomas y cuatro definiciones sobre los conjuntos primitivos. Los axiomas son relativos a órdenes de preferencia en los conjuntos, teniendo en cuenta una consistencia entre ellos. Hay que notar que los cinco primeros caracterizan una probabilidad cualitativa, en palabras de Savage: «La relación α cuando se aplica a sucesos de E es una probabilidad cualitativa». El postulado seis tiene importancia pues de él deriva la existencia de una medida de probabilidad P, compatible con la relación $\leq$ y la existencia de una función de utilidad V, única, salvo transformaciones lineales definidas sobre el espacio de actos.

Es esencial notar que la ley de multiplicación para sucesos independientes no es parte de la teoría de Savage; por esta razón, la teoría no tiene validez para problemas de índole secuencial, salvo que se establezca por separado.

Otro aspecto digno de observar, referente a las dos tendencias de la escuela subjetiva, es que la lógica juega una función importante, pero los puntos de vista son diferentes a los de la lógica inductiva. Podemos decir que la lógica de los subjetivistas radica en un conjunto de criterios de consistencia y razonabilidad en nuestras creencias o juicios o comportamientos. Es decir, si un individuo está de acuerdo con la teoría y se conforma con los criterios de consistencia, entonces, la teoría le ofrecerá una base RACIONAL y CONSISTENTE de tomar decisiones.

Otro representante destacado de la escuela subjetiva es Bruno de Finetti (1937), al que ya nos hemos referido con anterioridad. De Finetti presenta dos concepciones de la probabilidad, una en términos de la posición intuitiva y la otra referente a apuestas (opciones) sobre el comportamiento, que tiene un poco de las dos tendencias. De Finetti, considerado como subjetivista extremo, niega que en ningún caso el cuerpo de información pueda imponer un valor para la probabilidad, cuya situación depende de la arbitrariedad del observador (pero que está obligado, sin embargo, a respetar una serie de axiomas). A su teoría se puede poner una objeción: «En una serie de un número grande de pruebas (probabilidad frecuencialista o de Von Mises), se observa que se obtienen cuatro caras por seis cruces; entonces todos los observadores están de acuerdo en asignar como probabilidad de obtener cara el valor 0,4». A esta objeción responde Finetti diciendo que se parte de una hipótesis arbitraria, pero natural, y es la de la independencia de las tiradas.

Como se estudia en la teoría relativa a la utilidad, los axiomas de Von Newmann[10] y O. Morgenstern[11] llevan consigo la existencia de una función de

[10] John von Newmann zu Margitta Lajos (28 de diciembre de 1903 - 8 de febrero de 1957) fue un matemático húngaro-estadounidense, de ascendencia judía, que realizó contribuciones importantes en física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, informática, economía, análisis numérico, hidrodinámica (de explosiones), estadística y muchos otros campos de las matemáticas. Recibió su doctorado en matemáticas de la Universidad de Budapest a los 23 años. Fue una de las cuatro personas seleccionadas para la primera facultad del *Institute for Advanced Study* (Instituto para Estudios Avanzados). Trabajó en el Proyecto Manhattan. Junto con Edward Teller y Stanislaw Ulam, resolvió pasos fundamentales de la física nuclear involucrada en reacciones termonucleares y la bomba de hidrógeno. Es considerado el padre de la teoría de juegos y publicó el clásico libro *Theory of games and*

utilidad única, salvo para un cambio de escala y de origen, pero ellos se basan en opciones (o loterías) cuyas probabilidades son conocidas por el individuo. Entonces, Aumann y Anscombe (1963) presentan una definición de probabilidad subjetiva basándose en una aplicación doble de axiomas de Von Newmann y O. Morgenstern. Este sistema axiomático lo consideraremos de la mayor importancia para conceptualizar a la utilidad como soporte de la moderna teoría de la Decisión.

Un sistema axiomático interesante por su simplicidad es el que presenta Villegas (1964 y 1967) acerca de las probabilidades subjetivas cualitativas (en el mismo sentido que Savage). Considera Villegas un espacio muestral, una sigma-álgebra de sucesos y una relación ≥ (al menos tan verosímil que ocurra que satisface a cinco axiomas). Demuestra que existe una única distribución de probabilidad que es compatible con la relación. Para poder considerar relaciones condicionadas impone otro axioma.

En el libro editado por Kyburg y Smokler (1964) se recogen los artículos más notables publicados sobre probabilidad subjetiva. A partir de este año destacan los trabajos de Scott (1964) y los comentarios y críticas realizados por Fishburn en sus dos libros de 1964 y 1970.

Respecto a la comprobación experimental (así como su medida) de la probabilidad subjetiva destaca el trabajo de Luce y Suppes (1965) que presenta una crítica de los pocos trabajos realizados en esta área. Es también digno de notar el grupo de artículos de Ellsberg (1961), Fellner (1963), Raiffa (1961), Brewer (1963) y Roberts (1963), relativos a la controversia planteada sobre la existencia y medida de las probabilidades subjetivas. Más recientemente destacan los trabajos experimentales de Mc Crimonn (1968), referentes al contraste de la teoría de Savage.

economic behavior ('Teoría de juegos y comportamiento económico'), junto a Oskar Morgenstern, en 1944. También concibió el concepto de "MAD" (Mutually Assured Destruction o 'destrucción mutua asegurada'), concepto que dominó la estrategia nuclear estadounidense durante los tiempos de la postguerra. Fue pionero de la computadora digital moderna y de la aplicación de la teoría operadora a la mecánica cuántica. Trabajó con Eckert y Mauchly en la Universidad de Pennsylvania, donde publicó un artículo acerca del almacenamiento de programas. El concepto de programa almacenado permitió la lectura de un programa dentro de la memoria de la computadora, y después la ejecución de las instrucciones del mismo sin tener que volverlas a escribir. La primera computadora en usar el citado concepto fue la llamada EDVAC (*Electronic Discrete-Variable Automatic Computer*, es decir 'computadora automática electrónica de variable discreta'), desarrollada por Von Newmann, Eckert y Mauchly. Los programas almacenados dieron a las computadoras flexibilidad y confiabilidad, haciéndolas más rápidas y menos sujetas a errores que los programas mecánicos. Otra de sus inquietudes fue la capacidad de las máquinas de autorreplicarse, lo que le llevó al concepto de lo que ahora llamamos máquinas de Von Newmann o autómatas celulares.

[11] Nacido en Gorlitz, Silesia, en 1902, estudia en las universidades de Viena, Harvard y Nueva York. Miembro de la Escuela Austriaca y avezado matemático, participa en los famosos "Coloquios de Viena" organizados por Karl Menger (hijo de Carl Menger) que pusieron en contacto científicos de diversas disciplinas, de cuya sinergia se sabe que surgieron multitud de nuevas ideas e incluso nuevos campos científicos. Emigra a Estados Unidos durante la segunda guerra mundial, ejerciendo la docencia en Princeton. Publica en 1944, conjuntamente con John von Newmann, la "Theory of Games and Economic Behavior". Falleció en el año 1976.

Exponemos, a continuación, algunos comentarios acerca de los puntos de vista en la Inferencia Estadística estrechamente relacionados con los conceptos de probabilidad aquí expuestos.

Un concepto que está presente en los modos de hacer de Fisher, Pearson y Neyman[12] (precursores de los trabajos de A. Wald) es la probabilidad fiducial. En esencia, este concepto consiste en cambiar los papeles de las proposiciones condicionadora y condicionada, atribuyendo al nuevo suceso una probabilidad proporcional a la que tenía el suceso de la partida. Esto viene a ser lo mismo que el conocido teorema de Bayes[13], que expondremos con amplitud en el capítulo 9, pero con la fundamental diferencia de que no hay ninguna probabilidad «a priori» en o para el segundo suceso. Este concepto de probabilidad resulta, en apariencia, poco admitido.

En muchas cuestiones, nos encontramos con que se manejan probabilidades «a priori»; estas probabilidades «a priori» sólo pueden tener un origen subjetivo o fiducial, bien entendido que a la famosa regla de la equiprobabilidad de Laplace (ver capítulo 9) puede calificársele conceptualmente como “probabilidad subjetiva”, pues tiene todo el carácter de ésta, por muy evidente que se presente la situación y muy clásico que sea el concepto.

Por otra parte, si la probabilidad «a priori» no tiene su origen en la probabilidad subjetiva, ha debido de ser inferida de una serie de experimentos; pero si lanzamos un dado 12.000 veces, y de ellas exactamente 2.000 han dado un uno por resultado, de este hecho a decir que la probabilidad de obtener uno es 1/6 media una discontinuidad insalvable sin nuevos conceptos. Precisamente, la probabilidad fiducial es el presente que nos permite pasar de una cosa a otra, pues con tanta más convicción aceptamos que es cierto que la probabilidad de obtener uno es 1/6 o muy próxima, cuanto mayor es la probabilidad del suceso que ha resultado, considerando que 1/6 es la probabilidad buscada.

La probabilidad fiducial es aceptada, de hecho, en muchas ocasiones en que teóricamente no se aceptó. Esto se hace por el simple procedimiento de cambiar

[12] Jerzy Neyman (16 de abril,1894, en Moldavia – 5 de agosto, 1981, California) fue un matemático polaco. Fue el segundo de cuatro hijos de Czesław Spława-Neyman y Kazimiera Lutosławska. Publicó muchos libros relacionados a experimentos y estadísticas. Neyman ideó la forma en la cual la FDA testea los medicamentos en la actualidad.

[13] Thomas Bayes (Londres, Inglaterra, 1702 - Tunbridge Wells, 1761) fue un matemático británico. Su padre fue ministro presbiteriano. Posiblemente De Moivre fue su maestro particular, pues se sabe que por aquel entonces ejercía como profesor en Londres. Estudió el problema de la determinación de la probabilidad de las causas a través de los efectos observados. El famoso teorema que lleva su nombre se refiere a la probabilidad de un suceso condicionado por la ocurrencia de otro suceso. Bayes fue ordenado ministro presbiteriano. Sus restos descansan en el cementerio londinense de *Bunhill Fields*. La traducción de la inscripción en su tumba es: “La tumba de Bayes en Bunhill Fields Reverendo Thomas Bayes. Hijo de los conocidos Joshua y Ann Bayes. 7 de abril de 1761”. En reconocimiento al importante trabajo que realizó Thomas Bayes en materia de probabilidades, su tumba fue restaurada en 1969 con donativos realizados por estadísticos de todo el mundo. Miembro de la *Royal Society* desde 1742, Bayes fue uno de los primeros en utilizar la probabilidad inductivamente y establecer una base matemática para la inferencia probabilística.

la palabra «probabilidad» por «confianza», pero la cuestión es más profunda para que acepte un puro y simple arreglo de lenguaje.

Exponiendo más convicciones, nos atrevemos a decir que la necesidad de aceptar los principios que aquí se tratan y otros equivalentes, se impone con una clara evidencia como la necesidad de aceptar que nuestras percepciones sensoriales tienen algo que ver con el fondo físico que nos rodea.

Aún más, mantenemos la opinión de que la probabilidad fiducial y la subjetiva tienen una naturaleza íntimamente relacionada, pues la diferencia existente entre ambas estriba en la magnitud del campo de aplicación. No parece disparatado suponer que si se dispone de un número suficientemente elevado de datos o pruebas (cuando $n \to \infty$), las conclusiones inferidas por un subjetivista y un frecuentista diferirán muy poco. Si los datos de partida no fueran lo bastante numerosos, las discrepancias se agrandarían. En el caso de carecer de datos o estos ser muy escasos, el subjetivista, seguramente, podría obtener algún tipo de conclusión, pero el frecuentista se abstendría racionalmente de hacerlo.

Fisher, en una ocasión, al analizar probabilidad fiducial y la que se obtiene aplicando el teorema de Bayes, dice que ambas han de tener diferencias de tipo lógico. Creo, sin embargo, que las diferencias no son otras que la información de partida, pues es totalmente aceptable que en un caso concreto no exista distribución «a priori» que diese origen a una distribución «a posteriori», coincidente con la correspondiente fiducial.

Otro problema bien distinto se plantea al considerar el campo de aplicación de los distintos conceptos aquí expuestos, pero esto es más propio de la Inferencia Estadística, de aquí que todo concepto de probabilidad lleva consigo su inferencia. Este aspecto ligado con los distintos conceptos de probabilidad puede verse en D. J. White (1970), al referirse a las tres formas de inferencia considerada por G. Tintner.

Digamos, en fin, que las teorías subjetivistas y personalistas de la probabilidad se han desarrollado en los últimos cincuenta años sin que hayan obtenido un interés práctico hasta la reciente aparición de los métodos bayesianos de estimación. La Matemática Moderna ha facilitado el desarrollo conjunto de las teorías frecuencialistas y subjetivistas con el estudio del *Álgebra de Boole de los sucesos aleatorios o estocásticos*, que actualmente es el camino más utilizado para fundamentar el concepto de probabilidad o la Estadística Matemática.

5. Determinación e indeterminación de un sistema psicológico

Según su grado de indeterminación, los sistemas pueden ser: *determinados; determinados en probabilidad; parcialmente determinados; indeterminados*. A saber, veamos respectivamente sus definiciones:

- **S. determinado**: es aquel en que se pueden describir todos sus estados. Muchos sistemas no son determinados, ni importa conocer todas las variables de un S. psicológico. En forma más operativa, diremos que un S. es determinado en tanto que se pueda escribir la lista de los estados de las entradas (exteriores y de acción), y de las salidas y de las variables esenciales o criterios.

Un S. determinado queda definido cuando se conoce la ley de transformación de entradas en salidas (la problemática derivada de esta cuestión se plantea en epígrafes posteriores) para cada instante. Por comodidad, podemos tomar las V.C. entre las V.S., aunque no sea necesario.

Veamos, a continuación, un ejemplo de S. psicológico determinado. Los estados de las entradas exteriores pueden ser, solamente:

$$E_1, E_2, E_3, E_4 \quad ;$$

Y los estados de salida correspondientes, son:

S_1, S_2, S_3, S_4; Con ello, se tiene:

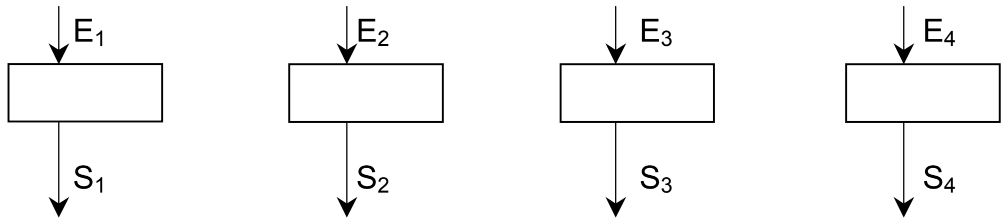


FIG. 3.3. Entradas y salidas de un sistema psicológico.

La descripción del S. (por ser determinado), sería la siguiente:

$$E_1 \rightarrow S_1 \quad ; \quad E_2 \rightarrow S_2 \quad ; \quad E_3 \rightarrow S_3 \quad ; \quad E_4 \rightarrow S_4 \quad ;$$

Pero si intervienen variables de acción, como por ejemplo: A_1, A_2, A_3, decir que el S. es determinado significa que se sabe que la actuación simultánea de A_3 con E_4 origina una salida S_{34}, etc. El S. quedará definido entonces por el cuadro o tabla de doble entrada siguiente (que también podemos expresar en forma matricial rectangular):

	VE			
VA	E_1	E_2	E_3	E_4
A_1	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}
A_2	S_{21}	S_{22}	S_{23}	S_{24}
A_3	S_{31}	S_{32}	S_{33}	S_{34}

Es evidente que el S. gestor (psicólogo) puede elegir la variable de acción precisa con vistas a que las variables esenciales (incluidas en las salidas) tomen un valor prefijado entre los posibles valores S_{ik}. Así, en base a la matriz anterior, se sabe que si el estado del S., a la hora t_0, será $\rightarrow E_3$ (t_0), y se desea obtener $S_{13}(t_0)$, la variable de acción deberá ser A_1 (t_0).

Así mismo, la definición de S. determinado (información total) es válida para variables continuas y discontinuas o discretas.

- S. determinado en probabilidad: es todo aquél en que se conocen los estados de entrada y los estados de salida, pero no la correspondencia existente entre unos y otros. A falta del conocimiento de dicha correspondencia, se conoce la "*probabilidad subjetiva*" p_{ik} ("grado de creencia racional", desde el punto de vista de la terminología keynesiana, explicitada en el epígrafe anterior) de que al estado E_i de entrada le corresponde la salida S_k.

Veamos, *como ejemplo,* el S. siguiente:

V.E. $\rightarrow$ x (t) , y(t) , z(t) ;

Estados $\rightarrow$ $\begin{cases} E_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ E_2 = (x_2, y_2, z_2) \\ E_3 = (x_3, y_3, z_3) \\ E_4 = (x_4, y_4, z_4) \end{cases}$

V.S. $\rightarrow$ U (t) , V(t) ;

Estados $\rightarrow$ $\begin{cases} S_1 = (U_1, V_1) \\ S_2 = (U_2, V_2) \\ S_3 = (U_3, V_3) \end{cases}$

Probabilidades subjetivas:

	S_k		
E_i	S_1	S_2	S_3
E_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}
E_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}
E_3	P_{31}	P_{32}	P_{33}
E_4	P_{41}	P_{42}	P_{43}

Como es natural, puesto que el estado E_i debe corresponder una de las 3 salidas, deberá cumplirse, por el principio de la probabilidad total, que:

$$\begin{cases} P_{11} + P_{12} + P_{13} = 1 = \sum P_{1i} \\ P_{21} + P_{22} + P_{23} = 1 = \sum P_{2i} \\ P_{31} + P_{32} + P_{33} = 1 = \sum P_{3i} \\ P_{41} + P_{42} + P_{43} = 1 = \sum P_{4i} \end{cases}$$

- S. parcialmente determinado: es un caso intermedio en el que se encuentran la mayoría de los sistemas psicológicos.

Una tarea importante consiste en reducir la indeterminación del S., es decir, "comprender lo que pasa". El mejor medio, para ello, es la "*modelización"*, es decir: un objeto que contesta a las preguntas que interesan respecto al S.

De hecho, en toda aplicación matemática a los estudios de los fenómenos reales se presenta un triple proceso, ya descrito en el anterior capítulo del presente libro, a saber:

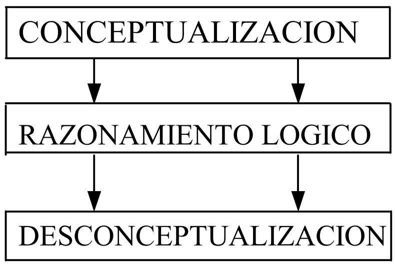


FIG. 3.4. Esquema de "modelización".

- S. indeterminado: es aquél en que nada se sabe acerca de la correspondencia entre los valores de las V.E. y las V.S. (se desconoce la función de transformación). Es el llamado problema de la "caja negra", "boîte noire" o "black box".

Veamos, por último, la definición de **Variedad de un S. Psicológico**, que es el número de estados diferentes que puede tener. La variedad de una caja negra representa la cantidad de información necesaria para pasar de un S. indeterminado a otro determinado.

6. Sistema controlado

Un sistema decimos que "está bajo control" cuando no se ignora cómo fijar sus objetivos y cómo lograrlos. Más concretamente, cuando se sabe:

a) *Seleccionar* las V.C. que representan objetivos (cualitativos y cuantitativos).
b) *Determinar* el intervalo de valores admisibles para estas variables.
c) *Seleccionar* las variables de acción.
d) *Fijar* los valores de estas variables que permiten "lograr" y "mantener" las V.C. en el intervalo admisible.
e) *Determinar con precisión dicho intervalo admisible.*

Si se trabaja con una perspectiva dinámica, el control debe actuar en paralelo a la evolución del sistema.

Veamos, a continuación, el proceso de **control de un S. psicológico determinado**, siguiendo el esquema clásico de J. Melèse:

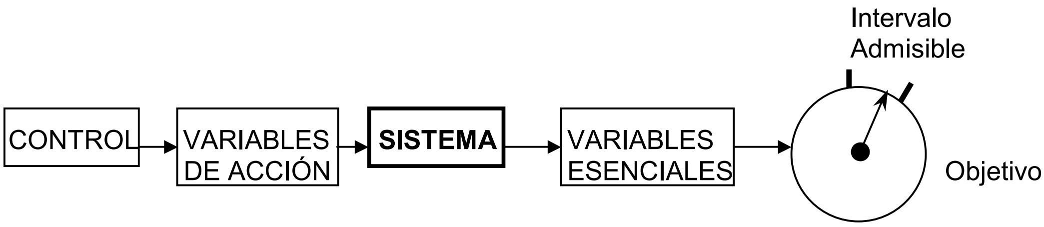


FIG. 3.5. Proceso de control de un S. psicológico determinado.

En un S. determinado, sin entradas exteriores, el control juega directamente sobre las V.A. Pero como siempre existen perturbaciones emanadas del S. "exterior" (entradas más o menos conocidas, con sus correspondientes efectos; entradas conocidas, pero no sus efectos, etc.) el control es insuficiente, ya que se desconoce qué V.A. nuevas se necesitan para afrontar con éxito unas entradas inesperadas y desconocidas.

7. Sistema regulado

La dificultad expresada anteriormente se palia con la introducción del elemento denominado "regulador", que recibe información del exterior acerca de las V.E. Este "regulador", en nuestro caso, podría estar constituido por un psicólogo especializado en las relaciones del individuo con el exterior. El nuevo esquema sería el siguiente:

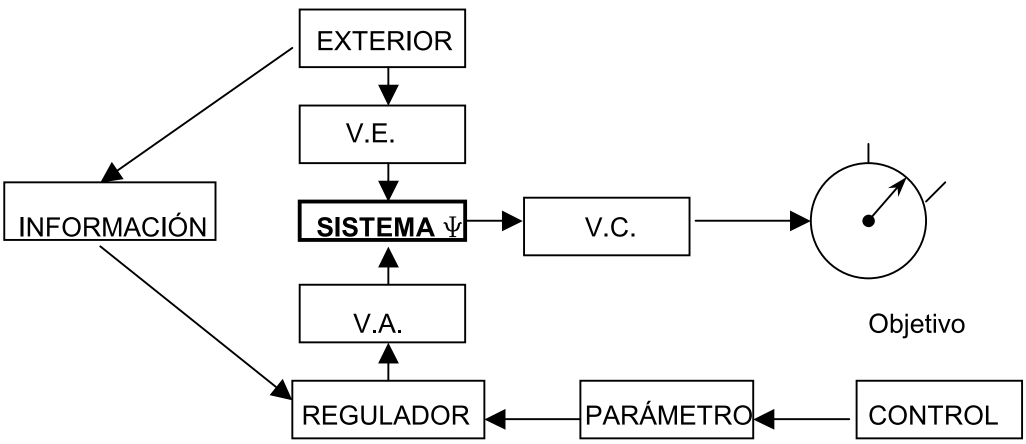


FIG. 3.6. Sistema psicológico regulado.

Se trataría, en definitiva, del control y regulación de un S. parcialmente determinado. Cabe, todavía, un peligro: que el "regulador" no supere las dificultades engendradas por las perturbaciones exteriores, llegándose así al esquema del "**S. ultra-estable de Ashby**[14]", que se diferencia del anterior:

a) Esencialmente, en que las V.C. reaccionan sobre el control o psicólogo experimentador.
b) Accidentalmente, en que la información del exterior llega al regulador a través del S. o individuo, y en que éste reacciona respecto al exterior.

El esquema pertinente es el siguiente:

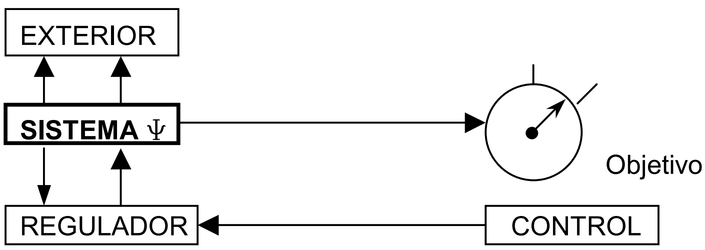


FIG. 3.7. Sistema ultraestable de Ashby.

Una variante importante de los S. reguladores son aquellos basados en el **feedback** (contra-reacción o retroalimentación), y que se expondrá con mayor detenimiento en posteriores epígrafes del presente libro. En este caso, se tiene:

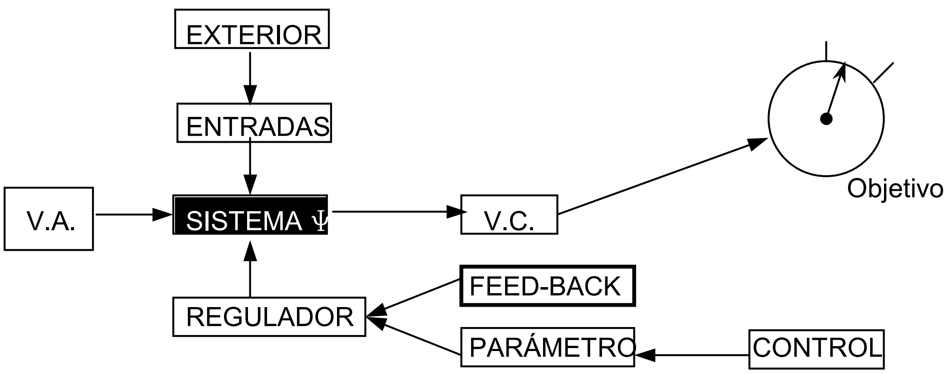


FIG. 3.8. Retroalimentación o "feedback".

[14] **William Ross Ashby** (1903 - 1972) fue un médico y neurólogo inglés, n. en Londres, que contribuyó decisivamente a la consolidación de la cibernética moderna y creó el primer homeostato (1951), dispositivo electrónico autorregulado por retroalimentación. Desde las especialidades de la neurología y la psiquiatría, ofreció la reproducción de la estructura y mecanismos de funcionamiento del cerebro humano en sus obras *Proyecto para un cerebro* (1952) e *Introducción a la cibernética* (1956). En su libro *Introducción a la cibernética*, Ashby realiza un acucioso análisis matemático-lógico, con muchos ejercicios resueltos, en los cuales muestra las estructuras básicas de control y retroalimentación. Para ello desarrolla conceptos como matrices de representación de estados, retroalimentación y transiciones de estado, entre otros.

8. Estabilidad de un sistema psicológico

En el contexto dinámico de la evolución de un S. psicológico, tienen lugar diversas transformaciones de los elementos que se interaccionan, con cadencias y ritmos distintos: en un instante dado, un elemento pasa de un estado a otro; ello induce, simultáneamente o con posterioridad, a modificar aquellos elementos conectados directamente con él. El S. se transforma entonces siguiendo una "**trayectoria**" en la que cada "**punto**" de la misma representa un estado.

En general, un S. psicológico puede encontrarse de diversos modos, a saber:

a) **Aislado** (caso muy teórico: isla desierta).
b) **Sometido a influencias exteriores regulares**: caso en que se estimula a un individuo de un modo constante.
c) **Sometido a influencias exteriores variables con el tiempo**: que bien podrán ser provocadas por el psicólogo experimentador (estímulos) o bien, por accidentales o coyunturales, no ser previsibles (perturbaciones).

Un elemento de un S. psicológico es **estable** (puede tratarse de una facultad, de un rasgo o de un factor de la personalidad, ...) cuando no cambia su estado a lo largo del tiempo. Este concepto resulta poco importante mientras el S. esté inmóvil (ningún elemento cambia de estado), pero resulta de gran interés cuando existen perturbaciones exteriores (o, de hecho, mientras dure el experimento psicológico).

Un S. es **estable** respecto a una categoría de perturbaciones si, después de éstas, el S. vuelve al estado inicial. Es. v.gr., el caso de un individuo que, al cabo de una serie estudiada de estímulos eléctricos que le aumenten, esporádicamente, su capacidad de trabajo, vuelve a la normalidad del principio.

¿Se puede demostrar que, probablemente, todo **S. psicológico aislado tiende a la estabilidad**?. Al parecer, cada uno de sus elementos selecciona una zona de estabilidad (subconjunto de sus estados posibles). Esto es: el individuo se adapta a la clase de perturbaciones habituales mediante la "**auto-organización**", que podrá ser buena o mala según el criterio psicológico dilucidador: buena respecto a la estabilidad emocional; mala respecto a la evolución de las aptitudes, etc.

Por otra parte, y a voluntad del psicólogo experimentador, pueden originarse S. psicológicos fuertemente perturbados: en ellos, las entradas cambian sin cesar y a gran ritmo, de forma que ningún elemento o subsistema encuentre una zona de estabilidad. Ello ocurre en aquellos casos en que el cambio y la improvisación son axioma de trabajo en el laboratorio conductista. En este caso, es muy difícil fijar objetivos y lograrlos.

Precisamente, el "*S. ultra-estable de Ashby*" tiene como objetivo evitar –o mejor aún: salvar– los dos escollos anteriores, es decir: el aislamiento ("*inmovilismo*") o el exceso de perturbación ("*nerviosismo*"). De este modo, queda garantizada la evolución del S. psicológico, preservándolo de ambas zonas extremas, a no ser que sea intención expresa del propio psicólogo experimentador el llevar a cabo una política de este tipo.

CAPÍTULO 4
Los sistemas psicológicos

1. Conceptualización previa

Veamos, previamente, algunos conceptos y definiciones relativas a los S. psicológicos, a saber:

1. **Estado del Sistema:** Es cualquier combinación lógicamente posible de valores de las variables del S. Así, en un S. de **n** variables, un estado es siempre un conjunto de valores, uno para cada variable.

2. **Historia de un Sistema:** Es cualquier secuencia lógicamente posible de estados del S., tal que hay un estado y sólo uno para cada instante de tiempo considerado. Es, en otras palabras, una secuencia temporal de estados que se extiende en un período de tiempo dado (finito o infinito).

3. **Extensión de un Sistema:** Es un conjunto entero de historias lógicamente posibles de un S. La extensión es la totalidad de los diferentes cursos de acción que, en forma concebible, pueden acontecer en el S.

4. **Información:** En relación a un S. dado, es el conocimiento relativo al comportamiento de las variables que constituyen el S., y estando representado por la ficha psicotécnica del individuo. Cualquier parte de conocimiento es información en este sentido si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

   a) <u>Que sea válido:</u> es decir, establecido como verdadero. Suponemos, pues, que existen y se pueden utilizar métodos para distinguir entre las proposiciones verdaderas y las falsas y que, en general, nuestra metodología de la ciencia es capaz de tratar cuestiones de este tipo. Una proposición cuya validez no puede ser establecida o desaprobada (sobre todo experimentalmente) no se considera como "información", en el sentido de que no constituye material confiable a propósito de la predicción y formación de la política a seguir.
   b) <u>Que se asignen probabilidades</u> a un suceso, como mínimo, del sistema bajo consideración. Se puede declarar que un suceso tenga probabilidad cero, probabilidad uno, o bien una probabilidad intermedia.
   c) <u>Que sus condiciones de validez sean plenamente expuestas</u>; es decir: que sean válidas en cualquier posible circunstancia.

5. **Proposición sintética:** Una proposición de este tipo representa información hallada empíricamente, esto es, mediante fuentes primarias de datos. Representa el caso genuino de obtención de información en un laboratorio conductista.

6. **Observación:** Realizada por el psicólogo experimentador, presenta información acerca del estado del individuo o S. en un momento dado y en un intervalo de tiempo. Puede especificar el estado existente, o bien puede dar –aunque sólo fragmentariamente– información acerca de ello.

7. **Ley estática:** Se refiere a la coexistencia, en un tiempo dado, de los valores de las variables del S. Asigna probabilidades a ciertos estados y, por tanto, a los sucesos definidos por estos mismos estados.

8. **Ley dinámica:** Se refiere a la sucesión, en el tiempo, de valores de las variables del S. Como cualquier materia de información, asigna probabilidades a un suceso –como mínimo– del S., estando basadas, dichas probabilidades, en secuencias de valores de las variables.

9. **Espacio del sistema:** Este concepto, relativo a un cuerpo dado de información, representa la extensión del S. junto con las probabilidades conocidas de las varias historias y sucesos.

10. **Variable exógena:** Es, con respecto al espacio de un S. psicológico dado, una variable del mismo cuya distribución de probabilidad de los valores (en cada momento) **no** es deducible del conocimiento de la distribución de los valores de todas las restantes variables. Se trata, pues, de una variable cuyo comportamiento **no** está plenamente controlado por las otras variables del S. psicológico.

11. **Variable endógena:** Es, con respecto al espacio de un S. psicológico dado, una variable del mismo cuya distribución de probabilidad de los valores (en cada momento) **sí** resulta deducible del conocimiento de la distribución de los valores de las restantes variables. Se trata, pues, de una variable cuyo comportamiento **sí** está plenamente controlado por las restantes variables del S. psicológico.

2. Existencia de los sistemas psicológicos

Aunque existe algún otro significado etimológico o semántico, hay una concordancia casi general entre los tratadistas en considerar un S. como **un conjunto de elementos interrelacionados entre los cuales existe cierta coherencia y unidad de propósito**. El concepto, pues, no parece referirse a algo que existe en la naturaleza como tal, sino que se trata de un acto mental mediante el cual se selecciona, de entre un número infinito de relaciones entre cosas, un conjunto de elementos cuyas relaciones indican coherencia y unidad de propósito, y que permiten la interpretación de hechos que, de otra manera, semejarían una simple sucesión de sucesos arbitrarios.

La introducción de este nuevo punto de vista puede aplicarse, perfectamente, al estudio de los objetos animados (S. psicológico: individuo o conjunto de individuos), permitiendo profundizar provechosamente en el conocimiento de dichos objetos, y contando con el decisivo apoyo de la cibernética (que es una rama científica cuyo fin no es estudiar objetos hasta ahora desconocidos, sino tratarlos -los conocidos por otras ciencias- desde el punto de vista en que los S. se definen en dichos objetos).

En principio, podemos sentirnos impotentes –caso de la Psicología– para tratar tantas variables al mismo tiempo; pero en mi opinión, también es un hecho innegable el no haberse dado suficiente importancia, hasta el momento, al concepto múltiple de relación, estructura y coyuntura.

Siendo –como parece ser– un acto mental el detectar la existencia de un sistema, se presenta el problema de cuándo será conveniente tratar los individuos o sus comunidades como sistemas. **Resulta obvio que a un hombre o a una mujer cuesta poco trabajo identificarlo/a como sistema, sucediendo lo mismo con un conjunto de individuos o incluso con una determinada sociedad. Las relaciones entre los humanos son tan evidentes, que es bien sencillo adivinar su coherencia y unidad de propósito.** Por esta sencilla razón, no hemos dudado en plantearnos toda la problemática derivada de aquella identificación, con la seguridad científica de la utilidad que, en la Psicología, en nuestro caso, supone la apertura de nuevos caminos y perspectivas de conocimiento.

3. Concepto y formalización de un sistema psicológico

Pese a las definiciones, concepciones y diversas teorías expresadas en anteriores epígrafes del presente libro, quisiéramos poder arrancar de nuevo –a ser posible– con una terminología que se ajustara mejor a esta realidad indiscutible de los S. psicológicos. Vamos, pues, a proceder a ello.

El concepto de S. psicológico resulta, a nuestro entender, bastante fácil de formalizar. En efecto, si tenemos un conjunto de elementos: $\{a_1, a_2,...,a_i, a_j,..., a_n\}$ y un conjunto de relaciones: $\mathbf{r}_{ij}$ / $\forall(i\ ,\ j) \in\{1,\ 2,\ ...,\ n\}^2$, el sistema S vendrá definido por un conjunto formado por el conjunto de elementos: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, y el conjunto $\{R\}$ de relaciones. Es decir: $S = \{A, R\}$. Al conjunto **A** se le llama *"universo del sistema"*, y al conjunto **R** *"característica del sistema"*.

La parte fundamental del S. la componen sus elementos y su estructura. Los elementos constituyen las unidades indivisibles cuya estructura no se quiere o no se puede resolver. Lógicamente, para el estudio de los S. psicológicos, interesa dejar el S. reducido al mínimo número de elementos posible, puesto que limitamos de este modo el nivel de resolución, sobre todo si la estructura de los primitivos elementos del S. psicológico tiene importancia para explicar su comportamiento al experimentador.

Respecto a la estructura, no debe confundirse con lo que hemos denominado "característica del sistema", constituida por el conjunto {R} anteriormente definido. La relación $\mathbf{r_{ij}}$ define la dependencia del estímulo de $\mathbf{a_j}$ de las respuestas del elemento $\mathbf{a_i}$. Si $r_{ij} \neq 0$, quiere decir que existe dicha dependencia, pero ésta no debe ser necesariamente de tipo directo entre ambos elementos, sino que puede realizarse a través de elementos intermedios.

Los elementos de {A} van provistos de un subíndice para distinguirlos unos de otros. De igual forma, los estímulos que recibe cada elemento de los demás se denotan por: $v_1, v_2, ..., v_l$ ($\forall\ l \geq 1$), y el *estímulo total* por el vector: $\mathbf{v}$ $(v_1, v_2, ..., v_l)$, representable en un espacio **l**-dimensional.

Las respuestas de los elementos vendrán dadas por las coordenadas o componentes: $w_1, w_2, ..., w_m$ ($\forall\ m \geq 1$), y la *respuesta total* por el vector: $\mathbf{w}$ $(w_1, w_2, ..., w_m)$, representable teóricamente en un espacio **m**-dimensional.

Los estímulos y las respuestas están conectados por *funciones de transformación*, de la forma: $w_i = T_i\ (v_i)$, siendo: $v_i = (v_{1i}, v_{2i}, ... , v_{ni})$, funciones que nos indican las relaciones directas existentes entre los elementos del S. psicológico.

Las modalidades de conexiones fundamentales entre los elementos $\boldsymbol{a_i}$ *y* $\boldsymbol{a_j}$ *son las siguientes:*

1. <u>En serie</u>:

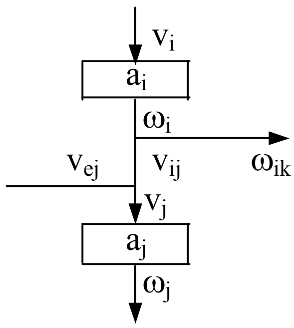


FIG. 4.1. Conexión en serie.

Puede verse que el *input* v_j de a_j depende de los *inputs* parciales que recibe de los restantes elementos. En la conexión entre a_i y a_j, *pueden darse hasta cuatro casos diferentes*, a saber:

a) $v_{ij} \neq w_i \quad \Lambda \quad v_{ij} \neq v_j$
b) $v_{ij} = w_i \quad \Lambda \quad v_{ij} \neq v_j$
c) $v_{ij} \neq w_i \quad \Lambda \quad v_{ij} = v_j$
d) $v_{ij} = w_i \quad \Lambda \quad v_{ij} = v_j$

2. <u>En paralelo</u>:

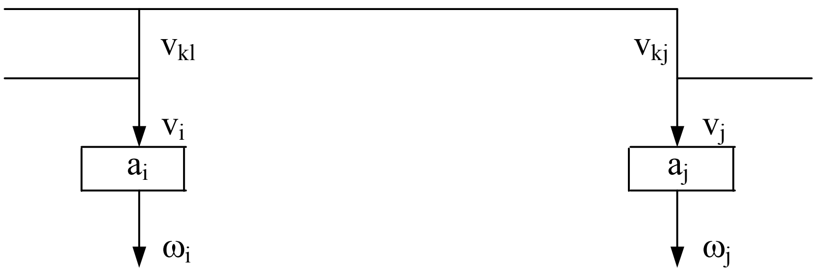


FIG. 4.2. Conexión en paralelo.

Aquí, se pueden presentar dos casos bien diferenciados:

a) Conexión equilibrada ..... $v_{kl} = v_{kj}$
b) Conexión desequilibrada ..... $v_{kl} \neq v_{kj}$

3. <u>En "feedback"</u> (con realimentación):

Esta conexión se refiere a un solo elemento, y el vector v_i (*input* o estímulo) tiene una parte común con el vector w_i (*output* o respuesta) del elemento a_i.

Su esquema correspondiente es el siguiente:

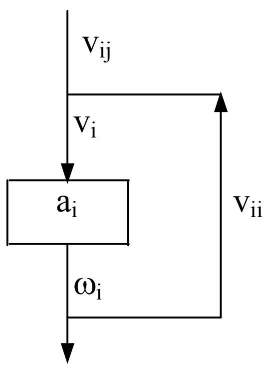


FIG. 4.3. Conexión con realimentación.

4. Importancia de las conexiones en nuestro estudio

Veamos que el "*feedback*" es un fenómeno que ya habíamos contemplado en ocasiones anteriores, y que adquiere especial significación en el estudio de los S. psicológicos.

Con gran frecuencia, psicólogos y pedagogos recurren casi inevitablemente al ejemplo del "feedback" –aunque omitiendo su exposición científica– para explicar sus tesis sobre temas diversos.

El "feedback", como ya hemos expuesto, es un circuito cerrado de retroalimentación, o corrección, en el que se produce un proceso de control automático (los ordenadores electrónicos experimentan, en definitiva, un proceso de "feedback").

Pues bien, las escuelas pedagógicas, como decimos, consideran de una o otra forma -y no sin razón- al organismo humano (en nuestro caso: al S. psicológico) como un "feedback" con una dinámica similar a la expuesta. Algunos, como los psicólogos rusos seguidores de *Pavlov* (escuela reflexológica) pondrán el acento en el estímulo o en la entrada de la información, manipulando los estímulos que recibe el sujeto o sistema psicológico. Otros, como el americano *Skinner*, centrarán su interés en la salida o "conducta" del "feedback", estimulando positiva o negativamente a la misma, para que aumenten o disminuyan las respuestas observadas. Finalmente, los psicólogos cognitivos o cognoscitivos, los psicoanalistas, los neurólogos y los pertenecientes a la "escuela de modelos matemáticos", intentarán estudiar desde diversos ángulos los secretos de esa conexión, que nos ha servido de modelo para representar al S. psicológico.

De cualquier manera, y a través de todos los modelos que la Teoría de Sistemas pone al alcance del psicólogo, se vislumbra un hecho innegable: *el estudio científico de la conducta humana y, por tanto, su control y predicción, empiezan a ser posibles en la actualidad*. La construcción de una sociedad mejor debe basarse en una auscultación auténticamente científica y permanente de la realidad social y de las necesidades individuales y colectivas, al margen de supuestos filosóficos, ideológicos o introspectivos, sean éstos del tipo que sean.

Por otra parte, cabe ampliar el estudio en la investigación de la conducta entre el ser humano y los otros humanos que se comunican con él (los S. psicológicos entre sí), bien ya sea de forma singular, o bien mediante el estudio de las relaciones del hombre con el grupo, con lo que entraríamos en el terreno de la denominada *dinámica de grupos*, esto es, en la teoría de cómo se pueden condicionar entre sí las conductas de los miembros del grupo, y de cómo se reorganiza la estructura del grupo y la personalidad de cada uno de sus miembros en función de las experiencias que proporcionan esta relación.

5. Acoplamiento entre los elementos de un sistema psicológico

En determinado S. reducido, necesariamente se cumplirá que:

$$v_{ii} \neq w_i \neq v_i$$

pues si sucediera de otra forma, el elemento a_i no se podría conectar a los restantes elementos del S. Por supuesto, la conexión entre elementos puede ser combinación de las distintas clases de conexiones y adquirir, en su consecuencia, una gran variedad de formas.

*En general, la conexión entre los elementos **a_i** y **a_j** de un sistema S. se puede expresar por medio de una matriz algebraica, que posee las siguientes propiedades*:

1 – Es cuadrada.
2 – Tiene : $\begin{cases} m_i \text{ filas y columnas si} \rightarrow m_i \geq l_j & \text{, y} \\ l_i \text{ filas y columnas si} \rightarrow l_j \geq m_i & \text{, respectivamente.} \end{cases}$

3 – Si el *output* **s**-ésimo parcial de un elemento a_i está conectado con el *input* **t**-ésimo parcial del elemento a_j, entonces, el elemento que pertenece a la fila **s** y a la columna **t** de la matriz, tiene el valor **l**. Por el contrario, si no hay conexión ninguna, le asignamos el valor **0**. Estamos, pues, trabajando en un sistema binario o dicotómico.

Todo S. psicológico tiene su **entorno** o medio que rodea al S. y que no se incluye en él (sistema complementario). Teóricamente, el entorno sería todo lo que no se incluye en el S., o sea, el resto del mundo; sin embargo, en la práctica, se puede hablar de "entorno substancial" cuando, de hecho, lo que interesa es un número definido de relaciones entre el S. y su entorno. La naturaleza estricta de estas relaciones depende, en general, de las propiedades del S., así como de la forma en que el entorno actúa sobre el S. Precisamente, a los efectos del entorno sobre el S. psicológico se les suele denominar –como se sabe– "*estímulos*" o "*impulsos*", mientras que a los efectos del S. sobre el entorno se les denomina "*respuestas*".

De hecho, en la concepción melesiana de los sistemas que venimos manejando, dicho "entorno" equivaldría al sistema exterior; los "estímulos" o "impulsos" serían las "variables de entrada" (VE) y las "respuestas" las "variables de salida" (VS).

El siguiente *ejemplo gráfico*, referido a la conexión entre los elementos $\{a_1, a_2, a_3\} \in S$ y $a_0 \in \varepsilon$ (entorno), ilustra bien a las claras lo expresado anteriormente:

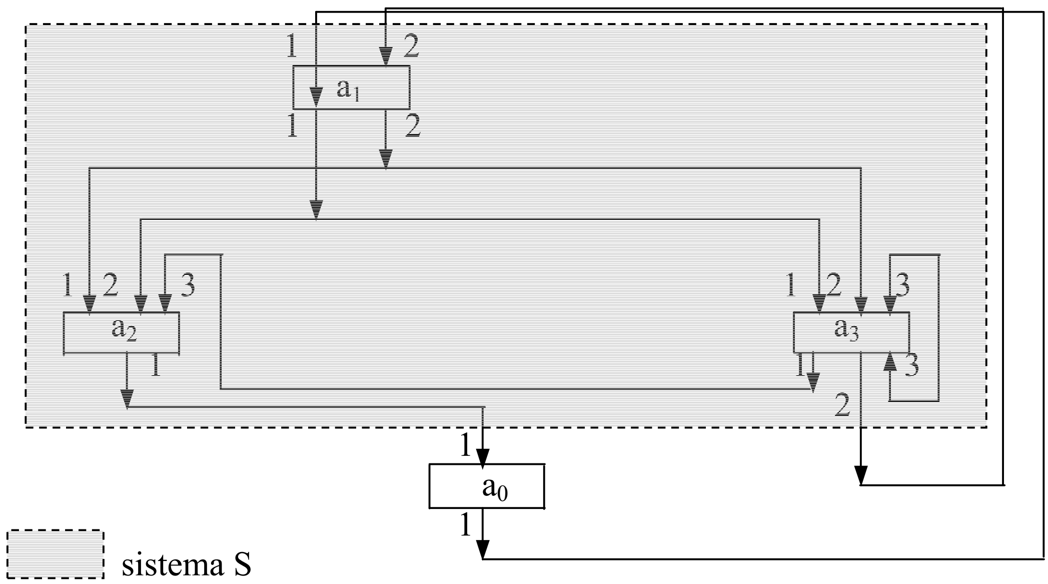


FIG. 4.4. Conexión entre el sistema psicológico y su entorno.

Las matrices resultantes para dicho ejemplo de la figura anterior son las siguientes:

$$w_{00} = [0] \; ; \; w_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; w_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; w_{03} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; w_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; w_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; w_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_{20} = [1] \; ; \; w_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; w_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; w_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_{30} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; w_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; w_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; w_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si cualquiera de estas matrices resultantes contiene sólo ceros, se le llama "matriz nula" y se denomina: $w_{ij} = 0$. A cualquier elemento a_{ij} se le llama "*elemento input*" si $w_{oi} \neq 0$; "*elemento output*" si $w_{io} \neq 0$; e "*intermediario*" si $w_{oi} = 0 \wedge w_{io} = 0$.

6. Estructura del sistema psicológico

La estructura del S. psicológico puede ser descrita por una matriz cuadrada de dimensiones n × n, del tipo:

$$[W] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \ldots\ldots & w_{0n} \\ w_{10} & w_{11} & \ldots\ldots & w_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ w_{n0} & w_{n1} & \ldots\ldots & w_{nn} \end{bmatrix}$$

a la que se denomina “matriz estructural del sistema S.”.

Substituyendo cada elemento w_{ij} de dicha matriz [W] por 0 ó 1, según los casos (la existencia de una sola conexión ya implica un valor: $w_{ij}=1$), resulta una “matriz tosca”, que indica los acoplamientos existentes para cada par de elementos, sin tener en cuenta las peculiaridades de las conexiones individuales. Así, por ejemplo, en el apartado anterior, obtendríamos la siguiente matriz tosca:

$$[W_h] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$, siendo su traza: tr $[W_h] = 1$, y el valor de su determinante: $|\ W_h\ | = 0$, luego se trata de una matriz singular (no invertible).

7. Conducta del sistema psicológico

En principio, entenderemos por “*conducta de un S. psicológico*” la dependencia de las respuestas de los estímulos, y dicha conducta queda perfectamente determinada cuando los estímulos y las respuestas también lo están.

Aquí cabe distinguir entre S. psicológicos “*cerrados*” y “*abiertos*”. En los primeros, el comportamiento depende del universo del S. y de su característica, y ésta, a su vez, de la estructura del S., entendida como el conjunto de las conexiones directas entre los diversos elementos que lo componen. No hay aquí ni *inputs* (estímulos que procedan del entorno) ni *outputs* (respuestas que emanan del S. y que influyen en su entorno o sistema exterior).

En los segundos (“*abiertos*”), las respuestas del S. no sólo dependen de las características del mismo y de su estructura, sino también de los *inputs* que proceden del entorno, lo cual influye sobre las respuestas.

La dependencia entre estímulos y respuestas puede ser enormemente complicada. Desde un único estímulo y una única respuesta, hasta una multiplicidad de estímulos y respuestas parciales, con una amplia variedad de funciones de transformación, se ve que la complejidad puede llegar a ser considerable.

Formalmente, llamando: x_1, x_2, ... , x_p, a los estímulos parciales, éstos pueden ser considerados como componentes del vector p–dimensional:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p),$$

llamado, simplemente, "*estímulo*" (input). De forma similar, si las respuestas parciales son: y_1, y_2, ... , y_q, al vector q-dimensional: $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_q)$ se le llama "*respuesta*" (output). Pues bien, la conducta del S. psicológico puede expresarse por una *función de transformación* de la forma:

$$\boxed{\vec{y} = T(\vec{x})} \quad ;$$

en la que cada estímulo puede estar asociado a una respuesta particular, o bien en la que por lo menos un estímulo particular está asociado a más de una respuesta. En este último caso, que puede revestir gran interés para la resolución de los problemas psicológicos, *existen dos posibilidades distintas*:

1 – Comportamiento secuencial: en la que distintas respuestas del S. al mismo estímulo pertenecen a diferentes, pero adecuadamente definidas, secuencias de estímulos que precedieron al estímulo dado.

2 – Comportamiento estadístico: en la que la función de transformación sólo puede ser determinada estadísticamente, estableciéndose una correlación psicológica o *"matriz de la transformación"* que interprete psicológicamente una operación algebraica o geométrica (ley de composición externa, giro, traslación, homotecia, inversión, proyección en el espacio, ...).

En un S. psicológico de comportamiento secuencial (primer caso), la respuesta no sólo depende del estímulo instantáneo, sino también de los estímulos precedentes. Conociendo el estado del S. y el estímulo instantáneo, se puede determinar la respuesta. Normalmente si aplicamos al sistema S., en el tiempo **t**, un estímulo cualquiera, el comportamiento del S. vendrá determinado por:

$$\begin{cases} Y_t = f(x_t, s_t) \longrightarrow \text{en el tiempo } \underline{t}\,; \\ S_{t+\Delta t} = g(x_t, s_t) \longrightarrow \text{en el tiempo } \underline{t+\Delta t}\,; \end{cases}$$

siendo $\underline{f}$ y $\underline{g}$ funciones–vectores. Por otra parte, si para cada $\underline{x}$ y $\underline{s}$, se tiene que: $S_{t+\Delta t} = S_t$, se dice que el S. es "**estable**", y permanecerá en este estado hasta que el estímulo **x** cambie. Por el contrario, si: $S_{t+\Delta t} \neq S_t$, el S. es "**inestable**", prestándose a continuas variaciones de conducta.

8. Transformaciones de un sistema psicológico

Recordemos que un S. de gestión (psicólogo experimentador) asegura el correcto pilotaje de un S. psicológico (sistema físico); es decir: guía su evolución hacia la consecución de ciertos objetivos (terapéuticos, sociológicos) cuya bondad no debe parecer, en principio, discutible. Tanto uno como otro sistema, se descomponen en subsistemas (que son subconjuntos del mismo que, a su vez, tienen todas las propiedades de sistema), a saber:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \text{ ; } \forall S_i \subset S \text{ ;}$$

Se cumple que: $\cup S_i = S$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Finalmente, veamos que dichos subsistemas S_i se descomponen, así mismo, en "*bloques interconectados*", en los cuales tienen lugar las transformaciones: concretamente, los "*bloques de pilotaje*" (S. gestor) regulan y/o controlan las transformaciones que tienen lugar en los "*bloques del S. psicológico*".

Pero, cabe preguntarse ¿cómo se operan dicha regulación y control?: por medio de "*programas*" y de "*decisiones*", o bien por ambas cosas a la vez. Precisamente, de la relación que se establece entre ambos medios, dependen las propiedades de los S. psicológicos, a saber: capacidad de control, adaptación, aprendizaje, fiabilidad, ...

Desde el punto de vista del control que sobre un S. psicológico ejerce el experimentador, el carácter esencial de las transformaciones en dicho S. es su "*grado de determinación*", al que nos hemos referido en el capítulo anterior. En efecto, en una transformación determinada (S. determinado, predictible o predecible) el valor de las salidas puede ser "previsto" a partir del valor de las V.E., cualquiera que sea la rapidez de la evolución. Puede resultar costoso, pero al menos es teóricamente posible establecer el control.

No obstante, ocurre exactamente lo contrario en un S. psicológico no determinado. Por todo ello, resulta vital en un S. psicológico, a mi juicio, procurar:

a) **Acrecentar el grado de determinación**, a través de la modelización.
b) **Localizar la indeterminación,** para combatirla eficazmente con la regulación.

Hay que tener en cuenta que la indeterminación del S. psicológico se traduce en el hecho de que el psicólogo experimentador no puede establecer una correspondencia completa entre los estados de entrada y de salida. O dicho de otro modo: no puede predecir qué transformación va a aparecer.

Esquemáticamente, el *origen de las indeterminaciones* reside en las siguientes causas:

a) *Se ignora la existencia de ciertas entradas.*

b) *Se ignora la consistencia de ciertas entradas*.

c) *Se ignora la existencia de ciertas salidas* (será un caso poco frecuente, y que podría no ser grave sino fuera porque ello implica, de rechazo, la ignorancia de los efectos inducidos).

d) *Se ignora la correspondencia existente entre los estados de entrada y de salida* (el S. psicológico se presenta como "black-box"). Existe falta de modelización que, por definición, debe explicitar la correspondencia entre las entradas y las salidas del S. psicológico.

Normalmente, en un *S. psicológico descompuesto en sub-sistemas o bloques*, ocurre que:

a) *Los bloques determinados corresponden, casi siempre, a transformaciones físicas externas* (movimientos, sonrojos, palidez del rostro,...).

b) *Los bloques indeterminados corresponden a intervenciones humanas fortuitas, o a algún fenómeno físico poco conocido por el experimentador*.

c) *Los bloques parcialmente determinados corresponden a otros procesos.* En ellos debe hacerse un esfuerzo relevante de modelización a fin de acrecentar el grado de determinación.

9. Tipos de problemas y niveles de resolución

Como ya se ha indicado anteriormente, *un S. psicológico se caracteriza por su estructura y por su comportamiento*. La relación entre estas dos propiedades puede expresarse de la siguiente forma:

a) A una cierta estructura le corresponde un determinado tipo de comportamiento.

b) A una cierta clase de estructuras les corresponde un determinado tipo de comportamiento.

Por otra parte, los problemas relativos a los S. psicológicos pueden clasificarse de la siguiente manera:

1 – Se conoce la estructura del S. psicológico ("ANÁLISIS"): Su comportamiento debe ser determinado sobre la base de la estructura conocida. Es el problema más simple de los dos que pueden comúnmente plantearse, y comporta:

a) *Conocer el comportamiento de los elementos del S.*, es decir, la transformación para todos los valores de $i \in \{1,2,...,n\}$.

b) *Conocer los acoplamientos entre todos los pares de elementos, incluyendo el entorno si el S. es abierto* (caso general de los S. psicológicos). Es decir: conocer todas las matrices de V_{ij} para todos los valores de $i \in \{1,2,...,n\}$.

Si consideramos el entorno del sistema S. del ejemplo gráfico del epígrafe anterior 5 como un elemento separado, y lo denominamos por a_0, tendremos:

$$v_o = \mathbf{y} \; ; \; w_o = \mathbf{x}$$

siendo **x** el estímulo e **y** la respuesta del sistema S. El objeto del análisis es determinar la relación: $v_0 = T(w_0)$, que es idéntica a la relación anteriormente expresada: $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$;

Para lograr este objetivo debe usarse la relación:

$$w_i = T_i(v_i),$$

que es conocida para todos los valores de $i \wedge j \,/\, \forall i, j = 1,2,...,n$.

Las matrices W_{ij} nos permiten expresar los vectores *input* de los elementos individuales sobre la base de los componentes *output* de los otros tres elementos. En esto confiamos en el conocimiento de los vectores w_0 del elemento a_0.

2 – No se conoce la estructura del S. psicológico ("BLACK-BOX"): En este caso, dicha estructura no puede ser determinada directamente. El problema consiste en descubrir el comportamiento del S., y, con su ayuda, si es posible, adivinar su estructura.

El problema de la "*caja negra*" es, sin duda, el más difícil de resolver y el más interesante para la Psicología como ciencia social. Debe resolverse, en principio, como ya hemos apuntado, encontrando las leyes que gobiernan el comportamiento del S., para posteriormente establecer hipótesis sobre su estructura.

Al parecer, en el plano psicológico, el enfoque dado a dicho problema ha sido, hasta hace poco, meramente intuitivo. La Teoría General de Sistemas va dirigida a enfocar sistemáticamente su solución, pero todavía sospechamos que se encuentra en sus albores, y cualquier avance teórico que se produzca en la solución de dicho problema puede significar la apertura de horizontes amplísimos y esperanzadores.

10. Clases de sistemas psicológicos

No existe ninguna clasificación de sistemas que sea completa; la dificultad principal reside en que tal clasificación se puede llevar a cabo desde muchos puntos de vista distintos, algunos de los cuales se sobreponen.

Desde el punto de vista estrictamente metodológico, los sistemas psicológicos podrían ser de diversos tipos, a saber:

1 – Cerrados mecánicamente: son aquellos cuyo espacio contiene una historia única, con probabilidad distinta de cero. Su estado preciso, en cada punto del tiempo, es, por tanto, conocido. Todas las variables del S. son endógenas, y sus leyes, estáticas y dinámicas, son del tipo absoluto. Su comportamiento no está sujeto a ninguna suerte de influencia que emane de variables de fuera del S. (lo que, en mi opinión, descarta la inclusión de los S. psicológicos en esta clasificación, salvo casos muy concretos de individuos autistas).

2 – Cerrados estocásticamente: son aquellos cuyo espacio consiste en un conjunto de historias, con probabilidades conocidas para cada una de ellas. Su estado preciso, para cada punto del tiempo, también posee una distribución de probabilidades conocida. El S. es cerrado en el sentido de que sus probabilidades "internas" son fijas, es decir, no afectadas por factores externos. Al igual que en el caso de los S. cerrados mecánicamente, todas las variables son endógenas (dejo al psicólogo la posibilidad de incluir o no a los S. psicológicos, o a algunos de ellos, en dicha categoría).

3 – Semicerrados mecánica y estocásticamente: aquellos que contienen variables exógenas. Serían completamente cerrados si las distribuciones de probabilidad específicas fueran asignadas a las variables exógenas. La semiclausura es mecánica o bien estocástica, dependiendo de la naturaleza de la clausura resultante (en mi opinión, los S. psicológicos pueden estar incluidos en esta categoría).

4 – Abiertos condicionalmente: si todas sus variables son exógenas. Ningún aspecto de su comportamiento está determinado estrictamente desde dentro del S., de acuerdo con la información que se posee. Sus relaciones conectivas son demasiado débiles o demasiado escasas (aquí también dejo al psicólogo la opción de incluir en este apartado a los S. psicológicos).

5 – Abiertos esencialmente: si se tiene la evidencia concluyente de que ninguna información adicional será suficiente para semicerrarlo o cerrarlo (en mi opinión, los S. psicológicos son abiertos en alguna forma).

Resulta importantísimo darse cuenta de hasta qué punto es posible explicarse el comportamiento del S. sin interesarse por las relaciones que existen entre los elementos del entorno. Dicho de otra forma: el problema que se plantea en muchos casos, y que es de gran interés en el caso de los estudios sobre el proceso psicológico, es el de si es posible hablar del entorno como tal, o no hay más remedio que plantearse el entorno como S. En este caso ya no se trataría de las relaciones de un S. con su entorno, sino de las relaciones entre sistemas, habida cuenta de que podría resultar conveniente, desde el punto de vista de entender mejor el comportamiento de un S., el explicarse sus relaciones con los elementos de otros sistemas a un nivel más elevado que el de considerar el entorno como una sola cosa.

11. Características de los sistemas abiertos

Desde el particular punto de vista de la investigación psicológica, interesa detenerse algo más en la explicación de los S. abiertos, en los que se advierte, en general, una correspondencia formal de principios generales, independientemente de la clase de relaciones existentes entre sus elementos.

Todo ello ha hecho pensar en la existencia de una cierta "*Teoría General de Sistemas*", como doctrina científica aplicable a todos los sistemas en general, y a los psicológicos en particular. Es posible que la idea de una tal teoría general sea prematura, e incluso comporte el riesgo de enmascarar las diferencias en las características de los entornos, pero, en cualquier caso, vale la pena considerar las características formales y comunes a los S. abiertos, en orden a la importancia que, a nuestro juicio, ello pueda tener en la investigación psicológica.

Podemos enunciar que las siguientes características parecen definir todos los S. abiertos:

1 – Importación, transformación y exportación de energía: *Los S. abiertos importan energía del entorno, la transformen en cierto producto y la exportan al entorno.* Esto se puede observar en los S. biológicos (y, por supuesto, también en los S. psicológicos, como una particularización indiscutible de aquellos).

2 – Entropía negativa: *Los S. abiertos importan más energía del entorno de la que exportan al mismo.* De esta forma pueden almacenarla y adquirir entropía negativa. En los seres vivos, es fácilmente observable esta cualidad y, por supuesto, en el hombre y en la mujer.

Digamos, en líneas generales, que el valor energético de un S. psicológico no depende tan sólo de la materia y energía contenidas en él, sino de algo más que exprese lo que hay en el contenido de rango o de calidad, esto es, "la ordenación", considerando que, en principio, todas las evoluciones naturales tienden al desorden, esto es, a una disminución del orden. Pues bien, *la entropía de un S. psicológico es justamente la "medida de este desorden"*.

3 – Información, "feedback" negativo y proceso de codificación: Los impulsos, estímulos o entradas no consisten únicamente en energía, sino en *información* acerca del entorno y de su propio funcionamiento en relación con él. Uno de los tipos más simples de información es el llamado "feedback" negativo, que permite corregir las desviaciones. Las importaciones de energía e información son selectivas, y el proceso a través del cual se lleva a cabo la selección se le llama "*codificación*".

4 – Estabilidad y homeostasis dinámica: La importación de energía con el objeto de retener entropía opera para mantener cierta constancia en el intercambio de energía, de tal forma que los S. abiertos que sobreviven se caracterizan por su *estabilidad*. Esto no quiere decir que se encuentren en un equilibrio verdadero; por el contrario, existe una continua importación de energía y exportación de respuestas, pero tanto el carácter del S. psicológico como los intercambios de energía y las relaciones entre sus partes, no cambian. Este estado de estabilidad puede verse en el proceso *homeostático* para la regulación de la temperatura del cuerpo humano, en el caso concreto del S. psicológico.

5 – Diferenciación: *Los S. abiertos se mueven hacia la diferenciación y la especialización de funciones*. En general, la mayor parte de dichos sistemas tienden a una mecanización progresiva. Concretamente, los S. psicológicos son gobernados, en principio, por la interacción de sus componentes; posteriormente, se establecen arreglos y condiciones restrictivas que hacen al S. y a sus partes más eficientes, pero también gradualmente disminuyen y, eventualmente, llegan a abolir su equipotencialidad.

6 – Equifinalidad: este singular principio caracteriza a los S. abiertos. De acuerdo con él, un S. puede alcanzar el mismo estado final partiendo de distintos datos iniciales y siguiendo caminos distintos (caso evidente de los S. psicológicos). Al desarrollarse mecanismos reguladores que controlan sus operaciones, el montante de equifinalidad puede reducirse.

Los conceptos de "equifinalidad", "autorregulación", "feedback", "homeostasis dinámica", …, han hecho avanzar mucho en el tratamiento de los S. abiertos. En el afán de resolver los problemas que plantean las relaciones existentes entre un S. y su entorno, se ha llegado a tipificar el entorno atendiendo a las relaciones con el S. (¿podría hacerse esto en Psicología?). Desde el tipo más sencillo de entorno, en el que no existen conexiones entre las diversas partes del mismo, hasta el tipo más complejo, en el que el S. es dinámico así como el entorno, y en el que el dinamismo del S. depende del dinamismo del entorno, influyéndose mutuamente, se puede pasar por diversos tipos intermedios cuya significación es menor o mayor según el nivel de explicación requerido. También se ha llegado, en ciertos S., a poder formular, bajo una nueva perspectiva, los procesos de cambio entre los S. y su entorno. Sin embargo, esto no trata de aquellos procesos en los que el entorno mismo es, en gran parte, el determinante de los cambios. En dichos procesos, para explicarse el comportamiento de ciertos S. abiertos, hay que plantearse el problema, no como un conjunto de relaciones entre sistema y entorno (esto es: atendiendo únicamente a la estructura interna del S. y dejando el entorno como algo previamente definido y especificado) sino que las relaciones son mucho más complejas. *En estos casos, para que el análisis sea significativo y correcto, debe enfocarse el problema desde el punto de vista de las relaciones entre sistemas*.

La importancia que dicha complejidad reviste para el tratamiento de ciertos sistemas (caso de los S. psicológicos) se pone de manifiesto al intentar controlarlos basándose en un análisis que niegue su complejidad o tergiverse sus propiedades dinámicas.

Particularmente entiendo –de cara a un enfoque psicológico del problema planteado– que la idea de estudiar un S. psicológico como cerrado cuando, en realidad, es abierto, o bien de estudiarlo como estático cuando, en realidad, es dinámico, conlleva en sí su propia limitación, y no puede aceptarse más que comprendiendo bien el grado de significación que con estas limitaciones se puede alcanzar.

12. Algunas ideas sobre Cibernética

12.1. Introducción

La palabra "*cibernética*" tuvo su origen hace 2.500 años en la voz griega que significa "*timonel"* (a*quel que dirige y controla una nave),* y fue mucho tiempo después, ya por el siglo XIX, que el sabio francés André M. Ampère utilizó otra vez el término "*cibernética*", en esa oportunidad para referirse al "*arte de gobernar los pueblos*".

Se acepta, no obstante, que la moderna ciencia cibernética nació en la década de 1940 y desde entonces se desarrolló como ciencia material sobre la base de los trabajos de Norbert Wienner[1], quien por esos tiempos y siendo

[1] Matemático norteamericano. Desde su infancia mostró tener un cerebro privilegiado. A los 18 años obtiene su doctorado en Filosofía en la Universidad de Harvard, fue profesor de Lógica matemática en el Instituto Tecnológico de Massachussets, aunque, a lo largo de su vida, impartió cursos en numerosas universidades de otros países, como México, Gran Bretaña, India, etc. Entre los años 1920 y 1923, Wienner se preocupó por un fenómeno físico sin demasiada importancia en esta ciencia, el llamado movimiento browniano, que se refiere al movimiento perpetuo que tienen las partículas disueltas en un líquido (por ejemplo, raspaduras de roca en agua), movimiento irregular que no parece responder a ninguna ley física. Einstein, a principios del siglo XX, dio una explicación satisfactoria de este movimiento, desde la termodinámica, obviando los complicados caminos en zig-zag de las partículas brownianas. Wienner se preocupó del estudio de las trayectorias de dicho movimiento, aplicando sus conocimientos matemáticos. Las propias trayectorias de las partículas le sugirieron la idea de un camino que zigzagueara tanto que fuera, prácticamente, sólo ángulos y picos. Inventó así una función no diferenciable en ningún punto, de difícil representación, pero no más abstracta que cualquier otro objeto geométrico como el punto o la recta (de mejor visualización). Desarrolló una medida de las probabilidades para conjuntos de trayectorias que no son diferenciables en ningún punto, asociando una probabilidad a cada conjunto de trayectorias, aprovechando la interpretación dada por Einstein al movimiento browniano. Construyó así una probabilidad que permitiría describir el fenómeno en términos matemáticos, en lo que se refiere a la trayectoria y posición de las partículas a través del tiempo. El trabajo de Wienner sobre el movimiento browniano estableció un importante precedente para hallar aplicaciones en Física, Ingeniería y Biología; además, permitió formular un problema de cálculo de probabilidades en términos de la medida de Lebesgue, que utilizaría diez años más tarde Kolmogoroff para la formalización del cálculo de probabilidades. En vísperas de la Segunda Guerra Mundial (1939-

investigador del *Institute Technological of Massachussets* definió a la Cibernética como "*el estudio de la comunicación y el control en máquinas y animales*".

En la actualidad, la cibernética, ya en el apogeo de su desarrollo, irrumpe como un nuevo paradigma científico capaz de esclarecer los conceptos básicos de toda ciencia material, siendo que su campo de estudio se extiende a todo sistema material.

Una ciencia, como la Cibernética, del tipo axiomático-deductivo es una estructura lógico-formal de conocimientos integrada por axiomas y principios aceptados como verdaderos sin demostración, y demostraciones deducidas de acuerdo a reglas lógicas válidas, y todo ello consistente con los axiomas y principios aceptados de esa ciencia.

12.2. Definiciones y conceptos

- **Cibernética**: Ciencia que estudia la "comunicación" y el "control" en los "sistemas".

- **Estudio de la "comunicación" y el "control" en los sistemas**: Para estudiar los procesos de "comunicación" y "control" que ocurren en todo sistema material, como el psicológico, deben observarse los elementos integrantes del sistema desagregados hasta el nivel en que sea posible identificar y discriminar los "componentes estructurales" que integran el sistema en sí, de aquellos otros "componentes de flujo" que ingresan, circulan y/o salen del mismo.

- **Estado de un sistema**: El "estado" de un sistema se define por la valoración de dos parámetros: su "cuantificación" y su "caracterización".

  La "cuantificación" de un sistema estará dada por la medida de la cantidad total de "entes físicos" que lo integran. También puede expresarse por las medidas de las respectivas cantidades de "espacio", "energía" y "masa" que componen el sistema.
  La "caracterización" de un sistema estará dada por la medida del "orden" que posee, lo cual resulta de la medida de su "entropía".

12.3. Objeto, aplicaciones y demostraciones

Existen cuatro tipos de procesos que podrían experimentar los sistemas materiales, incluidos los psicológicos: 1) Génesis y aniquilación, 2) Evolución, 3) Desarrollo y 4) Funcionamiento.

1945), sus investigaciones acerca de robots automáticos que pudieran reemplazar o sustituir con ventaja a los combatientes, sentaron los fundamentos de una nueva ciencia: la cibernética, vocablo adoptado por Wienner en el año 1947 y que procede del griego *Kybernetes*, es decir, "piloto" o "timonel".

Pues bien, analicémoslos separadamente:

1) *Procesos de génesis y aniquilación*: Los procesos de génesis son aquellos en que el sistema en el estado inicial es “nada” y pasa al estado final como “algo material”. El de aniquilación es el proceso inverso: de “algo material” el sistema pasa a la “nada”. Los procesos de génesis y aniquilación violan el primer principio, y respecto al segundo no existe solución para la función matemática que expresa la variación de entropía. En consecuencia, quedan excluidos del campo de aplicación de la Cibernética el estudio de esos procesos.
2) *Procesos de evolución*: Son aquellos en que un sistema material se transforma en otro de características diferentes, como consecuencia del reordenamiento de los “elementos” o bien de los “entes físicos” en el interior de los “componentes” que constituyen el sistema en sí. En el caso de procesos de evolución, se modifican las propiedades cualitativas del sistema que lo experimenta.
3) *Procesos de desarrollo*: Son aquellos en que un sistema material crece por el agregado de elementos o componentes idénticos a los que ya posee, sin que se modifiquen las propiedades cualitativas y características esenciales del sistema, salvo su tamaño.
4) *Procesos de funcionamiento*: El “funcionamiento” es el conjunto de comunicaciones internas que se producen dentro de todo sistema material.

12.4. Funcionamiento, comunicación y control

De acuerdo con el axioma fundamental de la cibernética, todos los sistemas materiales experimentan comunicaciones internas (funcionamiento) y comunicaciones con el exterior (control). Así, en todo sistema material (psicológico) ocurren los siguientes procesos:

a) Ingreso de “componentes de flujo” al sistema (proceso de control).
b_1) Distribución de “componentes de flujo” ingresados (comunicación interna).
b_2) Funcionamiento, y eventualmente evoluciones y desarrollos (comunicación interna).
b_3) Recolección de “componentes de flujo” a egresar del sistema (comunicación interna).
c) Salida de “componentes de flujo” del sistema (proceso de control).

El “funcionamiento” de un sistema se compone de una gran cantidad de ciclos; cada ciclo incluye la secuencia de procesos “b_1”, “b_2” y “b_3” y se cumple entre el ingreso (proceso “a”) y el egreso (proceso “c”) de los “componentes de flujo” que circulan por el sistema.

Por el proceso de “distribución de entrada” (proceso b_1) se establece un importante ordenamiento (disminución de entropía) lo cual pone al sistema en estado de aptitud para que ocurra el proceso del “funcionamiento en sí”, durante el cual cabe la posibilidad que se produzcan “desarrollos” y “evoluciones” dentro del mismo.

Durante el “funcionamiento en si” (proceso b_2), tiende a disminuir el “orden” (aumento de entropía) del sistema, y ese orden se reestablece a expensas del orden (entropía negativa) aportada por los “componentes de flujo” distribuidos, los cuales, una vez degradados, son “recolectados” (proceso b_3), previo a su egreso del sistema.

12.5. El concepto de entropía

12.5.1. Definición

El concepto de “entropía” es equivalente al de “desorden”. Así, cuando decimos que aumentó la entropía en un sistema, significa que creció el desorden en ese sistema. Y a la inversa: si en un sistema disminuyó la entropía, significa que disminuyó su desorden.

La palabra entropía procede del griego (ἐντροπία) y significa “evolución o transformación”. La formulación matemática de la variación de entropía de un sistema, luego de una transformación o evolución entre los estados inicial y final del mismo, se corresponde con la integral definida entre el instante inicial y final de los incrementos o diferenciales del componente o sistema en evolución, divididos por la cantidad de elementos que van integrando al componente o sistema en cada instante. Así:

$$\mathrm{Es}(f-0)=\int_{t_0}^{t_f}\frac{dV_s}{V_s}=\left[\ln V_s\right]_{t_0}^{t_f}=\ln\frac{t_f}{t_0}=\ln\frac{1}{t_0/t_f}=\ln\frac{1}{N(s)}$$

La resolución matemática de la integral planteada para la determinación de la variación de la entropía de un sistema entre los estados inicial y final, resulta ser el logaritmo natural de uno (1) (cantidad de componentes o sistemas resultantes en el instante final), dividido por la cantidad de elementos que fueron integrados al componente o sistema resultante entre los instantes inicial y final de la evolución.

La medida de la entropía permite establecer el “orden” que posee un sistema en determinada instancia, respecto al que poseía o pudo haber poseído en otra. Así, podría determinarse la diferencia de “entropía” para la formación o constitución de un sistema a partir de sus componentes desagregados, y también para cualquier proceso que pueda ocurrir en un sistema ya constituido.

El “orden” que adquirió un sistema en su constitución puede medirse por la diferencia entre la “entropía” del sistema constituido, y la que supuestamente poseía cuando todos los N “entes físicos” elementales que lo componen, existían desagregados e indiferenciados en el nivel de referencia correspondiente al primer nivel de agregación. En dicho nivel, la entropía para cualquier conjunto de una cantidad finita N de "entes físicos" desagregados, resulta igual a 0 (cero), a saber:

$$\text{Es}\ (0) = N \cdot \ln\frac{V_s(0)}{V_s(0)} = N \cdot \ln 1 = N \cdot 0 = 0\ (\text{cero})$$

La variación del "orden" en un sistema ya constituido se determina por la diferencia entre la medida de la "entropía" del sistema para los instantes inicial (o) y final (f) de un proceso en estudio. Para ello, se debe considerar la "entropía" de todos los "componentes" existentes dentro del sistema, tanto la de los "componentes" que constituyen el sistema en sí, como la "entropía" de los "componentes de flujo" que circulan por el mismo.

12.5.2. El concepto termodinámico y su aplicación

En termodinámica, la **entropía** (simbolizada como **S**) es la magnitud física que mide la parte de la energía que no puede utilizarse para producir trabajo. En un sentido más amplio, que utilizaremos aquí, puede interpretarse como la medida de la uniformidad de la energía de un sistema psicológico. Es una función de estado de carácter extensivo y su valor, en un sistema aislado, crece en el transcurso de un proceso que se dé de forma natural.

Cuando se plantea la pregunta: ¿por qué ocurren los sucesos de la manera que ocurren, y no al revés? se busca una respuesta que indique cuál es el sentido de los sucesos en la naturaleza. Por ejemplo, si se ponen en contacto dos trozos de metal con distinta temperatura, se anticipa que eventualmente el trozo caliente se enfriará y el trozo frío se calentará, logrando al final una temperatura más o menos uniforme e intermedia. Sin embargo, el proceso inverso, es decir, un trozo calentándose (el caliente) y el otro enfriándose aún más (el frío) es muy improbable que tenga lugar, a pesar de conservar la energía. El universo tiende a distribuir la energía uniformemente, es decir, a maximizar la entropía.

La función termodinámica "entropía" es central para la segunda Ley de la Termodinámica. La entropía puede interpretarse como una medida de la distribución aleatoria de un sistema. Se dice que un sistema altamente distribuido al azar tiene una alta entropía. Puesto que un sistema en una condición improbable tendrá una tendencia natural a reorganizarse a una condición más probable (similar a una distribución al azar), esta reorganización resultará en un aumento de la entropía. La entropía alcanzará un máximo cuando el sistema se acerque al equilibrio, alcanzándose la configuración de mayor probabilidad.

Podemos decir que un ser vivo (sistema psicológico) sano, funcionando correctamente, tiene entropía baja. Si aumenta el desorden en los componentes del individuo podemos decir que su entropía está aumentando. Hay un cierto umbral, un cierto tamaño de entropía por encima del cual el ser vivo muere.

Como el sistema psicológico no es un sistema aislado, podemos utilizar energía proporcionada por otros sistemas para corregir el desorden, es decir, para disminuir la entropía. Pero sabemos, por experiencia, que esa posible intervención tiene un límite: hasta ahora no conocemos ningún ser vivo que haya vivido o funcionado eternamente.

La entropía, coloquialmente hablando, puede considerarse como la medida del desorden de un sistema, es decir, cuán homogéneo está el sistema. En los años 1890–1900, el físico austríaco Ludwig Boltzmann[2] y otros desarrollaron las ideas de lo que hoy se conoce como "mecánica estadística", que constituye una teoría profundamente influenciada por el concepto de entropía.

Según estas ideas, la entropía queda definida por la siguiente ecuación:

$$S = k \cdot \ln \Omega$$

, donde S es la entropía, k la constante de Boltzmann y Ω el número de microestados posibles para el sistema.

La célebre ecuación anterior se encuentra grabada sobre la lápida de la tumba de Boltzmann en el Zenmtralfriedhof de Viena, quien se suicidó en 1906, profundamente deprimido por la poca aceptación de sus teorías en el mundo académico de la época. El significado literal de la ecuación es el siguiente: *La cantidad de entropía de un sistema es proporcional al logaritmo natural de su número de microestados posibles.*

Ahora bien, su significado final es aún materia de discusión en física teórica, dado el profundo alcance que posee.

La **entropía de formación**, en fin, de un compuesto químico (o de una substancia en estado elemental), en termodinámica y termoquímica, es la diferencia (incremento o decremento) de entropía en el proceso de su formación a

[2] Nacido en el seno de una familia acomodada, Boltzmann cursó estudios medios en Linz, doctorándose en la Universidad de Viena en 1866. Al año siguiente trabajaría como ayudante de Joseph Stefan. Fue profesor de física en Graz en 1869, aunque cuatro años después aceptaría un puesto de profesor de matemáticas en Viena. Regresaría, sin embargo, a Graz como catedrático en 1876. Por aquella época ya era conocido, por la comunidad científica, por su desarrollo de la estadística de Maxwell-Boltzmann para las velocidades de las moléculas de un gas, en 1871. En 1894 retomó su puesto, esta vez como profesor de física teórica, en la Universidad de Viena tras la muerte de Joseph Stefan. Al año siguiente, Ernst Mach obtuvo la cátedra de historia y filosofía de las ciencias. Mach era uno de los más claros opositores al trabajo de Boltzmann. En 1900, debido a su descontento con Mach, Boltzmann se trasladó a Leipzig donde conoció a Wilhelm Ostwald. Mach dejó la Universidad de Viena en 1901 por motivos de salud, lo que permitió a Boltzmann volver al año siguiente. En esta ocasión, además de recuperar su cátedra de física, obtuvo la cátedra de Mach de historia y filosofía de las ciencias. En 1904 visitó Estados Unidos en su Feria Mundial de Saint Louis. La dura oposición a su trabajo, con Ostwald como cabeza -la hipótesis de la existencia de átomos, que todavía no estaba demostrada completamente-, pudo haber causado trastornos psíquicos que le llevaría al suicidio en 1906. Sólo unos años después de su muerte, los trabajos de Jean Perprin sobre las suspensiones coloidales (1908-1909) confirmaron los valores del número de Avogadro y la constante de Boltzmann, convenciendo a la comunidad científica de la existencia de los átomos.

partir de sus elementos constituyentes (en estado atómico o en cierta forma predefinida). Cuanta mayor (más positiva) sea la entropía de formación de una especie química, más favorable (por entropía) será su formación. Por el contrario, cuanto más positiva sea su energía de formación, menos favorable será energéticamente.

12.5.3. La entropía de Shannon

La entropía definida por Shannon[3], referida a la teoría de la información, hace referencia a la cantidad media de información que contiene una variable aleatoria (psicológica) o, en particular, una fuente transmisión binaria. La información que aporta un determinado valor, x_i, de una variable aleatoria discreta X, se define como:

$$I(x_i) = log_2(1/p(x_i))$$

cuya unidad es el *bit* si se utiliza el logaritmo en base 2 (por ejemplo, cuando se emplea el logaritmo neperiano o natural se habla de *nats*).

La entropía o información media de la variable aleatoria discreta, X, se determina como la información media del conjunto de valores discretos que puede adoptar (también medida en *bits*):

$$H(x) = \Sigma_i p(x_i) \cdot log_2(1/p(x_i))$$

Además de su definición y estudio, Shannon demostró analíticamente que la entropía es el límite máximo al que se puede comprimir una fuente sin ninguna pérdida de información.

12.5.4. La entropía, el desorden y el grado de organización

Vamos a imaginar ahora que tenemos una caja con tres divisiones; dentro de la caja, y en cada división estanca, se encuentran tres tipos diferentes de canicas: azules, amarillas y rojas, respectivamente. Las divisiones son movibles así que nos decidimos a quitar la primera de ellas, la que separa a las canicas azules de las amarillas. Lo que estamos haciendo, dentro del punto de vista de la entropía, es quitar un grado o índice de restricción a nuestro sistema; antes de que quitáramos la primera división, las canicas se encontraban separadas y ordenadas en colores: en la primera división las azules, en la segunda las amarillas y en la tercera las rojas, estaban restringidas a un cierto orden.

Al quitar la segunda división, estamos quitando también otro grado de restricción. Las canicas se han mezclados unas con otras de tal manera que ahora no las podemos tener ordenadas, puesto que las barreras que les restringían

[3] *Vide* Shannon, C.C. y Weawer, W., *The Mathematical Theory of communication*, Urbana, University of Illinois Press, 1949.

espacialmente han sido levantadas. La entropía de este sistema ha aumentado al ir quitando las restricciones, pues inicialmente había un orden establecido y al final del proceso (el proceso consiste, en este caso, en quitar las divisiones de la caja) no existe orden alguno dentro de la caja.

La entropía se configura como una medida del orden (o desorden) de un sistema o de la falta de grados de restricción; la manera de utilizarla es medirla en nuestro sistema inicial, es decir, antes de remover alguna restricción, y volverla a medir al final del proceso que sufrió el sistema, obteniendo la diferencia entre ambas medidas.

Es importante señalar, en consecuencia, que la entropía no está definida como una cantidad absoluta S (símbolo de la entropía), sino lo que se puede medir es la diferencia entre la entropía inicial de un sistema S_i y la entropía final del mismo S_f. No tiene sentido hablar de entropía, pues, sino en términos de un cambio en las condiciones de un sistema.

12.5.5. Entropía, procesos reversibles e irreversibles

Volviendo al ejemplo anterior de la caja con separaciones y canicas, vamos a explicar qué es un proceso reversible y qué un proceso no reversible. Llamamos proceso "reversible" al que se puede invertir y dejar a nuestro sistema en las mismas condiciones iniciales. Teniendo en cuenta nuestra caja ya sin las separaciones, tenemos a las canicas revueltas unas con otras, es decir, sin un orden. Si el proceso que efectuamos de quitar las divisiones fuera reversible, las canicas tendrían que ordenarse espontáneamente en azules, amarillas y rojas, según el orden de las divisiones. Esto, evidentemente, no ocurrirá.

El proceso que efectuamos con nuestra caja de canicas fue un proceso no reversible o "irreversible", en donde una vez terminado, el orden que había en las condiciones iniciales del sistema ya nunca más volverá a establecerse. El estudio de este tipo de procesos es importante, porque en la naturaleza casi todos los procesos son irreversibles.

12.5.6. Entropía, cibernética y comunicación

Existe un precedente ciertamente muy lejano, tan lejano como el propio Ramón Llull[4], a quien los cibernéticos miran como su predecesor histórico más

[4] Escritor, filósofo, místico y misionero, viajero y divulgador, nacido en 1235, fue una de las figuras más interesantes de la Edad Media, creador de la corriente filosófica conocida como ***lulismo***, cuya lógica fue expuesta en su obra fundamental ***Ars Magna***. Llamado el "Doctor Iluminado", la importancia actual de Llull radica en haber sido el creador de la lengua literaria catalana, en un momento en que las demás lenguas románicas o neolatinas se encontraban todavía balbucientes y todos los grandes tratados se escribían aún en latín, lengua que el propio Llull utilizó también en muchos de sus trabajos, así como el árabe. Fue el primero que se propuso construir una matemática y una ciencia universal. Nadie, antes de Bacon, hizo una defensa tan admirable del método de observación. Contribuyó en gran medida, con sus principios científicos, a los adelantos marítimos, aplicando la Aritmética y la Geometría al arte náutico, ilustrando sus explicaciones con una gran variedad de figuras y previendo, en la causa de las mareas, la influencia del Sol y de la Luna. De sus obras más representativas sobresalen ***Blanquerna***, novela idealista

antiguo, que con su *Ars Magna* es considerado el creador perdido de una ciencia general del intercambio (cfr. Martín Serrano, M. en "Métodos actuales de investigación social". Madrid, AKAL, 1978, 191). Su *Ars Magna* es, según Delpech, el primer modelo dialéctico de la actividad mental. Según Martín Serrano, la cibernética moderna se ha constituido en un método general de estudio del cambio y la reproducción de sistemas informados y, por ello, al igual que hace Wienner[5], Chomsky[6], Barthes[7], Hjelmslev[8] y Ashby[9], cita a Llull como el precursor de la cibernética. Desde Wienner es un hecho que, para los cibernéticos, los mismos principios explican la transmisión de datos y la transmisión de impulsos, razón por la cual se justifica la significación del término cibernética como «arte de la eficacia de la acción» (cfr. Couffignal, L., *La cybernétique*, Paris, PUF, 1966).

Los presupuestos fundamentales para que cibernética y comunicación, cibernética e interacción humana se identifiquen, son los que se derivan de considerar a la cibernética como una ecología; así por ejemplo, la noción de "ecología" está implícita en la consideración de que entre un actor humano (sistema físico psicológico) y su medio exterior o *unwelt* (sistema exterior), el intercambio de mensajes es, a la vez, un efecto y una causa entre la acción y la reacción. Esto lleva a considerar el intercambio como una acción comunicativa constituida por el conjunto de actores que intervienen y el conjunto de factores espacio-temporales que la determinan; y en este sentido se supone una teleología, según la cual, el sistema así informado siempre persigue un fin, que se traduce en un cambio del *unwelt*. Lo más grave es que, por esta vía, la cibernética se conforma como una axiología de la acción y la comunicación.

La cibernética como axiología es, además, una axiología del riesgo, como apunta Martín Serrano en la obra citada, de modo que el investigador debe elegir entre fines alternativos, medidos por niveles específicos de probabilidad. «El riesgo depende del carácter activo o pasivo del sistema cuyo comportamiento se espera controlar» (Martín Serrano, 1978). En la medida en que el método cibernético ubica sus análisis en el marco de cualquier posibilidad imaginable, su objeto de estudio hace de las comunicaciones entre los actores de un grupo, y entre el grupo y el medio natural y axiológico, un modelo de probabilidad más que un sistema de alternativas; sobre este modelo se ubica después una utopía: la previsión y el control pueden efectuarse en función de que a éstos se les asigne un proyecto humano. En la teoría de la información, la unidad de decisión y de

---

que influyó en toda la narrativa medieval posterior, ***Félix o Libre de les dones***, excelente enciclopedia del saber de su época, en la que destaca el cántico espiritual más depurado de la Edad Media y el ***Libre d'Amic e Amat***. Aunque la leyenda cuenta que murió lapidado en Bugia (Argelia) mientras estaba predicando el cristianismo, lo cierto es que falleció en su Mallorca natal en 1315, lamentándose amargamente del fracaso de su obra, que sin embargo ha trascendido a lo largo de los siglos hasta nuestros días.

[5] *Vide* Wienner, N., *Cibernética y sociedad*, Buenos Aires, Sudamericana. 1969.

[6] *Vide* Chomsky, N., *Language and Mind*, Nueva York, Harcourt, Brace, World Inc., 1968.

[7] *Vide* Barthes R., *Le dégrée zéro de l'écriture*, Paris, Seuil, 1953.

[8] *Vide* Hjemslev, L., *Prolégomènes á une théorie du langage*, Paris, Minuit, 1968.

[9] *Vide* Ashby, W.R., *Introducción a la cibernética*, Buenos Aires, Nueva Visión, 1960.

inteligibilidad es la misma, vía por la cual "inteligibilidad" y "previsión" resultan equivalentes. Con ello, se acaba estudiando con el mismo método, problemas referidos ya sea a la teoría, ya sea a la práctica. «El estudio de los modelos de control social, de la predicción sobre el comportamiento de los sistemas sociales, de la inteligibilidad de las organizaciones y del determinismo de los procesos, son unificables como análisis de la información del sistema» (cfr. Martín Serrano, M. 1978, 203-4).

La clave, pues, de la teoría informacional de la sociedad, hace que resulte comprensible la aspiración de la antropología estructural de Lévi-Strauss[10] a convertirse en una *entropología*, desde el momento en que la medida de la complejidad en los intercambios, ya sea de palabras, mujeres o bienes materiales, resulte descubierta por un mismo mecanismo matemático. Pero, sobre todo, algunos dilemas clásicos de las ciencias humanas, como los de predicción científica y libertad, revolución y participación, resultan replanteados de un modo teórico, que los hace compatibles. Así, por ejemplo, siguiendo el comentario efectuado por Martín Serrano (1978, 206-207), veamos que como corolario a la formulación informacional ($I = N - \log_2 h$) ocurre que si alguna vez el objeto de la sociología se convierte en un sistema totalmente indeterminado (el

[10] **Claude Lévi-Strauss** nació en Bruselas y estudió Derecho y Filosofía en la Sorbonne. No continuó sus estudios de derecho, sino los de filosofía en 1931. Después de unos pocos años de enseñanza secundaria, tomó una oferta de última hora para ser parte de la misión cultural francesa en Brasil, país al que serviría como profesor visitante en la Universidad de São Paulo. Vivió en Brasil desde 1935 a 1939. Fue durante este tiempo cuando llevó a cabo su primer trabajo de campo etnográfico, dirigiendo búsquedas periódicas en el Mato Grosso y la selva tropical amazónica. Ésta fue la experiencia que cimentó la identidad de Lévi-Strauss como profesional de la antropología. Volvió a Francia en la víspera de la segunda guerra mundial y fue movilizado al estallar ésta (1939-1940). Después del armisticio marchó a los Estados Unidos, donde impartió clases en el *New School for Social Research* de Nueva York. Llamado a Francia en 1944 por el Ministro de Asuntos Exteriores, volvió a Estados Unidos en 1945. Tras un breve paso por la Embajada Francesa de Washington como adjunto cultural (1946–1947), regresó a París para doctorarse tras presentar tesina y tesis (1948). Los años en Nueva York le sirvieron para formarse en muchos aspectos; su relación con Roman Jakobson le ayudó a dar forma a sus teorías (a Roman Jakobson y Lévi-Strauss se les considera las figuras centrales del estructuralismo). Además, colegas antropólogos como Franz Boas lo introdujeron en la Antropología estadounidense. Los años de la guerra fueron muy formativos para Lévi-Strauss en varios aspectos. Su relación con Jakobson le ayudó a configurar su perspectiva teórica (Jakobson y Lévi-Strauss eran considerados dos figuras en las que el estructuralismo estaba basado). En suma, Lévi-Strauss estaba también expuesto a la antropología americana de Franz Boas, quien enseñó en la Universidad de Columbia. Esto dio a su trabajo una inclinación que facilitó su aceptación en EE UU. Después de un breve lapso de tiempo, desde 1946 a 1947, Lévi-Strauss regresó a París en 1948, a la vez que recibía su doctorado de la Sorbona, por su tesis «mayor» y «menor» tituladas *Las estructuras elementales de parentesco* y *La vida familiar y social de los indios Nambikwara*. Esta última obra fue publicada al siguiente año e instantáneamente fue reconocida como una de las más importantes de la antropología, con una crítica favorable de Simone de Beauvoir quien la vio como un importante estudio de la posición de la mujer en las culturas no occidentales. Una obra con título análogo a la famosa *Las formas elementales de la vida religiosa*, de Émile Durkheim, *Las estructuras elementales* reexaminó cómo las personas organizaban sus familias. Mientras los antropólogos británicos como Alfred Reginald Radcliffe-Brown sostenían que los parentescos estaban basados en la ascendencia de un ancestro común, Lévi-Strauss pensaba que estos parentescos tenían más que ver con la *alianza* entre dos familias, cuando la mujer de un grupo se casaba con el hombre de otro. Entre 1940 y principios de 1950, Lévi-Strauss continuó publicando y cosechó un éxito considerable. Con su regreso a Francia, se implicó en la administración del CNRS y el Museo del Hombre, antes de llegar a ocupar un puesto en la *École Pratique des Hautes Études*. En 1940 se convirtió en subdirector del *Musée de l'Homme* y después director de la *École Pratique des Hautes Études*. Más tarde fue nombrado profesor del *Collège de France* de antropología social, puesto que ocupó desde 1959 hasta su jubilación en 1982.

valor de *N* para los grados de libertad del sistema es muy pequeño) desaparecería la sociología como ciencia de la predicción: ésta resultaría demasiado conocida; inversamente, si los grados de libertad son relativamente infinitos, la sociología como instrumento de predicción sería absolutamente imposible, razón por la cual la clave informacional de la sociedad reclama que al mismo tiempo el objeto social carezca, y no carezca, de libertad real para transgredir o cambiar sus normas: dialéctica entre información y redundancia

Como ha podido observarse, desde Wienner en las ciencias biológicas, y desde Shannon en las ciencias físicas, complejidad, forma u orden se identifican con comunicación, con lo que indistintamente "teoría de la información" o "teoría de la comunicación" terminan representándose epistemológicamente[11] en el trabajo científico como el paradigma universal, mediante el cual se borran las fronteras existentes entre ciencias de la naturaleza y ciencias de la cultura, o sea, entre ciencias naturales y ciencias sociales. El intento es considerar a la teoría de la información-comunicación como una nueva Epistemología en sí misma, lo que no podía sino satisfacer a los teóricos de las ciencias humanas cuyo complejo de inferioridad respecto al desarrollo de las ciencias físicas es tan antiguo.

La perspectiva abierta por el descubrimiento de la noción de «información», opuesta al de «entropía energética», engarza y consolida los conflictos teóricos históricamente originados por las distinciones entre operador, operación y contenido. Esta tradición de pensamiento hace que, según Carnap[12], todas las ciencias posean un método común: identificar las operaciones mediante las cuales el operador humano organiza los grupos de operaciones que realiza con las colecciones de objetos o de actos para la comunicación, ya sea cotidiana o científica. El objeto propio de cada ciencia es el estudio de los objetos a los que se aplican estas operaciones; si los objetos son los símbolos, se trata de ciencias deductivas, lógico-matemáticas; si los objetos son significados, se trata de ciencias lingüísticas o semióticas; si los objetos son afectos, emociones, actitudes, se trata de psicología, ciencia social que nos ocupa en el presente libro; si los objetos son normas, valores, etc., se trata de sociología. La teoría general de sistemas (a la que nos venimos refiriendo y aplicando en nuestro estudio), y la teoría de la información, acaban constituyéndose por esta vía en la teoría del conocimiento científico. A este carro se suben entusiasmados muchos, o la gran parte, de los que en las ciencias humanas se denominan, a sí mismos, "teóricos de la comunicación".

12.5.7. Ejemplo

El ejemplo que se desarrolla a continuación servirá para comprender el concepto de "entropía" y relacionarlo con su formulación matemática.

[11] Rama de la Filosofía que trata de los problemas filosóficos que rodean la teoría del conocimiento. La epistemología se ocupa de la definición del saber y de los conceptos relacionados, de las fuentes, los criterios, los tipos de conocimiento posible y el grado con el que cada uno resulta cierto, así como de la relación exacta entre el que conoce y el objeto conocido.
[12] *Vide* Carnap R., «*Foundation of logic and mathematics* », en Fodor y otros, *The structure of language*, Nueva York, Prentice Hall, 1964.

Supóngase, v. gr., que fuese posible y se procediera a desagregar en sus componentes el cuerpo de un ser humano (sistema psicológico). Primero se desagrega el cuerpo único en las células que lo componen (una transformación de un cuerpo en mil billones de células). Luego se desagregan todas y cada una de las células en las moléculas que las componen (mil billones de transformaciones de células cada una en cien millones de moléculas).Y finalmente se desagregan todas y cada una de las moléculas en los átomos que las componen (cien mil trillones de transformaciones de moléculas cada una en unos diez mil átomos).

El resultado del experimento indicado ofrecería que se habría transformado el cuerpo de un ser humano en mil cuatrillones de átomos (el número mil cuatrillones es un 1 seguido de 27 ceros).

Si se preguntara ahora cuál es la diferencia entre los dos estados del sistema del ejemplo: uno el cuerpo armado y completo, y el otro estado el cuerpo desagregado en sus componentes de mil cuatrillones de átomos, responderíamos que en el estado armado y completo, el sistema del ejemplo posee un orden y organización muchísimo mayor que en el estado desagregado... Y entonces la cuestión sería simplemente poder medir el ***"desorden"*** o ***"entropía"*** del sistema para cada uno de los estados descritos.

De acuerdo a la formulación matemática y su desarrollo según sigue, la entropía para el estado desagregado resulta igual a cero (0), lo cual surge de considerar que en ese estado los mil cuatrillones de átomos conforman un conjunto de mil cuatrillones de sistemas, cada uno de los cuales está integrado por un solo elemento (átomo), con lo que:

$$\text{Es (0-0)} = N_0 \cdot \ln \frac{V_s(0)}{V_s(0)} = N_0 \cdot \ln 1 = N_0 \cdot 0 = 0 \text{ (cero)},$$

siendo $N_0 = 1.000.000.000.000.000.000.000.000.000 = 10^{27}$ átomos.

La entropía para el estado del sistema completamente armado resulta de considerar los pasos sucesivos de agregación a partir del estado desagregado con entropía = cero (0).

a) **Primer paso de agregación de átomo a molécula**: mil cuatrillones de átomos se agregan para formar cien mil trillones de moléculas, cada una de ellas integrada por diez mil átomos. La entropía desciende de cero (0) a ***menos novecientos veintiún mil trillones*** según sigue:

$$\text{Es (0-1)} = N_1 \cdot \ln \frac{V_s(1)}{V_s(0)} = N_1 \cdot \ln \frac{1}{10.000} = N_1 \cdot (-9'21) = -9'21 \times 10^{23},$$

siendo $N_1 = 100.000.000.000.000.000.000.000 = 10^{23}$ moléculas.

b) **Segundo paso de agregación de molécula a célula**: cien mil trillones de moléculas se agregan para formar mil billones de células, cada una de ellas integrada por cien millones de moléculas. La entropía desciende en ***menos dieciocho mil cuatrocientos veinte billones*** según sigue:

$$\text{Es }(1\text{-}2) = N_2 \cdot \ln\frac{V_s(2)}{V_s(1)} = N_2 \cdot \ln \frac{1}{100\,.000\,.000} = N_2 \cdot (-\,18'42) = -\,18'42 \times 10^{15}\,,$$

siendo $N_2 = 1.000.000.000.000.000 = 10^{15}$ células.

c) **Tercer paso de agregación de célula a cuerpo**: mil billones de células se agregan para formar un (1) solo cuerpo integrado por mil billones de células. La entropía desciende entonces en ***menos treinta y cuatro unidades con cincuenta y cuatro centésimas*** según sigue:

$$\text{Es }(2\text{-}3) = N_3 \cdot \ln\frac{V_s(3)}{V_s(2)} = N_3 \cdot \ln \frac{1}{1.000.000.000.000.000} = N_3 \cdot (-\,34'54) = -\,34'54,$$

siendo $N_3 = 10^0 = 1$ cuerpo.

CAPÍTULO 5
El estudio sistémico de la Psicología

1. Percepción

Un mismo y único estímulo no siempre produce idéntica experiencia (v. gr.: de calor y de luz). El estímulo de una determinada temperatura física puede ser sentida, por el S. psicológico, como “caliente” si afecta a algunos puntos de la piel, y como “frío” si afecta a otros (una gota de ácido, así mismo, producirá acritud en la boca y quemaduras en el ojo).

Por otra parte, una enorme variedad de efectos subjetivos es producida por un mismo estímulo eléctrico, que puede excitar, de hecho, todos los sentidos del S. psicológico. *Así mismo, diferentes estímulos pueden suscitar la misma respuesta.* Por todas estas razones, la clasificación psicológica de las experiencias sensoriales debe basarse, a nuestro juicio, no precisamente en las propiedades físicas de los estímulos, *sino en los efectos producidos o experimentados por el sistema*.

2. Aprendizaje y recuerdo

2.1. Introducción

El gran escritor argentino J.L. Borges nos apunta que la similitud (o confusión) entre la realidad inexorable y los sueños, o entre los recuerdos y los conocimientos, o bien entre la novedad y el olvido, también resulta explicada por Francis Bacon (*Essays LVIII*) de forma magistral: “Salomon saith. *There is no new thing upon the earth.* So that as Plato had an imagination, *that all knowledge was but remembrance*, so Salomon giveth his sentence, *that all novelty is but oblivion*”.

No parece discutible el hecho de que todo aprendizaje que no se base en la propia experiencia del S. psicológico, tendrá poco valor; podrá aumentar su erudición, *acquis* o “stock” de conocimientos (cuyas fluctuaciones serán contempladas en capítulos posteriores), pero no mejorará su conducta y, por supuesto, no se desarrollará su personalidad. Por el contrario, se puede provocar, incluso, el sentimiento de su ignorancia e inferioridad, bloqueando sus posibilidades de perfeccionamiento. Y esta deficiencia deberá compensarla con falsas actitudes de seguridad o aplomo que degenerarán en posturas defensivas frente al grupo en el que tenga que actuar y que constituye su entorno.

Ya Locke[1], en el siglo XVII, que era el más moderado y coherente de los empiristas ingleses (junto con Berkeley[2] y, sobre todo, Hume[3]), demostró como cualquier idea, ya fuera proveniente de la reflexión o de la sensación, viene desde fuera de la *tabula rasa* de nuestro intelecto. **El único camino del conocimiento es la experiencia.** En las ideas simples, este razonamiento resulta obvio, porque representan al objeto singular material; en las ideas complejas y universales también lo es, dado que no es posible pensar una idea universal sin una referencia a lo concreto y sin que la imaginación le acompañe de algún modo con el objeto real de donde ha extraído la idea pretendidamente universal.

Una disyuntiva importante surge al tratar el problema de la "*enseñanza*" de los S. psicológicos. Ya se ha visto que la experiencia debería ser el punto de partida de cualquier tarea educativa. A continuación, se presenta la cuestión de si el psicólogo educador debe o no manipular esas experiencias. ¿Debe de conducirse, como hace *Skinner* con sus palomas, operando sobre su conducta mediante refuerzos o estímulos que roboticen el S. psicológico en un tiempo récord, o bien debe embarcarse en la tarea de centrar la dinámica educativa en el propio sistema, confiando en que éste posee la capacidad de comprenderse y de resolver eficazmente sus problemas?.

Siguiendo un criterio de terapia centrada en el S. psicológico o no directividad, el psicólogo educador (terapeuta) no debe interferirse manipulando las experiencias, dado que dicha manipulación distorsiona la información que

---

[1] **John Locke** nacido el 29 de agosto de 1632 en Wrington, Somerset, Inglaterra y fallecido el 28 de octubre de 1704 en Oates, Essex. Pensador inglés considerado como el padre del empirismo y del liberalismo. Su epistemología niega la existencia del innatismo y el determinismo considerando el conocimiento de origen sensorial, por lo que rechaza la idea absoluta en favor de la probabilística matemática. Para Locke, el conocimiento solamente alcanza a las relaciones entre los hechos, al cómo, no al por qué. Por otra parte cree percibir una armonía global, apoyado en creencias y supuestos evidentes por sí mismos, por lo que su pensamiento también contiene elementos propios del racionalismo y del mecanicismo.

[2] **George Berkeley** (12 de marzo de 1685 - 14 de enero de 1753), también conocido como el **Obispo Berkeley**, fue un filósofo irlandés muy influyente cuyo principal logro fue el desarrollo de la filosofía conocida como idealismo subjetivo, resumido en la frase, *Esse est percipi* (Existir es ser percibido). Esta teoría propone que los seres humanos sólo pueden conocer directamente sensaciones e ideas de objetos, pero no abstracciones como la materia extensa y el ser. Escribió un gran número de obras, de las que se pueden destacar *Los principios del conocimiento humano* (1710) y *Los tres diálogos entre Hylas y Philonus* (1713) (Philonus, el "amante de la mente", representa a Berkeley, e Hylas, que toma su nombre de la antigua palabra griega para designar a la materia, representa las ideas de Locke). En 1734 publicó *El analista*, una crítica a los fundamentos de la ciencia, que fue muy influyente en el desarrollo de la matemática.

[3] **David Hume** fue un filósofo, economista e historiador escocés y constituye una de las figuras más importantes de la filosofía occidental y de la ilustración escocesa. Los historiadores consideran la filosofía de Hume como una profundización en el escepticismo, aunque esta visión ha sido discutida, argumentando que el naturalismo tiene un peso comparable en su pensamiento. El estudio de Hume ha oscilado entre los que enfatizan la vertiente escéptica de Hume (como es el caso del positivismo lógico), y los que, en cambio, consideran más importante la vertiente naturalista (como Don Garret, Norman Kemp Smith, Kerry Skinner, Barry Stroud y Galen Strawson). Hume estuvo fuertemente influido por los empiristas John Locke y George Berkeley, así como por varios escritores franceses como Pierre Bayle, y algunas figuras del panorama intelectual anglófono como Isaac Newton, Samuel Clarke, Francis Hutcheson y Joseph Butler. Hume afirma que todo conocimiento deriva, en última instancia, de la experiencia sensible, siendo ésta la única fuente de conocimiento y sin ella no se lograría saber alguno.

recibe el sistema (cibernéticamente diríamos que "se producen ruidos") y ello afecta al buen funcionamiento del "feedback".

Es, fundamental, en consecuencia, que el S. Psicológico se sienta libre para reconocer y elaborar sus experiencias y sentimientos como él cree que debe de hacerlo, y no como lo crea otra persona, pues, en definitiva, esta alienación del S. psicológico respecto de su experiencia vivida puede derivar en la formación de una personalidad neurótica.

De cualquier modo, lo dicho hasta el momento es susceptible de revisión o rechazo de acuerdo con las experiencias obtenidas en un laboratorio preparado al efecto. En definitiva, *la disyuntiva planteada inicialmente, persiste*: se trata de decidirse por un aprendizaje robotizador o más bien por un aprendizaje personalizador, y esta elección debe ser efectuada por el psicólogo educador o experimentador.

2.2. Tratamiento sistémico

En todo "aprendizaje", se da un "*ingreso*" o "*entrada*" de informaciones en el más amplio sentido de la expresión. "Recordar", en cambio, como también "re-conocer" o "re-producir", constituyen una "*salida*" o "*gasto*". Durante el período o lapso de tiempo que media entre ingreso y gasto, los informes deben ser conservados o "almacenados", cumpliendo una fase que puede ser breve o larga. Por otra parte, un S. psicológico que aprendió algo ya no puede ser nunca el mismo, experimentando una transformación, o si se quiere, una implicación alterativa en su estructura: muchas respuestas quedarán condicionadas por las modificaciones operadas en el sistema por el aprendizaje, considerado como "input" del mismo.

Considerar el aprendizaje y el recuerdo como un ingreso, un almacenamiento y un gasto de información tiene la ventaja (que es importante) de poderlos comparar, por un lado, con los influjos hereditarios o genéticos, y, por otro, con el ordenador.

En el ámbito de la herencia, la recepción o ingreso ("input") toma la forma de modificación bioquímica cromosomática. Además, las semejanzas y diferencias entre los métodos de almacenaje propios del cerebro humano (que constituye un elemento capital del S. psicológico) y los de los ordenadores fabricados por el hombre, no estriban sólo en la **cantidad** de información que son capaces de acumular y retener: la manera de almacenar y la ingente variedad de métodos de recuperación de datos de que dispone el cerebro muestran que éste posee medios de codificación muy complejos que, en los albores del siglo XXI, aún no se han logrado superar por la tecnología constructiva de los ordenadores electrónicos.

Se cree que las teorías sobre el aprendizaje constituyen, hoy por hoy, una de las partes más abstrusas de la Psicología, debido a los esfuerzos que se han hecho para fundamentarlas en unas bases muy precisas, matemática y experimentalmente. Pero, a mi entender, este esfuerzo era necesario para ordenar y profundizar en los métodos, y también conveniente para racionalizar esta ciencia social.

Thorndike[4] trasladó al campo de la pedagogía ciertos descubrimientos suyos en el estudio de la conducta de ciertos animales, elaborando así sus conocidas tres leyes del aprendizaje: "*ley del ejercitamiento*", "*ley de la conexión asociativa*", y "*ley del efecto*". Se comprueba, entonces, que la relación estímulo-respuesta tiene lugar a diferentes niveles del sistema nervioso (que es un subsistema o elemento del S. psicológico).

En las "*curvas de aprendizaje*", se van midiendo en el eje de abscisas los **sucesivos experimentos**, y, en el de ordenadas, o bien los **aciertos**, o bien el **tiempo**, o bien el **número de errores** cometidos en cada prueba. Consecuentemente, el hecho de que una curva de aprendizaje suba o baje es arbitrario, y depende de la clase de unidad elegida. Para trazarla no es preciso que en cada prueba individual haya una serie continua de aciertos: los valores que se obtengan a intervalos bastarán, por lo común. *En la práctica, dichas curvas resultan ser de tres tipos diferentes:*

a) **Negativamente acelerada**: son mayoría. Aprendizaje rápido al principio, y disminución conforme aumenta el número de pruebas.
b) **Positivamente acelerada**: caso inverso del anterior.
c) **Configuración sigmoide**: positiva aceleración inicial y negativa aceleración final.

El "plateau" es una parte llana de algunas curvas que representa una fase en que en la capacidad discente del S. psicológico existe una limitación temporal o permanente. Pueden aparecer en distintas fases de la curva, y de su estudio se deduce que durante sus períodos de aparición posiblemente se incube o potencie una mayor capacidad de aprender: todo ello conduce al desvelamiento de la estructura del sistema, o problema planteado en la "black-box".

---

[4] **Edward Lee Thorndike** (31 de agosto de 1874 - 9 de agosto de 1949) fue un psicólogo estadounidense. Su trabajo, estudiando la conducta de los animales, le condujo a la teoría del "conexionismo". Nació en 1874 en una familia protestante de confesión metodista (su padre era pastor de una de estas iglesias), que hizo de la disciplina y la austeridad el signo de los primeros años de su vida. Ingresó en la Universidad Wesleyana de Connecticut, donde se licenció en 1895, pasando luego a la Universidad de Harvard, donde tuvo como maestro a William James. Sus investigaciones con polluelos las hizo en el mismo sótano de James. En principio, se interesó por la comunicación mediante gestos inconscientes (debido a la información que le llegó sobre un caballo que realizaba operaciones aritméticas). Tras Harvard, fue tutor en la Universidad de Columbia, en Nueva York, donde se doctoró en 1898. Continuó enseñando en Columbia hasta su jubilación en 1941. Murió en 1949.

El estudio del individuo como sistema viene confirmado cuando un hecho de comportamiento queda explicado al demostrarse que es deducible a partir de las condiciones que lo anteceden.

Hay teóricos que mantienen que todo aprendizaje se adapta a algún tipo particular de condicionamiento (recordemos el caso del perro de Pavlov, ya referido). Una respuesta condicionada se ha vinculado a un determinado estímulo; pero aquella, no puede ser más que un elemento componente de la respuesta incondicionada. El efecto de sus interacciones alcanza, a nuestro modo de ver, una elevada representatividad en el campo de la Teoría General de Sistemas.

Un aspecto digno de juicio es, así mismo, el de la personal expectación del que aprende con respecto a las consecuencias de cualquier cosa que haga por aprender. Estas esperanzas pueden entrañar diversos grados de confianza o "**probabilidad subjetiva**" de alcanzar el éxito. Esquemáticamente, lo enunciado podríamos representarlo así:

ACCIONES	RESULTADO PREMIO O GANANCIA	PROBAB. SUBJETIVA		E.M."subjetiva" o "valor medio"
A	X	Ψ_A^X	————	$X \times \Psi_A^X$
B	Y	Ψ_B^Y	————	$Y \times \Psi_B^Y$
C	Z	Ψ_C^Z	————	$Z \times \Psi_C^Z$

Como puede observarse, actuamos en un modelo probabilístico de funciones discretas. Entendiendo la esperanza matemática subjetiva como el producto de la probabilidad subjetiva por el resultado de una determinada acción (premio o ganancia), veamos que *la decisión óptima vendrá determinada por la mayor esperanza matemática subjetiva E_j de* **n** *casos distintos*, a saber:

$$\exists E_n \rightarrow \exists E_j / E_j > E_i, \begin{cases} \forall E_i \in \{E_1, E_2, ..., E_n\} \\ \forall E_j \in \{E_1, E_2, ..., E_n\} \end{cases} ;$$

siendo E_j = E. M. óptima.

En todo caso, se trata de aplicar la "*teoría matemática de los juegos de estrategia*" en la elección de un criterio óptimo. En principio, el desconocimiento o aleatoriedad de los fenómenos de aprendizaje pueden conducir al psicólogo experimentador a plantearse ciertos "*juegos contra la naturaleza*", viéndose obligado, si se acepta esta proposición, a imaginar que la naturaleza toma automáticamente el estado que le va a ser más desfavorable al S. gestor, como supone implícitamente el criterio de Von Newmann.

2.3. La dicotomía: Adaptación – Aprendizaje

Un Sistema psicológico no puede sobrevivir en un contexto en movimiento más que cuando es capaz de evolución, es decir, de "**adaptación**" a las modificaciones del universo que lo rodea. Normalmente, el mecanismo de adaptación podría ser, en nuestra opinión, el de la prueba-error ("trial-errors"), consistente en los siguientes estadios:

a) **Seleccionar un estado.**
b) **Comprobar los resultados.**
c) **Conservar la solución si resulta satisfactoria** (es decir, si las V.C. toman los valores deseados). En caso contrario, procede:
d) **Seleccionar otro estado**, hasta llegar a una solución aceptable (estados de la zona de estabilidad).

Ahora bien, si la duración de la búsqueda de estas zonas de estabilidad es incompatible con la cadencia de modificación de perturbaciones, el S. psicológico siempre se encontrará retrasado y en desequilibrio. Ahí aparece el papel del control y de la regulación, situados entre el sistema y el universo, consistente aquél en la búsqueda de zonas de estabilidad, con la rapidez adecuada, en función de la información que recibe del S. exterior.

La rapidez de adaptación depende de la variedad y repetición de las influencias exteriores, pero está favorecida por la capacidad de "**aprendizaje**". Es lo que ocurre cuando el S. Psicológico, frente a un grupo de variables de entrada **U**, halla los valores de las V.A. (variables de acción) que permiten lograr y mantener los objetivos con más rapidez que, cuando en el pasado, recibió el mismo grupo **U** de V.E. Entonces, podremos afirmar que el "**S. Psicológico ha aprendido**".

Así pues, la "**adaptación**" es la facultad de seguir las evoluciones futuras, y el "**aprendizaje**", la facultad de utilizar los efectos procedentes de las adaptaciones pasadas.

A raíz de todo ello, surgen unas cuantas definiciones y clasificaciones en las que pueden encontrarse los S. psicológicos, a saber:

1 – S. "sub - organizado": *es aquél en que el acoplamiento entre dos elementos es muy débil.* Como consecuencia de ello, la información circula muy lentamente o incluso no circula: la adaptación, por tanto, es lenta en manifestarse, quedando, además, muy localizada. De este modo, el S. se

organiza en una yuxtaposición de sub-sistemas independientes, o muy débilmente acoplados, que permanecen inmóviles (puesto que las informaciones y/o perturbaciones no "llegan"). El aprendizaje se convierte, entonces, en rutina, por falta de luchar contra situaciones nuevas.
2 – S. "super - organizado": *es aquél en que todo elemento reacciona sobre todos los demás*, ocasionando, su carencia, serios trastornos.
3 – S. "muy fuertemente acoplado": *es aquél en que todos sus elementos están ligados entre sí.*

Probablemente, los S. variables y eficaces se encuentran entre los extremos anteriormente citados.

3. Comunicación

El ser humano, como es sabido, es un animal social: su sociabilidad es parte de su herencia biológica, lo cual significa que, por naturaleza, el hombre y la mujer viven relacionándose con otros hombres y/o mujeres, con los que forma diversos grupos, entre ellos el de la familia, institución de la que se ha llegado a afirmar que constituye la "célula de la sociedad".

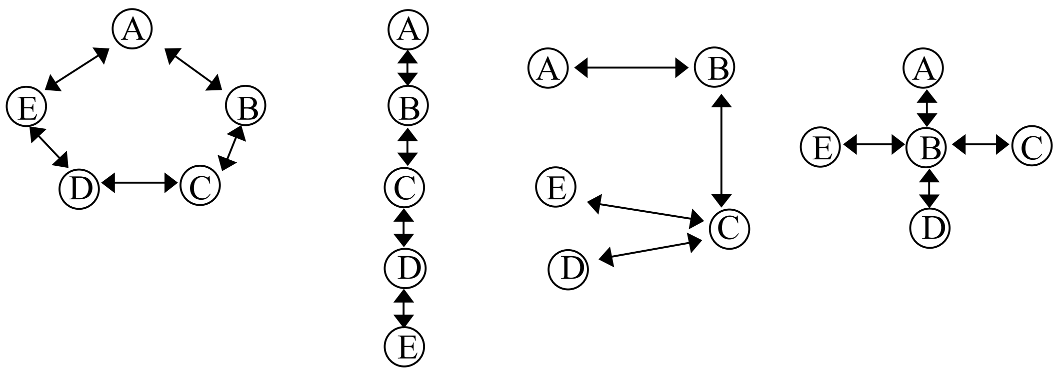
Toda agrupación es –aparte de otros conceptos que por razones obvias de espacio no podemos tratar en este estudio– *un* **sistema** *de comunicaciones de variable eficacia*. Para que la comunicación dentro de un mismo grupo o sistema ("caja negra" o *black box*) o entre dos ó más (contexto general) resulte eficiente, deben cumplirse ciertas condiciones, algunas de las cuales son relativas a los mensajes mismos, y constituyen una problemática típicamente psicológica.

La comunicación social se realiza cuando un emisor transmite información a un receptor. Pero esto sólo puede ocurrir respecto de algo acerca de lo cual el receptor está inseguro; de lo contrario, normalmente, no vendrían a aumentársele los informes que ya poseyera con anterioridad. La inseguridad (o duda) equivale –en el lenguaje que nos interesa en el presente trabajo– a la presencia de alternativas, y *el "grado de duda" del receptor puede medirse por el número de alternativas u opciones que se le ofrecen para elegir.* Pueden surgir, así mismo, problemas de cuantificación para averiguar cuánto es lo que se debe transmitir para que el mensaje se comunique completo, sin menoscabos de ninguna clase.

Por otra parte, resulta un hecho evidente y, en todo caso, demostrable, que las respuestas postreras de varios sistemas "encadenados" por una comunicación van perdiendo su intensidad inicial (amén de experimentar unas modificaciones estructurales que aquí no pueden incumbirnos). En los "rumores artificiales", creados por un experimentador, se demostró que estas pérdidas son de cerca de 1/3 del contenido, por término medio, cuando el rumor se transmite de la 1ª persona o sistema al 2º sistema. Prodúcese una ulterior pérdida proporcional, más bien pequeña, al transmitírselo el 2º sistema al 3º, y otra pérdida cuando el rumor pasa al 4º sistema. Posteriormente, se va conservando, poco más o menos, alrededor de un 30% de la información original. Esta especie de transmisión en serie de un sistema a otro pueda producirse en cuestión de minutos, y la continua pérdida de información resulta comparable a la pérdida de memoria individual correspondiente a un período de 2-3 semanas. Es decir: que el 1^er^ sistema reproduciría al cabo de aproximadamente 15 días la misma información o fracción del mensaje original que el 5º sistema de la serie podría reproducir al cabo de ½ hora de haberse iniciado la comunicación.

El universo "burocrático" se caracteriza por presentar un tipo de comunicación "**en cadena**". Sin embargo, cuando hablamos de una "dictadura" pensamos en otro tipo de comunicación: "**en estrella**" ("**confluencia**"), desde cuyo centro una autoridad irradia órdenes indiscutibles a sus subordinados. Un "**anillo**" comercial significa que los miembros que lo constituyen poseen privilegios, de los que están excluidos los que no pertenecen a él. Los ejércitos, universidades, partidos políticos, fábricas y talleres, bancos y cajas de ahorro, individuos aislados..., constituyen sistemas con redes de comunicación características.

Pues bien, *considerando ahora 5 sistemas* (A, B, C, D, E) *psicológicos intercomunicables, representemos esquemáticamente los diversos tipos expuestos:*



CIRCULO (ANILLO) — CADENA — BIFURCACION (HORCA) — CONFLUENCIA (ESTRELLA)

FIG. 5.1. Tipos de comunicación entre los sistemas.

Vamos ahora a analizar separadamente cada uno de ellos:

- **En el CÍRCULO o ANILLO**, cada S. psicológico (individuo o conjunto de ellos) puede comunicarse con sus vecinos posicionales de ambos lados.

- **En la CADENA**, **A** no puede comunicarse con **E** ni tampoco vice-versa pues, de lo contrario, las condiciones serían las mismas que las del círculo o anillo; **A** y **E** constituyen, en definitiva, los eslabones extremos de una CADENA.

- **La HORCA o BIFURCACIÓN** es una cadena de 4 miembros:

A – B – C – D, siendo reemplazado el **D◄──►E** de la cadena por el **C ◄──►E** .

- **La CONFLUENCIA o ESTRELLA,** por último**,** se distingue por tener un miembro central **B** a través del cual deben ir pasando todos los mensajes.

Se realizaron experiencias con las 4 disposiciones anteriormente reseñadas, estableciéndose una marca de velocidad, errores y número de mensajes o "respuestas" transmitidas. *La mayoría de los errores observados fueron cometidos por el tipo CÍRCULO, y el menor número de ellos por los tipos HORCA y CONFLUENCIA* (aunque este último daba, a su vez, menos mensajes que el CÍRCULO). Hubo pocas diferencias entre las disposiciones en cuanto a la velocidad con que se emitieron los "outputs" (respuestas).

Observemos, ahora, un ejemplo de modelo de comunicación pública, tal como el del **tráfico**. El conductor constituye un sistema psicológico que va recibiendo continuamente información –en su mayor parte visual– del tráfico que le rodea. Hasta qué punto debe depender de esta avalancha de informes visuales y sonoros lo comprenderá dramáticamente si cierra los ojos por unos momentos mientras conduce su vehículo. Pero no sólo debe absorber información –mucha de la cual no va primordialmente dirigida al sistema– sino que, además, ha de transmitir mensajes a otros sistemas (conductores y peatones de las proximidades) empleando un código reconocido de señales visuales y auditivas o acústicas.

- **Conclusión:** *El ser humano, considerado como sistema, recibe, almacena y transmite informes emotivos e intelectuales. Y él mismo, como individuo, constituye, en sí, un S. de autocomunicación:* en efecto, ¿no toma muchas veces el "pensar" como forma de conversación interior?. Pero esta última proposición queda velada por el problema de "black-box".

Por otra parte, y a nuestro entender, uno de los cometidos principales del psicólogo es medir la cantidad de información recibida por un individuo o sistema en unidades "subjetivas" (que son distintas de las "objetivas"). Y es por todo ello que la aplicación de la Teoría General de Sistemas a este apartado psicológico se nos antoja altamente interesante.

4. Elección y Valoración

4.1. Introducción

Como ya hemos apuntado anteriormente en el segundo epígrafe del presente capítulo, en la elección racional puede aplicarse la teoría de los juegos de estrategia, conocida técnica matemática de la Investigación Operativa que nos determinará, bajo unas condiciones dadas, la elección óptima, tras la elección subjetiva de un cierto criterio de juego que vendrá implicada por la actitud del jugador o sistema psicológico.

Sin embargo, frecuentemente, *el problema del psicólogo no es tanto el hallazgo de una elección óptima como el estudio o análisis de una elección determinada, ya previamente realizada por un individuo o Sistema*. Y este segundo problema posee profundas implicaciones psicológicas cuyo estudio no constituye objeto del presente libro.

4.2. El planteamiento histórico del problema

Posiblemente, sea justo resaltar, por encima de cualquier otra apreciación, desde el punto de vista operativo, el hecho de que los matemáticos suizos **Cramer**[5] (1704-1752) y **Bernouilli**[6] (1700-1782) hicieran notar que el valor o utilidad que, subjetivamente, asignamos al aumento de nuestro capital, va disminuyendo con cada adición sucesiva.

Ahora bien, mientras **Cramer** supuso que la utilidad de cada unidad adicional es inversamente proporcional a la utilidad del número de unidades que ya se poseyeran, **Bernouilli** supuso que es inversamente proporcional al número de unidades ya poseídas antes del aumento. Por otra parte, según **Cramer**, la utilidad de nuestra riqueza crece como la raíz cuadrada de su cantidad, mientras que, según **Bernouilli**, dicha utilidad aumenta como el logaritmo de nuestra riqueza.

Veamos, esquemáticamente, ambas concepciones. Siendo:

$P \longrightarrow$ unidades de valor

$U \longrightarrow$ utilidad

$H \longrightarrow$ riqueza

$K_i, K_j \longrightarrow$ constantes

[5] Gabriel Cramer trabajó en Análisis y determinantes. Llegó a ser profesor de matemáticas en Ginebra y escribió un trabajo donde relataba la historia de la física. También destacó en geometría y en la historia de las matemáticas. Cramer es más conocido por su trabajo en el estudio de matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes, pero también hizo contribuciones notables en el estudio de las curvas algebraicas (1750).

[6] Daniel Bernouilli fue el segundo hijo de Johann Bernouilli y sobrino de Jacob Bernouilli, hermano a su vez de Nicolás y Johann. En el año 1725, Daniel y su hermano Nicolás fueron invitados a trabajar en la Academia de Ciencias de St. Petersburg. Allí colaboró con Leonard Euler, quien llegó a St. Petersburg en el año 1727. En el año 1731 Daniel extendió sus investigaciones para cubrir problemas de la vida y de la estadística de la salud. En 1733 Daniel regresó a Basilea donde enseñó anatomía, botánica, filosofía y física. Su trabajo más importante fue en hidrodinámica, en que consideraba las propiedades más importantes del flujo de un fluido, la presión, la densidad y la velocidad y dio su relación fundamental conocida ahora como "Principio de Bernouilli" o Teoría Dinámica de los Fluidos. También estableció la base de la teoría cinética de los gases. Entre los años 1725 y 1749 ganó diez premios por sus trabajos en astronomía, gravedad, mareas, magnetismo, corrientes del océano y el comportamiento de los buques.

Las dos concepciones anteriormente expresadas son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{CRAMER} \quad \rightarrow U(P+1) = \dfrac{K_i^c}{U(1+2+\ldots+P)} \rightarrow U(H) = K_j^c \times \sqrt{H} \\ \text{BERNOUILLI} \quad \rightarrow U(P+1) = \dfrac{K_i^B}{P} \rightarrow U(H) = K_j^B \times \log H \end{cases}$$

De hecho, ni Cramer ni Bernouilli adujeron pruebas concluyentes en apoyo de sus respectivas hipótesis. Y la única que, desde entonces, se ha aportado (por parte de E. H. Galanter), más bien parece dar la razón a Cramer (pareció poder deducirse que para "duplicar" la felicidad del individuo haría falta "cuadruplicar" el regalo).

El principio expuesto de Cramer – Bernouilli posee importantes consecuencias y derivaciones en la Psicología de lo económico (fijación del aumento de los salarios por parte del empresario o Convenio Colectivo sindical, según la apreciación subjetiva del obrero; fijación del aumento de impuestos por parte del ministerio de Hacienda, del Parlamento o del Plenario municipal, de modo que el contribuyente apenas lo advierta).

4.3. "Utilidad" y conducta del sistema psicológico

El punto de partida acostumbrado en el estudio de la conducta del consumidor es el postulado de su racionalidad. Se supone que el sistema consumidor escoge entre todas las alternativas de consumo posibles, de modo que la satisfacción obtenida de los bienes elegidos (en el más amplio sentido) sea lo mayor posible. Esto implica que se da cuenta de las alternativas que se le presentan y que es capaz de valorarlas. *Toda la información relativa a la satisfacción que el consumidor obtiene de las diferentes cantidades de bienes por él consumidos, se halla contenida en su función microeconómica de utilidad.*

El concepto de utilidad y su maximización hállase vacío de todo significado sensorial. El aserto de que un cierto consumidor/a experimente, por ejemplo, mayor satisfacción o utilidad por la adquisición de un automóvil que de un conjunto de vestidos, significa que si se le presentase la alternativa de recibir como regalo un automóvil o un conjunto de vestidos elegiría lo primero. Algunos bienes o servicios que son necesarios para sobrevivir, como una vacuna cuando se declara una epidemia o sangre ante la perentoriedad de una transfusión, pueden resultar para el consumidor de máxima utilidad, aunque el acto de consumirlas no lleve precisamente anexa ninguna sensación agradable, como por ejemplo un molesto pinchazo.

Los economistas del siglo XIX W. Stanley Jevons, León Walras y Alfred Marshall consideraban la utilidad medible, al igual que es medible el peso de los objetos, presumiendo que el consumidor poseía una medida cardinal de la utilidad, y siendo capaz de asignar a cada bien o combinación de ellos un número representando la cantidad de utilidad asociada con él. Los números que representaban cantidades de utilidad podían manipularse del mismo modo que los pesos de los objetos. Así, si la utilidad de A es de 15 unidades, y la de B es de 45 unidades, el S. consumidor "preferiría" tres veces más B que A. Las diferencias existentes entre los índices de utilidad podrían compararse o relativizarse, y la comparación podría llevar a razonamientos curiosos tales como: "A es preferible a B dos veces lo que C es preferible a D".

También se supuso que las adiciones a la utilidad total del consumidor, resultantes del consumo de nuevas unidades de un producto o servicio, disminuían cuanto más se consumiese del mismo, algo así como la "ley de los rendimientos decrecientes" en agricultura. Entonces, la conducta del S. consumidor puede deducirse fácilmente con el siguiente razonamiento: *no aumentará el consumo de un producto si el aumento en una unidad involucra una pérdida neta de utilidad; sólo aumentará su consumo si con ello realiza una ganancia neta de utilidad.* Este es el sentido en el que la teoría predice la conducta del consumidor.

Las hipótesis sobre las que está construida la teoría cardinal de la utilidad son muy restrictivas: se pueden deducir conclusiones equivalentes partiendo de hipótesis mucho más débiles. Por este motivo, no hay por qué suponer que el S. consumidor posee una medida cardinal de la utilidad, o que dicha utilidad marginal disminuye a medida que se aumenta el consumo de un producto.

Si el S. consumidor obtiene mayor utilidad de una alternativa A que de una B, se dice que prefiere A a B[7]. *El postulado de la racionalidad equivale a la formulación de las cuatro siguientes afirmaciones:*

1 – *En cada posible par de alternativas A y B , el S. consumidor sabe si prefiere A a B , B a A , o está indeciso entre ellas.*
2 – *Sólo una de las tres posibilidades anteriores resulta verdadera para cada par de alternativas.*
3 – *Si el consumidor prefiere* A a B, y B a C, *también preferirá A a C, como aplicación lógica de la propiedad transitiva.* Esta última afirmación garantiza que las preferencias del S. consumidor son consistentes o "transitivas". Efectivamente, si se prefiere un automóvil a un vestuario y éste, a su vez, a un tazón de sopa, también se preferirá un automóvil a un tazón de sopa.
4 – *Si se considera, por último, que A es preferible a B y B es preferible a A y que, como consecuencia de ello, las preferencias del S. consumidor hacia A y B son las mismas*, nos hallaremos en presencia de una "relación de orden estricto" desde el punto de vista de la Teoría de Conjuntos.

[7] Una cadena de definiciones debe detenerse alguna vez. La palabra o tiempo verbal "prefiere" (tercera persona del singular del presente de indicativo) se podría definir en el sentido de "gusta más que", pero entonces esta última expresión tendría que dejarse, a su vez, sin definir. El término "preferir" está huero de cualquier significado relacionado con un determinado placer sensorial.

El postulado de la racionalidad, tal como acaba de establecerse, solamente requiere que el consumidor sea capaz de clasificar los bienes y servicios en orden de preferencia. El S. psicológico posee una medida de la utilidad ordinal, o sea, no precisa ser capaz de asignar números que representan (en unidades arbitrarias) el grado o cantidad de utilidad que obtiene de los artículos: su clasificación de los mismos se expresa matemáticamente por su "**función de utilidad**", que no es única y se supone continua, así como su primera y segunda derivadas parciales, al tiempo que asocia ciertos números con varias cantidades de productos consumidos; pero estos números suministran sólo una clasificación u orden de preferencia. Si la utilidad de la alternativa A es 15, y la de B es 45 (esto es, si la función de utilidad asocia el número 15 con la alternativa o bien A y el número 45 con la alternativa B), sólo puede decirse que B es preferible a A , pero **resulta absurdo colegir que B es tres veces preferible a A .**

Esta nueva formulación de los postulados de la teoría del consumidor no se produjo hasta finales del siglo XIX. Es notable que la conducta del S. consumidor pueda explicarse tan correctamente en términos de una función de utilidad ordinal como en los de una cardinal. Intuitivamente, puede observarse que las elecciones del consumidor están completamente determinadas si se posee una clasificación –y sólo una– de los productos, de acuerdo con sus preferencias. De este modo, podemos imaginar al S. psicológico poseyendo una lista de productos en orden decreciente de deseabilidad; cuando percibe su renta disponible, empieza comprando los productos que encabezan dicha lista, y desciende tanto como le permite dicha renta[8]. *Por lo tanto, no es necesario presumir que el S. psicológico posee una medida cardinal de la utilidad; es suficiente con sostener la hipótesis, mucho más débil, de que posee una clasificación consistente de preferencias*[9].

4.4. Modelos de elección

4.4.1. Concepto

Resulta factible proponerse distintos modelos teóricos de elección. Los procedentes de la matemática estadística pueden basarse en el supuesto de que el que elige, o S. psicológico, es hombre que discurre (inteligente y prudente) y, en consecuencia, se le presentan varias tácticas racionales a seguir. Dichos modelos son los que estudia la Teoría de los Juegos de estrategia, y que ya he citado anteriormente.

Sospecho, sin embargo, que los modelos de elección más eficientes desde el punto de vista psicológico deben ser construidos para "explicar" y predecir el

[8] Resulta irrelevante cuánto se apetece un artículo concreto de la lista; siempre se escogerá el artículo que ocupe en ella un lugar más elevado.
[9] *Vide* HENDERSON-QUANDT en *Microeconomic Theory (A mathematical approach).* Hay traducción al castellano en Ed. Ariel. Barcelona, 1962. Citado en la bibliografía.

comportamiento "real" de quien elige: la forma de actuar preferida es aquella con la que, subjetivamente, parezca que el valor o la utilidad resultarán mayores. En el fondo se trata de juegos contra la naturaleza, a resolver por el Criterio de Laplace o de igual verosimilitud. Al ser conocidas las probabilidades de los diferentes estados posibles de la naturaleza (probabilidades "subjetivas"), se utilizará el criterio de la esperanza matemática máxima (si es matriz de utilidades) o mínima (si es matriz de "penas" o "lamentos"), reduciendo la matriz del juego a una matriz o vector columna.

No se trata, por tanto, de escoger simplemente entre dos objetos cualitativamente distintos, sino de elegir entre la oportunidad de sacar un provecho y la de sacar otro (y este hecho viene a complicarse con la aparición de las probabilidades subjetivas).

4.4.2. Un ejemplo belicoso

Vamos a presentar, a continuación, un supuesto que puede ser real en una confrontación armada (¡ojalá no se produjera nunca!). Un mando militar ignora si el mando militar enemigo empleará, en la batalla que se avecina, las siguientes fuerzas:

x (3 brigadas de infantería y 1 acorazada).

y (2 brigadas de infantería y 2 acorazadas).

El mando militar actúa como un S. psicológico. Las dos realidades posibles son **x** e **y** , y el mando piensa que las probabilidades subjetivas son:

$\psi_x = 1/4$

$\psi_y = 3/4$.

Los resultados posibles de la batalla que se prepara son tres:

V (victoria)
I (resultado indeciso) ,
D (derrota)

y el mando las valora así, según las utilidades respectivas:

U (V) = 3
U (I) = 2
U (D) = -1

A su vez, el mando militar puede disponer sus tropas de 2 modos distintos:

a
b , y sabe que su "*probabilidad subjetiva*" respecto de: V
I
D , se ha

de resolver en cada una de las siguientes combinaciones posibles: a – x
a – y
b – x
b – y .

Finalmente opta por **a** o por **b** según a cuál de estos modos se corresponde la mayor utilidad esperable, habida cuenta de su valoración de las probabilidades de **x** y de **y** en el estado actual de la situación. Se pueden representar los valores hipotéticos de la probabilidad subjetiva del mando (ψ), tocante a la victoria, empate y derrota, respectivamente, en cada una de las 4 combinaciones citadas, como sigue a continuación:

VALORES ψ

	de la victoria (V) (U = 3)	del empate (I) (U = 2)	de la derrota (D) (U = -1)	∑
a – x	0'3	0'2	0'5	1'0
a – y	0'4	0'3	0'3	1'0
b – x	0'3	0'3	0'4	1'0
b – y	0'1	0'6	0'3	1'0

FIG. 5.2. Valores hipotéticos de la probabilidad subjetiva del mando.

El mando militar comparará, ahora los cálculos para **a** con los de **b**, siguiendo el criterio de elección de la esperanza matemática o valor medio máximos (pues se manejan utilidades).

Y así, obtendremos lo siguiente:

$$(\text{E.M.})_a = \frac{1}{4}\left[3\times 0'3 + 2\times 0'2 + (-1)\times 0'5\right] + \frac{3}{4}\left[3\times 0'4 + 2\times 0'3 + (-1)\times 0'3\right] =$$
$$= 0'200 + 1'125 = 1'325$$

También:

$$(\text{E.M.})_b = \frac{1}{4}\left[3\times 0'3 + 2\times 0'3 + (-1)\times 0'4\right] + \frac{3}{4}\left[3\times 0'1 + 2\times 0'6 + (-1)\times 0'3\right] =$$
$$= 0'275 + 0'900 = 1'175$$

De este modo, racionalmente, **el mando militar debe disponer sus tropas del modo <u>a</u>**, dado que, como hemos comprobado:

$$\boxed{(E.\ M.)_a > (E.\ M.)_b} \quad .$$

CAPÍTULO 6
De interés para el psicólogo experimentador

1. Los albores de la psicología experimental

1.1. Introducción

Podríamos definir la **psicología experimental** como la aplicación de un conjunto de técnicas de laboratorio, semejantes a las de las ciencias naturales, para el estudio del comportamiento y los fenómenos psíquicos, entre los que se incluyen elementos de estudio tradicionales de la psicología, como la percepción, la memoria, el pensamiento, el aprendizaje y la resolución de problemas. La **psicología experimental** es una aproximación que considera que los fenómenos psicológicos pueden ser estudiados por medio del método experimental. El método experimental implica la observación, manipulación y registro de las variables (dependiente, independiente e intervinientes) que afectan un objeto de estudio. En la medida en que el uso del método experimental garantiza una práctica científica, la parte más científica de la psicología se identifica precisamente con la psicología experimental.

El término "psicología experimental" se refiere más a una clasificación de la psicología en términos metodológicos y no en términos substantivos. Por lo tanto, cualquier escuela o corriente psicológica que utilice el método experimental es considerada como parte de la psicología experimental, independientemente de las consideraciones epistemológicas sobre su objeto de estudio. Áreas como la percepción, el aprendizaje y la cognición han sido estudiadas tradicionalmente con el método experimental.

Pues bien, hemos creído conveniente realizar una síntesis histórica, al comienzo del presente capítulo de nuestro libro, sobre los inicios de la Psicología experimental que, por razones obvias, también puede resultar de gran interés para el psicólogo experimentador.

1.2. Los siglos XVII y XVIII: la epistemología de la mente

Siguiendo el trabajo de Robert H. Wozniak ("Mente y cuerpo: de René Descartes a William James"), veamos que de acuerdo con la opinión aceptada mayoritariamente[1], la psicología científica tuvo su comienzo en Alemania en la forma de una psicología fisiológica nacida del matrimonio entre la filosofía de la mente, por un lado, y la fenomenología experimental enraizada en la fisiología

[1] *Vide* **Boring, E.G.** (1950). *A History of Experimental Psychology.* New York: Appleton-Century-Crofts, Inc.

sensorial, por otro. La psicología filosófica, preocupada por el problema epistemológico de la naturaleza de la mente cognoscente en relación al mundo conocido, aportó cuestiones fundamentales y estructuras explicativas; la fisiología sensorial y en cierto grado la física contribuyeron con los métodos experimentales y un creciente cuerpo de datos fenomenológicos.

En una versión de esta historia que puede ser rastreada al menos hasta Ribot[2], la epistemología de los siglos XVII y XVIII culminó en la obra de Immanuel Kant[3], quien negó la posibilidad de que la psicología llegara a ser una ciencia empírica por dos causas:

> 1ª) Puesto que los procesos psicológicos varían en una sola dimensión, el tiempo, no pueden ser descritos matemáticamente.
>
> 2ª) Puesto que los procesos psicológicos son internos y subjetivos, Kant afirmó también que no podían ser medidos.

Obviamente, las anteriores consideraciones del genio de Königsberg resultaron, con el tiempo, erróneas. No obstante, tanto la corriente del *empirismo* como la del *racionalismo* van a confluir en Kant. El empirismo acabó en David Hume (1711-1776) en escepticismo fenomista. El racionalismo culminó en Leibnitz (1646-1716), cuyas doctrinas sistematizadas y trivializadas por su discípulo Christian Wolff, acabaron en un dogmatismo racionalista. Kant, influido sucesivamente por ésta y por aquella tendencia, intenta superarlas fundiéndolas en su *apriorismo*, en el que señala a la experiencia y a la razón el papel preciso que desempeñan en el conocimiento. Al mismo tiempo, intenta superar el escepticismo y el dogmatismo con su *criticismo*, sometiendo a un severo examen las facultades cognoscitivas del ser humano y señalándoles, en tajantes límites, lo que pueden y lo que no pueden. Para lograr una exacta comprensión de Kant y de su pensamiento, no hay que olvidar tampoco el

---

[2] *Vide* **Ribot, T**. (1879). La psychologie allemande contemporaine ... Paris: Librairie Germer Baillière et Cie. [ENG: (1886). German Psychology of To-Day. New York: Charles Scribner's Sons.]

[3] Immanuel Kant nació en 1724 y murió en 1804; filósofo alemán, considerado por muchos como el pensador más influyente de la era moderna. Nacido en Königsberg (ahora, Kaliningrado, Rusia) el 22 de abril de 1724, Kant se educó en el *Collegium Fredericianum* y en la Universidad de Königsberg. En la escuela estudió sobre todo a los clásicos y en la universidad, física y matemáticas. Tras la muerte de su padre, tuvo que abandonar sus estudios universitarios y ganarse la vida como tutor privado. En 1755, ayudado por un amigo, reanudó sus estudios y obtuvo el doctorado. Después, enseñó en la universidad durante 15 años, y dio conferencias primero de ciencia y matemáticas, para llegar de forma paulatina a disertar sobre casi todas las ramas de la filosofía. Aunque las conferencias y escritos de Kant durante este periodo le dieron reputación como filósofo original, no se le concedió una cátedra en la universidad hasta 1770, cuando se le designó profesor de lógica y metafísica. Durante los 27 años siguientes continuó dedicado a su labor profesoral y atrayendo a un gran número de estudiantes a Königsberg. Las enseñanzas religiosas nada ortodoxas de Kant, que se basaban más en el racionalismo que en la revelación divina, le crearon problemas con el Gobierno de Prusia y en 1792 Federico Guillermo II, rey de esa nación, le prohibió impartir clases o escribir sobre asuntos religiosos. Kant obedeció esta orden durante cinco años, hasta la muerte del rey, y entonces se sintió liberado de su obligación. En 1798, ya retirado de la docencia universitaria, publicó un epítome donde se contenía una expresión de sus ideas de materia religiosa. Murió el 12 de febrero de 1804.

impacto causado en él por el éxito de la Física galileo-newtoniana y que su vida se desarrolló en plena época de la Ilustración.

Para Kant, la función propia del entendimiento es la facultad de *juzgar*, esto es, unir en la síntesis judicativa los conceptos puros a los datos de la experiencia, mientras que la función propia de la razón es *concluir*, o sea, llegar a los últimos resultados. Las síntesis finales a las que se aspira constituyen las ideas de la razón. El ser humano aspira a la síntesis de todos los fenómenos materiales: ésta es la *idea del mundo* como totalidad.

De cualquier modo, veamos que el pensamiento de Kant desempeña un papel insoslayable en la historia de la filosofía; criticista en materia de conocimiento, rigorista en moral y apto para pensar la belleza. Su idealismo trascendental abre la vía al idealismo subjetivo de Fichte (1762-1814), al idealismo objetivo de Schelling (1775-1854) y al idealismo absoluto de Hegel (1770-1831). Kant es el fundador de la filosofía alemana; resulta imposible, ni siquiera hoy, filosofar sin topar con la profundidad de su pensamiento aquí o allá, a la vuelta de cualquier camino, en cualquier esquina, como en el caso de la psicología que hoy nos ocupa.

Sobre las contribuciones en este campo de los grandes empiristas ingleses (Locke, Berkeley y Hume) ya hemos tenido ocasión de comentar más específicamente en el capítulo 5 de nuestro libro, por lo que las obviaremos aquí.

David Hartley (1705-1757) nació en Luddenden, Halifax, Inglaterra, y fue educado en el *Jesus College* de Cambridge. En 1749, publicó su obra en dos volúmenes titulada *Observations on Man*. Aunque el principio general de la asociación fue usado mucho antes de Hartley y la frase "*asociación de ideas*" puede encontrarse en el Apéndice de la 4ª edición del *Essay* de Locke, es con Hartley, como Young (1970) nos dice, que "*la psicología asociacionista adopta por primera vez una forma definida y un carácter psicológico no completamente derivado de cuestiones epistemológicas. Hartley fue el primero en aplicar el principio de asociación como una explicación fundamental y exhaustiva de toda experiencia y actividad... Por otra parte, unió su teoría psicológica con postulados acerca de cómo funciona el sistema nervioso. Sus sensaciones eran comparadas con las vibraciones... o partículas 'elementales' en los nervios y el cerebro... En relación a los fenómenos de sensación, formación de ideas y motivación en el sistema nervioso planteó los principios de la psicología fisiológica que Ferrier combinaría más tarde con el concepto de localización cerebral*" (p. 95-97).

Étienne Bonnot de Condillac (1715-1780) nació en Grenoble, estudió teología en Saint-Sulpice y en la Sorbonne, y fue ordenado sacerdote en 1740. De las dos fuentes del conocimiento de Locke, las sensaciones transmitidas a través del sentido externo y las reflexiones por medio del sentido interno, Condillac puso su atención sólo en la primera. Su *Traité des sensations*, publicado en 1754, estaba destinado a mostrar que las impresiones externas recibidas por los sentidos externos, tomadas en sí mismas, pueden dar cuenta de todas las ideas y de todas las operaciones mentales. Utilizando el famoso ejemplo de una estatua dotada de la única propiedad de un solo sentido singular, el olfato, intentó derivar de él la atención, la memoria, el discernimiento, la imaginación y la totalidad de la vida mental. Las opiniones de Condillac eran, claramente, la más extrema forma de la perspectiva de la *tabula rasa*. Como todas las opiniones basadas en la *tabula rasa*, no importa cuán poderoso sea el principio de asociación correlativo; el sensacionalismo extremo de Condillac entra en colisión con el hecho obvio de la variación en la constitución biológica (diferencias entre especies, diferencias individuales).

En contraste directo con Condillac, Thomas Reid (1710-1796) eligió destacar el sentido interno de Locke, construyendo sobre la simple noción de reflexión el desarrollo de una elaborada teoría de las intuiciones y facultades de la mente humana dada por medio de su constitución fundamental. Reid nació cerca de Aberdeen y fue educado en el *Marischal College*. Inicialmente influenciado por Berkeley, su antipatía por las conjeturas implícitas en el *Treatise of Human Nature* (1739) de Hume, le condujo lejos de Berkeley y de Hume, aproximándose hacia la reforma de la filosofía. Su obra más importante, *An Inquiry into the Human Mind on the Principles of Common Sense*, fue publicada en 1764, año en el que aceptó su nombramiento como profesor de filosofía moral en la Universidad escocesa de Glasgow. En *Inquiry* Reid desarrolló el básico postulado intuitivo de la filosofía del "*sentido común*" sobre el que se erigió la escuela escocesa de psicología. Las intuiciones eran tendencias oriundas de la acción mental, aspectos de la constitución fundamental de la mente humana que regulaba la experiencia consciente de todos los seres humanos desde el nacimiento. Dado que las intuiciones requieren la presentación de objetos apropiados para ser llamados en adelante a la acción mental, la filosofía escocesa es realista. Las intuiciones no proyectan la mente hacia la realidad, permiten el acceso de la mente a ella a pesar de que el intuicionismo es un innatismo de los procesos psicológicos, es un empirismo metodológico en el que se investiga la naturaleza y la existencia de los principios innatos de la mente que tienen lugar por medio de la inducción a partir de hechos observados en la autoconciencia. Fue esta perspectiva, asociada con los últimos análisis de las facultades específicas de Reid (1785, 1788), lo que dominó la filosofía mental académica americana durante el siglo XIX. Fue también indirectamente a partir de Reid que Gall obtuvo la lista original de 27 facultades de la mente que guiaban su intento de hacer un mapa de la localización de las funciones en el cerebro.

1.3. El siglo XIX: epistemología del sistema nervioso

Se ha venido señalando que, entre 1800 y 1850, los descubrimientos en el campo de la fisiología contribuyeron a poner los fundamentos para el surgimiento de la psicología experimental. Los acontecimientos de particular interés para nosotros son los siguientes:

a) la primera elaboración de una distinción entre nervios sensoriales y motores;
b) el surgimiento de una fenomenología sensorial de la visión y el tacto; y
c) el desarrollo de la doctrina de las energías nerviosas específicas, incluyendo la opinión de que el sistema nervioso establece una mediación entre la mente y el mundo.

Mientras se estaban haciendo estos descubrimientos, ocurrían también dos importantes avances en la psicología filosófica: la elaboración de las leyes secundarias de asociación y el primer intento de una descripción cuantitativa de los parámetros que afectan al movimiento de las ideas por encima y por debajo de un determinado umbral.

El primero de estos relevantes descubrimientos fisiológicos, la distinción entre nervios sensoriales y motores, se debe a Charles Bell (1774-1842). Bell nació en Edinburgh y recibió una educación informal. Pese a que asistió a las lecciones en la Universidad de Edinburgh, la mayor parte de su instrucción anatómica y quirúrgica la recibiría Bell de su hermano mayor, John, reputado médico. Cuando Bell andaba por los veinte años era ya un cirujano muy estimado y en 1799 había sido admitido en el *Royal College of Surgeons* en Edinburgh. En 1806, se trasladó a Londres y cinco años más tarde se unió a la *Hunterian School of Anatomy*. Fue en el mismo año, 1811, cuando Bell imprimió cien copias de las treinta y seis páginas de su opúsculo titulado *Idea of a New Anatomy of the Brain* para que circulase de forma privada entre sus amigos y colegas.

En *New Anatomy*, Bell utilizó las evidencias anatómicas para sostener que las raíces ventrales de la médula espinal contenían sólo las raíces motoras y dorsales, sólo las fibras sensoriales. Con ello, había derribado siglos de tradición en los que se asumía implícitamente que las fibras nerviosas estaban indiscriminadas respecto de las funciones sensorial y motora y estableció la distinción fundamental entre estos dos tipos de procesos nerviosos. Como ya hemos visto, la combinación de esta distinción con el asociacionismo sensorio-motor condujo, en manos de Bain y Spencer, a la primera psicología psicofisiológica propiamente dicha y, a través de Jackson y Ferrier, al establecimiento del paradigma sensorio-motor como fundamento de la localización funcional en el córtex.

El primer progreso filosófico relevante fue aportado por Thomas Brown (1778-1820). Brown nació en Kirkmabreck, Escocia, y estudió filosofía y medicina en la Universidad de Edinburgh donde siguió los cursos de Dugald Stewart[4], discípulo de Reid. En 1810, fue designado para compartir la cátedra de filosofía moral con Stewart y en muy poco tiempo fue famoso por la brillantez de sus lecciones. En 1820, después de su prematura muerte, estas lecciones fueron publicadas en cuatro volúmenes con el título de *Lectures on the Philosophy of the*

[4] Dugald Stewart (1753 - 1828), profesor en Edimburgo y sucesor distinguido de Reid, puso más tensión en la observación y razonamiento inductivo, y suscribió un acercamiento del empirismo a la psicología.

Human Mind. Su impacto fue inmediato, indudablemente porque Brown logró unificar elementos de dos tradiciones distintas: el intuicionismo escocés de Reid y el empirismo de Condillac. Al hacer esto, contribuyó a reencauzar ambas tradiciones.

Entre un cierto número de contribuciones novedosas, incluida una importante crítica de la introspección, basada en su creencia en la absurda idea de que una misma e indivisible mente puede ser tanto sujeto como objeto de la misma observación, Brown realizó dos desarrollos conceptuales de fundamental importancia para la historia de la psicología experimental. El primero fue destacar el "*sentido muscular*". Como hemos sugerido anteriormente, antes de Bain el asociacionismo había descuidado el movimiento y la acción a favor del análisis de la sensación. Brown fue el primer filósofo de esta tradición que adoptó una perspectiva sensorio-motora más equilibrada, al incluir el lado sensorial del movimiento en su conceptualización del problema de la referencia objetiva en la percepción.

La segunda contribución de Brown es su detallada elaboración de las leyes secundarias de la asociación, a las que denominó "*sugestión*". La formulación de estas leyes por parte de Brown, que implicaban la duración relativa, fuerza (vivacidad), frecuencia y carácter de las sensaciones originales, así como también el refuerzo de una idea por otras, suministró más tarde a los teóricos del aprendizaje las bases para intentar explicar no sólo los hechos sino también los parámetros cuantitativos de asociación.

Aproximadamente al mismo tiempo, en Alemania, otro filósofo de la mente, Johann Friedrich Herbart (1776-1841) se interesó así mismo por las relaciones cuantitativas entre las ideas. Herbart nació en Oldenburg y estudió en la Universidad de Jena con Johann Gottlieb Fichte[5], con quien se encontró en

[5] Fichte (1762-1814) fue un filósofo alemán al que se considera el principal representante de la corriente llamada "Idealismo". Es, además, el primer pensador que concibió el conocimiento científico como una creación totalmente libre por parte del ser humano. Esta concepción de la ciencia tuvo grandes repercusiones hasta bien entrado el siglo XX. Su pensamiento se basa en una idea que tomó de Kant, quien a su vez la tomó de Hume. Asegura que el conocimiento científico de la realidad no es el resultado de la combinación de la observación y la lógica; es decir, una ley científica no puede deducirse lógicamente de ninguna observación. Pues bien, Fichte fue más allá y afirmó que, en realidad, ocurre al revés: aunque las leyes científicas no pueden deducirse de la observación empírica (o sea, de la experiencia), ésta sí puede deducirse a partir de las leyes científicas. Esto significa que las leyes científicas son objetivas y universales, y que dan lugar a una serie de fenómenos que son reales e incuestionables. Ésta es una idea inspirada en la física de Newton. Por lo tanto, el universo es una creación de cada ser humano, porque cada uno lleva en su interior una peculiar concepción del universo, de la cual deriva éste. Fichte reconoce, además, que cuando el ser humano actúa y, por lo tanto está obligado a elegir constantemente entre una u otra opción, es cuando toma conciencia de su propia existencia como ser moral. Es decir, que tenemos la capacidad de asumir la responsabilidad de nuestras propias acciones. Como sostiene que el principio de la realidad es el yo, para él lo real es el producto de la actividad subjetiva, y el ser está fundado en la inteligencia: \"El primer principio de la filosofía es precisamente este yo puro o transcendental\", dijo en cierta ocasión. En resumen, eso es el Idealismo, para Fichte: una filosofía que parte de una reflexión sobre la realidad. Por supuesto, tiene en cuenta que el ser humano, aunque puede actuar y elegir libremente, se mueve en el mundo físico y éste, con sus propias circunstancias, le permite desarrollar sus acciones pero también se opone a éstas y las limita. En este contexto, el yo sería el sujeto consciente, que crea el mundo empírico, que es a su vez el entorno en el que

desacuerdo. Provocado por las ideas de Fichte, Herbart decidió trabajar en su propia filosofía sistemática y, tras terminar sus estudios en Jena, fue a Gottingen donde tomó el doctorado en 1802. Allí permaneció hasta 1809 cuando se trasladó a Königsberg para asumir la cátedra antiguamente ocupada por Kant.

En Königsberg, Hebart empezó a trabajar en su psicología, publicando su *Lehrbuch* en 1816 y *Psychologie als Wissenschaft* en los años 1824/1825. Como evidencia este último título, Herbart creía que la filosofía podía ser tanto empírica (pese a negar la posibilidad de experimentar) como matemática. Argumentando que las ideas ("*presentaciones*") están ordenadas en el tiempo y varían en intensidad, intentó crear una estática y una dinámica de la mente y empleó complejas ecuaciones matemáticas para describir un sistema hipotético de principios de interacción entre las ideas.

Más específicamente, Herbart afirmó que las ideas de la misma clase se oponen una a otra mientras las ideas de diferentes clases no. Las oposiciones debilitaban progresivamente la idea original en la conciencia y, como resultado, se hundían finalmente por debajo del umbral de la conciencia, donde permanecían hasta que la aparición de una idea similar en la experiencia producía el ascenso de la original con una velocidad proporcional al grado de semejanza entre las dos ideas. Más aún, cuando la original estaba parada por la nueva idea, las ideas similares se adherían a ella. Así, ninguna idea puede ascender excepto para tomar su lugar en la masa unitaria de ideas ya presente en la conciencia. Este es el famoso concepto de "*apercepción*" de Herbart en el que una idea es no sólo hecha consciente sino asimilada al complejo de ideas conscientes, la *masa aperceptiva*.

Con estas opiniones, Herbart dió varios pasos de gigante en el camino que la nueva psicología científica finalmente seguiría hacia una identificación cuantitativa compleja y cuidadosamente elaborada de la distinción entre las ideas situadas por encima y por debajo del umbral de la conciencia. Como sugiere la tradición más aceptada, fue una figura de transición entre Kant y Fechner; pero debido a su rechazo de la posibilidad de la verificación experimental y su incapacidad para enlazar su filosofía de la mente con la fisiología del cerebro, realizó sólo una parte del camino hacia la "*nueva*" psicología. Antes de que la psicología pudiera entrar en el laboratorio, necesitaba métodos; y la fuente primaria de los primeros métodos no estaba en la filosofía de la mente sino en el trabajo de fisiólogos como Purkyne y Weber, quienes hicieron contribuciones fundamentales a la fenomenología experimental de la sensación, o incluso Müller, quien elaboró la doctrina de las energías nerviosas específicas que sistematizaba el papel epistemológico del sistema nervioso como intermediario entre la mente y el mundo.

se hace posible el conocimiento de ese yo. Fichte insiste en que el hecho de que seamos conscientes de nuestras acciones (lo que él llama "voluntad moral") constituye el elemento fundamental de la existencia humana.

Jan Evangelista Purkyne (1787-1869) nació en Libochovice, en el norte de Bohemia y recibió su primera educación formal en un monasterio piarista. Tras completar el noviciado, pasó un año estudiando en el Instituto Filosófico de Piarist. En 1807, bajo la influencia de los escritos de Fichte, dejó la orden y viajó a Praga. Dos años de trabajo en la Universidad de Praga y tres años más como tutor privado precedieron a su decisión de volver a la universidad a estudiar medicina. En 1819, al terminar sus estudios de medicina, publicó su disertación de doctorado, *Beiträge zur Kenntnis des Sehens in subjectiver Hinsicht*. Esto condujo a su nombramiento en 1823 como profesor de fisiología en la Universidad de Breslau. En ese mismo año, reeditó su disertación como primer volumen de *Beobachtungen und Versuche zur Physiologie der Sinne*. El segundo volumen, que siguió en 1825, fue subtitulado *Neue Beiträge zur Kenntnis des Sehens in subjectiver Hinsicht*.

Los dos volúmenes de *Beobachtungen* se cuentan entre los grandes logros intelectuales del periodo y constituyen el principal punto de transición hacia el surgimiento de la psicología experimental. Con una capacidad extremadamente aguda para observar los detalles fenomenológicos, Purkyne exploró las consecuencias psicológicas en la experiencia visual de una serie de manipulaciones experimentales de las condiciones de estimulación, incluyendo la aplicación al globo ocular de presión y corriente eléctrica, alteración en la exposición al foco de luz relativo a la fovea, grado de movimiento del ojo y variación en la intensidad de la luz. Aunque Purkyne es más conocido por los psicólogos por sus clásicas descripciones de fenómenos tales como el cambio en la luminosidad aparente de los colores en la oscuridad como opuesto al brillo de la luz del día (el llamado "*efecto Purkyne*"), fue la amplitud y sistematicidad del uso que hacía del método experimental para explorar los parámetros de la experiencia sensorial lo que ayudó a sentar las bases del futuro trabajo de laboratorio.

Johannes Müller (1801-1858) nació en Coblenz y se educó en la Universidad de Bonn. Recibió el título de medicina en 1822 y, tras un año en Berlín, fue habilitado como *privatdozent* en Bonn, donde con el tiempo alcanzó el profesorado. En 1833, dejó Bonn para hacerse cargo de la prestigiosa cátedra de anatomía y fisiología en la Universidad de Berlín. Sus más importantes contribuciones a la historia de la psicología experimental fueron la influencia personal que ejerció sobre sus jóvenes colegas y estudiantes, entre los que se encontraban Hermann von Helmholtz, Ernst Brücke[6], Carl Ludwig y Emil Du

[6] Ernst Wilhen von Brücke era profesor de fisiología y director del Instituto de Fisiología de Viena, donde Freud trabajó durante seis años como ayudante. Freud reconoce que Brücke (1819-1892) fue su respetado maestro de fisiología: "En mi juventud predominó el afán de comprender algo de los enigmas de este mundo y acaso contribuir en parte a su solución. Mi inscripción en la facultad de medicina pareció el mejor camino para conseguirlo, pero luego intenté -sin éxito- consagrarme a la zoología y la química, hasta que bajo la influencia de Von Brücke -la máxima autoridad que haya influido sobre mí- permanecí adherido a la fisiología, que por ese tiempo se limitaba demasiado fácilmente a una histología". Freud trabajó en su laboratorio resolviendo los problemas que el reverenciado profesor le planteaba, con evidente satisfacción por parte de Brücke, y por la suya propia. Descifrando los enigmas del sistema nervioso, primero de peces inferiores y después de seres humanos, dando satisfacción a las expectativas y

Bois-Reymond[7], y la forma sistemática que dió a la doctrina de las energías específicas de los nervios en el *Handbuch der Physiologie des Menschen für Vorlesungen*, publicado entre 1834 y 1840.

Aunque Müller había enunciado ya la doctrina de las energías nerviosas específicas en 1826, su presentación en el *Handbuch* fue más amplia y sistemática. Fundamentalmente, la doctrina implica dos principios cardinales. El primero de estos principios era que la mente no es directamente consciente de los objetos en el mundo físico sino de estados en el sistema nervioso. El sistema nervioso, en otras palabras, sirve de intermediario entre el mundo y la mente e impone así su propia naturaleza a los procesos mentales. El segundo fue que las cualidades de los nervios sensoriales, de los que la mente recibe el conocimiento en la sensación, son específicas a los diversos sentidos: el nervio de la visión era normalmente insensible al sonido como el nervio de la audición lo era a la luz.

Como Boring[8] señaló, no había nada en esta opinión que fuera completamente original de Müller. No solo estaba la mayor parte de la doctrina contenida ya en la obra de Charles Bell, sino que el primero de los dos principios más fundamentales de Müller estaba implícito en la idea de Locke sobre las "*cualidades secundarias*" y el segundo incorporaba una idea sobre los sentidos que hacía mucho tiempo que era generalmente aceptada. Lo que tenía verdadera importancia en Müller era su sistematización de estos principios en un manual de fisiología que sirvió a toda una generación de estudiantes como referencia estándar sobre el tema y la legitimidad que prestó a la doctrina con el peso de su prestigio personal.

Después de Müller, los dos problemas mente-cuerpo, la relación de la mente con el cerebro y el sistema nervioso y la relación de la mente con el mundo, estaban inextricablemente unidos. A pesar de que Müller no exploró por sí mismo las implicaciones de su doctrina para la posibilidad de que la correlación final de las cualidades sensoriales pudiera ser ligada a centros especializados del córtex cerebral o desarrollar una psicofísica sensorial, su principio de especificidad puso las bases para la eventual localización de la función cortical y su opinión de la función epistemológica del sistema nervioso

requerimientos de su riguroso maestro. La filosofía de la ciencia de Brücke no tuvo para Freud menor valor formativo que aquel profesionalismo. Brücke era positivista por temperamento y convicción. Con él, Freud comenzó ciertamente a aprender un hábito científico, encontrando allí modelos a los que en principio pudo fijarse enteramente. Pero Brücke era además de maestro en fisiología, animador de la Sociedad Berlinesa de Física en 1845, y esa doble posición permite explicar porqué para él la fisiología era una extensión de la física. En ese sentido, la física de los organismos, en virtud de la ley de la conservación de la energía que unificaría ambas ciencias, dice que un organismo es "la suma de las fuerzas que permanece constante en todo sistema aislado”.

[7] (Berlín, 1818- *id*., 1896) Médico alemán. Profesor de fisiología y rector de la Universidad de Berlín. Se dedicó a la electrofisiología y creó una serie de técnicas e instrumentos para el estudio de los impulsos nerviosos. Enunció una ley según la cual la variación de la intensidad del estímulo tiene más influencia sobre la excitación de una fibra nerviosa o muscular que el valor de la intensidad en sí (*ley de Du Bois-Reymond*).

[8] *Vide* **Boring, E.G.** (1950). *A History of Experimental Psychology.* New York: Appleton-Century-Crofts, Inc. Citado en la bibliografía.

ayudó a definir el contexto en el que las técnicas para la medición cuantitativa de la relación mente/mundo surgiera en la famosa psicofísica de Fechner.

1.4. Comienzo formal de la psicología experimental de la conciencia

También las importantísimas contribuciones a la Psicología Experimental de Weber, Fechner y Wundt han sido explicitadas en otros pasajes de nuestro trabajo, por lo que obviamos su referencia específica en el presente apartado.

La introspección continuó estudiándose desde otros enfoques como el de la **Gestalt,** que comenzó en Alemania como estudio de la percepción, para después extenderse a otros campos como la resolución de problemas, el aprendizaje, la creatividad e incluso las dinámicas sociales (en especial la microsociología de grupos pequeños, con aplicaciones industriales y terapéuticas). Frente al asociacionismo inherente al enfoque de Wundt o el de los conductistas, la psicología de la Gestalt destacaba la importancia de las configuraciones globales de estímulos, sus relaciones internas y con el contexto (relaciones figura-fondo), así como su organización activa.

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) había nacido en Potsdam y se educó en su ciudad natal y en el Instituto Médico Friedrich Wilhelm de Berlin. Allí estuvo bajo la influencia de Müller y en 1842, a los 21 años de edad, se graduó en medicina e ingresó en la profesión como médico del ejército prusiano. En reacción al vitalismo de Müller, que rechazaba, Helmholtz se interesó por clarificar las bases fisiológicas del celo animal, un fenómeno utilizado muchas veces para justificar el vitalismo. Esto le condujo en 1847 a escribir un famoso artículo sobre la conservación de la energía, que le proporcionó la oferta de la cátedra de fisiología en Königsberg, donde permaneció desde 1848 a 1855. En 1855, se trasladó a Bonn y desde allí, en 1858, a Heidelberg para trabajar como director del Instituto de Fisiología. Fue, durante los periodos de Bonn y Heidelberg, cuando Helmholtz hizo sus contribuciones más fundamentales a la recientemente aparecida psicología experimental. Desde 1856 a 1866, el *Handbuch der physiologischen Optik* apareció en partes separadas que fueron reunidas en un volumen en 1867. En 1863, cuando la *Optik* había ya aparecido, Helmholtz publicó *Die Lehre von den Tonempfindungen*. Aunque aquí nos centraremos en la *Optik*, estas dos obras tomadas juntas definen la problemática de la psicología experimental de la percepción visual y auditiva en las décadas que siguieron.

En la *Optik*, Helmholtz amplió la doctrina de Müller de las energías específicas de los nervios para ofrecer una teoría comprehensiva de la visión del color y su famosa teoría de la inferencia inconsciente de la percepción. En la teoría de la visión del color, Helmholtz argumentó que así como las diferencias entre las sensaciones de sonido y luz reflejan las cualidades específicas de los nervios auditivos y visuales, las sensaciones de color pueden depender de diferentes clases de nervios en el interior del sistema visual. Dado que las leyes de la mezcla del color sugieren que virtualmente todo matiz puede ser obtenido por distintas combinaciones de los tres colores primarios, le parecía a Helmholtz que el matiz percibido, el brillo y la saturación del color debían ser derivados de diversas actividades en las tres clases primarias de fibras nerviosas en el ojo.

En su teoría de la percepción, Helmholtz partía del reconocimiento de que la doctrina de las energías nerviosas específicas de Müller implicaba el hecho de que las sensaciones no permiten un acceso directo a los objetos y fenómenos sino que sólo sirven a la mente como señales de la realidad. La percepción, desde este punto de vista, requiere un proceso lógico, activo, inconsciente y automático por parte del perceptor que utiliza la información suministrada por la sensación para inferir las propiedades de los objetos y fenómenos externos. A este respecto, Helmholtz anticipó gran parte de la posterior psicología cognitiva de arriba abajo (*top-down*). En un periodo más temprano, Helmholtz había hecho también otras grandes contribuciones a la fisiología. Estimulando los nervios a diferentes distancias desde un músculo y midiendo el tiempo en que se producía la contracción muscular, estimó la tasa de recorrido del impulso nervioso, y en el proceso introdujo, de paso, la técnica del tiempo de reacción en fisiología.

Entre 1865 y 1868, otro gran fisiólogo holandés, Franciscus Cornelis Donders (1818-1889) asimiló el procedimiento del tiempo de reacción a la psicología, empleándolo para estudiar el tiempo ocupado por las operaciones mentales. Donders había nacido en la ciudad de Tilburg, en los Países Bajos, y entró en la Universidad de Utrecht como estudiante de medicina a la edad de 17 años. Después de graduarse, ingresó en el ejército como cirujano y, a la edad de 24 años, fue invitado a dar clases en la Escuela de Medicina Militar de Utrecht. Cinco años después se ofreció a Donders una plaza como *extraordinarius* en la Universidad de Utrecht, que aceptó, permaneciendo allí el resto de su carrera.

En 1865, Donders publicó una comunicación preliminar en la que informaba del trabajo realizado con un estudiante, Johan Jacob de Jaager, y sintetizó más completamente en la disertación doctoral de Jaager, *De physiologische tijd bij psychische processen* (1865). Concluyendo que el tiempo de reacción era aditivo, Donders evaluó separadamente el tiempo para responder a los estímulos bajo condiciones de elección y de simple no elección. Deduciendo la simple a partir del tiempo de reacción con elección, Donders calculó el intervalo que tomaba el proceso de decisión. En 1868, en un clásico artículo aparecido en alemán, *Die schnelligkeit psychischer Processe*, Donders aportó el informe definitivo de los resultados de su obra y su extensión a los tiempos de discriminación. A pesar de que los hallazgos específicos de Donders son actualmente de poco interés, su utilización de la técnica de reacción para medir el tiempo tomado por los procesos mentales ejerció un mayor impacto sobre sus contemporáneos y el tiempo de reacción se impuso, junto con la psicofísica, como uno de los métodos preferidos en los primeros laboratorios experimentales. En consecuencia, como epílogo de este apartado de nuestro trabajo, puede observarse que la psicología experimental englobaba ya desde sus inicios una considerable diversidad de métodos, intereses y puntos de vista que le han permitido encontrar multitud de aplicaciones prácticas en la industria, la educación y la terapia, entre otras áreas.

Hoy en día persisten las mismas inquietudes hacia la psicofísica, la percepción, la memoria y el aprendizaje, pero los interrogantes desaparecen con nuevos enfoques fisiológicos y el uso de procedimientos estadísticos para diseñar experimentos y analizar datos. La tecnología de los ordenadores también ha influido poderosamente en los métodos y teorías de la psicología experimental, en la que la influencia del paradigma conductista ha sido mitigada por el resurgir del estudio de los fenómenos psíquicos internos desde el punto de vista cognitivo, y por la creciente alianza de esta tendencia con la biología. Sin embargo, hasta ahora ninguna teoría ha unificado la psicología experimental, que en la práctica resulta ser una amalgama de las diferentes corrientes de la psicología con sus respectivas áreas de interés.

2. Pilotaje de un sistema psicológico

Recordemos que el **control** designa objetivos, fija líneas de acción para lograrlos y compara resultados con objetivos. La **regulación** evoca la conducción progresiva del S. psicológico hacia los objetivos que se propone el psicólogo experimentador. Un bloque de control, y otro de regulación, se definen relativamente uno a otro: constituyen dos niveles diferentes de pilotaje. La **estructura general del control o regulación**, **puede resumirse en los siguientes puntos**:

1. *El control* (o regulación) es un S. operador que actúa entre las variables de acción (V. A.) de un S. operado (S. psicológico), de acuerdo con el siguiente esquema:

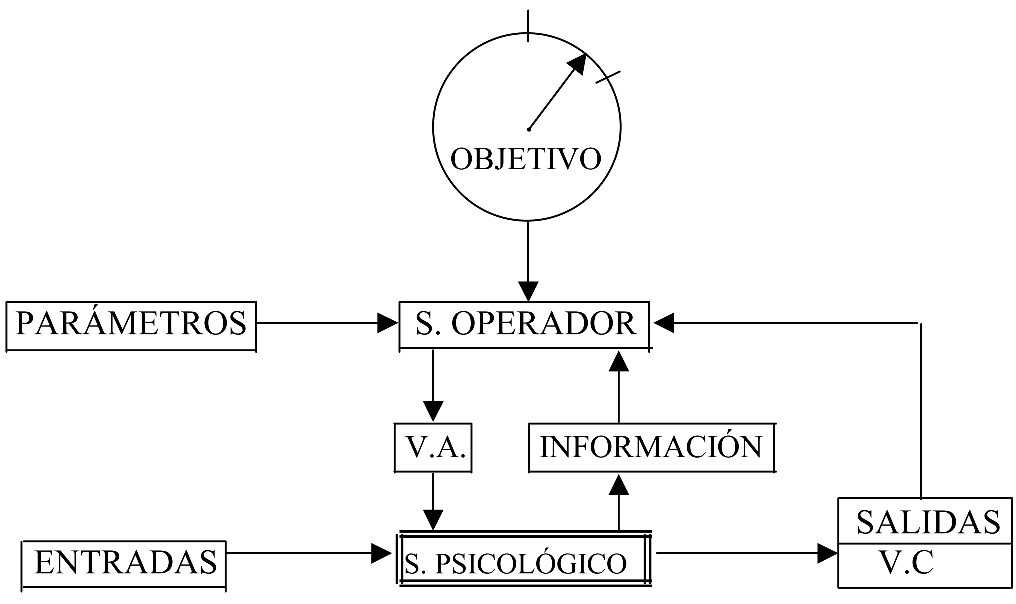


FIG. 6.1. Esquema de la estructura general de control o regulación.

2. *El S. operador*, o psicólogo experimentador, actúa a partir de una explicación de la correspondencia existente entre las entre las V. E. y las V. S. del S. psicológico operado, y en función de ella selecciona las V. A. O dicho de otra forma: actúa a partir del conocimiento de un modelo de las transformaciones del S. psicológico.

3. *El S. operador* funcionará a través de **programas**, en el caso en que posea un modelo completo de aquellas transformaciones. Y controlará totalmente.

4. *El S. operador* funcionará a través de **decisiones**, en el caso en que posea modelos parciales o ningún modelo explícito. Suponemos que ello puede no hacerse, a veces, por negligencia, o bien por creer que un modelo implícito (la experiencia adquirida) es suficiente, o bien por razones de economía (cuando el modelo explícito resulta muy complejo).

3. Programa y su naturaleza

En nuestro caso, llamemos "**programa**" al *conjunto de valores* (o instrucciones) *de las V. A., que permiten alcanzar los objetivos del S. psicológico operado, a partir de un modelo explícito y completo de las transformaciones del mismo.*

Si el S. psicológico esta "*determinado en probabilidad*" (ver Cap. 3), y se conoce su evolución en el tiempo, lo mismo le ocurre al modelo, y el programa será dinámico (tiempo) y aleatorio (probabilidad). De lo dicho, puede deducirse que el programa presupone el modelo del S. psicológico. Veamos, al respecto, un ejemplo sencillo:

En el S. psicológico operado, las entradas son a, b, c, d ; las salidas, también: a, b, c, d; las V. A. son: α y β, y se posee, por parte del experimentador, del siguiente modelo de funcionamiento del S. psicológico (descripción de las transformaciones que sufre en el tiempo):

V.E. / V.A.	**a**	**b**	**c**	**d**
α	b	a	a	d
β	a	c	d	c

Es decir, para una entrada b, la salida será **a** si se utiliza la V. A. α, ó **c** si se utiliza la V. A. β.

Si el objetivo del experimentador fuera **lograr el estado d** y **mantenerlo en el tiempo**, y la entrada inicial es a, a partir del modelo anteriormente expresado se establece el programa (= conjunto de los valores de las V. A.) que logra el objetivo, y que es: $\{\alpha, \beta, \beta, \alpha, \alpha, ..., \alpha, ...\}$

En efecto, cuando el control pilota el S. psicológico, mediante la aplicación del programa, obtiene la "*trayectoria*" (conjunto de transformaciones) que aparece en la figura siguiente:

$$a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\beta} d \xrightarrow{\alpha} d \xrightarrow{\alpha} d \; .... \; d \xrightarrow{\alpha} d$$

que nos proporciona una clara versión evolutiva del proceso anterior.

- **Naturaleza de un programa**

Los programas se llamarán:

a) **REGLAS**: cuando se trata de un programa para lograr un cambio de estado (una sola transformación).
b) **POLÍTICA**: constituye un conjunto de reglas correspondientes a un conjunto de transformaciones.
c) **ESTRATEGIA**: es un conjunto de reglas condicionales (igual que antes, pero en porvenir aleatorio).

En cualquiera de los 3 casos citados, un programa es un conjunto de instrucciones que pueden ser establecidas y aplicadas por experimentadores (psicólogos) *y/o máquinas* (ordenadores).

En resumen: un programa es una salida de un modelo, y la programación define el dominio de los programas (acciones programadas).

Veamos, a continuación, el esquema de un S. operador que controla al S. psicológico por medio de un programa que emana del modelo:

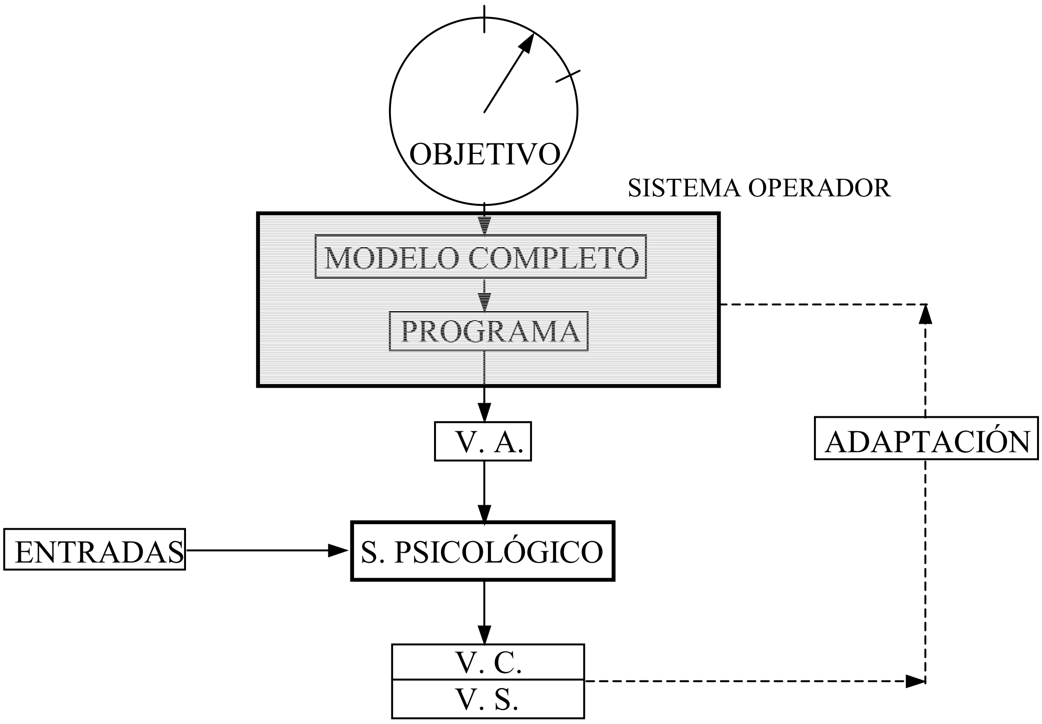


FIG. 6.2. Esquema de control mediante un programa que emana del modelo.

4. Decisión y su naturaleza

En nuestro caso, llamamos, "**decisión**" al comportamiento del hombre o mujer (psicólogo experimentador) que realiza una elección en situación de información parcial.

La posible ignorancia puede ser debida:

a) A la naturaleza no determinada de un fenómeno.
b) A la ignorancia del modelo de la transformación determinada.

Supongamos, de nuevo, el S. psicológico anterior, con las mismas V. E. y V. S. y V. A., pero supongamos un estado de información parcial acerca de las transformaciones que conducen de las V. E. a las V. S., definido por el modelo incompleto siguiente:

(NOTA: **V** = signo algebraico equivalente a la reunión→"o")

V.E. / V.A.	**a**	**b**	**c**	**d**
α	b	a	a	¿?
β	¿?	c	cvd	c

Si el objetivo sigue siendo **d**, y el estado inicial **a**, la primera elección es entre α y β. Si elegimos α, y a continuación β**,** etc., obtendremos:

$$a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\beta} \text{¿?} \xrightarrow{\text{¿?}} \text{cvd}$$

Si elegimos β, la primera transformación de la trayectoria es indeterminada, pudiendo conducir a todos los estados. Está claro que la in completitud del modelo nos obliga a tomar decisiones o, lo que es mejor, a completar al máximo dicho modelo de funcionamiento del S. psicológico.

• Naturaleza de una decisión

El psicólogo experimentador puede actuar de dos maneras, según sea el sistema psicológico, a saber:

1. El S. psicológico es determinado, luego la transformación es determinada. El S. operador posee un modelo explícito y, a partir de él, elabora el programa de las V. A., lo aplica y logra el objetivo.

2. El S. psicológico es indeterminado, luego la transformación es indeterminada, pudiendo ser su origen:

a) La ignorancia de la existencia de algunas V. E.
b) La ignorancia de la existencia de algunas V. S.
c) La ignorancia de cómo son algunas V. E.
d) La ignorancia de la correspondencia entre V. E. y V. S.

(NOTA: El estudio de la función de transformación que es incógnita en "**d)**", será propuesto en un próximo capítulo acerca de la aplicación de diversas disciplinas científicas o de la investigación de operaciones al estudio de la Psicología).

Llegados a este punto, en mi opinión, caben dos formas de actuación del psicólogo experimentador:

A. *Elaborando el modelo parcial correspondiente a la información adquirida*, que deberá ser la óptima desde un punto de vista de eficacia. Una vez se conforma con él, por ser incompleto dicho modelo, el experimentador tiene que apelar a la decisión a fin de seleccionar las V. A., y sin saber si logrará o no el objetivo.

B. *Elaborando el modelo parcial indicado en* **A,** *pero no conformándose con él*. Entonces, el experimentador debe elaborar un modelo implícito, complementario del anterior en el sentido de "*completarlo*". Tras el logro del modelo completo (S. psicológico determinado) nos encontramos en el caso **1.** anterior, y es posible elaborar un programa de acciones. Tampoco en este caso se puede asegurar el logro del objetivo de entrada: el psicólogo experimentador, por medio del decisor y de la información conseguida acerca del resultado de la entrada, modificará el modelo implícito o "*descendiente*" hasta que los programas sucesivamente logrados logren el objetivo. Se puede afirmar, entonces, que el S. psicológico se "ha adaptado" por "aprendizaje".

En resumen: en este caso **B**, podríamos –a mi entender– considerar formado el psicólogo experimentador ("S. decisional") por tres subsistemas:

a) **El modelo parcial**, que explica una parte de la transformación del S. psicológico operado.
b) **El "decidiente"** o modelo implícito, complementario del anterior respecto al modelo completo (desconocido). Es una imagen elaborada por el "*decisor*" a partir del modelo parcial, cuyas entradas complementarias provienen del S. psicológico operado y del exterior. Se trata, pues, de un S. no determinado, que requiere un regulador de gran riqueza en variedad ("riqueza", en el caso de un regulador = psicólogo experimentador, la asimilo a experiencia, juicio, clarividencia, ...).
c) **El "decisor"** o psicólogo experimentador propiamente dicho (que también puede ser un autómata), y que en interacción con el "descendiente", efectúa una labor de selección; es decir: "decide".

Veamos, a continuación, el esquema de un S. decisional u operador que controle al S. psicológico operado por medio de la terna:

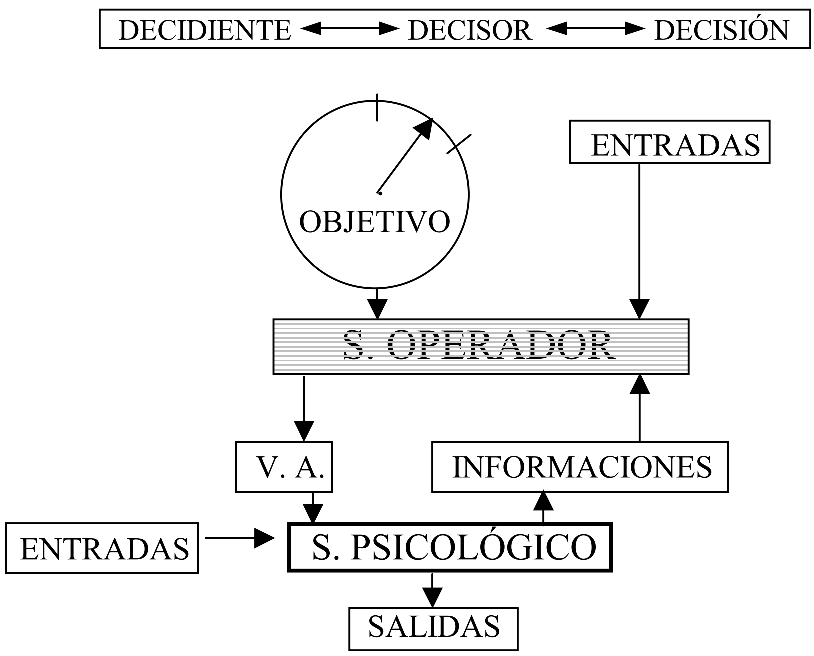


FIG. 6.3. Esquema de un sistema operador que controla mediante una terna (I).

Veamos, así mismo, el siguiente esquema:

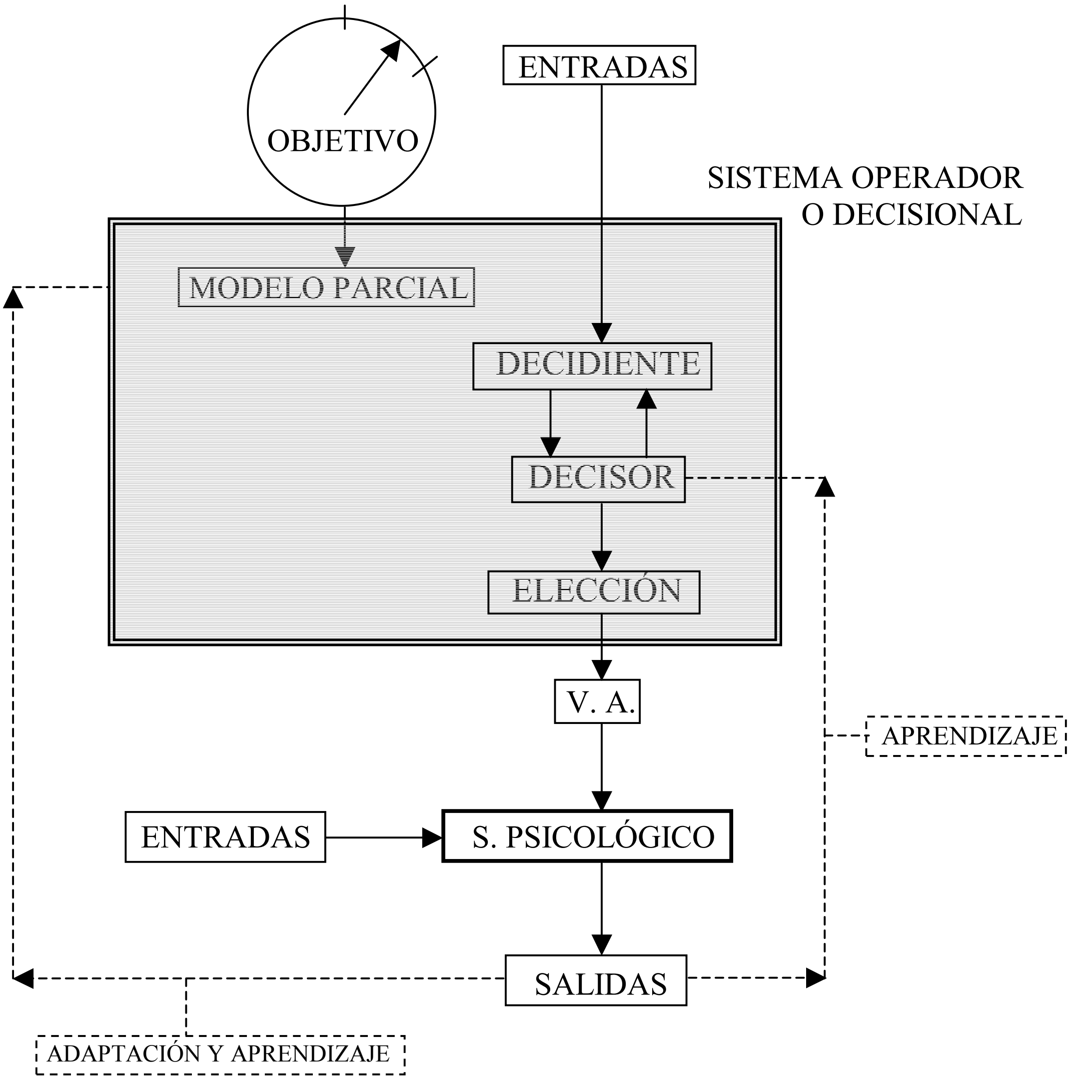


FIG. 6.4. Esquema de un sistema operador que controla mediante una terna (II).

Quisiera añadir, por último, que la trascendencia de estos dos últimos esquemas en la comprensión de los fenómenos de acción que sobre el S. psicológico realiza el psicólogo experimentador, me parece evidente. Por otra parte, las consecuencias operativas que pueden derivarse de la concepción expresada en ellos vendrán especificadas en un capítulo posterior sobre las fecundas aplicaciones de diversas técnicas matemáticas y de la Investigación Operativa al estudio de la Psicología.

CAPÍTULO 7
Aplicaciones de la Investigación Operativa (I)

1. Aplicación de la Teoría de la Programación Dinámica y de los Procesos Estocásticos

Un enfoque interesante, a nuestro modo de ver, de muchos problemas psicológicos, residiría en su tratamiento a base de la aplicación de una conocida técnica de la Investigación Operativa: la Programación Dinámica, y más concretamente, partiendo de la consideración de sistemas (dinámicos) que varían con el tiempo, como resulta ser el caso de la mayoría de los sistemas psicológicos.

La Programación Dinámica es un método de optimización de los sistemas o de su representación matemática, en el cual se opera por fases o secuencias. El punto de partida de este método reside en el denominado "teorema de la optimidad". Este teorema, presentado por el matemático americano Richard Bellmann[1], resulta tan simple que parece casi trivial cuando se ha comprendido a fondo. Su importancia y la eficacia de los métodos de optimización secuenciales a los cuales ha dado origen se acentúan tan pronto se advierte que la verdadera naturaleza de numerosos problemas que se plantean en Psicología es secuencial, es decir, permiten su descomposición en fases, en las cuales cada uno sólo depende de sus más próximas y frecuentemente, en los casos favorables, solamente de la fase anterior o bien de la posterior.

Tratándose de Investigación Operativa y, por consiguiente, de la búsqueda de una política óptima, Bellmann expresa, en forma concisa, lo siguiente: **Toda política óptima sólo puede estar formada por subpolíticas óptimas**. En efecto, ¿no es, por así decirlo, evidente que todo camino óptimo esté formado de porciones o tramos de caminos también óptimos?. Si para una porción cualquiera no fuese así, ésta podría ser substituida por otra mejor y, por consiguiente, el camino no sería óptimo, contrariamente a la hipótesis de partida.

Podría considerarse que la Programación Dinámica se refiere a la evolución en el tiempo de un sistema psicológico, siendo aquélla, en cada fase, parcialmente aleatoria (intervención del azar) y parcialmente controlada

[1] **Richard Ernest Bellmann** (1920–1984) fue un matemático aplicado, cuya mayor contribución fue la metodología de la programación dinámica. Bellmann estudió matemáticas en la universidad de Brooklyn (EEUU), donde obtuvo una diplomatura, y luego en la universidad de Wisconsin, donde obtuvo su licenciatura. Posteriormente comenzó a trabajar en el laboratorio nacional de Los Álamos (EEUU) en el campo de la física teórica. En 1946 obtuvo su doctorado en la universidad de Princeton (EEUU). También ejerció la docencia en la universidad del sur de California (EEUU), fue socio de la academia americana de las artes y las ciencias (1975) y de la academia nacional americana de ingeniería (1977). En 1979 el IEEE le otorgó la medalla de honor por su contribución a la teoría de los sistemas de control y de los procesos de decisión, en especial por su contribución con la programación dinámica y por la ecuación que lleva su nombre.

(intervención del psicólogo experimentador). Se pueden distinguir (R. Fortet) las evoluciones de primera y segunda clase, según que, en cada fase, la intervención del azar preceda a la decisión humana o, por el contrario, la suceda.

Estas evoluciones de los sistemas en el tiempo pueden ser de tres tipos:

1- **Deterministas** (determinadas por el hombre).
2- **Aleatorias** (provocadas únicamente por el azar, en los cuales no se manifiesta la decisión humana).
3- **Aleatorias – Deterministas** (algunas de las evoluciones pueden ser provocadas por el hombre, y otras por el azar).

Pero determinados caracteres de la programación dinámica, como la división secuencial del problema, aparecen también en ciertos casos deterministas en los cuales no interviene la evolución temporal.

En principio, parece que cualquiera de estos tipos puede amoldarse a las características de las evoluciones de los sistemas psicológicos, si bien centraremos –adoptando una postura escéptica o de desconocimiento– nuestra atención en las evoluciones del tipo "**2**" o aleatorias. En tal caso, nos encontramos con los llamados "**procesos estocásticos**".

La repercusión de las experiencias anteriores en las nuevas situaciones vivenciales es uno de los procesos que más influencia tienen en la vida humana. Podemos intentar, en consecuencia, presentar este problema desde un punto de vista operativo, si bien nos encontramos con la considerable limitación de no poder estudiar el caso como si de una *Cadena de Markov* (sistemas "sin memoria") se tratase[2], puesto que la historia –o el conjunto de las experiencias vividas por el S., que debemos considerar en el plano psicológico– constituye una variable de la que es función la probabilidad de transición, como se verá más adelante.

Un proceso recibe el nombre de "estocástico" cuando, en intervalos de tiempo determinados o aleatorios, el sistema considerado sufre cambios de estado ligados mediante leyes de probabilidad. Por ello, estos procesos

[2] **Andrei Andreyevich Markov** (14 de junio de 1856 - 20 de julio de 1922) fue un matemático ruso conocido por sus trabajos en la teoría de los números y la teoría de las probabilidades. Markov nació en Ryazan, Rusia. Antes de los 10 años su padre, un funcionario estatal, fue trasladado a San Petersburgo donde Andrei entró a estudiar en un instituto de la ciudad. Desde el principio mostró cierto talento para las matemáticas y cuando se graduó en 1874 ya conocía a varios matemáticos de la Universidad de San Petersburgo, donde ingresó tras su graduación. En la Universidad fue discípulo de Chebyshev y tras realizar sus tesis de maestría y doctorado, en 1886 accedió como adjunto a la Academia de Ciencias de San Petersburgo a propuesta del propio Chebyshev. Diez años después Markov había ganado el puesto de académico regular. Desde 1880, tras defender su tesis de maestría, Markov impartió clases en la Universidad y, cuando el propio Chebyshev dejó la Universidad tres años después, fue Markov quien le sustituyó en los cursos de teoría de la probabilidad. En 1905, tras 25 años de actividad académica, Markov se retiró definitivamente de la Universidad, aunque siguió impartiendo algunos cursos sobre teoría de la probabilidad.

también reciben el nombre de "aleatorios" y describen la evolución del S. en cuestión a través del tiempo. Se clasifican así:

Procesos estocásticos
- Discretos o cadenas $\longrightarrow$ "tiempo" no aleatorio.
- Continuos $\longrightarrow$ "tiempo" aleatorio.

• DISCRETOS:

Estos procesos aleatorios se llamarán "**discretos**" si los cambios de estado aleatorios sólo ocurren en instantes determinados, no aleatorios, y a lo más, en una infinidad numerable. Los intervalos de tiempo entre los instantes en los cuales se producen los cambios de estado pueden ser iguales o no, interesando únicamente -desde el punto de vista psicológico- el orden de sucesión de los diferentes estados del sistema.

La evolución del individuo es una sucesión de fenómenos aleatorios. Considerando a aquél como un sistema S, que puede tomar un conjunto finito de estados $\xi = \{E_0, E_1, E_2, ..., E_m\}$. Pues bien, en cada instante de un período de tiempo $T = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n\}$, el S. toma al azar uno y sólo uno (hipótesis cualquiera) de los estados de ξ, quedando establecida una correspondencia unívoca (que es "aplicación", puesto que todos los elementos del primer conjunto tienen su imagen en el segundo conjunto, pero sólo una) entre el conjunto T y el ξ. Veamos, al respecto, el siguiente diagrama de Venn-Euler:

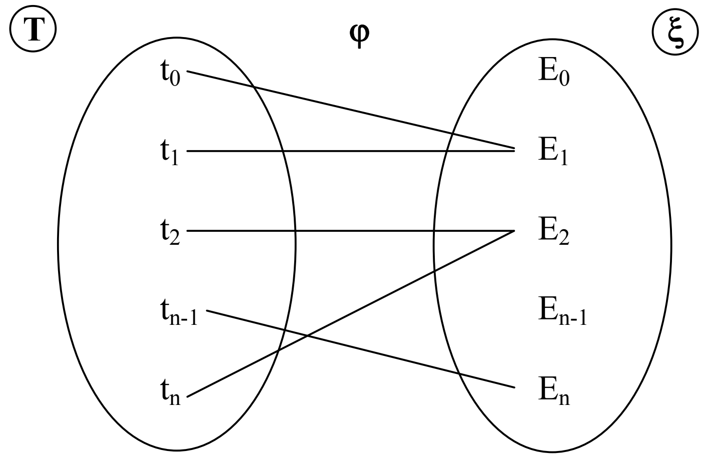


FIG. 7.1. Aplicación entre los conjuntos T y ξ.

Si consideramos la sucesión aleatoria de estados de ξ, tenemos un ejemplo de proceso estocástico discreto, en cuanto asociemos a cada cambio de estado una "probabilidad de paso o transición": $p_{ij}(n) \longrightarrow$ probabilidad de pasar, en el instante **n**, del estado E_i al E_j. El conjunto de todas estas probabilidades de paso constituye la “matriz estocástica o de transición”: [M]. Sabemos que: p_{ij} (n) = f(E_i, E_j, n, historia: $t_n - t_0$).

Definimos, también $p_i(n)$ como la probabilidad de que el S. se encuentre en el estado E_i en el instante n (hay 2 variables). Las $p_i(n)$ / i = 1, 2, …, M, constituyen el conjunto de probabilidades de cada estado que describen el sistema psicológico para todos los instantes considerados.

Se designa por **P**(n) = [p_1(n), …, p_M(n)] el “vector de estado” en el instante **n**. O sea, se tienen los denominados “**vectores de estado**” (aquellos cuyas componentes son las probabilidades de cada uno de los estados en un instante dado), esto es: **P**(n) = [p_j (n)].

[M] es una matriz cuadrada de orden M en que cualquier elemento pertenece el conjunto de las probabilidades de transición p_{ij}, y es tal que:

- $\forall\ p_{ij} / 0 \leq p_{ij} \leq 1$ (axioma de probabilidad)
- $\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1 \qquad \forall\ (i, j) \in \{1, 2,..., M\}^2$

$$[\mathrm{M}] = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots & p_{1M}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots & p_{2M}(n) \\ p_{M1}(n) & p_{M2}(n) & \cdots & p_{MM}(n) \end{bmatrix} \text{ y } \mathrm{P(n)} = [p_1(n), p_2(n), ..., p_M(n)]$$

y al ser matrices “conformes”, su producto resulta:

$$\mathrm{P}(n) \times [\mathrm{M}] = [p_1(n), ..., p_M(n)] \times [M] = [p_1(n+1), p_2(n+1), ..., p_M(n+1)] = \mathrm{P}(n+1)$$

Del mismo modo, los denominados “vectores de estado” **P**(n) = [p_j (n)]

$\forall j \in \{1, 2, ...M\}$
$\forall n \in \{0, 1, 2, ...\}=\{Z^+\}=\{N\}$; son tales que:

- $\sum_{J=1}^{M} p_j(\mathrm{n}) = 1$
- $0 \leq p_j(n) \leq 1$ (axioma de probabilidad)

En general, se cumplirá que:

$$p_j(\mathrm{n}+1) = \sum_{i=1}^{M} p_i(\mathrm{n}) \times p_{ij} \quad \rightarrow \quad \text{"proceso estacionar io"}, \ \ \forall j \in \{1, 2, ..., M\} \ ;$$

O sea, se cumplirá que si las probabilidades $p_i(0)$ / i = 1, 2, …, M, se suponen conocidas (vector de estado inicial), se tiene entonces una “cadena de Markov” regida por la ecuación:

$$p_j(n+1) = \sum_{i=1}^{M} p_i(n) \times p_{ij}(n)$$

o utilizando la notación matricial y designando por **P**(n) el vector fila anteriormente expresado, se tiene:

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \cdot \mathbf{M} \qquad (1)$$

donde la matriz cuadrada **M** está formada de elementos p_{ij}. Pues bien, cualquier matriz que posea las propiedades anteriores se denomina "matriz estocástica" o "matriz de transición", ya que cada una de sus líneas constituye un vector estocástico $\mathbf{P_i}$. Las probabilidades p_{ij} se llaman "probabilidades de transición". Una cadena de Markov queda completamente definida por la matriz estocástica **M** y el vector **P**(0).

Ahora bien, psicológicamente hablando, es muy posible que una matriz estocástica pueda depender de la fecha o instante **n**, es decir, que las probabilidades de transición p_{ij} pueden ser funciones de **n** (hecho que puede comprobarse en experiencias con animales). Se tendría, en tal caso:

$$p_j(n+1) = \sum_{i=1}^{M} p_i(n) \times p_{ij}(n)$$

siendo dadas o "subjetivas" las $p_i(0)$ y las $p_{ij}(n)$, para todos los valores de i, j y n. El proceso o cadena se denominaría, entonces, "**no estacionario**".

Un proceso estocástico, gráficamente, queda determinado como sigue:

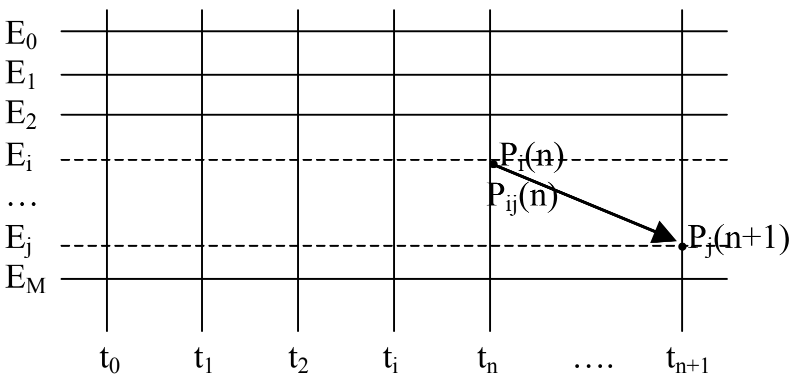


FIG. 7.2. Esquematización de la ecuación general.

No podemos ocuparnos en este trabajo en la extensión a propiedades y otras definiciones correspondientes a este aspecto de la Programación Dinámica, si bien aludiremos sólo a algunos conceptos muy importantes, a saber:

1- Si [M] es estocástica, se demuestra que $[M]^r$ también lo es.

2- Sea [M] una matriz estocástica. La matriz: [D]=[M]-[1], donde [1] es la matriz unidad de orden [M] (∀ sus elementos = 1), se denomina "matriz dinámica".

La ecuación (1) puede, entonces, expresarse del siguiente modo:

$$\mathbf{P}(n+1) - \mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n)\times[D]$$

Si : $\lim\limits_{r\to\infty}[M]^r = [\tilde{M}]$, donde $[\tilde{M}]$ es una matriz estocástica que constituye el límite (límite de una matriz = matriz de los límites), se dice que el sistema es "**ergódico**", es decir, que posee un "*régimen permanente*" (podría ser el caso de algunos sistemas psicológicos). La matriz [M] que posee esta propiedad se denomina "*matriz ergódica*", y se demuestra que si una matriz no es reductible ni separable, es ergódica.

Si además de ello, $[\tilde{M}]$ es tal que todas sus filas son idénticas, se dice entonces que el sistema es "*completamente ergódico*" y, en este caso, el estado del sistema para un **n** cualquiera y suficientemente grande, sólo depende del estado inicial E_o. En efecto, suponiendo el sistema estacionario:

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(0)\times[M]^n\text{; de dónde:}$$

$$\lim_{n\to\infty} . P(n) = \lim_{n\to\infty} . P(0)\times[M]^n = P(0)\times[\tilde{M}] = \tilde{P}_i \;;$$

donde $\tilde{P}_i$ es una de las líneas de $[\tilde{M}]$.

- **CONTINUOS:**

Un proceso estocástico se llama "**continuo**" cuando el tiempo interior no viene como una variable aleatoria, es decir, no está determinado el instante en que el sistema cambia de estado (obsérvese la correlación existente con el problema de la caja negra, o desconocimiento del individuo como sistema). Ejemplo representativo e interesante lo constituyen los "**procesos de nacimiento y muerte**" (en ellos, la variable aleatoria "*tiempo*" sigue una determinada distribución de probabilidad), definidos en la Teoría de Colas (fenómenos de espera) que adoptan la forma de ecuaciones de estado, como:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}p_n(t) = \lambda_{n-1}\times p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \mu_{n+1}\times p_{n+1}(t) \to n > 0 \;; \\ &\frac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda_0\times p_0(t) + \mu_1\times p_1(t)\text{, en dónde } \begin{cases}\lambda_n = f(n)\\ \mu_n = g(n)\end{cases} \;; \end{aligned}\right\}$$

Siendo $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \text{tasa media de llegadas (poissoniana)} \\ \mu = \text{tasa media de servicio (poissoniana)} \end{array} \right.$;

Estas ecuaciones generalizan numerosos casos particulares de los fenómenos de espera, v. gr., el de una tasa de servicio proporcional al número de unidades en el sistema (λ_n=λ; μ_n= n×μ). En caso de "*régimen permanente*" (las probabilidades $p_n(t)$, de que el S. se encuentre en el E_n en el instante **t**, de un número **n** de unidades en el S., son independientes del tiempo), se tendría:

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = 0 \ ; \ \forall \text{ valor de n} .$$

De cualquier modo, ya nos ocuparemos, en su lugar correspondiente, del posible tratamiento que la Teoría de las Colas puede realizar de los Sistemas psicológicos, razón por la cual no seguiremos extendiéndonos aquí sobre el tema.

Ejemplo de aplicación:

Un sistema psicológico puede presentar solamente dos estados E_1 y E_2 según unas probabilidades de transición desconocidas, y en uno u otro estado se puede tomar bien sea la decisión D_1, bien sea la D_2. Estas decisiones entrañan unos "costes" determinados recogidos en la tabla siguiente:

	Decisión D_1		**Decisión D_2**	
Transición	**Prob.**	**Coste**	**Prob.**	**Coste**
$E_1 \rightarrow E_1$	$p^{(1)}$	5	$p^{(2)}$	10
$E_1 \rightarrow E_2$	$q^{(1)}$	8	$q^{(2)}$	5
$E_2 \rightarrow E_1$	$p^{(1)}$	7	$p^{(2)}$	4
$E_2 \rightarrow E_2$	$q^{(1)}$	6	$q^{(2)}$	8

FIG. 7.3. Tabla de decisiones del problema.

a) La persona que controla este sistema psicológico decide aplicar la hipótesis de Laplace-Bayes y comenzar a tomar decisiones inmediatamente.

La sucesión de los estados del sistema, durante el período de observación, es el siguiente:

$$E_1, E_2, E_1, E_2, E_2, E_2 \ ;$$

¿qué estrategia óptima se puede deducir?

b) Al cabo de un número suficiente de periodos se ha encontrado:

$$q^{(1)} = 0'78 \; ; \quad p^{(1)} = 0'22 \; ;$$
$$q^{(2)} = 0'80 \; ; \quad p^{(2)} = 0'20 \; ;$$

¿cuál es entonces la estrategia óptima permanente?

Solución:

El grafo correspondiente de la tabla anterior es el siguiente:

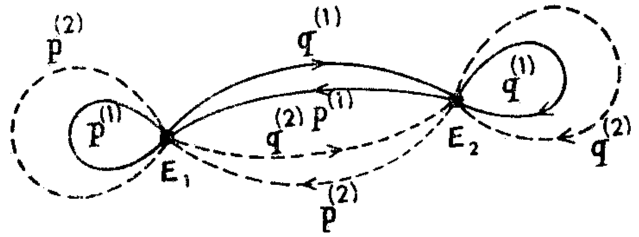


FIG. 7.4. Grafo del sistema psicológico.

a) En el origen se suponen todos los acontecimientos equiprobables, con lo que:

$$p^{(1)} = q^{(1)} = p^{(2)} = q^{(2)} = ½.$$

Si se encuentra con E_1 es preciso tomar la decisión D_1 que sólo cuesta: (5+8)/2 = 6'5 en lugar de la decisión D_2 que costaría (10+5)/2 = 7'5.

Si se encuentra con E_2, habría elegido D_2, puesto que:

$$(7+6)/2 = 6'5 > (4+8)/2 = 6'0.$$

Si ahora nos encontramos en el estado E_2 podemos, siguiendo la hipótesis de Laplace-Bayes[3], reevaluar $q^{(1)}$ y $p^{(1)}$, resultando lo siguiente:

---

[3] *Hipótesis de Laplace-Bayes*:
Sea una urna que contiene un número desconocido de bolas de **r** colores $c_1, c_2, ..., c_r$. Se hace una sucesión de tiradas no exhaustivas de 1 bola. Llamando **i** a la fecha de una tirada y 0 a la de la primera, la sucesión definida a continuación constituirá el conjunto de las "probabilidades de Laplace-Bayes" de salida de los colores $c_1, c_2, ..., c_r$:

$$p_1(0) = 1/r \,, \quad p_2(0) = 1/r \,, \ldots, \quad p_r(0) = 1/r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_1(i) = \frac{m_1+1}{i+r} \;, \quad p_2(i) = \frac{m_2+1}{i+r} \;, \ldots, \quad p_r(i) = \frac{m_r+1}{i+r}$$

si, en la fecha **i**, se ha comprobado después de la fecha 0: m_1 salidas de c_1, m_2 salidas de c_2, ..., m_r salidas de c_r. Si la urna contiene n_1 bolas de color c_1, n_2 de color c_2, ..., n_r de color c_r, siendo:

$$\Sigma\, n_j = n_1 + n_2 + ... + n_r = n$$

entonces, según el sentido de la convergencia en probabilidad, se tendrá:

$$q^{(1)} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3} \;;\;\; p^{(1)} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \;,$$

permaneciendo $p^{(1)}$ y $q^{(2)}$ sin alteración.

Se ve fácilmente que no hay ninguna modificación de la estrategia a adoptar, que será:

$$\boxed{\begin{matrix}\mathbf{E_1 : D_1} \\ \mathbf{E_2 : D_2}\end{matrix}}$$

b) Pero las reevaluaciones sucesivas, al mismo tiempo que nuestro conocimiento del sistema aumenta, van a introducir luego una modificación en esta estrategia, tal como lo muestra esta tabla basada en la secuencia: E_1, E_2, E_1, E_2, E_2, E_2.

Transición (azar)	**Momento 1 $E_1 \to E_2$**	**Momento 2 $E_2 \to E_1$**	**Momento 3 $E_1 \to E_2$**	**Momento 4 $E_2 \to E_2$**	**Momento 5 $E_2 \to E_2$**
Decisión adoptada	D_1	D_2	D_1	D_1	D_1
Reevaluación		$p^{(2)} = 2/3$, $q^{(2)} = 1/3$	$q^{(1)} = 3/4$, $p^{(1)} = 1/4$,	$Q^{(1)} = 4/5$, $p^{(1)} = 1/5$,	$q^{(2)} = 3/4$, $p^{(2)} = 1/4$,
Conclusión	$E_1 : D_1$ $E_2 : D_2$	$E_1 : D_1$ $E_2 : D_2$	$E_1 : D_1$ $E_2 : D_1$	$E_1 : D_1$ $E_2 : D_2$	$\mathbf{E_1 : D_2}$ $\mathbf{E_2 : D_1}$

FIG. 7.5. Tabla de estrategias.

La estrategia óptima permanente, derivada de las observaciones que permiten fijar $q^{(1)}$ en 0'78 y $q^{(2)}$ en 0'80 es, en definitiva:

$$\boxed{\begin{matrix}\mathbf{E_1 : D_2} \\ \mathbf{E_2 : D_1}\end{matrix}}$$

$\lim\limits_{i\to\infty} p_k(i) = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{m_k + 1}{i + r} = \frac{n_k}{n}$; $\quad \forall k = 1,2,...,r$, es decir, para **i** suficientemente grande, resultará que:

$$\frac{m}{i} \approx \frac{n_k}{n} \qquad \forall k = 1,2,...,r.$$

2. Aplicación de la Teoría de Grafos

El empleo de la Teoría de Grafos, nacido de la existencia indudable de una aplicación multívoca Γ definida sobre un conjunto de sistemas o individuos, en el planteamiento y resolución de relaciones psicológicas entre los sistemas, puede extenderse al terreno intensamente operativo de la optimización o **búsqueda del valor óptimo** entre los diversos sistemas que constituyen, ahora, los vértices del grafo.

La "*matriz estructural*" del conjunto de sistemas (grupo de individuos) viene determinada por la "*matriz asociada al grafo*" como representación sagital propiamente dicha.

El problema general consiste en buscar un camino de valor máximo o mínimo[4] entre los vértices o sistemas psicológicos (individuos) dados en un grafo simétrico o no. Dado un grafo G = (S, U), siendo S el conjunto de elementos y U el de arcos, en el cual, a cada arco **u** se le asocia un número: $l(u) \geq 0$, llamado "*valor o longitud de u*" (y que, en nuestro caso, puede evaluarse de acuerdo con la intensidad de un estímulo o respuesta), se debe buscar un camino μ que vaya de un vértice S_0 a otro S_n, de modo que podamos maximizar o minimizar la función:

$$F = \sum_{u \in \mu} l(u)$$

Para resolver este problema, existen varios algoritmos, siendo los de mayor utilidad en este caso, en mi opinión, el de Ford y el de Bellman–Kalaba (siendo el primero fácil de mecanizar para las redes que poseen un gran número de vértices: caso del estudio sistemático de un grupo nutrido de individuos).

Obviamente, no podemos detenernos en la exposición de los conceptos teóricos que afectan a la aplicación a la Psicología de la Teoría de Grafos, si bien, y sólo a título indicativo, realizaremos las siguientes especulaciones, acerca del comportamiento de los S. psicológicos tratados de esta guisa por la susodicha técnica de la Investigación Operativa.

Sea, v. gr., un conjunto de 5 individuos o sistemas psicológicos. De ellos puede afirmarse que:

1- **No forman grafo "simétrico"**: puesto que 2 vértices adyacentes (ligados entre sí por un arco, por lo menos) no tienen por qué estar ligados forzosamente por 2 arcos (uno en cada sentido): en efecto, un individuo puede emitir información hacia otro, y no ser correspondido.

[4] Se denomina también "camino más corto". El valor l(u) es, en este caso, llamado "longitud" del arco **u**. Esta terminología, de uso corriente, se presta, sin embargo, a generar confusión.

2- **No forman grafo "antisimétrico"**: puesto que 2 vértices cualesquiera pueden estar ligados por 2 arcos (se admite la posible existencia de una correspondencia informativa entre dos individuos).
3- **No forman grafo "completo"**: puesto que dos vértices cualesquiera no tienen por qué ser siempre adyacentes (se admite la posible inexistencia de tránsito informativo entre 2 individuos).
4- **No forman grafo "fuertemente conexo"**: puesto que 2 vértices cualesquiera pueden no estar siempre ligados, al menos, por dos caminos (hipótesis que se deduce ampliamente de mis consideraciones anteriores).
5- **Sí forman grafo "transitivo"**: puesto que:
   a) Existe siempre un arco que va del origen de un camino cualquiera a su extremidad.
   b) Además cada vértice posee un "bucle". Veamos ambas consideraciones respectivamente:

   a) Sea:

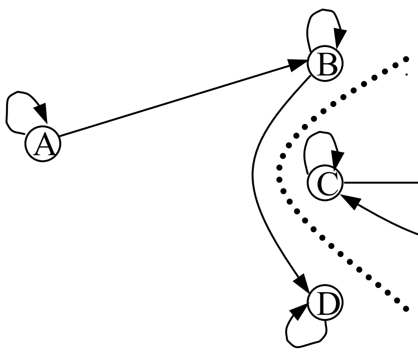


FIG. 7.6. Grafo compuesto de cinco individuos.

un grafo constitutivo de los cinco sistemas (individuos) de que consta un grupo. Obsérvese que si bien no podemos, siguiendo un camino, desplazarnos desde **A** hasta **E**, sí podemos plantearnos el problema de un modo distinto: considerando dos subgrafos transitivos: {A, B, D}
{C, E},

en los que es perfectamente descomponible el grupo en cuestión.

b) La diagonal principal de la matriz asociada al grafo no contiene más que unos $\Rightarrow \forall u^{i}_{i} = 1$. Esta consideración se nos antoja importante desde el punto de vista psicológico (trascendencia de las propias respuestas en uno mismo), y es condición decisiva en el estudio de sistemas con retroalimentación o "feedback" (¡tan propio de los individuos de la especie humana!).

6- **No forman grafo "sin circuitos":** puesto que no sólo puede existir algún "circuito" (camino en que la extremidad terminal del último arco se confunde con la extremidad inicial del primer arco), sino que, por otra parte –como ya hemos apuntado anteriormente– cada vértice posee un "bucle".

7- La consideración acerca de si pueden constituir un **grafo "simple"** parece aleatoria y, en todo caso, perfectamente enjuiciable desde el plano psicológico: puede determinarse una división de los vértices (sistemas ≡ individuos) en 2 clases, de tal forma que todo arco que tenga su extremidad inicial en la primera de estas clases, y su extremidad terminal en la segunda.

Otro problema interesante que puede plantearse en el estudio de los S. psicológicos, reside en la búsqueda del flujo máximo que puede atravesar una red de acuerdo con la limitación que representan las capacidades máximas de los arcos de la misma (umbrales superiores de "estímulo o respuesta"). Para resolver este problema por el algoritmo de Ford–Fulkerson, es necesario ignorar la presencia de los "bucles" en el grafo representativo del conjunto o grupo de individuos. El problema queda definido de este modo:

"capacidad del arco u" (umbral de máxima información) = $c(u) \geq 0$;
Hay (n+1) sistemas o vértices $\rightarrow \{S_0, ..., S_n\}$, de tal modo que:

$$\begin{cases} \otimes\ \exists \text{ un vértice } S_0 \text{ (“entrada de la red”) y uno sólo /: } \Gamma^{-1}(S_0) = \emptyset; \\ \otimes\ \exists \text{ un vértice } S_n \text{ (“salida de la red”) y uno sólo / : } \Gamma(S_n) = \emptyset\ ; \end{cases}$$

Un flujo $\boldsymbol{\psi}$ de la red, es una cantidad $\psi(u)$ asociada a cada arco **u** de la red, tal que: (1) $\psi(u) \geq 0 \rightarrow \forall\ u \in U$;

$$(2)\ \sum_{u \in U_S^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_S^+} \varphi(u) = 0 \rightarrow \rightarrow \forall\ S \begin{cases} \neq S_0 \\ \neq S_n \end{cases} ;$$

(3) $\psi(u) \leq c(u)$;

Y ello, representando por U_s^- al conjunto de arcos que inciden interiormente en S, y U_s^+ al conjunto de arcos que inciden exteriormente en S.

Las restricciones (1) y (3) son claras. Veamos, en cambio, que la restricción (2) implica una exégesis terminante: en todo S, la suma de umbrales máximos de los estímulos debe ser igual o "equivalente" (heterogeneidad de las unidades de medida) a la suma de los umbrales máximos de las respuestas, sin cuya condición, es inútil atacar el problema a través del algoritmo propuesto. Particularmente, creo que esta igualdad puede llegar a formalizarse, e incluso a constituirse en realidad, profundizando en el estudio del ser humano y de sus posibilidades de asimilación y de comunicación: los psicólogos tienen la palabra.

Buscar el flujo máximo en una red equivale a hacer llegar el máximo flujo al vértice o sistema S_n, esto es $\rightarrow$ [MAX.] Ψ_{Sn}, siendo Ψ_{Sn} el denominado "valor del flujo Ψ". Consideremos, por otra parte, que los problemas de optimización de camino, o de flujo máximo a través de una red, pueden convertirse en problemas de Programación Lineal. Sin embargo, los algoritmos propuestos (y cuya descripción debemos ahorrarnos por obvias razones de espacio), utilizando la Teoría de los Grafos, resultan –a mi juicio– más concretos y elegantes, permitiendo una mejor utilización de la estructura particular de estos problemas.

3. Aplicación de la Teoría de Gestión de Stocks

De un modo análogo al expuesto en la aplicación anterior, podemos considerar a un S. psicológico como un ente en que las "demandas" propias de los problemas de stocks se transforman en entradas de estímulos al sistema mientras que, en su interior, se produce una acumulación o almacenamiento de experiencias y conocimientos cuyo control psicológico de emisión del sistema puede equipararse a la gestión de un stock mercantil.

En efecto, denominando "período" al intervalo de tiempo que separa dos entradas sucesivas de estímulos, los principales elementos que intervienen en nuestro problema son:

1- **El volumen de salida de respuestas** r, que puede ser determinado (cuando resulta estar en función de ciertas variables; v. gr.: proporcional al tiempo) o aleatorio (puede tratarse del planteamiento conductista de una situación real).
2- **El tiempo de aplicación del estímulo** τ , que también puede ser determinado o aleatorio, o depender del volumen de entrada de estímulos **n**, de la intensidad de dichos estímulos o de múltiples conveniencias de carácter psicológico.
3- **Los diferentes niveles de acumulación de experiencias**: nivel máximo S, nivel instantáneo σ , nivel mínimo y nivel de alerta (que aconseja la provocación de nuevos estímulos o, en su caso, permita la nueva entrada de los mismos).
4- **El volumen de entrada de estímulos** **n** que puede ser constante o variable a voluntad del psicólogo experimentador o, en su caso, dependiente de un proceso de condicionamiento real.
5- **Los instantes (fechas) de entrada de estímulos t y los períodos T de permanencia en el sistema de la experiencia inducida por un determinado estímulo**, antes de su disipación efectiva (culminación del "nivel de alerta") a través de las respuestas correspondientes.

Es lógico suponer que la evolución del nivel de un cúmulo de conocimientos resultante de una o varias experiencias durante un período T, se presente, por efecto de la memoria, bajo la forma de una función sectorial en escalera decreciente (o, en su caso, como una curva continuamente decreciente).

En todo caso, resulta cómodo substituir o ajustar ese trazo sinuoso por una recta o curva que proporcione una descripción analítica más adecuada del volumen **r** de salida de respuestas. Al respecto, puede verse la figura siguiente:

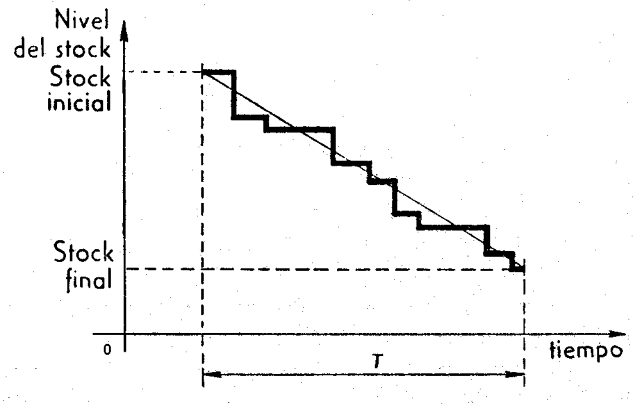


FIG. 7.7. Función en escalera decreciente.

De entre las numerosas particularidades que surgirían de nuestro estudio, consideramos procedente contemplar los modelos básicos de actuación del psicólogo–experimentador ante la diversidad de conductas que puede adoptar el S. De entre estos modelos pueden presentarse, en nuestra opinión, con mayor frecuencia, los siguientes:

1- Formas en que los periodos T de permanencia son fijos:

a) La salida de respuestas r es constante. La entrada de estímulos tiene lugar instantáneamente y en cantidades constantes n. Se puede, según el caso, tolerar o no una ruptura del stock de conocimientos.

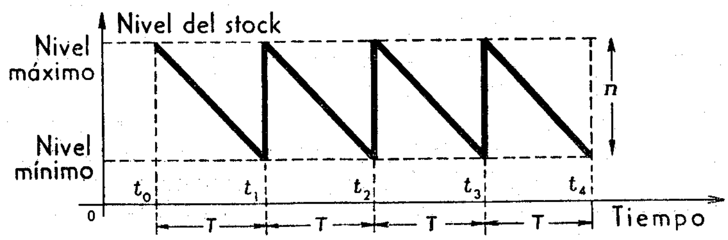


FIG. 7.8. Entrada constante de estímulos al sistema psicológico.

b) La salida de respuestas r es variable (aleatoria o determinada). La entrada de estímulos se hace con o sin plazo T en cantidades variables n_i, de manera que se sitúe el stock de conocimientos en un nivel máximo al final de cada periodo. Las cantidades de estímulos n_i deben ser estimadas en los instantes t_i por extrapolación de la función correspondiente. Así:

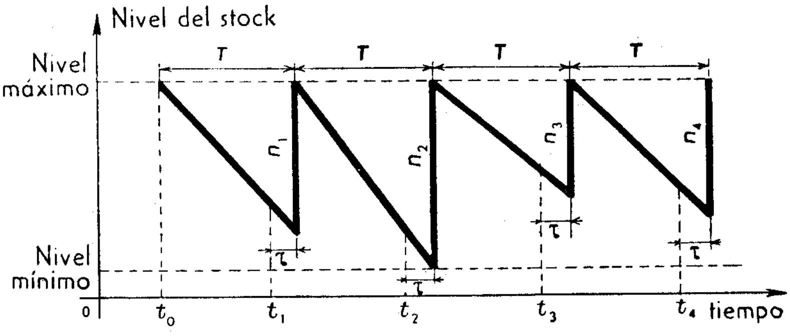


FIG. 7.9. Entrada variable de estímulos al sistema psicológico.

2- Formas en que los periodos Ⓣ de permanencia son variables:

a) La salida de respuestas r es variable (aleatoria o determinada). La entrada de estímulos se verifica con o sin plazo τ en cantidades fijas de manera que se sitúe el stock de conocimientos en su nivel máximo, al final de cada periodo.

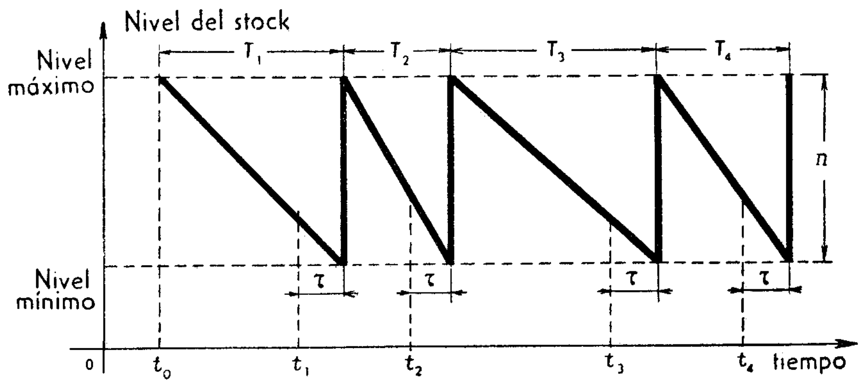


FIG. 7.10. Salida variable de respuestas del sistema psicológico con o sin plazo τ.

b) La salida de respuestas ⓡ es variable (aleatoria o determinada). La entrada de estímulos tiene lugar en cantidades fijas y exige un plazo constante τ. En este modelo, de cómodo control, equiparable al "*Two–bin System*", las órdenes de entrada de los estímulos son pasadas en el momento en que el stock de conocimiento se reduce a un nivel convenientemente elegido por el psicólogo, llamado "*nivel de reaprovisionamiento o de alerta*".

Siguiendo el mismo esquema metodológico que el empleado en los casos anteriores, su representación gráfica puede verse a continuación:

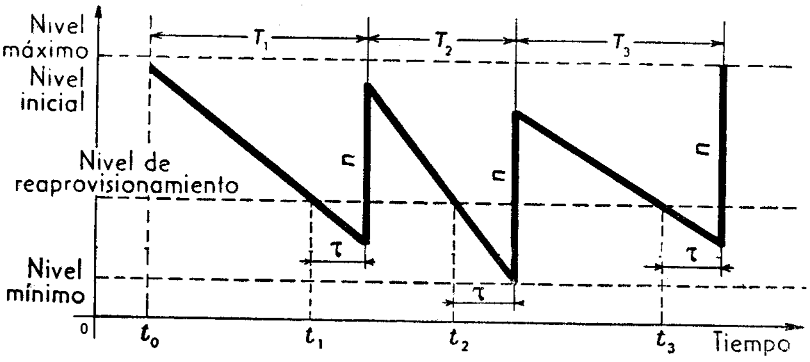


FIG. 7.11. Salida variable de respuestas del sistema psicológico con un plazo τ.

Los modelos anteriormente expuestos de gestión de "*stocks intelectuales*", constituyen modelos básicos, que ofrecen la ventaja de proporcionar unas reglas automáticas de control. De cualquier modo, no conviene ocultar que, como en todo problema de Investigación Operativa, no siempre será posible resolver el caso por cualquiera de los modelos anteriores, siendo entonces preciso realizar un estudio especial teniendo en cuenta todas las restricciones particulares, implicadas por el individuo o sistema.

Convendría hacer notar, por último, que la Programación Dinámica, cuya aplicación a lo problemas psicológicos ya ha sido estudiada en epígrafes anteriores de este mismo capítulo, resulta un instrumento matemático particularmente útil para resolver los problemas de stocks intelectuales que sean, esencialmente, de naturaleza secuencial, como los psicológicos.

CAPÍTULO 8
Aplicaciones de la Investigación Operativa (II). Teoría de Colas o de los Fenómenos de Espera

1. Introducción

En el estudio del individuo como S., pueden considerarse, a mi juicio, las entradas de estímulos como llegadas de clientes en un fenómeno de espera, si presuponemos inicialmente una acumulación de ellos como resultado de una experiencia psicológica de carácter conductista o behaviorista.

2. Proceso de Poisson

Consideremos, para mayor generalidad, que dichas llegadas de estímulos se producen siguiendo un proceso poissoniano. En efecto, dados unos cambios de estado en un S. o individuo, se dirán que siguen los postulados de Poisson[1] si se cumple que:

1- Los sucesos que conciernen a cambios en intervalos no solapados, son independientes.

2- La probabilidad de un número dado de cambios en un intervalo depende de la medida o longitud de este intervalo: $|\!\longrightarrow$, y **no** de su situación:
$|\!\longrightarrow\!|\!\longrightarrow$.

3- $\exists \lambda \in \Re \;/\; \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{P_i(h) - \lambda \times h}{h} = 0, \text{siendo} : \xleftrightarrow{\;h\;}$

4- $\forall\, n \in \underset{n \geq 2}{\{N\}} = \{Z^+\} \Rightarrow \lim\limits_{h \to o} \dfrac{P_n(h)}{h} = 0$

---

[1] **Siméon Denis Poisson** (1781-1840), fue un físico y matemático francés al que se le conoce por sus diferentes trabajos en el campo de la electricidad; también hizo publicaciones sobre la geometría diferencial y la teoría de probabilidades. La primera memoria de Poisson sobre la electricidad fue en 1812, en que intentó calcular matemáticamente la distribución de las cargas eléctricas sobre la superficie de los conductores, y en 1824, cuando demostró que estas mismas formulaciones podían aplicarse de igual forma al magnetismo. El trabajo más importante de Poisson fue una serie de escritos acerca de las integrales definidas, y cuando tan sólo tenía 18 años, escribió una memoria de diferencias finitas. Poisson enseñaba en la escuela Politécnica desde el año 1802 hasta 1808, en que llegó a ser un astrónomo del *Bureau des Longitudes*. En el campo de la astronomía estuvo fundamentalmente interesado en el movimiento de la Luna. En 1809 fue nominado como profesor de matemáticas puras en la nuevamente abierta facultad de ciencias. En 1837 publicó en *Recherches sur la probabilité des jugements*, un trabajo importante en la probabilidad, en el cual describe la probabilidad como un acontecimiento fortuito ocurrido en un tiempo o intervalo de espacio bajo las condiciones que la probabilidad de un acontecimiento ocurre es muy pequeña, pero el número de intentos es muy grande; entonces, el evento ocurre algunas veces. Durante toda su vida publicó entre 300 y 400 trabajos matemáticos incluyendo aplicaciones a la electricidad, el magnetismo y la astronomía.

Consecuentemente, habrá que analizar, en cada caso, si realmente la experiencia psicológica en cuestión se adapta a los postulados anteriormente expresados, y, acto seguido, proceder a su estudio como tal proceso poissoniano, del modo que a continuación se expone.

En estadística y simulación, un **Proceso de Poisson** (también conocido como **"Ley de los sucesos raros"**) es un proceso de sucesos independientes donde:

1. El número de sucesos en dos intervalos independientes siempre es independiente.
2. La probabilidad de que un suceso ocurra en un intervalo es proporcional a la longitud del intervalo.
3. La probabilidad de que ocurra más de un suceso en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable (no se producirán sucesos simultáneos).

Para procesos homogéneos hay una densidad media λ. Eso significa que la media de los sucesos en un intervalo de tiempo *t* es λ/t. También existen procesos de Poisson no homogéneos.

El tiempo entre dos sucesos de un proceso de Poisson con intensidad media λ es una variable aleatoria de distribución exponencial con parámetro λ.

Se pueden modelar muchos fenómenos psicológicos como un proceso de Poisson. El número de sucesos en un intervalo de tiempo dado es una variable aleatoria de distribución de Poisson donde λ es la media de números de sucesos en este intervalo. El tiempo hasta que ocurre el suceso número *k* en un proceso de Poisson de intensidad λ es una variable aleatoria con distribución de probabilidad gamma o (lo que es lo mismo) con distribución de Erlang[2] con $\theta = 1/\lambda$.

Imaginemos, ahora, un S. psicológico o individuo en un determinado estado en el instante *t*, caracterizándose dicho estado por la llegada de un número *k* de estímulos, entre 0 y t. Suponiendo que la probabilidad de pasar del estado *k* al $k + 1$ entre *t* y $t + dt$ es igual a $\lambda \cdot dt$, siendo λ constante y considerando despreciable la probabilidad, por tratarse de un infinitésimo (o infinitesimal) de orden superior, de pasar del estado *k* al $k + 2$.

Puede verse, al respecto, el esquema o figura siguiente:

[2] En estadística y simulación, la **distribución Erlang**, también llamada **distribución de Erlang**, es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros *k* y θ cuya función de densidad, para valores $x > 0$ es la siguiente:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

La distribución de Erlang es el equivalente de la distribución gamma con el parámetro $\forall k = 1,2, ...,$ y $\lambda = 1/\theta$. Para $k = 1$ eso es la distribución exponencial. Se utiliza la distribución de Erlang para describir el tiempo de espera hasta el suceso número *k* en un proceso de Poisson.

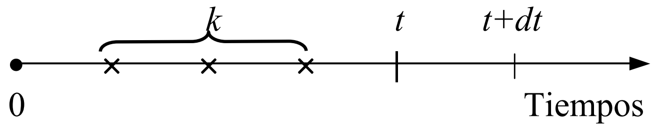


FIG. 8.1. Llegada de estímulos a un sistema psicológico.

Teniendo en cuenta lo anterior, determinemos ahora la probabilidad de que el sistema en cuestión se encuentre en el estado n en el momento t + dt.

Esta probabilidad es igual:

- a la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado n-1 en el momento t y que se produzca una llegada de estímulos entre t y t + dt;
- más la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado n en el momento t y que no se produzca ninguna llegada de estímulos entre t y t + dt.

Podemos escribir:

$$p_n(t + \mathrm{d}t) = p_{n-1}(t) \cdot \lambda \cdot \mathrm{d}t + p_n(t)(1 - \lambda \cdot \mathrm{d}t),$$

o bien, haciendo las operaciones pertinentes:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p_n(t)}{\Delta t} = p'_n(t) = \frac{p_n(t + \mathrm{d}t) - p_n(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - \lambda \cdot p_n(t) = \lambda\left[p_{n-1}(t) - p_n(t)\right]$$

La solución de esta ecuación diferencial, que se puede resolver como lineal de primer orden, es: $\mathrm{p_n(t) = e^{-\lambda\, t} \frac{(\lambda\, t)^n}{n\,!}}$,

siendo para t = 1: $\mathrm{p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\,n}}{n\,!}}$, que es la expresión de la *ley de Poisson*.

La ley de Poisson define, pues, un proceso de llegadas de estímulos (por unidad de tiempo) que responde a las hipótesis anteriormente especificadas. Su media y su varianza son:

$$\mathrm{E(n) = \lambda}, \qquad \mathrm{Var(n) = \sigma^2 = \lambda}.$$

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución de Poisson** es una distribución de probabilidad discreta. Expresa la probabilidad de un número de eventos ocurriendo en un tiempo fijo si estos eventos ocurren con una tasa media conocida, y son independientes del tiempo desde el último evento.

La distribución de probabilidad de Poisson, que publicó, junto con su teoría de probabilidad, en 1838 en su trabajo titulado *Recherches sur la* *probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile* (investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles), está dada por la expresión siguiente:

$$f(k;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

donde:

e es la base del logaritmo natural o neperiano (*e* = 2.7182818284...),
k! es el factorial de *k*,
k es el número de ocurrencias de un evento,
λ es un número real positivo, equivalente al número esperado de ocurrencias durante un intervalo dado. Por ejemplo, si los eventos ocurren de media cada 4 minutos, y se está interesado en el número de eventos ocurriendo en un intervalo de 10 minutos, se usaría como modelo una distribución de Poisson con: λ = 10/4 = 2'5.

Por ejemplo, si el 2% de los individuos analizados de un cierto colectivo tienen la expresión escrita defectuosa, se desea obtener la probabilidad de que 5 de 400 individuos (el 1'25%) de dicho colectivo tengan su expresión escrita defectuosa.

Solución:

$$k = 5, \lambda = 400(0.02) = 8$$

$$P(5;8) = \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0.092$$

O sea, que la probabilidad buscada es del 9'2%. Si, por otra parte, como parecería natural, se buscase la probabilidad de que dicha expresión defectuosa la tuvieran 8 individuos del colectivo (el 2%), dicha probabilidad, con k = 8 y $\lambda = 8$, sería prácticamente del 14%.

Pues bien, la probabilidad de que el intervalo que separa dos acontecimientos sucesivos sea superior a un determinado valor τ, es igual a la probabilidad de que no se produzca ningún acontecimiento en el intervalo τ, por consiguiente, igual a $e^{-\lambda\tau}$.

Al respecto de lo que estamos exponiendo hasta ahora, puede resultar suficientemente aclaratorio el siguiente gráfico:

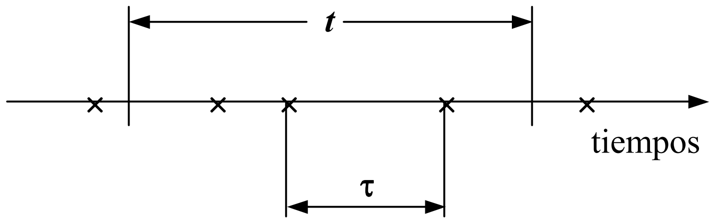


FIG. 8.2. Intervalo de tiempo **τ** de llegada de estímulos al sistema.

Si se designa por F(τ) la *función de distribución* de τ, la probabilidad de que el intervalo en cuestión sea superior a **τ** no es otra que 1 – F(τ).

En estas condiciones: $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$, resultando:

$$dF(\tau) = f(\tau)\mathrm{d}\tau = e^{-\lambda\tau} \cdot \mathrm{d}(\lambda\,\tau).$$

De este modo, en el marco de un proceso poissoniano, la ley de probabilidad de los intervalos que separan dos acontecimientos sucesivos no es otra que la ley exponencial. Su media y su varianza son:

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{E}(\tau) = 1/\lambda \\ \mathrm{Var}(\tau) = 1/\lambda^2 \end{array}\right\} \frac{[\mathrm{E}(\tau)]^2}{\mathrm{Var}(\tau)} = 1$$

En los fenómenos de espera, la ley de Poisson describe, a menudo, correctamente el proceso de llegada de los estímulos y la ley exponencial la distribución de las duraciones del servicio. En tal caso, la ley de llegadas viene definida por el *número medio de las llegadas por unidad de tiempo* y la ley de las duraciones del servicio por la tasa media de servicio (inversa del tiempo medio que separa dos acontecimientos sucesivos).

3. Estimulación ilimitada

La figura que viene a continuación representa esquemáticamente esta situación. Llamemos:

S al número de centros perceptores del individuo o S.
ν al número de estímulos en la fila de espera.
j al número de estímulos que están siendo procesados por el individuo ($0 \le j \le S$).
n al número total de estímulos en el sistema, es decir, en espera y siendo procesados, esto es: $n = \nu + j$.
ρ al número de centros perceptores del S. desocupados.
$\mathbf{t_f}$ al tiempo medio de espera del estímulo en la fila, antes de ser procesado, que no debe confundirse con la *latencia* de la respuesta (tiempo transcurrido, en segundos, entre la presentación del estímulo y el comienzo de la respuesta).

(Los valores medios correspondientes se representarán con un guión horizontal sobre la variable psicológica en cuestión).

La situación aparece clara. En tanto que $j < S$, es decir, mientras que todos los centros perceptores no están ocupados, no hay filas de espera y cualquier estímulo que llegue es procesado inmediatamente ($\nu = 0$). Por el contrario, si $j = S$, puede formarse una fila de espera y entonces $\nu \geq 0$.

La situación, gráficamente, podría esquematizarse así:

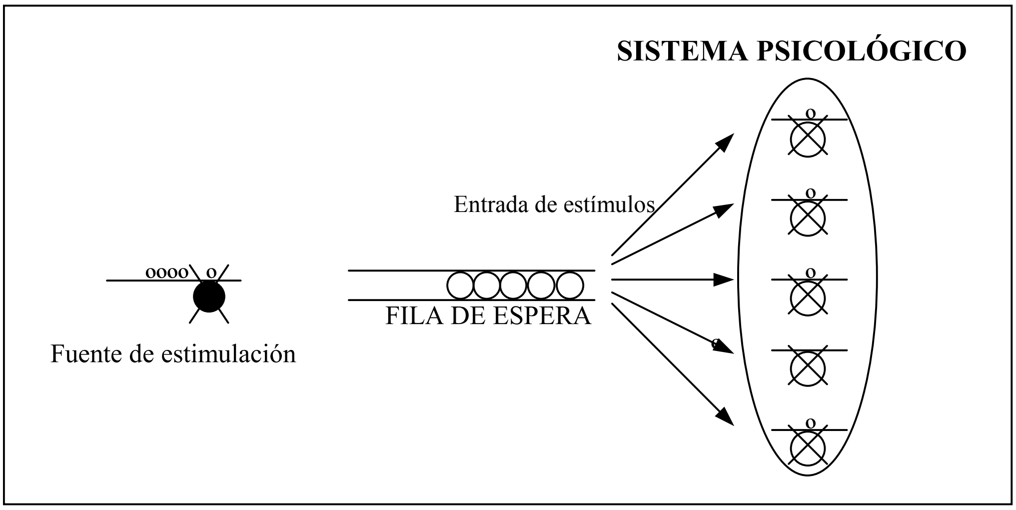


FIG. 8.3. Esquema de llegadas de estímulos al S. psicológico (estimulación ilimitada).

En este caso, las llegadas de estímulos son de naturaleza poissoniana y su tasa media de procesamiento es λ. Todos los centros receptores tienen igual tasa media de procesamiento μ que corresponde a una misma distribución exponencial.

En la figura anterior no hemos representado más que una sola fila de espera. Podemos considerar igualmente que hay varias filas, una ante cada centro perceptor del sistema psicológico (audición, vista, olfato, tacto, …); este último caso será equivalente al primero con la condición de que los estímulos no tengan ninguna prioridad ni preferencia por un centro perceptor en particular y que cualquier estímulo actúe desde la fila más corta. En el caso de tratarse de varios individuos o sistemas psicológicos el problema podría multiplicarse tantas veces como fuera preciso.

Las *ecuaciones de estado* que describen tal fenómeno de espera se establecen fácilmente del siguiente modo:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_0(t) = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_n(t) = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - (\lambda + n \cdot \mu) p_n(t) + (n+1) \cdot \mu \cdot p_{n+1}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, n / 1 \le n < S, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_n(t) = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - (\lambda + S \cdot \mu) p_n(t) + S \cdot \mu \cdot p_{n+1}(t), \quad \forall n \ge S. \end{cases}$$

Estas ecuaciones no son más que un caso particular de las ecuaciones siguientes, más generales, que definen lo que se denomina un "proceso de nacimiento y de muerte" en el cual las llegadas y el proceso de percepción son poissonianos:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_n(t) = \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_{\mathrm{n}}) \cdot p_n(t) + \mu_{\mathrm{n+1}} \cdot p_{n+1}(t), \forall\ \mathrm{n} > 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_0(t) = -\lambda_0 \cdot p_0(t) + \mu_1 \cdot p_1(t) \end{cases}$$

en donde λ_n y μ_n son funciones de n.

Las ecuaciones anteriores generalizan numerosos casos particulares de los fenómenos de espera, por ejemplo, el de una tasa de procesamiento proporcional al número de estímulos en el sistema ($\lambda_n = \lambda$; $\mu_n = n \cdot \mu$).

Situémonos ahora en el caso de "régimen permanente", es decir, en el caso en que las probabilidades p_n, de un número n de unidades en el sistema, son independientes del tiempo, con lo que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_n(t) = 0 \qquad \text{, para cualquier valor de } n.$$

Se pondrá $\psi = \lambda/\mu$. La cantidad ψ/S, denominada "*intensidad de estimulación*", será tal que $(\psi/S) < 1$, es decir, $\psi < S$, si no la fila se haría infinita, al ser el número medio de llegadas de estímulos superior al de salidas.

a) *Probabilidad p_n de que existan **n** unidades en el sistema.*

De las ecuaciones de estado se deducen inmediatamente las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{ll} p_n = p_0 \dfrac{\psi^n}{n!}; & 1 \le \mathrm{n} < \mathrm{S}, \\ p_n = p_0 \dfrac{\psi^n}{S! \cdot S^{n-S}}; & \mathrm{n} \ge \mathrm{S}; \end{array}\right\}$$

donde:

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{\psi^S}{S!(1-\psi/S)} + 1 + \dfrac{\psi}{1!} + \dfrac{\psi^2}{2!} + ... + \dfrac{\psi^{S-1}}{(S-1)!}}$$

o también $p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = e^{-\psi}$

En el caso particular de que exista un único centro receptor (perceptor), o sea, S = 1, se tiene:

$$p_0 = 1 - \psi\ ,$$
$$p_n = (1-\psi)\cdot\psi^n$$

Se pueden utilizar igualmente, para el cálculo de p_n, las fórmulas de retorno o recurrencia:

$$\left.\begin{aligned} p_n &= \frac{\psi}{n} p_{n-1}, \quad 1 \leq n < S \\ p_n &= \frac{\psi}{S} p_{n-1}, \quad n \geq S. \end{aligned}\right\}$$

En cualquier caso, la determinación de la probabilidad p_n de que existan n unidades de estímulos en el sistema, siendo la tasa media de llegadas λ y la tasa de percepción proporcional al número de estímulos en el sistema, se realiza del siguiente modo:

Volvamos a tomar las ecuaciones generales del proceso de nacimiento y muerte:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_n(t) = \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \mu_{n+1} \cdot p_{n+1}(t), \quad n > 0; \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_0(t) = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu_1 \cdot p_1(t). \end{cases}$$

Aquí, $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = n\cdot\mu$. En régimen permanente, se tendrá:

$$0 = \lambda\cdot p_{n-1} - (\lambda + n\cdot\mu) p_n + (n+1)\mu\cdot p_{n+1}, \quad n > 0;$$
$$0 = -\lambda\cdot p_0 + \mu\cdot p_1,$$

o sea:

$$(n+1)\mu\cdot p_{n+1} = -\lambda\cdot p_{n-1} + (\lambda + n\cdot\mu) p_n,$$
$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

como:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda}{\mu} p_0, \\ 2\mu \cdot p_2 &= (\lambda + \mu) p_1 - \lambda \cdot p_0, \\ 3\mu \cdot p_3 &= (\lambda + 2\mu) p_2 - \lambda \cdot p_1, \\ 4\mu \cdot p_4 &= (\lambda + 3\mu) p_3 - \lambda \cdot p_2, \\ \ldots \quad \ldots &\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{aligned}$$

de donde:

$$p_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} p_0;$$

pero:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1;$$

luego:

$$p_0 + p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} = 1,$$

$$p_n + p_0 (e^{\lambda/\mu} - 1) = 1,$$

$$p_0 = e^{-\lambda/\mu};$$

y finalmente:

$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n e^{-\lambda/\mu}}{n!} = \frac{p_0 \times \psi^n}{n!}$$

b) *Número medio de unidades **n** en el sistema.*

Se calculará la esperanza matemática o valor medio de n del siguiente modo:

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n,$$

$$\overline{n} = \left[\psi + 2\frac{\psi^2}{2!} + \ldots + S\frac{\psi^S}{S!} + \frac{(S+1)\psi^{S+1}}{S!(S-\psi)} + \frac{\psi^{S+2}}{S!(S-\psi)^2} \right] p_0.$$

En particular, para S = 1:

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = \frac{\psi}{1-\psi} = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda};$$

c) *Número medio de estímulos* **v** *en la fila de espera.*

Se calculará la esperanza matemática de la variable aleatoria $v = n - S$ (estímulos esperando en cola), tratándose del caso de un fenómeno de espera con varios centros receptores sensoriales, o sea:

$$\bar{v} = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n - S) p_n = \sum_{n=S+1}^{\infty} n \cdot p_n - S \sum_{n=S+1}^{\infty} p_n$$

$$\rightarrow \sum_{n=S+1}^{\infty} n \cdot p_n = p_0 \left[(S+1) \frac{\psi^{S+1}}{S!\,S} + (S+2) \frac{\psi^{S+2}}{S!\,S^2} + \ldots \right] =$$

$$= \frac{p_0 \cdot \psi}{S!} \left[(S+1) \frac{\psi^{S}}{S} + (S+2) \frac{\psi^{S+1}}{S^2} + \ldots \right]$$

Como sucede que:

$$\frac{\psi^{S+1}}{S} + \frac{\psi^{S+2}}{S^2} + \ldots = \frac{\psi^{S+1}}{S} \left[1 + \frac{\psi}{S} + \frac{\psi^2}{S^2} + \ldots \right] =$$

$$= \frac{\psi^{S+1}}{S} \times \frac{1}{1 - \psi / S} = \frac{\psi^{S+1}}{S - \psi} \quad ,$$

derivando la expresión anterior resulta:

$$\frac{(S+1)(S-\psi)\psi^{S} + \psi^{S+1}}{(S-\psi)^2}$$

y

$$\sum_{S+1}^{\infty} n \cdot p_n = p_0 \left[\frac{(S+1)\psi^{S+1}}{S!(S-\psi)} + \frac{\psi^{S+2}}{S!(S-\psi)^2} \right]$$

$$\rightarrow S \sum_{n=S+1}^{\infty} p_n = p_0 \cdot S \left[\frac{\psi^{S+1}}{S!S} + \frac{\psi^{S+2}}{S!S^2} + \ldots \right] =$$

$$= \frac{p_0 \cdot \psi^{S+1}}{S!} \left[1 + \frac{\psi}{S} + \frac{\psi^2}{S^2} + \ldots \right] = \frac{p_0 \cdot \psi^{S+1}}{S!} \times \frac{1}{1 - \psi / S}$$

$$= p_0 \cdot S \frac{\psi^{S+1}}{S!} \times \frac{1}{S - \psi}.$$

De dónde se deduce que:

$$\bar{v} = p_0 \left[\frac{\psi^{S+1}}{S!(S-\psi)} + \frac{\psi^{S+2}}{S!(S-\psi)^2} \right] =$$

$$= p_0 \frac{S \cdot \psi^{S+1}}{S!(S-\psi)^2} = p_0 \frac{\psi^{S+1}}{S \cdot S!(1-\psi/S)^2}$$

, llegando así a la fórmula buscada. En particular para S = 1, se tendrá:

$$\sum_{n=S+1}^{\infty} (n-1)p_n = \frac{\psi^2}{1-\psi}.$$

d) *Número medio ρ de centros receptores desocupados*.

$$\bar{\rho} = \sum_{n=0}^{S} (S-n)p_n = S - \psi;$$

Para S = 1, se tiene:

$$\bar{\rho} = 1 - \psi .$$

Las medias de las variables *n*, *v* y ρ están ligadas analíticamente por la relación:

$$\bar{n} = \bar{v} + S - \bar{\rho} = \bar{v} + \psi .$$

e) *Probabilidad de espera*.

La probabilidad de una espera de cualquier duración o probabilidad de espera, que será expresada por $p(>0)$ es, sencillamente, la probabilidad de que *n* sea superior o igual a *S*. O sea:

$$p(>0) = \Pr(n \geq S) = \sum_{n=S}^{\infty} p_n ,$$

$$p(>0) = \frac{\psi^S}{S!(1-\psi/S)} p_0 .$$

f) *Tiempo medio de espera t_f en la fila*:

En régimen permanente, se tiene:

$$\bar{v} = \lambda \bar{t}_f ,$$

de dónde:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{\psi^S}{SS!\mu(1-\psi/S)^2}\,p_0.$$

Existen unos ábacos que dan los valores de los productos $\mu \cdot t_f$ para diferentes valores de S y ψ/S. Para $S = 1$, se tendrá:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\psi}{1-\psi} = \frac{\bar{n}}{\lambda}.$$

4. Estimulación limitada

Con la hipótesis $S < m$, en donde m es el número de estímulos, el fenómeno puede definirse de la manera siguiente: si $1 \leq n \leq S$, hay $(S - n)$ centros perceptores desocupados; si $S < n \leq m$, hay S estímulos que están siendo procesados y $(n - S)$ en la fila de espera. La situación se presenta en la figura siguiente 8.4.

a) *Probabilidad p_n de que existan **n** unidades en el sistema.*

Las ecuaciones generales anteriormente expuestas permiten obtener:

$$P_n = C_m^n \psi^n p_0, \qquad 0 \leq n \leq S,$$

En este caso, la representación esquemática del proceso es la siguiente:

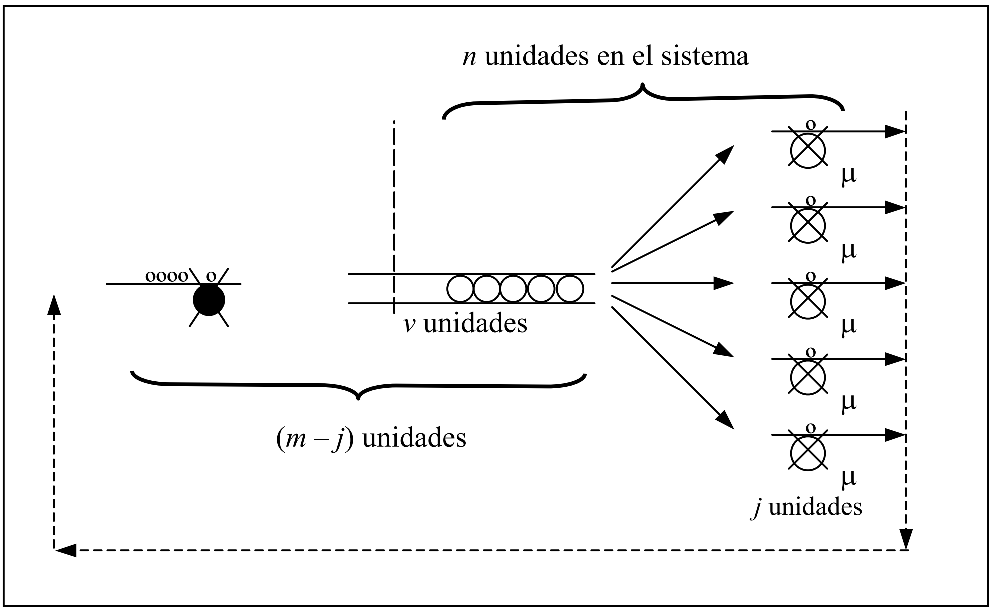


FIG. 8.4. Esquema de llegadas poissonianas de estímulos con tasa media λ por unidad de tiempo.

en donde se tiene el número de combinaciones sin repetición de **m** elementos tomados de **n** en **n** :

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!};$$

$$p_n = \frac{n!}{S!\,S^{n-S}} C_m^n \cdot \psi^n \cdot p_0; \qquad \forall S \le n \le m;$$

con: $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$.

Se podrán utilizar igualmente fórmulas de recurrencia. En efecto, haciendo:

$$a_n = p_n/p_0$$

se tendrá:

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{m-n+1}{n}\psi \cdot a_{n-1}, \qquad 1 \le n \le (S-1);$$

$$a_n = \frac{m-n+1}{S}\psi \cdot a_{n-1}; \qquad \forall S \le n \le m.$$

Se calculará, por último:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m} a_n}$$

En el caso de la existencia de un solo centro receptor sensorial (nariz, oídos, ojos, piel, …), las fórmulas a utilizar son:

$$p_n = \frac{m!}{(m-n)!}\psi^n \cdot p_0$$

con:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m!\,\psi^n}{(m-n)!}}$$

y

$$\sum_{n=0}^{m} p_n = 1,$$

o bien la fórmula de recurrencia:

$$p_n = (m-n+1)\psi\, p_{n-1}, \qquad 1 \le n \le m.$$

b) *Número medio de estímulos en la fila, de centros receptores sensoriales desocupados y de estímulos en el sistema.*

Los valores medios de las variables psicológicas *v*, ρ y *n* vienen dados por las fórmulas:

$$\bar{v} = \sum_{n=S+1}^{m} (n - S) p_n ,$$

$$\bar{\rho} = \sum_{n=0}^{S} (S - n) p_n ,$$

$$\bar{n} = S + \bar{v} - \bar{\rho}.$$

En el caso de un solo centro receptor sensorial (S = 1), las fórmulas a utilizar son las siguientes:

$$\bar{v} = m - \frac{1+\psi}{\psi}(1 - p_0),$$

$$\bar{\rho} = p_0 ,$$

$$\bar{n} = m - \frac{1}{\psi}(1 - p_0).$$

c) *Probabilidad de espera y tiempo medio de espera en la fila.*

Se obtiene de las fórmulas:

$$p(>0) = \Pr(n \geq S) = \sum_{n=S}^{m} p_n ,$$

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda(m - \bar{n})} = \frac{1}{\lambda(m - \bar{n})} \sum_{n=S+1}^{m} (n - S) p_n = \frac{\bar{v}}{\mu(S - \bar{\rho})}$$

En el caso de la consideración de un centro de percepción único, se utilizarán las fórmulas:

$$p(>0) = 1 - p_0 ,$$

$$\bar{t}_f = \frac{1}{\mu}\left(\frac{m}{1 - p_0} - \frac{1+\psi}{\psi}\right)$$

Para terminar esta introducción diremos que existen otros modelos temáticos que permiten tener en cuenta los diversos aspectos que pueden presentar los fenómenos de espera: varias filas de espera con prioridades, distribuciones de las entradas y de la duración del procesamiento de los estímulos diferentes de la ley de Poisson o de la ley exponencial, centros receptores sensoriales en cascada, etc.

Conviene, en cada caso que se presente en la práctica, estudiar las distribuciones de las llegadas y de la duración de los procesamientos para tratar de ajustarlas a las leyes de probabilidad clásicas. Si esto no fuera posible, se podrá tratar el problema por simulación (método de Monte-Carlo u otros).

5. Ejercicios de aplicación

1) Sea un fenómeno de estimulación de un individuo con varios centros receptores sensoriales.

La tasa media de llegadas de estímulos, cada diez minutos, es $\lambda = 8$. La duración media de la percepción (procesamiento) es de cinco minutos.

Calcular para S (número de centros receptores sensoriales) = 5, 6 y 7, el número medio v de estímulos en la fila de espera y el tiempo medio de espera t_f en la fila.

Solución

$\lambda = 8$, μ (tasa media de servicio o coeficiente de proporcionalidad) = $= 10/5 = 2$, $\psi = \lambda/\mu = 8/2 = 4$;

Para S = 5:

Aquí se tiene que: $\psi/S = 4/5 = 0'8 < 1$ (intensidad de estimulación).

$$\bar{v} = \frac{4^6}{5 \cdot 5!(1-4/5)^2} p_0 = \frac{\psi^{S+1}}{S \cdot S!(1-\psi/S)^2} \times p_0;$$

con:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{4^5}{5!(1-4/5)} + 1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!}}.$$

De donde:

$$p_0 = \frac{1}{1.024/4 + 824/24} = \frac{1}{77} = e^{-\psi} = \frac{1}{e^{\psi}}$$

y

$$\bar{v} = \frac{4^6}{4!} \times \frac{1}{77} = \frac{4^5}{6} \times \frac{1}{77} = \frac{1.024}{6} \times \frac{1}{77} = 2'216\,.$$

Para S = 6:

En este caso, la intensidad de estimulación será:

$\psi/S = 4/6 = 0'67 < 1$;

$$\bar{v} = \frac{4^7}{6 \cdot 6!(1 - 4/6)^2} p_0,$$

con:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{4^6}{6!(1-4/6)} + 1 + \frac{4}{1} + \ldots + \frac{4^5}{5!}}$$

De donde:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{4^6}{2 \times 5!} + \frac{824}{24} + \frac{1.024}{120}} = \frac{1}{\frac{2.048}{120} + \frac{5.144}{120}} = \frac{1}{\frac{7.192}{120}}$$

y

$$\bar{v} = \frac{4^7}{5! \cdot 4} \times \frac{120}{7.192} = \frac{4^6}{7.192} = \frac{4.096}{7.192} = 0'569.$$

<u>Para S = 7:</u>

En este caso, la intensidad de estimulación será:

$\psi/S = 4/7 = 0'57 < 1;$

$$\bar{v} = \frac{4^8}{7 \cdot 7!(1 - 4/7)^2} p_0,$$

con:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{4^7}{7!(1-4/7)} + 1 + \frac{4}{1} + \frac{4^6}{6!}}$$

De donde:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{4^7}{6! \cdot 3} + \frac{5.144}{120} + \frac{4.096}{720}} = \frac{1}{\frac{121.264}{720 \times 3}}$$

y entonces:

$$\bar{v} = \frac{4^8}{6! \cdot 3^2} \times \frac{720 \times 3}{121.264} = \frac{4^8}{3 \times 121.264} = \frac{65.536}{363.792} = 0'18$$

1) El tiempo medio de espera viene dado por la fórmula:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda}$$

<u>Para S = 5:</u> $\bar{t}_f = \frac{2'216}{8} = 0'277$,

y como la unidad de tiempo es aquí la decena de minutos, resulta:

$$\bar{t}_f = 2 \text{ min. } 46 \text{ s.} = 2'77 \text{ min.} = 166 \text{ segundos}$$

<u>Para S = 6:</u>

$$\bar{t}_f = \frac{0'569}{8} = 0'07 \quad \text{, o sea, } 0'7 \text{ min.} = 42 \text{ segundos}$$

<u>Para S = 7:</u>

$$\bar{t}_f = \frac{0'18}{8} = 0'022 \quad \text{, o sea, } 0'22 \text{ min.} = 13'2 \text{ segundos}$$

2) Calcular, en un fenómeno de estimulación, donde la tasa de procesamiento es proporcional al número de estímulos en el sistema, el número medio de estímulos en el sistema psicológico, sabiendo que la tasa de llegada de los mismos es $\lambda = 6$ y el coeficiente de proporcionalidad $\mu = 2$.

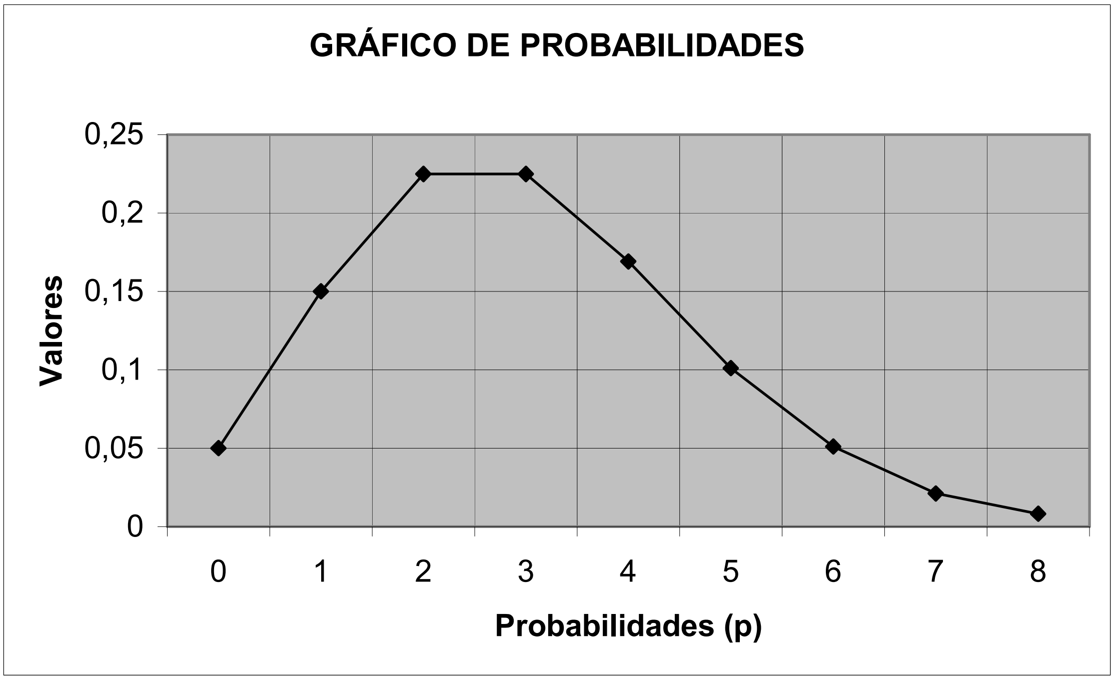
Solución

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 6 \\ \mu = 2 \end{matrix}\right\} \qquad \psi = \lambda / \mu = 6/2 = 3;$$

Debe tenerse en cuenta la expresión general: $P_n = \dfrac{\psi^n}{n!} \times P_0$;

$$\boxed{\begin{aligned} & e^{-\psi} = P_0 = e^{-3} = 0'050 \;; \\ & P_1 = 3 \times P_0 = 3 \times 0'05 = 0'150 \\ & P_2 = \frac{3^2}{2!} \times 0'05 = 0'225 \\ & P_3 = \frac{3^3}{3!} \times 0'05 = 0'225 \\ & P_4 = \frac{3^4}{4!} \times 0'05 = 0'169 \\ & P_5 = \frac{3^5}{5!} \times 0'05 = 0'101 \\ & P_6 = \frac{3^6}{6!} \times 0'05 = 0'051 \\ & P_7 = \frac{3^7}{7!} \times 0'05 = 0'021 \\ & P_8 = \frac{3^8}{8!} \times 0'05 = 0'008 \end{aligned}} = \boxed{\sum_{n=0}^{8} P_n = 1'000}$$

con la siguiente representación gráfica:



De donde se deducirá que:

$$\overline{n} = \sum_{n=1}^{8} n \cdot P_n = P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 + 5 \cdot P_5 + 6 \cdot P_6 + 7 \cdot P_7 + 8 \cdot P_8 =$$

$$= 0'150 + 2 \cdot 0'225 + 3 \cdot 0'225 + 4 \cdot 0'169 + 5 \cdot 0'101 + 6 \cdot 0'051 +$$

$$+7 \cdot 0'021 + 8 \cdot 0'008 = 0'150 + 0'450 + 0'675 + 0'676 + 0'505 + 0'306 +$$

$$+0'147 + 0'064 = \mathbf{2'973 \approx 3}$$ **estímulos en el sistema**.

3) En un S. psicológico el número de estímulos que se presentan por hora es de 20 y el tiempo necesario para procesar la información y emitir una respuesta es de 6 minutos por estímulo. Se admite que las llegadas constituyen un proceso de Poisson y que la duración del proceso es del tipo exponencial.

1) ¿Cuántos centros receptores sensoriales son suficientes para evitar cualquier atascamiento en la recepción de estímulos?
2) Se considera un Sistema Psicológico que procesa la información y emite respuesta de modo proporcional al número de estímulos. ¿Cuál es en este caso la probabilidad p_n de que haya n estímulos en la fila? ¿Y el número medio de estímulos en el sistema?
3) El número de centros receptores sensoriales, proporcional al número de estímulos, se limita a 4. ¿Cuál es la probabilidad de que deba entrar en acción otro centro receptor sensorial?

Solución

1) Se tiene $\lambda = 20$, $\mu = 10$, $\psi = \lambda/\mu = 2$.

Se necesitan, por consiguiente, más de dos centros receptores sensoriales para evitar el atascamiento del sistema.

2) De una manera general, se tiene:

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n)\cdot p_n(t) + \lambda_{n-1}\cdot p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}\cdot p_{n+1}(t) ,$$
$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda_0 \cdot p_0(t) + \mu_1 \cdot p_1(t) .$$

Pero aquí:

$$\lambda_n = \lambda \text{ , } \mu_n = n\cdot\mu$$

de dónde:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \mathrm{p_n}(\mathrm{t}) = -(\lambda + \mathrm{n}\mu)\cdot \mathrm{p_n}(\mathrm{t}) + \lambda\cdot \mathrm{p_{n-1}}(\mathrm{t}) + (\mathrm{n}+1)\mu\cdot \mathrm{p_{n+1}}(\mathrm{t}) ,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \mathrm{p_0}(\mathrm{t}) = -\lambda\cdot \mathrm{p_0}(\mathrm{t}) + \mu\cdot \mathrm{p_1}(\mathrm{t}) .$$

Se obtiene:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu}\cdot p_0 \text{ ,}$$
$$2\ \mu p_2 = (\lambda + \mu)\ p_1 - \lambda\cdot p_0 \text{ ,}$$
$$3\ \mu p_3 = (\lambda + 2\mu)\ p_2 - p_1 \text{ ,}$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

Se ve fácilmente que:

$$p_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \text{ ,}$$
$$p_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 \text{ ,}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \text{ .}$$

Como por otra parte:

$$\sum_{0}^{\infty} p_n = 1 ,$$

de dónde:

$$p_0 + p_0 \sum_{1}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = 1$$

y utilizando el desarrollo exponencial:

$$p_0 + p_0 (e^{\lambda/\mu} - 1) = 1.$$

Así:

$$p_0 = e^{-\lambda/\mu} \quad y \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!}$$

Aquí:

$$\boxed{p_n = \frac{1}{n!} 2^n e^{-2} = 0'135 \frac{2^n}{n!}}$$

La condición necesaria de convergencia de esta serie numérica exigiría que:

$$\lim_{n\to\infty} . \frac{2^n}{n!} = 0 \ ;$$

veamos que ello se cumple por la aplicación de la fórmula de Stirling, en que:

$$n! \cong e^{-n} \times n^n \times \sqrt{2\pi n} \ ;$$

En nuestro caso, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} . \frac{2^n \times e^n}{n^n \times \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} . \left(\frac{2e}{n}\right)^n \times \lim_{n\to\infty} . \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0 \times 0 = 0 \ .$$

En todo caso, dicha circunstancia viene demostrada por aplicación del criterio de d'Alembert o del cociente, puesto que para un término general de la serie numérica: $a_n = \frac{2^n}{n!}$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} . \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} . \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} . \frac{2^{n+1} \times n!}{2^n \times (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} . \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \ ,$$

lo que confirma el carácter convergente de la serie que nos ocupa.

Dicha convergencia también queda corroborada por aplicación del primer criterio de Cauchy ("criterio de la raíz"), puesto que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2e}{n \times \sqrt[2n]{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2e}{n} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{2\pi n}};$$

En cualquier caso, para la resolución del límite anterior del denominador de la segunda fracción, también resulta aplicable el criterio de Stolz de la raíz, al tratarse de una indeterminación del tipo ∞^0. Efectivamente, se tiene que:

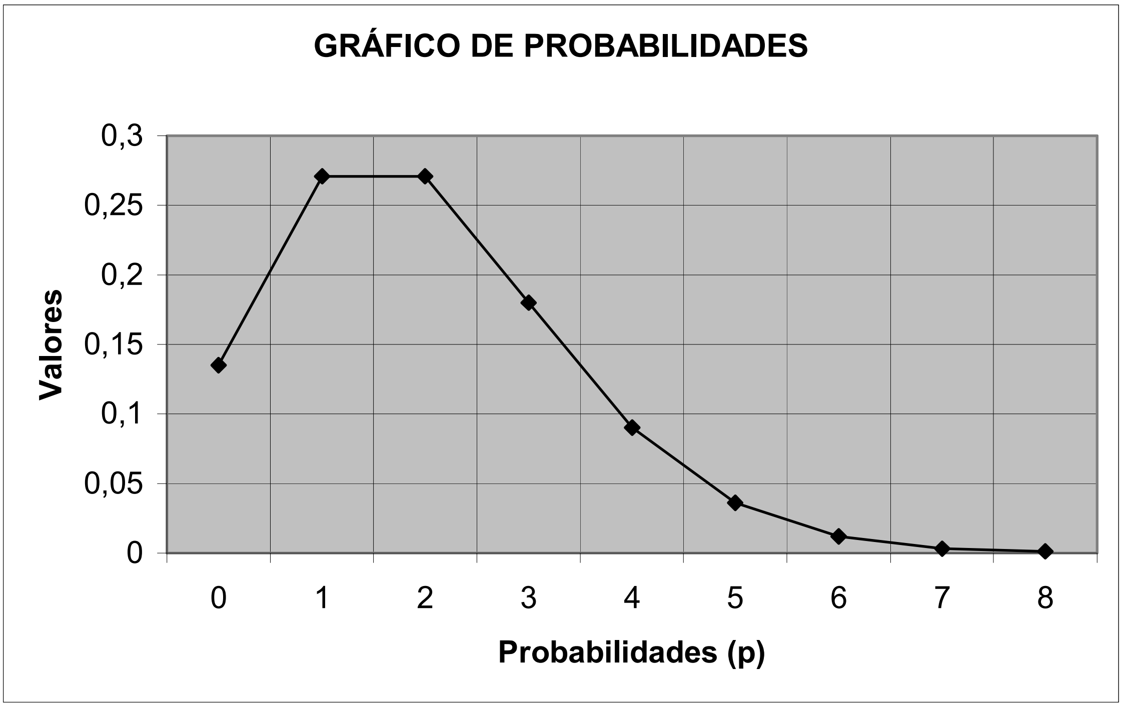
$$\lim_{n\to\infty} . \sqrt[2n]{2\pi n} = \lim_{n\to\infty} . \sqrt[2n-2(n-1)]{\frac{2\pi n}{2\pi(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} . \sqrt{\frac{n}{n-1}} = 1 \text{, luego:}$$

$\lim_{n\to\infty} . \sqrt[n]{a_n} = 0 \times 1 = 0 < 1$, y la serie es CONVERGENTE, tal como se pretendía demostrar.

Resultan, pues, las siguientes probabilidades:

p_0 = 0'135	p_3 = 0'180	p_6 = 0'012
p_1 = 0'271	p_4 = 0'090	p_7 = 0'003
p_2 = 0'271	p_5 = 0'036	p_8 = 0'001

con la siguiente representación gráfica:



Es fácil comprobar, según la expresión:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!} \quad ,$$

que, en el equilibrio, se tiene un proceso de Poisson tal que: $\overline{n} = \lambda / \mu$.

Por otra parte, con los cálculos ya efectuados, se cumple que:

$$\sum_0^\infty p_n = 0'999 \approx 1$$

y el número medio de estímulos en el sistema, será:

$$\overline{n} = \sum_0^\infty n \cdot p_n = 1'994 \approx 2 \text{, puesto que:}$$

$$\overline{n} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 = 1'994.$$

Dicho número no es más que la suma de la serie:

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^\infty n \cdot p_n = \sum_{n=0}^\infty 0'135 \times \frac{2^n}{(n-1)!}$$

3) La probabilidad de que deba entrar en acción otro centro receptor sensorial del Sistema Psicológico, será:

$$\sum_{n=5}^\infty p_n = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = 0'053 \equiv 5'3\%$$

$$\approx p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + ... = 0'052 + ...$$

4) Consideremos ahora un sistema continuo con dos estados (c.r.s. desocupado, c.r.s. ocupado), en donde la tasa poissoniana de llegadas de los estímulos al único centro receptor sensorial (c.r.s.) es λ y la tasa exponencial de procesamiento, μ. Si una llegada tiene lugar mientras se está procesando la respuesta, aquélla se pierde, si no, la respuesta al nuevo estímulo comienza inmediatamente.

Estudiar el establecimiento del régimen permanente.

Indicación. – Se podrá utilizar para la resolución la transformación de Carson-Laplace.

Recordatorio. – Sea p_{ij} la probabilidad de transición del estado i al estado j durante el tiempo elemental dt. Si M es el número de estados del sistema y $p_i(t)$ la probabilidad de que el sistema ocupe el estado **i** en el tiempo **t**, se tiene que :

$$\begin{cases} p_j(t+dt) = \sum_{i=1}^{M} p_i(t) \cdot p_{ij} \\ p_j(t+dt) - p_j(t) = \sum_{i=1}^{M} p_i(t)\left[p_{ij} - \delta_{ij}\right], \end{cases}$$

siendo δ_{ij} el símbolo de Krönecker (igual a 1 cuando y solamente cuando i = j, e igual a 0 en todos los demás casos).

Se tiene:

$$\lim_{dt \to 0} \frac{p_j(t+dt) - p_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{M} p_i(t) \cdot \lim_{dt \to 0} \frac{p_{ij} - \delta_{ij}}{dt}$$

de dónde:

$$\frac{d \cdot p_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{M} p_i(t) \cdot a_{ij} \ ,$$

siendo a_{ij} los elementos de la matriz diferencial **A**, tal que:

$$a_{ij} = \lim_{dt \to 0} \frac{p_{ij} - \delta_{ij}}{dt} .$$

Se tiene, pues:

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) A .$$

Consideremos ahora la transformación de Carson-Laplace (*) de la función f(t), a saber:

$$F(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt = L \cdot f(t) ;$$

se tiene:

$$L \frac{df}{dt} = p \cdot F(p) - p \cdot f(0) .$$

Luego:

$$L \frac{d}{dt} P(t) = p \cdot \Pi(p) - p \cdot P(0)$$

y

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{\Pi}(p) \cdot \mathbf{A}$$

si **A** no depende de t. De donde:

$$p \cdot \mathbf{II}\ (p) - p \cdot \mathbf{P}\ (0) = \mathbf{II}\ (p) \cdot \mathbf{A}.$$

$$\mathbf{II}\ (p)\ [p \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A}] = p \cdot \mathbf{P}\ (0)$$

y entonces:

$$\mathbf{II}\ (p) = p \cdot \mathbf{P}\ (0)\ [p \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A}]^{-1}\ .$$

Solución

a)

$$\left[p_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1-\lambda dt & \lambda dt \\ \mu dt & 1-\mu dt \end{bmatrix}.$$

En efecto, según el enunciado del problema hay dos estados: c.r.s. desocupado y c.r.s. ocupado. La tasa poissoniana de las llegadas es λ y la tasa exponencial del servicio es μ.

Se tiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{II}\ (p) = p \cdot \mathbf{P}\ (0) \left\{ p[1] - \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

Resultando, para efectuar el cálculo de la matriz inversa, que:

$$p\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+\lambda & -\lambda \\ -\mu & p+\mu \end{bmatrix}; \text{su matriz transpues ta será :}$$

$$\begin{bmatrix} p+\lambda & -\lambda \\ -\mu & p+\mu \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p+\lambda & -\mu \\ -\lambda & p+\mu \end{bmatrix},\ [\ ]^{p} = \begin{bmatrix} p+\mu & \lambda \\ \mu & p+\lambda \end{bmatrix}$$

Y el valor del determinante: $\Delta = (p + \lambda) \cdot (p + \mu) - \lambda \cdot \mu = p\ (p + \lambda + \mu)$, de donde:

$$[\ ]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{p+\mu}{p(p+\lambda+\mu)} & \dfrac{\lambda}{p(p+\lambda+\mu)} \\ \dfrac{\mu}{p(p+\lambda+\mu)} & \dfrac{p+\lambda}{p(p+\lambda+\mu)} \end{bmatrix}$$

Y haciendo operaciones, se tiene que:

$$\Pi(p) = P(0)\begin{bmatrix} \dfrac{p+\mu}{p+\lambda+\mu} & \dfrac{\lambda}{p+\lambda+\mu} \\ \dfrac{\mu}{p+\lambda+\mu} & \dfrac{p+\lambda}{p+\lambda+\mu} \end{bmatrix}$$

Se sustituye en una tabla de transformaciones inversas:

$$\frac{1}{p+a} \to \frac{1-e^{-at}}{a}; \quad \frac{p}{p+a} \to e^{-at};$$

de donde, por ejemplo:

$$\frac{p}{p+\lambda+\mu} + \frac{\mu}{p+\lambda+\mu} \to e^{-(\lambda+\mu)t} + \mu\left[\frac{1-e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\right] =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Así, en nuestro caso quedará la matriz:

$$P(t) = P(0)\begin{bmatrix} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} - \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} - \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix}$$

Se ve que, cuando $t \to \infty$, **P** (t) tiende hacia:

$$P(0)\begin{bmatrix} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{bmatrix} = \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right] = [\pi_1, \pi_2]$$

, siendo el vector de estado: **P**(0) = [1,0].

b) Otro método de resolución más resumido conduce a:

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \cdot A \ .$$

Si el régimen es permanente d/dt · **P**(t) = 0, de donde **P**(t) · **A** = 0. Resultando que:

$-\lambda \cdot \pi_1 + \mu \cdot \pi_2 = 0$, o lo que es lo mismo:

$$\lambda \cdot \pi_1 - \mu \cdot \pi_2 = 0 \ ,$$

con:

$$\pi_1 + \pi_2 = 1.$$

De hecho, pues, se trata de resolver el sistema no homogéneo (heterogéneo) de dos ecuaciones con dos incógnitas, compatible y determinado, siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda \cdot \pi_1 - \mu \cdot \pi_2 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Por aplicación de la regla de Cramer, se tiene:

$$\pi_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \ ,$$

de dónde:

$$\boxed{\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \ , \ \pi_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}}.$$

, cuyos resultados coinciden obviamente con los obtenidos por aplicación del método resolutivo indicado en el apartado anterior a).

(*) La transformada de Laplace (1780), que es un operador lineal como tendremos ocasión de comprobar seguidamente, toma su nombre en honor del gran matemático francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Dicha transformación supone, genéricamente, que y(x) es una función continua en todo el semieje OX positivo, y supongamos ahora que su producto por e^{-px} sea integrable entre 0 e ∞ en un cierto campo de p. Pues bien, la función F del parámetro p que esta integral define en tal campo:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \, y(x) \, dx$$

se llama *transformada Laplace* de y(x), mientras que la función **y** se llamará generatriz Laplace de F, y escribiremos:

$$F(p) = L[y(x)] \quad ; \quad y(x) = L^{-1}[F(p)]$$

Ambas transformaciones, directa e inversa, son operaciones lineales, es decir:

I. Son distributivas en relación a la adición:

$$L\,[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2]\ ,\ \text{ y por tanto: }\ L^{-1}[F_1+F_2] = L^{-1}[F_1] + L^{-1}[F_2]$$

II. Son permutables con un factor independiente de la variable:

$$L[ay] = a\cdot L[y]\ ;\quad L^{-1}[aF] = a\cdot L^{-1}[F]$$

Transformada de una derivada. La propiedad más interesante para las aplicaciones subsiguientes es que: Al DERIVAR la función y(x) la transformada Laplace queda MULTIPLICADA por su variable p y disminuida en y(0). Es decir:

$$\text{Si }\ L[y(x)] = F(p)\ \text{ es }\ L[y'(x)] = p\cdot F[y] - y(0) = p\cdot F(p) - y(0) \quad (1)$$

Claro es que se supone que y'(x) sigue cumpliendo las condiciones de integrabilidad exigidas a y(x). En este supuesto resulta, en efecto,

$$\int_0^\infty e^{-px}\cdot y'(x)\cdot dx = \left[e^{-px}\,y(x)\right]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px}\cdot y(x)\cdot dx = -y(0) + p\cdot F(p)$$

pues la integrabilidad de la función subintegral $e^{-px}\cdot y(x)$ entre los límites 0 e ∞ exige la anulación de esta función para $x\to\infty$.

La aplicación reiterada de la expresión anterior (1) nos dará:

$$L\left[y''(x)\right] = p\cdot L\left[y'\right] - y'(0) = p^2\cdot F(p) - p\cdot y(0) - y'(0)$$
$$L\left[y'''(x)\right] = p\cdot L\left[y''\right] - y''(0) = p^3\cdot F(p) - p^2\cdot y(0) - p\cdot y'(0) - y''(0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La transformada de la derivada enésima de una función (supuesta existente) es igual al producto de la transformada de esta función por p^n menos un polinomio en p de grado n-1 cuyos coeficientes, ordenados según las potencias decrecientes de p, son los valores iniciales y(0), y'(0), ..., $y^{n-1}(0)$ de la función y de sus n-1 primeras derivadas. Es decir:

$$L[y^{(n)}(x)] = p^nF(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \ldots - p\cdot y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

Esta transformada integral tiene una serie de propiedades que la pueden hacer útil en el análisis de sistemas lineales en Psicología. Una de las ventajas más significativas radica en que la integración y la derivación en el Cálculo Infinitesimal clásico se convierten fácilmente en multiplicación y división. Ello transforma las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, mucho más sencillas de resolver.

Otra aplicación importante en los sistemas lineales es el cálculo de la señal de salida. Ésta se puede calcular mediante la convolución de la respuesta impulsiva del sistema con la señal de entrada. La realización de este cálculo en el espacio de Laplace convierte la convolución en una multiplicación, habitualmente de resolución mucho más sencilla. Cuando se habla de la transformada de Laplace, generalmente se refiere a la versión unilateral. También existe, sin embargo, la transformada de Laplace bilateral.

La transformada de Laplace está estrechamente relacionada con la Transformada de Fourier y la Transformada Z. La transformada de Laplace es, de hecho, una generalización de la Transformada de Fourier de Tiempo-Continuo. Aunque las transformadas de Laplace rara vez se resuelven mediante integración si no por medio de tablas y el uso de computadoras (por ejemplo *Matlab*) como veremos más adelante. Esto define la transformada de Laplace y su inversa. Nótense las similitudes existentes entre la transformada de Laplace y su inversa. Esto nos ofrecerá, como resultado, muchas de las simetrías encontradas en el análisis de Fourier.

Para resolver las Transformadas de Laplace se pueden emplear diversos métodos, a saber:

a) Resolviendo la Integral

Probablemente, el método más difícil y menos usado para encontrar la Transformada de Laplace es resolviendo directamente la integral. Aunque es técnicamente posible hacerlo así, también es extremadamente consumidor de tiempo, dada la facilidad de los siguientes dos métodos para encontrarla. Las integrales están sobretodo para entender conceptualmente la teoría y de donde se originan los siguientes métodos resolutivos.

b) Usando una Computadora

El uso de una computadora para encontrar la transformada de Laplace es relativamente sencillo. *Matlab*, por ejemplo, tiene dos funciones, *laplace* e *ilaplace*, y las dos forman parte de las librerías simbólicas, con lo que encontraremos la transformada de Laplace y su inversa, respectivamente. Este método resulta preferido generalmente para funciones más complicadas. Funciones más sencillas e ideales usualmente se resuelven con mayor rapidez mediante el empleo de tablas.

c) Usando Tablas

Cuando se aprende por primera vez la transformada de Laplace, las tablas son, sin duda, la forma más común para encontrarla. Con suficiente práctica, no obstante, las tablas se hacen innecesarias. La gran parte del diseño de aplicaciones empieza en el dominio de Laplace y dan como resultado una solución en el dominio del tiempo.

CAPÍTULO 9
Probabilidad, Estadística y Análisis factorial

1. Probabilidad y estadística

1.1. El origen de los métodos estadísticos

Una *estadística* -con minúscula- es un *recuento* o numeración de los elementos de un conjunto; tal recuento puede realizarse sin ningún conocimiento de la moderna *Estadística* -con mayúscula- y así, por ejemplo, en el libro de Confucio[1] se cita por Chu-King la estadística industrial y comercial del Gao, realizada 2.238 años antes de Jesucristo, y de todos los cristianos es bien conocida la causa por la que Jesús nace en Belén: sus padres, José y María, hubieron de inscribirse en dicha ciudad, de acuerdo con las normas dictadas por el emperador romano Augusto para realizar el censo de población de todas las provincias de Roma.

Estadísticas análogas a las de nuestros ejemplos (censos de población, agrarios o industriales, variables macroeconómicas, …) se siguen elaborando actualmente en casi todos los países del mundo y la primera necesidad de *métodos estadísticos* se presenta al intentar comparar cifras correspondientes a dos conjuntos distintos, o a distintas partes o subconjuntos de un mismo conjunto.

1.2. El cálculo de probabilidades

Es la rama de las matemáticas denominada "cálculo de probabilidades" la que ha aportado a la estadística tanto sus bases teóricas como sus métodos de investigación. Ocupados los primeros estadísticos -cuya relación deberíamos hacerla arrancar de figuras tan ilustres como las de Pascal[2], Bernouilli, Laplace o Gauss[3]- primordialmente en las cuestiones demográficas y económicas, se ha ido

[1] (tradicionalmente 551 adC - 479 adC). Fue un filósofo chino, también uno de los 5 Santos de las 5 Grandes Religiones, creador del confucianismo y una de las figuras más influyentes de la historia china. Las enseñanzas de Confucio han llegado hasta nuestros días gracias a las "Analectas", que contienen algunas de las discusiones que mantuvo con sus discípulos.

[2] (Clermont-Ferrand, Francia, 1623-París, 1662). Filósofo, físico y matemático francés. Su madre falleció cuando él contaba tres años, a raíz de lo cual su padre se trasladó a París con su familia (1630). Fue un genio precoz a quien su padre inició muy pronto en la geometría e introdujo en el círculo de Mersenne, la Academia, a la que él mismo pertenecía. Allí Pascal se familiarizó con las ideas de Girard Desargues y en 1640 redactó su *Ensayo sobre las cónicas* ("Essai pour les coniques"), que contenía lo que hoy se conoce como "teorema del hexágono de Pascal".

[3] **Johann Carl Friedrich Gauss** (30 de abril de 1777 – 23 de febrero de 1855), fue un matemático, astrónomo y físico alemán de una gigantesca genialidad, que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado como "el príncipe de las matemáticas" y "el matemático más grande desde la antigüedad", Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la

extendiendo su campo de acción a todos aquellos sectores de la investigación donde la imbricación de un considerable número de variables exige el uso de técnicas que permitan su discriminación, como es el caso de la psicología.

No solamente para la comprensión correcta de los diversos problemas que plantea la psicometría, sino incluso para poder entender los más sencillos resultados de las exploraciones psicométricas e interpretarlos correctamente, es indispensable un conocimiento, por somero que sea, de los conceptos estadísticos más fundamentales.

En psicología, un concepto ciertamente importante es el de la "correlación". Nos encontramos muchas veces con que necesitamos conocer la dirección y el grado de relación o dependencia entre dos variables psicológicas. Por ejemplo, podemos necesitar saber la relación que existe entre las notas que ha obtenido un grupo de personas en dos *tests* diferentes, o bien la relación existente entre las calificaciones o estimaciones que sobre determinado rasgo del comportamiento emiten varios profesores, o bien la relación existente entre los cocientes intelectuales de un grupo de niños y los cocientes intelectuales de los padres.

Otras veces puede plantearse la cuestión de averiguar qué grado de fidelidad tiene determinado *test* o experimento, para lo cual, pasado cierto período de tiempo, se vuelve a administrar en el mismo grupo de sujetos y se averigua el grado de relación existente entre las dos mensuraciones. Hay muchos otros problemas en psicología que necesitan tales tipos de análisis, y para llevarlos a cabo existen las técnicas de "correlación", que permiten medir las relaciones existentes entre dos o más variables.

La estadística está ligada con los métodos científicos en la toma, organización, recopilación, presentación y análisis de datos, tanto para la deducción de conclusiones como para la toma de decisiones razonables de acuerdo con tales análisis. Por otra parte, desde el punto de vista de la aplicación de los métodos estadísticos al estudio de las variables psicológicas, se trata de obtener sus valores medios o esperanza matemática de las mismas, así como una evolución temporal previsible, en algunos casos. Las diferentes determinaciones de estas variables, realizadas por los diferentes estudiosos de la Psicología, diferirán en mayor o menor grado de este promedio teórico, pudiéndose tratar estas variaciones por el método de los errores en la teoría de la probabilidad.

También, en este sentido, debe tenerse en cuenta que conviene manejar un número relativamente alto de formulaciones o pruebas, puesto que la

ciencia, y es considerado como uno de los matemáticos que más influencia ha tenido alrededor de la historia. Gauss fue un prodigio, de quien existen muchas anécdotas acerca de su asombrosa precocidad siendo apenas un infante, e hizo sus primeros grandes descubrimientos mientras era apenas un adolescente. Completo su "magnum opus", *Disquisitiones Arithmeticae* a los veintiún años (1798), aunque no seria publicada hasta 1801. Un trabajo que fue fundamental para que la teoría de los números se consolidara y ha moldeado esta área hasta los días presentes.

aproximación crecerá ordinariamente con su número. Y a pesar del comportamiento irregular de ciertas formulaciones o resultados individuales ("outliers"), los resultados promedios, en largas sucesiones de experiencias o formulaciones aplicadas a la resolución de un mismo problema, muestran una sorprendente regularidad.

Desde luego, esta base empírica es indispensable para que la teoría formal de la Estadística enuncie sus axiomas inspirados en esta realidad y no se origine una ciencia esotérica sin posibilidad de aplicaciones prácticas. Pero, al mismo tiempo, la regularidad estadística enlaza el fundamento teórico con la nueva Estadística con un principio fundamental del viejo Cálculo de Probabilidades y la nueva ciencia incorpora a su teoría la mayor parte del material científico que contenía la teoría de las probabilidades.

Aunque opinamos que los métodos teóricos del Cálculo de Probabilidades vienen dados por teorías matemáticas formales independientes de la Estadística, como lo muestran importantes aplicaciones directas a campos científicos tan diferentes como la física, la balística o la propia psicología y que, además se siguen publicando libros importantes sobre "Teoría de la Probabilidad" como el de William Féller[4] o el del ruso Gmurman[5], ello no impide que los tratados de Estadística de nivel superior incluyan una exposición bastante completa del Cálculo de Probabilidades, como ocurre, por ejemplo, en el primer volumen de la "Teoría Superior de Estadística" de Kendall y Stuart[6].

Pero al mismo tiempo creemos que deben delimitarse claramente los campos científicos en donde están implicados los conceptos de "probabilidad" y "estadística". Así, por ejemplo, en el libro clásico de Cramer existen tres partes bien diferenciadas, tituladas respectivamente: "Introducción Matemática", "Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad", e "Inferencia Estadística". Esta última parte es la que ahora se conoce por antonomasia como "Estadística Matemática", y de ella hablaremos a continuación.

1.3. La Inferencia Estadística

La Inferencia Estadística, que actualmente se conoce con el nombre de *Estadística teórica o matemática*, en contraposición con la *Estadística Descriptiva*, permitirá obtener aquellos "valores medios" de los valores de las variables psicológicas a las que nos hemos referido (además de otras características de los elementos del conjunto que se intenta "describir"); pero el origen de la Estadística Teórica se encuentra en el *Cálculo de Probabilidades*, que acabamos de contemplar.

[4] FÉLLER (1966): *An introduction to probability theory and its applications.*
[5] GMURMAN (1968): *Fundamentals of probability theory and mathematical statistics.*
[6] KENDALL y STUART (1963): *The advanced theory of statistics.*

El objeto esencial de la Estadística es el de *inferir* resultados válidos, para un conjunto o *población* a partir de las observaciones realizadas en una parte, subconjunto o muestra de dicha población. Si, por ejemplo, se quiere conocer la cifra de españoles que trabajan en alguna actividad productiva (población activa), se puede seleccionar un subconjunto (muestra) de la población total española y, una vez consultados sobre su actividad, los métodos estadísticos permiten *estimar* la cifra que interesa conocer, con unos resultados cuya fiabilidad o exactitud se mide en términos de probabilidad.

La estimación constituye, precisamente, el problema esencial de la inferencia estadística, que presenta distintas modalidades; pero a este problema esencial de la inferencia hay que añadirle el de la contrastación de hipótesis estadísticas para completar el cuadro de la Teoría de la Inferencia. Si, por ejemplo, un comerciante acepta un pedido de fábrica solamente en el caso de que reciba un 5 por 100 de piezas defectuosas, deberá seleccionar una parte o muestra representativa de la mercancía recibida y comprobar la bondad de cada pieza seleccionada; con tales resultados los métodos estadísticos en que se basa el control de calidad permiten formular una conclusión sobre la aceptación o el rechazo del lote de mercancía, que también vendrá precisada en términos de probabilidad.

El rigor matemático con el que se resuelve el problema de la contrastación de hipótesis ha sido un potente motor para desarrollar los campos de las ciencias experimentales y de todas las que basan sus teorías en la observación empírica de la realidad. Cuando los psicólogos construían "teoría sin hechos" -como diría Simiand[7] refiriéndose a los economistas- podían llegar a conclusiones teóricamente aceptables pero poco o nada realistas, al no haber contrastado por métodos estadísticos sus hipótesis básicas de trabajo, que fundamentaban la teoría que había sido desarrollada.

Los modelos matemáticos que utiliza la inferencia estadística han sido tomados, en general, de los que estudiaba el antiguo Cálculo de Probabilidades y pueden hacer referencia a la estimación de características poblacionales (totales,

[7] **François Simiand (1873-1935)**. Economista, historiador y sociólogo francés, es de los pocos economistas de su época que concibe su programa de investigación en el marco de una ciencia social unificada, negando a la Economía una existencia autónoma frente de las otras ciencias sociales. La Economía es considerada por Simiand como una categoría de fenómeno social, igual a otras categorías y que debe ser estudiada en el mismo marco de análisis. Como historiador de la Economía, pertenece a la Escuela de *Annales* y aplica tempranamente métodos cuantitativos y fuentes estadísticas a la Historia. Es militante socialista de ideología social-reformista, interesándose por la evolución a largo plazo de los salarios, el dinero y los ciclos económicos. Nacido el 18 de abril de 1873 en Gières, estudia en la Facultad de Derecho y en la Escuela Normal Superior de Paris. Es profesor de la Escuela de Artes y Oficios y encargado de la asignatura de Historia de las Doctrinas y de los Hechos Económicos en la Escuela Práctica de Estudios Superiores. Desempeña también cargos administrativos y políticos: durante la primera guerra mundial trabaja en el Ministerio de Armamentos (1915-1917) y pasa después a ser Director de Trabajo, Legislación y Seguros Sociales de la Comisaría General de Estrasburgo (1919-1920). Perteneció a la Sociedad de Estadística Laboral de Paris, de la que fue Presidente, a la Comisión Francesa de Filosofía, a la Comisión Francesa de Historia Moderna y a la Comisión para la Publicación de los Documentos Económicos de la Revolución Francesa.

proporciones, promedios) o a los parámetros "ratios" que establecen las relaciones funcionales entre dos o más variables estadísticas (relación entre la edad mental y la cronológica, para el cálculo del cociente intelectual del individuo, por ejemplo).

El segundo problema se conoce en la terminología estadística con el nombre de *teoría de la regresión* y los propios economistas (psicólogos) han ampliado las posibilidades de dicha teoría estimando no una ecuación, sino un sistema de ecuaciones simultáneas que pueden describir, conjuntamente, el funcionamiento de una economía nacional (o de un sistema psicológico). Estos sistemas se denominan *modelos econométricos (modelos psicométricos)*, que se han utilizado después en otros campos científicos con el nombre genérico de *modelos matemáticos*.

El gran problema de la inferencia estadística es, para Mood, el de *proporcionar medidas de la incertidumbre de las conclusiones obtenidas a partir de los datos experimentales*[8], de donde se intuye la extensa lista de posibilidades de aplicación de la ESTADÍSTICA MATEMÁTICA; es decir, todos los problemas de la tecnología y de las ciencias sociales en los que es posible medir los resultados conseguidos al concluir cada experimento aislado, si puede concebirse ilimitada la serie a la que pertenece cada uno de dichos experimentos.

Dentro de la Inferencia Estadística se presentan dos problemas esenciales: los de la estimación y de la contrastación de hipótesis. El primer problema consiste en inferir resultados válidos para un conjunto o población a partir de las observaciones realizadas en una parte, subconjuntos o muestra representativa de dicha población o universo y, utilizando los métodos estadísticos, estimar la cifra que interese. Los métodos de muestreo resuelven en la práctica el problema de la estimación, pero en los manuales corrientes de Estadística esta técnica se refiere a poblaciones infinitas, lo que facilita el tratamiento teórico, pero sus resultados no son aplicables directamente al tratar de inferir estimaciones válidas a partir de una muestra correspondiente a poblaciones finitas.

La contrastación de hipótesis estadísticas constituye la aportación más fecunda de los métodos estadístico-matemáticos para aceptar o rechazar hipótesis y teorías en cualquier campo científico que hayan de contrastarse con la realidad, o también para resolver problemas menos científicos pero de indudable valor práctico, cual es el caso de muchos de los que se plantean en la Psicología.

Ahora bien, señala R. Bayés que las investigaciones de Skinner, Pavlov y Bernard[9] poseen algunos rasgos comunes que no queremos dejar de señalar. Uno de los más interesantes es, a mi juicio, el de que todos estos investigadores ponen

---

[8] MOOD (1955): *Introducción a la Teoría de la Estadística*: p. 5.

[9] **Claude Bernard** (Saint-Julien, 12 de julio de 1813 – París, 10 de febrero de 1878) fue un médico y fisiólogo francés, conocido fundamentalmente por el estudio del síndrome de Claude Benard-Horner. Fue elegido para la Academia Francesa en 1868 y recibió la Medalla Copley en 1876.

su énfasis en la consecución de un control experimental riguroso al tiempo que prescinden del llamado “control estadístico”.

Para algunos estudiantes de Psicología, acostumbrados a un ambiente en el cual la Estadística (además de ser una asignatura frecuentemente difícil de superar en las Facultades) es contemplada como una especie de dios severo que juzga inexorablemente sobre la significación de los datos y la representatividad de las muestras, puede parecer casi milagroso que Pavlov utilizando unos cuantos perros y un único reflejo, o que Skinner, con un número muy reducido de ratas y la respuesta de apretar una palanca, y habiendo elegido estos elementos atendiendo a motivos de conveniencia y sin tener en cuenta exigencia muestral alguna, consiguieran descubrimientos generalizables no sólo al mismo reflejo en todos los perros o a la conducta de apretar la palanca en todas los roedores de la misma cepa, sino a todos los organismos individuales de gran número de especies distintas en cualquier respuesta refleja u operante, según el caso.

De todas formas, si lo pensamos, el hecho es coherente con el enfoque que hemos presentado y nada tiene de extraordinario. En efecto, si descubrimos una relación funcional real entre un aspecto del ambiente y un aspecto de la conducta, debemos poder observar esta relación por lo menos en *todos y cada uno* de los ejemplares de la especie, ya que, de lo contrario, esto significaría, o bien que algunos individuos estarían sometidos a leyes distintas a los demás, o bien que dichas leyes serian variables. En un enfoque verdaderamente experimental no es suficiente que se demuestre que determinada variable ambiental tiene influencia sobre la media de un grupo, sino que es imprescindible que pueda demostrarse que cada cambio ambiental similar produce una alteración similar en la conducta de *cada* organismo. Cuando se observan diferencias conductuales ante el mismo tratamiento de variable independiente, debe efectuarse un análisis para averiguar cuál o cuáles son los factores responsables de la diferencia. No pueden existir excepciones; una “ley” conductual que no rigiera para algún organismo no sería, propiamente hablando, una ley conductual. Si la ley es tal ley y se hallan diferencias, debe existir una causa para que se produzcan tales diferencias; encontrarla es una tarea típicamente experimental, de la que puede servir de ejemplo una de las investigaciones de Sidman[10].

1.4. La Estadística Descriptiva

Si el objeto de la inferencia estadística es el de estimar *características* poblacionales o del conjunto total a partir de observaciones muestrales, cabe preguntarse cuáles son aquellas características o cómo se organizan estos resultados muestrales para estimar los correspondientes valores de la población.

Un promedio es una *característica* de la distribución de frecuencias, pero tal promedio puede ser más o menos representativo del conjunto según que los valores se concentren o se dispersen más en torno al correspondiente promedio,

[10] *Vide* Normal sources of pathological behaviour. *Science*, 1960, 132, pp. 61-68.

lo que exige el conocimiento de dicha variabilidad, ya sea mediante estadígrafos de tipo absoluto (desviación media, desviación típica o *standard*, rango, recorrido intercuartílico, ...) o de tipo relativo (coeficiente de variación de Pearson, coeficiente de variación cuartílica,…). Ello y otras razones originan nuevas características de una distribución de frecuencias. Tanto las distribuciones de frecuencias como el conocimiento de sus características constituyen un objeto esencial de la Estadística Descriptiva. No obstante, se incluyen también en esta materia los métodos estadísticos que conducen a calcular los parámetros que relacionan dos o más variables estadísticas (*ecuaciones de regresión lineal o no*) o a cuantificar el grado de interdependencia que existe entre tales variables (*coeficientes de correlación simples o parciales*), así como algunas otras técnicas más específicas para ser utilizadas en determinados campos científicos. En el anexo 2 de nuestro libro hemos incluido sendos ejemplos que pueden resultar suficientemente representativos al respecto.

Dentro de tales técnicas a los economistas e investigadores de las ciencias sociales les interesan de una manera especial el cálculo de los *números índices* simples y complejos (ponderados y sin ponderar) que conducen a la obtención de *indicadores* económicos y sociales. Dichos indicadores permiten seguir el comportamiento de ciertas variables económicas o sociales a través del tiempo, y su conocimiento es indispensable para llevar a cabo el *análisis de la coyuntura socioeconómica*.

El estudio de las series *históricas*, cronológicas o temporales también se incluye en el campo de la Estadística Descriptiva y permite conocer la *tendencia* o marcha secular de la serie, la *estacionalidad* de la serie o variaciones que se presentan sistemáticamente por la influencia del mes o estación del año en el que se originan los datos y los *movimientos cíclicos* debidas a causas que se presentan con cierta regularidad para períodos sucesivos de años.

Las *estadísticas*, en general, corresponden a resúmenes numéricos de las observaciones realizadas a los elementos de un determinado conjunto. La recogida de tal información puede realizarse mediante una *encuesta* censal o muestral, según que la investigación estadística se realice sobre todos y cada uno de los elementos del conjunto o población o bien que se investigue solamente una parte o muestra de los elementos del conjunto.

La *recogida de datos* y la *elaboración de estadísticas* presentan peculiaridades diferentes al tratar de investigar hechos del mundo físico o hechos sociales. En ambos casos pueden emplearse los métodos de la inferencia estadística para estimar resultados de la población a partir de los observados en la muestra y, también en ambos casos, los *errores* que se cometen al generalizar los resultados de la muestra al conjunto total se miden y controlan empleando los mismos métodos estadísticos.

Sin embargo, en tanto que la naturaleza no miente cuando se le hace una pregunta y los errores de la contestación solamente deben ser imputables a la mayor o menor precisión de los instrumentos de medida (termómetro o cinta métrica, por ejemplo) o a un descuido o impericia del que realiza la pregunta (medición de una magnitud, por ejemplo), en el caso de las ciencias sociales como la Psicología, las personas pueden contestar -más o menos impunemente- con inexactitudes deliberadas.

El conocimiento de la Estadística Descriptiva (Alcaide et alt., 1987) permite encontrar una imagen empírica de los conceptos más abstractos incluidos en las teorías frecuencialistas de la probabilidad. Por ejemplo, la probabilidad de un suceso coincide con la correspondiente frecuencia relativa si tal frecuencia viene referida a una población en lugar de a una muestra y, por tanto, coinciden también los conceptos de esperanza matemática y media aritmética, distribución de probabilidad y distribución de frecuencias, etc.

2. La cuantificación en el procedimiento experimental

Siguiendo ahora a R. Bayés, veamos que una de las soluciones propuestas para resolver el problema es el definir operacionalmente todos los términos que utilizamos en una investigación. Fraisse[11] escribe: "*La mayoría de los psicólogos admite, en la actualidad, esta forma moderna de empirismo, al menos como una norma que permite discernir lo que procede de la ciencia, de las especulaciones del espíritu*". Y a la pregunta de si debemos aceptar, o no, dicho método, Underwood[12] contesta: "*El problema no radica en aceptar o rechazar el operacionismo; plantearnos esta pregunta equivale a preguntarnos si aceptamos la ciencia como una técnica para comprender las leyes de la naturaleza. Sin ninguna duda podría afirmar que un criterio para conocer si un supuesto concepto empírico es o no un concepto científico consiste en comprobar si se encuentra, o no, operacionalmente definido*".

En realidad, mucho antes de que se inventara el término (Bridgman, 1927), los investigadores ya mostraron una clara preocupación en este sentido. Decía Claude Bernard[13]: "*La primera condición para hacer un experimento es que sus circunstancias sean tan bien conocidas y se encuentren tan precisamente definidas que siempre podamos reconstruirlas y reproducir los mismos fenómenos a nuestro antojo*".

Debemos tener en cuenta, sin embargo, que un concepto puede encontrarse definido operacionalmente y carecer de utilidad. La importancia de las definiciones operacionales radica en que permiten una clara intercomunicación científica, pero el operacionismo no es ninguna panacea para

[11] *Vide* L'évolution de la psychologie expérimentale, en P. Fraisse y J. Piaget (Ed.) *Traité de psychologie expérimentale* (tomo I). París: Presses Universitaires de France, 1967, pp. 1-72.
[12] *Vide Psychological research*. New York: Appleton-Century-Crofts, 1957.
[13] *Vide Introduction a l'étude de la médecine expérimentale*, 1865. Edición de París: Garnier-Flammarion, 1966.

identificar qué variables son relevantes y cuáles no para describir un fenómeno. Si en lugar de actuar como lo hizo, Pavlov se hubiera dedicado a buscar definiciones operacionales de "*adivinar*", "*querer*" o "*desear*", es posible que lo hubiera conseguido, pero lo más probable es que las mismas no le hubieran conducido a ninguna parte.

En conclusión: **la definición operacional de los términos que utilicemos es una condición necesaria, pero no suficiente, para efectuar una investigación provechosa**. Más adelante volveremos sobre el tema.

En Psicología, lo mismo que en cualquier otra ciencia, la cuantificación y medición de los fenómenos no constituyen operaciones arbitrarias. Su función es permitir que observadores distintos puedan registrar un hecho utilizando los mismos datos y que, a partir de ellos, el hecho pueda ser explicado o reproducido con fidelidad por otros investigadores. A mayor precisión en la medida corresponderá mayor fidelidad en el registro de la observación y mayor fiabilidad en los datos. La utilización en Psicología experimental del término "variable" para referirnos a los aspectos del ambiente –**variable independiente o explicativa**– y de la conducta –**variable dependiente o funcional**– que, en cada momento, nos interesen, posee, lo mismo que en las demás ciencias, implicaciones cuantitativas: una **variable**, por sí misma, es algo que puede asumir distintos valores numéricos.

En el presente capítulo y en alguno anterior desarrollamos los conceptos básicos de probabilidad sobre los resultados o sucesos de un experimento psicológico aleatorio. Pero los experimentos aleatorios son tales que los resultados a que dan lugar pueden ser de naturaleza cualitativa (se expresan mediante "atributos", como las preferencias de una persona acerca de un tipo de coche, o de un color, o de un partido político) o cuantitativa (como el cociente intelectual CI de los problemas del anexo 2). El hecho de trabajar con los resultados cualitativos introduce ciertas complicaciones, siendo de gran utilidad el cuantificar los resultados cualitativos del experimento aleatorio o, lo que es lo mismo, asignar un valor numérico a cada suceso del espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio considerado. Esta relación entre los sucesos del espacio muestral y el valor numérico que se les asigna la establecemos mediante la **variable aleatoria**. También podemos decir, aunque de forma menos rigurosa, que una variable aleatoria es una variable cuyo valor numérico está determinado por el resultado de un experimento aleatorio[14].

La variable aleatoria puede tomar un número numerable no numerable de valores posibles, dando lugar a los tipos principales: **discretas** y **continuas**. Se dice que una variable aleatoria X es "discreta" si puede tomar un número finito o infinito, pero numerable, de posibles valores (v. gr., el número de personas). Por

[14] *Vide* el libro de José M. Casas Sánchez y Julián Santos Peñas titulado " Introducción a la Estadística para Economía y Administración de Empresas", Ed. Centro de Estudios Ramón Areces, S.A., Madrid, 1995, citado en la bibliografía.

el contrario, la variable será "continua" si puede tomar un número infinito (no numerable) de valores, o bien, si puede tomar un número infinito de valores correspondientes a los puntos de uno o más intervalos de la recta real (v. gr., el tiempo de realización de un *test*).

En los experimentos de Pavlov, dos de las variables dependientes utilizadas fueron el número de gotas de saliva y la *latencia* de la respuesta ("tiempo de servicio" en Teoría de Colas) –tiempo transcurrido, en segundos, entre la presentación del estímulo y el comienzo de la respuesta–. Otra de las variables dependientes utilizadas en Psicología ha sido, por ejemplo, el tiempo que tardaba un organismo en recorrer un laberinto o solucionar un problema, la frecuencia de la respuesta, etc. Las variables independientes deben presentarse igualmente cuantificadas: en el caso de Pavlov, una de las variables independientes era el número de presentaciones asociadas de estímulo incondicionado y estímulo neutro; ejemplos de otras variables utilizadas en Psicología podrían ser: un programa de reforzamiento –por ejemplo, un FR 25, es decir, un programa en el que cada 25 respuestas que emite el organismo recibe un refuerzo–, la dosis de un fármaco concreto, el tiempo que el organismo ha permanecido privado de alimento, etc.

Como señala Bachrach[15], la primera cuestión básica es "*¿Existe el fenómeno?*"; la segunda, no menos importante, viene, a continuación: "*Si existe, ¿en qué proporción?*". En el momento en que somos capaces de medir de forma fiable aspectos relevantes del fenómeno natural que nos interesa, hemos dado un paso de gigante en el análisis experimental de dicho fenómeno, el cual debe permitirnos su ulterior explicación, predicción y control.

Si repasamos los trabajos de Fechner, Pavlov, Thorndike, Skinner y tantos otros, veremos que todos ellos tienen un denominador común: la cuantificación de los fenómenos que estudian. Y en el contexto en que lo utilizamos, el término "**cuantificación" no es, en absoluto, sinónimo de "estadística"**.

3. Otros conceptos diversos de probabilidad

3.1. Introducción

En el anterior capítulo 3 hemos tenido ocasión de estudiar el concepto de "probabilidad subjetiva", que constituye el soporte del desarrollo de los métodos modernos de la teoría de la decisión estadística. Pero existen otros conceptos de probabilidad, cuyo empleo en el tratamiento científico de la Psicología es frecuente, razón por la cual consideramos oportuno extendernos ligeramente en su explicación.

[15] *Vide Psychological research. An introduction* (2ª edición). New York: Random House, 1965. Existe traducción al castellano en *Cómo investigar en psicología*. Madrid: Morata, 1966.

3.2. Probabilidad clásica

La idea de probabilidad surge vinculada a los juegos de azar. El concepto que ha sido más usado hasta la formalización de la Estadística es la *definición de Laplace*, que establece la *probabilidad de un suceso como* "el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles". Por ejemplo, al arrojar un dado, la probabilidad de obtener un número par de puntos es -de acuerdo con esta definición- el cociente: 3/6 = 0'5, ya que el número de casos favorables es tres (caras con dos, cuatro o seis puntos) y el número de casos posibles es seis (las seis caras del cubo).

La definición de Laplace entraña una tautología, ya que al hablar de "casos posibles" se quiere decir "casos igualmente posibles", y ello equivale a exigir "casos igualmente probables o equiprobables"; es decir, lo definido entra en la definición. Así, en nuestro ejemplo anterior, si el dado está "cargado", puede aceptarse intuitivamente que la probabilidad de sacar el punto uno puede ser distinta de la de que salga el punto seis y, en tal caso, la solución de Laplace no parece correcta. No obstante, esta definición sigue empleándose en la resolución de muchos problemas y constituye un buen recurso en los manuales de Matemáticas para plantear ejercicios de Combinatoria (variaciones, permutaciones y, sobre todo, combinaciones con o sin repetición).

Este concepto de probabilidad está basado en lo siguiente: "Sea B cualquier clase finita y A cualquier otra clase también finita. Necesitamos definir la probabilidad de que un miembro B, escogido el azar, sea miembro de A". Definiremos esta probabilidad como el "cociente del número de elementos que integran la clase B que son también A entre el número total de elementos de la clase B, y denotaremos a esta probabilidad mediante el símbolo A/B".

Es obvio que la probabilidad así definida es un número racional o cero o uno. Esta probabilidad aparece implícitamente en los trabajos de De Moivre ("Doctrine of Chances", 1738), y es usada más recientemente en los trabajos de Jerzy Neyman.

Un objeción que se le suele poner a esta teoría es que en el caso de distribuciones continuas hay un número infinito de casos posibles, y entonces la definición como cociente de casos probables y posibles carece de significado, puesto que dicho cociente sería cero. A esta objeción responden Neyman y Cramer considerando como probabilidad el cociente de las medidas de conjuntos de puntos; entonces la dificultad radica en qué se entiende por esta medida. Pero esta noción conjuga perfectamente en el caso discreto.

Esta definición satisface los axiomas referentes a la probabilidad matemática sin más que tener en cuenta que las letras p, q y r son representantes de clases o funciones preposicionales proporcionales, y en lugar de decir "P implica Q", decimos "P está contenido en Q". Hay que notar que, para que todo tenga sentido, es necesario que B no pueda reducirse nunca a cero.

Esta interpretación también es común en Laplace[16] (aunque algunas veces se le considera subjetivista) y a De Morgan[17] ("An Essay on Probability", 1918), quien sostiene que la palabra probable se refiere al estado de ánimo referente a una afirmación de la que no se tiene completa certeza o conocimiento. Ya que la certeza tiene grados, que se pueden expresar cuantitativamente por medio de la probabilidad, basta definirla algebraicamente como la razón del número total de alternativas favorables de un acontecimiento al número total de alternativas, todas equiprobables, entendiendo que dos proposiciones son equiprobables si la fuerza de nuestra creencia se divide por igual entre ambas; éste es el llamado "principio de razón insuficiente, suficiente o indiferencia".

En definitiva, sean los sucesos A_1, A_2, ..., A_n que forman un sistema completo de sucesos y que supondremos equiprobables; por tanto,

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = P(E) = 1$$

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n)$$

Luego

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = 1/n$$

Sea ahora un cierto suceso A que se verifica si lo hacen **m** de los sucesos considerados; para fijar ideas suponemos los **m** primeros, o sea:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m = \cup A_i,\ \forall\ i \in (1,...,m),$$

Se tendrá, evidentemente:

---

[16] "La teoría del azar consiste en reducir todos los sucesos de la misma clase a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, tales que podamos estar igualmente indecisos acerca de su existencia, y en determinar el número de casos favorables al suceso cuya probabilidad se busca. La razón de este número al de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad, que es de este modo una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el de todos los casos posibles" ("Essai philosophique sur les probabilités", París, 1814").

[17] **Augustus De Morgan** (27 de junio de 1806 - 18 de marzo de 1871) fue un matemático y lógico inglés nacido en la India. Profesor de matemáticas en el Colegio Universitario de Londres entre 1828 y 1866; primer presidente de la Sociedad de Matemáticas de Londres. De Morgan se interesó especialmente por el álgebra. Fue tutor de Ada Lovelace. Escribió varias obras de lógica en las que se encuentra la idea de aplicar en esta esfera los métodos matemáticos, así como los primeros resultados de tal aplicación. En la moderna lógica matemática, llevan el nombre de De Morgan las siguientes leyes fundamentales del álgebra de la lógica: «la *negación* de la *conjunción* es equivalente a la *disyunción* de las *negaciones*»; «la *negación* de la *disyunción* es equivalente a la *conjunción* de las *negaciones*». Autor de las conocidas Leyes de De Morgan:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Su obra principal se titula *La lógica formal o el cálculo de inferencias necesarias y probables* (1847).

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m) =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

resultado que formula la regla de Laplace, que se puede enunciar así: Si el espacio muestral es descomponible en **n** sucesos equiprobables e incompatibles y si **m** de ellos son favorables a la realización de un cierto suceso A, se tiene:

$$P(A) = m/n$$

esto es, **la probabilidad de dicho suceso se puede encontrar como la razón del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que los casos considerados correspondan a sucesos equiprobables e incompatibles**.

3.3. Probabilidad frecuencialista

Hacia el año 1920 el matemático Von Mises (ver capítulo 3) presenta un nuevo concepto de probabilidad, que corresponde a un límite *especial*, cuando n tiende a infinito, de la frecuencia relativa o cociente de dividir el número de veces o frecuencia absoluta v que aparece en un suceso S por el número de veces n que se realiza un determinado experimento o prueba, es decir:

$$Pr(S) = \lim_{n \to \infty} \frac{v}{n}$$

En el ejemplo del dado, la probabilidad de Von Mises se calcularía arrojando el dado un gran número de veces (1.000, 10.000, un millón de veces, por ejemplo) y calculando para cada tirada el cociente del número de casos en que ocurre el suceso “número par de puntos” por el número de tiradas; al crecer n se encontrará cada vez mayor estabilidad de la frecuencia, que oscilará alrededor de 0’5 si el dado es correcto.

Los tratadistas del Cálculo de Probabilidades recogieron la idea de Von Mises como un postulado empírico, al que denominaron la *ley empírica del caso* y tal idea la ha recogido la moderna Estadística no como un postulado, sino como una base o imagen empírica que han tenido presente los estadísticos que han elaborado teorías formales basadas en el concepto de frecuencia.

Se considera al estadístico ruso Kolmogoroff como el creador de dichas teorías *frecuencialistas de la probabilidad*. Para construir una teoría frecuencialista se parte, en general, del concepto de *experimento aleatorio* (arrojar un dado, por ejemplo) que corresponde “al que puede realizarse en las mismas condiciones un número de veces tan grande como se quiera, sin que pueda predecirse -en ningún caso- cuál ha de ser el resultado final en una realización aislada de dicho experimento”. Al realizar un experimento se observa la presentación o no de un suceso S y ante una sucesión indefinida de experimentos se tiene, sucesivamente, un nuevo valor de la frecuencia relativa v/n; la base empírica **-que Cramer denomina *regularidad estadística*- consiste en aceptar que pese al comportamiento irregular de los resultados individuales, la frecuencia relativa presenta una regularidad "machacona" al realizar el experimento un gran número de veces.**

Después de establecer la anterior terminología y de aceptar la idea de regularidad estadística se puede formular una axiomática que fundamente el concepto de probabilidad, cuyo primer axioma podría ser el que sigue: "**A todo suceso S, originado por la realización de un experimento aleatorio, le corresponde un número P(S) que se denomina probabilidad del suceso S**". Este axioma como tal puede aceptarse de una manera abstracta, pero la ciencia que se construya a partir de él tendrá un mayor interés práctico si se tiene *in mente* aquella idea de frecuencia relacionada con el concepto de regularidad estadística.

Sin embargo, el concepto frecuencialista de la probabilidad no resuelve los problemas que no pueden considerarse dentro del modelo de experimento. El ejemplo de ¿cuál es la probabilidad de que un individuo normal se convierta en asesino al día siguiente? no tiene una respuesta aceptable dentro de la teoría frecuencialista. El asesinato no puede ser un suceso que se origine por la realización de un experimento aleatorio y, sin embargo, no parece incorrecto afirmar que es poco o muy poco probable que dicho individuo se convierta en asesino de la noche a la mañana. Este tipo de cuestiones se presentan a menudo en el campo de la Economía y, por tal razón, el economista Keynes concibió una teoría probabilística de carácter *subjetivo* basada en "el grado de creencia racional" que puede tener una persona sobre la ocurrencia o no de un determinado suceso, y de la que ya nos hemos ocupado *in extenso* en el anterior capítulo 3 de este mismo libro.

Mientras la concepción clásica de la probabilidad tuvo pocas alteraciones, una interpretación completamente distinta comienza a emerger en la literatura especializada. Aunque es dudoso quién fue el primero en introducir la idea de probabilidad en términos de un límite de frecuencias relativas, Keynes da prioridad a Leslie Ellis (1843). Así, Ellis dice que: "si la probabilidad de un suceso dado está correctamente determinada, el suceso de una larga serie de pruebas tenderá a aparecer con una frecuencia proporcional a su probabilidad" Otros autores admiten la prioridad de Bernhard Bolzano (1781-1841)[18].

[18] **Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano** (Praga, Bohemia, 5 de octubre de 1781 – 18 de diciembre de 1848) fue un matemático, lógico, filósofo y teólogo bohemo que escribió en alemán y que realizó importantes contribuciones a las matemáticas y a la Teoría del conocimiento. En matemáticas, se le conoce por el teorema de Bolzano, así como por el teorema de Bolzano-Weierstrass, que desarrolló junto a Karl Weierstrass. En su filosofía, Bolzano criticó el idealismo de Hegel y Kant afirmando que los números, las ideas, y las verdades existen de modo independiente a las personas que los piensen.

Pero la interpretación frecuentista de la probabilidad adquiere su mayor ímpetu en John Venn[19], lógico inglés, quien en su "Logic of Chances" (1886) da el primer tratamiento sistemático de esta concepción. Como continuadores destacan Cournet y más modernamente Richard von Mises, Reichenbach, R. Fisher, A. Wald y E. Ternier. Todos ellos admiten el siguiente axioma, conocido con el nombre de "límite de Venn": "Si un suceso ocurre en gran número de veces, entonces la probabilidad de ocurrencia del suceso es el límite cuando el número de pruebas tiende a infinito del cociente entre el número de veces que se presenta el suceso y el número total de pruebas". Es decir, se postula la existencia de dicho límite.

El pensador francés Cournot (1801-1877)[20], que era también matemático, filósofo, economista e historiador, a quien se debe el concepto de mediana ("Théorie des chances et de probabilités", 1843, París), considera la probabilidad matemática como una realidad objetiva e independiente del estado de nuestro conocimiento. Pero no llegó a comprender que debía, como disciplina matemática, cimentarse con una axiomática.

Von Mises (1926) introduce la noción de "colectivo" para caracterizar el concepto de frecuencia relativa; por colectivo entiende una sucesión de un número grande de observaciones idénticas o experimentos, conduciéndonos cada uno de éstos a un resultado numérico determinado y verificando esta sucesión de resultados numéricos las siguientes condiciones:

a) Aleatoriedad.

b) Existencia del límite de frecuencias relativas.

Define a continuación un grupo de operaciones en el conjunto de colectivos de manera que el límite de la frecuencia relativa (probabilidad) sea invariable. Caracteriza también cuando dos colectivos son independientes, etc.

---

[19] **John Venn** (Drypool, 4 de agosto de 1834 - Cambridge, 4 de abril de 1923), fue un matemático y lógico británico. Destacó por sus investigaciones en lógica inductiva. Es especialmente conocido por su método de representación gráfica de proposiciones (según su cualidad y cantidad) y silogismos. Los diagramas de Venn permiten, además, una comprobación de la verdad o falsedad de un silogismo. Posteriormente fueron utilizados para mostrar visualmente las operaciones más elementales de la teoría de conjuntos. Entre sus obras destacan: *Symbolic Logic* (1881), *The Logic of Chance* (1866) y *The Principles of Empirical Logic* (1889). Falleció a la edad de 88 años en Cambridge.

[20] Cournot es el matemático que inició la sistematización formal de la ciencia económica. Estudió en la Escuela Normal Superior de París donde se licenció en Ciencias en 1823. Catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de Lyon en 1834. Rector de la Academia de Dijon de 1854 a 1862. A pesar de haber trabajado toda su vida en universidades, tan sólo dedicó un año a la docencia, siendo su actividad principal la gestión administrativa universitaria y la investigación. Cournot fue el primero en proponer la utilización de funciones matemáticas para describir categorías económicas tales como la demanda, la oferta o el precio. Analiza con especial atención los mercados monopolistas, estableciendo el punto de equilibrio del monopolio, llamado por ello el "punto de Cournot". Es también pionero en el estudio del duopolio y el oligopolio. Sus aportaciones influyeron notablemente sobre los marginalistas, a los que ya nos hemos referido en nuestro libro al tratar del concepto de "utilidad": Jevons, Walras y Marshall, de los que puede ser considerado un precursor. Produjo también notables contribuciones al campo estadístico.

La principal objeción hecha a la teoría de Von Mises es la imposibilidad de construir, por medio de una fórmula matemática, una sucesión (x_i), siendo x_i un resultado numérico (por ejemplo, 0, 1), en la que la probabilidad esté comprendida entre cero y uno, teniendo en cuenta que esta probabilidad ha de ser la misma para cualquier otra sucesión obtenida a partir de ésta mediante una transformación de las consideradas por Von Mises.

Wald[21], en su trabajo de 1937, resolvió este problema considerando clases numerables de transformaciones.

E. Tornier introduce una axiomática frecuentista tomando como elementos sucesiones, y considerando en ellas, como conjuntos básicos, los cilindros con segmento inicial fijo. Considera la probabilidad definida sobre un álgebra de Boole que contenga a los cilindros básicos, como una función completamente aditiva en (0, 1). Introduce un axioma de continuidad y concreta que la clase aditiva considerada es la mínima que cumple los axiomas anteriores.

La obra de Reichenbach (1935) es un desarrollo de la de Von Mises, y en varios aspectos presenta un planteamiento mejor. Su interpretación parece estar sugerida por correlaciones estadísticas: supone dos series ($x_1, x_2, ..., x_n, ...$), ($y_1, y_2, ..., y_n, ...$) y dos clases A y B. Alguno o todos los **x** pertenecen a la clase A, y lo que interesa es contestar a la siguiente pregunta: ¿con qué frecuencia los correspondientes **y** pertenecen a la clase B?. Con su notación:

$$x_i \in A \rightarrow y_i \in B$$

La clase A la llama "clase de referencia" y a la B "clase de atributos". Debemos advertir que es necesario, antes de calcular la probabilidad, que las clases A y B sean observadas y establecer una correspondencia biyectiva o biunívoca entre sus elementos.

Ahora surge la cuestión de cómo se puede determinar la probabilidad; para ello, consideremos los **n** primeros elementos de las dos sucesiones, y supongamos que entre los **n** de los **x** hay **a** que pertenecen a la clase A y que entre éstos hay **b** términos tales que los correspondientes **y** pertenecen a la clase B; entonces, diremos que en la sucesión ($x_1, x_2, ..., x_n$) la frecuencia relativa de A y B es b/a; en el caso de que todos los **x** de A, entonces la frecuencia es b/n, y se suele indicar por $F_n(A, B)$. Si tomamos el límite cuando **n** tiende a infinito, entonces este límite **p** recibe el nombre de probabilidad de A a B, así:

[21] **Abraham Wald** (31 de octubre de 1902 Kolozsvár, Hungría - 13 de diciembre de 1950, Travancore, India) fue un matemático que hizo importantes contribuciones a la teoría de la decisión, la geometría, la economía y que fundó el análisis secuencial. Hasta que ingresó en la universidad fue educado por sus padres ya que era judío y los sábados no podía ir a la escuela, como era obligatorio en el sistema escolar húngaro. En 1931 se graduó en la Universidad de Viena con el título de doctor en matemáticas. Pudo emigrar a los Estados Unidos gracias a la invitación de la Comisión Cowles para la Investigación Económica cuando los nazis invadieron Austria en 1938 y fue perseguido junto a su familia debido a su condición de judío. Murió en un accidente aéreo en la India mientras realizaba un viaje para dar una conferencia invitado por el gobierno de aquel país asiático.

$$p(A,B) = \lim_{n \to \infty} . F_n(A,B)$$

Observemos que una diferencia entre la teoría de Reichenbach y la de Von Mises es que para aquél no es necesario imponer el axioma de aleatorización, así como el prescindir de la restricción, que él considera excesiva: sucesión parcial del colectivo ha de tender al mismo límite que aquél.

Debemos señalar, por último, que aunque en sentido lógico esta teoría es inatacable, desde el punto de vista práctico es inverificable, ya que ningún ser humano puede llevar a cabo infinitas pruebas o experimentos, puesto que debería vivir también un número infinito de años.

3.4. Probabilidad lógica

Los sistemas lógicos consideran a la probabilidad como una única relación lógica entre proposiciones o sentencias. Bajo tales aspectos: "la probabilidad mide como un conjunto de proposiciones, fuera de la lógica necesidad y aparte de la opinión humana, confirma la verdad de otro". Entre los cultivadores de este concepto destacan Jeffreys, Keynes, Carnap (que la denomina "grado de confirmación"), Tintner ("credibilidad") y Le Blanc ("probabilidad inductiva").

Desde el punto de vista de la escuela lógica, todos los sistemas tienen en común la relación lógica entre dos proposiciones q/p como relación indefinida (esto es, que sólo está definida por los axiomas o postulados), que se lee "probabilidad de q dado p". Todo cuanto satisface a estos axiomas será una interpretación de la probabilidad, y cabe esperar el que haya diversas interpretaciones, por ejemplo, las de las axiomáticas de Keynes y Jeffreys, pero todas tienen el mismo punto de arranque, y es la definición anteriormente expresada. Los axiomas o postulados requeridos fueron recogidos por C.D. Broad (1920), y son los siguientes:

- I. Dados p y q, hay sólo un valor q/p.
- II. Los posibles valores de q/p son todos los números reales en el intervalo (0,1).
- III. Si p implica q, entonces q/p = 1.
- IV. Si p no implica q, entonces q/p = 0.
- V. La probabilidad de q y r dado p es la probabilidad de q dado p multiplicada por la probabilidad de r dado p (axioma conjuntivo).
- VI. La probabilidad de q o r dado p es la probabilidad de q dado p más la probabilidad de r dado p menos la probabilidad de q y r dado p (axioma disyuntivo).

Esta axiomática puede considerarse como la antitesis de la teoría de la frecuencia representada por Venn, Von Mises y Reichenbach.

Ahora consideramos un breve resumen de la axiomática de Jeffreys, que tiene como elemento esencial la relación lógica existente entre dos proposiciones (también es el caso de la de la probabilidad subjetiva de Keynes, a la que hacemos singular referencia en otro apartado de nuestro libro). Jeffreys, en su obra de 1939, trata de establecer el concepto abstracto de probabilidad mediante una axiomática que sea aplicable al mundo real. Como concepto abstracto, considera la probabilidad como una generalización de la lógica deductiva, pudiendo considerarse incluida dentro de la "probabilidad matemática", siendo sus principales representantes Broad y Keynes, aunque Jeffreys presenta algunas diferencias notorias.

La axiomática de Jeffreys consta de seis axiomas y tres convenios, aunque, en realidad, son también axiomas, como ocurre, por ejemplo, con el convenio de normalización, que es un axioma base en todos los otros sistemas. Se fundamenta en la idea primitiva de asignar un grado de creencia o de confianza a una proposición, aunque no se pueda demostrar. Evidentemente dependerá del conjunto de la información que tengamos, por eso no tiene sentido el hablar de "probabilidad de la proposición", sino de "probabilidad de la proposición de q dada p". Es decir, la probabilidad es una función de dos argumentos.

Con el sistema de axiomas demuestra que toda probabilidad puede ser expresada por un número real, y que está acotado inferiormente por cero. También considera el caso estudiado por Laplace en su "Teoría Analítica", y comprueba que puede considerarse como un caso particular. Para ello considera el conjunto finito: q_1, q_2, ..., q_n de todas las alternativas incompatibles deducibles de una proposición p, y dos subconjuntos A y B formados, respectivamente, por a y b elementos; entonces, se verifica que:

$$P(A/p) / P(B/p) = a/b$$

Si B es el conjunto de todas las alternativas incompatibles y exhaustivas, deducibles de p, entonces B es implicado por p, y de aquí que:

$$P(B/p) = 1 \ ; \ P(A/p) = a/n$$

siendo n el número de alternativas posibles. Es decir, se verifica la regla clásica de Laplace: "Número de casos favorables dividido por el número de casos posibles". A esta probabilidad se le puede llamar R-probabilidad, ya que viene dada por un número racional.

Así pues, una conclusión para Jeffreys es que la probabilidad es una relación lógica, y existe siempre, siendo el conjunto de probabilidades completamente ordenado. Esta probabilidad se puede expresar mediante un número real, ya que establece el isomorfismo entre el conjunto de probabilidades y los puntos del intervalo (0, 1). He aquí una diferencia notable con la axiomática de Keynes, ya que para éste el conjunto de probabilidades es parcialmente ordenado y la suma y producto no están definidos para cualquier par de elementos.

4. Probabilidad condicionada y teorema de Bayes

4.1. Probabilidad condicionada

Dados dos sucesos A y B de la misma categoría de pruebas, cuyas probabilidades respectivas son P(A) y P(B), se supone la siguiente situación: se sabe que el suceso A se ha verificado. Entonces cabe preguntarse si la probabilidad de B seguirá siendo la misma o habrá sufrido alguna modificación. Según se verá más adelante, en función de las circunstancias caben ambas respuestas.

El suceso consistente en la realización de B, sabiendo que se ha verificado A, se representa por B/A ("B condicionado a A"). Para calcular la probabilidad del referido suceso, supongamos que E (espacio muestral) está formado por n sucesos elementales de los cuales n' son favorables a la realización de A, n'' lo son a la de B y n''' lo son a la del suceso $A \cap B$. Por tanto, se tendrá:

$$P(A) = \frac{n'}{n} \quad ; \quad P(B) = \frac{n''}{n} \quad ; \quad P(A \cap B) = \frac{n'''}{n}$$

El suceso B/A, perteneciente a otra categoría de pruebas, se presenta n''' veces (casos favorables a B, cuando se ha presentado A) de entre las n' veces que ha aparecido A; luego:

$$P(B/A) = \frac{n'''}{n'} = \frac{n'''}{n} : \frac{n'}{n} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

De aquí que la probabilidad del suceso B/A es la razón entre las probabilidades $P(A \cap B)$ y P(A).

Dos sucesos A y B, tales que P(B/A) = P(B) se conocen con el nombre de "independientes"; si por el contrario $P(B/A) \neq P(B)$, los sucesos son "dependientes".

En el caso de sucesos independientes, se tiene que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

luego, para dos sucesos independientes, se cumplirá que:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ “regla de multiplicación” o “probabilidad compuesta”,

mientras que si los sucesos son dependientes se tendrá que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Es interesante observar que la relación de independencia es simétrica, puesto que P(B/A) = P(B) implica que P(A/B) = P(A). En efecto, si P(B/A) = P(B), se tendrá:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

, tal como queríamos demostrar.

4.2. Teorema de Bayes

Ya que nos hemos referido a él en diferentes apartados de nuestro libro, veamos que el famoso **teorema de Bayes**, enunciado por Thomas Bayes, en la teoría de la probabilidad, es el resultado que da la distribución de probabilidad condicional de una variable aleatoria A dada B en términos de la distribución de probabilidad condicional de la variable B dada A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A.

Sea $\{A_1,A_2,...,A_i,...,A_n\}$ un conjunto de sucesos incompatibles cuya unión es el conjunto total y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero. Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$. Entonces, la probabilidad $P(A_i|B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

donde:

$P(A_i)$ son las probabilidades *a priori*.

$P(B|A_i)$ es la probabilidad de B en la hipótesis A_i.

$P(A_i|B)$ son las probabilidades *a posteriori*.

Esto se cumple $\forall i = 1, ..., n$.

Una explicación más detallada del concepto sería la siguiente. Sean los sucesos elementales y mutuamente excluyentes: A_1, A_2, ..., A_n tales que constituyen un sistema completo de sucesos cuya unión es el espacio muestral E, esto es, tales que:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E \\ \\ A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{si} \quad i \neq j \end{array}\right\}$$

Se suponen conocidas las probabilidades $P(A_i)$ -que se acostumbran a denominar "probabilidades *a priori*"- así como las probabilidades condicionadas $P(B/A_i)$, llamadas "verosimilitudes", donde B es un suceso cualquiera que se sabe realizado.

El problema que resuelve el teorema de Bayes o teorema sobre la *probabilidad de causas* es obtener las probabilidades *a posteriori*, esto es, las $P(A_i/B)$. Se tiene, evidentemente:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B)$$

de donde:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(B)}$$

Pero, por otra parte:

$$B = B \cap E = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

y debido a la incompatibilidad, se cumplirá que:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Resultando, en definitiva, la expresión general:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B / A_n)} =$$

$$= \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i)} \quad ;$$

Sea, como ejemplo de aplicación, el siguiente ejercicio.

Una vez realizadas las pruebas pertinentes se observa que un sistema psicológico (individuo) afectado de dislalia posee un promedio diario de expresión verbal del 50% por la mañana (8h. – 14h.), 30% por la tarde (14h. – 20h.) y 20% por la noche (20h. – 24h.). Los porcentajes de palabras defectuosamente pronunciadas son, respectivamente, del 3%, 4% y 5%. ¿Cuál es la probabilidad de producir una palabra defectuosa según cada fase del día?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} P(M) = 0'50 \rightarrow P(D/M) = 0'03 \\ P(T) = 0'30 \rightarrow P(D/T) = 0'04 \\ P(N) = 0'20 \rightarrow P(D/N) = 0'05 \end{array}\right\}$$

Así pues, la probabilidad de emitir una palabra defectuosa **por la mañana**, será:

$$P(M/D) = \frac{P(M) \times P(D/M)}{P(M) \times P(D/M) + P(T) \times P(D/T) + P(N) \times P(D/N)} =$$
$$= \frac{0'50 \times 0'03}{0'50 \times 0'03 + 0'30 \times 0'04 + 0'20 \times 0'05} = \frac{0'015}{0'037} = \frac{15}{37} \cong 41\%$$

Del mismo modo, **por la tarde**, se tendrá:

$$P(T/D) = \frac{P(T) \times P(D/T)}{P(M) \times P(D/M) + P(T) \times P(D/T) + P(N) \times P(D/N)} =$$
$$= \frac{0'30 \times 0'04}{0'50 \times 0'03 + 0'30 \times 0'04 + 0'20 \times 0'05} = \frac{0'012}{0'037} = \frac{12}{37} \cong 32\%$$

Por último, **por la noche**, se tendrá:

$$P(N/D) = 1 - P(M/D) - P(T/D) = 1 - \frac{15}{37} - \frac{12}{37} = \frac{10}{37} \cong 27\%$$

que también podría haberse obtenido, lógicamente, por la aplicación individualizada de la fórmula correspondiente.

Digamos, en definitiva, que el teorema de Bayes resulta válido en todas las aplicaciones de la teoría de la probabilidad. Sin embargo, hay una controversia sobre el tipo de probabilidades que emplea. En esencia, los seguidores de la estadística tradicional sólo admiten probabilidades basadas en experimentos repetibles y que tengan una confirmación empírica mientras que los llamados “estadísticos bayesianos” permiten probabilidades subjetivas. El teorema puede servir entonces para indicar cómo debemos modificar nuestras probabilidades subjetivas cuando recibimos información adicional de un experimento. La estadística bayesiana está demostrando su utilidad en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo *a priori* y permite revisar esas estimaciones en función de la evidencia, lo que está abriendo nuevas formas de hacer conocimiento. Como observación, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i | B) = 1$$

y su demostración resulta trivial.

5. Aplicación de los "métodos robustos" en el análisis de las variables psicológicas

Hay que considerar que el empleo de las modernas técnicas de la "inferencia estadística robusta" en el estudio de las series psicológicas temporales -aunque, desde luego, sin ofrecer grandes variaciones en los resultados finales- podría afinar aún más algunos de los resultados obtenidos. Dichos estudios podrían complementarse desarrollando más el tema de la "cointegración" de las series temporales y analizar, incluso, funciones periódicas y series de Fourier[22] mediante el Cálculo de Variaciones clásico.

Aunque puede afirmarse que la Estadística tuvo su origen en los censos romanos de población[23], sus métodos, tal como los conocemos hoy en día, se deben fundamentalmente a Sir Ronald Aylmer Fisher[24], quien en su trabajo del

[22] Jean Baptiste Joseph Fourier, nacido en 1768, muerto el 16 de mayo de 1830, fue un matemático francés conocido principalmente por su contribución al análisis matemático en el flujo del calor. Educado para el sacerdocio, Fourier no tomó sus votos pero en cambio se convirtió en matemático. Primero estudió (1794) y más tarde enseñó matemática en la recientemente creada *École Normale*. Se unió al (1798) ejército de Napoleón Bonaparte en su invasión a Egipto como consejero científico, ayudó allí a establecer medios educativos y llevó a cabo exploraciones arqueológicas. Después de su retorno a Francia en 1801 fue nombrado prefecto del departamento de Isère por Napoleón. A lo largo de su vida Fourier siguió su interés en matemáticas y físicas matemáticas. Llegó a ser famoso por su *Théorie analytique de la Chaleur* (1822), un tratado matemático de la teoría del calor. Estableció la ecuación diferencial parcial que gobierna la difusión del calor y la resolvió usando series infinitas de funciones trigonométricas. Aunque estas series habían sido usadas antes, Fourier las investigó de una manera más detallada. Su investigación, inicialmente criticada por su falta de rigor, fue más tarde mostrada para ratificar su valor. Proveyó el ímpetu para trabajar más tarde en series trigonométricas y la teoría de funciones de variables reales.

[23] Entre ellos, el más famoso posiblemente, y que ya ha sido citado, sea el ordenado por el emperador César Augusto, que obligó a trasladarse a sus padres, José y María, a la ciudad de Belén de Judea, donde nació Jesús (de Nazareth) en un humilde pesebre.

[24] (Londres, 1890-Adelaida, Australia, 1962). Matemático y biólogo británico. Se graduó por la Universidad de Cambridge en 1912. Pionero en la aplicación de métodos estadísticos al diseño de experimentos científicos, en 1919 comenzó a trabajar en la estación experimental de Rothamsted, donde realizó trabajos estadísticos relacionados con la reproducción de las plantas. Desarrolló técnicas para obtener mayor cantidad de información útil a partir de muestras de datos más pequeñas, introdujo el principio de aleatoriedad en la recogida de muestras y el análisis de la varianza o análisis multivariacional. Publicó su metodología estadística en 1925 en *Methods for Research Workers*. Trasladó sus investigaciones al campo de la genética en *The Genetical Theory of Natural Selection* (1930), que resume sus puntos de vista sobre la eugenesia y el papel de control que ejercen los genes sobre los caracteres dominantes, y en el que considera la selección como la fuerza directriz de la evolución, más que la mutación. En 1933 ocupó la cátedra Galton de eugenesia en la Universidad de Londres, y de 1943 a 1957, la cátedra Balfour de genética en la Universidad de Cambridge. Los últimos años de su vida los pasó trabajando para la *Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization* en Adelaida.

año 1922 (*Sobre los fundamentos matemáticos de la Estadística Teórica*) estableció los principios a partir de los cuales se fueron desarrollando las diversas técnicas y métodos que actualmente utilizamos. Sin embargo, su correcta aplicación requiere de condiciones muy rígidas, tales como un modelo probabilístico fijo (habitualmente la distribución normal) en el que sólo queden indeterminados uno o dos parámetros (la media y/o su varianza). Pero tal restricción o condicionante supone un problema, ya que los modelos probabilísticos más utilizados rara vez se ajustan bien al fenómeno aleatorio observado en el sistema psicológico, razón por la cual los resultados obtenidos bajo tales supuestos dejan de ser válidos incluso en situaciones muy cercanas a la modelizada bajo la cual se obtuvieron.

Por estas razones surgieron los denominados "Métodos Robustos", aunque su origen se supone remoto. Rey (1978) lo sitúa en la antigua Grecia, en donde los sitiadores contaban las capas de ladrillos de algunos muros de la ciudad sitiada y tomaban la moda (valor más frecuente) de los recuentos al objeto de determinar la longitud de las escalas a utilizar en el asalto. De esta forma, la estimación realizada no se veía afectada por los valores extremos de la variable aleatoria estadística, procedentes de murallas muy altas o muy bajas. No obstante, fue en 1964 cuando, de la misma manera que los trabajos de R.A. Fisher dotaron a la Estadística del rigor matemático del que hasta entonces carecía, el artículo de Peter Huber titulado *Estimación robusta de un parámetro de localización* abrió las puertas de la precisión matemática en robustez y, por ende, las del reconocimiento científico. Posteriores trabajos suyos, así como las aportaciones fundamentales de Frank Hampel en los años 1971 y 1974, en las cuales definió los conceptos de "robustez cualitativa" y la "curva de influencia", terminaron de poner los cimientos de los métodos robustos, tal y como son conocidos hoy en día.

De hecho, la introducción de los Métodos Robustos en la ciencia Estadística fue motivada -básicamente, aunque no de forma exclusiva- por la gran sensibilidad a los *datos anómalos* (*outliers* en la terminología anglosajona) de los estimadores generalmente utilizados. No obstante, a pesar de la relación existente entre el análisis de *outliers* y los Métodos Robustos, ambos campos han seguido desarrollos y caminos independientes.

Una de las primeras ideas que sugiere la presencia de datos anómalos en una serie histórica de variables psicológicas, entendidas éstas como cifras sorprendentemente alejadas del grupo principal de observaciones, es la de su rechazo o eliminación, con objeto de *reparar* o *limpiar* la serie, antes de realizar inferencias con ella.

Esta idea hállase reflejada en numerosas publicaciones existentes sobre el tema. Así, por ejemplo, puede leerse en el trabajo de Ferguson (1961) que "... el problema que se plantea en el tratamiento de los datos anómalos es el de introducir algún grado de objetividad en su rechazo...", dando por supuesto que los datos anómalos son necesariamente *erróneos* y que, por tanto, deben de ser eliminados. Pero ello no es más que una de las posibles opciones a considerar en el tratamiento de los datos anómalos, puesto que no siempre son necesariamente erróneos.

En definitiva, los datos pueden ser o parecer anómalos en relación con el modelo supuesto, por lo que una posible alternativa a su rechazo es la de su *incorporación*, ampliando el modelo. Ello nos llevaría a una nueva definición de *outlier*, a saber: "aquella observación que parece ser inconsistente con el resto de los valores de la serie, en relación con el modelo supuesto". Desde luego, en la definición anterior aparece una componente ciertamente subjetiva en la calificación o conceptualización de un dato como "anómalo". Existe una manera más objetiva de poder llegar a tal conclusión. Se trata de utilizar unos tests de hipótesis, denominados *tests de discordancia*, que están basados en unos estadísticos o estadígrafos para los que es posible determinar, o al menos tabular, su distribución en el muestreo. Mediante dichos tests podemos calificar a uno o varios datos como *discordantes* -esto es, valores que resultan significativos en un test de discordancia- y como consecuencia podemos, como hemos visto:

- *Rechazarlos*, eliminándolos del resto de la serie.
- *Identificarlos*, resaltando algún aspecto que pudiera resultar interesante.
- *Incorporarlos*, ampliando la distribución-modelo propuesta.

A pesar del esfuerzo realizado para conseguir una calificación objetiva de los datos, el carácter subjetivo permanece, en cierta medida, en los tests de discordancia, tanto en su nivel de significación como en la propia elección del contraste a considerar. Además, como en todo test de hipótesis, los tests de discordancia no son simétricos; es decir, no son tratadas de igual manera la hipótesis nula de ausencia de *outliers* en la serie que la alternativa de, por ejemplo, tres *outliers* a la derecha. Y una vez concluido el test, deberían considerarse los dos tipos de error asociados al test. Pero lo peor de proceder de tal suerte, rechazando los *outliers* y luego utilizando los métodos clásicos, es la pérdida de eficiencia con respecto a la utilización de Métodos Robustos.

Otro problema adicional relacionado con el tratamiento de *outliers* es que éstos no sólo se presentan en situaciones simples, sino que también aparecen en situaciones más estructuradas, como puede ser el caso de las series de variables psicológicas que nos ocupan. En estas situaciones, los datos anómalos tenderán a ser menos aparentes, siendo en ocasiones la discrepancia con el modelo propuesto lo que conferirá "anomalía" al dato. Así, por ejemplo, en una regresión minimocuadrática (simple o múltiple, lineal o no) la anomalía consistirá en no estar alineado con el resto de las observaciones. Ahora bien, el ser anómalo no consiste en ser extremo; puede encontrarse en el grupo principal de observaciones y ser tratado como "anómalo". Al respecto, puede verse el ejemplo de la figura siguiente, en el que aparece una supuesta serie cronológica de observaciones:

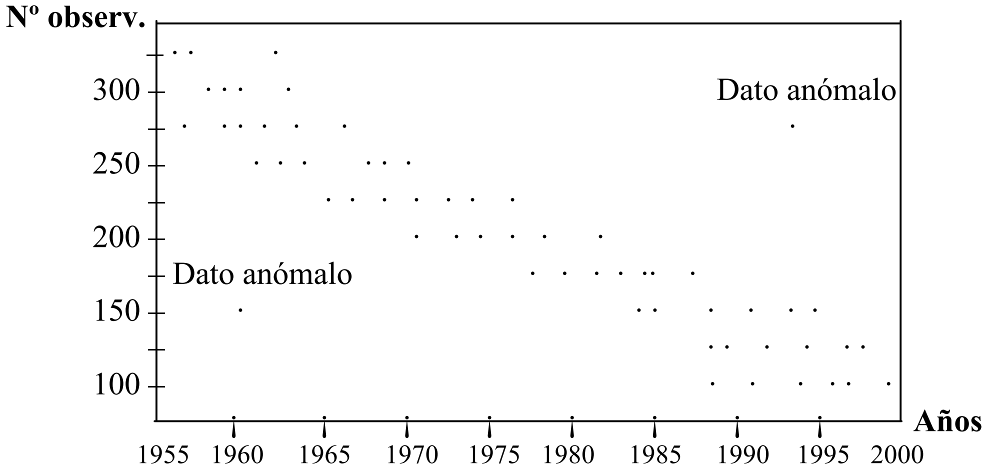


FIG. 9.1. Serie histórica descendente de observaciones de una variable psicológica.

Por tanto, el término *modelo*, del que nos hemos ocupado extensamente en el capítulo segundo de nuestro libro, en la definición de *outlier* que hemos dado anteriormente, debe entenderse en un sentido bastante amplio.

Digamos, como resumen y síntesis de lo expuesto en el presente apartado de nuestro libro, que mientras los *tests* de discordancia tienen como objetivo el estudio de los *outliers* en sí mismos, proponiendo como acción ante la presencia de un *outlier* alguno de los tres puntos anteriormente reseñados, los Métodos Robustos están diseñados para realizar inferencias sobre el modelo, reduciendo la posible influencia que pudiera tener la presencia de datos anómalos. De hecho, los Métodos Robustos son denominados, en ocasiones, *Técnicas de acomodación de outliers*. Es decir, en los *tests* de discordancia los *outliers* constituyen el objetivo, mientras que en los Métodos Robustos, cuya aplicación al estudio de la predicción de las variables psicológicas que aquí propugnamos, son precisamente el mal a evitar.

Por lo que se refiere, en fin, a la caracterización del valor central de la distribución de las variables psicológicas, veamos que G. Udny Yule[25], estadístico inglés, en su "Introducción a la Teoría de la Estadística", ha precisado las condiciones que debe cumplir una buena caracterización del valor central de una serie temporal o cronológica. En resumen, son las siguientes:

[25] George Udny Yule, inglés con estudios de ingeniería y física, fue un colaborador de Pearson, que hizo algunos aportes a la obra de este último. Trabajó en correlación, y también en curvas asimétricas, como su predecesor. Colaboró en la publicación de Pearson, proporcionando un ejemplo de la aplicación de ajuste de una curva asimétrica a datos sobre distribución de la pobreza en Inglaterra y Gales. Pero luego se movió en direcciones independientes. Relacionó la regresión con el método de los mínimos cuadrados, proporcionando un gran conjunto de algoritmos que habían desarrollado los astrónomos, para la solución de las ecuaciones normales, asociadas al cálculo de la regresión. Los trabajos publicados por Yule cubren hasta la primera década del siglo XX.

a) *La característica del valor central debe ser definida objetivamente a partir de los datos de la serie, sin que haya lugar a intervenir ninguna apreciación subjetiva del estadístico.*

b) *Debe depender de todas las observaciones de la serie, a ser posible*. Señalemos que, no obstante, hay veces que se plantea el problema de decidir si debe tenerse en cuenta una observación ("outlier") que es notablemente distinta de todas las demás de su conjunto o si puede ser rechazada por considerar que tal observación tiene carácter excepcional debido a algún factor extraño a la serie como, por ejemplo, un error de observación. En este sentido, recomendamos la aplicación de los denominados "métodos robustos", tal como se propugna en el presente capítulo de nuestro libro.

c) *Debe tener, en la medida de lo posible, una significación concreta, sencilla y fácil de comprender. Si se tiene en cuenta que muchos de los valores centrales de las series han de ser utilizados por personas poco familiarizadas con la Estadística, se comprende la preferencia que en la realidad se ha dado a la media aritmética como característica del valor central de que goza esta propiedad, de una interpretación sencilla.*

d) *Debe ser de cálculo fácil y rápido.*

e) *Debe ser poco sensible a las fluctuaciones del muestreo*. Frecuentemente las observaciones se efectúan, no sobre el conjunto completo o "universo" de elementos a estudiar, sino sobre una parte de éstos que recibe el nombre de "muestra", debe ser suficientemente representativa de dicho "universo" y tener el tamaño adecuado. La presente consideración resulta particularmente interesante en el caso del estudio de un sistema psicológico referido a un conjunto de individuos. Las observaciones hechas sobre los elementos componentes de la muestra constituyen la serie estadística de la cual se determina el valor central. Es evidente que "a priori" no puede asegurarse que el valor central correspondiente a la muestra adoptada coincida con el valor central que se obtendría si se hiciese una serie estadística que abarcase todo el conjunto completo de elementos a estudiar, ni que coincidan siquiera con los correspondientes a distintas muestras que se eligiesen al azar. Ahora bien, dado que en la práctica se procede casi siempre por muestreo, conviene que la característica elegida del valor central sea de tal naturaleza que dicho valor central sea sensiblemente el mismo para las distintas muestras. Conviene hacer notar, al respecto, que esta elección del valor central sólo será posible cuando se conozca la ley de distribución del fenómeno en estudio; la variación del valor central y de otros estadísticos en las distintas muestras entra de lleno en la parte de la Teoría Estadística conocida por la denominación de "Teoría de las Muestras".

f) *Debe ser adecuada a los cálculos algebraicos posteriores*. Se comprende fácilmente la importancia de tal condición con sólo pensar en el caso muy frecuente de tratar de determinar el valor central que corresponde a una serie global resultado de reunir varias series estadísticas parciales.

De entre las cuatro medias usualmente empleadas en Psicología (aritmética, geométrica, cuadrática y armónica) se ve inmediatamente que la aritmética es la que mejor reúne las anteriores condiciones de Yule, si bien ni ella ni las otras tres proporcionan indicación alguna acerca de la repartición de los datos de la series o de sus posiciones respectivas ni sobre las desviaciones de unos respecto a otros. Se limitarán a condensar todos los datos de la serie en uno solo, **la media**, como síntesis de todos ellos.

En particular, las medias aritméticas ($\overline{x}$) y cuadrática (C) dan mucho relieve a los elementos grandes de la serie y, desde luego, la segunda todavía más que la primera. Por el contrario, las medias geométrica y armónica destacan la influencia de los valores pequeños y reducen la influencia de los valores grandes, lo que habrá que tener bien presente en los estudios de Psicología.

Recordemos, por último, que las medias deben calcularse a partir de datos homogéneos y numerosos, condiciones ambas inherentes a toda buena estadística en materia de tratamiento de variables psicológicas.

6. Aplicación del Análisis Factorial

6.1. Introducción

El Análisis Factorial es un método matemático/estadístico de tratamiento de datos -susceptibles de ser expresados numéricamente- cuya aplicación al estudio de los fenómenos psicológicos puede revestir singular importancia. No podemos obviar, en consecuencia, su descripción.

Prácticamente hasta los comienzos del siglo XX, el problema de las aptitudes había sido objeto de puras especulaciones; la observación e introspección -poco o nada sistematizadas, con frecuencia- han sido y siguen siendo incapaces de ofrecer una prueba científica de la existencia de las aptitudes. De este modo, no es de extrañar que muchas de las viejas teorías acerca de las facultades o aptitudes sean completamente falsas. La Psicología actual tiende, en cambio, a adoptar unos puntos de vista más operacionales o "*behavioristas*", adquiriéndose cada vez mayor conciencia de que entidades mentales tales como las facultades, que ni pueden ser observadas directamente ni pueden ser verificadas ni controladas, resultan estériles para la construcción de una ciencia que pretenda ser científica. Hoy en día, por supuesto, se prefiere utilizar conceptos directamente derivados de actividades mensurables de los seres humanos.

Para averiguar experimentalmente cuáles son las características fundamentales de las funciones cognoscitivas, se dispone, desde principios del siglo XX, de dos nuevos instrumentos: el coeficiente de correlación y los "*tests*" mentales, y de un concepto empírico: el de "*unidad funcional*".

El Análisis Factorial es una técnica que consiste en resumir la información contenida en una matriz de datos con V variables. Para ello se identifican un reducido número de factores F, siendo el número de factores menor que el número de variables. Los factores representan a las variables originales, con una pérdida mínima de información.

El modelo matemático del Análisis Factorial es parecido al de la regresión múltiple. Cada variable se expresa como una combinación lineal de factores no directamente observables. A saber:

$$X_{ij} = F_{1i} \cdot a_{i1} + F_{2i} \cdot a_{i2} + ... + F_{ki} \cdot a_{ik} + V_i$$

siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{ij} \text{ la puntuación del individuo i en la variable j .} \\ F_{ij} \text{ son los coeficientes factoriales.} \\ a_{ij} \text{ son las puntuaciones factoriales.} \\ V_i \text{ es el factor único de cada variable.} \end{array} \right.$$

Se asume que los factores únicos no están correlacionados entre sí ni con los factores comunes. Así mismo, podemos distinguir entre *Análisis Factorial Exploratorio*, donde no se conocen los factores "a priori", sino que se determinan mediante el Análisis Factorial y, por otro lado estaría el *Análisis Confirmatorio* donde se propone "a priori" un modelo según el cual hay unos factores que representan a las variables originales, siendo el número de éstos superior al de aquellos, y se somete a comprobación el modelo.

Para que el Análisis Factorial tenga sentido deberían cumplirse dos condiciones básicas: Parsimonia e Interpretabilidad. Según el principio de parsimonia, los fenómenos deben explicarse con el menor número de elementos posibles. Por lo tanto, respecto al Análisis Factorial, el número de factores debe ser lo más reducido posible y éstos deben ser susceptibles de interpretación substantiva. Una buena solución factorial es aquella que resulta sencilla e interpretable. Los pasos o fases que se suelen seguir en el Análisis Factorial son los siguientes:

1. Cálculo de la matriz de correlaciones entre todas las variables (conocida habitualmente como matriz R).
2. Extracción de los factores necesarios para representar los datos.
3. Rotación de los factores con objeto de facilitar su interpretación.
4. Representación gráfica.
5. Cálculo de las puntuaciones factoriales de cada individuo.

Por razones de simplicidad y espacio, nos limitaremos aquí a la exposición de la primera de las fases reseñadas.

6.2. Cálculo de la matriz de correlaciones

El primer paso a realizar en el Análisis Factorial será, como ya se ha dicho, el de calcular la matriz de correlaciones entre todas las variables que entran en el análisis. De tal forma que obtendremos, por ejemplo, una matriz cuadrada del tipo :

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_j
X_1	1	0.50	0.65	0.70	0.45	0.63
X_2	0.5	1	0.30	0.82	0.73	0.40
X_3	0.65	0.30	1	0.38	0.84	0.68
X_4	0.70	0.82	0.38	1	0.76	0.92
X_5	0.45	0.73	0.84	0.76	1	0.59
X_6	0.63	0.49	0.68	0.92	0.59	1

Una vez que se dispone de esta matriz concierne examinarla para comprobar si sus características son adecuadas para realizar un Análisis Factorial. Uno de los requisitos que debe cumplirse para que el Análisis Factorial tenga sentido es que las variables estén altamente correlacionadas.

Pueden utilizarse diferentes métodos para comprobar el grado de asociación entre las variables, así:

***a) El determinante de la matriz de correlaciones*:** un determinante de valor muy bajo indicará altas intercorrelaciones entre las variables, pero no debe ser cero (matriz regular o no singular), pues esto indicaría que algunas de las variables son linealmente dependientes y no se podrían realizar ciertos cálculos necesarios en el Análisis Factorial).

***b) Test de Esfericidad de Bartlett*:** Comprueba que la matriz de correlaciones se ajuste a la matriz identidad (**I**), es decir, existe ausencia de correlación significativa entre las variables. Esto significa que la nube de puntos se ajustará a una esfera perfecta, expresando así la hipótesis nula por:

Ho: **R** = **I**

es decir, que el determinante de la matriz de correlaciones es igual a 1, o sea:

Ho: |**R**| = 1

La fórmula correspondiente asume la siguiente expresión:

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6} * (2 * v + 5)\right] * \ln|R|$$

donde...

n = tamaño muestral.
v = número de variables.
ln = logaritmo neperiano o natural.
R = matriz de correlaciones.

Si se acepta la hipótesis nula ($p>0.05$) significa que las variables no están intercorrelacionadas y, por tanto, no tiene mucho sentido llevar a cabo un Análisis Factorial.

Este test resulta muy útil cuando el tamaño muestral es pequeño.

c) Índice KMO de Kaiser-Meyer-Olkin:

Viene dado por la siguiente expresión:

$$KMO = \frac{\sum\sum_{i \neq j} r_{ij}^2}{\sum\sum_{i \neq j} r_{ij}^2 + \sum\sum_{i \neq j} a_{ij}^2}$$

donde...

r_{ij} = correlación simple.
a_{ij} = correlación parcial.

Valores bajos del índice KMO desaconsejan la utilización de Análisis Factorial. Como baremo para interpretar el índice KMO podría tomarse, según Kaiser, el siguiente:

1 >= KMO >= 0.9 muy bueno
0.9 >= KMO >= 0.8 meritorio
0.8 >= KMO >= 0.7 mediano
0.7 >= KMO >= 0.6 mediocre
0.6 >= KMO > 0.5 bajo
KMO <= 0.5 inaceptable

***d) Correlación Anti-imagen*:** que es el negativo del coeficiente de correlación parcial; deberá haber pocos coeficientes altos para que sea razonable aplicar el Análisis Factorial.

e) Medida de Adecuación de la Muestra (MSA):

Viene dada por la siguiente expresión:

$$MSA_i = \frac{\sum_{j\neq i} r_{ij}^2}{\sum_{j\neq i} r_{ij}^2 + \sum_{j\neq i} a_{ij}^2}$$

donde...

$$\begin{cases} r_{ij} = \text{correlación simple.} \\ a_{ij} = \text{correlación parcial.} \end{cases}$$

Valores bajos de este índice desaconsejan también el uso del Análisis Factorial.

f) Correlación Múltiple: que deberá ser alto, sobre todo si la técnica a utilizar es un análisis factorial. Esta técnica, por defecto, toma los valores de la correlación múltiple al cuadrado como los valores iniciales de comunalidad.

6.3. Teorías bifactorial y multifactorial

De hecho, el análisis factorial se fundamenta en dos observaciones bien definidas:

1- Las tablas de correlaciones entre los tests mentales tienden a ser "*jerárquicas*", es decir, que sus columnas de coeficientes tendían a ser proporcionales.
2- Dichas tablas pueden considerarse como matrices algebraicas, viniendo indicada la proporcionalidad de sus columnas según una definición elemental del álgebra matricial: la "*característica o rango*" (orden del mayor menor complementario no nulo) de la matriz de correlaciones.

La observación anterior **1** dio lugar en su día a la llamada "*teoría bifactorial*", a la que ya nos hemos referido en el capítulo 1 de este mismo libro; mientras que la **2**, a la "*teoría multifactorial*", que resulta ser una generalización de la anterior.

Contemplemos ahora, breve pero separadamente, ambas teorías:

1- TEORÍA BIFACTORIAL: El orden particular que se observa en las tablas de correlaciones entre tests mentales, está caracterizado por su casi general positividad así como su proporcionalidad. Ambos hechos conducen a la teoría de los dos factores debida a Spearman: el **general** "*g*" (que es común a todos los tests y explica las intercorrelaciones positivas y "*jerarquizadas*") y el **específico** "*S*" (que resulta exclusivo e independiente de cada test y explica la imperfección de dichas intercorrelaciones).

Veamos la siguiente tabla de correlaciones entre los tests, $\forall x_i$ / $x_i \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Si suponemos que todas las correlaciones son debidas a un factor "*g*" común, tendremos, por hipótesis, que la correlación entre dos o más tests cualquiera de esta tabla será nula, una vez eliminada la influencia de "*g*". Tomemos, para ello, las columnas referentes a los tests x_{n-1} y x_n, y examinamos sus correlaciones con x_1 y x_2, por ejemplo obteniendo:

TEST\TEST	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	**…**	$\mathbf{x_i}$	**…**	$\mathbf{x_{n-1}}$	$\mathbf{x_n}$
$\mathbf{x_1}$	--	$a_{1,2}$	…	$a_{1,I}$	…	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$
$\mathbf{x_2}$	$A_{2,1}$	--	…	$a_{2,I}$	…	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$
…	…	…	--	…	…	…	…
$\mathbf{x_i}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	…	--	…	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$
…	…	…	…	…	--	…	…
$\mathbf{x_{n-1}}$	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	…	$a_{n-1,i}$	…	--	$a_{n-1,n}$
$\mathbf{x_n}$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	…	$a_{n,I}$	…	$a_{n,n-1}$	--
Σ							

FIG. 9.2. Tabla de análisis factorial.

$$[F = (a_{1,\,n-1} \times a_{2,\,n}) - (a_{1,\,n} \times a_{2,\,n-1}) = 0],$$

fórmula ésta que constituye la denominada "*ecuación tetrádica*". A "**F**" (primer miembro de la ecuación) se le denomina "*diferencia tetrádica*".

Por tanto, si la hipótesis susodicha es verdadera $\Rightarrow F = 0$; y al revés, se puede averiguar si aquella hipótesis es aplicable a las aptitudes de determinada tabla, comprobando que todas las diferencias tetrádicas sean nulas o tienden a cero. De cualquier modo, no puede esperarse, en la práctica, que todas aquellas diferencias sean nulas, puesto que se encuentran afectadas por los errores muestrales. Interesa comprobar, en consecuencia, si se alejan con valores estadísticamente significativos de cero, lo cual puede resolverse conociendo la desviación típica o standard σ_F de la diferencia tetrádica, y admitiéndose como nula $\forall F$ / $F \leq 5 \cdot \sigma_F$.

De hecho, aunque exista siempre una jerarquización de los coeficientes, se ve perturbada por algunos tests. Dichas anomalías se producen en las baterías cuando hay dos o más tests similares, corriéndose el riesgo de que haya algo de común además de "*g*": los factores "*S*" que haya entre ellos. En una batería así constituída, las diferencias tetrádicas son significativamente distintas de cero, quedando perturbada la jerarquía. Mediante la eliminación de tests demasiado parecidos o "*perturbadores*", (dado que sus factores específicos se entrecruzaban y perturbaban la ordenación jerárquica), la batería queda "*purificada*", con lo que las intercorrelaciones seguirán un orden jerárquico, las diferencias tetrádicas tenderían a cero y cada test de la batería podría comprenderse en función de "*g*" y en función de "*S*".

Así pues, todo test "*t*", ajustado al criterio de la jerarquía, puede expresarse en función de los factores "*g*" y "S_t", como:

$$\boxed{t = a_g + b_{St}}$$

o sea: un test "*t*" depende de "*g*" y de "S_t" en la proporción señalada por los coeficientes (denominados "saturaciones del test") "*a*" y "*b*", que expresan las correlaciones existentes entre el test y "*g*" y entre el test y "S_t".

Otros experimentos factoriales conducen a la determinación de la existencia de los factores de grupo o comunes, cuya exposición debe ser obviamente omitida en esta obra por razones de oportunidad e interés.

2- **TEORÍA MULTIFACTORIAL**: se considera una tabla de correlaciones como una matriz, convirtiéndose la "*ecuación tetrádica*" en un determinante "*menor de segundo orden*". Entonces: $F = 0 \Rightarrow \forall$ menores de segundo orden de la matriz = 0 (1) $\Rightarrow$ característica o rango de la matriz = 1 $\Rightarrow \forall$ columnas de la matriz son proporcionales (con lo que sólo necesitamos un factor para explicar la correlación de un test cualquiera con los demás).

Si la condición (1) no se cumple (o sea, no se cumple la ecuación tetrádica) es porque las correlaciones reclaman tantos factores comunes como indique el rango de la matriz de correlaciones. Previamente, se han tenido que calcular los coeficientes de correlación entre los tests componentes de la batería. La determinación de aquellos factores comunes puede comprenderse asimilando los tests a vectores cuya longitud y posición vienen perfectamente determinadas por los datos iniciales del análisis correlacional. Estos vectores quedan definidos en un espacio bidimensional por el ángulo formado sobre el plano con ambos ejes de coordenadas cartesianas (o por el coseno de dicho ángulo), oscilante de 0º a 90º, de tal suerte que si el vector tiene la misma dirección que uno de estos ejes, tendremos que el coseno del ángulo nulo es igual a la unidad, del mismo modo que al ángulo de 90º corresponde un coseno igual a cero. Si estos cosenos son los índices de correlación, cuando el vector se identifique como uno de los ejes (que pueden ser ortogonales u oblicuos, según las exigencias) poseerá una correlación nula con el otro. El espacio definido por todos los vectores se denomina "*configuración vectorial*" y corresponde a la característica de la matriz, e indica el número de factores comunes necesarios para explicar las correlaciones.

Así, veamos el siguiente ejemplo:

$$\text{Sea } r = \frac{a}{b} = \cos\theta = \frac{6}{10} = 0'6 \quad \Rightarrow \theta = \text{arc}\cos 0'6 \approx 53^{o}$$

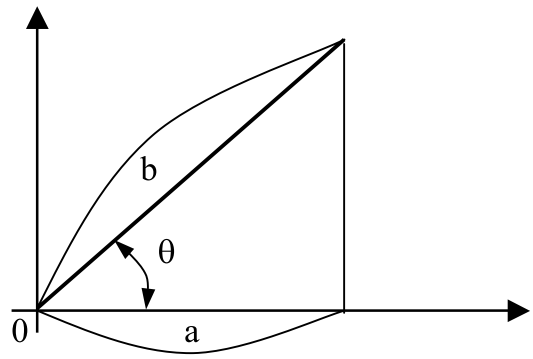


FIG. 9.3. Representación geométrica de una correlación vectorial.

Los ejes coordenados de esta estructura pueden ser ortogonales (rectangulares) u oblicuos, según lo exijan las propiedades de la configuración vectorial. En general, los factores cognoscitivos son oblicuos; este hecho viene a indicar que son dimensiones distintas de la conducta cognoscitiva del sistema psicológico, pero no independientes.

Veamos que los datos obtenidos mediante el análisis factorial pueden utilizarse con fines de simple condensación estadística o de investigación psicológica. Los factores extraídos con el primer fin son sólo meros índices matemáticos, pero para lograr el segundo fin, se confrontan hipótesis psicológicas (que podemos considerar verificadas si, a través del análisis, encontramos cierto orden en las correlaciones entre los tests) con datos matemáticos. La significación inmediata de los factores hallados, que son conceptos psicomatemáticos, es más bien de tipo estructural que causal: son instrumentos descriptivos de las dimensiones de variación de la conducta.

En general, y por último, observemos que las posibilidades del análisis factorial en psicología pueden agruparse así:

1- Comprobación experimental de hipótesis acerca de cualquier unidad funcional.
2- Exploración de nuevos campos de la conducta.
3- Suministro de una sólida base teórica a las aplicaciones de los tests mentales.

En definitiva, siguiendo a M. Yela veamos que el modelo del análisis factorial permite indagar las dimensiones fundamentales en que covaría la multiplicidad de variables que represente un determinado campo de la personalidad o de la conducta del sistema psicológico. En esencia, se basa en la siguiente ecuación fundamental, según la cual cada variable es función de un número de factores comunes y de un factor único:

$$Z = FX + UV$$

donde Z, X y V son vectores de "*n*" variables aleatorias, "*r*" factores comunes y "*n*" factores únicos, respectivamente, y F y U son matrices de coeficientes factoriales, de orden "$n \times r$", la primera, y "*n*", la segunda, que es diagonal. Las variables están expresadas en valores típicos, esto es:

$E(Z) = E(X) = E(V) = 0$ (media aritmética o esperanza matemática)
$E(Z^2) = E(X^2) = E(V^2) = 1$ (varianza)

Entonces, la correlación existente entre las variables, supuesta la independencia estadística entre los factores comunes y los únicos, es la siguiente:

$$R_{ZZ} = E(ZZ') = E[(FX + UV)(FX + UV)'] = FR_{XX}F' + U^2$$

Se han elaborado diversos métodos para calcular F y R_{XX} a partir de R_{ZZ}. Los resultados conducen a la conclusión de que la inteligencia de un S. psicológico, como muchos otros campos de covariación de la personalidad, es a la vez "*una*" y "*múltiple*". "*Una*", porque es un sistema, una estructura, un factor general. "*Múltiple*", porque su unidad lo es de una multiplicidad de dimensiones ordenadas jerárquicamente en diversas aptitudes interdependientes que varían según la dotación genética, la experiencia individual y la cultura del sistema o individuo.

RESUMEN Y CONCLUSIONES

1) En el presente ensayo se propugna la introducción de nuevas herramientas matemáticas, basadas fundamentalmente en la Teoría General de Sistemas y en la Investigación Operativa, que puedan resultar de gran utilidad para el estudio de la conducta humana y de apoyatura a las diversas disciplinas psicológicas (diferencial, psicometría, psicofisiología), especialmente a la Psicología experimental.

2) Se realiza un repaso histórico a la evolución que la aplicación de las Matemáticas ha experimentado a lo largo de la existencia de la Psicología como ciencia social. Más adelante también se recrea un recorrido histórico por los albores de la Psicología experimental, concluyéndose que hasta la fecha ninguna teoría ha logrado unificar esta ciencia que, en la práctica, resulta ser una amalgama de las diferentes corrientes de la Psicología con sus respectivas áreas de interés.

3) Se define el concepto y clases de los modelos psicológicos, así como las variables, grados de indeterminación y estabilidad de los mismos. Se hace especial mención del concepto de "probabilidad subjetiva" y de sus aplicaciones.

4) La Teoría General de Sistemas ofrece perspectivas e instrumentos conceptuales que permiten abordar numerosos fenómenos psicológicos de forma más fiel, comprensiva, fecunda e, incluso, más rigurosa de lo que resulta usual en la Psicología tradicional. Ahora bien, para alcanzar una mayor precisión se requiere una formalización matemática y una cuantificación exhaustiva de las variables psicológicas no siempre fácil de conseguir, pero que constituye un objetivo de nuestro libro.

5) Se conceptualizan y formalizan los sistemas psicológicos a partir de sus elementos y estructura, estudiándose las conexiones así como las transformaciones y tipos de acoplamientos. Se analizan los diversos tipos de problemas que pueden presentarse y sus niveles de resolución, con una introducción aclaratoria sobre la ciencia cibernética.

6) El estudio o enfoque sistémico de la Psicología induce a contemplar los conceptos de Percepción, Aprendizaje y Recuerdo, Comunicación inter-sistémica, Elección y Valoración, con diversas especificaciones y definiciones.

7) Un enfoque interesante y novedoso de muchos problemas psicológicos reside en su tratamiento a base de la aplicación de una conocida técnica de la Investigación Operativa: la Teoría de la Programación Dinámica y de los Procesos Estocásticos, partiendo de la consideración evidente de los sistemas psicológicos como sistemas dinámicos (que varían con el tiempo). Consiste en un método de optimización de los sistemas psicológicos -o de su representación matemática- en el cual se opera por fases o secuencias, teniendo en cuenta que la verdadera naturaleza de numerosos problemas que se plantean en Psicología es secuencial, es decir, que permiten su descomposición en fases o etapas en las cuales cada uno depende de sus más próximas y frecuentemente, en los casos favorables, sólo de la fase anterior o bien de la posterior.

8) El empleo de la Teoría de Grafos, que nace de la existencia indudable de una aplicación multívoca definida sobre un conjunto de sistemas o individuos, en el planteamiento y resolución de las relaciones psicológicas que se dan entre los sistemas, puede extenderse al terreno intensamente operativo de la optimización o búsqueda del valor óptimo (máximo o mínimo) entre los diversos sistemas que constituyen los vértices del grafo.

9) La Teoría de Gestión de Stocks encuentra su aplicación en la medida que podemos considerar a un sistema psicológico o individuo como un ente en que las "demandas" propias de los problemas de stocks se transforman en entradas de estímulos al sistema mientras que, en su interior (cerebro), se produce una acumulación o almacenamiento de experiencias y conocimientos cuyo control psicológico de emisión del sistema puede equipararse, en ciertos aspectos, a la gestión de un stock mercantil.

10) Así mismo, en el estudio del individuo como sistema pueden considerarse las entradas de estímulos como si se tratase de las llegadas de clientes a una cola o fenómeno de espera, si presuponemos inicialmente una acumulación de ellos como resultado de una experiencia psicológica de carácter conductista o behaviorista. Al respecto, se plantean y resuelven algunos ejemplos de aplicación.

11) Se profundiza en los diversos conceptos de Probabilidad y Estadística necesarios para la cuantificación y medición de los fenómenos psicológicos cuya función es permitir que observadores (psicólogos experimentadores) distintos puedan registrar un hecho utilizando los mismos datos y que, a partir de ellos, el hecho en cuestión pueda ser explicado o reproducido con fidelidad por otros investigadores; pero siempre teniendo en cuenta que a mayor precisión en la medida corresponderá también mayor exactitud en el registro de la observación y mayor fiabilidad en los datos. Mención aparte merece la conocida técnica del Análisis Factorial, cuya aplicación al estudio de los fenómenos psicológicos reviste singular importancia.

12) Por último en el apéndice de la obra se insertan sendos anexos referentes a restantes especificaciones metodológicas de interés para la resolución de las cuestiones planteadas a lo largo del trabajo, así como a la contemplación de diversos ejemplos prácticos que ponen de manifiesto, una vez más, pero desde perspectivas diferentes, la utilidad clásica de la Teoría de Probabilidades y de la Estadística como herramientas imprescindibles de la Psicología experimental.

13) Todos estos trabajos y algunas otras investigaciones cuya descripción detallada obviaremos aquí por razones de espacio constituyen la base fundamental del presente libro, que se complementa con las posibles proyecciones en el planteamiento de nuevas directrices de estudio, así como las pertinentes referencias bibliográficas.

14) Se ha creído conveniente, mediante numerosas notas a pie de página, hacer referencia biográfica a aquellos autores de especial relevancia por sus aportaciones en el campo de las matemáticas, la filosofía y la psicología. El trabajo se completa con diversos cuadros, tablas y gráficos que se espera que confieran a la investigación desarrollada un carácter mucho más ilustrativo y exacto.

APÉNDICE

- ANEXO 1: RESTANTES ESPECIFICACIONES METODOLÓGICAS
- ANEXO 2: EJEMPLOS PRÁCTICOS

ANEXO 1
Restantes especificaciones metodológicas

I. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

1. La distribución teórica de probabilidad

A lo largo de nuestro libro, y en la psicología aplicada en general, se utilizan profusamente conceptos relacionados con la distribución teórica de probabilidad normal, tipificada o no; de ahí el interés de desarrollar aquí algunas ampliaciones conceptuales que puedan resultar de utilidad para una mejor comprensión de los estudios y determinaciones efectuadas en algunos capítulos del presente libro. Por otra parte, el significado físico del CV (coeficiente de variación de Pearson) se deduce claramente si aceptamos que todos los valores de la variable elegida en el estudio (por ejemplo, el cociente intelectual de un colectivo determinado de individuos superdotados), se distribuyen de acuerdo con la curva campaniforme de una distribución normal y, por lo tanto, se tendrá lo siguiente:

a) Prácticamente, todos los valores observados se hallarán comprendidos en el entorno: $(1 \pm 3\ CV)\overline{X}$.

b) Aproximadamente, el 95% de las observaciones se encuentran comprendidas en el entorno: $(1 \pm 2\ CV)\overline{X}$.

c) Si se toman las n/4 observaciones de valores más bajos del total de los **n** valores medidos de la variable en cuestión (cuyo valor superior será el primer cuartil Q_1 de la distribución de frecuencias), su media aritmética será igual a: $q_{25} = (1 - 1'27\ CV)\overline{X}$.

d) EL 68'27% de las observaciones realizadas estarán en el intervalo: $(1 \pm CV)\overline{X}$.

Desde luego, la ecuación matemática de la función de la **distribución normal sin tipificar** viene dada por la expresión:

$$\boxed{y = (1 / \sigma \sqrt{2\pi}) \cdot e^{-1/2\,(x-\alpha/\sigma)^2}}$$

, en la que se ha tomado, como es usual, $\overline{X} = \alpha$, y que coincide con la expresión matemática de la célebre "ley de los errores", debida a Karl Gauss, siendo y = f(x) la denominada "función de densidad normal".

De esta definición se deduce que no hay una única distribución normal sino una familia de distribuciones, resultante de los diferentes valores de los parámetros μ y σ.

Veamos ahora que la expresión de la función de densidad normal sin tipificar está bien definida, es decir, es una función de densidad. Evidentemente f(x) > 0 por la propia definición, pero necesitamos probar que la integral impropia de primera especie extendida a toda la recta real vale la unidad (probabilidad total).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx = 1$$

Para ello hacemos el cambio de variable:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

de donde:

$$dx = \sigma \cdot dz$$

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos la “tipificación”:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sigma \cdot dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz$$

Haciendo un nuevo cambio de variable:

$$\frac{z^2}{2} = v$$

de donde:

$$z = \sqrt{2v} \quad \text{y} \quad dz = \frac{1}{\sqrt{2v}} dv$$

resultando que la integral anterior será[1]:

[1] La función gamma de p, Γ(p), se define como:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot dx, \quad \forall p > 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-v}\cdot\frac{1}{\sqrt{2v}}\cdot dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-v}\cdot v^{-\frac{1}{2}}\cdot dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$$

con lo cual tenemos probado que la expresión anteriormente relacionada es una función de densidad.

Así mismo, se tendrá que:

$$F(x_i) = P(x \le x_i) = P(-\infty < x \le x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x)\cdot dx$$

, es la denominada "función de distribución normal", que es la probabilidad de que la variable aleatoria estadística tome un valor $\le x_i$.

Las áreas comprendidas bajo la curva normal y hasta el eje de abscisas representan probabilidades; en estas condiciones, veamos que la probabilidad de que: $x \in]x_1, x_2]$ será:

$$P(x_1 < x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = P(x \le x_2) - P(x \le x_1) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\cdot dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot dx\ .$$

Como ya hemos visto, cuando la variable aleatoria estadística que estamos investigando **x** viene expresada en unidades de desviación: $Z = (x-\alpha)/\sigma$, se tiene la **distribución normal tipificada**, así:

$$y = (1/\sqrt{2\pi})\cdot e^{-z^2/2}$$

, y decimos que la variable Z se distribuye normalmente con media cero ($\alpha = 0$) y varianza uno ($\sigma^2 = 1$).

Vamos a proceder, seguidamente, al estudio más pormenorizado de ambas curvas.

1) **Como acabamos de ver, la ecuación de la curva normal tipificada es:**

$$y = (1/\sqrt{2\pi})\cdot e^{-z^2/2} \quad ; \quad \alpha = 0 \quad ; \quad \sigma^2 = 1 \quad ,$$

---

y se puede ver que:

$$\Gamma(p) = (p-1)!\ ,\ \Gamma(1) = 1 \ \text{ y } \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-x}\cdot dx = \sqrt{\pi}$$

que es la función de densidad normal reducida.

• *Extremos relativos y puntos de inflexión:*

Se tiene:

$$y' = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-z^2/2} \cdot (-z) = 0 \quad ; \quad z = 0 \text{ (origen)} \;;$$
$$y'' = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-z^2/2} \cdot (z^2 - 1) \;;\; \forall\, Z = 0 \rightarrow y'' = (1/\sqrt{2\pi}) < 0$$

luego existe un **máximo relativo o local** en el punto (0, $1/\sqrt{2\pi}$), de intersección con el eje de ordenadas OY, y no habrá intersección con el eje de abscisas OZ a distancia finita, esto es:

$$\forall\, y = 0 : \qquad Z = +\infty \quad y \quad Z = -\infty \quad .$$

De y'' = 0, o sea: Z^2-1 = 0, saldrán los **puntos de inflexión**, que son: Z = +1; o sea, los puntos de coordenadas: (1, $1/\sqrt{2\pi \cdot e}$) y (-1, $1/\sqrt{2\pi \cdot e}$).

• *Crecimientos y decrecimientos:*

$$\text{Veamos que} \begin{cases} \forall Z < 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow \text{CRECIENTE} \\ \forall Z > 0 \rightarrow y' < 0 \rightarrow \text{DECRECIENTE} \end{cases}$$

• *Asíntotas:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{Z \to +\infty} (1/\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-z^2/2} = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-\infty} = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot 1/e^{\infty} = 1/\infty = 0 \\ \lim\limits_{Z \to -\infty} (1/\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-z^2/2} = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-\infty} = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot 1/e^{\infty} = 1/\infty = 0 \end{cases}$$

, luego tiene por asíntota horizontal (rama hiperbólica) el eje OZ. No tiene otras ramas infinitas o ramas parabólicas.

•*Simetrías:*

- Respecto al eje OY, pues al cambiar (Z) por (-Z), no sufre variación (se trata de una función par).

•*Concavidades y convexidades:*

De: $y'' = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-z^2/2} \cdot (z^2 - 1)$, se deduce que, según los diferentes intervalos de la recta real:

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall Z \in\,]-\infty, -1[\;\rightarrow\; y'' > 0 \rightarrow \text{CÓNCAVA} \\ \forall Z \in\,]-1, -1[\;\rightarrow\; y'' < 0 \rightarrow \text{CONVEXA} \\ \forall Z \in\,]1, +\infty[\;\rightarrow\; y'' > 0 \rightarrow \text{CÓNCAVA} \end{array}}$$

Su representación gráfica, en definitiva, será la siguiente:

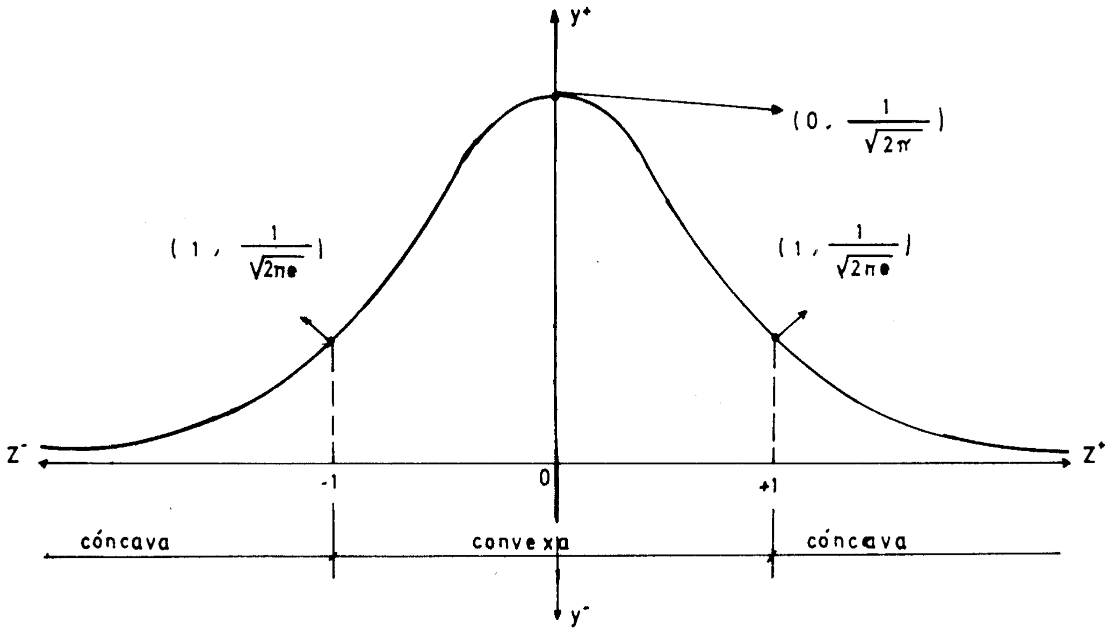


FIG. A-1.1. Curva de distribución normal tipificada

Veamos que en esta distribución teórica de probabilidad, como en todas las simétricas, se cumple, como puede observarse fácilmente, la igualdad entre la media aritmética, la mediana y la moda, valores que, en este caso, coinciden con cero.

2) **La ecuación de la curva normal sin tipificar es:**

$y = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-(X-\alpha)^2/2\sigma^2}$ (función de densidad normal)

•*Asíntotas:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} y = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-(X-\alpha)^2/2\sigma^2} = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-\infty} = 0 \ ; \\ \lim\limits_{X\to-\infty} y = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-(X-\alpha)^2/2\sigma^2} = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-\infty} = 0 \end{cases}$$

, luego tiene por asíntota horizontal (rama hiperbólica) el eje de abscisas OX. No tiene otras ramas infinitas o ramas parabólicas.

•*Cortes con los ejes:*

Cortará al eje OY en el punto [0, $(1/\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-\alpha^2/2\sigma^2}$] y no cortará al eje OX a distancia finita.

•*Extremos relativos y puntos de inflexión:*

$$y' = (1/\sigma\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-(x-\alpha)^2/2\sigma^2} \cdot \left[(\alpha - x)/\sigma^2\right] = y \cdot (\alpha - x)/\sigma^2 = 0 \;; \rightarrow x = \alpha$$

$$y'' = y' \cdot (\alpha - x)/\sigma^2 - y \cdot 1/\sigma^2 = y \cdot \left[(\alpha - x)/\sigma^2\right]^2 - y \cdot 1/\sigma^2 =$$

$$= y \cdot (\alpha - x)^2/\sigma^4 - y\,\sigma^2/\sigma^4 = y \cdot \left[(\alpha - x)^2 - \sigma^2\right]/\sigma^4 \;;$$

$$\forall\, x = \alpha \rightarrow y'' = y \cdot \left(-\sigma^2\right)/\sigma^4 = -y/\sigma^2 < 0$$

luego existe un máximo relativo o local en el punto (a, $1/\sigma\sqrt{2\pi}$), al ser negativa la segunda derivada.

Por otra parte, de y''=0, o sea: $(\alpha - x)^2 = \sigma^2$, saldrán los **puntos de inflexión**, que son: $\pm(\alpha - x) = \pm\sigma$; o sea: $x = \alpha+\sigma$, o bien $x = \alpha-\sigma$, esto es, los puntos de las coordenadas cartesianas rectangulares:

$$\left(\alpha + \sigma, 1/\sigma\sqrt{2\pi e}\right) \quad \text{y} \quad \left(\alpha - \sigma, 1/\sigma\sqrt{2\pi e}\right)$$

, siendo convexa la curva entre dichos puntos, y cóncava en el resto del intervalo de existencia, como puede comprobarse del estudio de la segunda derivada y''. Así pues, es cóncava hacia la región positiva de OY, para: $-\infty < x < \alpha-\sigma$, y para $\alpha+\sigma < x < +\infty$, y cóncava hacia la región negativa del eje de ordenadas (convexa hacia las y^+) en el intervalo o dominio de definición: $\alpha-\sigma < x < \alpha+\sigma$.

•*Simetrías:*

La curva es simétrica con respecto a la ordenada correspondiente al punto α, por ser una función par con respecto a la diferencia: $(x-\alpha)$.

•*Crecimientos y decrecimientos:*

Veamos que $\begin{cases} \forall\, x < \alpha \rightarrow y' > 0 \rightarrow \text{CRECIENTE} \\ \forall\, x > \alpha \rightarrow y' < 0 \rightarrow \text{DECRECIENTE} \end{cases}$

En definitiva, veamos que la distribución normal queda completamente determinada si se especifican su media y su desviación típica o "standard". Como ya se ha visto, un conocimiento adicional sobre el papel que el parámetro σ juega en la determinación de una función de densidad normal se logra calculando el área bajo Y comprendida dentro del intervalo correspondiente. De este modo, la probabilidad de que X se halle en un entorno de centro α y radio σ vendrá dada por la expresión:

$$\int_{\alpha-\sigma}^{\alpha+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

Su representación gráfica será la siguiente:

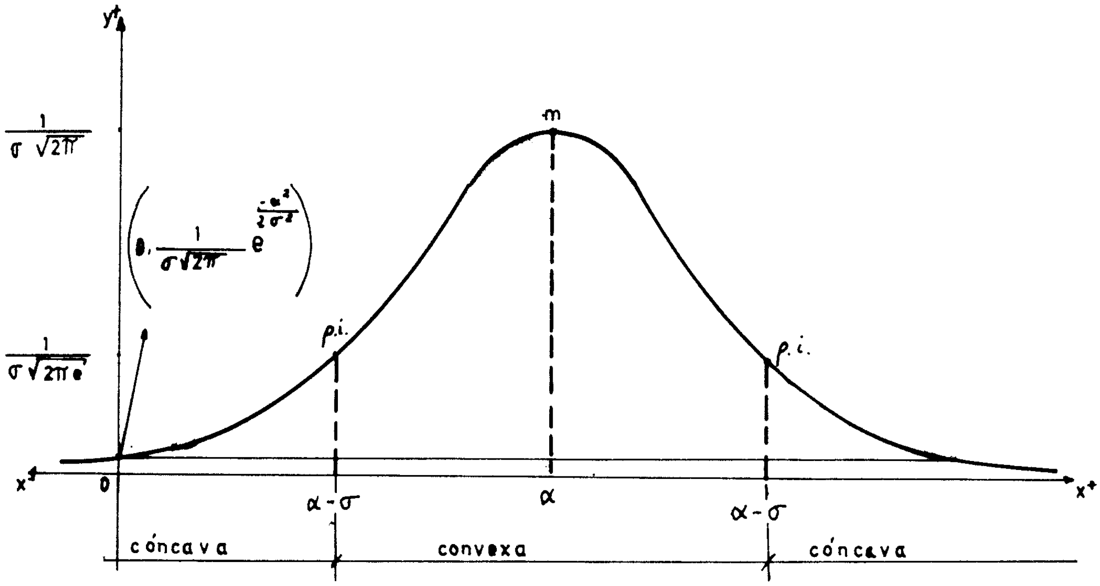


FIG. A-1.2. Curva de distribución normal sin tipificar

2. Las áreas bajo la curva normal

El estudio detenido que acabamos de realizar, desde el punto de vista del análisis matemático, de las distribuciones normales tipificadas y sin tipificar, nos permitirá aprovechar los conocimientos que la ciencia estadística proporciona acerca de dicha distribución teórica de frecuencias para obtener ciertas conclusiones de tipo cuantitativo, de gran aplicación en el análisis de la uniformidad de las variables psicológicas que tendremos ocasión de llevar a cabo, por ejemplo, en el Anexo 2.

Y así, se tendrá lo siguiente:

% de casos	INTERVALOS
50'00	[(1 - 0'68·CV) $\bar{X}$, (1 + 0'68· CV) $\bar{X}$]
64'24	[(1 - 0'92·CV) $\bar{X}$, (1 + 0'92 ·CV) $\bar{X}$]
68'27	[(1 - CV) $\bar{X}$, (1 + CV) $\bar{X}$]
95'00	[(1 - 1'96·CV) $\bar{X}$, (1 + 1'96 ·CV) $\bar{X}$]
95'45	[(1 - 2·CV) $\bar{X}$, (1 + 2·CV) $\bar{X}$]
99'00	[(1 - 2'58·CV) $\bar{X}$, (1 + 2'58 ·CV) $\bar{X}$]
99'73	[(1 – 3·CV) $\bar{X}$, (1 + 3·CV) $\bar{X}$]

, intervalos que podrían representarse, gráficamente, del siguiente modo:

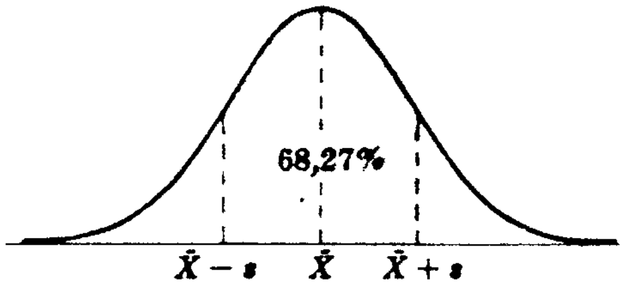


FIG. A-1.3. Área del 68'27%

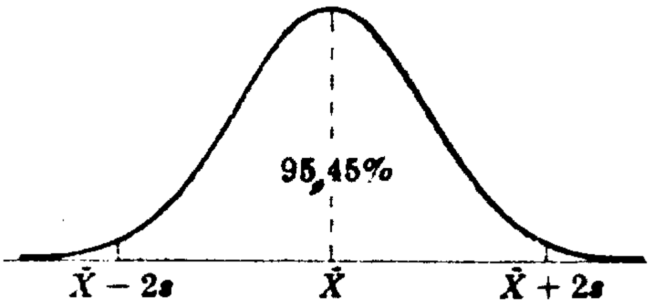


FIG. A-1.4. Área del 95'45%

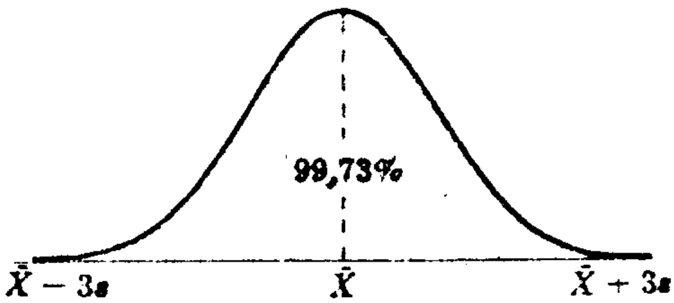


FIG. A-1.5. Área del 99'73%

Del mismo modo, en la página siguiente pueden verse expresadas, de manera conjunta las diversas áreas existentes bajo una curva de distribución normal tipificada o no en función de las unidades de desviación típica o "standard" que se adicionen a la media aritmética por el eje de abscisas. Esto es:

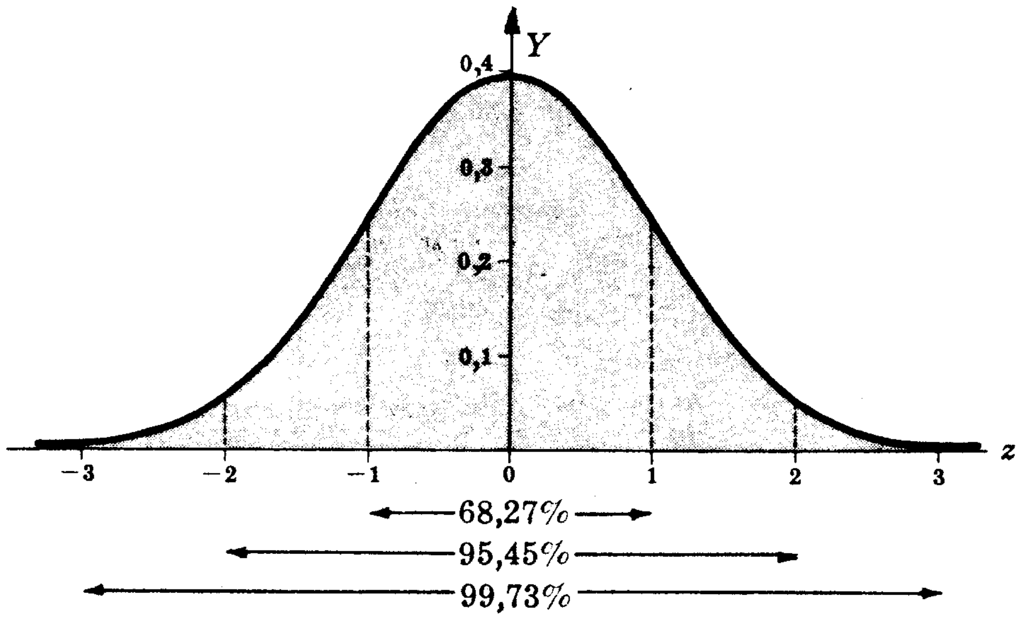


FIG. A-1.6. Diferentes áreas bajo la curva de distribución normal

En la siguiente tabla se presentan las áreas: $\int_0^x f(x)\,dx$ (multiplicadas por 1.000) bajo la curva de distribución normal. A saber:

x	1.000 *A*	*x*	1.000 *A*	*x*	1.000 *A*	*x*	1.000 *A*
0,0	000	1,0	341	2,0	477	3,0	498,6
0,1	040	1,1	364	2,1	482	3,1	499,0
0,2	079	1,2	385	2,2	486	3,2	499,3
0,3	118	1,3	403	2,3	489	3,3	499,5
0,4	156	1,4	419	2,4	492	3,4	499,7
0,5	191	1,5	433	2,5	493,8	3,5	499,77
0,6	226	1,6	445	2,6	495,3	3,6	499,84
0,7	258	1,7	455	2,7	496,5	3,7	499,89
0,8	288	1,8	464	2,8	497,4	3,8	499,93
0,9	316	1,9	471	2,9	498,1	3,9	499,95

FIG. A-1.7. Áreas bajo la curva normal

De aquí, pueden resolverse las siguientes cuestiones:

a) **Área total bajo la curva normal y probabilidad de que la variable psicológica tome un valor cualquiera de su recorrido o campo de variación (de -∞ a +∞).**

La simple observación de la tabla anterior nos dice que el área bajo la curva normal, desde 0 a 3'9, toma el valor:

$$499'95 / 1.000 = 0'49995 \approx 0'5$$

Por la simetría de la curva de Gauss, ésta es la mitad del área total, que vale la unidad. Por otra parte, la probabilidad de que la variable psicológica en estudio **x** tome cualquier valor es la certeza absoluta; por ello, su valor es la unidad, en virtud del axioma o postulado que reza que "la probabilidad de un suceso cierto vale 1" (probabilidad total).

b) **Área bajo la curva determinada por las ordenadas en los extremos de los intervalos (1, 2) y (-1, -2). ¿Cuál es el valor de la probabilidad de que la variable psicológica x tome un valor comprendido entre 1 y 2? ¿Y entre -2 y -1?**

Según puede verse en la tabla anterior, las áreas bajo la curva comprendidas entre el eje de ordenadas (x=0) y las ordenadas x=2 y x=1, son, respectivamente:

$$477 / 1.000 = 0'477 \qquad y \qquad 341 / 1.000 = 0'341 \qquad ;$$

entonces, el área pedida será la diferencia:

$$\int_0^2 f(x)\cdot dx - \int_0^1 f(x)\cdot dx = 0'477 - 0'341 = 0'136 = \int_1^2 f(x)\cdot dx = 13'6\%$$

que es también la probabilidad de que la variable psicológica **x** tome un valor comprendido entre 1 y 2, por la propiedad aditiva del intervalo de integración en las integrales definidas.

El área comprendida entre las ordenadas x = -2 y x = -1 es la misma anterior y la probabilidad de que **x** tome un valor del intervalo (-2, -1) es también igual, en virtud de la simetría de la figura, a:

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = 0'136 \qquad y \qquad P(-2 < x < -1) = 0'136 \quad .$$

c) **Intervalo (-a, a) cuyas ordenadas extremas delimiten el 50 por 100 del área total existente bajo la curva normal y su expresión probabilística.**

Hemos de encontrar ahora un valor x = a, tal que delimite hasta el eje de ordenadas el 25 por 100 del área total (por simetría, el intervalo [-a, 0] delimitará el otro 25 por 100).

Según la tabla, este valor comprendido entre x = 0'6 y x = 0'7, y las áreas respectivas, a saber, 0'226 y 0'258, incluyen la de valor 0'250 pedido.

De la proporción:

$$\frac{0'258 - 0'226}{0'7 - 0'6} = \frac{0'250 - 0'226}{a - 0'6}$$

obtendremos el valor: a = 0'68, con lo que:

$$\int_{-0'68}^{0'68} f(x)dx = 0'50 \qquad \text{y} \qquad P(-0'68 < x < 0'68) = 0'50 \;.$$

d) **Valor de a tal que las colas (áreas a la izquierda de -a y a la derecha de +a) que existen bajo la curva normal sumen el 5 por 100 del área total.**

El área de cada cola debe medir el 2'5 por 100 del área total; entonces el valor de **a** ha de satisfacer la condición:

$$\int_{0}^{a} f(x) \cdot dx = 0'500 - 0'025 = 0'475$$

Según la tabla, este valor de **a** está comprendido entre 1'9 y 2'0 y se puede estimar según la proporción:

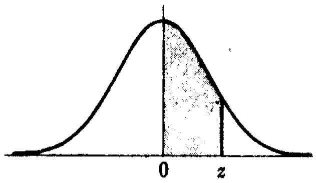
$$\frac{477 - 471}{2 - 1'9} = \frac{475 - 471}{a - 1'9} \quad ; \quad a = 1'9667 \approx 2.$$

En la práctica, se suelen tomar los valores de -2 y 2 para definir la cola del 5 por 100, o lo que es igual:

$$P(-2 < x < 2) = 0'95 \;.$$

Habida cuenta de su interés para la realización de este tipo de cálculos dada la dificultad de resolver integrales definidas de funciones de densidad normales como las que venimos estudiando en el presente capítulo de nuestro libro, a continuación se presenta una tabla que ofrece las áreas existentes bajo la curva normal tipificada, limitadas por la ordenada z = 0 y cualquier valor positivo de z. A partir de esta misma tabla, se pueden encontrar las áreas comprendidas entre dos ordenadas cualesquiera, utilizando la simetría de la curva de Gauss en relación al eje de ordenadas z = 0. La tabla siguiente se refiere a las áreas existentes bajo la curva normal tipificada, desde $-\infty$ hasta z. Por último, se incluye también una tabla con los valores de las ordenadas (y) de la curva normal tipificada para los diferentes valores de z.

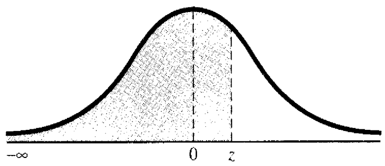
Dichas tablas han sido extraídas del libro de José M. Casas Sánchez y Julián Santos Peñas titulado "Introducción a la Estadística para Economía y Administración de Empresas", Ed. Ceura, Madrid, 1995, así como de los clásicos de Murray R. Spiegel de "Teoría y Problemas de Probabilidad y Estadística", Ed. McGraw-Hill, México, 1969-1981, citados en la bibliografía. Veámoslas a continuación:



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

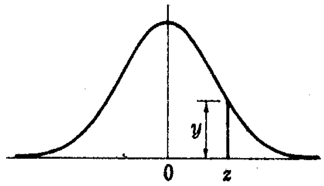
FIG. A-1.8. Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z

$$F(z) = P(Z \leqslant z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0.9788	0.9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

FIG. A-1.9. Áreas bajo la curva normal tipificada de -∞ a z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

FIG. A-1.10. Ordenadas (y) de la curva normal tipificada en z

II. LA PRUEBA DEL CHI-CUADRADO

1. Frecuencias observadas y teóricas

En diferentes partes de nuestro estudio se recurre al uso de la distribución teórica de probabilidad "Chi-cuadrado" con el objetivo de contrastar ciertas hipótesis.

Como ya se ha visto muchas veces, los resultados obtenidos de las muestras de una población o universo no siempre concuerdan exactamente con los resultados teóricos estimados, según las reglas de probabilidad. Por ejemplo, aunque las consideraciones teóricas basadas en la equiprobabilidad laplaciana (*a priori*) o en la probabilidad frecuencialista de Von Mises (*a posteriori*) nos lleven a esperar obtener 50 caras y 50 cruces cuando se lanza al aire 100 veces una moneda bien hecha, es raro que se obtengan exactamente estos resultados.

Supongamos ahora que, en una determinada muestra, se observan una serie de posibles sucesos: E_1, E_2, E_3, ... , E_k (ver el cuadro siguiente) que pasan con frecuencias: o_1, o_2, o_3, ... , o_k , llamadas *frecuencias observadas* y que, según las reglas de probabilidad, se espera que ocurran con frecuencias: e_1, e_2, e_3, ... ,e_k llamadas *frecuencias teóricas o esperadas.*

SUCESOS	E_1	E_2	E_3	...	E_k
Frecuencia observada	o_1	o_2	o_3	...	O_k
Frecuencia esperada	e_1	e_2	e_3	...	E_k

FIG. A-1.11. Frecuencia observada y esperada de la prueba del Chi-cuadrado

A menudo se desea saber si las frecuencias observadas difieren significativamente de las frecuencias esperadas. Para el caso en que solamente son posibles dos sucesos: E_1 y E_2 (que suele denominarse *dicotomía o clasificación dicotómica*), como, por ejemplo, caras y cruces, defectuoso o no defectuoso, blanco y negro, etc., el problema queda resuelto satisfactoriamente con los métodos clásicos. En este apartado aclaratorio, se considera el problema general.

2. Definición de χ^2

Una medida de la discrepancia o divergencia existente entre las frecuencias realmente observadas y las esperadas o teóricas, es la suministrada por el conocido estadígrafo χ^2 de Pearson, dado por la expresión:

$$\chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} + \ldots + \frac{(o_k - e_k)^2}{e_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} \quad (1)$$

donde si el total de frecuencias es N, tendremos:

$$\Sigma o_j = \Sigma e_j = N \quad (2)$$

Una explicación equivalente a la ofrecida por la expresión anterior (1) es la siguiente:

$$\chi^2 = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N \quad (3)$$

Si $\chi^2 = 0$, las frecuencias observadas y las teóricas concuerdan exactamente; mientras que si $\chi^2>0$, no coinciden exactamente. Para mayores valores de χ^2, mayores son también las discrepancias existentes entre las frecuencias observadas y las teóricamente estimadas.

La distribución muestral de χ^2 se aproxima muy estrechamente a la distribución teórica de probabilidad Chi-cuadrado, cuya gráfica puede verse en la siguiente figura para diferentes valores de ν, de configuración analítica:

$$Y = Y_o(\chi^2)^{1/2(v-2)} \bullet e^{-1/2\chi^2} = Y_o\chi^{v-2} \bullet e^{-1/2\chi^2} \quad (4)$$

si las frecuencias estimadas son al menos iguales a 5; la aproximación mejora para valores superiores. Aquí ν es el número de grados de libertad, Y_0 es una constante que depende de ν con lo cual, lógicamente, el área total bajo la curva vale 1.

Definimos una variable aleatoria χ^2 con ν grados de libertad como una suma de ν variables aleatorias N (0, 1), independientes y elevadas al cuadrado, cuya función de densidad coincide con la correspondiente a la $\Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})$, es decir:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\frac{1}{2})^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \times x^{\frac{\nu}{2}-1} \times e^{-\frac{x}{2}}, & \forall x > 0 \\ 0, & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

que es una función evidentemente continua en el origen de coordenadas.

Algunas distribuciones χ^2 correspondientes a diferentes valores de ν se muestran en la siguiente figura:

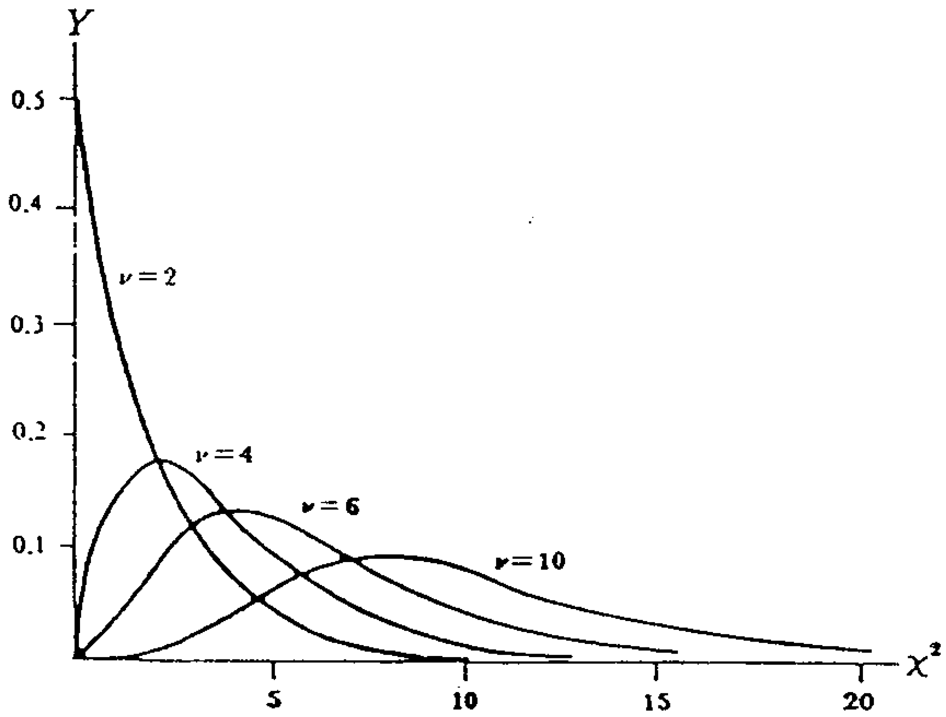


FIG. A-1.12. Distribuciones de Chi-cuadrado para diferentes valores de ν

El valor máximo que alcanza Y se presenta en $\chi^2 = \nu - 2$, para $\nu \geq 2$.

El número de grados de libertad **ν** viene dado por:

a) **ν = k - 1**, si las frecuencias esperadas pueden calcularse sin haber de estimar parámetros poblacionales con los estadísticos muestrales. Advirtiéndose que el restar 1 a *k* es a causa de la condición restrictiva (2) que denota que si son conocidas (k-1) de las frecuencias esperadas, la frecuencia restante puede ser determinada.

b) **ν = k - 1 - m**, si las frecuencias esperadas solamente pueden calcularse estimando *m* parámetros de la población a partir de los estadísticos muestrales.

3. Ensayos de significación

En la práctica, las frecuencias son esperadas de acuerdo con una hipótesis H_0. Si bajo esta hipótesis el valor calculado de χ^2 dado por las expresiones (1) o (3) es mayor que algún valor crítico (tal como puede ser $\chi^2_{0'95}$ o $\chi^2_{0'99}$, que son valores críticos en los niveles de significación del 0'05 y 0'01, respectivamente), se deduce que las frecuencias observadas difieren *significativamente* de las esperadas y se rechaza la hipótesis nula H_0 al nivel de significación correspondiente. En caso contrario, se aceptará, o al menos no se rechazará. Este procedimiento se llama *ensayo o prueba de Chi-cuadrado* de la hipótesis.

Se debe advertir que, en aquellas circunstancias en que χ^2 esté muy próximo a cero, ha de mirarse el procedimiento empleado con cierto recelo, ya que es raro que las frecuencias observadas concuerden suficientemente bien con las esperadas. Para examinar objetivamente estas situaciones, se puede determinar si el valor calculado de χ^2 es menor que: $\chi^2_{0'05}$ o bien $\chi^2_{0'01}$, respectivamente.

4. La prueba chi-cuadrado para la bondad del ajuste

La prueba Chi-cuadrado puede ser utilizada para determinar de qué manera ciertas distribuciones teóricas de probabilidad, como pueden ser la normal, binomial, hipergeométrica, γ ó β de Euler, etc., se ajustan a distribuciones empíricas, es decir, aquellas que se obtienen de los datos muestrales. En nuestro caso, como ya se ha visto, puede servir para determinar la bondad del ajuste de diversas funciones de variables psicológicas de interés.

5. Tablas de contingencia

La tabla de la figura anterior A-1.11., en la cual las frecuencias observadas ocupan una sola fila, es una *tabla de clasificación simple*. Ya que el número de columnas es k, también se llama tabla 1·k. Desarrollando esta idea, se llega a las *tablas de clasificación doble o tablas h·k*, en las cuales las frecuencias observadas ocupan **h** filas y **k** columnas. Estas tablas se llaman, normalmente, *tablas de contingencia*.

Correspondiéndose con cada frecuencia real u observada en una tabla de contingencia h·k, hay una *frecuencia teórica o esperada* que se calcula bajo alguna hipótesis y según las reglas clásicas de la probabilidad. Estas frecuencias, que ocupan las casillas de una tabla de contingencia, se llaman frecuencias elementales. La frecuencia total de cada fila o columna es la llamada *frecuencia marginal*.

Para estudiar el acuerdo entre las frecuencias observadas y las esperadas, se calcula, como ya se ha dicho, el estadístico:

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(o_j - e_j\right)^2}{e_j}, \quad (5)$$

donde la suma se extiende a todas las casillas de la tabla de contingencia; los símbolos o_j y e_j representan, respectivamente, las frecuencias observadas y las esperadas en la casilla j. Esta suma, que es análoga a (1), contiene h·k términos.

La suma de todas las frecuencias observadas se denota por N y es igual a la suma de todas las frecuencias esperadas.

Como antes, el estadístico (5) tiene una distribución muestral muy estrechamente aproximada a la dada por (4), con tal de que las frecuencias esperadas no sean demasiado pequeñas. El número de grados de libertad de esta distribución Chi-cuadrado viene dado, por h>1, k>1 por:

(a) **ν = (h-1) (k-1)**, si las frecuencias esperadas pueden calcularse sin tener que estimar parámetros poblacionales con los estadísticos muestrales.

(b) **ν = (h-1) (k-1) – m**, si las frecuencias observadas pueden solamente calcularse estimando **m** parámetros poblacionales con los estadísticos muestrales.

Los ensayos de significación para tablas *h·k* son análogos a los de las tablas *1·k*. Las frecuencias esperadas se buscan bajo una determinada hipótesis H_O. Una hipótesis normalmente supuesta es aquella en la cual las dos clasificaciones son independientes entre sí.

Las tablas de contingencia pueden extenderse a un número mayor de dimensiones. Así, por ejemplo, se pueden tener tablas *h·k·l* donde estén presentes tres clasificaciones.

6. Corrección de Yates para la continuidad

Cuando se aplican a datos discretos los resultados para distribuciones continuas, se deben hacer unas determinadas correcciones, como ya se ha señalado en el texto. Una corrección análoga es aplicable cuando se utiliza la distribución Chi-cuadrado. La corrección consiste en poner la expresión (1) de la siguiente forma:

$$\chi^2(\text{corregida}) = \frac{\left(|o_1 - e_1| - 0'5\right)^2}{e_1} + \frac{\left(|o_2 - e_2| - 0'5\right)^2}{e_2} + \ldots + \frac{\left(|o_k - e_k| - 0'5\right)^2}{e_k} = \sum_{j=1}^{K} \frac{\left(|o_j - e_j| - 0'5\right)^2}{e_j} \qquad (6)$$

que se conoce frecuentemente como *corrección de YATES.* También existe una modificación análoga de la formulación (4).

En general, la corrección se hace solamente cuando el número de grados de libertad es ν =1. En muestras grandes, se obtienen prácticamente los mismos resultados que la χ^2 no corregida, pero pueden aparecer ciertas dificultades en relación con los valores críticos. Para muestras pequeñas, donde cada frecuencia esperada se encuentra entre 5 y 10, puede ser que sea mejor comparar los valores de χ^2 corregido y de χ^2 no corregido. Si ambos valores conducen a la misma conclusión según una cierta hipótesis, tal como despreciarla en el nivel de significación del contraste del 0'05, raramente se presentan dificultades. Si conducen a conclusiones diferentes, se puede o bien incrementar las dimensiones muestrales o, si esto no fuera posible, se pueden utilizar métodos de probabilidad exactos, de acuerdo con la *distribución multinomial*. Esta última se basa en que si los sucesos E_1, E_2, .., E_k, pueden ocurrir con probabilidades respectivas: p_1, p_2, …, p_k, entonces la probabilidad de que: E_1, E_2, …, E_k, ocurran X_1, X_2, …, X_k, veces respectivamente, viene dada por la expresión:

$$(N!/X_1!\cdot X_2!\cdot\ldots\cdot X_k!)\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{x_k} = \frac{N!}{X_1!\cdot X_2!\ldots X_k!}\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k} = \frac{N!\cdot\prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i}}{\prod_{i=1}^{k} X_i!},$$

donde: $X_1 + X_2 + \ldots + X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i = N$.

Esta distribución teórica de probabilidad, que constituye una generalización de la conocida distribución binomial, se llama *distribución multinomial*, ya que la expresión anterior es el término general del desarrollo multinomial: $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)^N$. Los números teóricos a veces para que ocurran los sucesos: E_1, E_2, …, E_k, en N repeticiones, son: Np_1, Np_2,…, Np_k, respectivamente. Así pues, veamos que la distribución binomial permite resolver solamente aquellos problemas de pruebas sucesivas en los que cada resultado puede clasificarse en forma alternativa como un éxito o bien como un fallo. En el caso de tener más de dos rúbricas, siempre podremos reducirlas a dos si las combinamos, pero es probable que el mencionado proceder sea susceptible de arrojar por la borda mucha información valiosa desde el punto de vista psicológico. Para ello se dispone, precisamente, de la distribución multinomial, que sí tiene en cuenta todas esas rúbricas.

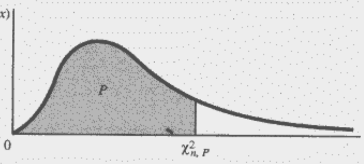
Tal como se presenta, la distribución multinomial no resulta muy cómoda para el cálculo de probabilidades, salvo cuando N es pequeña. El problema de hallar ahora una aproximación resulta considerablemente más difícil que en el caso de la distribución binomial.

La distribución χ^2 de Pearson aparece, naturalmente, en la teoría asociada a la suma de los cuadrados de las variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas según una distribución normal. Para llegar a obtener esta distribución hemos considerado una variable Z con distribución N (0, 1).

Conviene, en definitiva, para la realización de los cálculos correspondientes, el manejo de la tabla de percentiles de la distribución χ^2, a saber:

Esta tabla proporciona los valores $\chi^2_{n,\,P}$, tales que

$$P = P(X \leqslant \chi^2_{n,\,P}) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\chi^2_{n,\,P}} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$$

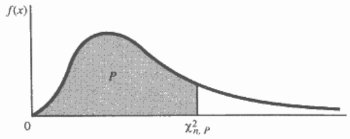


siendo X una variable aleatoria χ^2 de Pearson con n-grados de libertad.

n \ P	0,005	0,010	0,025	0050	0,100	0,250	0,500
1	0,0000	0,0001	0,0009	0,0039	0,0157	0,1015	0,454
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,5754	1,386
3	0,0717	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,213	2,366
4	0,2070	0,2971	0,4844	0,7107	1,064	1,923	3,357
5	0,4117	0,5543	0,8312	1,145	1,610	2,675	4,351
6	0,6757	0,8721	1,2373	1,635	2,204	3,455	5,348
7	0,9893	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,34
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,34
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,34
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,17	13,34
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,04	14,34
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,91	15,34
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	12,79	16,34
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,86	13,68	17,34
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,65	14,56	18,34
20	7,434	8,260	9,591	10,850	12,44	15,45	19,34
21	8,034	8,897	10,282	11,591	13,24	16,34	20,34
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,04	17,24	21,34
23	9,260	10,195	11,688	13,090	14,85	18,14	22,34
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,66	19,04	23,34
25	10,519	11,524	13,119	14,611	16,47	19,94	24,34
26	11,160	12,198	13,843	15,379	17,29	20,84	25,34
27	11,807	12,878	14,573	16,151	18,11	21,75	26,34
28	12,461	13,564	13,307	16,927	18,94	22,66	27,34
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,77	23,57	28,34
30	13,786	14,953	16,790	18,492	20,60	24,48	29,34
40	20,706	22,164	24,433	26,509	29,05	33,66	39,34
50	27,990	29,706	32,357	34,764	37,69	42,94	49,33
60	35,534	37,484	40,481	43,187	46,46	52,29	59,33
70	43,275	45,441	48,756	51,739	55,33	61,70	69,33
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,28	71,14	79,33
90	59,196	61,754	65,646	69,126	73,29	80,62	89,33
100	67,327	70,064	74,221	77,929	82,36	90,13	99,33

FIG. A-1.13. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (I).

$$P = P(X \leqslant \chi^2_{n,P}) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\chi^2_{n,P}} x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\, dx$$



n \ P	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,32	2,70	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	2,77	4,60	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	5,38	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,52
6	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96	26,12
9	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76	31,26
12	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	17,12	21,06	23,68	16,12	29,14	31,32	36,12
15	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,32
21	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64	55,48
28	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70
40	45,62	51,80	55,76	59,34	63,69	66,77	73,40
50	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49	86,66
60	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95	99,61
70	77,58	85,53	90,53	95,02	100,42	104,21	112,29
80	88,13	96,58	101,87	106,62	112,32	116,32	124,77
90	98,65	107,56	113,14	118,13	124,11	128,29	137,20
100	109,09	118,49	124,34	129,56	135,80	140,16	149,38

NOTA: Para valores grandes de los grados de libertad se puede utilizar la fórmula aproximada:

$$\chi^2_\alpha = n\left(1 - \frac{2}{9n} + Z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9n}}\right)^3$$

siendo Z_α la desviación normal y **n** el número de grados de libertad. Así, v. gr.:

χ^2_{99} = 60 · (1 – 0'00370 + 2'326 · 0'06086)^3 = 60 · (1'1379)^3 = 88'4

para el percentil 99 con 60 grados de libertad.

FIG. A-1.14. Percentiles de la distribución χ^2 de Pearson (II).

III. FUNCIONES DE DENSIDAD Y DE DISTRIBUCIÓN

1. Generalidades

En el estudio de diversas funciones aplicadas a la distribución de las variables psicológicas, se tratan profusamente los conceptos estadísticos de "función de distribución" y de "función de densidad".

Conviene, al respecto, recordar la definición de "función de distribución F(x) para una variable aleatoria continua", como:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\cdot du \qquad (1)$$

En los puntos de continuidad de f(x), el signo ≤ se puede, si se desea, sustituir por el <.

La probabilidad de que la variable **X** se halle entre **x** y **x+Δx** vendrá dada por la expresión:

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(u)\cdot du \quad ,$$

de tal manera que si **x** es suficientemente pequeño, tendremos aproximadamente :

$$P(x \leq X \leq x+\Delta x) = f(x)\cdot\Delta x$$

Por otra parte, veamos que al diferenciar ambos miembros de la expresión (1), obtendremos:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \, ,$$

para todos los puntos donde la función f(x) es continua, es decir, que la derivada de la función de distribución es, justamente, la "función de densidad".

En cálculo, la palabra "densidad" se emplea en relación con una distribución continua de materia a lo largo de una línea o en un plano; por esta razón, su uso relacionado con una distribución discreta de probabilidad puede parecer irregular. Y así, resulta usual en algunos tratadistas denominar "función de cuantía" a la referente a las variables discretas y "función de densidad" para las variables continuas. De hecho, para obtener la última expresión, hemos hecho servir la circunstancia -ya familiar en el cálculo infinitesimal- de que:

$$\frac{d\varphi}{dx} \int_{a}^{x} f(u)\cdot du = f(x)$$

Se trata de un caso especial de la denominada "regla de Leibnitz[2] para la diferenciación de una integral", en el caso de que los límites de integración dependen del parámetro **x**. En efecto, tenemos que:

$$\int_{a_1(x)}^{a_2(x)} F(u,\ x)\cdot du\ = \varphi\ (a_1, a_2, x)\ ,$$

de tal manera que si $a_1(x)$ y $a_2(x)$ son funciones derivables de **x**, la derivada de la integral habrá de calcularse como una función compuesta, mediante la aplicación de la "regla de la cadena", o sea:

$$\frac{d}{dx}\int_{a_1(x)}^{a_2(x)} F(u,\ x)\cdot du\ = \frac{\delta\ \varphi}{\delta\ x} + \frac{\delta\ \varphi}{\delta\ a_1}\times\frac{\delta\ a_1}{\delta\ x} + \frac{\delta\ \varphi}{\delta\ a_2}\times\frac{\delta\ a_2}{\delta\ x}\ ,$$

Por otra parte, tendremos que el primer sumando de esta expresión, considerando los límites de integración como fijos o constantes, será:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} = \frac{d}{dx}\int_{a_1}^{a_2} F(u,\ x)\cdot du\ = \int_{a_1}^{a_2} \lim_{\Delta x\to 0} F'x\,(u, x+\theta\times\Delta x)\cdot du\ = \int_{a_1}^{a_2} F'x\ (u,x)\cdot du\,,$$

Además, $\delta\varphi/\delta a_2$ (siendo a_2 el límite superior de integración) es, por las mismas propiedades de la integral, el valor que toma la función subintegral para: $u = a_2$, o sea:

$$\delta\varphi/\delta a_2\ = F(a_2,\ x).$$

[2] Leibnitz era hijo de un profesor de filosofía moral en Leipzig. Aprendió el mismo Latín y algo de Griego a la edad de 12 años, para así poder leer los libros de su padre. Desde 1661 al 1666 estudió leyes en la Universidad de Leipzig. En 1666 le fue rechazado el ingreso para continuar con un curso de doctorado, y fue a la Universidad de Altdorf, recibiendo su doctorado en leyes en el 1667. Continuó su carrera de leyes trabajando en la corte de Mainz hasta 1672. En ese año visitó París para tratar de disuadir a Luis XIV del ataque al territorio alemán. Permaneció en París hasta 1676, donde continuó practicando leyes. Sin embargo en París estudió matemáticas y física. Fue durante este periodo que las características fundamentales del cálculo fueron desarrolladas. Fue un verdadero precursor de la lógica matemática. Persiguiendo una idea que le acosa desde la juventud en pos de un *"alfabeto de los pensamientos humanos"* y de un *"idioma universal"* se propone el proyecto de construir *"una característica universal"*, especie de lenguaje simbólico capaz de expresar, sin ambigüedad, todos los pensamientos humanos, de manera que al surgir una controversia entre dos filósofos, éstos la zanjasen a la manera de los calculistas; bastaría en efecto, sentarse ante los ábacos, pluma en mano, y como buenos amigos decirse, en mutuo acuerdo: calculemos. Las ideas de Leibnitz, que contienen muchos conceptos de la lógica simbólica de hoy, no tuvieron entonces mayor influencia, pues quedaron inéditas hasta el siglo XX. Igual destino tuvieron ideas semejantes esbozadas durante el siglo XVIII y comienzos del XIX. Agreguemos que las ideas de Kant, de gran influencia en su tiempo y para quien no era necesaria "ninguna nueva invención en la lógica", han contribuido sin duda al estancamiento de esta disciplina. Las cosas cambiaron cuando llegó Boole, el cual se convirtió en el verdadero fundador de la lógica simbólica. El resto de su vida, desde 1676 hasta su muerte, permaneció en Hannover. El 21 de noviembre de 1675 escribió un manuscrito usando por primera vez la notación de la integral $\int f(x)\cdot d(x)$. En el mismo manuscrito estaba dada la regla para la diferenciación. Esta regla fue dada a conocer casi dos años después, en julio de 1677.

Por último, $\delta\varphi/\delta a_1$ es, análogamente, igual a $-F(a_1, x)$, dado que el cambio de signo queda justificado por la inversión de los límites de integración, siempre considerando que:

$$\int_{a_1}^{a_2} = -\int_{a_2}^{a_1}$$

, con lo que a_1 pasará a ser el límite superior de integración.

De esta manera, si los límites de integración a_1 y a_2 son, a la vez, funciones derivables de **x**, y siguen verificándose las hipótesis del problema, para cada **x** de un cierto intervalo y para cada **u** del intervalo cerrado entre $a_1(x)$ y $a_2(x)$, la derivada de la integral, será:

$$\frac{d}{dx}\int_{a_1(x)}^{a_2(x)} F(u,\ x)\cdot du = \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \frac{dF}{dx} + F\left[a_2(x),\ x\right]\frac{da_2}{dx} - F\left[a_1(x),\ x\right]\frac{da_1}{dx}$$

donde a_1, a_2 y F se suponen funciones derivables con respecto a la variable **x**.

2. Interpretaciones gráficas

Si f(x) es la función de densidad para una variable aleatoria estadística X entonces podremos representar: y = f(x) gráficamente por una curva como la de la Fig. A-1.15. Ya que $f(x)\geq 0$, la curva no puede estar nunca por debajo del eje de abscisas **x**. El área total limitada por la curva y el eje **x** ha de ser 1 debido a la conocida propiedad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1.$$

Ello constituye una proposición matemática del hecho de que una variable aleatoria de valor real debe hallarse comprendida siempre entre $-\infty$ y $+\infty$. Entones, definimos la probabilidad de que X se encuentre entre a y b como:

$$P\,(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\cdot dx \quad .$$

Podemos demostrar que esta definición cumple con los axiomas clásicos de las probabilidades, lo cual no haremos aquí por razones obvias de espacio y de oportunidad.

Una función f(c) que cumple los requisitos anteriores se denomina "función de probabilidad o distribución de probabilidad" para a una variable aleatoria continua, pero más frecuentemente se conoce como "función de densidad de probabilidad" o, simplemente, como "función de densidad". Cualquier función que cumpla las propiedades anteriores, automáticamente es una función de densidad.

Geométricamente, la probabilidad de que X se halle comprendida entre los valores **a** y **b**, es decir, P(a<X<b), se representa por el área sombreada de la siguiente figura. A saber:

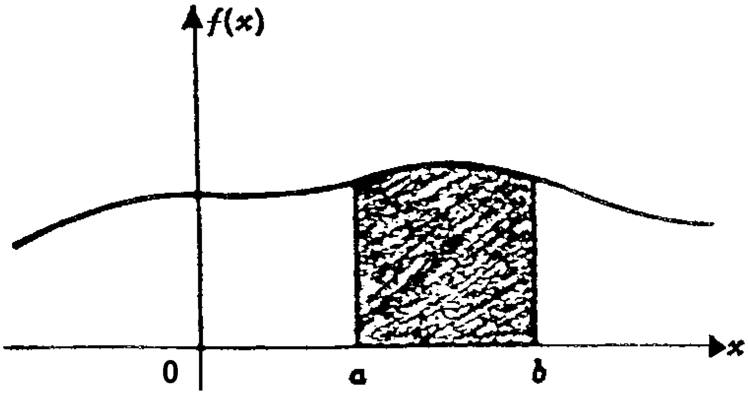


FIG. A-1.15. Representación de la probabilidad: a<X<b

La función de distribución: $F(x) = P(X \leq x)$ es una función monotónicamente creciente que aumenta desde cero hasta 1 y se representa por una curva como la de la siguiente figura (SPIEGEL, 1981; pp. 42 y 43).

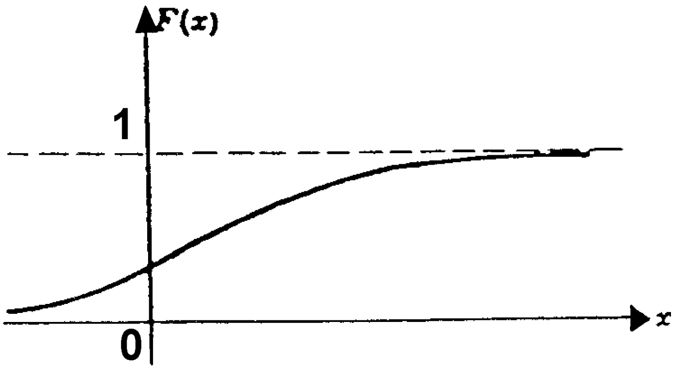


FIG. A-1.16. Representación gráfica de la función de distribución

Como la integral definida $\int_a^b f(x) \cdot dx$ representa gráficamente el área encerrada bajo la curva y = f(x) y los valores **a** y **b** del eje de abscisas, entonces a la probabilidad: $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ se le puede dar la misma interpretación.

En las denominadas "distribuciones conjuntas", las ideas anteriores se generalizan a dos o más variables aleatorias estadísticas. El caso típico más usual es el de dos variables aleatorias que son ambas discretas o bien ambas continuas. En los casos en que una variable es discreta y la otra es continua, se pueden realizar, sin excesivos problemas, las modificaciones pertinentes. También pueden hacerse generalizaciones a los casos de más de dos variables.

3. Ajustes a una distribución "gamma" y/o exponencial

3.1. Distribución "gamma"

Según el problema que se presente, sería posible buscar una distribución teórica de probabilidad más apropiada que la gaussiana anteriormente explicitada, como por ejemplo la distribución de probabilidad "gamma", cuya variable psicológica **x** posee una función de densidad del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}\cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}, & \forall x > 0 \\ 0 & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

, siendo $\forall\ \alpha > 0$ y también $\beta > 0$.

De hecho, la cantidad $\Gamma(\alpha)$ es un símbolo que representa el valor de la función "gamma" generalizada de Euler en el punto α. Esta función, como ya se sabe, viene definida por la integral euleriana de 2ª especie:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}\cdot dx \quad . (\forall\alpha > 0)$$

Vamos, ahora, a demostrar que la media y la varianza de la distribución gamma están dadas por $\mu = \alpha\cdot\beta$ y $\sigma^2 = \alpha\cdot\beta^2$, respectivamente. En este caso, la función generatriz de momentos y la función característica están dadas, respectivamente, por:

$$M(t) = (1 - \beta\cdot t)^{-\alpha} \text{ , y } \phi(\omega) = (1 - \beta\cdot i_{\omega})^{-\alpha}$$

Se tiene que:

$$\mu = \int_0^{\infty} x\left[\frac{x^{\alpha-1}\cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\right]dx = \int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}\cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}dx$$

Reemplazando $(x/\beta) = t$, tenemos la media:

$$\mu = \frac{\beta^{\alpha}\cdot\beta}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha}\cdot e^{-t}\cdot dt = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot\beta$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2\left[\frac{x^{\alpha-1}\cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\right]dx = \int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha+1}\cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}dx$$

Por otra parte, reemplazando $(x/\beta) = t$, tenemos lo siguiente:

$$E(X^2) = \frac{\beta^{\alpha+1}\cdot\beta}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha+1}\cdot e^{-t}\cdot dt = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2) = \beta^2\cdot(\alpha+1)\cdot\alpha$$

ya que: $\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\cdot\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1)\cdot\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$. Por tanto, la varianza buscada, será:

$$\sigma^2 = E(X^2)-\mu^2 = \beta^2(\alpha+1)\cdot\alpha-(\alpha\cdot\beta)^2 = \alpha\cdot\beta^2$$

Además, se demuestra fácilmente, integrando por partes, que:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

Si α es un número entero positivo (natural), esta relación de recurrencia ofrece el resultado factorial: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$, como comprobaremos más adelante, razón por la que a la función gamma se la llama, a veces, "función factorial", siempre y cuando α sea un número natural (entero positivo).

Integrando por partes en la expresión:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}\cdot dx$$

$$u = x^{\alpha-1},\ dv = e^{-x}\cdot dx;\ \ du = (\alpha-1)\cdot x^{\alpha-2}\cdot dx,\ v = -e^{-x}$$

se obtiene:

$$\Gamma(\alpha) = \left[-e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}\right]_0^{\infty} + (\alpha-1)\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{\alpha-2}\cdot dx = (\alpha-1)\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{\alpha-2}\cdot dx = (\alpha-1)\cdot\Gamma(\alpha-1)$$

Reiterando el procedimiento:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k)\cdot\Gamma(\alpha-k)$$

En el caso particular de que α sea un número natural (entero positivo), la aplicación de la expresión anterior conduce a:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! \quad (\forall\alpha \in N)$$

puesto que:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\cdot dx = 1$$

Una expresión que se presenta con frecuencia, es la que se obtiene mediante el cambio de variable: $x = t^2$. En efecto:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{\alpha-1}\cdot dx = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\cdot t^{2\alpha-2}\cdot 2t\cdot dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cdot t^{2\alpha-1}\cdot dt$$

El cambio $x = m\cdot t$, conduce análogamente a:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha - 1} \cdot dx = \int_0^{\infty} e^{-mt} \cdot (mt)^{\alpha - 1} \cdot m \cdot dt = m^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-mt} \cdot t^{\alpha - 1} \cdot dt$$

Si ahora hacemos el cambio de variable: $\beta = \frac{1}{a}$, diremos que una variable aleatoria X, de tipo continuo, sigue una distribución gamma (*) de parámetros $\boldsymbol{\alpha}$ y **a**, siendo α, a $\in \Re^2$ y α > 0 y a > 0, si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha - 1} \cdot e^{-ax}, & \forall x > 0 \\ 0 & , \forall x \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Abreviadamente lo indicaremos por:

$$X \rightarrow \Gamma(\alpha, a)$$

Veamos que la expresión (1) está bien definida y por tanto es una función de densidad. En efecto, para x > 0, f(x) es positiva; y además la integral de la función de densidad, en todo el campo de variación, es la unidad, para lo cual bastará con hacer el cambio de variable: a·x = y, en la expresión (1), y tendremos:

$$\int_0^{\infty} \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha - 1} \cdot e^{-ax} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} a^{\alpha} \cdot \left(\frac{y}{a}\right)^{\alpha - 1} \cdot e^{-y} \cdot \frac{dy}{a} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha - 1} \cdot e^{-y} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha) = 1$$

Una propiedad importante de la función de probabilidad gamma (Γ) es que:

$$\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \pi}.$$

Para α = ½, se obtiene: $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})} = \pi$, de donde: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Para valores grandes de α es posible la aplicación de la fórmula asintótica de Stirling, de gran aplicabilidad en el cálculo de límites, a saber:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha! \cong \sqrt{2\pi\alpha} \cdot \alpha^{\alpha} \cdot e^{-\alpha}$$

La representación gráfica de varias distribuciones gamma se presenta en la figura siguiente, para diferentes valores de los parámetros α y a. Así:

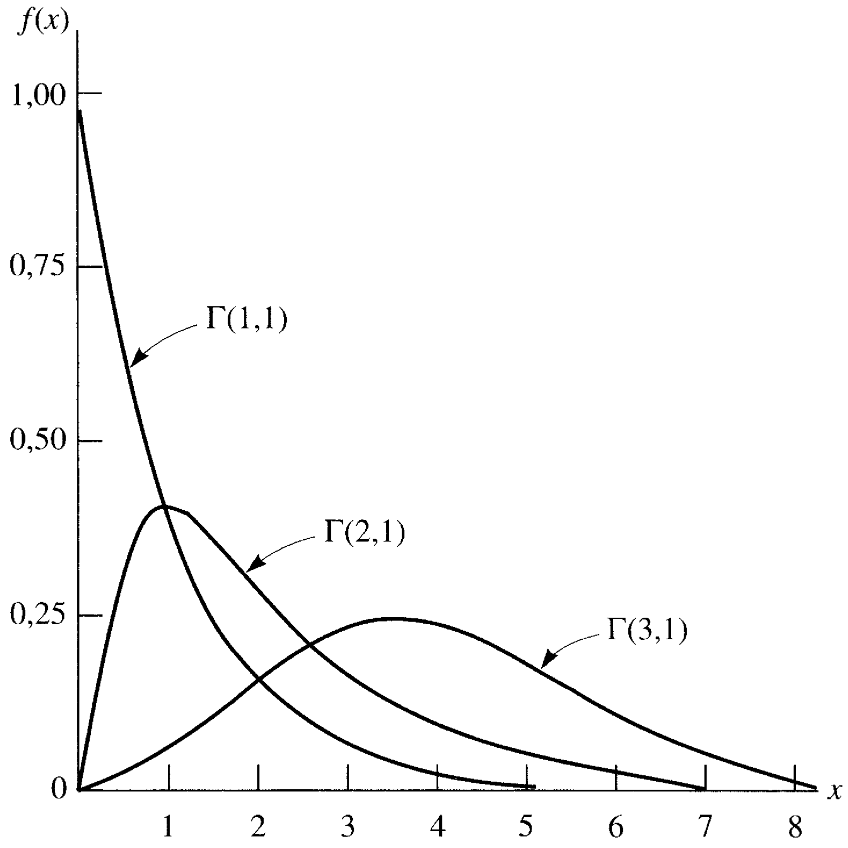


FIG. A-1.17. Representación gráfica de la función de densidad de distribuciones Γ(α,a)

Como puede observarse, la función de densidad de la Γ(α,a) presenta una forma, para α ≤ 1, que difiere de la forma que presenta para α ≥ 1, pues para valores de α > 1 presenta los correspondientes máximos en los puntos:

$$x = \frac{\alpha - 1}{a}$$

lo cual se comprueba fácilmente sin más que buscar los máximos de la función de densidad.

Al parámetro α se le suele llamar *parámetro forma* y al parámetro a, *parámetro escala*.

3.2. Características de la distribución "gamma"

3.2.1. *Función de distribución, media y varianza*

La función de distribución correspondiente a una variable aleatoria X, distribuida según una Γ(α,a) es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \dfrac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x x^{\alpha - 1} \cdot e^{-ax} \cdot dx \,, & \forall x > 0 \\ 0 & , \forall x \leq 0 \end{cases}$$

El valor de esta expresión no es fácil de obtener, aunque cuando α es un número entero positivo, la integral se puede calcular por partes y las probabilidades se obtienen de forma aproximada.

Para llegar a obtener la media calcularemos previamente el “momento de orden r” respecto al origen de coordenadas u ordinario, o sea:

$$E\left[X^r\right] = \int_0^{\infty} x^r \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^{\infty} x^r \cdot \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha - 1} \cdot e^{-ax} \cdot dx =$$

$$= \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha + r - 1} \cdot e^{-ax} \cdot dx = \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + r)}{a^{\alpha + r}} = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{a^r \cdot \Gamma(\alpha)}$$

La expresión anterior nos permite fácilmente deducir la media buscada sin más que sustituir r = 1, con lo que:

$$E\left[X\right] = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{a \cdot \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{a}$$

De un modo parecido, haciendo en este caso r = 2, procederemos para la obtención de la varianza, resultando lo siguiente:

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - (E\left[X\right])^2 = \frac{(\alpha + 1)\alpha}{a^2} - \frac{\alpha^2}{a^2} = \frac{\alpha}{a^2} \,,$$

y una desviación típica: $\sigma = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{a}$.

Con el fin de simplificar el cálculo de estas probabilidades, Pearson tabuló la función gamma incompleta para diferentes valores del parámetro α.

La *función gamma incompleta* viene dada por la expresión:

$$F^*(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y y^{\alpha - 1} \cdot e^{-y} \cdot dy \quad , \quad \forall y > 0$$

que aparece tabulada en la siguiente tabla, donde se ha hecho $\alpha = p$, así:

	p																			
y	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,5**	**4,0**	**4,5**	**5,0**	**5,5**	**6,0**	**6,5**	**7,0**	**7,5**	**8,0**	**8,5**	**9,0**	**9,5**	**10,0**
1	0,8427	0,6321	0,4276	0,2642	0,1509	0,0803	0,0402	0,0190	0,0085	0,0037	0,0015	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—
2	0,9545	0,8647	0,7385	0,5940	0,4506	0,3233	0,2202	0,1429	0,0886	0,0527	0,0301	0,0166	0,0088	0,0045	0,0023	0,0011	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000
3	0,9857	0,9502	0,8884	0,8009	0,6938	0,5768	0,4603	0,3528	0,2601	0,1847	0,1266	0,0839	0,0538	0,0335	0,0203	0,0119	0,0068	0,0038	0,0021	0,0011
4	0,9953	0,9817	0,9540	0,9084	0,8438	0,7619	0,6674	0,5665	0,4659	0,3712	0,2867	0,2149	0,1564	0,1107	0,0762	0,0511	0,0335	0,0214	0,0133	0,0081
5	0,9984	0,9933	0,9814	0,9596	0,9248	0,8753	0,8114	0,7350	0,6495	0,5595	0,4696	0,3840	0,3061	0,2378	0,1803	0,1334	0,0964	0,0681	0,0471	0,0318
6	0,9995	0,9975	0,9926	0,9826	0,9652	0,9380	0,8994	0,8488	0,7867	0,7149	0,6364	0,5543	0,4724	0,3937	0,3210	0,2560	0,1999	0,1528	0,1144	0,0839
7	0,9998	0,9991	0,9971	0,9927	0,9844	0,9704	0,9488	0,9182	0,8777	0,8270	0,7670	0,6993	0,6262	0,5503	0,4745	0,4013	0,3329	0,2709	0,2163	0,1695
8	0,9999	0,9997	0,9989	0,9970	0,9932	0,9862	0,9749	0,9576	0,9331	0,9004	0,8589	0,8088	0,7509	0,6866	0,6179	0,5470	0,4762	0,4075	0,3427	0,2834
9	1,0000	0,9999	0,9996	0,9988	0,9971	0,9938	0,9880	0,9788	0,9648	0,9450	0,9184	0,8843	0,8425	0,7932	0,7373	0,6761	0,6112	0,5443	0,4776	0,4126
10	—	1,0000	0,9998	0,9995	0,9988	0,9972	0,9944	0,9897	0,9821	0,9707	0,9547	0,9329	0,9048	0,8699	0,8281	0,7798	0,7258	0,6672	0,6054	0,5421
11	—	—	0,9999	0,9998	0,9995	0,9988	0,9975	0,9951	0,9911	0,9849	0,9756	0,9625	0,9446	0,9214	0,8922	0,8568	0,8153	0,7680	0,7157	0,6595
12	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9989	0,9977	0,9951	0,9924	0,9873	0,9797	0,9689	0,9542	0,9349	0,9105	0,8806	0,8450	0,8038	0,7576
13	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9989	0,9980	0,9963	0,9935	0,9893	0,9830	0,9741	0,9620	0,9460	0,9255	0,9002	0,8698	0,8342
14	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9990	0,9982	0,9968	0,9945	0,9910	0,9858	0,9784	0,9684	0,9551	0,9379	0,9166	0,8906
15	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991	0,9984	0,9972	0,9953	0,9924	0,9881	0,9820	0,9737	0,9626	0,9482	0,9301
16	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9976	0,9960	0,9936	0,9900	0,9850	0,9780	0,9687	0,9567
17	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9988	0,9979	0,9966	0,9946	0,9916	0,9874	0,9816	0,9739
18	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9990	0,9982	0,9971	0,9954	0,9929	0,9894	0,9846
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9991	0,9985	0,9975	0,9961	0,9941	0,9911
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9995	0,9992	0,9987	0,9979	0,9967	0,9950
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9989	0,9982	0,9972
22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9991	0,9985
23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9992
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996

El valor de la función de distribución F(x) de la $\Gamma(\alpha,a)$ es igual al de la función gamma incompleta en el punto $y = a\cdot x$, es decir:

$$F(x) = F^*(ax)$$

3.2.2. *Función generatriz de momentos factoriales*

Aplicando la definición de función generatriz de momentos, tenemos:

$$g_x(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_0^\infty e^{tx}\cdot\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-ax}\cdot dx = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\cdot e^{-(a-t)x}\cdot dx$$

y haciendo el cambio de variable:

$$(a - t)x = u \ , \ dx = \frac{du}{a - t}$$

se tiene:

$$= \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{1}{(a-t)^\alpha}\cdot u^{\alpha-1}\cdot e^{-u}\cdot du = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)}{(a-t)^\alpha} = \frac{a^\alpha}{(a-t)^\alpha} = \left(1-\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}$$

3.2.3. *Propiedad reproductiva*

Si $X_1, ..., X_n$ son n variables aleatorias independientes, distribuidas según una $\Gamma(\alpha_i, a)$, para $\forall i = 1, ..., n$, entonces la variable aleatoria:

$$Y = X_1 + ... + X_n$$

sigue una distribución:

$$\Gamma(\alpha_1 + ... + \alpha_n, a)$$

<u>Demostración</u>:

Calculamos la función generatriz de momentos de la variable aleatoria Y, con lo que:

$$g_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(X_1+...+X_n)}] = E[e^{tX_1}] \ ..... \ E[e^{tX_n}] =$$

$$= (1- t/a)^{-\alpha_1} \ ..... \ (1- t/a)^{-\alpha_n} = (1- t/a)^{-(\alpha_1+...+\alpha_n)}$$

que es la función generatriz de momentos de una distribución: $\Gamma(\alpha_1+...+\alpha_n,a)$.

Y teniendo en cuenta la conocida propiedad de la unicidad de la función generatriz de momentos, resulta que:

$$Y \rightarrow \Gamma(\alpha_1 + ... + \alpha_n, a)$$

es decir, que la distribución $\Gamma(\alpha,a)$ es reproductiva respecto al parámetro α.

Proposición:

Si la variable aleatoria X se distribuye según una N(0,1), entonces la variable aleatoria $Y = X^2$ se distribuye según una $\Gamma = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Demostración:

La función de distribución de la variable aleatoria Y en el punto x, para x>0, será:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_x(\sqrt{x}) - F_x(-\sqrt{x})$$

en donde F_x es la función de distribución de la variable aleatoria X, N(0,1).

Derivando la expresión de la función de distribución, tendremos la función de densidad; en efecto:

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_x(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_x(-\sqrt{x}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{2\sqrt{x}\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

que, como vemos, es la función de densidad de una $\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Proposición:

Si $X_1, ..., X_n$ son n variables aleatorias independientes y distribuidas según una N(0,1), entonces la variable aleatoria:

$$Y = X^2{}_1 + ... + X^2{}_n$$

sigue una distribución:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$$

La demostración de la presente proposición resulta inmediata, pues basta con tener en cuenta una proposición anteriormente expuesta y la propiedad reproductiva de la distribución gamma respecto al parámetro α.

Cuando el parámetro α es entero, a la distribución $\Gamma(\alpha,a)$ se le conoce también con el nombre de *distribución de Erlang*, a la cual nos hemos referido en el capítulo 8 de nuestro libro, y entonces se relaciona con la distribución de Poisson, de manera que si el número de sucesos aleatorios e independientes que ocurren en un intervalo de tiempo es una variable aleatoria de Poisson de parámetro **a** (es decir con media de ocurrencia constante **a**), entonces la variable que representa el tiempo, hasta que ocurra el α-ésimo suceso de Poisson, sigue una distribución $\Gamma(\alpha,a)$.

El ejemplo práctico que se plantea en el siguiente anexo de este libro, por lo que se refiere a la distribución de los cocientes intelectuales de los diferentes individuos componentes de un colectivo de superdotados, podría presentar una distribución de probabilidad del tipo $\Gamma(3,1)$ o similar, si se observa la anterior figura A-1.17.

3.3. Distribución exponencial

También se le suele llamar *distribución exponencial negativa*.

Diremos que una variable aleatoria X, de tipo continuo, sigue una **distribución exponencial** de parámetro **a**, siendo $a \in \Re$ y $a > 0$, si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax} & , \ \forall x > 0 \\ 0 & , \ \forall x \leq 0 \end{cases}$$

Abreviadamente lo indicaremos por:

$$X \rightarrow \text{Exp}(a)$$

4. Ajuste a una distribución "beta"

4.1. Conceptualización

Análogamente a como hicimos para la distribución gamma, definiremos previamente la función beta como una función del análisis matemático que puede resultar útil para la resolución de problemas de "uniformidad psicológica" u otros relacionados con la Psicología en general. Así pues, definimos la *función beta generalizada de p y q, β (p,q)* como dada por la integral euleriana de 1ª especie:

$$\beta\,(p,\ q) \;=\; \int_0^1 x^{\,p-1}\cdot(1-x)^{\,q-1}\cdot dx, \quad p > 0, \quad q > 0$$

que es convergente para valores de x en el intervalo (0,1), siendo p,q números reales positivos, no necesariamente enteros.

Se verifica que:

$$\beta(p,q) = \beta(q,p)$$

y para probar esto, basta hacer el cambio de variable:

$$1 - x = y \quad , \quad dx = - dy$$

En efecto:

$$\beta\,(p,\ q) \;=\; \int_0^1 x^{\,p-1}\cdot(1-x)^{\,q-1}\cdot dx \;=\; \int_1^0 -\,(1-y)^{\,p-1}\cdot y^{\,q-1}\cdot dy \;=$$

$$=\; \int_0^1 y^{\,q-1}\cdot(1-y)^{\,p-1}\cdot dy \;= \beta\,(q,\ p)$$

También se verifica que:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1)$$

Esta función β(p,q) la utilizaremos para definir la "distribución de probabilidad beta". La demostración de la fórmula anterior (1), $\forall$ p, q $\in \{R^+\}$, se deduce teniendo en cuenta que:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}\cdot x^{2p-1}\cdot dx\right)\cdot\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}\cdot x^{2q-1}\cdot dy\right) =$$

$$= 4\int_0^\infty x^{2p-1}\cdot e^{-x^2}\cdot dx\cdot\int_0^\infty y^{2q-1}\cdot e^{-y^2}\cdot dy \;=\; 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}\cdot y^{2q-1}\cdot e^{-x^2-y^2}\cdot dx\cdot dy$$

que es una integral doble extendida a todo el cuadrante positivo. Pasando de coordenadas cartesianas rectangulares a coordenadas polares, con el cambio de variable correspondiente, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\theta \\ y &= r\cdot\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{, y entonces:}$$

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) \;=\; 4\int\int r^{2p-1}\cdot\cos^{2p-1}\theta\cdot r^{2q-1}\cdot\operatorname{sen}^{2q-1}\theta\cdot e^{-r^2\cdot\cos^2\theta - r^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta}\cdot|J|\cdot dr\cdot d\theta.$$

El determinante funcional jacobiano $|J|$ de la transformación, que deberá tomarse siempre en valor absoluto, será:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\delta x}{\delta r} & \dfrac{\delta x}{\delta \theta} \\ \dfrac{\delta y}{\delta r} & \dfrac{\delta y}{\delta \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\, r\cdot \mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cdot\cos\theta \end{vmatrix} = r\cdot\cos^2\theta + r\cdot\mathrm{sen}^2\theta = r \neq 0 \text{ , } \forall (r,\theta) \neq (0,0)$$

Obsérvese que el elemento de área en coordenadas polares corresponde a la superficie de un recinto plano limitado por las dos circunferencias con centro en el origen y radios: r, r+dr, y las dos semirrectas que parten del origen y forman con el eje de abscisas OX los ángulos: θ, θ + dθ. La expresión anterior quedará así:

$$4\int\int r^{2(p+q)-2}\cdot e^{-r^2}\cdot\cos^{2p-1}\theta\cdot\mathrm{sen}^{2q-1}\theta\cdot r\cdot dr\cdot d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\cdot\mathrm{sen}^{2q-1}\theta\cdot d\theta \times 2\int_0^{\infty} r^{2(p+q)-1}\cdot e^{-r^2}\cdot dr = \beta(q,p)\cdot\Gamma(p+q)$$

y como ya hemos visto que: β(q,p) = β(p,q), se tendrá:

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \text{ c.s.q.d.}$$

Diremos ahora que una variable aleatoria X, de tipo continuo, sigue una **distribución beta** de parámetros p y q, siendo $p,q \in \Re^2$ y $p > 0$ y $q > 0$, si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1} & , \forall x/\ 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{en el resto} \end{cases} \qquad (2)$$

O bien, teniendo en cuenta la expresión (1):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1} & , \forall x/\ 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{en el resto} \end{cases}$$

Abreviadamente lo indicaremos por:

$$X \rightarrow \beta(p,q)$$

Observemos que esta función de densidad está definida en el intervalo (0,1), lo cual nos indica que esta familia de distribuciones beta es muy útil para representar modelos probabilísticos que representan proporciones que se pueden presentar en algunos problemas que plantea la Psicología, en general.

La expresión (2) está correctamente definida como una función de densidad, pues para $0 < x < 1$, $f(x)$ es positiva y además muy fácilmente se comprueba que:

$$\int_0^1 \frac{1}{\beta\,(p,\ q)} x^{\,p-1} \cdot (1\ -\ x)^{\,q-1}\, dx\ \ = 1$$

La representación gráfica de la función de densidad, como vemos en la figura A-1.18., toma formas muy diferentes para los distintos valores de los dos parámetros p y q. Esto nos permite seleccionar la forma de la función de densidad, pues bastará elegir adecuadamente los parámetros para ajustarse convenientemente a ella. Así pues:

- Cuando $p = q$ la función de densidad es simétrica, siendo el eje de simetría la recta de ecuación: $x = \frac{1}{2}$.
- Cuando $p = q = 1$ la distribución $\beta(p,q) \equiv U(0,1)$.
- Cuando $p < q$ es asimétrica a la derecha.
- Cuando $p > q$ es asimétrica a la izquierda.
- Cuando $p < 1$ y $q \geq 1$ es decreciente y cóncava.
- Cuando $q < 1$ y $p \geq 1$ es creciente y cóncava.
- Cuando $p > 1$ y $q > 1$ tiene un solo máximo relativo o local.
- Cuando $p < 1$ y $q < 1$ tiene un solo mínimo relativo o local.

4.2. Características

4.2.1. Función de distribución

La expresión de la función de distribución es:

$$F(x)\ = P(X\ \leq\ x)\ = \begin{cases} 0 & ,\forall\ x\ \leq\ 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\beta(p,\ q)} x^{\,p-1} \cdot (1\ -\ x)^{\,q-1}\, dx & ,\ 0 < x < 1 \\ 0 & ,\forall\ x\ \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

De manera análoga a como ocurría en la distribución $\Gamma(\alpha)$, aquí existen también tablas correspondientes a la *función beta incompleta*[3], que nos facilitan el cálculo de los valores de la función de distribución.

[3] La función beta incompleta es:

$$\int_0^x x^{p-1} \cdot (1 - x)^{q-1} \cdot dx,\ \forall\ x\ /\ 0 < x < 1$$

Las diferentes representaciones gráficas de la función de distribución β(p,q), para los valores más usuales de los parámetros **p** y **q**, pueden verse a continuación:

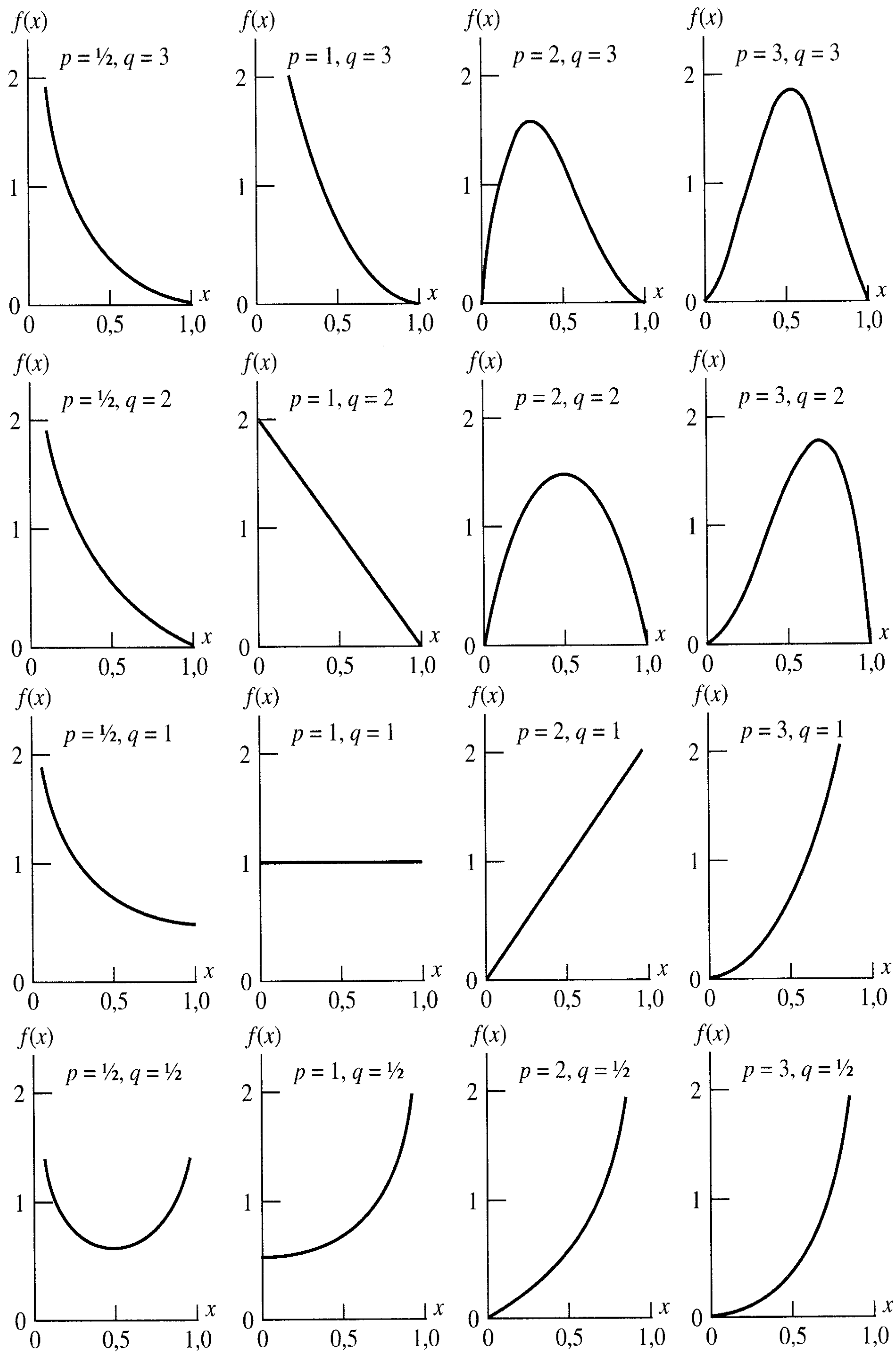


FIG. A-1.18. Representación gráfica de la función de densidad de la distribución β(p,q)

4.2.2. Media

Calculamos los *momentos de orden r* respecto al origen, para poder obtener fácilmente la media y la varianza. Esto es:

$$E\left[X^r\right] = \int_0^1 x^r \cdot \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 x^{p+r-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx =$$
$$= \frac{\beta(p+r,q)}{\beta(p,q)} = \frac{\Gamma(p+r)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+r+q)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\text{-}\Gamma(q)} = \frac{(p+r-1)\ldots.(p+1)\cdot p}{(p+r+q-1)\ldots.(p+q)} \quad (4)$$

Expresión a partir de la cual podemos obtener la *media* o *esperanza matemática* sin más que hacer r = 1:

$$E\left[X\right] = \frac{p}{p+q}$$

4.2.3. Varianza

Obteniendo previamente el momento de orden 2, para lo cual hacemos r = 2, tenemos:

$$E\left[X^2\right] = \frac{(p+1)p}{(p+q+1)(p+q)}$$

Luego la *varianza* es:

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 = \frac{(p+1)\cdot p}{(p+q+1)\cdot(p+q)} - \frac{p^2}{(p+q)^2} =$$
$$= \frac{p\cdot q}{(p+q+1)\cdot(p+q)^2}$$

5. La distribución hipergeométrica

En algunas de las distribuciones estudiadas en Psicología considerábamos que se realizaban repeticiones independientes de experimentos o pruebas de Bernouilli, en donde la probabilidad de éxito permanecería constante en cada repetición, es decir, las repeticiones independientes de las pruebas eran equivalentes a la selección de una muestra con devolución o reemplazamiento. Sin embargo, esta circunstancia no se presentará siempre, y cuando el muestreo o selección de los elementos de la muestra (lo cual equivale a la repetición de las pruebas de Bernouilli en la distribución binomial) se lleva a cabo sin reemplazamiento o reposición la probabilidad de éxito no permanece constante como sucedía en la binomial, luego la función de probabilidad de la variable aleatoria X no responde a la distribución binomial sino a una nueva distribución que denominamos “hipergeométrica”.

Definimos la variable aleatoria psicológica hipergeométrica X como el número de elementos que pertenecen a una de las subpoblaciones (consideramos la primera) cunado tomamos una muestra aleatoria sin reemplazamiento de tamaño *n* de la población total *N*. Para obtener la *función de probabilidad* de la variable aleatoria hipergeométrica X tenemos que calcular la probabilidad de que dicha variable tome sus diferentes valores *x*, es decir, P(X = x) y utilizaremos, para ello, la expresada regla de Laplace[4], en donde la probabilidad venía dada por el cociente entre el número de casos favorables partido por el número de casos posibles. Los casos posibles son todas las muestras de tamaño n obtenidas de la población total o universo de tamaño N, que serán las combinaciones sin repetición: $C_{N,n} = C^n_N$

En estadística, la **distribución hipergeométrica** es una distribución de probabilidad discreta con tres parámetros discretos: *N*, *d* y *n* cuya función de probabilidad es:

$$P(X = x) = \frac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Aquí, el número combinatorio $\binom{a}{b}$ se refiere al coeficiente binomial, o al número de combinaciones sin repetición posibles al seleccionar *b* elementos de un total *a*.

Esta distribución se refiere a un espacio muestral donde hay elementos de 2 tipos posibles. Indica la probabilidad de obtener un número de objetos *x* de uno de los tipos, al sacar una muestra aleatoria sin reposición de tamaño *n*, de un total de *N* objetos, de los cuales *d* son del tipo requerido. Dicha función está bien definida; así pues, las probabilidades son no negativas y, además, la suma de todas ellas (probabilidad total) es igual a la unidad.

El valor esperado o esperanza matemática de una variable aleatoria *X* de distribución hipergeométrica es el siguiente:

$$E[X] = (n)\left(\frac{d}{N}\right)$$

, y su varianza viene dada por:

$$\text{Var}[X] = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)(n)\left(\frac{d}{N}\right)\left(1-\frac{d}{N}\right)$$

[4] Puesto que todos los posibles elementos de la población (casos posibles) son equiprobables.

Amén de otras aplicaciones de interés en Psicología, esta distribución de probabilidad posee gran utilidad en los sondeos de opinión pública, con lo que podemos realizar una encuesta para intentar conocer si los individuos de una población tienen o no intención de votar en unas elecciones de tal manera que el número de individuos, de una muestra sin reemplazamiento, que tienen intención de votar sigue una distribución hipergeométrica.

En la práctica, la aproximación de una distribución hipergeométrica a una distribución binomial no requiere que la población N sea excesivamente grande. Así pues, consideramos que existe una buena aproximación cuando $N>50$ y $n \leq 0'1 \cdot N$, aunque otros autores consideran, para esta aproximación, valores diferentes.

En el posterior anexo 2 de nuestro libro incluimos tres ejemplos de aplicación psicológica de la distribución de probabilidad hipergeométrica (véase "tercer problema").

6. La distribución F de Snedecor y el análisis de la varianza

La técnica del análisis de la varianza, introducida por Fisher, en principio, para su aplicación a la investigación agrícola y biológica, se ha convertido en un instrumento poderoso que puede ser utilizado en cualquier campo de actividades, como en el caso de la Psicología que hoy nos ocupa.

Al estudiar el contraste de hipótesis se contempla cómo se puede decidir entre la igualdad o desigualdad de dos medias, correspondientes a dos poblaciones que pueden representar dos procesos de fabricación, dos características de una persona, etc.

Ahora bien: ¿qué hacer si en lugar de dos hay que comparar entre sí tres, cuatro, o en general **k** poblaciones?. Pues bien, el problema se resuelve precisamente mediante el denominado "análisis de la varianza".

De su aplicación original a la experimentación agrícola queda una terminología típica ("tratamientos", "parcelas", "bloques", ...) pero, repetimos, su aplicación es universal y cada vez se hace más extensa, con eficientes aplicaciones en el campo de la Psicología como en el caso del ejercicio que se desarrolla al final del anexo 2.

En otros apartados de nuestro trabajo definimos la distribución χ^2 con **n** grados de libertad como una determinada función de **n** variables aleatorias normales e independientes.

La distribución continua F de Fisher-Snedecor[5] puede definirse de forma análoga, a saber: se dice que una variable aleatoria tiene una distribución F con **m** grados de libertad en el numerador y **n** grados de libertad en el denominador cuando dicha variable es:

$$F_{m,n} = \frac{\frac{1}{m}\chi^2_m}{\frac{1}{n}\chi^2_n}$$

es decir, cuando es el cociente de las medias de la suma de los cuadrados de **m** y **n** variables normales (0, 1) e independientes.

Sin profundizar más en la forma o las propiedades de esta distribución, digamos que el cálculo de probabilidades se realiza, como en el caso de las distribuciones normal o de la χ^2, mediante las tablas de doble entrada existentes al efecto que figuran al final del anexo 2, extraídas del libro titulado "Ejercicios de Estadística Aplicada", de J. Santos y A. Muñoz, citado en la bibliografía.

La aplicación fundamental de la distribución F es la comparación de varianzas, es decir, el contraste de hipótesis referentes a varianzas de poblaciones normales e independientes, y a la comparación de medias de varias poblaciones, que constituye precisamente el "análisis de la varianza".

El problema teórico del análisis de la varianza con un solo factor se plantea en los términos siguientes:

Sean r poblaciones, todas ellas con distribuciones normales, de medias μ_1, μ_2 ... μ_r, y todas con la misma varianza, σ^2, e independientes. Basándose en los resultados de r muestras, de tamaños n_1, n_2 ... n_r, extraídas aleatoriamente de cada una de las poblaciones, se desea contrastar la hipótesis nula de que todas las medias son iguales: $\mu_1 = \mu_2 = ... \mu_r$, contra la alternativa de que existen, al menos, dos medias diferentes.

A las poblaciones que se comparan se les suele llamar "tratamientos", debido a que originalmente la técnica se utilizó para comparar, por ejemplo, productividades de plantas sometidas a tratamientos agrícolas (abonados, riegos, labores de arada, aplicaciones fitosanitarias, variedades de semillas, etc.) diferentes.

[5] Sobre el gran estadístico Fisher ya nos hemos referido con anterioridad. George Waddell Snedecor (1882 -1974) nació en Memphis, Tennessee, EUA. Estudió matemáticas y física en las Universidades de Alabama y Michigan y posteriormente se convirtió en profesor de la Universidad Estatal de Iowa. Trabajó en conjunto con Ronald Fisher y de dicha colaboración surgieron muchos de los resultados en los que se basa el análisis de la varianza. Uno de sus textos más famosos es el de *Cálculo e Interpretación del Análisis de Varianza y Covarianza*, que publicó en 1934.

El procedimiento del análisis de la varianza consiste en suponer que la variabilidad observada, en el conjunto de todas las muestras, se debe a dos posibles causas: una, la variabilidad real de todas las poblaciones, es decir, la variación de origen aleatorio o "error", y la segunda, a la posible diferencia que exista realmente entre las poblaciones o "tratamientos".

IV. LA UNIFORMIDAD EN LA DISTRIBUCIÓN DE LAS VARIABLES PSICOLÓGICAS

1. El concepto de "coeficiente de uniformidad psicológica"

La uniformidad es una magnitud que caracteriza a la distribución de cualquier variable psicológica por un colectivo de individuos determinado. **Por ello, hemos creído conveniente ampliar el concepto de "uniformidad psicológica" al estudio del comportamiento de ciertas variables psicológicas**. Los nuevos coeficientes de uniformidad aquí propuestos se podrán utilizar, indistintamente, para la *evaluación* psicológica de los colectivos analizados.

Por lo que se refiere a los antecedentes, veamos que ya en el libro de este mismo autor titulado *Análisis territorial (División, organización y gestión del territorio)*, citado en la bibliografía, y concretamente en su capítulo 12 ("Uniformidad y equilibrio del territorio"), se propone y define el concepto de "coeficiente de uniformidad territorial" como medida de la uniformidad de la distribución de una variable socioeconómica por un cierto territorio, precisamente de sentido contrario a su grado de variabilidad. Pues bien, creemos que una extensión de dicho concepto a la evaluación de la distribución de las variables psicológicas resulta perfectamente posible y provechosa.

El proceso de cálculo que aquí se propone comienza con la determinación del coeficiente de variación (CV) de Pearson (que, como es sabido, trátase de una medida abstracta de dispersión relativa de los valores de la variable aleatoria estadística, profusamente utilizada) de los cocientes intelectuales (CI) de todos los individuos pertenecientes a un colectivo determinado; de hecho, en el siguiente anexo lo hemos aplicado a un colectivo de superdotados. Es obvio que, desde los respectivos puntos de vista, el colectivo en cuestión se hallará tanto más equilibrado desde el punto de vista, por ejemplo, de la distribución de los cocientes intelectuales de sus diferentes miembros, cuanto menores sean los valores de su CV ("coeficiente de variación" de Pearson) referido a la variable CI o a cualquier otra, que toma valores para cada uno de ellos. Destaca, del coeficiente elegido como medida de la variabilidad, su adimensionalidad, es decir, su independencia de las unidades de medida, permitiendo la comparación entre grupos diferentes de datos, lo que no resulta posible establecer mediante el exclusivo empleo de la varianza o de su raíz cuadrada: la desviación típica o "standard" de la correspondiente distribución de frecuencias.

Al respecto, y como medida de la uniformidad en la distribución de los cocientes intelectuales o de cualquier otra variable psicológica en un colectivo determinado, pueden utilizarse los diversos coeficientes que propondremos a continuación (expresados en %), de sentido contrario a la variabilidad antedicha.

El primero de ellos podría ser el siguiente:

CU_1 = 100(1 - CV), de gran sencillez y aplicabilidad, siendo: $CV = \sigma/\overline{X}$, en que $\overline{X}$ es la media aritmética de los valores de la variable analizada CI y σ es su desviación típica o "standard" (desviación cuadrática media).

El significado físico del CV se deduce claramente si aceptamos que todos los valores de la variable CI, o cualquier otra significativa elegida para su aplicación, se distribuyen de acuerdo con la curva campaniforme de una distribución normal y, por lo tanto, se tendrá lo siguiente en base a los conceptos ya señalados en el epígrafe inicial del presente anexo:

a) Prácticamente, todos los valores observados se hallarán comprendidos en el entorno: $(1 \pm 3\cdot CV)\overline{X}$.

b) Aproximadamente, el 95% de las observaciones se encuentran comprendidas en el entorno: $(1 \pm 2\cdot CV)\overline{X}$.

c) Si se toman las n/4 observaciones de valores más bajos del total de los **n** valores medidos de la variable en cuestión (cuyo valor superior será el primer cuartil Q_1 de la distribución de frecuencias), su media aritmética será igual a: $q_{25}=(1-1'27\cdot CV)\overline{X}$.

d) El 68'27% de las observaciones realizadas estarán comprendidas en el intervalo: $(1 \pm CV)\overline{X}$.

Otros coeficientes de uniformidad psicológica podrían definirse a partir de las siguientes expresiones:

$CU_2 = (Q_1/\overline{X}) \times 100$ (de menor aplicabilidad) y **$CU_3 = (q_{25}/\overline{X}) \times 100$,**

siendo q_{25}, como ya se ha visto, el valor medio del cuarto inferior de los valores de la variable psicológica analizada.

En relación a la uniformidad psicológica a la que nos venimos refiriendo en el presente epígrafe, veamos que la propiedad más interesante de la distribución normal de los valores de la variable psicológica analizada es que si se toma el 25% de los valores más bajos, su valor medio, es decir, lo que hemos denominado q_{25}, valdrá, según se deduce del estudio de la distribución normal:

$$q_{25} = (1 - 1'27\cdot CV)\cdot\overline{X} \quad ,$$

con lo que el coeficiente de uniformidad CU_3 anteriormente definido, tomará el valor:

$$CU_3 = 100\ (1 - 1'27 \cdot CV) < CU_1$$

Si suponemos, v.gr., un cierto colectivo en el que analizando la distribución de las puntuaciones individuales en un *test* de clave silábica (en el que una serie de sílabas sin sentido deben ser substituidas por otras) obtenemos un CV = 0'32, veamos que:

$$CU_1 = 100\ (1 - 0'32) = 68'00\%$$
$$CU_3 = 100\ (1 - 1'27 \times 0'32) = 59'36\% \ ,$$

aunque dependería de las circunstancias el escoger uno u otro índice para la medida de la uniformidad psicológica que se analiza, lo que constituye una responsabilidad del psicólogo experimentador o de la reglamentación que pudiera elaborarse al respecto. De hecho, el CU_3 siempre ofrecerá, expresado en %, por su propia configuración analítica, valores absolutos más bajos que el correspondiente CU_1, tanto si se trata de valores positivos como negativos (véase, al respecto, el gráfico de la figura A-1.19.). Por otra parte, según se deduce del estudio ya realizado de la distribución normal, se cumplirá que: $Q_1 = (1 - 0'68 \cdot CV) \cdot \overline{X}$, que será el intervalo correspondiente al 50% de los casos o "rango intercuartílico" (Q_3 - Q_1) de la distribución de probabilidad, con lo que también:

$$\mathbf{CU_2 = 100\ (1 - 0'68 \cdot CV),}$$

que, lógicamente, será el mayor de los cuatro coeficientes de uniformidad psicológica aquí definidos (ver figura A-1.19.).

Así pues, y en base a dichos coeficientes, resulta un $\overline{CU}$ (medio) de : Z = -0'9375 (media aritmética), o bien Z = -0'9117 (media geométrica), por lo que podríamos considerar, como medida "standard" de la uniformidad de un colectivo cualquiera, un $\overline{CU} = 100\ (1 - 0'92 \cdot CV)$, cuyo intervalo, bajo la hipótesis de normalidad en la distribución de los valores de la variable psicológica analizada, abarcaría un 64'24% de los casos, según puede comprobarse mediante las tablas de las figuras más completa de áreas y ordenadas bajo la función normal, que adjuntamos en este mismo anexo (ver figuras A-1.8., A-1.9. y A-1.10).

En el ejemplo anteriormente propuesto, se tendrá:

$$\begin{cases} CU_2 = 100\ (1 - 0'68 \times 0'32) = 78'24\% \\ \overline{CU} = 100\ (1 - 0'92 \times 0'32) = 70'56\% \end{cases}$$

pudiendo, en la práctica, escoger cualquiera de ellos como medida de la uniformidad psicológica que deseamos realizar.

2. Otros coeficientes de uniformidad psicológica

2.1. Basados en la desviación media absoluta

La "desviación media" es la media aritmética de las desviaciones absolutas de los **n** valores de la variable psicológica analizada respecto a un promedio cualquiera. Si tomamos, como dicho promedio, la media aritmética o esperanza matemática $\overline{X} = \alpha$, su expresión será, en el caso de una distribución de frecuencias unitarias:

$$DM = \frac{|x_1 - \overline{X}| + |x_2 - \overline{X}| + ... + |x_n - \overline{X}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{X}|}{n}$$

(este valor resultaría mínimo si en vez de considerar la $\overline{X}$ hubiéramos tomado la mediana $M_e = Q_2$ o valor central de la correspondiente distribución de frecuencias).

Por otra parte, en el caso de operar con frecuencias agrupadas o conjuntas, lo que sucederá cuando se opte por agrupar los valores de la variable psicológica analizada por intervalos de clase, como hemos hecho en el ejemplo práctico desarrollado en el posterior anexo nº: 2, se tendrá que:

$$n_1 + n_2 + ... + n_h = \sum_{i=1}^{h} n_i = n$$

$$DM = \frac{|x_1 - \overline{X}| \cdot n_1 + |x_2 - \overline{X}| \cdot n_2 + ... + |x_h - \overline{X}| \cdot n_h}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{h} |x_i - \overline{X}| \cdot n_i}{n} = \sum_{i=1}^{h} |x_i - \overline{X}| \cdot f_i$$

Pues bien, en base a ella, podríamos definir el siguiente nuevo coeficiente de uniformidad:

$$\mathbf{CU_4 = 100\ (1 - DM/\overline{X})}\ ,$$

que, en realidad, resulta similar al CU_1, habiendo substituido la desviación típica o "standard" por la desviación media absoluta, como medida absoluta de dispersión, por el colectivo analizado, de los valores de la variable aleatoria estadística (puntuación de un examen, tiempo de latencia, cociente intelectual, ...). Normalmente, para un mismo colectivo, se cumplirá que:

$$\boxed{CU_3 < CU_1 < \overline{CU} < CU_4 < CU_2 < CU_5}$$

estando los valores de todos estos coeficientes de uniformidad limitados o acotados superiormente en el 100%, según podrá comprobarse, de modo gráfico, en la figura A-1.19.

2.2. Basados en otras medidas de dispersión y concentración

2.2.1. Índice de Gini y curva de Lorenz

Teóricamente, la distribución perfecta de la variable psicológica tendrá lugar cuando, por ejemplo, en un determinado colectivo, todos sus componentes tengan el mismo cociente intelectual, lo que podría constituir un *desideratum* ideal pero, en cualquier caso, presenta una medida de la uniformidad en la distribución del CI por dicho colectivo. En este caso, al representar los porcentajes acumulados del CI frente a los porcentajes acumulados de los individuos, se obtendrá la recta de ecuación: $q_i = p_i$, coincidente con la bisectriz del primer cuadrante, y el índice de GINI valdrá 0. Obviamente, este índice se encuentra más próximo a 1 cuanto peor está distribuida, por el colectivo, la variable psicológica que estamos evaluando.

En los libros de A. PULIDO SAN ROMÁN[6] y de A. ALCAIDE INCHAUSTI[7], podemos encontrar presentaciones diferentes de la medida que hemos empleado para parametrizar la concentración de los CI en el ejemplo práctico desarrollado en el siguiente anexo: el índice de GINI. Para interpretar correctamente su significado, resulta suficiente con observar que G varia entre los valores extremos 0 y 1, tomando el valor mínimo o nulo cuando cada $\mathbf{p_i}$ es igual a su correspondiente $\mathbf{q_i}$, lo que provoca la anulación del numerador de su expresión definitoria; es decir, cuando cualquier porcentaje de individuos posee un porcentaje igual del cociente intelectual sobre el global. O bien, dicho de otra manera, G = 1 tendría lugar en el supuesto teórico o hipotético de que todas las q_i fuesen nulas, excepto la última o k-ésima (correspondiente al último intervalo de clase considerado) que concentraría todo el cociente intelectual del colectivo que nos ocupa, lo que señalaría la menor uniformidad u homogeneidad en la distribución posible.

Todos estos conceptos pueden precisarse mucho mejor representando en un diagrama la función: $p_i= f(q_i)$, o bien su inversa: $q_i = \varphi (p_i)$, que permite obtener una línea poligonal construida por encima (o por debajo) de la diagonal de un cuadrado que tiene un extremo en el centro u origen de coordenadas cartesianas rectangulares y el otro extremo en el punto de coordenadas (100, 100). Esta figura, denominada CURVA DE LORENZ, frecuentemente usada en el Análisis estructural económico, pondrá de manifiesto una distribución de los CI más equitativa en la medida que la línea poligonal resultante (que tenderá a convertirse en una curva al aumentar el número de puntos en estudio) se sitúe más próxima a la citada diagonal (o bien G más próximo a 0) y también recíprocamente[8].

---

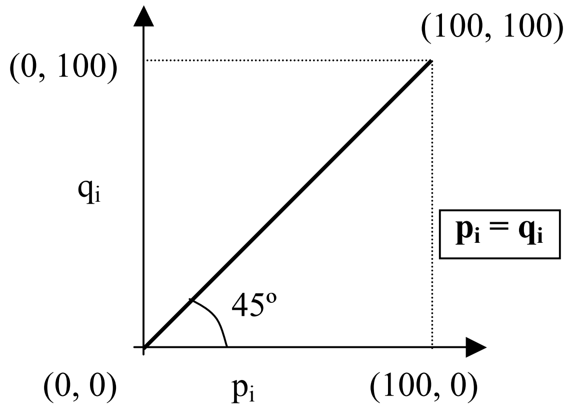
[6]*Estadística y Técnicas de Investigación Social*. Ed. ANAYA. Madrid, 1971, pág. 111.

[7]*Estadística Económica*. Ed. SAETA. Madrid, 1973, pág. 294.

[8]Así pues, cuanto más pequeña sea el área rayada comprendida entre la curva de Lorenz y la diagonal del primer cuadrante del círculo, mejor será también la distribución de la variable psicológica que es objeto de nuestro estudio.

Otra forma de observar la curva de Lorenz es estimando el área de la superficie que se encuentra comprendida entre la curva y la diagonal del primer cuadrante (la recta p = q). Esa superficie se denomina **área de concentración**. El **índice Gini** constituye un índice de concentración de los valores de la variable aleatoria estadística o psicológica y equivale al doble del área de concentración. Su valor estará siempre comprendido entre cero y uno.

Se considera, en definitiva, que existe equidistribución de los CI cuando $p_i = q_i$, y en este caso, la expresada curva de Lorenz adopta la configuración gráfica siguiente:



o sea, se trata de una recta que descansa sobre la bisectriz del primer cuadrante del círculo.

2.2.2. Índice de Williamson

Por otra parte, en el mismo orden de ideas, juzgamos recomendable la utilización, a los efectos de medir el grado de concentración/dispersión de la variable psicológica en estudio, del denominado "índice de Williamson", que nos ofrecerá una buena información en cuanto al nivel de agrupación de los valores de la variable aleatoria estadística (q_i) en relación al valor central o media de la correspondiente distribución de frecuencias.

En el caso que se desarrolla en el anexo nº: 2 de nuestro libro, la variable psicológica estudiada es el CI global máximo $(CI)_i$ que poseen los individuos que forman parte de cada uno de los 8 intervalos de clase en que hemos considerado particionado el conjunto del colectivo (ver el ejemplo práctico que hemos propuesto en dicho anexo). Por esta razón, la fórmula pertinente, en relación al número de estos individuos, vendrá dada por la expresión:

$$W_{CI,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{(CI)_i}{n_i} - \frac{CI}{n}\right)^2 \times \frac{n_i}{n}}{\frac{CI}{n}}}, \forall\ i \in (1, 2, ..., 8),\ \text{donde}\ :$$

$(CI)_i$ = cociente intelectual global máximo de cada intervalo de clase.
n_i = número de individuos de cada intervalo de clase.
CI = cociente intelectual global máximo del conjunto del colectivo.
n = número total de individuos del colectivo estudiado.

De hecho, los valores de la variable psicológica **$(CI)_i$** vienen dados, en las tablas auxiliares correspondientes de cálculo, como:

$$(CI)_i = x_i \cdot n_i$$

2.2.3. Índice de concentración de Lorenz

A mayor abundamiento, desarrollaremos el cálculo de este nuevo índice desde el mismo diagrama o curva que hemos propuesto anteriormente. Tal como se ha venido considerando, se obtendrán siempre curvas cóncavas hacia las **y** positivas, y que se hallan situadas por debajo de la diagonal del cuadrado que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (100,100).

Así pues, tendremos:

$$L = \frac{(a - q_1) + (2a - q_2) + ... + [(n-1)a - q_{n-1}]}{a + 2a + ... + (n-1)a} \quad (1),$$

donde **a** es la media aritmética de los porcentajes de los CI de los diferentes individuos correspondientes a cada intervalo de clase, o sea:

$$X_i = \frac{x_i \bullet n_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i \bullet n_i} \times 100 \quad ; \quad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{q_n}{n} \quad ;$$

(en nuestro caso, como se verá posteriormente, se tiene: n = 8).

De esta manera, se cumplirá también que:

$$q_1 = X_1$$
$$q_2 = X_1 + X_2$$
$$q_3 = X_1 + X_2 + X_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$$\text{o sea:} \quad q_i = \sum_{j=1}^{i} X_i$$

que es justamente el criterio que hemos seguido para la elaboración de la tabla correspondiente. **Debe tenerse bien presente que, en este caso, la ordenación de los valores de las X_i es preciso realizarla de menor a mayor**.

Desarrollando la expresión anterior (1), obtendremos:

$$L = \frac{a + 2a + \ldots + (n-1)a - (q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1})}{a + 2a + \ldots + (n-1)a} =$$

$$= 1 - \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1}}{a + 2a + \ldots + (n-1)a} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{\frac{n(n-1)}{2} a} =$$

$$= 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} \quad ,$$

ya que: 1 + 2 + ... + (n-1) = n·(n-1)/2 , dado que se trata de la adición de los (n-1) primeros términos consecutivos de una progresión aritmética de razón igual a la unidad (demostrable por inducción completa), y además: $n \cdot a = q_n$, por la propia definición que hemos considerado de la media aritmética **a**.

Veamos, entonces, los valores que adopta este nuevo índice en los casos extremos posibles. Efectivamente, **si la concentración del CI es máxima**, tendremos que:

$$X_1 = X_2 = X_{n-1} = 0, \quad \text{y también}: q_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{0}{q_n} = 1 \quad ,$$

dado que: $\sum_{i=1}^{n-1} q_i = 0$.

Sin embargo, **si la concentración del CI es mínima**, o sea, la distribución de la misma variable psicológica es teóricamente perfecta desde el punto de vista estadístico (no necesariamente debe suceder esto en la realidad, sino más bien acontecerá muy raramente, habida cuenta de las diferencias existentes entre los individuos de cualquier colectivo por lo que se refiere al comportamiento de sus variables psicológicas), se tendrá lo siguiente:

$$X_1 = X_2 = ... = X_n = a,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_i = \frac{n(n-1)}{2} a$$

en cuyo caso, el índice de concentración de Lorenz será:

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{n \bullet (n-1) \bullet a}{2 \bullet n \bullet a} = 1 - 1 = 0$$

De hecho, estos valores extremos del índice analizado se corresponden con similares valores del índice de Gini anteriormente estudiado. Podemos ver que, cuando: L = 0 ($X_1=X_2=...=X_n=a$), sucede justamente que: $q_n = n \cdot a$, razón por la cual la curva pertinente es el segmento recto coincidente con la diagonal del cuadrado al que nos hemos referido con anterioridad. En el caso de la concentración máxima, resulta: L = 1 ($X_1=X_2=...=X_{n-1}=0$), y la curva poligonal de Lorenz, que constituye un triángulo rectángulo, viene dada por los dos lados normales o perpendiculares del cuadrado construido al objeto de trazar el diagrama en cuestión. Obviamente, cuanto más se aproxime la curva a la diagonal relacionada, más perfecta será -al menos desde el punto de vista estadístico- la distribución de la variable psicológica en estudio. Incluso podemos dar una interpretación geométrica del índice de Lorenz de esta manera: el numerador de la fórmula (1) se puede considerar como la adición de las áreas de (n-1) rectángulos de base igual a la unidad y altura: $(h \cdot a - q_h)$, $\forall h \in [1,2,...,(n-1)]$. El denominador, en este caso, es la suma de las áreas de (n-1) rectángulos de base unidad y altura: $h \cdot a$, $\forall h \in [1,2,...,(n-1)]$. Si observamos lo que representa la suma de estos rectángulos, deduciremos que el numerador de la expresión (1) es el área comprendida entre la curva poligonal de Lorenz y la diagonal del cuadrado, mientras que el denominador es precisamente el área de la mitad de dicho cuadrado[9].

Este índice es equivalente al anteriormente estudiado de Gini y obliga a la realización del cálculo de la superficie rayada de la figura, comprendida entre la diagonal y la correspondiente curva o poligonal de Lorenz. Un valor aproximado es el que se obtiene mediante la aplicación de la fórmula basada en los

[9]Así pues, también el índice de concentración de Lorenz será tanto más pequeño cuanto menor sea el valor del área limitada por la diagonal del primer cuadrante y la misma curva poligonal.

porcentajes acumulados, que resulta muy empleada en los trabajos prácticos. En nuestro caso, como se verá posteriormente, la fórmula (1) tomará la configuración simplificada (con n = 8 y q_n = 100):

$$L = 1 - \frac{2}{7} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{100} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{7} q_i}{350}$$

3. Otras características interesantes de la distribución de las variables psicológicas

3.1. Ecuaciones de ligadura entre los coeficientes de uniformidad

Las medidas de tendencia central ofrecen una idea aproximada del comportamiento de una serie estadística. No obstante, no resultan suficientes para expresar sus características: una misma media puede provenir de valores cercanos a la misma o resultar de la confluencia de datos estadísticos enormemente dispares. Para conocer en qué grado las medidas de tendencia central son representativas de la serie, se han de complementar con medidas de dispersión como la varianza o la desviación típica.

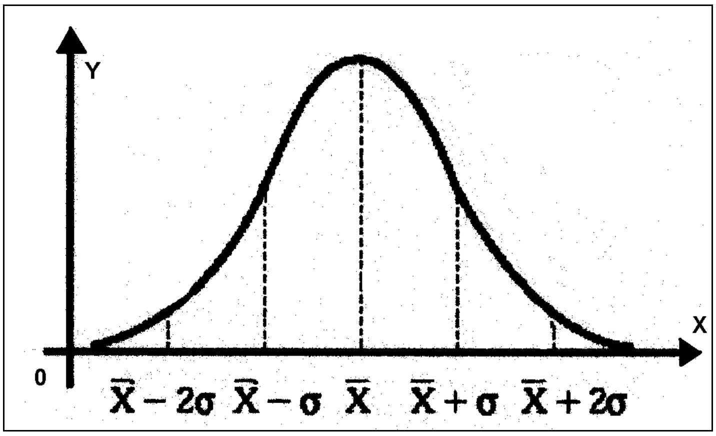
Normalmente, la Psicología experimental también se ocupa de la dispersión de la distribución de las variables psicológicas, es decir, si los datos aparecen sobre todo alrededor de la media o si están distribuidos por todo el rango. Una medida bastante usada de la dispersión es la diferencia entre dos percentiles P_r, por lo general entre el 25 y el 75, que equivale al rango intercuartílico. El percentil **r** es un número tal que un **r** por ciento de los datos son menores o iguales que **r**. En particular, los percentiles 25 y 75 se denominan cuartiles inferior o primer cuartil (Q_1) y superior o tercer cuartil (Q_3) respectivamente. La desviación típica o "standard" es otra medida absoluta de la dispersión, pero resulta más útil su empleo que los percentiles, pues está definida en términos aritméticos.

Las medidas de centralización ayudan, en definitiva, a determinar el «centro de gravedad» de una distribución estadística. Para describir el comportamiento general de la serie se necesita, sin embargo, una información complementaria para saber si los datos están dispersos o agrupados. Así, las **medidas de dispersión** pueden definirse como los valores numéricos cuyo objeto es analizar el grado de separación de los valores de una serie estadística con respecto a las **medidas de tendencia central** consideradas.

Las medidas de dispersión, básicamente, son de dos grandes tipos:

· **Medidas de dispersión absoluta**: como recorrido, desviación media, varianza y desviación típica, que se usan en los análisis estadísticos generales.

· **Medidas de dispersión relativa**: que determinan la dispersión de la distribución estadística independientemente de las unidades en que se exprese la variable. Se trata de parámetros más técnicos y utilizados en estudios específicos, y entre ellas se encuentran los coeficientes de apertura, el recorrido relativo, el coeficiente de variación (índice de dispersión de Pearson), el índice de dispersión mediana y el coeficiente de uniformidad aquí definido.



La distribución de probabilidad normal, o campana de Gauss, es una función simétrica con respecto a la ordenada o frecuencia máxima (con la media aritmética en el centro de la serie) con un grado de dispersión bajo, dado que la mayoría de los valores de la variable psicológica en estudio estarán comprendidos dentro del entorno cuyo centro es la media aritmética y de radio la desviación típica, como puede comprobarse de la contemplación del gráfico anterior.

Evidentemente, existen en la metodología estadística otras medidas del grado de concentración y/o dispersión de las variables psicológicas que pueden emplearse eficazmente en la medida de la uniformidad psicológica (como, por ejemplo, el recorrido "semi-intercuartílico", el "coeficiente de apertura", el "recorrido relativo", etc...), debiéndose tener en cuenta que, para distribuciones moderadamente asimétricas, se pueden aplicar, con buena aproximación, las fórmulas empíricas siguientes (donde Q_1 y Q_3 son, respectivamente, el primer y tercer cuartil de la correspondiente distribución de frecuencias):

$$DM \approx (4/5)\cdot\sigma \quad ; \quad (Q_3 - Q_1)/2 \approx (2/3)\cdot\sigma$$

, que no son más que consecuencias directas del hecho de que, para distribuciones normales, se tiene que la desviación media absoluta DM y el "rango semiintercuartílico" son, respectivamente, iguales a 0’7979 y 0’6745 veces la desviación típica o "standard" σ.

Desde esta perspectiva, y para distribuciones aproximadamente normales con suficiente número de valores de la variable psicológica en estudio ($n \geq 30$), los coeficientes de uniformidad anteriormente definidos pueden representarse, geométricamente, por rectas o funciones lineales cuya variable independiente o explicativa sea el coeficiente de variación de Pearson CV. En concreto, se tendrá que:

$$CU_4 = 100\,(1 - 0{,}7979 \cdot s/\overline{X}) \approx 100 \cdot (1 - 0{,}80 \cdot CV)$$

La representación gráfica resultante será la siguiente:

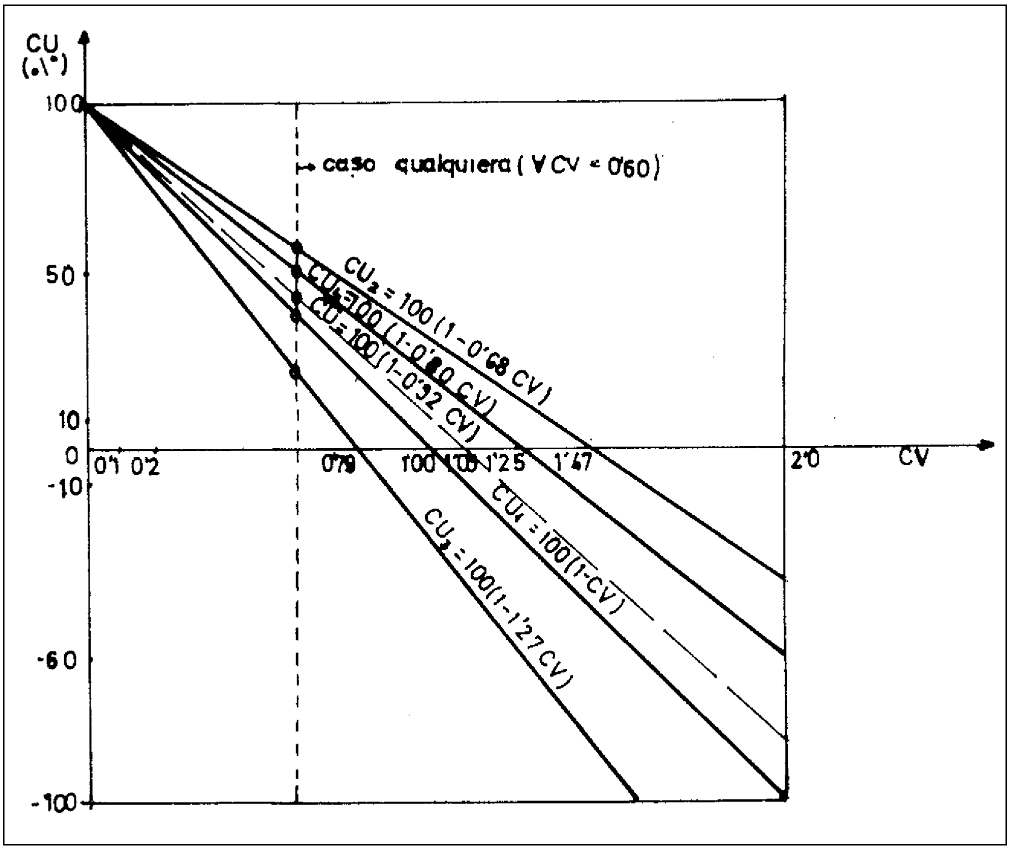


FIG. A-1.19. Coeficientes de uniformidad en función del coeficiente de variación de Pearson

A su vez, las relaciones que ligan entre sí los diferentes coeficientes de uniformidad psicológica aquí definidos, pueden deducirse del siguiente modo:

$$\boxed{\begin{array}{c} CU_1 = 100\,(1 - CV) = 100 - 100 \cdot CV \\ CU_2 = 100\,(1 - 0{,}68 \cdot CV) = 100 - 68 \cdot CV \\ CU_3 = 100\,(1 - 1{,}27 \cdot CV) = 100 - 127 \cdot CV \\ CU_4 = 100\,(1 - 0{,}80 \cdot CV) = 100 - 80 \cdot CV \\ \overline{CU} = 100(1 - 0{,}92 \cdot CV) = 100 - 92 \cdot CV \end{array}}$$

De donde:

$CU_1 - CU_3$	$= 100 – 100·CV - 100 + 127·CV$	=	$27·CV$
$CU_3 - CU_4$	$= 100 - 127·CV - 100 + 80·CV$	=	$-47·CV$
$CU_1 - CU_4$	= ....(27·CV – 47·CV)	=	$-20·CV$

Se tendría que:

$$CU_1 / CU_3 = (1- CV) / (1 - 1{,}27·CV) \quad ;$$
$$CU_1 - 1{,}27 · CV · CU1 = CU_3 - CV · CU_3 \quad ;$$
$$CU_1 - CU_3 = 27·CV = 1{,}27·CV · CU_1 - CV · CU_3 \quad ;$$
$$27 = 1{,}27·CU_1 - CU_3 \quad ; \quad CU_3 + 27 = 1'27·CU_1 \quad \text{; con lo que:}$$
$$\mathbf{CU_1 = (CU_3 + 27) / 1{,}27}$$

Así mismo:

$$CU_1 / CU_4 = (1- CV) / (1 - 0{,}8·CV) \quad ;$$
$$CU_1 - 0{,}8 · CV · CU1 = CU_4 - CV · CU_4 \quad ;$$
$$CU_1 - CU_4 = -20\ CV = 0{,}8·CV · CU_1 - CV · CU_4 \quad ;$$
$$-20 = 0{,}8·CU_1 - CU_4 \quad ; \quad CU_4 - 20 = 0{,}8·CU_1 \quad \text{; y entonces:}$$
$$\mathbf{CU_1 = (CU_4 - 20) / 0{,}8}$$

Si observamos la representación gráfica adjunta A-1.20., la convergencia de ambas rectas tendrá lugar para los valores:

$$(CU_3 + 27) / 1{,}27 = (CU_4 - 20)/ 0{,}8 \quad \text{y} \quad CU_3 = CU_4$$

, lo que implica que, en dicho punto, tendrá lugar la máxima uniformidad psicológica posible, con:

$$\mathbf{CU_1 = CU_3 = CU_4 = 100\% = CU_2 = \overline{CU}}$$

También se cumplirá que:

$$CU_3 / CU_4 = (1 - 1{,}27·CV) / (1 - 0{,}8·CV) \quad ;$$
$$CU_3 - 0{,}8 · CV · CU_3 = CU_4 - 1{,}27 · CV · CU_4 \quad ;$$
$$CU_3 - CU_4 = -47·CV = 0{,}8 · CV · CU_3 - 1{,}27 · CV · CU_4 \quad ;$$
$$1{,}27 · CU_4 - 47 = 0{,}8·CU_3 \quad \text{; y}$$
$$\mathbf{CU_3 = (1{,}27 · CU_4 - 47) / 0{,}8}$$

Las relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad psicológica anteriormente definidos, y que ya han sido expresadas analíticamente, pueden verse gráficamente a continuación:

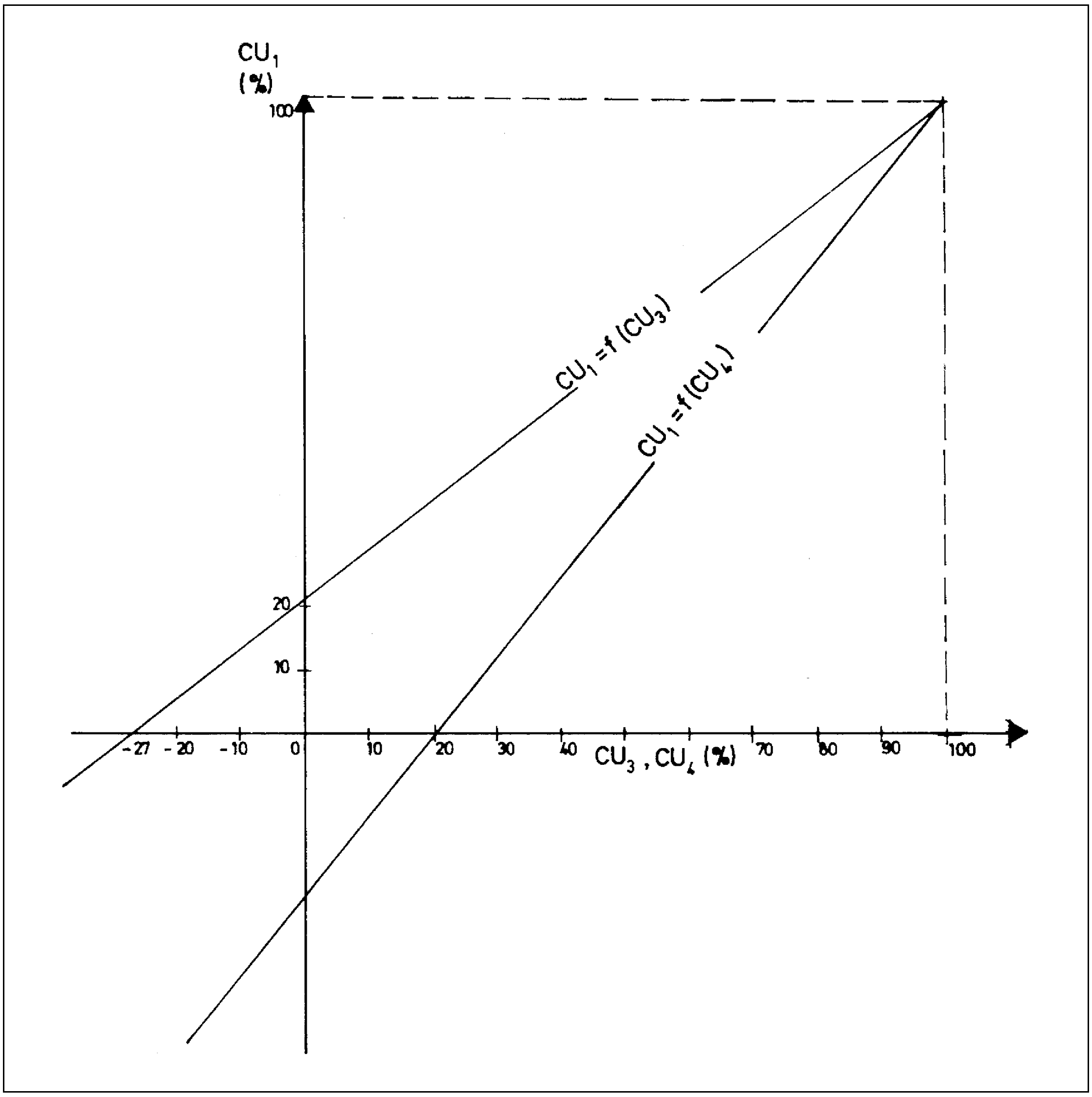


FIG. A-1.20. Relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones psicológicas aproximadamente normales (I)

El gráfico anterior puede complementarse, por su elevado interés práctico, con el siguiente, que relaciona el coeficiente de uniformidad CU_3 con el CU_4 del siguiente modo:

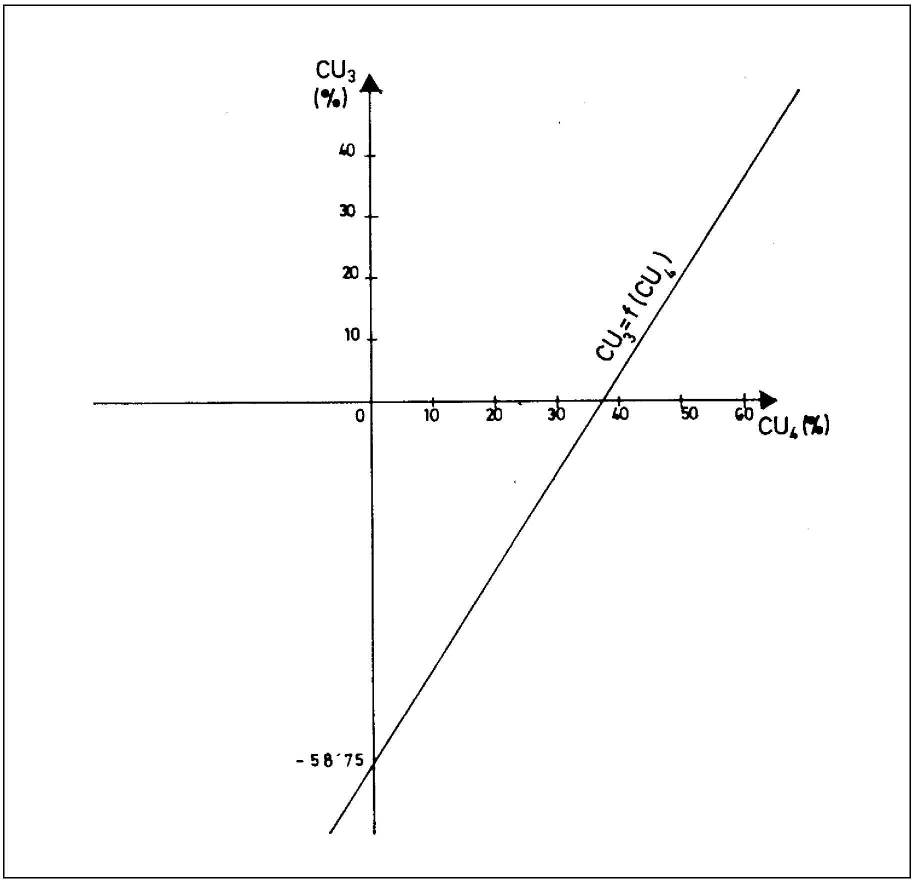


FIG. A-1.21. Relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones psicológicas aproximadamente normales (II)

De las expresiones anteriores, se deducen inmediatamente las tres siguientes, hasta completar las seis relaciones posibles existentes entre los índices psicológicos de tal suerte definidos, esto es:

$$\mathbf{CU_3 = 1{,}27 \cdot CU_1 - 27 \quad ; \quad CU_4 = 0{,}8 \cdot CU_1 + 20 \quad ;}$$
$$\mathbf{CU_3 = (0{,}8 \cdot CU_3 + 47) / 1{,}27}$$

Idénticas consideraciones podríamos realizar respecto a CU_2 y a $\overline{CU}$ en relación con los tres restantes coeficientes de uniformidad psicológica, y cuya materialización brindamos, como ejercicio recapitulatorio, a nuestros amables lectores.

3.2. Agrupamiento en "clases" y otras características de las distribuciones psicológicas

3.2.1. Los intervalos de clase

Así mismo, cuando el número **n** de los valores de la variable psicológica analizada sea grande, lo que tendrá lugar en aquellos casos de muestras de colectivos formadas por un número elevado de individuos, resultarán poco manejables las tablas estadísticas que recojan todos los valores con sus correspondientes frecuencias. En tales casos, se agruparán los valores de la variable en "clases", que podrán ser de la misma o diferente amplitud; una norma práctica genérica pudiera ser el establecer una misma amplitud equivalente al 10% de la observación mayor, con lo que el número de clases oscilará alrededor de la decena. Cuando esto acontezca, el cálculo de la desviación típica necesaria para el hallazgo de los CV y de los pertinentes coeficientes de uniformidad registrará algo de error, debido, precisamente, al "error de agrupamiento" en clases. Para ajustarnos mejor a la realidad, se utilizará entonces la varianza corregida, ofrecida por la denominada "corrección Sheppard", a saber:

$$\sigma_C^2 = \sigma^2 - C^2/12$$

siendo C la amplitud del intervalo de clase escogido y σ^2 la varianza de los datos agrupados, y ello tendrá lugar en distribuciones continuas donde las "colas" van gradualmente convergiendo a 0 en ambas direcciones ($-\infty$ y $+\infty$).

En líneas generales, veamos que un número excesivo de "clases" reduce las ventajas de la agrupación, pero también resulta cierto que un número escaso de ellas puede llegar a anular la significación de los datos. Un criterio usado frecuentemente es que el número de clases debe ser aproximadamente igual a la raíz cuadrada del número de datos. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 30 (número de individuos) es mayor que cinco, por lo que se seleccionan seis clases. También la regla de Sturgess no es sino una recomendación acerca del número deseable de clases que deben considerarse a la hora de elaborar un histograma. Éste viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{k = número\ de\ clases = 1 + 3'3 \cdot log_{10}\ n},$$

siendo n el tamaño del colectivo. En el ejemplo que desarrollamos en el anexo siguiente de nuestro libro, con un colectivo de individuos superdotados de n = 1.000, esta fórmula aconsejaría el establecimiento de: 1 + 3’3 x log. 1.000 = 10’9 ≈ 11 clases. Sin embargo, se han considerado solamente 8.

Respecto a la amplitud de las "clases" establecidas, conviene observar que, en general, es conveniente que sea la misma para todas; sin embargo, esto dependerá mucho de los propios datos y del objetivo final de la distribución de la variable en estudio. En principio, si la distribución es más o menos uniforme, todas las "clases" serán de igual amplitud, y si, por el contrario, presenta grandes oscilaciones, puede ser interesante considerar intervalos de amplitud diferente.

De hecho, la construcción de una distribución numérica -como la mayoría de las que elaboraremos aquí- consta de tres etapas fundamentales: 1) determinar las “clases” con sus intervalos más procedentes, tal como ya hemos expresado antes, en las que se han de agrupar los datos de la variable psicológica en estudio, 2) clasificar (o distribuir) los datos en las clases apropiadas, y 3) contar el número de casos de cada clase. Como sea que las dos últimas etapas son puramente mecánicas, así como el establecimiento de la correspondiente "marca de clase" (obtenida normalmente, a falta de más datos, como la semisuma de los valores extremos del intervalo de clase), nos fijaremos sólo en la primera. Por esto, hace falta determinar el número de clases así como la amplitud del intervalo de los valores de la variable aleatoria estadística con la que trabajamos (notas de un examen, CI, tensión arterial, ...). Por esto, en términos generales, se pueden observar al efecto las siguientes normas:

a) Pocas veces emplearemos menos de 6 ó más de 15 clases; el número exacto de las mismas dependerá de la naturaleza, cuantía e intervalo que cubren los datos.

b) Siempre escogeremos las clases de manera que todos los datos queden comprendidos.

c) Se procurará, siempre que sea posible, que todos los intervalos de clase tengan la misma amplitud, lo que obviará la determinación de las "densidades de frecuencia" -que determinan la altura de los rectángulos yuxtapuestos del histograma- para el cálculo de algunas medidas centrales de la correspondiente distribución de frecuencias (como la "moda") o la representación gráfica de los histogramas.

Veamos, por último, que mediante el razonamiento ya expuesto que sirve para definir la "desviación típica o standard" como una medida de dispersión absoluta de los valores de la variable psicológica, se puede afirmar que si este estadístico resulta pequeño, los valores se encuentran concentrados en el entorno de la media aritmética y, además, si la desviación típica es grande, los valores están mucho más esparcidos o dispersos en relación a los centrales. Para comprender este razonamiento sobre una base algo menos intuitiva, nos referiremos brevemente al importante *Teorema de Tchebyshev*, que expresa que **para cualquier clase de datos (poblaciones o muestras), al menos el 75% de los datos se encuentran sobre el intervalo que se extiende a cada lado de la media aritmética en dos veces el valor de la desviación típica ($\pm 2\sigma$).** Según este teorema, también se puede afirmar que por lo menos el 88'8% de los datos se encuentran dentro del intervalo de tres veces ($\pm 3\sigma$) la desviación típica (a ambos lados de la media aritmética) y que al menos el 96% de los mismos se hallan comprendidos dentro del intervalo de amplitud de cinco veces la desviación típica ($\pm 5\sigma$).

Genéricamente, este teorema indica que cualquiera que sea la forma de una distribución de frecuencia de población, la proporción de observaciones que caen dentro de k desviaciones estándar de la media es, al menos, de: $1 - (1/k^2)$, siempre que k sea 1 o más.

Precisamente, una característica importante del teorema de Tchebyshev[10] es que resulta válido para cualquier tipo de datos, incluidos los psicológicos. No obstante, si se dispone de alguna información adicional en relación a la forma global de la distribución que estamos trabajando, también se pueden realizar afirmaciones mucho más estrictas. Por ejemplo, si una distribución es *campaniforme* o gaussiana, se puede esperar que aproximadamente el 95% de los datos (en lugar de al menos el 75%) se encuentren dentro del intervalo $\pm 2\sigma$ y el 99% de los datos (en lugar de al menos el 88'8%) se encuentran dentro del intervalo $\pm 3\sigma$. Estos porcentajes, en definitiva, corresponden a la llamada *distribución normal*, que es objeto de estudio en diversas partes de nuestro libro.

3.2.2. Forma de la distribución de frecuencias

También existen otras características de menor interés práctico, que tratan de precisar la *forma de la distribución* de la variable que se estudia en relación con una distribución normal. Así, la curva de Gauss sabemos que es simétrica respecto de la ordenada $x = \alpha$ (el parámetro α es la media aritmética o esperanza matemática de una distribución normal de frecuencias) y la distribución observada puede ser *asimétrica* o sesgada respecto a la ordenada correspondiente e, incluso, dicha asimetría puede representar una mayor área bajo la curva, a la derecha o a la izquierda de dicha ordenada; por otra parte, a la distribución observada puede corresponderle un área bajo la curva más achatada o más alargada que la correspondiente área de una distribución normal; a tal característica la denominaremos *curtosis* o *medida de apuntamiento*.

Todas estas características, bien conocidas por otra parte, de una distribución de frecuencias originan medidas exactas si están utilizando todos los posibles valores de la variable psicológica, es decir, si corresponden a la población o universo de datos; pero un objetivo esencial de la Inferencia Estadística es el de estimar dichas características poblacionales a partir de una muestra o subconjunto poblacional, lo que en la Psicología aplicada sucederá en numerosos casos. En esta tesitura, las características de la *distribución muestral* suelen ser, en general, los mejores *estimadores* de las características de la distribución de la población, pero las *estimaciones* que originan han de presentarse, como sabemos, acompañadas de los errores de muestreo y de otras medidas de naturaleza probabilística, que permiten apreciar el grado de confianza o fiabilidad de la correspondiente estimación de la característica poblacional, y que no procede analizar aquí con mayor profundidad por comprensibles razones de espacio.

[10] Otra aportación importantísima de este autor estriba en la denominada "Desigualdad de Tchebyshev", que permite generar un intervalo de valores de la variable aleatoria dada la probabilidad de que esto ocurra, o también es posible realizar el hallazgo de la probabilidad de que ocurran los valores que toma la característica aleatoria incluidos en un intervalo dado. En cualquier caso es necesario disponer de la varianza poblacional.

3.2.3. Otros coeficientes de uniformidad psicológica

Veamos, por último, que en base a los mismos o parecidos conceptos, sería posible la definición de otros coeficientes de uniformidad psicológica. Y así, valga como ejemplo el que tendría en cuenta el valor del primer y tercer cuartil de la distribución de frecuencias de la variable contemplada, a saber:

$$\boxed{CU_5 = 100 \times \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}}}$$

que, en el caso de una distribución moderadamente asimétrica (aproximadamente normal), ofrecerá un valor en función de Q_3 y de σ equivalente a:

$$Q_3 - Q_1 \approx 4\sigma/3 \quad \text{; esto es:}$$
$$(Q_3 - Q_1)/Q_3 \approx 4\sigma/3Q_3 \approx 1 - Q_1/Q_3 \text{ ; de donde:}$$

$$\sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{3Q_3}} \text{ , con lo que:}$$
$$CU_5 = 100 \cdot \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = \sqrt{10.000} \cdot \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{3Q_3}} = \sqrt{10.000 - \frac{40.000 \cdot \sigma}{3Q_3}}$$

(*) Una vez que hemos definido la distribución de probabilidad "gamma", veamos que son numerosas las aplicaciones de esta función a experimentos o fenómenos aleatorios que tienen asociadas variables aleatorias que siempre resultan ser no negativas (positivas o nulas) y cuyas distribuciones son sesgadas a la derecha (asimetría positiva), es decir, cuya área bajo la función de densidad disminuye progresivamente a medida que nos alejamos del origen de coordenadas. Estas circunstancias suelen presentarse en la Psicología experimental y en la Psicometría.

ANEXO 2
Ejemplos prácticos

I. PRIMER PROBLEMA

1. Datos y enfoque del problema

Sea un colectivo de superdotados especialmente entrenados, constituido por 1.000 individuos, de los que conocemos el correspondiente cociente intelectual, siendo precisamente esta variable psicológica la que será analizada desde el punto de vista de su uniformidad. Los valores de esta variable se hallan agrupadas en ocho "clases" de la misma amplitud, concretamente: CI = 5, constituyéndose la primera y última clases de la tabla en "intervalos abiertos", ya que no se han fijado el extremo inferior de la primera y el extremo superior de la última, que corresponderían, respectivamente, a los CI más bajo y más alto de los individuos en cuestión. Se desea averiguar los diferentes coeficientes de uniformidad psicológica, "normalizar" la distribución, obtener las medidas centrales y de dispersión así como las restantes características estadísticas de interés.

La tabla resultante del conteo y agrupación de frecuencias realizados con posterioridad a la administración del *test* de inteligencia correspondiente (Binet, Wechsler-Bellevue, Wais, Army-tests, …), donde cada individuo obtuvo una determinada nota o puntuación, es la siguiente:

COCIENTE INTELECTUAL (CI)						
CI	f. simple n_i	f. acumul. ascen. $N_i\uparrow$	f. acumul. descen. $N_i\downarrow$	f. simple f_i	f. acumul. ascen. $F_i\uparrow$	f. acumul. descen. $F_i\downarrow$
Menos de 150	3	3	997	0'003	0'003	0'997
De 150 a 155	15	18	982	0'015	0'018	0'982
De 155 a 160	50	68	932	0'050	0'068	0'932
De 160 a 165	240	308	692	0'240	0'308	0'692
De 165 a 170	312	620	380	0'312	0'620	0'380
De 170 a 175	235	855	145	0'235	0'855	0'145
De 175 a 180	108	963	37	0'108	0'963	0'037
De 180 y más	37	1.000	0	0'037	1'000	0'000
TOTAL	1.000	/ / /	/ / /	1'000	/ / /	/ / /

FIG. A-2.1. Frecuencias de la distribución de cocientes intelectuales

La expresada variable psicológica se ha calculado con arreglo a la fórmula clásica: CI = (EM/EC) x 100, siendo EM la edad mental y EC la edad cronológica de los individuos componentes del colectivo analizado. De hecho, estos cálculos están ya realizados en todos los manuales de evaluación de los *tests* que utilizan esta unidad de medida, que ha llegado a adquirir una extraordinaria difusión.

Solución:

Cabe señalar, antes de proceder a la resolución del ejercicio propuesto, que el CI ha sido objeto de algunas críticas, principalmente dirigidas hacia el problema de su estabilidad temporal o histórica. En efecto, el CI debería ser constante en el tiempo para un mismo individuo, mientras que, de hecho, puede experimentar ciertas fluctuaciones. Se ha argüido también que, tomados dos grupos representativos de la población de edades cronológicas diferentes, los individuos situados en el mismo lugar de la curva de distribución deberían tener el mismo CI. En otros términos, que la variabilidad de los cocientes intelectuales y de las distribuciones debe ser la misma. La revisión Terman del *test* de Binet-Simon fue llevada a cabo en forma tal que respondiera a esta condición, aunque haya sido necesario para ello recurrir a un procedimiento estadístico harto complicado e incluso algo artificioso; pero lo cierto es que la cumple de un modo notablemente satisfactorio.

La agrupación anterior de la distribución de frecuencias constituye la etapa previa para cualquier otro proceso de análisis estadístico a que se hayan de someter unos valores numéricos que toma cualquier variable psicológica. De esta forma, se puede fácilmente comprender dónde están los promedios o valores centrales de la distribución antedicha y juzgar las características de cualquier nota en relación con las restantes.

Para interpretar correctamente dicha tabla, deben formularse las siguientes observaciones:

a) La columna de las frecuencias simples, encabezada por n_i, $\forall i \in (1, 2, ..., 8)$, recoge la *frecuencia absoluta* de cada uno de los ocho *intervalos de clase*; así, 240 es el número de individuos cuyos valores del CI están comprendidos entre 160 (inclusive) y 165. La *frecuencia total* toma el valor n = 1.000 individuos.

b) Las *frecuencias acumuladas ascendentes* las hemos designado por $N_i\uparrow$ ($\forall i=1, 2, ..., 8$) y a cada una de ellas corresponde el número de individuos de CI inferior al extremo superior de la clase; así, $N_4\uparrow = 308$, significa que se han hallado 308 individuos con un CI inferior a 165.

c) Las *frecuencias relativas* ordinarias y acumuladas ascendentes y descendentes encabezadas, respectivamente, por f_i, $F_i\uparrow$ y $F_i\downarrow$ vienen determinadas por el cociente de dividir la correspondiente frecuencia absoluta o acumulada (ascendente o descendente) por la frecuencia total. Así, v. gr.:

$$f_4 = 240/1.000 = 0'240,\ F_4\uparrow = 308/1.000 = 0'308 \text{ y } F_4\downarrow = 692/1.000 = 0'692$$

La suma de las frecuencias relativas ordinarias y la última frecuencia relativa acumulada ascendente han de ser siempre iguales a la unidad, puesto que representan la probabilidad total del espacio muestral.

d) La representación gráfica de una tabla de frecuencias ordinarias (absolutas o relativas), cuando la variable es continua (como es el caso de muchas de las variables psicológicas, que pueden tomar valores intermedios entre dos consecutivos) está distribuida en clases -como las de la tabla anterior-, debe realizarse mediante un *histograma de rectángulos yuxtapuestos* (FIG. A-2.2.), que se construye tomando como abscisas los extremos de los intervalos y levantando sobre cada intervalo, tomado como base, un rectángulo cuya área sea directamente proporcional a la correspondiente frecuencia (absoluta o relativa). Si los intervalos son de la misma amplitud (caso de la tabla de la figura anterior, que van de 5 en 5 unidades), la altura de cada rectángulo es proporcional a la correspondiente frecuencia. En nuestra figura se ha supuesto que el extremo inferior de la variable es 145 y el superior 185, aunque, de hecho, los extremos inferior y superior, respectivamente, del campo de existencia de la misma son de 120 y 208, correspondientes a los individuos de CI mínimo y máximo de todos ellos, pero deben ser considerados como "outliers".

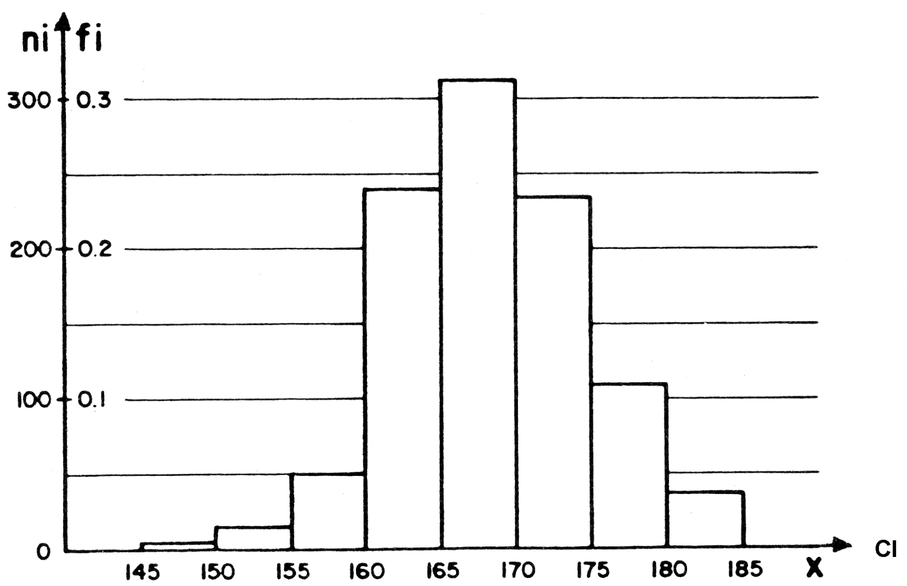


FIG. A-2.2. Histograma de rectángulos yuxtapuestos

e) La representación gráfica de una tabla de frecuencias acumuladas, cuando la variable continua se ha distribuido en intervalos de clase (figura A-2.3.), se obtiene mediante un **polígono de frecuencias o diagrama acumulativo ascendente**, que consiste en unir mediante una línea poligonal los puntos cuyas abscisas son los extremos superiores de cada intervalo de clase (150, 155, 160, etc., en nuestro ejemplo) y cuyas ordenadas son las correspondientes frecuencias acumuladas. En la figura mencionada, para un valor cualquiera de la variable psicológica en estudio **x**, la ordenada correspondiente representa el número (absoluto o relativo) de individuos que tienen su CI inferior a dicho valor de **x**.

El diagrama suele partir de un punto de ordenada cero cuya abscisa es el extremo inferior de la tabla (en nuestro ejemplo, hemos tomado para dicho extremo la abscisa x = 145>120); a partir del extremo superior de la tabla (185<208, en nuestro caso) la línea es una recta paralela al eje de abscisas, cuya altura constante es igual a la frecuencia total (n = 1.000 individuos, en el problema cuya resolución afrontamos). Así:

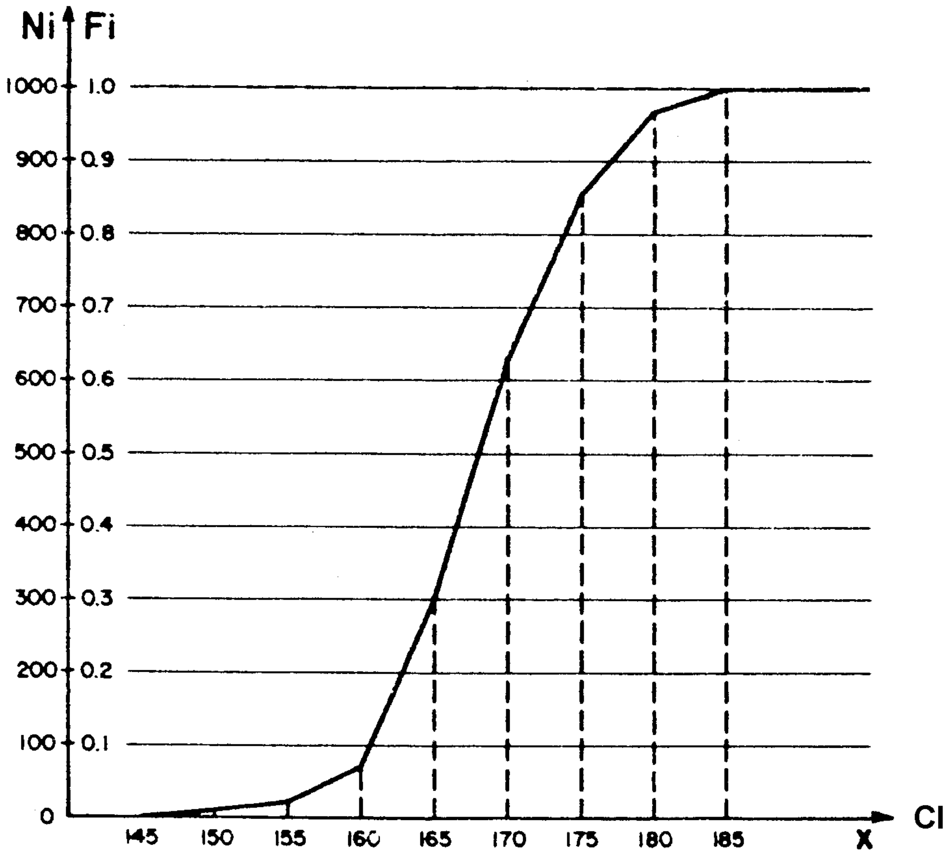


Fig. A-2.3. Diagrama acumulativo ascendente de los cocientes intelectuales

De la tabla anterior, que se reproduce en la figura anterior A-2.1, se deduce también el siguiente gráfico, donde se representan simultáneamente los diagramas acumulativos ascendente y descendente, cuyo punto de intersección debe ser la mediana o segundo cuartil de esta distribución de frecuencias, como se verá más adelante:

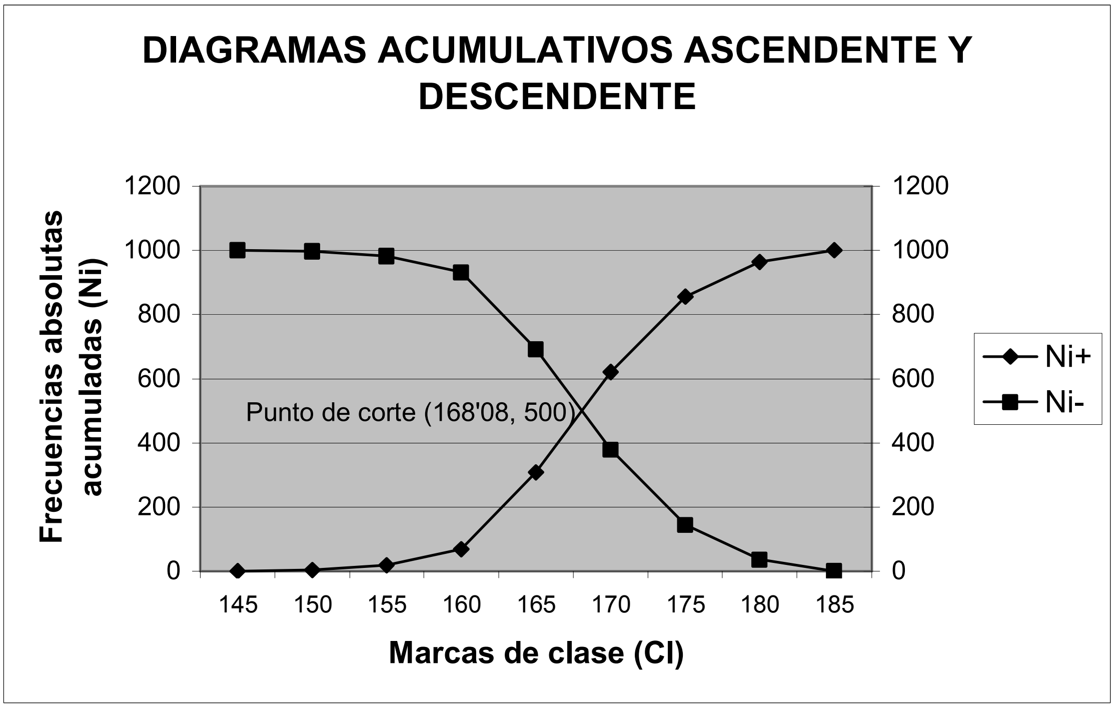


Fig. A-2.4. Diagramas acumulativos ascendente y descendente de los cocientes intelectuales

2. "Normalización" del problema

Una variable aleatoria que se distribuya con la función de densidad que ya hemos relacionado en otras partes de este mismo libro, concretamente en el anexo nº: 1 anterior, recibe el nombre de *normal* debido a que la distribución binomial, considerada en su caso límite, es la que corresponde corrientemente o habitualmente a la mayor parte de las variables empíricas, entre ellas las psicológicas. Una ampliación de conceptos teóricos en relación a la expresada distribución de probabilidad, puede encontrarse en el anexo nº: 1 de este mismo libro ("Restantes especificaciones metodológicas").

Desde luego, entre las muchas distribuciones continuas que se utilizan en Estadística y que pueden tener provechosas aplicaciones en el estudio de las variables psicológicas, la *curva normal* o *distribución normal* es, con mucho, la más importante de ellas. Su estudio data de investigaciones sobre la naturaleza de los errores experimentales, llevadas a cabo en el siglo XVIII. Se observaba entonces que las discrepancias entre las medidas repetidas de la misma cantidad física mostraban un sorprendente grado de regularidad; sus aspectos (distribución), según se encontró, podían aproximarse muy bien mediante un cierto tipo de curva de distribución continua, denominada "curva normal de errores" y atribuida a las leyes del azar. Las propiedades matemáticas de este tipo de curva de distribución continua y su base teórica fueron investigadas, por primera vez, por Abraham de Moivre[1] (1667-1745), Pierre Laplace (1749-1827) y Karl Gauss (1777-1855). Este último fue un gran matemático alemán que, con sus brillantes aportaciones sobre las geometrías no euclideanas, hizo posible la aparición de las ciencias formales.

La importancia de la distribución normal radica, en primer lugar, en que son muy numerosas las variables aleatorias que la siguen, resultando adecuada para describir la distribución de muchos conjuntos de datos. En efecto, numerosas medidas físicas, datos meteorológicos, características biológicas, variables económicas y sociales, etc., siguen la ley normal, así como también aparece en muchas investigaciones teóricas. En segundo lugar, como consecuencia del teorema del límite central, que establece que la suma de un número elevado de variables aleatorias converge a una distribución normal, sea cual sea la distribución de estas variables. Además, en ciertas condiciones, las distribuciones discretas pueden ser substituidas por distribuciones normales, lo que simplifica notablemente los cálculos correspondientes. Hay que tener mucho cuidado, en fin, al suponer que un determinado conjunto de observaciones se puede aproximar por una distribución normal, pues será necesario realizar una comprobación previa.

Como se ha visto, la curva normal tiene forma de campana extendida indefinidamente en ambas direcciones, positiva y negativa, siendo asintótica en relación al eje de abscisas. Rara vez es necesario extender las colas de la curva normal muy lejos de la media, porque el área comprendida bajo la curva y el eje horizontal que queda a más de cuatro o cinco desviaciones típicas de la media aritmética o esperanza matemática resulta insignificante para la mayoría de los fines prácticos y, entre ellos, los propios de la Psicología aplicada. Debe tenerse en cuenta que no todas las distribuciones acampanadas simétricas en relación al eje de ordenadas son distribuciones normales, y las palabras *distribución normal* refiérense al hecho de que el área bajo la curva se distribuye de una manera determinada.

Una importante propiedad de la curva normal es que está completamente determinada por su media y su desviación típica. Es decir, la ecuación matemática de dicha curva es tal que se puede determinar el área existente bajo la

---

[1] **Abraham de Moivre** (Vitry-le-François, Champagne, Francia, 26 de mayo, 1667 - Londres, 27 de noviembre, 1754). A pesar que la posición social de su familia no está clara, su padre, cirujano de profesión, pudo mandarlo a la academia protestante de Sedan (1678-82). De Moivre estudió lógica en Saumur (1682-84), asistió al *Collège de Harcourt* en París (1684), y estudió privadamente con Ozanam (1684-85). De todas maneras no hay referencias que De Moivre haya obtenido título académico alguno. Conocido por la fórmula de Moivre, la cual conecta los números complejos y la trigonometría, y por su trabajo en la distribución normal y probabilidad. Fue elegido un miembro de *Royal Society* de Londres en 1697, y fue amigo de Isaac Newton y Edmund Halley. De Moivre escribió un libro de probabilidad titulado *The Doctrine of Chances*. Como era calvinista, tuvo que salir de Francia después de la revocación del Edicto de Nantes (1685), y pasó el resto de su vida en Inglaterra. Toda su vida fue pobre y era cliente regular del *Slaughter's Coffee House*, en St. Martin Lane, en Cranbourn Street, donde ganaba algo de dinero jugando al ajedrez. Murió en Londres, siendo enterrado en St Martin's-in-the-Fields, aunque más tarde su cuerpo fue trasladado.

curva entre dos puntos cualesquiera del eje horizontal si se conoce el valor que adoptan ambos parámetros, aunque en la práctica dichas áreas se obtienen valiéndose de tablas especiales elaboradas al efecto. Por otra parte, la probabilidad o frecuencia relativa con que una variable psicológica tomará valores entre dos puntos es el área bajo la curva comprendida entre los dos puntos del eje horizontal.

Si se representa gráficamente esta función (FIG. A-2.5), encontraremos que está definida para todos los valores de x (desde $-\infty$ hasta $+\infty$) y con las siguientes propiedades:

a) Solamente existe la curva para valores positivos de las ordenadas.

b) El eje de abscisas OX es una asíntota horizontal de la curva.

c) Existe un máximo absoluto para el punto $x = \alpha$.

d) Es creciente hasta el máximo y después es decreciente.

e) Existen dos puntos de inflexión: para $x = \alpha-\sigma$ y para $x = \alpha+\sigma$.

f) Es cóncava hacia la región positiva del eje 0Y, para $-\infty < x < \alpha-\sigma$ y para $\alpha+\sigma < x < +\infty$ y cóncava hacia la región negativa del eje de ordenadas en el intervalo: $\alpha-\sigma < x < \alpha+\sigma$.

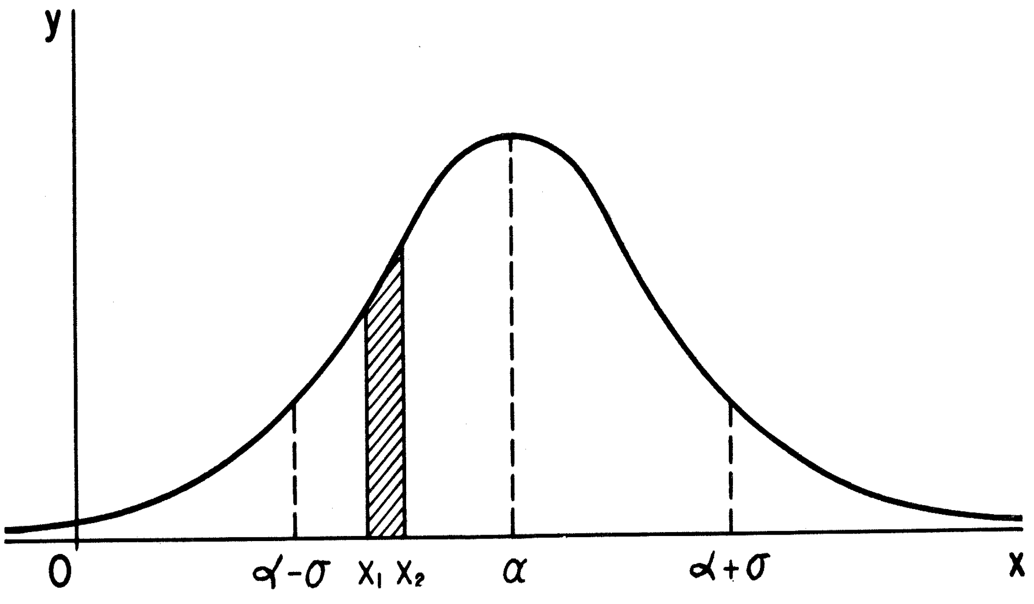


FIG. A-2.5. Área bajo la curva normal entre los puntos x_1 y x_2

Dentro de la ley normal los valores más próximos a α son más frecuentes que los más alejados de α. La utilización e interpretación de esta función para

Gauss puede verse a través de un ejemplo como el que nos ocupa: supongamos que se efectúan 1.000 mediciones del cociente intelectual de un mismo individuo superdotado, cuyo CI verdadero es de 168; en este caso se dice que $\alpha = 168$. Las medidas efectuadas se acumularán en mayor proporción alrededor de α cuanto más próximas estén a dicho valor y serán menos frecuentes cuanto más alejadas se encuentren de α.

El parámetro σ está relacionado con la precisión de las mediciones realizadas al medir el parámetro α. Si se hace igual a la unidad el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas y se supone que los CI medidos que han estado comprendidos entre los valores x_1 y x_2 representan el diez por ciento de las 1.000 mediciones realizadas, el área rayada de la figura anterior debe ser igual a 0'10. También sabemos hoy que el área comprendida entre la curva, el eje de abscisas y las ordenadas $x = \alpha-\sigma$ y $x = \alpha+\sigma$ corresponde, aproximadamente, al 64 por ciento del área total. Por lo tanto, ya tenemos un significado del hasta ahora desconocido parámetro σ: cuanto menor sea el valor de σ (que se denomina *desviación típica o standard* en la terminología estadística) también serán de menor cuantía los errores que se cometen al medir el CI α; es decir, si el *test* empleado para medir el CI es más perfecto o si es más hábil la persona encargada de medirlo (psicólogo experimentador), σ será un número menor que en el caso contrario.

La función de densidad normal o la función de distribución normal son dos modelos matemáticos inspirados por la conocida "ley de los errores" o ley de Gauss, cuya introducción ya ha sido realizada en el anexo anterior. Pues bien, la Estadística ha incorporado a su metodología –como un modelo probabilístico esencial– esta ley de Gauss con el nombre de *función de densidad normal*. Si y = f(x) es dicha función de densidad o de probabilidad, se puede definir a partir de ella la denominada *función de distribución normal* F(x), tal que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\cdot dx,$$

y dicha integral impropia de primera especie significa que a cada valor de x corresponde un número F(x) determinado por la probabilidad de que la variable (CI, en nuestro ejemplo) tome un valor menor o igual a x.

Las áreas comprendidas bajo la curva normal y el eje de abscisas representan probabilidades, que quedan acotadas por las correspondientes ordenadas. En estas condiciones, la probabilidad de que la variable x (en nuestro caso se trata del CI del individuo) tome un valor comprendido entre x_1 y x_2, vendría dada de la siguiente forma, como deduciremos posteriormente, aplicando la propiedad de la aditividad del intervalo de integración en las integrales definidas:

$$P_r(x_1 < x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\cdot dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} \times dx = \frac{1}{6'36 \times \sqrt{2\pi}} \times \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-168'325)^2}{2\times 6'36^2}} \times dx =$$

$$= 0'063 \times \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-168'325)^2}{80'9}} \times dx$$

, en que ya hemos aplicado los parámetros correspondientes de nuestro problema, que tendremos ocasión de calcular con posterioridad. Es decir, como la última integral permite conocer el área rayada de la figura A-2.5, dicha área representa la probabilidad de que la variable x = CI (que en el Cálculo de Probabilidades es una *variable aleatoria* o *estocástica*, en lugar de una *variable estadística*) tome un valor comprendido entre x_1 y x_2 .

En el caso de que la tabla anterior correspondiera a 1.000 mediciones distintas de un mismo CI (en lugar de corresponder a los CI medidos en 1.000 individuos distintos), la distribución de frecuencias determinada por las columnas encabezadas por "CI" y por "f_i" presentaría una *imagen empírica* de una función de densidad normal. Si los resultados se hubieran obtenido a partir del modelo matemático, en lugar de constituir una observación de la realidad, para: x_1 = 165 y x_2 = 170, se tendría que:

$$\int_{165}^{170} f(x)\cdot dx = 0'312$$

Conocidas la media aritmética y la desviación típica, se pueden tabular las áreas comprendidas bajo la curva normal. En realidad, para α = 168’325 (media aritmética o esperanza matemática de aquella distribución de frecuencias) y para σ = 6'36 (desviación típica) se tiene que:

$$\int_{165}^{170} f(x)\cdot dx = 0'303 \ ,$$

cuya diferencia: 0'312 - 0'303 = 0'009 es una medida de la discrepancia existente entre la realidad y el modelo teórico que ha sido considerado y para la clase particular "CI comprendido entre 165 y 170".

Las áreas comprendidas entre menos infinito y **x** son los valores de la función de distribución para cada valor de la variable psicológica **x**.

De la misma manera, la distribución de frecuencias determinada por la primera columna de la tabla de la figura A-2.1. y la encabezada por $F_i\uparrow$, constituyen una *imagen empírica de la función de distribución normal* que venimos considerando. En este caso, los resultados empírico y teórico, para x =170, serían, respectivamente:

$$F_5\uparrow = \int_{-\infty}^{170} f(x)\cdot dx = 0'620 \text{ , y también: } \int_{-\infty}^{170} f(x)\cdot dx = 0'622$$

que implicarían una discrepancia absoluta de 0'002 y relativa del 0’32% entre el valor teórico y el correspondiente valor observado, que resulta ser francamente baja.

3. Características de la distribución

3.1. Medidas centrales o promedios

Comenzaremos, como es habitual, por el cálculo de los diferentes promedios o valores de la distribución de la variable “CI”. Para ello, y a partir de la tabla inicial, elaboraremos la siguiente:

$n_i \cdot \log x_i$	$\log x_i$	CI	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$N_i\uparrow$	$x_i^2 \cdot n_i$	n_i/x_i
6’506	2’1687920	Menos de 150	147’5	3	442’5	3	65.268’75	0’020
32’749	2’1832698	De 150 a 155	152’5	15	2.287’5	18	348.843’75	0’098
109’864	2’1972806	De 155 a 160	157’5	50	7.875’0	68	1.240.312’50	0’318
530’605	2’2108534	De 160 a 165	162’5	240	39.000’0	308	6.337.500’00	1’477
693’893	2’2240148	De 165 a 170	167’5	312	52.260’0	620	8.753.550’00	1’863
525’645	2’2367891	De 170 a 175	172’5	235	40.537’5	855	6.992.718’75	1’362
242’913	2’2491984	De 175 a 180	177’5	108	19.170’0	963	3.402.675’00	0’608
83’667	2’2612629	De 180 y más	182’5	37	6.752’5	1.000	1.232.331’25	0’203
2.225’842	///////	TOTAL	///	1.000	168.325’0	///	28.373.200’00	5’949

FIG. A-2.6. Cálculos auxiliares de la distribución de cocientes intelectuales (I)

Veamos, a continuación, los diferentes promedios o valores centrales analizados:

*** Media Aritmética:** a partir de los correspondientes resultados se tiene que, tratándose de una distribución conjunta de frecuencias:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{h} x_i \cdot n_i / n = \alpha = 168.325 / 1.000 = 168'325$$

que constituye la media aritmética o esperanza matemática de la distribución de frecuencias de la variable psicológica analizada.

Por otra parte, y por lo que se refiere a la determinación de otros promedios o medidas centrales de esta distribución de frecuencias, veamos que, a partir de la primera columna y de la encabezada por $N_i\uparrow$ (tabla de la figura A-

2.6.) se obtienen los siguientes resultados promedios (como $N_i\uparrow = 500$ está en el intervalo del 165 a 170, en él se encuentra la mediana o segundo cuartil):

*** Mediana:** $M_e = 165 + [(500-308)/312] \times 5 = 168'08 \approx 168$
, que se halla situada en el punto de corte o intersección de los diagramas acumulativos ascendente y descendente, por definición (véase figura correspondiente A-2.4).

*** 1.er cuartil:** $Q_1 = 160 + [(250-68)/240] \times 5 = 163'79 \approx 164$

*** 3.er cuartil:** $Q_3 = 170 + [(750-620)/235] \times 5 = 172'77 \approx 173$

Es decir, entre los individuos integrantes del colectivo en estudio, la mitad tienen un CI inferior a 168'08, la cuarta parte, un CI inferior a 163'79, otra cuarta parte, más de 172'77 y entre los cocientes intelectuales 163'79 y 172'77 se encuentra el 50% de aquellos individuos.

Otros promedios interesantes para nuestro estudio serían los siguientes:

*** Moda:** $M_o = 165 + [(235/240+235)] \times 5 = 167'47$

*** Media cuadrática:**

$$C = \sqrt{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 \cdot n_i / n} = \sqrt{28.373.200 / 1.000} = 168'44$$

*** Media geométrica:**

$$G = \sqrt[n]{\pi_{i=1}^{8} \cdot x_i^{n_i}} = antil\mathrm{og.} \sum_{i=1}^{8} \mathrm{n_i} \cdot l\mathrm{og\ x_i} / n =$$
$$= \mathrm{antilog}\ 2.225'842 / 1.000 = 168'2062$$

*** Media armónica:**

$$H = n / \sum_{i=1}^{8} n_i / x_i = 1.000 / 5'949 = 168'0955$$

Desde luego, las cuatro medias aquí estudiadas quedan ordenadas, con arreglo a su magnitud, del modo siguiente:

armónica < geométrica < aritmética < cuadrática

(H = 168'0955) < (G = 168'2062) < ($\overline{X} = 168'3250$) < (C =168'4435)

3.2. Medidas de dispersión o concentración

Por lo que se refiere a la desviación típica o "standard", como medida de la dispersión absoluta de la distribución por el colectivo analizado de nuestra variable psicológica CI, veamos que su valor vendrá dado por:

$$\sigma = \sqrt{C^2 - \overline{X}^2} = \sqrt{168'4435^2 - 168'325^2} = 6'36\,,$$

y un coeficiente de variación de Pearson (medida de dispersión relativa) de :

$$\mathrm{CV} = \sigma / \overline{X} = 6'35/168'325 \approx 0'038 = 3'8\%.$$

Recorrido o rango: R = 182’5 – 147’5 = 35

Recorrido relativo: R’ = $R/\overline{X}$ = 35/168’325 = 0’208

Coeficiente de apertura: $C_{ap} = x_8/x_1$ = 182’5/147’5 = 1’2373

Recorrido intercuartílico:

$$Q_3 - Q_1 = 173 - 164 = 9,$$

Recorrido semi-intercuartílico:

$$(Q_3 - Q_1) / (Q_3 + Q_1) = 9 / (173 + 164) = 0'02671 \approx 2'7\%,$$

es decir, que en ambos casos, la medida de dispersión empleada viene a representar aproximadamente sólo alrededor del 3% del correspondiente promedio. **Desde luego, ello indicaría que el grado de uniformidad y equilibrio del colectivo que nos ocupa, en relación a la distribución de los cocientes intelectuales de los individuos que lo componen, resulta francamente elevado. En efecto, los coeficientes de uniformidad anteriormente definidos (ver anterior anexo nº: 1), tomarán, en este caso, los siguientes valores:**

$$\begin{cases} CU_1 = 100 \cdot (1 - CV) = 100 \cdot (1 - 0'038) = 96'2\% \\ CU_3 = 100 \cdot (1 - 1'27 \cdot CV) = 100 \cdot (1 - 1'27 \cdot 0'038) = 95'2\% \\ CU_4 = 100 \cdot (1 - 0'80 \cdot CV) = 100 \cdot (1 - 0'80 \cdot 0'038) = 97'0\% \end{cases}$$

debiendo considerarse también que:

$$CU_2 = (Q_1 / \overline{X}) \cdot 100 = (163'79/168'325) \cdot 100 = 97'3\%$$

, si bien otra determinación del mismo coeficiente de uniformidad psicológica conduciría al valor:

$$CU_2 = 100\ (1- 0'68 \cdot CV) = 100\ (1 - 0'68 \times 0'038) = 97'4\% \ ,$$

cuya pequeña discrepancia (+0'1%) con el resultado anterior débese al propio ajuste de normalidad, o bien al proceso de cálculo decimal.

Veamos, por último, que el "coeficiente de uniformidad psicológica medio", ofrecerá un valor de:

$$\overline{CU} = 100\ (1 - 0'92 \cdot CV) = 100\ (1 - 0'92 \times 0'038) = 96'5\% \ ,$$

mientras que también:

$$CU_5 = 100 \cdot \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{163'79}{172'77}} = 97'4\%$$

La representación gráfica de los valores de los diferentes coeficientes de uniformidad hallados, en definitiva, es la siguiente:

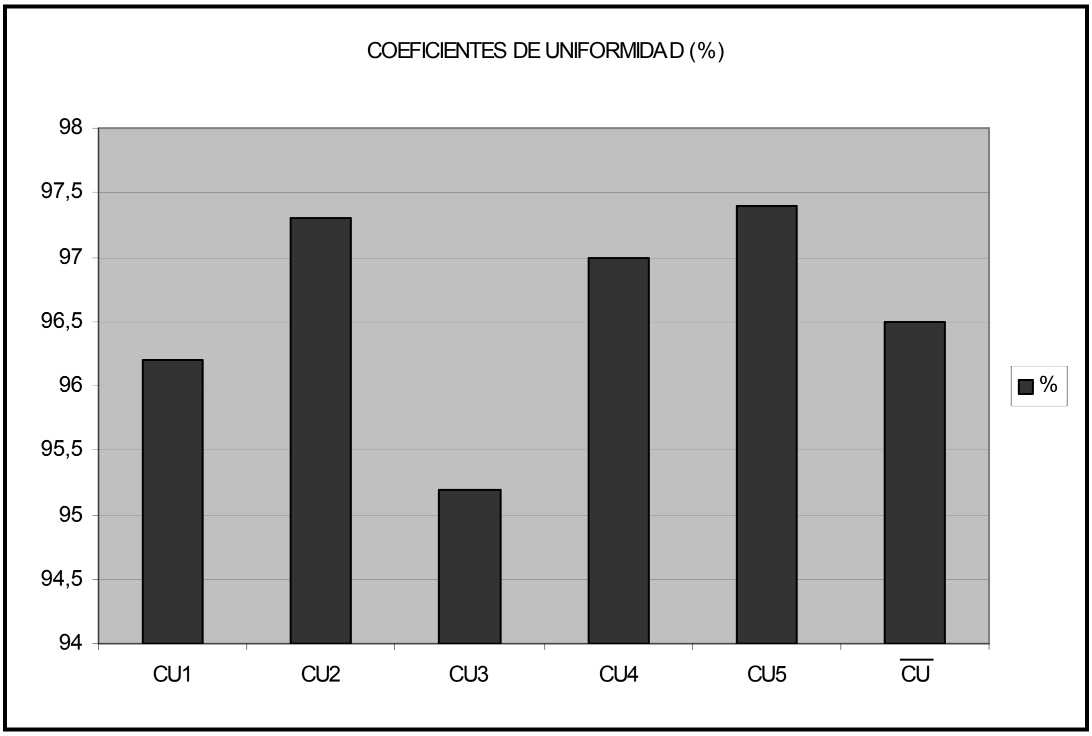


FIG. A-2.7. Valores de los diferentes coeficientes de uniformidad psicológica

3.3. Otras características de la distribución de frecuencias

Por lo que se refiere a las restantes características de la distribución de la variable psicológica CI, veamos que una de la asimetría o sesgo la constituye el denominado "1.^{er} coeficiente de asimetría de Pearson", que viene expresado por:

$$P_1 = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma} = \frac{168'325 - 167'47}{6'36} = 0'134 \approx 0 \quad ,$$

luego se trata, en nuestro caso, de una distribución prácticamente simétrica.

También podríamos calcular el "2º coeficiente de asimetría de Pearson", a saber:

$$P_2 = \frac{3 \cdot \left(\overline{X} - M_e\right)}{\sigma} = \frac{3 \cdot (168'325 - 168'08)}{6'36} = 0'113 \quad ,$$

o bien el "coeficiente de sesgo cuartílico", de valor:

$$\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{172'77 - 2 \cdot 168'08 + 163'79}{172'77 - 163'79} = 0'045 \quad ,$$

que conducen, en todos los casos, a conclusiones similares. Cabe observar, no obstante, una ligera asimetría o sesgo hacia la derecha, puesto que: $P_1>0$, $P_2>0$ y también:

$$\overline{X} = 168'325 > Me = 168'08 > Mo = 167'47$$

Así mismo, se elaborará la siguiente tabla:

	n_i	x_i-168	$(x_i-168)^3 \cdot n_i$	$(x_i-168)^4 \cdot n_i$	$\lvert x_i-168 \rvert \cdot n_i$
	3	-20’5	-25.844’4	529.810’2	61’5
	15	-15’5	-55.851’2	865’693’6	232’5
	50	-10’5	-57.881’3	607.753’6	525’0
	240	-5’5	-39.930’0	219.615’0	1.320’0
	312	-0’5	-39’0	19’5	156’0
	235	4’5	21.414’6	96.365’7	1.057’5
	108	9’5	92.596’5	879.666’7	1.026’0
	37	14’5	112.800’0	1.635.600’0	536’5
$\sum_{i=1}^{8}$	1.000	/ / / /	47.265’2	4.834.524’3	4.915’0

FIG. A-2.8. Cálculos auxiliares de la distribución de cocientes intelectuales (II)

De los resultados de la tabla de la figura anterior, se deduce que el momento central (respecto a la media aritmética) de tercer orden es:

$$m_3 = 47'2652 \quad ,$$

por lo que se tendrá un "coeficiente directo de asimetría" o "coeficiente de sesgo" de Fisher de:

$$g_1 = m_3/\sigma^3 = 47'2652/6'36^3 = 0'18 \quad ,$$

que confirma la existencia de una distribución aceptablemente simétrica (en curvas simétricas como la normal, se cumple que: $g_1 = g_1^2 = 0$).

Por otra parte, m_4 = 4.834'5243 (momento central o respecto a la media aritmética, de 4º orden) y, por tanto, se tendrá un "coeficiente de curtosis" de Fisher de:

$$g_2 = (m_4/\sigma^4) - 3 = (4.834'5243/6'36^4) - 3 = 2'95 - 3 = - 0'05 \approx 0 \quad ,$$

lo que permite asegurar que la distribución es **mesocúrtica** y aproximadamente normal (la curva normal, como es sabido, tiene un valor: $g_2 = 0$).

Veamos, así mismo, que la anterior tabla de cálculo (ver figura A-2.8), en su última columna, nos permitirá el cálculo de otra medida de dispersión absoluta a la que ya nos hemos referido con anterioridad: la desviación media respecto a la media aritmética (que sería mínima con respecto a la mediana), a saber:

$$\begin{aligned} DM &= \frac{\sum_{i=1}^{8} \left| x_i - \overline{X} \right| \cdot n_i}{n} = 4.915/1.000 = 4'915 \approx 4\sigma/5 = \\ &= 4 \cdot 6'36/5 = 5'088 \end{aligned}$$

Este valor de la DM, en la presente distribución agrupada de frecuencias, conducirá a una determinación más ajustada y directa del valor del coeficiente de uniformidad psicológica CU_4, a saber:

$$CU_4 = 100 \cdot (1 - 4'915/168'325) = 97'08\ \% \quad ,$$

prácticamente coincide con el anteriormente calculado (97'00%) mediante procedimientos indirectos.

3.4. Índice de Gini y curva de Lorenz

Para la determinación de dichos ítems, cuya fundamentación teórica y aplicación a los problemas psicológicos ya ha sido explicada en el anterior anexo de este apéndice de nuestro libro, resulta necesaria la elaboración de la siguiente tabla de cálculos auxiliares:

L_i	x_i	n_i	$(CI)_i = x_i \cdot n_i$	$\frac{n_i}{n}\times 100$	$\frac{x_i \cdot n_i}{\sum x_i \cdot n_i}\times 100$	p_i (%)	q_i (%)	p_i-q_i (%)
<150	135’0	3	405’0	0’3	0’24	0’3	0’24	0’06
150-155	152’5	15	2.287’5	1’5	1’36	1’8	1’60	0’20
155-160	157’5	50	7.875’0	5’0	4’67	6’8	6’27	0’53
160-165	162’5	240	39.000’0	24’0	23’12	30’8	29’39	1’41
165-170	167’5	312	52.260’0	31’2	30’97	62’0	60’36	1’64
170-175	172’5	235	40.537’5	23’5	24’03	85’5	84’39	1’11
175-180	177’5	108	19.170’0	10’8	11’36	96’3	95’75	0’55
>180	194’0	37	7.178’0	3’7	4’25	100	100	0’00
$\sum_{i=1}^{8}$		n = 1.000	CI = 168.713’0	100%	100%	383’5	378’0	5’50

FIG. A-2.9. Cálculos auxiliares para la determinación de G

En este caso, al objeto de precisar mejor los cálculos, los valores de la primera y última marca de clase: x_1 = 135’0 y x_8 = 194’0 se han estimado teniendo en cuenta los valores extremos: $(CI)_0$ = 120’0 y $(CI)_4$ = 208’0, a los que antes hemos considerado “outliers”.

Así pues, según la fórmula dada por Pulido, el valor del índice de Gini, en este caso, será de:

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{K-1}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{K-1} p_i} = \frac{5'50}{283'5} = 0'02 = 2\%$$

Habida cuenta del bajísimo valor del índice obtenido, podemos afirmar que la distribución de los CI de los individuos componentes del colectivo analizado es casi perfecta desde el punto de vista estadístico.

La correspondiente curva poligonal de Lorenz apenas se separa de la diagonal o bisectriz del primer cuadrante, dado el bajísimo valor del índice de Gini ya obtenido, por lo que obviaremos su representación gráfica, a efectos prácticos. En cualquier caso, ampliaremos el concepto acerca de esta importante curva en epígrafes posteriores de este mismo anexo.

3.5. Índice de Williamson

En nuestro caso, la variable psicológica en estudio es el CI global que posee cada intervalo de clase. Por ello, la fórmula pertinente (ver anexo nº: 1), en relación al número de individuos, vendrá dada por la expresión:

$$W_{CI,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{(CI)_i}{n_i} - \frac{CI}{n}\right)^2 \times \frac{n_i}{n}}{(CI)/n}}, \forall i \in (1,2,...,8)$$

Esto es:

$$W = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}\left(x_i - \frac{168.713}{1.000}\right) \times f_i}{168'713}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(135'0\text{-}168'713)^2 \times 0'003 + (152'5 - 168'713)^2 \times 0'015 + (157'5\text{-}168'713)^2 \times 0'05 +}{168'713}}$$

$$\sqrt{\frac{+ (162'5 - 168'713)^2 \times 0'24 + (167'5\text{-}168'713)^2 \times 0'312 + (172'5 - 168'713)^2 \times 0'235 +}{168'713}}$$

$$\sqrt{\frac{+ (177'5\text{-}168'713)^2 \times 0'108 + (194'0 - 168'713)^2 \times 0'037}{168'713}} = \sqrt{\frac{58'73}{168'713}} = 0'59$$

que, como era de esperar, resulta ser muy bajo.

3.6. Curva e índice de concentración de Lorenz

3.6.1. Otras especificaciones acerca de la curva de Lorenz

En el ejemplo que desarrollamos se considera una población de N = 1.000 individuos y la variable estadística $X = \{x_i, n_i\}$, $\forall i = 1, 2, 3..., r$, donde x_i es el CI correspondiente a cada una de los individuos del colectivo, siendo $N = \sum_{i=1}^{r} n_i$. Supongamos además que: $x_1 < x_2 < ... < x_r$. Llamemos $u_i = \sum_{j=1}^{i} x_j \cdot n_j$ es decir, el cociente intelectual total poseído por los individuos cuyo CI es menor o igual que x_i. Sea $p_i = \frac{N_i^{\uparrow}}{N} \cdot 100$, es decir, el porcentaje de individuos poseedores del cociente intelectual u_i ($N_i^{\uparrow}$ es la frecuencia absoluta acumulada ascendente, es decir, el número de individuos poseedores del cociente intelectual u_i); sea $q_i = \frac{u_i}{u_r} \cdot 100$, es decir, el porcentaje del cociente intelectual poseído por los $N_i^{\uparrow}$ individuos anteriores.

Pues bien, la curva de Lorenz es la línea poligonal quebrada que une los puntos (0, 0), (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), ..., (p_r, q_r). En este caso, r = 8.

En el problema que nos ocupa, la correspondiente curva poligonal de Lorenz apenas se separa prácticamente de la diagonal o bisectriz del primer cuadrante, dado el bajísimo valor del índice de Gini obtenido (G = 0’02), como hemos tenido ocasión de comprobar con anterioridad.

También puede resultar de interés, en nuestro caso, la aplicación de la función del económetra italiano Vilfredo Pareto (1848-1923) a la distribución de los cocientes intelectuales por todo el colectivo de superdotados en cuestión[2].

3.6.2. Índice de concentración de Lorenz

En el problema que contemplamos, veamos que un valor aproximado de este índice es el que se obtiene mediante la aplicación de la fórmula basada en los porcentajes acumulados, que se emplea comúnmente en los trabajos prácticos. Aquí, la fórmula correspondiente explicada en el anexo anterior de este mismo libro, tomará la configuración simplificada (con n = 8 y q_n = 100):

$$L = 1 - \frac{2}{7} \times \frac{\sum_{i=1}^{7} q_i}{100} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{7} q_i}{350}$$

El resultado que ofrece la aplicación de la fórmula anterior es el siguiente, teniendo en cuenta, como ya se ha dicho, que resulta necesario ordenar los valores de la variable psicológica en estudio (CI) de menor a mayor, para la aplicación correcta de la fórmula, así:

	X_i	q_i
	0’24	0’24
	1’36	1’60
	4’25	5’85
	4’67	10’52
	11’36	21’88
	23’12	45’00
	24’03	69’03
	30’97	100’00
$\sum_{i=1}^{8}$	100’00	254’12

FIG. A-2.10. Ordenación creciente de los porcentajes acumulados de cocientes intelectuales

2 Educado como ingeniero y matemático, Pareto se dedicó, en una primera etapa, a la aplicación de las matemáticas a la economía. Sucedió a León Walras en la cátedra de economía de la Universidad de Lausanne, en 1892. Utilizando las curvas de indiferencia introducidas por Edgeworth, logró establecer las condiciones matemáticas para que se produjera el Equilibrio General; creó el concepto de "óptimo", llamado luego óptimo paretiano, para referirse a una situación donde se obtiene una máxima utilidad dado un conjunto previo de bienes o servicios. Sus trabajos sirvieron como punto de partida para la llamada “Economía del Bienestar”. Criticó agudamente al socialismo.

A esta distribución de probabilidad le corresponde, pues, el índice de Lorenz:

$$\mathbf{L} = 1 - \frac{154'12}{350} = \mathbf{0'56}$$

4. Ajuste a una distribución normal

4.1. La hipótesis de normalidad y el estadígrafo χ^2

La distribución que venimos estudiando de la variable psicológica CI, en el colectivo de superdotados considerado, puede ajustarse a una distribución normal. De este modo, la distribución teórica de los cocientes intelectuales vendrá dada, como ya se ha visto, por la función de densidad normal:

$$y = (1/6'36 \cdot \sqrt{2\pi}) \cdot e^{\frac{(x-168'325)^2}{80'8992}}$$

Mediante los métodos adecuados de la Estadística Matemática, sería posible justificar la bondad de este ajuste contrastando la **hipótesis de normalidad** mediante el empleo del estadígrafo χ^2 de Pearson, tal como ya se realiza en algún otro apartado de esta misma obra.

En la figura A-2.11 se ha representado gráficamente la función anterior. En realidad, tal representación significa el **ajuste de una función de densidad normal** a la distribución de los CI observados por medición de los mismos. Utilizando una tabla de la distribución normal como la que incluimos en este mismo capítulo, podemos obtener las áreas de las superficies que están limitadas por la curva normal, el eje de abscisas y las ordenadas en los extremos o límites de los intervalos de clase. Dado que, como es bien sabido, dicha área total es igual a la unidad (probabilidad total del espacio muestral), resultará que cada una de ellas expresa la probabilidad p_i de que la variable "CI" tome un valor perteneciente al correspondiente intervalo de clase.

Para proceder al ajuste es necesario transformar los valores observados de la variable CI (en este caso representados por el límite superior L_i de cada intervalo de clase) en *valores tipificados* o "estandarizados", lo que se consigue restando de cada L_i la media aproximada de valor 168 (columna 2ª de la tabla de la figura A-2.12) y dividiendo dicha diferencia por la desviación típica 6'36 de la distribución observada (3ª columna), al objeto de poder emplear las tablas de la distribución normal, obtenidas para una distribución de media $\alpha = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$. Así:

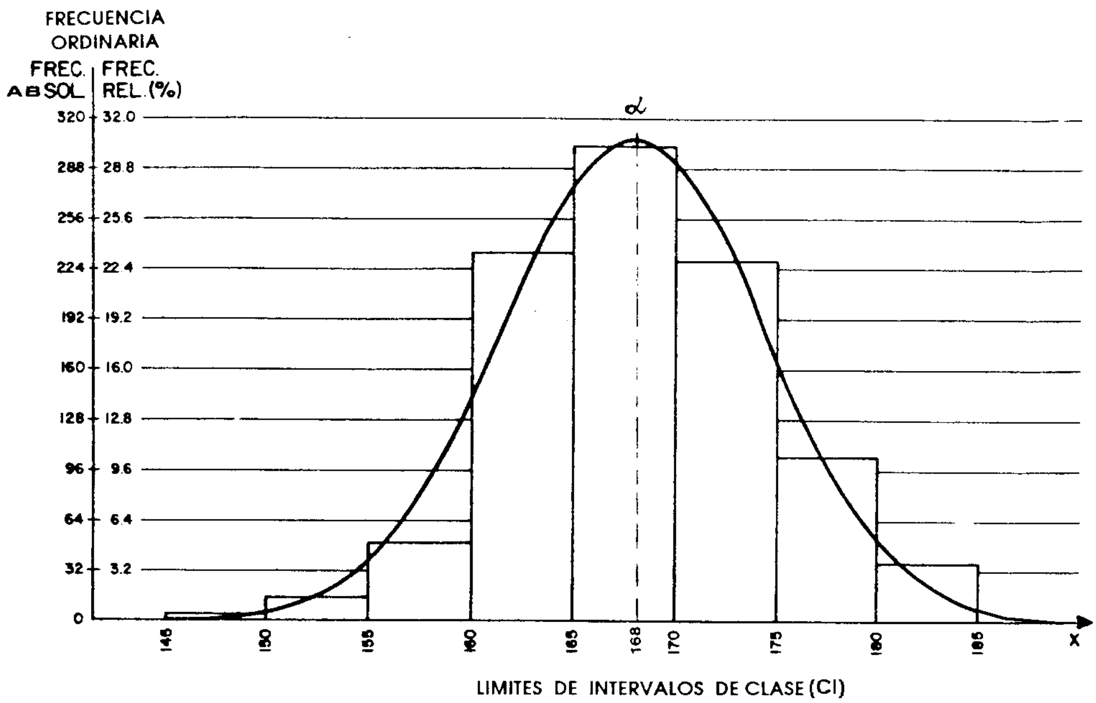


FIG. A-2.11. Distribución campaniforme o gaussiana de los CI

AJUSTE DE UNA DISTRIBUCION NORMAL A LA DE LOS COCIENTES INTELECTUALES						
L_i	L_i-168	$t=\frac{L_i-168}{6,36}$	P	p_i	T_i	n_i
150	−18	−2,817	0,002	0,002	2	3
155	−13	−2,034	0,021	0,019	19	15
160	−8	−1.252	0,105	0,084	84	50
165	−3	−0,469	0,319	0,214	214	240
170	2	0,313	0,622	0,303	303	312
175	7	1,095	0,864	0,242	242	235
180	12	1,878	0,971	0,107	107	108
∞	∞	∞	1,000	0,029	29	37
				1,000	1.000	1.000

FIG. A-2.12. Ajuste a una distribución normal de los CI

Las áreas bajo la curva normal se obtienen como diferencia entre los valores correspondientes de la función de distribución. A partir de estos valores tipificados se puede emplear la Tabla de la Distribución Normal, calculando mediante las oportunas interpolaciones, en su caso, los valores P, tales que:

$$P_1 = \int_{-\infty}^{-2'817} f(t)\cdot dt = 0'002 \quad ; \quad P_2 = \int_{-\infty}^{-2'034} f(t)\cdot dt = 0'021 \quad ; etc.,$$

siendo:

$$t = Z = (x-\alpha)/\sigma$$

La diferencia entre dos P_i consecutivas determina las probabilidades p_i de que la variable CI tome un valor comprendido entre L_{i-1} y L_i, de tal manera que:

$$p_1 = P_1 = 0'002 \quad ;$$
$$p_2 = P_2 - P_1 = 0'021 - 0'002 = 0'019 \text{ ; etc.}$$

Las frecuencias teóricas son proporcionales a las correspondientes áreas existentes bajo la curva normal. Distribuyendo la frecuencia total, n = 1.000 individuos, en nuestro caso, proporcionalmente respecto a las probabilidades p_i, se obtienen las *frecuencias teóricas* T_i, que corresponderían a los cocientes intelectuales observados si la variable CI se ajustara *exactamente* al modelo teórico de la distribución normal. **En nuestro ejemplo, las discrepancias entre los valores observados n_i y los teóricos T_i son lo suficientemente pequeñas como para que pueda aceptarse la hipótesis de que la *variable psicológica CI sigue una distribución normal***, a pesar de la determinación que realizaremos a continuación.

En cualquier caso puede hacerse, como ya se ha apuntado, un contraste de la bondad del ajuste utilizando el estadígrafo χ^2 de Pearson, con (n-1) grados de libertad, a saber:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - T_i)^2}{T_i}$$

puesto que $\forall\ T_i > 5$, a excepción del correspondiente al primer intervalo de clase L_1, ya que $T_1 = 2$.

De este modo, se tendrá:

$$\chi^2 = \frac{(3-2)^2}{2} + \frac{(15-19)^2}{19} + \frac{(50-84)^2}{84} + \frac{(240-214)^2}{214} + \frac{(312-303)^2}{303} + $$
$$+ \frac{(235-242)^2}{242} + \frac{(108-107)^2}{107} + \frac{(37-29)^2}{29} = 20'95$$

El valor de χ^2 con: 8-1 = 7 g.l., para una probabilidad del 5% es 14'067 < 20'95, *luego se rechaza la hipótesis nula y, en su consecuencia, el ajuste o asimilación a una distribución normal será sólo orientativo, pero no aceptable estrictamente*.

4.2. Determinación y fiabilidad del coeficiente de correlación no lineal

Podemos, no obstante, calcular el coeficiente de determinación o crítico del ajuste anterior, a partir de la siguiente fórmula de la varianza residual:

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n} = \frac{2.044}{8} = 255'5 \quad ; \quad S_{n_i}^2 = 12.617 \quad ;$$

$$R = r^2 = 1 - \frac{S_e^2}{S_{n_i}^2} = 1 - \frac{255'5}{12.617} = 0'980 \quad ,$$

lo que implica un coeficiente de correlación de:

$$r = \pm \sqrt{0'980} = \pm \mathbf{0'990}$$

que resulta suficientemente aceptable, razón por la que aceptaremos como válido el presente ajuste normalizado.

Por otra parte, y por lo que se refiere a la fiabilidad del coeficiente de correlación hallado **r**, definimos la variable aleatoria:

$$Z = 1 / 2 \cdot \ln [(1+r) / (1-r)] \quad ; \quad e^{2z} = [(1+r) / (1-r)] \quad ;$$

con: $\rho = 0'990$ y $n = 8$.

Se trata de determinar un intervalo de valores entre los que puede razonablemente esperarse (con una probabilidad del 95%) que se encuentre **r**, con media:

$$\mu_z = \frac{\ln \frac{1+\rho}{1-\rho}}{2} = \frac{\ln \frac{1'99}{0'01}}{2} = 2'647$$

y desviación típica:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0'447$$

El intervalo buscado será:

$$Z = \mu_Z \pm 2 \cdot \sigma_Z = 2'647 \pm 0'894 = 3'541 \text{ y } 1'753 \quad ,$$

valores éstos que corresponden a: $r_1 = 0'998$ y $r_2 = 0'942$.

Así pues, puede afirmarse que la probabilidad de que se cumpla la desigualdad: $0'942 < r < 0'998$, es del 95%.

Aunque la relación precedente simplifique, de modo notable, el problema de determinar la exactitud de **r** como estimador de **ρ**, tiene la desventaja de no ser fiable si las dos variables analizadas no poseen una distribución normal conjunta. En su consecuencia, a menos que se esté bastante seguro de que estas variables tengan tal distribución -por lo menos con una buena aproximación- no debe confiarse grandemente en los resultados obtenidos.

5. Distribución exponencial

Un caso particular de la distribución anteriormente estudiada $\Gamma(\alpha,a)$ en el anexo anterior de nuestro libro se presenta cuando: $\alpha = 1$, circunstancia que da lugar a la denominada "distribución exponencial", a la que también nos hemos referido con anterioridad. O sea, se tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/\beta}}{\beta}, & \forall x > 0 \\ 0 & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

En nuestro caso, asimilamos: $\beta = \overline{X} = 168'713$ (media aritmética de la distribución o esperanza matemática de la misma), con lo que:

$$f(x) = \frac{1}{168'713} \cdot e^{-\frac{x}{168'713}}$$

Así pues, si se trata, por ejemplo, de saber la probabilidad de encontrar, en el colectivo de superdotados analizado, un individuo de CI máximo inferior a 160, el problema estriba entonces en calcular la integral definida:

$$F(x < 160) = \int_{135}^{160} \frac{e^{\frac{-x}{168'713}}}{168'713} \cdot dx = \begin{Bmatrix} t = x/168'713 \\ dx = 168'713 \cdot dt \end{Bmatrix} =$$

(haciendo el correspondiente cambio de variable)

$$= \int_{0'80}^{0'95} e^{-t} \cdot dt = \left[- e^{-t}\right]_{0'80}^{0'95} = -e^{-0'95} + e^{-0'80} = 0'44933 - 0'38674 = 0'06259 = 6'3\%$$

resultado éste que diverge algo del que se deduce de la tabla de la figura anterior A-2.1, donde correspondería el 6'8%, como se puede comprobar. De hecho, la determinación del grado de exactitud del ajuste de la distribución anterior a la distribución teórica exponencial se habría de contrastar mediante un *test* de hipótesis χ^2 con (k-1) grados de libertad, siendo **k** el número de pares de clase comparados. En nuestro caso, tendríamos que:

$$e_i = \frac{e^{-\frac{x_i}{168'713}}}{168'713} \cdot n = \frac{5'93}{e^{x_i/168'713}};$$

Obviamente, el valor del estadígrafo es:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$$

que resulta ser elevado e inapropiado, habida cuenta del carácter descendente de esta distribución teórica de probabilidad, que no se corresponde con la realidad del caso práctico cuya resolución nos ocupa, con lo que, la discrepancia entre los valores teóricos (propios de la distribución exponencial) y los reales es bastante grande, y haría falta buscar una distribución mejor, circunstancia que excede las pretensiones de nuestro problema, ya que $\chi^2_{0'95}$ (5 g.l.) = 11'07, en el caso de escoger una región crítica del 5%.

6. Corrección por agrupamiento en "clases"

Veamos, por último, que por haberse realizado, en este ejemplo práctico, un agrupamiento en clases o intervalos de amplitud: c = 5 de los valores de la variable psicológica analizada (coeficientes intelectuales de los individuos componentes del colectivo de superdotados analizado), procede aplicar la corrección de Sheppard para la determinación de la desviación típica más ajustada de los datos del problema. Esto es:

$$\sigma_c^2 = \sigma^2 - \frac{c^2}{12} = 168'44^2 - 168'32^2 - \frac{5^2}{12} = 38'33 = m_2 \text{ (varianza corregida)}$$

$$\sigma_c = \sqrt{38'33} = 6'19 \text{ (desviación típica corregida),}$$

que lógicamente, resultan ser de alguna menor cuantía que en la primera determinación efectuada. Ello podría obligar a una ligera revisión de los cálculos anteriores en los que se haya hecho intervenir a la expresada medida de la dispersión, por el colectivo, de los valores de la variable psicológica estudiada CI. Como consecuencia de estas correcciones, se tendría también un coeficiente de asimetría corregido de:

$$g_1 \text{ corregido} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2 \text{ corregido}})^3} = \frac{47'2652}{(\sqrt{38'33})^3} = 0'20$$, que resulta ser algo superior al obtenido anteriormente.

Del mismo modo, obsérvese que el valor del momento central de 4º orden sin corregir es: m_4 = 4.834'5243. Practicando ahora la corrección Sheppard pertinente, que puede verse con mayor extensión en el ejemplo siguiente, se tiene que:

$$m_4 \text{ corregido} = m_4 - (½)c^2 m_2 + (7/240)\, c^4 =$$
$$= 4.834'5243 - ½(5)^2(40'45) + (7/240)\cdot(5)^4 =$$
$$= 4.834'5243 - 505'625 + 18'2292 = 4.347'1285$$

Así mismo, por lo que se refiere al coeficiente de curtosis corregido, se tendrá que:

g_2 corregido = a_4 corregido – 3 =

$$\frac{m_4 \text{ corregido}}{(m_2 \text{ corregido})^2} - 3 = \frac{4.347'1285}{38'33^2} - 3 = 2'96 - 3'00 = -0'04$$

En cualquier caso, la restricción que se impone para poder emplear este tipo de corrección es el hecho que sólo se puede aplicar para variables continuas, donde las colas de la distribución en ambas direcciones van a cero, como es el caso de la que nos ocupa. Sin embargo, su inconveniencia estriba en que la corrección puede modificar substancialmente algunos resultados, lo que conlleva a cometer otro error, habiéndose generado mucha polémica entre los expertos sobre cuándo usar la corrección explicitada.

II. SEGUNDO PROBLEMA

El presente ejercicio está adaptado del libro clásico de Murray R. Spiegel titulado “Teoría y problemas de Estadística”. Ed. McGraw-Hill. México, 1969, citado en la bibliografía.

La tabla de la figura siguiente A-2.13. muestra las marcas de clase y las frecuencias simples del cociente de inteligencia (CI) de 480 alumnos de una cierta escuela elemental, obtenido mediante un *test* WISC (*Wechsler Intelligence Scale for Children*). Se trata de hallar: (a) las medias aritmética y cuadrática. (b) la desviación típica o “standard” y la varianza mediante los métodos clave. (c) los coeficientes de uniformidad psicológica. (d) Otras medidas centrales y de dispersión de la variable psicológica. (e) Comprobación Charlier y corrección Sheppard de los apartados anteriores (a) y (b). (f) porcentaje de estudiantes del problema cuyos cocientes de inteligencia caen dentro de los intervalos: $\overline{X} \pm s, \overline{X} \pm 2s, \overline{X} \pm 3s.$ **(g) Convertir los CI en referencias tipificadas y construir un gráfico de frecuencias relativas de la variable normalizada. (h) Hallar los momentos para los datos agrupados, aplicando la comprobación Charlier y la corrección Sheppard. (i) Calcular la asimetría y la curtosis de esta distribución, aplicando las correspondientes correcciones Sheppard.**

Marcas de clase (*Xi*)	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Frecuencias (*f*)	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

FIG. A-2.13. Marcas de clase y frecuencias simples

Solución:

El cociente de inteligencia, como se sabe, viene dado por: (C.I.) = edad mental/edad cronológica, y está expresado como porcentaje. Por ejemplo, un niño de 8 años que, de acuerdo con ciertos procedimientos poblacionales tiene una mentalidad equivalente a la de un niño de 10 años, tendrá un C.I. = 10/8 = 1’25 = 125% o simplemente 125, puesto que el porcentaje se sobreentiende.

Por lo que se refiere al número de clases, en este caso, y en base a la fórmula de Sturgess, deberían haberse considerado, orientativamente:

$$k = 1 + 3'3 \cdot \log_{10} 480 = 9'85 \approx 10 \text{ clases},$$

habiendo considerado, sin embargo, k = 15 clases.

Para hallar cómodamente la media aritmética y la desviación típica de los cocientes de inteligencia, el trabajo puede ordenarse como indica la tabla de la figura siguiente:

Li	*Xi*	*u*	*f*	*fu*	*fu*^{2}	*Ni*↑	*Ni*↓
68-72	70	-6	4	-24	144	4	476
72-76	74	-5	9	-45	225	13	467
76-80	78	-4	16	-64	256	29	451
80-84	82	-3	28	-84	252	57	423
84-88	86	-2	45	-90	180	102	378
88-92	90	-1	66	-66	66	168	312
92-96	**A**→94	0	85	0	0	253	227
96-100	98	1	72	72	72	325	155
100-104	102	2	54	108	216	379	101
104-108	106	3	38	114	342	417	63
108-112	110	4	27	108	432	444	36
112-116	114	5	18	90	450	462	18
116-120	118	6	11	66	396	473	7
120-124	122	7	5	35	245	478	2
124-128	126	8	2	16	128	480	0
			$N = \sum f = 480$	$\sum fu = 236$	$\sum fu^2 = 3.404$		

FIG. A-2.14. Frecuencias ordinarias y acumuladas de la distribución de cocientes intelectuales

(a) $\overline{X} = A + c\overline{u} = A + c\frac{\sum fu}{N} = 94 + 4\left(\frac{236}{480}\right) = 95'97$

(b) $s = c\sqrt{\overline{u^2} - \overline{u}^2} = c\sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} = 4\sqrt{\frac{3.404}{480} - \left(\frac{236}{480}\right)^2} = 4\sqrt{6'8499} = 10'47$

, y un valor de la varianza de: $s^2 = 109'60$.

Debe tenerse en cuenta que la media cuadrática tendrá un valor de:

$$C = \sqrt{s^2 + \overline{X}^2} = \sqrt{109'60 + 95'97^2} = 96'54\ .$$

Conociendo los valores de la media aritmética y la desviación típica, también podríamos intentar el ajuste de la variable psicológica CI a una distribución normal. En este caso, la distribución teórica de los cocientes intelectuales de los alumnos constituyentes del colectivo analizado vendría dada por la función de densidad normal:

$$y = (1/10'47 \times \sqrt{2\pi}) \times e^{\frac{(x-95'97)^2}{219'2}}\ ,$$

aunque habría que comprobar la bondad de dicho ajuste mediante el empleo del *test* χ^2, tal como hemos realizado en el ejercicio anterior.

(c) El recorrido o rango entre los valores extremos de la variable psicológica de esta distribución de frecuencias vendrá dado por: R = 128 – 68 = 60, y el recorrido relativo será:

R’ = $R/\overline{X}$ = 60/95’97 = 0’625, con un coeficiente de apertura de:

$C_{ap} = x_{15}/x_1$ = 126/70 = 1’8,

mientras que el coeficiente de variación de Pearson, será:

$$CV = \frac{s}{\overline{X}} \times 100 = \frac{10'47}{95'97} \times 100 = 10'91\% .$$

Obsérvese que, en este caso, al configurar la tabla de la figura A-2.14 hemos ampliado el rango o recorrido artificiosamente, resultando en todos los casos intervalos de clase de la misma amplitud (c_i = 4), incluyendo los intervalos extremos. De hecho, el recorrido o rango existente entre las marcas de clase extremas vendría dado por:

R = 126 – 70 = 56, y el recorrido relativo valdría, entonces:

R’ = R / $\overline{X}$ = 56 / 95’97 = 0’584.

En este segundo ejemplo, como puede observarse, la dispersión de los CI por el colectivo analizado resulta mayor que en el caso anterior, por lo que la medida de la “uniformidad psicológica” será menor, así:

$$\begin{cases} CU_1 = 100\,(1 - CV) = 100\,(1 - 0'1091) = 89'09\% \\ CU_2 = 100\,(1 - 0'68 \cdot CV) = 100\,(1 - 0'68 \cdot 0'1091) = 92'58\% \\ CU_3 = 100\,(1 - 1'27 \cdot CV) = 100\,(1 - 1'27 \cdot 0'1091) = 86'14\% \\ CU_4 = 100\,(1 - 0'80 \cdot CV) = 100\,(1 - 0'80 \cdot 0'1091) = 91'27\% \end{cases}$$

Veamos, por último, que el “coeficiente de uniformidad psicológica medio” ofrecerá un valor de:

$$\overline{CU} = 100\,(1 - 0'92 \cdot CV) = 100\,(1 - 0'92 \cdot 0'1091) = 89'96\%$$

La representación gráfica de los valores de los diferentes coeficientes de uniformidad hallados, a los que hemos añadido el CU_5 que se calcula más adelante, en definitiva, será la siguiente:

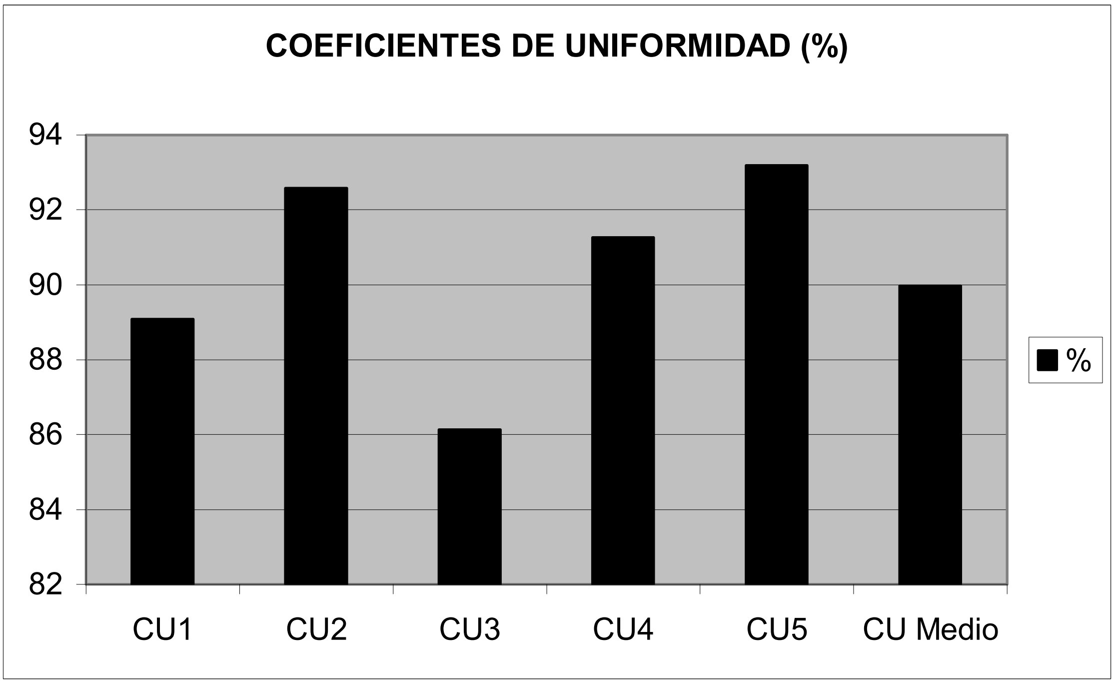


FIG. A-2.15. Valores de los diferentes coeficientes de uniformidad

(d) Como la frecuencia absoluta acumulada ascendente Ni↑ = 480/2 = 240 se encuentra en el intervalo de clase 92-96, en él se encuentra también la mediana o segundo cuartil de esta distribución de frecuencias, con lo que:

$$Me = Q_2 = 92 + \frac{240 - 168}{85} \cdot 4 = 95'39\ .$$

Las medias que venimos estudiando (aritmética, geométrica, cuadrática y armónica) constituyen medidas de posición central que representan el conjunto de valores observados de la distribución psicológica, equilibrando los más elevados, los intermedios y los más bajos, ya que en su cómputo intervienen todos ellos. El problema que tienen estas medias es que resultan sensibles a los valores extremos y cuando existe mucha dispersión son poco representativas del conjunto de observaciones; de ahí la conveniencia de calcular también la mediana que, en vez de equilibrar los valores de la variable psicológica analizada para determinar el centro de gravedad de la distribución, equilibra las frecuencias observadas a ambos lados de la misma.

Desde el punto de vista geométrico, la mediana es el valor de la abscisa (X) que corresponde a la vertical u ordenada (Y) que divide la representación gráfica de la función de densidad en dos partes de igual área, dejando a su izquierda el mismo número de frecuencias que a su derecha. Este promedio señala también el punto de intersección de los diagramas acumulativos ascendente y descendente, que se deducen de la tabla inicial del problema, como puede verse a continuación:

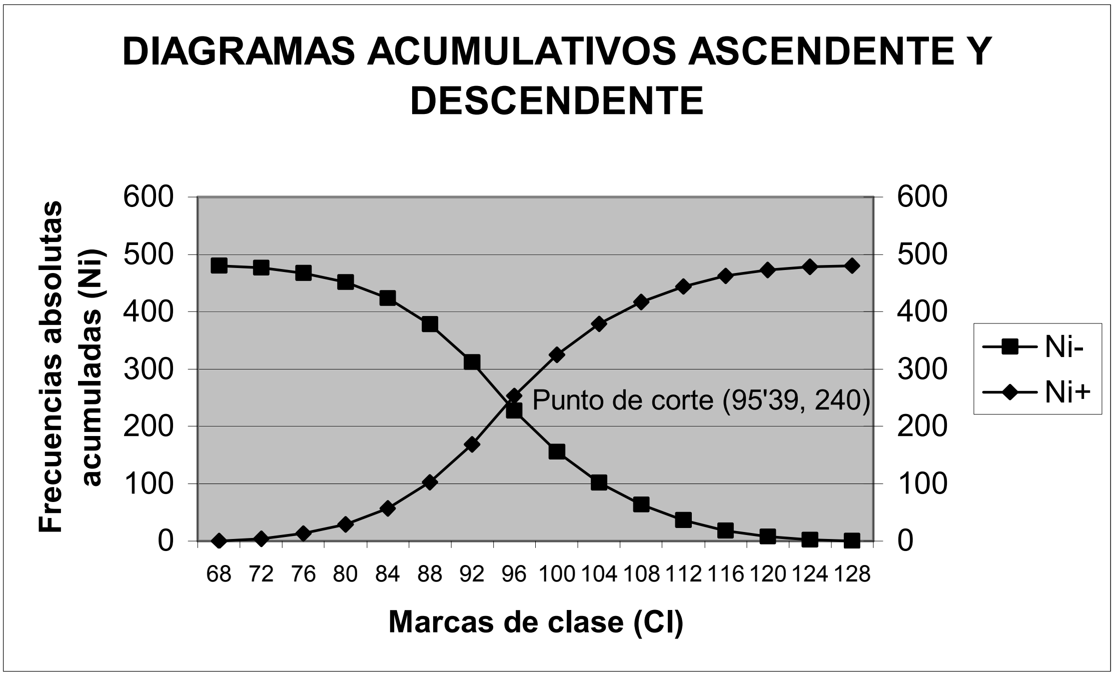


FIG. A-2.16. Diagramas acumulativos ascendente y descendente de los cocientes intelectuales

Del mismo modo se tendrá:

-Primer cuartil: $Q_1 = 88 + \frac{120 - 102}{66} \cdot 4 = 89'09$

-Tercer cuartil: $Q_3 = 100 + \frac{360 - 325}{54} \cdot 4 = 102'59$

Es decir, entre el alumnado analizado, la mitad tiene un CI inferior a 95'39, la cuarta parte un CI inferior a 89'09, y el intervalo $89'09 \leq CI \leq 102'59$ comprende el 50% de los alumnos.

Con todo ello, también, definiremos los siguientes parámetros:

- Moda: $Mo = 92 + \frac{72}{66 + 72} \cdot 4 = 94'09$

-Recorrido intercuartílico: $Q_3 - Q_1 = 102'59 - 89'09 = 13'5$

-Recorrido semi-intercuartílico:

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{13'5}{102'59 + 89'09} = 0'07, \text{ y también:}$$

$$CU_5 = 100 \times \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = 100 \times \sqrt{\frac{89'09}{102'59}} = 0'9319 = 93'19\%.$$

(e) Comprobación Charlier y corrección Sheppard

Mediante la comprobación Charlier, se verifican los cálculos de (a) la media aritmética y (b) la desviación típica del problema que nos ocupa.

Para hacer la comprobación pedida, se añaden las columnas de la tabla de la figura A-2.17 a las de la tabla de la figura A-2.14, con la excepción de la columna 2 que se repite aquí por conveniencia.

Comprobación de (a):
$\sum f(u+1) = 716$, de la tabla de la figura A-2.17.
$\sum fu + N = 236 + 480 = 716$ de la tabla de la figura A-2.14.
Esto suministra la comprobación de la media aritmética.

Comprobación de (b):
$\sum f(u+1)^2 = 4.356$, de la tabla de la figura A-2.17.
$\sum fu^2 + 2\sum fu + N = 3.404 + 2(236) + 480 = 4.356$ de la tabla de la figura A-2.14.
Esto suministra la comprobación de la desviación típica o *standard*.

$u + 1$	f	$f(u + 1)$	$f(u + 1)^2$
-5	4	-20	100
-4	9	-36	144
-3	16	-48	144
-2	28	-56	112
-1	45	-45	45
0	66	0	0
1	85	85	85
2	72	144	288
3	54	162	486
4	38	152	608
5	27	135	675
6	18	108	648
7	11	77	539
8	5	40	320
9	2	18	162
	$N = \sum f = 480$	$\sum f(u + 1) = 716$	$\sum f(u + 1)^2 = 4.356$

FIG. A-2.17. Tabla auxiliar de cálculo (I)

Comprobación Sheppard para la varianza:

s^2 = 109'60, c = 4. Varianza corregida = $s^2 - (c^2/12)$ = 109'60 – (4^2/12) = 108'27.

Desviación típica corregida $= \sqrt{108'27} = 10'41$

(f) Mediante el empleo de las propiedades de la desviación típica, se trata de determinar el porcentaje de estudiantes del problema cuyos cocientes de inteligencia caigan dentro de los intervalos: (1) $\overline{X} \pm s$, (2) $\overline{X} \pm 2s$, (3) $\overline{X} \pm 3s$.

(1) $\overline{X} \pm s = 95'97 \pm 10'47$ da un intervalo de 85'5 a 106'4.

El número de cocientes de inteligencia en este intervalo es:

$$\left(\frac{88-85'5}{4}\right)(45)+66+85+72+54+\left(\frac{106'4-104}{4}\right)(38)=339$$

Porcentaje pedido: (339/480) x 100 = 70'6%.

(2) $\overline{X} \pm 2s = 95'97 \pm 2(10'47)$ da el intervalo de 75'0 a 116'9.

El número de cocientes de inteligencia en este intervalo es:

$$\left(\frac{76-75'0}{4}\right)(9)+16+28+45+66+85+72+54+38+27+18+\left(\frac{116'9-116}{4}\right)(11)=451$$

Porcentaje pedido: (451/480) x 100 = 94'0%.

(3) $\overline{X} \pm 3s = 95'97 \pm 3(10'47)$ da el intervalo de 64'6 a 127'4.

El número de cocientes de inteligencia en este intervalo es:

$$480-\left(\frac{128-127'4}{4}\right)(2)=479'7 \text{ ó } 480$$

Porcentaje pedido: (479'7/480) x 100 = 99'9% o prácticamente 100%.

Los porcentajes obtenidos de (1), (2) y (3) están bastante de acuerdo con aquellos que cabría esperarse de una distribución normal para los mismos intervalos, es decir, 68'27%, 95'45% y 99'73%, respectivamente, tal como hemos visto en el anexo nº: 1.

Adviértase que no se ha empleado la corrección Sheppard efectuada anteriormente para la desviación típica. Si se emplease en este caso los resultados aún se acercarían más a los esperados. También estos resultados pueden obtenerse mediante la tabla de la figura A-2.18.

(g) Se trata ahora de convertir los C.I. en referencias tipificadas y construir un gráfico de frecuencias relativas de la variable normalizada.

El trabajo de conversión en referencias tipificadas puede ordenarse tal como se indica en la tabla de la FIG. A-2.18. En esta tabla se han añadido, para utilizar posteriormente, las marcas de clase de C.I. 66 y 130 que tienen frecuencia cero.

Tampoco se ha utilizado la corrección Sheppard para la desviación típica. Las referencias corregidas en este caso son prácticamente las mismas que las dadas aquí para la precisión indicada, teniendo en cuenta que, para simplificar los cálculos: $\overline{X} \approx 96'0$, $s \approx 10'5$.

La tabla resultante es la siguiente:

C.I.(X)	$X-\bar{X}$	$z = \frac{X-\bar{X}}{s}$	Frecuencias f	Frecuencias relativas f/N (%)
66	−30,0	−2,86	0	0,0
70	−26,0	−2,48	4	0,8
74	−22,0	−2,10	9	1,9
78	−18,0	−1,71	16	3,3
82	−14,0	−1,33	28	5,8
86	−10,0	−0,95	45	9,4
90	−6,0	−0,57	66	13,8
94	−2,0	−0,19	85	17,7
98	2,0	0,19	72	15,0
102	6,0	0,57	54	11,2
106	10,0	0,95	38	7,9
110	14,0	1,33	27	5,6
114	18,0	1,71	18	3,8
118	22,0	2,10	11	2,3
122	26,0	2,48	5	1,0
126	30,0	2,86	2	0,4
130	34,0	3,24	0	0,0
			480	100%

FIG. A-2.18. Tabla para la tipificación

El gráfico de frecuencias relativas de la variable normalizada z (polígono de frecuencias relativas) se muestra en la figura siguiente A-2.19. El eje horizontal o de abscisas se mide en unidades de desviación típica s. Adviértase que la distribución que nos ocupa es moderadamente asimétrica y ligeramente sesgada a la derecha. En efecto:

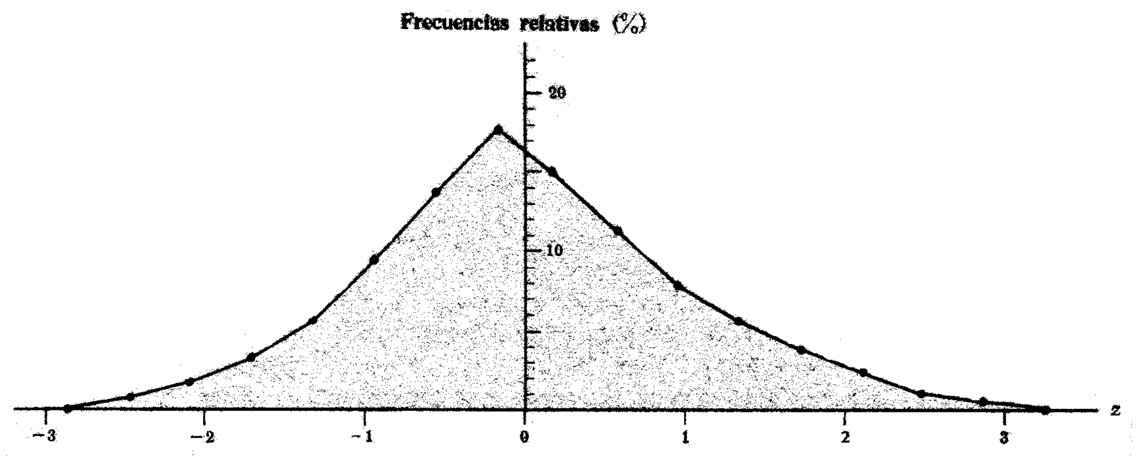


FIG. A-2.19. Gráfico de frecuencias relativas de la variable tipificada

(h) Se pide, ahora, hallar: (a) m_1', (b) m_2', (c) m_3', (d) m_4', (e) m_1, (f) m_2, (g) m_3, (h) m_4, (i) $\overline{X}$, (j) s, (k) $\overline{X}^2$ y (l) $\overline{X}^3$ para la distribución de nuestro problema.

Los momentos potenciales pedidos son medidas obtenidas a partir de todos los datos de una variable estadística psicológica y sus frecuencias absolutas. Estas medidas caracterizan a las distribuciones de frecuencias de tal forma que si los momentos coinciden en dos distribuciones, diremos que son iguales, siendo tanto más semejantes cuanto mayor sea el número de momentos que coinciden.

Para ello, elaboraremos la siguiente tabla:

Xi	*u*	*f*	*fu*	fu^2	fu^3	fu^4
70	-6	4	-24	144	-864	5.184
74	-5	9	-45	225	-1.125	5.625
78	-4	16	-64	256	-1.024	4.096
82	-3	28	-84	252	-756	2.268
86	-2	45	-90	180	-360	720
90	-1	66	-66	66	-66	66
94(A)	0	85	0	0	0	0
98	1	72	72	72	72	72
102	2	54	108	216	432	864
106	3	38	114	342	1.026	3.078
110	4	27	108	432	1.728	6.912
114	5	18	90	450	2.250	11.250
118	6	11	66	396	2.376	14.256
122	7	5	35	245	1.715	12.005
126	8	2	16	128	1.024	8.192
		$N = \sum f = 480$	$\sum fu = 236$	$\sum fu^2 = 3.404$	$\sum fu^3 = 6.428$	$\sum fu^4 = 74.588$

FIG. A-2.20. Tabla auxiliar de cálculo (II)

Los momentos ordinarios son los siguientes:

$$\text{(a) } m_1' = c\frac{\sum fu}{N} = (4)\left(\frac{236}{480}\right) = 1'9667 \approx (95'97 - 94)$$

$$\text{(b) } m_2' = c^2\frac{\sum fu^2}{N} = (4)^2\left(\frac{3.404}{480}\right) = 113'4667$$

$$\text{(c) } m_3' = c^3\frac{\sum fu^3}{N} = (4)^3\left(\frac{6.428}{480}\right) = 857'0667$$

$$\text{(d) } m_4' = c^4\frac{\sum fu^4}{N} = (4)^4\left(\frac{74.588}{480}\right) = 39.780'2667$$

Los momentos respecto a la media aritmética o centrales, son los siguientes:

(e) $m_1 = 0$, por la 1ª propiedad de la media aritmética

(f) $m_2 = m_2' - m_1'^2 = 113'4667 - (1'9667)^2 = 109'5988 \approx 109'60$ (varianza sin corregir)

(g) $m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3 = 857'0667 - 3(1'9667)(113'4667) + 2(1'9667)^3 = 202'8158$

(h) $m_4 = m_4' - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4 = 35.627'2853$

El resto de especificaciones es el siguiente:

$$\text{(i) } \overline{X} = \overline{(A+d)} = A + m_1' = A + c\frac{\sum fu}{N} = 94 + 1'9667 \approx 95'97$$

$$\text{(j) } s = \sqrt{m_2} = \sqrt{109'5988} = 10'47 \text{ (sin corregir)}$$

$$\text{(k) } \overline{X}^2 = \overline{(A+d)^2} = \overline{(A^2 + 2Ad + d^2)} = A^2 + 2A\overline{d} + \overline{d^2} = A^2 + 2Am_1' + m_2' = (94)^2 + 2(94)(1'9667) + 113'4667 = 9.319'2063, \text{ ó } 9.319$$

con cuatro cifras significativas.

$$\text{(l) } \overline{X}^3 = \overline{(A+d)^3} = \overline{(A^3 + 3A^2d + 3Ad^2 + d^3)} = A^3 + 3A^2\overline{d} + 3A\overline{d^2} + \overline{d^3} = A^3 + 3A^2m_1' + 3Am_2' + m_3' = 915.571'9597, \text{ ó } 915.572$$

con seis cifras significativas.

Por otra parte, la comprobación Charlier, en el cálculo de momentos por el método clave, utiliza las siguientes identidades:

$$\begin{cases} \sum f(u+1) = \sum fu + N \\ \sum f(u+1)^2 = \sum fu^2 + 2\sum fu + N \\ \sum f(u+1)^3 = \sum fu^3 + 3\sum fu^2 + 3\sum fu + N \\ \sum f(u+1)^4 = \sum fu^4 + 4\sum fu^3 + 6\sum fu^2 + 4\sum fu + N \end{cases}$$

Para realizar la comprobación pedida añadimos las siguientes columnas a las del problema que nos ocupa, con la excepción de la columna 2, que se repite aquí por conveniencia. Así:

$u + 1$	f	$f(u + 1)$	$f(u+1)^2$	$f(u+1)^3$	$f(u+1)^4$
-5	4	-20	100	-500	2.500
-4	9	-36	144	-576	2.304
-3	16	-48	144	-432	1.296
-2	28	-56	112	-224	448
-1	45	-45	45	-45	45
0	66	0	0	0	0
1	85	85	85	85	85
2	72	144	288	576	1.152
3	54	162	486	1.458	4.374
4	38	152	608	2.432	9.728
5	27	135	675	3.375	16.875
6	18	108	648	3.888	23.328
7	11	77	539	3.773	26.411
8	5	40	320	2.560	20.480
9	2	18	162	1.458	13.122
	$N = \sum f = 480$	$\sum f(u + 1) =$ 716	$\sum f(u + 1)^2 =$ 4.356	$\sum f(u + 1)^3 =$ 17.828	$\sum f(u + 1)^4 =$ 122.148

FIG. A-2.21. Tabla auxiliar de cálculo (III)

En cada uno de los siguientes grupos, la primera y la segunda igualdades se sacan de las tablas anteriormente elaboradas. La igualdad de los resultados de cada una suministra la comprobación pedida. Esto es:

$$\begin{cases} \sum f(u+1) = 716 \\ \sum fu + N = 236 + 480 = 716 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum f(u+1)^2 = 4.356 \\ \sum fu^2 + 2\sum fu + N = 3.404 + 2(236) + 480 = 4.356 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum f(u+1)^3 = 17.828 \\ \sum fu^3 + 3\sum fu^2 + 3\sum fu + N = 6.428 + 3(3.404) + 3(236) + 480 = 17.828 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum f(u+1)^4 = 122.148 \\ \sum fu^4 + 4\sum fu^3 + 6\sum fu^2 + 4\sum fu + N = 74.588 + 4(6.428) + 6(3.404) + 4(236) \\ \qquad + 480 = 122.148 \end{cases}$$

Por otra parte, la correspondiente corrección Sheppard ofrece (los momentos m_1 y m_3 no necesitan corrección):

m_2 corregido = $m_2 - c^2/12 = 109'5988 - 4^2/12 = 108'2655 = s^2$ (varianza corregida). Con ello, también, $s = (108'2655)^{½} = 10'405 \approx 10'41$ (desviación típica corregida)

m_4 corregido = $m_4 - (½)c^2m_2 + (7/240)\, c^4 =$
$= 35.627'2853 - ½(4)^2(109'5988) + (7/240)\cdot(4)^4 =$
$=34.757'9616$

(i)

Por lo que se refiere a las restantes características de la distribución de la variable psicológica CI, veamos que una de la asimetría o sesgo la constituye el "primer coeficiente de asimetría de Pearson", o sea:

$$P_1 = \frac{\overline{X} - Mo}{s} = \frac{95'97 - 94'09}{10'47} = 0'18\ ,$$

luego se trata de una distribución prácticamente simétrica.

También podríamos calcular aquí, con los datos de que se dispone, el "segundo coeficiente de asimetría de Pearson", o sea:

$$P_2 = \frac{3(\overline{X} - Me)}{s} = \frac{3(95'97 - 95'39)}{10'47} = 0'166\ ,$$

o bien el "coeficiente de sesgo cuartílico", de valor:

$$\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{102'59 - 2\times 95'39 + 89'09}{13'5} = 0'067\ ,$$

cuyos resultados conducen, en todos los casos, a conclusiones similares. Cabe observar, no obstante, una ligera asimetría o sesgo hacia la derecha (positivamente) puesto que: $P_1 > 0$, $P_2 > 0$ y además:

$$\overline{X} = 95'97 > Me = 95'39 > Mo = 94'09$$

Por otra parte, el "coeficiente de sesgo" de Fisher o "coeficiente directo de asimetría" vendrá dado por:

$$g_1 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{202'8158}{(\sqrt{109'5988})^3} = 0'1768 \text{ ó } 0'18.$$

Si se utilizan las correcciones Sheppard, se tiene:

$$g_1 \text{ corregido} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2 \text{ corregido}})^3} = \frac{202'8158}{(\sqrt{108'2655})^3} = 0'1800 \text{ ó } 0'18$$

, con lo cual, la diferencia obtenida resulta inapreciable.

Adviértase que se trata de una distribución moderadamente sesgada a la derecha (positivamente), tal como ya se ha dicho.

Por lo que se refiere al apuntamiento o curtosis, veamos que:

$$a_4 = \frac{m_4}{s^4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{35.627'2853}{(109'5988)^2} = 2'9660 \approx 2'97\ ; \quad g_2 = a_4 - 3 = -0'03.$$

Si se aplican las correcciones Sheppard, ya explicitadas con anterioridad, se tiene:

$$a_4 \text{ corregido} = \frac{m_4 \text{ corregido}}{(m_2 \text{ corregido})^2} = \frac{34.757'9616}{(108'2655)^2} = 2'9653 \approx 2'97\ ;$$

Puesto que para una distribución perfectamente normal se cumple que: $a_4 = 3$, se deduce que esta distribución es ligeramente platicúrtica o achatada con respecto a la distribución normal, es decir, de menor apuntamiento que ésta.

III. TERCER PROBLEMA

Los tres ejercicios que siguen, como aplicaciones de la distribución de probabilidad hipergeométrica a los problemas psicológicos, están adaptados del libro de José M. Casas Sánchez y Julián Santos Peñas titulado "Introducción a la Estadística para Economía y Administración de Empresas", Ed. Centro de Estudios Ramón Areces, S.A., Madrid, 1995, citado en la bibliografía.

a) Se sabe, por experiencia, que un grupo de 100 inmigrantes contiene un 10% de individuos sospechosos. El control fronterizo decide investigar dos individuos aleatoriamente, y si ninguno de las dos presenta problemas, entonces acepta el grupo. Definimos la variable aleatoria X como el número de individuos sospechosos en una selección aleatoria de dos de ellos. Obtener la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X, así como la función de distribución.

Solución:

El experimento aleatorio de selección de dos inmigrantes al azar define los sucesos elementales siguientes:

$$\begin{cases} L_1\text{: Primer individuo sospechoso.} \\ L_2\text{: Segundo individuo sospechoso.} \\ \overline{L}_1\text{: Primer individuo no sospechoso.} \\ \overline{L}_2\text{: Segundo individuo no sospechoso.} \end{cases}$$

Al considerar la selección conjunta de los dos individuos, el espacio muestral generado por este experimento aleatorio contiene cuatro sucesos mutuamente excluyentes y forman un sistema completo de sucesos.

En la tabla de la figura siguiente aparecen los sucesos elementales del espacio muestral, las correspondientes probabilidades y los valores que puede tomar la variable aleatoria X. Así:

Sucesos	Probabilidades	Valor de la variable aleatoria X
$L_1 \cap L_2$	0'0091	2
$L_1 \cap \overline{L}_2$	0'0909	1
$\overline{L}_1 \cap L_2$	0'0909	1
$\overline{L}_1 \cap \overline{L}_2$	0'8091	0
	$\sum =$ 1'0000	

FIG. A-2.22. Sucesos elementales, probabilidades de los mismos y valor de la variable aleatoria.

Las probabilidades para cada suceso, según la regla de multiplicación de probabilidades o probabilidad compuesta, serían:

$$\begin{cases} P(L_1 \cap L_2) = P(L_1)\cdot P(L_2 / L_1) = \dfrac{10}{100}\cdot\dfrac{9}{99} = 0'0091 \\ P(L_1 \cap \overline{L}_2) = P(L_1)\cdot P(\overline{L}_2 / L_1) = \dfrac{10}{100}\cdot\dfrac{90}{99} = 0'0909 \\ P(\overline{L}_1 \cap L_2) = P(\overline{L}_1)\cdot P(L_2 / \overline{L}_1) = \dfrac{90}{100}\cdot\dfrac{10}{99} = 0'0909 \\ P(\overline{L}_1 \cap \overline{L}_2) = P(\overline{L}_1)\cdot P(\overline{L}_2 / \overline{L}_1) = \dfrac{90}{100}\cdot\dfrac{89}{99} = 0'8091 \end{cases}$$

Y consecuentemente las probabilidades con que la variable aleatoria X toma sus diferentes valores serían:

$$\begin{cases} P_1 = P(X = 0) = P(0) = 0'8091 \\ P_2 = P(X = 1) = P(1) = 0'0909 + 0'0909 = 0'1818 \\ P_3 = P(X = 2) = P(2) = 0'0091 \end{cases}$$

La probabilidad de que el control acepte el grupo de los 100 inmigrantes será:

$$P(X = 0) = P(0) = 0'8091$$

La distribución de probabilidad P(x), de la variable aleatoria X aparece en la tabla de la figura A-2.23, en donde aparecen los diferentes valores "x" de la variable aleatoria y sus probabilidades P(x).

Valores de la variable aleatoria x	**Probabilidades P(x)**
0	0'8091
1	0'1818
2	0'0091
$\sum$	1'0000

FIG. A-2.23. Distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.

Ya que los cuatro sucesos del experimento forman un conjunto mutuamente excluyente y exhaustivo de sucesos, las probabilidades correspondientes a estos sucesos suman la unidad.

De hecho, la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta se puede expresar de tres maneras:

- Tabular.
- Algebraica o funcional.
- Gráfica.

La forma **tabular** consiste en expresar en forma de tabla una lista de los valores posibles de la variable aleatoria X y las correspondientes probabilidades P(x), como aparece en la tabla de la figura anterior A-2.23.

La forma **algebraica** o **funcional** se presentan cuando es posible escribir una función en la forma de una ecuación, de tal manera que para cada valor de la variable aleatoria se pueda obtener su probabilidad. Así pues, para el ejemplo a) que estamos tratando, la forma funcional de la distribución de probabilidad sería[3]:

$$P(x) = P(X = x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{100-10}{2-x}}{\binom{100}{2}} = \frac{\binom{10}{x}\binom{90}{2-x}}{4.950}; \ \forall\, x = 0,1,2 \ .$$

Otra forma de presentar la función de probabilidad sería mediante un **gráfico** o **diagrama de barras**, en el que sobre el eje de abscisas llevaríamos los diferentes valores x, de la variable aleatoria X y sobre el eje de ordenadas, las probabilidades P(x). Así pues, para este ejemplo a) tendríamos la figura siguiente A-2.24:

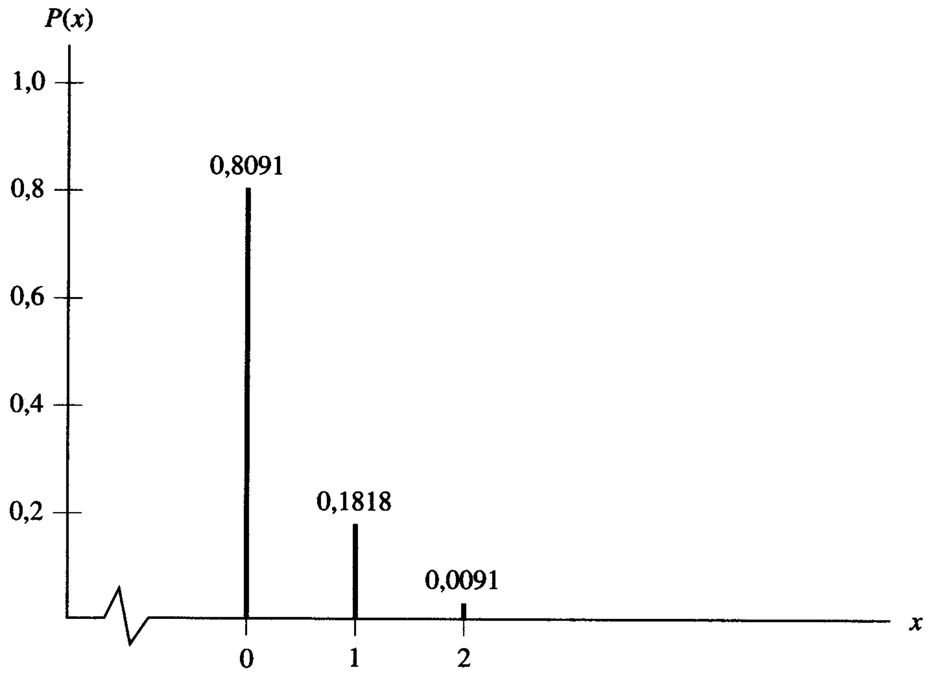


FIG. A-2.24. Función de probabilidad de la variable aleatoria X asociada al experimento aleatorio del presente ejemplo.

Llegados a este punto, una consideración importante sobre variables aleatorias discretas y sus distribuciones a realizar es la siguiente: si X es una

[3] Esta función de probabilidad corresponde a la de una variable aleatoria hipergeométrica.

variable aleatoria discreta y deseamos determinar la probabilidad de que X sea mayor o igual que un cierto valor que un cierto valor **a** y menor o igual que un valor **b**, siendo a ≤ b, solamente tenemos que sumar las probabilidades correspondientes a los valores de X comprendidos entre a y b; es decir:

$$P(a \le X \le b) = \sum_{x=a}^{x=b} P(X = x) = \sum_{x=a}^{x=b} P(x)$$

Así pues, para el presente ejemplo, se tiene:

$$P(0 \le X < 2) = P(0 \le X \le 1) = \sum_{x=0}^{x=1} P(X = x)$$

$$= P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= 0'8091 + 0'1818 = 0'9909$$

Sea ahora una variable aleatoria X de tipo discreto que toma un número finito o infinito numerable de valores x_1, x_2, ..., x_r y cuya distribución de probabilidad es P(x). Se define la **función de distribución** acumulativa de la variable aleatoria X, que notaremos por F(x), como la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores menores o iguales que x, es decir:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(x_i) = \sum_{x_i = x_1}^{x} P(X = x_i)$$

y representa la suma de las probabilidades puntuales, hasta el valor x inclusive, de la variable aleatoria X.

Para el ejemplo que nos ocupa, la función de distribución F(x) viene dada en la tabla de la figura siguiente.

Valores de X X	**Función de probabilidad o densidad P(x)**	**Función de distribución F(x) = P(X ≤ x)**
0	0’8091	F(0) = P(X ≤ 0) = 0’8091
1	0’1818	F(1) = P(X ≤ 1) = 0’9909
2	0’0091	F(2) = P(X ≤ 2) = 1’0000

FIG. A-2.25. Función de distribución de la variable aleatoria del ejemplo a)

Así pues la función de distribución, para cualquier valor de x, quedaría de la siguiente forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0'8091 & , 0 \le x < 1 \\ 0'9909 & , 1 \le x < 2 \\ 1 & , x \ge 2 \end{cases}$$

Se deduce, de la propia definición, que la función de distribución de una variable aleatoria discreta es una función no decreciente de los valores que toma la variable aleatoria y tal que verifica:

I. $0 \le F(x) \le 1, \ \forall \ x$.
II. Si $x_i \le x_j$, entonces $F(x_i) \le F(x_j)$.

La representación gráfica de la función de distribución viene dada por el gráfico de la figura siguiente:

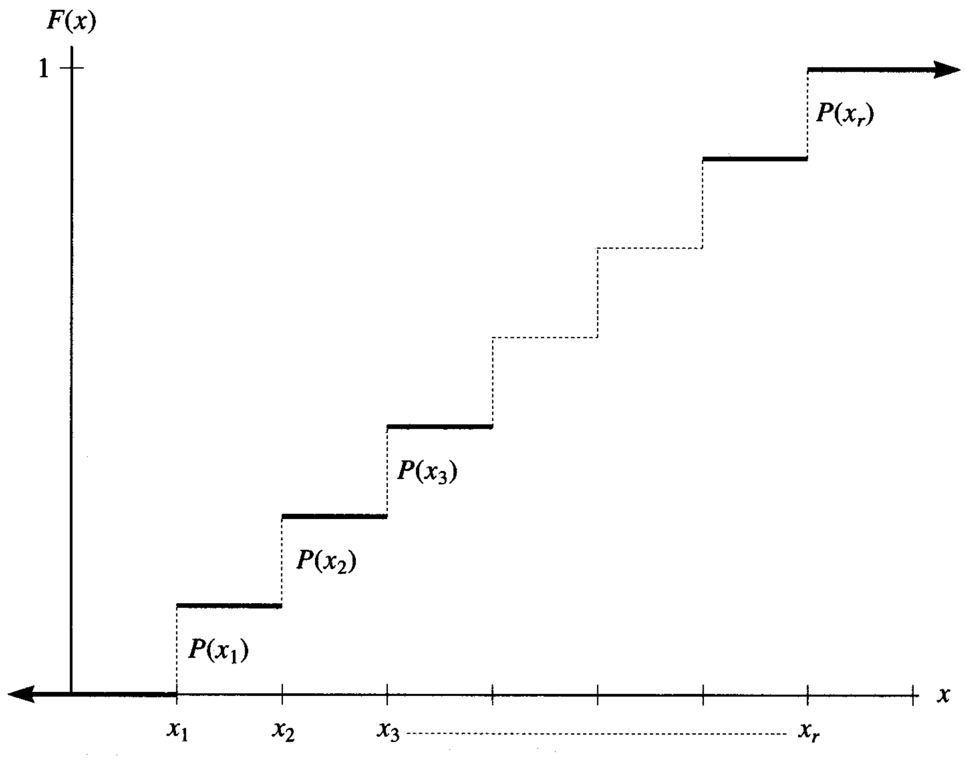


FIG. A-2.26. Función de distribución de una variable aleatoria discreta.

Vemos pues que una variable aleatoria discreta X, está caracterizada por su función de probabilidad o distribución de probabilidad P(x) y también por su función de distribución F(x).

b) Una determinada empresa quiere aumentar su plantilla de vendedores en 20 personas, para lo que inserta un anuncio en prensa y se presentan 40 personas al proceso de selección. Determinar la probabilidad de que, después de realizar todas las pruebas psicotécnicas de selección y haber seleccionado, por diferentes mecanismos, a las 20 personas solicitadas, entre ellas se encuentren las 10 mejores de las 40 personas que se presentaron.

Solución:

Sea la variable aleatoria X:

X: número de los mejores vendedores entre los 20 seleccionados.

La variable aleatoria X se distribuye según una distribución hipergeométrica, $H(N, N_1, n)$, con:

$$N = 40\ ,\ \ N_1 = 10\ \ y\ \ n = 20$$

Luego teniendo en cuenta la expresión de la correspondiente función de densidad, la probabilidad que nos piden será:

$$P(X = 10) = \frac{\binom{10}{10}\binom{40-10}{20-10}}{\binom{40}{20}} = \frac{\binom{10}{10}\binom{30}{10}}{\binom{40}{20}} = \frac{30.045.015}{137.846.528.820} = 0'000218 \approx 0'22‰$$

que resulta ser francamente baja.

c) Entre los 60 aspirantes a unas plazas de educadores sociales en la Administración autonómica, 40 son mujeres. Si seleccionamos una muestra aleatoria, sin reemplazamiento, de 20 aspirantes, obtener la probabilidad de que 10 sean mujeres.

Solución:

Sea la variable aleatoria X.

X: número de mujeres seleccionadas en la muestra de 20 aspirantes.

Esta variable aleatoria X se distribuye según una distribución hipergeométrica $H(N, N_1, n)$, con:

$$N = 60\ \ ,\ N_1 = 40\ \ ,\ \ n = 20$$

Teniendo en cuenta la expresión de la correspondiente función de densidad, podemos calcular la probabilidad que nos piden, que será, en este caso:

$$P(X=10)=\frac{\binom{40}{10}\binom{60-40}{20-10}}{\binom{60}{20}}=\frac{\binom{40}{10}\binom{20}{10}}{\binom{60}{20}}=\frac{847.660.528\times 184.756}{4.191.844.505.805.495}=0'037=$$

$$= 3'7\%.$$

Las tablas que siguen también han sido extraídas del excelente libro de José M. Casas Sánchez y Julián Santos Peñas titulado "Introducción a la Estadística para Economía y Administración de Empresas", Ed. Centro de Estudios Ramón Areces, S.A., Madrid, 1995, citado en la bibliografía.

Tablas de la función de probabilidad hipergeométrica

Esta tabla ofrece la probabilidad de obtener x elementos que pertenezcan a la primera subpoblación cuando se toma una muestra aleatoria sin reemplazamiento o reposición de tamaño n, de la población total. Esto es:

$$H(x;N,N_1,n)=P(x)=P(X=x)=\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

N	n	N_1	x	$P(x)$	N	n	N_1	x	$P(x)$
2	1	1	0	0,5000	5	1	1	0	0,8000
2	1	1	1	0,5000	5	1	1	1	0,2000
3	1	1	1	0,6666	5	2	1	0	0,6000
3	1	1	1	0,3333	5	2	1	1	0,4000
3	2	1	0	0,3333	5	2	2	0	0,3000
3	2	1	1	0,6666	5	2	2	1	0,6000
3	2	2	1	0,6666	5	2	2	2	0,1000
3	2	2	2	0,3333	5	3	1	0	0,4000
4	1	1	0	0,7500	5	3	1	1	0,6000
4	1	1	1	0,2500	5	3	2	0	0,1000
4	2	1	0	0,5000	5	3	2	1	0,6000
4	2	1	1	0,5000	5	3	2	2	0,3000
4	2	2	0	0,1666	5	3	3	1	0,3000
4	2	2	1	0,6666	5	3	3	2	0,6000
4	2	2	2	0,1666	5	3	3	3	0,1000
4	3	1	0	0,2500	5	4	1	0	0,2000
4	3	1	1	0,7500	5	4	1	1	0,8000
4	3	2	1	0,5000	5	4	2	1	0,4000
4	3	2	2	0,5000	5	4	2	2	0,6000
4	3	3	2	0,7500	5	4	3	2	0,6000
4	3	3	3	0,2500	5	4	3	3	0,4000

$$H(x;\, N,\, N_1,\, n) = P(x) = P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N - N_1}{n - x}}{\binom{N}{n}}$$

N	n	N_1	x	$P(x)$	N	n	N_1	x	$P(x)$
5	4	4	3	0,8000	7	2	2	1	0,4761
5	4	4	4	0,2000	7	2	2	2	0,0476
6	1	1	0	0,8333	7	3	1	0	0,5714
6	1	1	1	0,1666	7	3	1	1	0,4285
6	2	1	0	0,6666	7	3	2	0	0,2857
6	2	1	1	0,3333	7	3	2	1	0,5714
6	2	2	0	0,4000	7	3	2	2	0,1428
6	2	2	1	0,5333	7	3	3	0	0,1142
6	2	2	2	0,0666	7	3	3	1	0,5142
6	3	1	0	0,5000	7	3	3	2	0,3428
6	3	1	1	0,5000	7	3	3	3	0,0285
6	3	2	0	0,2000	7	4	1	0	0,4285
6	3	2	1	0,6000	7	4	1	1	0,5714
6	3	2	2	0,2000	7	4	2	0	0,1428
6	3	3	0	0,0500	7	4	2	1	0,5714
6	3	3	1	0,4500	7	4	2	2	0,2857
6	3	3	2	0,4500	7	4	3	0	0,0285
6	3	3	3	0,0500	7	4	3	1	0,3428
6	4	1	0	0,3333	7	4	3	2	0,5142
6	4	1	1	0,6666	7	4	3	3	0,1142
6	4	2	0	0,0666	7	4	4	1	0,1142
6	4	2	1	0,5333	7	4	4	2	0,5142
6	4	2	2	0,4000	7	4	4	3	0,3428
6	4	3	1	0,2000	7	4	4	4	0,0285
6	4	3	2	0,6000	7	5	1	0	0,2857
6	4	3	3	0,2000	7	5	1	1	0,7142
6	4	4	2	0,4000	7	5	2	0	0,0476
6	4	4	3	0,5333	7	5	2	1	0,4761
6	4	4	4	0,0666	7	5	2	2	0,4761
6	5	1	0	0,1666	7	5	4	4	0,1428
6	5	1	1	0,8333	7	5	5	3	0,4761
6	5	2	1	0,3333	7	5	5	4	0,4761
6	5	2	2	0,6666	7	5	5	5	0,0476
6	5	3	2	0,5000	7	6	1	0	0,1428
6	5	3	3	0,5000	7	6	1	1	0,8571
6	5	4	3	0,6666	7	6	2	1	0,2857
6	5	4	4	0,3333	7	6	2	2	0,7142
6	5	5	4	0,8333	7	6	3	2	0,4285
6	5	5	5	0,1666	7	6	3	3	0,5714
7	1	1	0	0,8571	7	6	4	3	0,5714
7	1	1	1	0,1428	7	6	4	4	0,4285
7	2	1	0	0,7142	7	6	5	4	0,7142
7	2	1	1	0,2857	7	6	5	5	0,2857
7	2	2	0	0,4761	7	6	6	5	0,8571

$$H(x;\, N,\, N_1,\, n) = P(x) = P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N - N_1}{n - x}}{\binom{N}{n}}$$

N	n	N_1	x	$P(x)$	N	n	N_1	x	$P(x)$
7	6	6	6	0,1428	8	5	5	2	0,1785
8	1	1	0	0,8750	8	5	5	3	0,5357
8	1	1	1	0,1250	8	5	5	4	0,2678
8	2	1	0	0,7500	8	5	5	5	0,0178
8	2	1	1	0,2500	8	6	1	0	0,2500
8	2	2	0	0,5357	8	6	1	1	0,7500
8	2	2	1	0,4285	8	6	2	0	0,0357
8	2	2	2	0,0357	8	6	2	1	0,4285
8	3	1	0	0,6250	8	6	2	2	0,5357
8	3	1	1	0,3750	8	6	3	1	0,1071
8	3	2	0	0,3571	8	6	3	2	0,5357
8	3	2	1	0,5357	8	6	3	3	0,3571
8	3	2	2	0,1071	8	6	4	2	0,2142
8	3	3	0	0,1785	8	6	4	3	0,5714
8	3	3	1	0,5357	8	6	4	4	0,2142
8	3	3	2	0,2678	8	6	5	3	0,3571
8	3	3	3	0,0178	8	6	5	4	0,5357
8	4	1	0	0,5000	8	6	5	5	0,1071
8	4	1	1	0,5000	8	6	6	4	0,5357
8	4	2	0	0,2142	8	6	6	5	0,4285
8	4	2	1	0,5714	8	6	6	6	0,0357
8	4	2	2	0,2142	8	7	1	0	0,1250
8	4	3	0	0,0714	8	7	1	1	0,8750
8	4	3	1	0,4285	8	7	2	1	0,2500
8	4	3	2	0,4285	8	7	2	2	0,7500
8	4	3	3	0,0714	8	7	3	2	0,3750
8	4	4	0	0,0142	8	7	4	3	0,6250
8	4	4	1	0,2285	8	7	4	3	0,5000
8	4	4	2	0,5142	8	7	4	4	0,5000
8	4	4	3	0,2285	8	7	5	4	0,6250
8	4	4	4	0,0142	8	7	5	5	0,3750
8	5	1	0	0,3750	8	7	6	5	0,7500
8	5	1	1	0,6250	8	7	6	6	0,2500
8	5	2	0	0,1071	8	7	7	6	0,8750
8	5	2	1	0,5357	8	7	7	7	0,1250
8	5	2	2	0,3571	9	1	1	0	0,8888
8	5	3	0	0,0178	9	1	1	1	0,1111
8	5	3	1	0,2678	9	2	1	0	0,7777
8	5	3	2	0,5357	9	2	1	1	0,2222
8	5	3	3	0,1785	9	2	2	0	0,5833
8	5	4	1	0,0714	9	2	2	1	0,3888
8	5	4	2	0,4285	9	2	2	2	0,0277
8	5	4	3	0,4285	9	3	1	0	0,6666
8	5	4	4	0,0714	9	3	1	1	0,3333

$$H(x;\, N,\, N_1,\, n) = P(x) = P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N - N_1}{n - x}}{\binom{N}{n}}$$

N	n	N_1	x	$P(x)$	N	n	N_1	x	$P(x)$
9	3	2	0	0,4166	9	6	3	2	0,5357
9	3	2	1	0,5000	9	6	3	3	0,2380
9	3	2	2	0,0833	9	6	4	1	0,0476
9	3	3	0	0,2380	9	6	4	2	0,3571
9	3	3	1	0,5357	9	6	4	3	0,4761
9	3	3	2	0,2142	9	6	4	4	0,1190
9	3	3	3	0,0119	9	6	5	2	0,1190
9	4	1	0	0,5555	9	6	5	3	0,4761
9	4	1	1	0,4444	9	6	5	4	0,3571
9	4	2	0	0,2777	9	6	5	5	0,0476
9	4	2	1	0,5555	9	6	6	3	0,2380
9	4	2	2	0,1666	9	6	6	4	0,5357
9	4	3	0	0,1190	9	6	6	5	0,2142
9	4	3	1	0,4761	9	6	6	6	0,0119
9	4	4	1	0,3174	9	7	1	0	0,2222
9	4	4	2	0,4761	9	7	1	1	0,7777
9	4	4	3	0,1587	9	7	2	0	0,0277
9	4	4	4	0,0079	9	7	2	1	0,3888
9	5	1	0	0,4444	9	7	2	2	0,5833
9	5	1	1	0,5555	9	7	3	1	0,0833
9	5	2	0	0,1666	9	7	3	2	0,5000
9	5	2	1	0,5555	9	7	3	3	0,4166
9	5	2	2	0,2777	9	7	4	2	0,1666
9	5	3	0	0,0476	9	7	4	3	0,5555
9	5	3	1	0,3571	9	7	4	4	0,2777
9	5	3	2	0,4761	9	7	5	3	0,2777
9	5	3	3	0,1190	9	7	5	4	0,5555
9	5	4	0	0,0079	9	7	5	5	0,1666
9	5	4	1	0,1587	9	7	6	4	0,4166
9	5	4	2	0,4761	9	7	6	5	0,5000
9	5	4	3	0,3174	9	7	6	6	0,8333
9	5	4	4	0,0396	9	7	7	5	0,5833
9	5	5	1	0,0396	9	7	7	6	0,3888
9	5	5	2	0,3174	9	7	7	7	0,0277
9	5	5	3	0,4761	9	8	1	0	0,1111
9	5	5	4	0,1587	9	8	1	1	0,8888
9	5	5	5	0,0079	9	8	2	1	0,2222
9	6	1	0	0,3333	9	8	2	2	0,7777
9	6	1	1	0,6666	9	8	3	2	0,3333
9	6	2	0	0,0833	9	8	3	3	0,6666
9	6	2	1	0,5000	9	8	4	3	0,4444
9	6	2	2	0,4166	9	8	4	4	0,5555
9	6	3	0	0,0119	9	8	5	4	0,5555
9	6	3	1	0,2142	9	8	5	5	0,4444

$$H(x;\,N,\,N_1,\,n) = P(x) = P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N - N_1}{n - x}}{\binom{N}{n}}$$

N	n	N_1	x	$P(x)$	N	n	N_1	x	$P(x)$
9	8	6	5	0,6666	10	5	3	2	0,4166
9	8	6	6	0,3333	10	5	3	3	0,0833
9	8	7	6	0,7777	10	5	4	0	0,0238
9	8	7	7	0,2222	10	5	4	1	0,2380
9	8	8	7	0,8888	10	5	4	2	0,4761
9	8	8	8	0,1111	10	5	4	3	0,2380
10	1	1	0	0,9000	10	5	4	4	0,0238
10	1	1	1	0,1000	10	5	5	0	0,0039
10	2	1	0	0,8000	10	5	5	1	0,0992
10	2	1	1	0,2000	10	5	5	2	0,3968
10	2	2	0	0,6222	10	5	5	3	0,3968
10	2	2	1	0,3555	10	5	5	4	0,0992
10	2	2	2	0,0222	10	5	5	5	0,0039
10	3	1	0	0,7000	10	6	1	0	0,4000
10	3	1	1	0,3000	10	6	1	1	0,6000
10	3	2	0	0,4666	10	6	2	0	0,1333
10	3	2	1	0,4666	10	6	2	1	0,5333
10	3	2	2	0,0666	10	6	2	2	0,3333
10	3	3	0	0,2916	10	6	3	0	0,0333
10	3	3	1	0,5250	10	6	3	1	0,3000
10	3	3	2	0,1750	10	6	3	2	0,5000
10	3	3	3	0,0083	10	6	3	3	0,1666
10	4	1	0	0,6000	10	6	4	0	0,0047
10	4	1	1	0,4000	10	6	4	1	0,1142
10	4	2	0	0,3333	10	6	4	2	0,4285
10	4	2	1	0,5333	10	6	4	3	0,3809
10	4	2	2	0,1333	10	6	4	4	0,0714
10	4	3	0	0,1666	10	6	5	1	0,0238
10	4	3	1	0,5000	10	6	5	2	0,2380
10	4	3	2	0,3000	10	6	5	3	0,4761
10	4	3	3	0,0333	10	6	5	4	0,2380
10	4	4	0	0,0714	10	6	5	5	0,0238
10	4	4	1	0,3809	10	6	6	2	0,0714
10	4	4	2	0,4285	10	6	6	3	0,3809
10	4	4	3	0,1142	10	6	6	4	0,4285
10	4	4	4	0,0047	10	6	6	5	0,1142
10	5	1	0	0,5000	10	6	6	6	0,0047
10	5	1	1	0,5000	10	7	1	0	0,3000
10	5	2	0	0,2222	10	7	1	1	0,7000
10	5	2	1	0,5555	10	7	2	0	0,0666
10	5	2	2	0,2222	10	7	2	1	0,4666
10	5	3	0	0,0833	10	7	2	2	0,4666
10	5	3	1	0,4166	10	7	3	0	0,0083

Tablas de la función de distribución hipergeométrica

La función de distribución hipergeométrica viene dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \forall x < \text{máx}\,(0, n - N\cdot q) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{x} \frac{\binom{N\cdot p}{i}\binom{N\cdot q}{n-i}}{\binom{N}{n}} & , \text{máx}\,(0, n - N\cdot q) \leq x \leq \text{mín}\,(n, N\cdot p) \\ 1 & , \forall x > \text{mín}\,(n, N\cdot p) \end{cases}$$

En esta tabla tenemos los valores correspondientes a la función de distribución de una $H(N, N_1, n)$, para $N \leq 10$, $N_1 \leq 8$ y $n \leq 8$, es decir:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \frac{\sum_{x_i \leqslant x} \binom{N_1}{x_i}\binom{N - N_1}{n - x_i}}{\binom{N}{n}}$$

N	n	N_1	x	$F(x)$
2	1	1	0	0,5000
2	1	1	1	1,0000
3	1	1	0	0,6666
3	1	1	1	1,0000
3	2	1	0	0,3333
3	2	1	1	1,0000
3	2	2	1	0,6666
3	2	2	2	1,0000
4	1	1	0	0,7500
4	1	1	1	1,0000
4	2	1	0	0,5000
4	2	1	1	1,0000
4	2	2	0	0,1666
4	2	2	1	0,8333
4	2	2	2	1,0000
4	3	1	0	0,2500
4	3	1	1	1,0000
4	3	2	1	0,5000
4	3	2	2	1,0000
4	3	3	2	0,7500
4	3	3	3	1,0000
5	1	1	0	0,8000
5	1	1	1	1,0000
5	2	1	0	0,6000
5	2	1	1	1,0000
5	2	2	0	0,3000
5	2	2	1	0,9000
5	2	2	2	1,0000
5	3	1	0	0,4000
5	3	1	1	1,0000
5	3	2	0	0,1000
5	3	2	0	0,1000
5	3	2	1	0,7000
5	3	2	2	1,0000
5	3	3	1	0,3000
5	3	3	2	0,9000
5	3	3	3	1,0000
5	4	1	0	0,2000
5	4	1	1	1,0000
5	4	2	1	0,4000
5	4	2	2	0,0000
5	4	3	2	0,6000
5	4	3	3	1,0000
5	4	4	3	0,8000
5	4	4	4	1,0000
6	1	1	0	0,8333
6	1	1	1	1,0000
6	2	1	0	0,6666

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \frac{\sum_{x_i \leqslant x} \binom{N_1}{x_i}\binom{N - N_1}{n - x_i}}{\binom{N}{n}}$$

N	n	N_1	x	$F(x)$	N	n	N_1	x	$F(x)$
6	2	1	1	1,0000	7	3	2	1	0,8571
6	2	2	0	0,4000	7	3	2	2	1,0000
6	2	2	1	0,9333	7	3	3	0	0,1142
6	2	2	2	1,0000	7	3	3	1	0,6285
6	3	1	0	0,5000	7	3	3	3	0,9714
6	3	1	1	1,0000	7	3	3	3	1,0000
6	3	2	0	0,2000	7	4	1	0	0,4285
6	3	2	1	0,8000	7	4	1	1	1,0000
6	3	2	2	1,0000	7	4	2	0	0,1428
6	3	3	0	0,0500	7	4	2	1	0,7142
6	3	3	1	0,5000	7	4	2	2	1,0000
6	3	3	2	0,9500	7	4	3	0	0,0285
6	3	3	3	1,0000	7	4	3	1	0,3714
6	4	1	0	0,3333	7	4	3	2	0,8857
6	4	1	1	1,0000	7	4	3	3	1,0000
6	4	2	0	0,0666	7	4	4	1	0,1142
6	4	2	1	0,6000	7	4	4	2	0,6285
6	4	2	2	1,0000	7	4	4	3	0,9714
6	4	3	1	0,2000	7	4	4	4	1,0000
6	4	3	2	0,8000	7	5	1	0	0,2857
6	4	3	3	1,0000	7	5	1	1	1,0000
6	4	4	2	0,4000	7	5	2	0	0,0476
6	4	4	3	0,9333	7	5	2	1	0,5238
6	4	4	4	1,0000	7	5	2	2	1,0000
6	5	1	0	0,1666	7	5	3	1	0,1428
6	5	1	1	1,0000	7	5	3	2	0,7142
6	5	2	1	0,3333	7	5	3	3	1,0000
6	5	2	2	1,0000	7	5	4	4	1,0000
6	5	3	2	0,5000	7	5	5	3	0,4761
6	5	3	3	1,0000	7	5	5	4	0,9523
6	5	4	3	0,6666	7	5	5	5	1,0000
6	5	4	4	1,0000	7	6	1	0	0,1428
6	5	5	4	0,8333	7	6	1	1	1,0000
6	5	5	5	1,0000	7	6	2	1	0,2857
7	1	1	0	0,8571	7	6	2	2	1,0000
7	1	1	1	1,0000	7	6	3	2	0,4285
7	2	1	0	0,7142	7	6	3	3	1,0000
7	2	1	1	1,0000	7	6	4	3	0,5714
7	2	2	0	0,4761	7	6	4	4	1,0000
7	2	2	1	0,9523	7	6	5	4	0,7142
7	2	2	2	1,0000	7	6	5	5	1,0000
7	3	1	0	0,5714	7	6	6	5	0,8571
7	3	1	1	1,0000	7	6	6	6	1,0000
7	3	2	0	0,2857	8	1	1	0	0,8750

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \frac{\displaystyle\sum_{x_i \leqslant x} \binom{N_1}{x_i}\binom{N - N_1}{n - x_i}}{\displaystyle\binom{N}{n}}$$

N	n	N_1	x	$F(x)$
8	1	1	1	1,0000
8	2	1	0	0,7500
8	2	1	1	1,0000
8	2	2	0	0,5357
8	2	2	1	0,9642
8	2	2	2	1,0000
8	3	1	0	0,6250
8	3	1	1	1,0000
8	3	2	0	0,3571
8	3	2	1	0,8928
8	3	2	2	1,0000
8	3	3	0	0,1785
8	3	3	1	0,7142
8	3	3	2	0,9821
8	3	3	3	1,0000
8	4	1	0	0,5000
8	4	1	1	1,0000
8	4	2	0	0,2142
8	4	2	1	0,7857
8	4	2	2	1,0000
8	4	3	0	0,0714
8	4	3	1	0,5000
8	4	3	2	0,9285
8	4	3	3	1,0000
8	4	4	0	0,0142
8	4	4	1	0,2428
8	4	4	2	0,7571
8	4	4	3	0,9857
8	4	4	4	1,0000
8	5	1	0	0,3750
8	5	1	1	1,0000
8	5	2	0	0,1071
8	5	2	1	0,6428
8	5	2	2	1,0000
8	5	3	0	0,0178
8	5	3	1	0,2857
8	5	3	2	0,8214
8	5	3	3	1,0000
8	5	4	1	0,0714
8	5	4	2	0,5000
8	5	4	3	0,9285
8	5	4	4	1,0000
8	5	5	2	0,1785
8	5	5	3	0,7142
8	5	5	4	0,9821
8	5	5	5	1,0000
8	6	1	0	0,2500
8	6	1	1	1,0000
8	6	2	0	0,0357
8	6	2	1	0,4642
8	6	2	2	1,0000
8	6	3	1	0,1071
8	6	3	2	0,6428
8	6	3	3	1,0000
8	6	4	2	0,2142
8	6	4	3	0,7857
8	6	4	4	1,0000
8	6	5	3	0,3571
8	6	5	4	0,8928
8	6	5	5	1,0000
8	6	6	4	0,5357
8	6	6	5	0,9642
8	6	6	6	1,0000
8	7	1	0	0,1250
8	7	1	1	1,0000
8	7	2	1	0,2500
8	7	2	2	1,0000
8	7	3	2	0,3750
8	7	3	3	1,0000
8	7	4	3	0,5000
8	7	4	4	1,0000
8	7	5	4	0,6250
8	7	5	5	1,0000
8	7	6	5	0,7500
8	7	6	6	1,0000
8	7	7	6	0,8750
8	7	7	7	1,0000
9	1	1	0	0,8888
9	1	1	1	1,0000
9	2	1	0	0,7777
9	2	1	1	1,0000
9	2	2	0	0,5833
9	2	2	1	0,9722
9	2	2	2	1,0000
9	3	1	0	0,6666
9	3	1	1	1,0000
9	3	2	0	0,4166
9	3	2	1	0,9166

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \frac{\sum_{x_i \leqslant x} \binom{N_1}{x_i}\binom{N - N_1}{n - x_i}}{\binom{N}{n}}$$

N	n	N_1	x	$F(x)$	N	n	N_1	x	$F(x)$
9	3	2	2	1,0000	9	6	4	1	0,0476
9	3	3	0	0,2380	9	6	4	2	0,4047
9	3	3	1	0,7738	9	6	4	3	0,8809
9	3	3	2	0,9880	9	6	4	4	1,0000
9	3	3	3	1,0000	9	6	5	2	0,1190
9	4	1	0	0,5555	9	6	5	3	0,5952
9	4	1	1	1,0000	9	6	5	4	0,9523
9	4	2	0	0,2777	9	6	5	5	1,0000
9	4	2	1	0,8333	9	6	6	3	0,2380
9	4	2	2	1,0000	9	6	6	4	0,7738
9	4	3	0	0,1190	9	6	6	5	0,9880
9	4	3	1	0,5952	9	6	6	6	1,0000
9	4	4	1	0,3571	9	7	1	0	0,2222
9	4	4	2	0,8333	9	7	1	1	1,0000
9	4	4	3	0,9920	9	7	2	0	0,0277
9	4	4	4	1,0000	9	7	2	1	0,4166
9	5	1	0	0,4444	9	7	2	2	1,0000
9	5	1	1	1,0000	9	7	3	1	0,0833
9	5	2	0	0,1666	9	7	3	2	0,5833
9	5	2	1	0,7222	9	7	3	3	1,0000
9	5	2	2	1,0000	9	7	4	2	0,1666
9	5	3	0	0,0476	9	7	4	3	0,7222
9	5	3	1	0,4047	9	7	4	4	1,0000
9	5	3	2	0,8809	9	7	5	3	0,2777
9	5	3	3	1,0000	9	7	5	4	0,8333
9	5	4	0	0,0079	9	7	5	5	1,0000
9	5	4	1	0,1666	9	7	6	4	0,4166
9	5	4	2	0,6428	9	7	6	5	0,9166
9	5	4	3	0,9603	9	7	6	6	1,0000
9	5	4	4	1,0000	9	7	7	5	0,5833
9	5	5	1	0,0396	9	7	7	6	0,9722
9	5	5	2	0,3571	9	7	7	7	1,0000
9	5	5	3	0,8333	9	8	1	0	0,1111
9	5	5	4	0,9920	9	8	1	1	1,0000
9	5	5	5	1,0000	9	8	2	1	0,2222
9	6	1	0	0,3333	9	8	2	2	1,0000
9	6	1	1	1,0000	9	8	3	2	0,3333
9	6	2	0	0,0833	9	8	3	3	1,0000
9	6	2	1	0,5833	9	8	4	3	0,4444
9	6	2	2	1,0000	9	8	4	4	1,0000
9	6	3	0	0,0119	9	8	5	4	0,5555
9	6	3	1	0,2261	9	8	5	5	1,0000
9	6	3	2	0,7619	9	8	6	5	0,6666
9	6	3	3	1,0000	9	8	6	6	1,0000

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \frac{\sum_{x_i \leqslant x} \binom{N_1}{x_i}\binom{N - N_1}{n - x_i}}{\binom{N}{n}}$$

N	***n***	***N***$_1$	***x***	***F(x)***	***N***	***n***	***N***$_1$	***x***	***F(x)***
9	8	7	6	0,7777	10	5	3	3	1,0000
9	8	7	7	1,0000	10	5	4	0	0,0238
9	8	8	7	0,8888	10	5	4	1	0,2619
9	8	8	8	1,0000	10	5	4	2	0,7380
10	1	1	0	0,9000	10	5	4	3	0,9761
10	1	1	1	1,0000	10	5	4	4	1,0000
10	2	1	0	0,8000	10	5	5	0	0,0039
10	2	1	1	1,0000	10	5	5	1	0,1031
10	2	2	0	0,6222	10	5	5	2	0,5000
10	2	2	1	0,9777	10	5	5	3	0,8968
10	2	2	2	1,0000	10	5	5	4	0,9960
10	3	1	0	0,7000	10	5	5	5	1,0000
10	3	1	1	1,0000	10	6	1	0	0,4000
10	3	2	0	0,4666	10	6	1	1	1,0000
10	3	2	1	0,9333	10	6	2	0	0,1333
10	3	2	2	1,0000	10	6	2	1	0,6666
10	3	3	0	0,2916	10	6	2	2	1,0000
10	3	3	1	0,8166	10	6	3	0	0,0333
10	3	3	2	0,9916	10	6	3	1	0,3333
10	3	3	3	1,0000	10	6	3	2	0,8333
10	4	1	0	0,6000	10	6	3	3	1,0000
10	4	1	1	1,0000	10	6	4	0	0,0476
10	4	2	0	0,3333	10	6	4	1	0,1190
10	4	2	1	0,8666	10	6	4	1	0,5476
10	4	2	2	1,0000	10	6	4	3	0,9285
10	4	3	0	0,1666	10	6	4	4	1,0000
10	4	3	1	0,6666	10	6	5	1	0,0238
10	4	3	2	0,9666	10	6	5	2	0,2619
10	4	3	3	1,0000	10	6	5	3	0,7380
10	4	4	0	0,0714	10	6	5	4	0,9761
10	4	4	1	0,4523	10	6	5	5	1,0000
10	4	4	2	0,8809	10	6	6	2	0,0714
10	4	4	3	0,9952	10	6	6	3	0,4523
10	4	4	4	1,0000	10	6	6	4	0,8809
10	5	1	0	0,5000	10	6	6	5	0,9952
10	5	1	1	1,0000	10	6	6	6	1,0000
10	5	2	0	0,2222	10	7	1	0	0,3000
10	5	2	1	0,7777	10	7	1	1	1,0000
10	5	2	2	1,0000	10	7	2	0	0,0666
10	5	3	0	0,0833	10	7	2	1	0,5333
10	5	3	1	0,5000	10	7	2	2	1,0000
10	5	3	2	0,9166	10	7	3	0	0,0083

IV. CUARTO PROBLEMA

Sin entrar en la justificación teórica del procedimiento seguido, que el lector encontrará en numerosos tratados de Estadística como algunos de los relacionados en la bibliografía, vamos a contemplar ahora una muestra de la utilidad y aplicabilidad a la Psicología del análisis de la varianza mediante la resolución del siguiente ejercicio.

Se tienen cuatro individuos, obteniéndose, después de diversas pruebas, los siguientes tiempos de realización de un *test* determinado expresados en segundos: el primero (1.600, 1.610, 1.650, 1.680, 1.700, 1.720 y 1.800 segundos), el segundo (1.580, 1.640, 1.640, 1.700 y 1.750 segundos), el tercero (1.460, 1.550, 1.600, 1.620, 1.640, 1.660, 1.740 y 1.820 segundos) y el cuarto (1.510, 1.520, 1.530, 1.570, 1.600 y 1.680 segundos). ¿Puede aceptarse, al nivel de significación del 5%, la hipótesis de que los individuos completan el "test" con la misma duración?.

Solución:

A efectos operativos, procede, en primer lugar, la elaboración de la siguiente tabla de doble entrada:

	Individuos				
i↓ j→	**1**	**2**	**3**	**4**	**Σ**
1	1.600	1.580	1.460	1.510	6.150
2	1.610	1.640	1.550	1.520	6.320
3	1.650	1.640	1.600	1.530	6.420
4	1.680	1.700	1.620	1.570	6.570
5	1.700	1.750	1.640	1.600	6.690
6	1.720		1.660	1.680	5.060
7	1.800		1.740		3.540
8			1.820		1.820
Σ = T.j	11.760	8.310	13.090	9.410	42.570
T^2.j	138.297.600	69.056.100	171.348.100	88.548.100	
T^2.j / n_j	19.756.800	13.811.220	21.418.512'5	14.758.016'7	69.744.549'2

FIG. A-2.27. Tabla auxiliar de cálculo.

Los resultados de los cálculos intermedios, reflejados en la tabla anterior, son los siguientes:

$$
\begin{array}{|ll|}
\hline
T.1 = 11.760\ ; & \dfrac{T.1^2}{7} = 19.756.800 \\
T.2 = 8.310\ ; & \dfrac{T.2^2}{5} = 13.811.220 \\
T.3 = 13.090\ ; & \dfrac{T.3^2}{8} = 21.418.512'5 \\
T.4 = 9.410\ ; & \dfrac{T.4^2}{6} = 14.758.016'7 \\
T.. = 42.570\ ; & \dfrac{T..^2}{26} = 69.700.188'5 \\
\hline
\end{array}
$$

También debe tenerse en cuenta que:

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{4} \frac{T.j^2}{n_j} = 69.744.549'2 \\[2ex]
\displaystyle\sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 = 69.895.900
\end{cases}
$$

Con esto obtenemos las siguientes medidas de las variaciones:

$$
\begin{cases}
\text{- Suma de cuadrados total: } SC_T = 69.895.900 - \dfrac{42.570^2}{26} = 195.711'5 \\
\text{- Suma de cuadrados entre tratamientos:} \\
\qquad SC_{Tr} = 69.744.549'2 - \dfrac{42.570^2}{26} = 44.360'5 \\
\text{- Suma de cuadrados del error: } SC_{Er} = SC_T - SC_{Tr} = 151.351
\end{cases}
$$

El cuadro correspondiente de análisis de la varianza, en definitiva, quedará del siguiente modo:

Origen de variación	**Suma de cuadrados**	**Grados de libertad**	**Cuadrado medio**	**F**
Tratamientos	44.360'5	3	14.786'83	$F_{3,22}$ = 2'15
Error	151.351'0	22	6.879'59	
TOTAL	195.711'5	25		

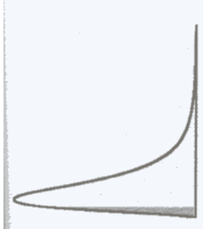
FIG. A-2.28. Tabla de análisis de la varianza.

Ahora, de las tablas de la distribución F de Snedecor-Fisher que reproducimos a continuación del libro de J. Santos y A. Muñoz, citado en la bibliografía, para un nivel de significación del 5%, obtenemos que:

$$F_{0'05} = 3'05$$

Como 2'15 < 3'05, no se rechaza (o se acepta la hipótesis nula) que los cuatro individuos analizados producen resultados iguales en cuanto al tiempo empleado por ellos en la cumplimentación del "test".

Distribución F. Probabilidad 0'05

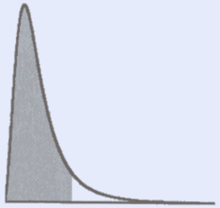


Grados de libertad del numerador (n_1)

Grados de libertad del denominador (n_2)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	0,006	0,054	0,099	0,130	0,151	0,167	0,179	0,188	0,195	0,201	0,211	0,220	0,230	0,235	0,240	0,245	0,250	0,255
2	0,005	0,053	0,105	0,144	0,173	0,194	0,211	0,224	0,235	0,244	0,257	0,272	0,286	0,294	0,302	0,309	0,317	0,326
3	0,005	0,052	0,108	0,152	0,185	0,210	0,230	0,246	0,259	0,270	0,287	0,304	0,323	0,332	0,342	0,352	0,363	0,373
4	0,005	0,052	0,110	0,157	0,193	0,221	0,243	0,261	0,275	0,288	0,307	0,327	0,349	0,360	0,372	0,384	0,396	0,409
5	0,004	0,052	0,111	0,160	0,198	0,228	0,252	0,271	0,287	0,301	0,322	0,345	0,369	0,382	0,395	0,408	0,422	0,437
6	0,004	0,052	0,112	0,162	0,202	0,233	0,259	0,279	0,296	0,311	0,334	0,358	0,385	0,399	0,413	0,428	0,444	0,460
7	0,004	0,052	0,113	0,164	0,205	0,238	0,264	0,286	0,304	0,319	0,343	0,370	0,398	0,413	0,428	0,445	0,462	0,479
8	0,004	0,052	0,113	0,166	0,208	0,241	0,268	0,291	0,310	0,326	0,351	0,379	0,409	0,425	0,441	0,459	0,477	0,496
9	0,004	0,052	0,114	0,167	0,210	0,244	0,272	0,295	0,315	0,331	0,358	0,387	0,418	0,435	0,452	0,471	0,490	0,511
10	0,004	0,052	0,114	0,168	0,211	0,246	0,275	0,299	0,319	0,336	0,363	0,393	0,426	0,444	0,462	0,481	0,502	0,523
11	0,004	0,052	0,114	0,169	0,213	0,248	0,278	0,302	0,322	0,340	0,368	0,399	0,433	0,451	0,471	0,491	0,512	0,535
12	0,004	0,052	0,114	0,169	0,214	0,250	0,280	0,305	0,325	0,343	0,372	0,404	0,439	0,458	0,478	0,499	0,522	0,545
13	0,004	0,052	0,115	0,170	0,215	0,252	0,282	0,307	0,328	0,346	0,376	0,409	0,445	0,464	0,485	0,507	0,530	0,555
14	0,004	0,052	0,115	0,170	0,216	0,253	0,283	0,309	0,331	0,349	0,379	0,413	0,449	0,470	0,491	0,513	0,538	0,563
15	0,004	0,052	0,115	0,171	0,217	0,254	0,285	0,311	0,333	0,352	0,382	0,416	0,454	0,475	0,496	0,520	0,545	0,571
16	0,004	0,052	0,115	0,171	0,217	0,255	0,286	0,312	0,335	0,354	0,385	0,419	0,458	0,479	0,501	0,525	0,551	0,579
17	0,004	0,051	0,115	0,172	0,218	0,256	0,287	0,314	0,336	0,356	0,387	0,422	0,462	0,483	0,506	0,531	0,557	0,585
18	0,004	0,051	0,115	0,172	0,218	0,257	0,288	0,315	0,338	0,357	0,389	0,425	0,465	0,487	0,510	0,535	0,562	0,592
19	0,004	0,051	0,115	0,172	0,219	0,257	0,289	0,316	0,339	0,359	0,391	0,427	0,468	0,490	0,514	0,540	0,567	0,597
20	0,004	0,051	0,116	0,172	0,219	0,258	0,290	0,317	0,341	0,361	0,393	0,430	0,471	0,493	0,518	0,544	0,572	0,603
21	0,004	0,051	0,116	0,173	0,220	0,259	0,291	0,318	0,342	0,362	0,395	0,432	0,473	0,496	0,521	0,548	0,577	0,608
22	0,004	0,051	0,116	0,173	0,220	0,259	0,292	0,319	0,343	0,363	0,396	0,434	0,476	0,499	0,524	0,551	0,581	0,613
23	0,004	0,051	0,116	0,173	0,221	0,260	0,293	0,320	0,344	0,364	0,398	0,435	0,478	0,502	0,527	0,555	0,585	0,617
24	0,004	0,051	0,116	0,173	0,221	0,260	0,293	0,321	0,345	0,365	0,399	0,437	0,480	0,504	0,530	0,558	0,588	0,622
25	0,004	0,051	0,116	0,173	0,221	0,261	0,294	0,322	0,346	0,366	0,400	0,439	0,482	0,506	0,532	0,561	0,592	0,626
26	0,004	0,051	0,116	0,174	0,222	0,261	0,294	0,322	0,346	0,367	0,402	0,440	0,484	0,508	0,535	0,564	0,595	0,630
27	0,004	0,051	0,116	0,174	0,222	0,262	0,295	0,323	0,347	0,368	0,403	0,442	0,486	0,510	0,537	0,566	0,598	0,633
28	0,004	0,051	0,116	0,174	0,222	0,262	0,295	0,324	0,348	0,369	0,404	0,443	0,487	0,512	0,539	0,569	0,601	0,637
29	0,004	0,051	0,116	0,174	0,222	0,262	0,296	0,324	0,349	0,370	0,405	0,444	0,489	0,514	0,541	0,571	0,604	0,640
30	0,004	0,051	0,116	0,174	0,222	0,263	0,296	0,325	0,349	0,370	0,406	0,445	0,490	0,516	0,543	0,573	0,606	0,643
40	0,004	0,051	0,116	0,175	0,224	0,265	0,299	0,329	0,354	0,376	0,412	0,454	0,502	0,529	0,558	0,591	0,627	0,669
60	0,004	0,051	0,117	0,176	0,226	0,267	0,303	0,333	0,359	0,382	0,419	0,463	0,514	0,543	0,575	0,611	0,652	0,700
100	0,004	0,051	0,117	0,177	0,227	0,269	0,305	0,336	0,363	0,386	0,426	0,471	0,525	0,555	0,590	0,629	0,675	0,731
120	0,004	0,051	0,117	0,177	0,227	0,270	0,306	0,337	0,364	0,388	0,427	0,473	0,527	0,559	0,594	0,634	0,682	0,740

Los números interiores corresponden a los valores de la variable F con los grados de libertad que se recogen en la primera fila y la primera columna correspondiente. Por ejemplo, con 8 y 11 g.l. el valor que aparece en el cruce, 0,302 es el valor de la variable F que deja por debajo una probabilidad de 0,05. Es decir: $P(F_{8;11} \leq 0{,}302) = 0{,}05$.

Distribución F. Probabilidad 0'90

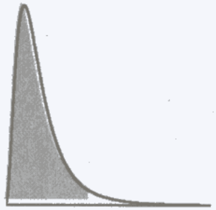


Grados de libertad del numerador (n_1)

Grados de libertad del denominador (n_2)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,88	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,85	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35
100	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,83	1,78	1,73	1,69	1,66	1,61	1,56	1,49	1,46	1,42	1,38	1,34	1,28
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26

Los números interiores corresponden a los valores de la variable F con los grados de libertad que se recogen en la primera fila y la primera columna correspondiente. Por ejemplo, con 12 y 7 g.l. el valor que aparece en el cruce, 2,67 que corresponde al valor de la variable F que deja por debajo una probabilidad de 0,90. Es decir: $P(F_{12;7} \leq 2,67) = 0,90$.

Distribución F. Probabilidad 0'95

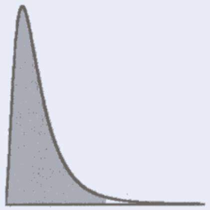


Grados de libertad del numerador (n_1)

Grados de libertad del denominador (n_2)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,90	245,95	248,02	249,05	250,10	251,14	252,20	253,25
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,85	1,77	1,68	1,63	1,57	1,52	1,45	1,38
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35

Los números interiores corresponden a los valores de la variable F con los grados de libertad que se recogen en la primera fila y la primera columna correspondiente. Por ejemplo, con 5 y 13 g.l. el valor que aparece en el cruce es 3,03 que corresponde al valor de la variable F que deja por debajo una probabilidad de 0,95. Es decir: $P(F_{5;13} \leq 3{,}03 = 0{,}95$.

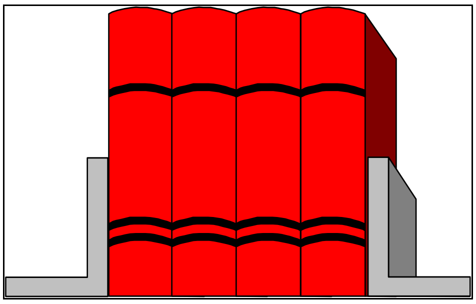
Distribución F. Probabilidad 0’975



Grados de libertad del numerador (n_1)

Grados de libertad del denominador (n_2)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	647,79	799,48	864,15	899,60	921,83	937,11	948,20	956,64	963,28	968,63	976,72	984,87	993,08	997,27	1001,4	1005,6	1009,8	1014,0
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	2,08	1,97	1,85	1,78	1,71	1,64	1,56	1,46
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,95	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43

Los números interiores corresponden a los valores de la variable F con los grados de libertad que se recogen en la primera fila y la primera columna correspondiente. Por ejemplo, con 24 y 5 g.l. el valor que aparece en el cruce es 6,28 que corresponde al valor de la variable F que deja por debajo una probabilidad de 0,975. Es decir: $P(F_{24;5} \leq 6,28 = 0,975$.



BIBLIOGRAFÍA

1. ALCAIDE INCHAUSTI, Ángel (1966): *Lecciones de Econometría y Métodos estadísticos,* Copygraf, Madrid.

2. ALCAIDE INCHAUSTI, A., ARENALES, C. y RODRÍGUEZ, J. (1987): *Estadística (Introducción)*. Unidades Didácticas. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

3. ANSCOMBE, F. J. y AUMANN, R. J. (1963): *A definition of subjetive probability*, Ann. Math. Stat., 34.

4. ASHBY, W. R. (1960): *Introducción a la cibernética*, Nueva Visión, Buenos Aires.

5. BACHRACH (1965): *Psychological research. An introduction* (2ª edición), Random House, New York (existe traducción al castellano: *Cómo investigar en psicología*, Morata, Madrid, 1966).

6. BARTHES, R. (1953): *Le dégrée zéro de l'écriture*, Seuil, Paris.

7. BAYÉS, Ramón (1974): *Una introducción al método científico en psicología*, Editorial Fontanella, Barcelona.

8. BERNARD, C. (1865): *Introduction a l'étude de la médecine expérimentale*, Garnier-Flammarion, París (1966).

9. BINET, A. y SIMON, TH. (1905): *Méthodes nouvelles pour le diagnostic du niveau intellectuel des anormaux*, «Année Psychol.», 11, pp. 191-244.

10. BORING, E.G. (1950): *A History of Experimental Psychology*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York.

11. BREWER, K. (1963) : *Decisions under uncertainty: Comment*, Quart. Jour. Econ., 77.

12. BROSS, Irwin D. J. (1958): *La decisión estadística*, Ed. Aguilar, Madrid.

13. CARNAP, R. (1964): *Foundation of logic and mathematics*, FODOR y otros, *The structure of language*, Prentice Hall, New York.

14. CASAS SÁNCHEZ, J. M. y SANTOS PEÑAS, J. (1995): *Introducción a la estadística para economía y administración de empresas*, Editorial Centro de Estudios Ramón Areces (CEURA), Madrid.

15. CATTELL, J. MCK. (1890): *Mental tests and measurements*, “Mind”, 15, pp. 373-380.

16. CATTELL, J. MCK. y FANARD, L. (1896): *Physical and mental measurements of the students of Columbia University*, “Psycol. Rev.” 3, pp. 618-648.

17. CERDÁ, Enrique (1960): *Psicología aplicada*, Editorial Herder, Barcelona.

18. CHOMSKY, N. (1968): *Language and Mind*, Harcourt, Brace, World Inc., New York.

19. COUFFIGNAL, L. (1966): *La cybernétique*, PUF, París.

20. DAMAS RICO, P. M. (1972): *Los diferentes conceptos de probabilidad*, “Boletín de la Asociación Nacional de Ingenieros Agrónomos (ANIA)” nº: 230, pp.621-631. Madrid.

21. DAVIDSON, D. P., SUPPES, P. y SIEGEL, S. (1957): *Decision making: An experimental Approach*, Stanford University Press.

22. DE FINETTI, B. (1937): *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*, Annal. Institut Henri Poincaré, 7.

23. DESBAZEILLE, G. (1969): *Ejercicios y problemas de investigación operativa*, Ediciones ICE, Selecciones de economía de la empresa, Madrid.

24. ELLSBERG, D. (1961): *Risk, Ambiguity and the Savage Axioms*, Quart. Economic, 75.

25. FECHNER, G. T. (1860): *Elemente der Psychophysik*.

26. FELLNER, W. (1963): *Slanted subjective probabilities and randomisation*. A. Replay to H. Raiffa y K. R. Brewer, Quart. Economic, 77.

27. FELLNER, W. (1966): *An introduction to probability theory and its applications*.

28. FISHBURN, P. C. (1964): *Decisions and Value Theory*, J. Wiley.

29. FISHBURN, P. C. (1970): *Preference-based definitions of subjective probability*, Ann. Math. Stat., 38.

30. FRAISSE, P. (1967): *L'évolution de la psychologie expérimentale*, P. FRAISSE y J. PIAGET (Ed.) : *Traité de psychologie expérimentale* (tomo I), Presses Universitaires de France, Paris, pp. 1-72.

31. GALTON, F. (1896): *Hereditary genius: an inquiry into its laws and consequences*, Ed.: Macmillan, London.

32. GILBRETH, F. B. (1911): *Motion study*, Van Nostrand.

33. GMURMAN (1968): *Fundamentals of probability theory and mathematical statistics*.

34. GOOD, I. (1950): *Probability and the Wrighting of Evidence*. Charles Griffin, London.

35. GUERLAC, H. (1961): *Quantification in chemistry*, H. WOOLF (Ed.): *Quantification*, Bobbs-Merrill, Indianapolis, pp. 64-84.

36. HENDERSON-QUANDT (1962): *Microeconomic Theory (A mathematical approach)* (hay traducción al castellano en Ed. Ariel, Barcelona).

37. HJEMSLEV, L. (1968) : *Prolégomènes á une théorie du langage*, Minuit, Paris.

38. KENDALL y STUART (1963): *The advanced theory of statistics*.

39. KOOPMAN, B.O. (1940): *The axioms and Algebra of intuitive Probability*. Ann. Math. Stat. Ser., 2.

40. KYBURG, H. E. y SMOKLER, M. E. (1964): *Study in Subjective Probability*, Wiley, New York.

41. LAHY, J. M. (1913): *Les conditions psychophysiologiques de l'aptitude au travail dactylographique*, «J. de Physiol. et de Path.», pp. 826-835.

42. LUCE, R. D. y SUPPES, P. (1965): *Preference, utility and subjective probability*, Handbook of Math. Psychology, Wiley.

43. MARTÍN SERRANO, M. (1978): *Métodos actuales de investigación social*. AKAL, Madrid.

44. MOOD (1955): *Introducción a la Teoría de la Estadística*.

45. MÜNSTERBERG, H. (1913): *Psychology and industrial efficiency*, Houghton Mifflin Company, Cambridge Riverside.

46. PAVLOV, I. P. (1928): *Lectures on conditional reflexes*, Livenight, New York.

47. PUIG ADAM, P. (1950): *Ecuaciones diferenciales*, Nuevas Gráficas, S.A., Madrid.

48. RAIFFA, H. (1961): *Risk, ambiguity and the Savage Axiom: a comment*, Quart. Jour. Econ., 75.

49. RAMSEY, P. (1950): *Truth and Probability*. The Humanities Press.

50. RIBOT, T. (1879) : *La psychologie allemande contemporaine...*, Librairie Germer Baillière et Cie, Paris [ENG: (1886) German Psychology of To-Day, Charles Scribner's Sons, New York]

51. RICHARDSON, H.W. (1973): *Economía regional*, Ed. Vicens-Vives, Barcelona.

52. ROBERTS, H. V. (1963): *Risk, ambiguity and the Savage axioms: a comment*, Quart. Jour. Econ., 77.

53. RUSSELL, B. (1949): *The scientific Outlook*, George Allen and Urwin, London (existe traducción castellana en *La perspectiva científica*, Ariel Esplugues de Llobregat, Barcelona, 1969).

54. SANTOS PEÑAS, J. y MUÑOZ ALAMILLOS, A. (2003): *Ejercicios de estadística aplicada*, Ediciones Académicas, S.A., Madrid.

55. SAVAGE, L. J. (1954): *The Foundations of Statistics*, Wiley.

56. SCOTT, D. (1964): *Measurement structures and linear inequalities*, Jour. M. Psych., 1.

57. SHANNON, C. C. y WEAWER, W. (1949): *The Mathematical Theory of communication*, Urbana, University of Illinois Press.

58. SIDMAN (1960): *Normal sources of pathological behaviour*, “Science”, 132, pp. 61-68.

59. SKINNER, B. F. (1945): *The operational analysis of psychological terms* “Psychological Review”, 52, pp. 270-277 [reproducido en B. F. Skinner, *Cumulative record* (3ª edición), Appleton-Century-Crofts, New York, 1972].

60. SKINNER, B. F. (1956): *A case history in scientific method*, “American Psychologist”, 11, pp. 221-233 [reproducido en *Cumulative record* (3ª edición), Appleton-Century-Crofts, New York, 1972].

61. SPEARMAN, C. (1904): *General intelligence objectively determined and measured*, “Amer. J. Psychology”, 15.

62. SPIEGEL, MURRAY R. (1969): *Teoría y problemas de Estadística*, Ed. McGraw-Hill, México.

63. SPIEGEL, MURRAY R. (1981): *Teoría y problemas de Probabilidad y Estadística*, Ed. McGraw-Hill, México.

64. SUPPES, P. y WINET, M. (1955): *An Axiomatization of utility based in the notion of utility differences*, Manag. Science.

65. THORNDIKE, E. L. (1927): *Measurement and evaluation in Psychology and Education*, Bureau of Publications, New York.

66. UNDERWOOD (1957): *Psychological research*, Appleton-Century-Crofts, New York.

67. VILLEGAS, C. (1964): *On qualitative probability sigma-algebras*, Ann. Math. Stat.

68. VILLEGAS, C. (1967): *On qualitative probability*, Ann. Math. Monthly, 74.

69. VON MISES, R. (1926): *Probability, Statistics and Truth*.

70. WEBER, E. H. (1846): *Handwörterbuch Physiol,* 3 (2), pp. 481-588.

71. WHITE, D. J. (1970): *Decision Theory*, University of Manchester.

72. WIENNER, N. (1969): *Cibernética y sociedad*, Sudamericana, Buenos Aires.

73. WUNDT, W. (1874): *Grundzüge der physiologischen Psychologie*.

74. YÁÑEZ, I. (1974): *Fundamentos matemáticos de la Teoría de Sistemas*, “Teoría general de Sistemas. Revista de la Universidad Complutense de Madrid”, Vol. XXIII, nº: 89, Enero-Marzo, Madrid, pp. 33-39.

75. YELA, M. (1974): *Teoría General de Sistemas y Psicología* “Teoría general de Sistemas. Revista de la Universidad Complutense de Madrid”, Vol. XXIII, nº: 89, Enero-Marzo, Madrid, pp. 81-92.

ABREVIATURAS Y SIGLAS

%	Porcentaje (tanto por cien)
‰	Tanto por mil
...	Puntos suspensivos (etcétera)
AA.VV.	Autores varios
ADN	Ácido desoxi-ribonucleico
art.	Artículo
Aux.	Auxiliar (función)
C_{ap}	Coeficiente de apertura
Cap.	Capítulo
CC.AA.	Comunidades Autónomas
C.E.E.	Comunidad Económica Europea
Cf., Cfr.	Confrontar
CI	Cociente intelectual
Cód.	Código
Coef.	Coeficiente
COR	Característica operativa del receptor
c.s.q.d.	Como se quería demostrar
CU	Coeficiente de uniformidad
C.V.	Coeficiente de Variación de Pearson
Det.	Determinación
Dif.	Diferencia
DM	Desviación media
Dr.	Doctor
E	Entrada/s
ed.	Editorial
EE.UU.	Estados Unidos de América del Norte
eq.	Equivalentes
EC	Edad cronológica
EM	Edad mental
et al.	*Et altri*
etc.	Etcétera
F.	Fórmula
FIG.	Figura
g.l.	Grados de libertad
ln	logaritmo natural o neperiano
log	logaritmo
máx.	máximo

Me	Mediana
mín.	mínimo
Mo	Moda
n. y m.	Nacido y muerto
nº	Número
p. = pág.	Página
p.e.	Por ejemplo
pp. = págs.	Páginas
Prof.	Profesor
Q	Cuartil
R	Recorrido o rango
R’	recorrido relativo
Ref.	Referencia
S.	Salida/s
S.	Sistema o Sistemas
SE	Sistema exterior
SF	Sistema físico (psicológico)
SG	Sistema gestor.
s./ss.	Siguiente/Siguientes
St.	Saint
TGS	Teoría General de Sistemas
VA	Variables de acción
VC	Variables esenciales o criterios
VE	Variables de entrada o estímulos
VES	Variables esenciales o criterios
VI	Variables internas o intermedias
VS	Variables de salida o respuestas
v.gr.	*Verbi gratia*
Vol.	Volumen

-ÍNDICE DE FIGURAS-

CAPÍTULO 8

CAPÍTULO 9

ANEJO NÚM. 1

ANEJO NÚM. 2

RESUMEN

Mediante el presente estudio se propugna la introducción de nuevas herramientas matemáticas, basadas fundamentalmente en la Teoría de Sistemas y en la Investigación Operativa, que puedan resultar de utilidad para el estudio de la conducta humana, habida cuenta del aporte de instrumentos que suponen, al tiempo que se enriquece el estudio de la Psicología mediante una concepción más profunda y amplia de su campo de acción. La eficacia que aquellas técnicas matemáticas han venido demostrando en su aplicación al enfoque y resolución de cuestiones científicas de diversa índole, induce claramente a pensar en el porvenir provechoso que, con la sistematización de su contexto, aguarda a la Psicología, abriendo nuevos y esperanzadores horizontes de investigación.

Se realiza un repaso histórico a la evolución que la aplicación de las Matemáticas ha experimentado a lo largo de la existencia de la Psicología como ciencia social. Más adelante también se recrea un recorrido histórico por los albores de la Psicología experimental. Se define posteriormente el concepto y clases de los modelos psicológicos, así como las variables, grados de indeterminación y estabilidad de los mismos, haciéndose especial mención del concepto de “probabilidad subjetiva” y de sus aplicaciones.

Se conceptualizan y formalizan los sistemas psicológicos a partir de sus elementos y estructura, estudiándose las conexiones así como las transformaciones y modalidades de acoplamientos, analizándose los diversos tipos de problemas que pueden presentarse así como sus niveles de resolución. Un enfoque interesante y novedoso de muchos problemas psicológicos reside en su tratamiento a base de la aplicación de diversas técnicas de la Investigación Operativa: la Teoría de la Programación Dinámica y de los Procesos Estocásticos, la Teoría de Grafos, la Teoría de la gestión de Stocks y la Teoría de Colas o de los Fenómenos de Espera, así como la Teoría de Probabilidades y la Estadística, esta última de aplicaciones psicométricas más antiguas y bien conocidas.

Por último se insertan sendos anexos referentes a restantes especificaciones metodológicas de interés para la resolución de las cuestiones planteadas a lo largo del trabajo, así como a la contemplación de diversos ejemplos prácticos de utilidad para el psicólogo experimentador.

Palabras clave: Sistema, estímulo, variables psicológicas, conductismo, modelo, probabilidad, entropía, conexiones, cibernética, aprendizaje, recuerdo, comunicación, elección, valoración, pilotaje, uniformidad.

RESUM

Mitjançant el present estudi es propugna la introducció de noves eines matemàtiques, basades fonamentalment en la Teoria de Sistemes i en la Investigació Operativa, que puguin resultar d'utilitat per al estudi de la conducta humana, tot tenint en compte l'aportació d'instruments que suposen, mentre s'enriqueix l'estudi de la Psicologia mitjançant una concepció més profunda i extensa del seu camp d'acció. L'eficàcia que les esmentades tècniques matemàtiques han demostrat en la seva aplicació per a l'enfocament i resolució de qüestions científiques de diversa índole, indueix clarament a pensar en l'avenir profitós que, amb la sistematització del seu context, espera a la Psicologia, obrint nous i esperançadors horitzons de recerca.

Es fa un repàs històric a l'evolució que l'aplicació de les Matemàtiques ha sofert al llarg de l'existència de la Psicologia como a ciència social. Més endavant també es porta a terme un recorregut històric pels inicis de la Psicologia experimental. Es defineix posteriorment el concepte i les classes de models psicològics, així como les variables, graus d'indeterminació i estabilitat dels models, fent especial referència al concepte de "probabilitat subjectiva" i a les seves aplicacions.

Es conceptualitzen i formalitzen els sistemes psicològics a partir de llurs elements i estructura, estudiant-se les connexions així com les transformacions i modalitats d'acoblaments, analitzant els diversos tipus de problemes que poden presentar-se així com els seus nivells de resolució. Un enfocament interessant i novençà de molts problemes psicològics es troba en el seu tractament a base de l'aplicació de diverses tècniques de la Investigació Operativa: la Teoria de la Programació Dinàmica i dels Processos Estocàstics, la Teoria de Grafos, la Teoria de la gestió de Stocks i la Teoria de Coles o dels Fenòmens d'Espera, així como la Teoria de Probabilitats i la Estadística, aquesta darrera d'aplicacions psicomètriques anteriors i prou conegudes.

A la fi s'afegeixen sengles annexos referents a restants especificacions metodològiques d'interès per a la resolució de les qüestions plantejades al treball, així como es procedeix a la contemplació de diversos exemples pràctics d'utilitat per al psicòleg experimentador.

Paraules clau: Sistema, estímul, variables psicològiques, conductisme, model, probabilitat, entropia, connexions, cibernètica, aprenentatge, record, comunicació, elecció, valoració, pilotatge, uniformitat.

SUMMARY / ABSTRACT

The present study proposes the introduction of new mathematical tools, based mainly on the Theory of Systems and on Operational Research, which may be of use in the study of the human behaviour, taking into consideration the great amount of tools that it represents, at the same time as it enriches the study of Psychology through a deeper and wider conception of its field of action. The efficiency that those mathematical techniques have shown, when being applied to the focusing and solving of scientific matters of different kinds, leads us to believe in a profitable future for Psychology, by means of the systematisation of its context, opening new and hopeful horizons in this field of research.

A historic review of the evolution of the application of Mathematics has been carried out all along the existence of Psychology as a social science. Further on, the beginnings of Experimental Psychology will also be the object of a historical analysis. After that, the concept and kinds of the psychological models have been defined, as well as the variables, rates of in-determination and stability, especially mentioning the concept of "subjective probability" and its applications.

The psychological systems have been conceptualised and formalised, going out from its elements and structure, studying the connections as well as the transformations and types of connections. The different kinds of problems that may emerge have been analysed and so have the possibilities of solution. An interesting and innovating focusing of various psychological problems consists in a treatment based on the application of different techniques of the Operational Research: the Theory of Dynamic Programming and the Stochastic Processes, the Graphs Theory, the Theory of the Stocks management and the Theory of Colas or of the Waiting Phenomena, as well as the Theory of Probabilities and Statistics, being the last mentioned one of the oldest and best-known psychometric applications.

Finally, the corresponding annexes have been inserted, referring to the additional methodological specifications, which could help to solve the subjects exposed throughout this work. Furthermore, several practical examples have been added which may be of use for experimenting psychologists.

Key words: System, stimulus, psychological variables, behaviour, model, probability, entropy, connections, cybernetics, learning, memory, communication, election, evaluation, driving, uniformity.

RÉSUMÉ

Moyennant cette étude, on plaide pour l'introduction de nouveaux outils mathématiques, fondés essentiellement sur la théorie de systèmes et l'investigation opérationnelle, qui puissent être utiles à l'étude de la conduite humaine, étant donné l'apport d'instruments qu'ils supposent en enrichissant, en même temps, l'étude de la Psychologie à travers d'une conception beaucoup plus profonde et étendue de son champ d'action. L'efficacité que ces techniques mathématiques-là ont démontrée dans leur application à la mise au point et résolution de questions scientifiques de caractéristiques diverses, nous mène carrément à penser au riche avenir que la Psychologie aura, avec la systématisation de son contexte, en ouvrant de nouveaux et encourageants horizons d'investigation.

On fait d'abord, une révision historique à l'évolution que l'application des mathématiques a expérimentée tout au long de l'existence de la Psychologie comme science sociale.

Ensuite, on recrée aussi un parcours historique des débuts de la Psychologie expérimentale. On détermine, par la suite, le concept et les classes des modèles psychologiques, et aussi les variables, les degrés d'indétermination et stabilité des mêmes, en faisant une mention spéciale du concept de «Probabilité subjective» et ses applications.

On conceptualise et formalise les systèmes psychologiques à partir de leurs éléments et structure, en étudiant les connexions et les transformations et types d'assemblage, en analysant les différents types de problèmes qu'on puisse trouver ainsi que leurs niveaux de résolution. Une façon intéressante et nouvelle d'envisager beaucoup de problèmes psychologiques réside dans leur traitement, grâce à l'application de techniques diverses de la recherche opérationnelle: la théorie de la Programmation dynamique et des Procès stochastiques, la théorie des Graphes, la théorie de la gestion de Stocks et la théorie des Queues ou des phénomènes d'attente, de même que la théorie de probabilités et la statistique, celle-ci d'applications psychométriques plus anciennes et bien connues.

Enfin, on introduit deux annexes concernant d'autres spécifications méthodologiques dignes d'intérêt pour la résolution des questions posées tant au long du travail, ainsi que la contemplation de différents exemples pratiques d'utilité pour le psychologue expérimentateur.

Mots clés: Système, stimulation, variables psychologiques, conduite, modèle, probabilité, entropie, connexions, cybernétique, apprentissage, mémoire, communication, élection, valorisation, pilotage, uniformité.

Este libro se terminó
de imprimir el 23 de abril de 2008,
DÍA DEL LIBRO,
en los talleres
de la Cooperativa Gráfica Dertosense
de Tortosa