Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

**Primera edición CD, septiembre de 2020**

© Josep Maria Franquet i Bernis
Avda. Generalitat, 73 - 43500 TORTOSA
Tels. 977 44 18 43 - 629 33 98 74
e-mail: jfbernis@iies.es

ISBN-13: 978-84-120526-8-8

ISBN-10: 84-120526-8-8

Depósito legal: T-710-2020

Edita: UNED-Tortosa. C/ Cervantes, 17 - 43500 TORTOSA
Tel. 977 44 31 04/08
e-mail: info@tortosa.uned.es

**Gràfica Dertosense, S.L.**
C/ Cervantes, 21, - 43500 Tortosa
Tel.: 977 44 00 28
e-mail: graficadertosense@hotmail.com

La edición de este CD ha sido posible gracias al patrocinio de las siguientes instituciones:

Universidad Nacional de Educación
a Distancia

Ajuntament
de Tortosa

Diputació Tarragona

FUNDACIÓ
CINCA-PIQUÉ
TORTOSA

FUNDACIÓ PRIVADA DURAN&MARTÍ

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## 0. INTRODUCCIÓN

## (PRESENTACIÓN, ÍNDICE Y BIBLIOGRAFÍA)

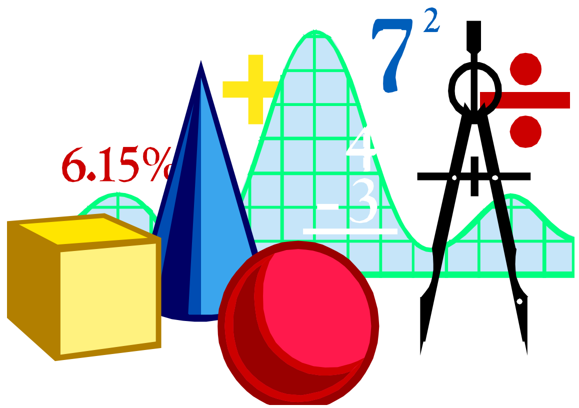

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





# PRESENTACIÓN

El trabajo que ahora presentamos en forma de diapositivas está pensado, esencialmente, para los programas de especialización en modelos matemáticos correspondientes a un curso anual de Master o Doctorado de las Facultades de Economía y Administración y Dirección de Empresas de nuestras Universidades, aunque también de Ingeniería, por lo que se refiere al estudio y resolución de las ecuaciones infinitesimales (diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, integrales e integro-diferenciales y sus sistemas) y en diferencias finitas o recurrentes, todas ellas de provechosas aplicaciones en la ciencia económica y la técnica, así como el Cálculo variacional o el Análisis armónico. Habida cuenta de sus características, se propone el seguimiento del presente curso a base de una clase o tema semanal para el logro de una buena asimilación de los contenidos. Puede dividirse en dos cuatrimestres: el primero comprendería las lecciones 1-12, ambas inclusive, mientras que el segundo abarcaría las 13-24.

Los métodos matemáticos avanzados que se emplean en este curso son también muy útiles en otras áreas del Análisis Económico o de la Ingeniería y su manejo resultará especialmente interesante a la hora de cursar otras disciplinas propias de aquellas carreras, como por ejemplo la Teoría Económica, la Econometría, la Hidráulica o la Teoría de Señales.

Fundamentalmente, el curso se desarrolla en el entorno de los sistemas dinámicos, cuyo estado evoluciona con el transcurso del tiempo en contraposición a los sistemas estáticos. Los sistemas físicos en situación no estacionaria son ejemplos de sistemas dinámicos, pero también existen modelos económicos, matemáticos y de otros tipos que constituyen sistemas abstractos que son, además, sistemas dinámicos. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se pueden elaborar modelos matemáticos que buscan representar, del modo más fidedigno posible, la estructura del mismo sistema.

Así pues, los sistemas dinámicos estudian la evolución de una magnitud física o económica (que en general la representaremos como X) a lo largo del tiempo *t*. Dicha evolución ha de seguir una ley en forma de ecuación infinitesimal o recurrente, y el objetivo es hallar el valor de X en cualquier tiempo *t* de un dominio temporal determinado, es decir X(t). Si el dominio temporal es discreto, estamos trabajando en el ámbito de la dinámica discreta; si por el contrario, el dominio temporal no es discreto, como por ejemplo un intervalo de la recta real (ya sea acotado o no acotado), estamos trabajando en el ámbito de la dinámica continua.

Conceptualmente hablando, la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales está más desarrollada que la de las ecuaciones en diferencias. Las relaciones existentes entre estos dos tipos de ecuaciones permiten exponer las teorías correspondientes siguiendo una línea similar para los dos tipos de análisis, continuo y discreto. En el caso lineal, se busca seguir un desarrollo paralelo entre los conceptos relativos a las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales. En el caso no lineal, el análisis de los sistemas discretos, por ejemplo, resulta mucho más complejo que el de los continuos.

Una característica fundamental del análisis dinámico, como se ha dicho, es la intervención de la variable tiempo. El tiempo puede intervenir en forma continua o bien discreta, utilizándose diferentes herramientas matemáticas según sea el caso respectivo (ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias). Desde el punto de vista matemático, si el tiempo es considerado como variable continua (esto es, que puede tomar valores entre dos consecutivos), la expresión del cambio temporal constituye una ecuación diferencial. Su resolución e imposición de condiciones de contorno permite obtener la función correspondiente. A partir del análisis de la teoría de las ecuaciones diferenciales se da respuesta a modelos de la teoría económica o de la mecánica que requieren un análisis dinámico y se fundamenta la interpretación de los modelos a la luz de la teoría matemática. Otro tanto podríamos afirmar acerca de las ecuaciones recurrentes.

Cada tema práctico viene precedido por otros con una serie de conocimientos teóricos, relativamente escuetos, que, a guisa de recordatorio, proporcionan al lector una referencia sucinta de todos aquellos conceptos, definiciones, proposiciones, lemas, teoremas, demostraciones, formulaciones y demás elementos teóricos indispensables -aunque no siempre suficientes- para la correcta resolución de los numerosos ejercicios prácticos que se proponen. El lector/a podrá comprobar, de forma inmediata, que los ejercicios poseen un elevado nivel de detalle en su desarrollo resolutivo, pretendiéndose con ello patentizar la necesaria relación existente entre éstos y los conocimientos teóricos aludidos, puesto que dichos ejercicios constituyen un medio poderoso de adquisición y de consolidación de los expresados conocimientos. Eso sí, como siempre, todos aquellos errores u omisiones que puedan aparecer en el texto serán de responsabilidad exclusiva del autor.

Es, sin duda, la práctica profesional la que hará surgir problemas nuevos a los que enfrentarse y resolver con rigor científico a través de los propios conocimientos. Y es que el cultivo del mecanismo abstracto no deja huella útil si no va acompañado del ejercicio de las facultades de abstracción y concreción a los problemas reales y de interpretación práctica de sus resultados. Tal es el carácter que no hemos querido obviar en el presente curso.

En este mismo capítulo introductorio se incluye una lista de referencias bibliográficas acerca de la que debo advertir, como suele suceder, que son todas las que están pero, evidentemente, que no están todas las que son. La selección ha sido realizada por gusto personal del docente y por aproximación al nivel del texto. Al final del curso, se adjuntan cinco apéndices útiles para el recordatorio y consulta de algunos de los temas o herramientas matemáticas tratadas en el cuerpo principal del mismo.

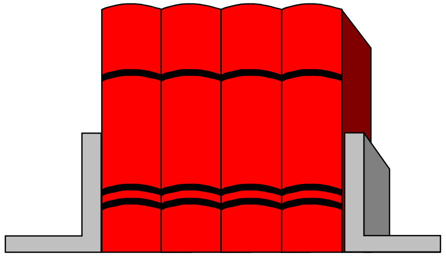
Mi reconocimiento, en fin, a las diversas instituciones que han apoyado nuestra iniciativa y, particularmente, a la Junta Rectora del Consorcio Universitario del Centro Asociado de Tortosa de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), a la imprenta Gráfica Dertosense, S.L. y, en general, a todos cuantos se han interesado por la confección del presente curso, aportando sugerencias y valiosos consejos dirigidos a la mejor consecución de nuestro empeño.

*Tortosa, agosto de 2020*.
J. M. FRANQUET

# - ÍNDICE GENERAL DEL CURSO -

## APÉNDICE II. EXTREMOS DE FUNCIONES MULTIVARIANTES – Pág. 606

## APÉNDICE V. TEORÍA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS – Pág. 699



## BIBLIOGRAFÍA


1.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. *et alt*. *Matemática Superior. Unidad Didáctica (nº 3). Uned.* Ed. Gráfica Internacional. Madrid, 1976.

2.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Ampliación de matemáticas aplicadas a la economía. Unidad Didàctica nº 6.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid, 1987.

3.-ALLEN, R.G.D. *Mathematical Analysis for Economists*. Macmillan, Londres, 1938.

4.-AYRES, FRANK, JR. *Theory and problems of Differential and Integral calculus*. Schaum Publishing Company. New York, 1964. 346 pág.

5.-BALBÁS DE LA CORTE, A. y GIL FANA, J.A. *Programación matemática*. Ed. Paraninfo, S.A. Madrid, 2004.

6.-BASOV, S. "Lie groups of partial differential equations and their application to the multidimensional screening problems". *En Econometric Society 2004 Australasian Meetings, 44.*

7.-CABADA FERNÁNDEZ, A. *Problemas resueltos de ecuaciones en derivadas parciales*. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad de Santiago de Compostela, diciembre de 2011. Disponible *on line* en http://webspersoais.usc.es/persoais/alberto.cabada/EDP-Cabada.pdf.

8.-CASTAÑEDA CHORNET, J. *Lecciones de Teoría Económica*. Editorial Aguilar. Madrid, 1968. 739 pág.

9.-COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I & II. Wiley – Interscience, 1962.

10.-ELSGOLTZ, L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.* Editorial Mir. Moscú, 1969. 432 pág.

11.-FERNÁNDEZ VIÑA, J.A. *Matemáticas superiores IV. Unidad Didáctica nº4.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Gráficas Grefol. Madrid, 1975.

12.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Cinco temas de hidrología e hidráulica*. Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya (UIC). Tortosa, 2003. 594 pág.

13.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Cálculo hidráulico de las conducciones libres y forzadas (Una aproximación de los métodos estadísticos)*. Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya (UIC). Tortosa, 2005. 590 pág.

14.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas. Curso práctico.* Ed.: Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 2013. 752 pág.

15.-FRANQUET BERNIS, J.M. "Reducción de variables en la búsqueda de extremos condicionados de funciones multivariantes". *Cadup-Digital Estudios.* Centro Asociado de la UNED Tortosa. 2014.

16.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes.* Ed.: Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 2014. 904 pág.

17.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Ecuaciones diferenciales microeconómicas en derivadas parciales.* Ed.: Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 2016. 508 pág.

18.-GARCÍA SESTAFE, J.V.; RODRIGUEZ RUIZ, J. *Ciencias Económicas y Empresariales. Curso de matemáticas en forma de problemas.* Centro de Estudios Universitarios "Ramón Areces". Editorial Ceura. Madrid, 1986. 604 pág.

19.-GUZMÁN, L., SÁNCHEZ, M. J., MUÑOZ, A. y SANTOS, J. *Fundamentos matemáticos para la administración y dirección de empresas*. Ed. CEURA, S.A. Madrid, 1999. 590 pág.

20.-HENDERSON, J.M.; QUANDT, R.E. *Teoría microeconómica.* Ediciones Ariel. Esplugues del Llobregat (Barcelona), 1962. 334 pág.

21.-KRASNOV, M.; KISELIOV, A.; MAKARENKO, G. *Ecuaciones integrales*. Editorial Mir. Moscú, 1977. 190 pág.

22.-LEONORI, T. *Ejercicios del curso "Ecuaciones en derivadas parciales"*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada. Ed. Bubok Publishing, S.L.

23.-LUZÁRRAGA, A. *Problemas resueltos de álgebra lineal.* Barcelona, 1970. 534 pág.

24.-MARTÍN MARCOS, A.; SÁNCHEZ HERNÁNDEZ, J.F. *Problemas resueltos de microeconomía. Unidades Didácticas.* UNED. Madrid, 2001. 202 pág.

25.-MARTÍNEZ CONCHA M.; SILVA CORNEJO, C.; VILLALOBOS MARÍN, E.; *Ejercicios resueltos (series de Fourier).* Universidad de Santiago de Chile. Facultad de Ciencia. Departamento de Matemàtica y CC, 2011. Disponible *on line* en: *es.slideshare.net/DIEGO123NINA/ejercicios-resueltos*-.

26.-MILNE-THOMPSON, L.M. *The calculus of Finite Differences*. Macmillan. Londres, 1933.

27.-MORENO GONZÁLEZ, C. *Cálculo numérico II. Métodos numéricos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales*. Ed. UNED. Madrid, 1999.

28.-NAVARRO ROJAS, F. *Ecuaciones en diferencias de Volterra y aproximación numérica para ecuaciones integrales.* Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Programa Cybertesis. Lima, 2011. 135 pág. On line: http://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/cybertesis/294.

29.-PEREZ WHITE, T. *Resistencia de materiales*. Gráficas Europa. Salamanca, 1976. 594 pág.

30.-PRIETO, E.; RODRÍGUEZ, J.; GARCÍA, C.; GUTIÉRREZ, P.; VELASCO, J.R. *Matemáticas 2. Economía y Empresa. Ejercicios resueltos.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. Madrid, 1991. 518 pág.

31.-PUIG ADAM, P. *Curso Teórico Práctico de Ecuaciones Diferenciales aplicado a la física y técnica.* Editor: Nuevas Gráficas, S.A. Madrid, 1962. 432 pág.

32.-PUIG ADAM, P. *Curso Teórico Práctico de Cálculo Integral aplicado a la física y técnica.* Editor: Biblioteca matemàtica, S.L. Madrid, 1969. 324 pág.

33.-R.A.E.C. *Problemas de cálculo integral.* Ed. Gráficas Lormo. Madrid, 1971. 400 pág.

34.-RODRIGO DEL MOLINO, F.; RODRIGO MUÑOZ, F. *Problemas de Matemáticas para científicos y técnicos.* Ed. Tébar. Sevilla, 1998. 418 pág.

35.-RODRÍGUEZ CALDERÓN, C.; ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Matemática superior. Unidad Didáctica nº 1.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid, 1977.

36.-SÁNCHEZ SÁNCHEZ, M. *Matemáticas avanzadas para la Economía.* Editorial Sanz y Torres, S.L. – UNED. Madrid, 2014. 270 pág.

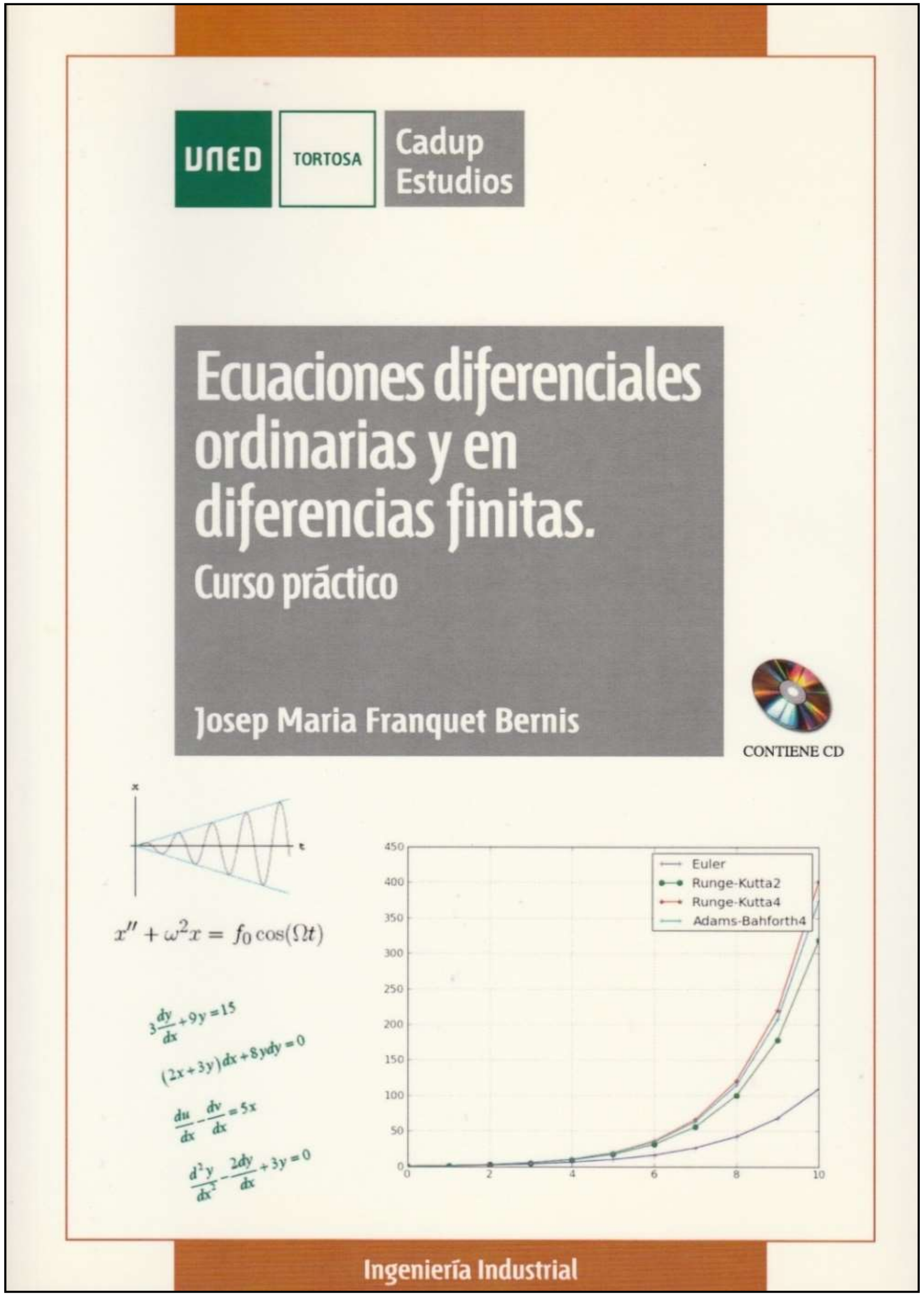
37.-SCHIAVI, E.; MUÑOZ, A.I. *Métodos matemáticos de la Ingeniería Química*. Apuntes curso académico 2006-07. Disponible *on line*: *metodosmatematicosiii.wikispaces.com/file/view/IntroducciónEDP's.*

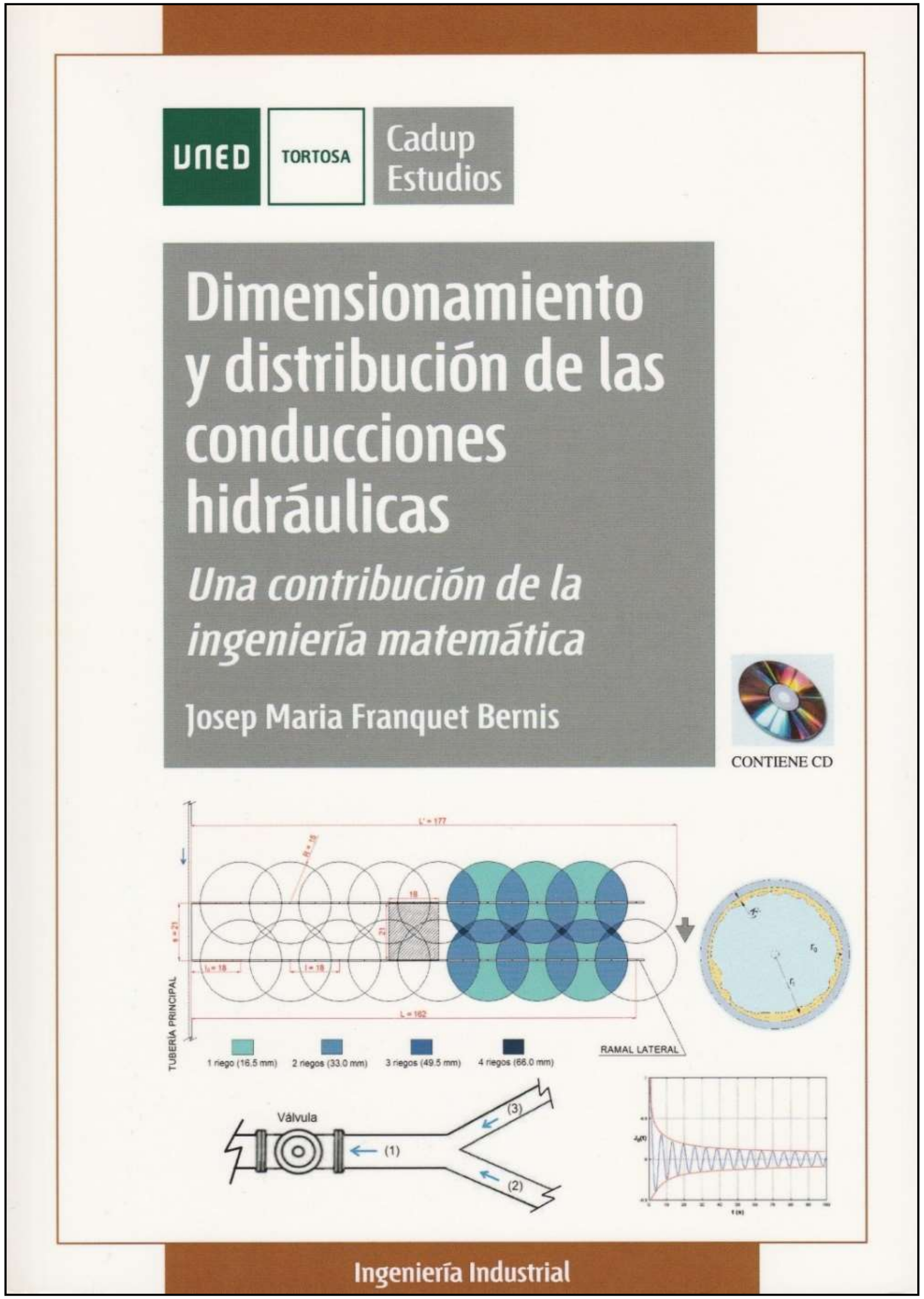
38.-SIMMONS, G. F. *Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas.* Ed. McGraw-Hill. Madrid, 1998. 658 pág.

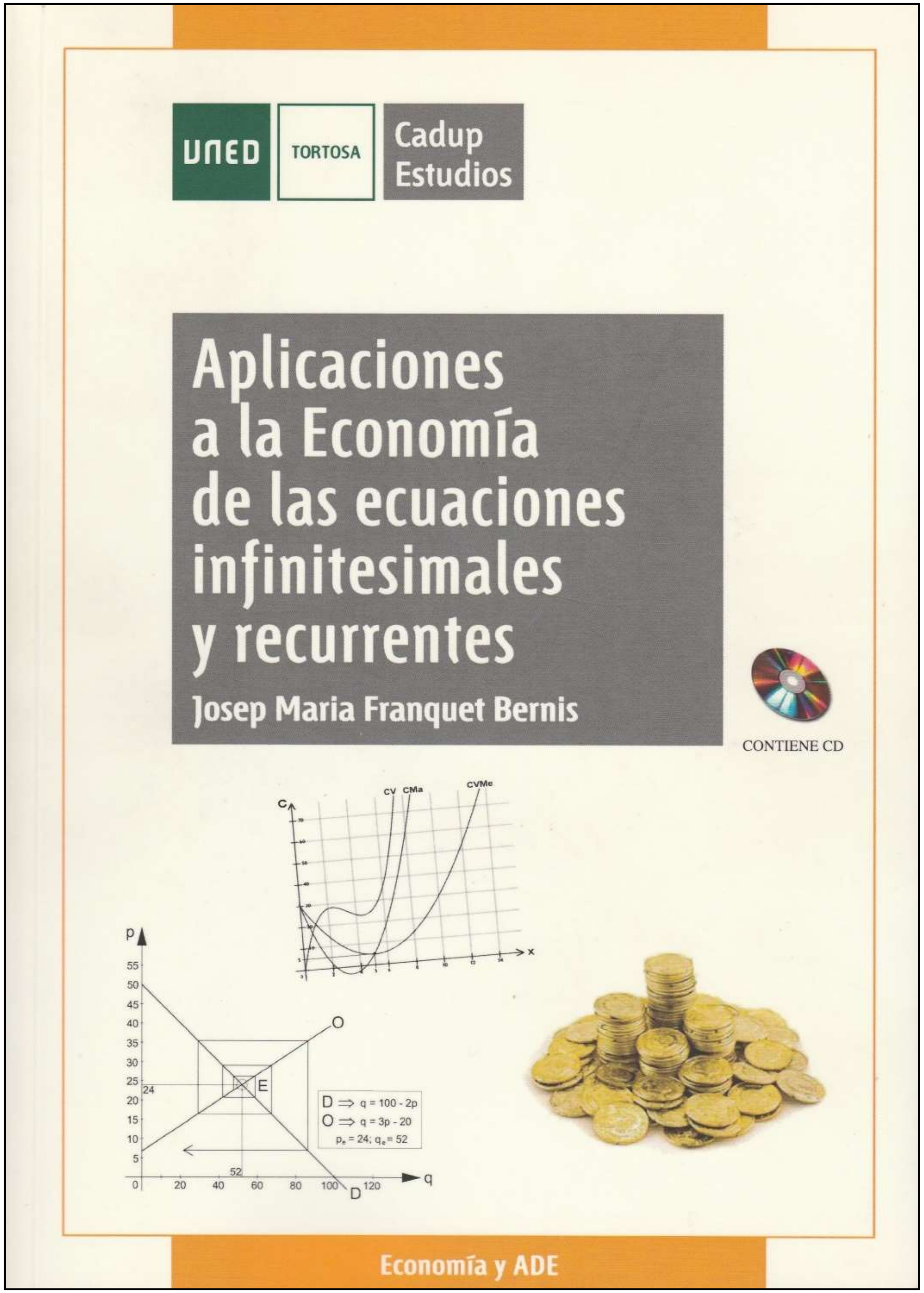
39.-WOODS, F.S. *Advanced calculus*. Nueva edición, Boston, Ginn, 1934.

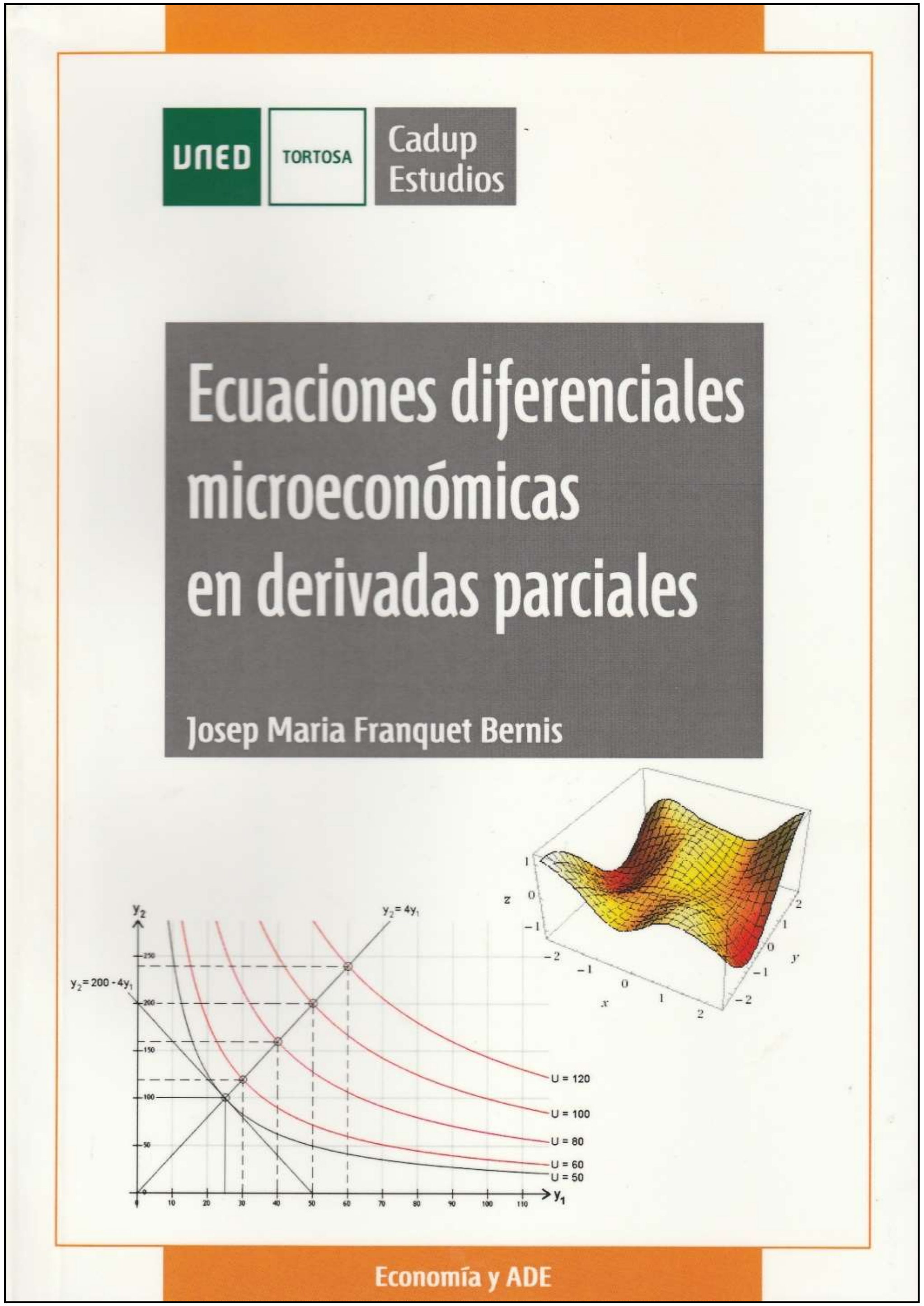
# LIBROS DE TEXTO RECOMENDADOS DEL MISMO AUTOR

**(se pueden consultar *online* en: e-spacio.uned.es)**




UNED
TORTOSA
Cadup Estudios
Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes
Josep Maria Franquet Bernis
CONTIENE CD
D ⇒ q = 100 - 2p
O ⇒ q = 3p - 20
Economía y ADE


UNED
TORTOSA
Cadup Estudios
Ecuaciones diferenciales microeconómicas en derivadas parciales
Josep Maria Franquet Bernis
U = 120
U = 100
U = 80
U = 60
U = 50
Economía y ADE

**JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS** (Tortosa, 1950), es Ingeniero Agrónomo (especialidad Economía agraria), por la Universidad Politécnica de Valencia, donde finalizó la carrera en el año 1974, realizando posteriormente, los estudios de Doctorado e Ingeniería Técnica Industrial.

Es Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales, por la Universidad de Barcelona (1995). Es, asimismo, Doctor por la Universidad Internacional de Cataluña (2007, doctorado en Arquitectura). También es poseedor del título de Ingeniero Técnico en Explotaciones Agropecuarias por la Universidad Politécnica de Cataluña (1997).

El profesor Franquet tiene en su haber otros títulos universitarios como son: Diplomado en Cooperación y Diplomado en Investigación Operativa por la Universidad de Valencia, Diplomado en Economía de la Empresa y Diplomado en Planificación de Empresas por la Universidad Politécnica de Madrid. Tiene, así mismo, el reconocimiento profesional de Doctor Ingeniero Superior, *European Engineer–EUR ING* (FEANI, París, 1993).

En 1974 inicia su carrera docente como profesor de la Escuela de Investigación Operativa de la Universidad de Valencia (Departamento de Matemática Aplicada). Es profesor-tutor del Centro Asociado de la UNED en Tortosa desde el año 1976 (Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa) y desde octubre de 2007 es el Director del mismo. También ha sido (2013-2015) Director del Campus Nordeste (Cataluña y Baleares). Fue Profesor Asociado de la Universidad Internacional de Cataluña (Departamento de Hidráulica y Proyectos). Posee las acreditaciones oficiales de profesor colaborador, ayudante doctor y contratado doctor. Autor de numerosos artículos técnicos, así como de diversos libros y monografías en materia de agricultura, construcción, hidráulica, planificación territorial, climatología, piscicultura, folklore, narrativa, administración local, psicología, topografía, poesía, matemáticas y economía.

UNED TORTOSA

9 788412 052688

# PRIMERA PARTE

(1er. cuatrimestre)

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 1

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (I)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

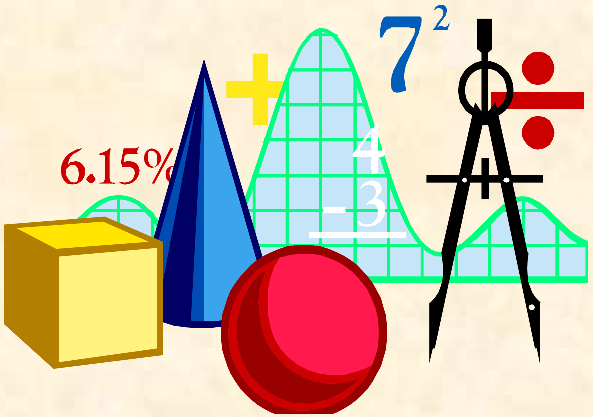
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





## 1. Definiciones básicas

- ECUACIÓN DIFERENCIAL (E.D.) es toda aquella ecuación que contiene derivadas o diferenciales.

-ECUACIÓN INTEGRAL (E.I.) es aquella ecuación que contiene integrales en cuyo integrando aparece la función incógnita . Las ecuaciones integro-diferenciales (E.I.D.) contienen derivadas e integrales.

$$\text{E.D.} \begin{cases} \text{-Ordinaria (1 variable).} \\ \\ \text{-En derivadas parciales (varias variables).} \end{cases}$$

- ORDEN de una E.D. es el orden de la derivada de > orden que en ella figura.
- GRADO de una E.D. es el exponente de la derivada de > orden.

Una E.D. será lineal cuando es de 1er. grado en la función y en sus derivadas.

Expresión general de la E.D. ordinaria de orden **n** (función implícita): **$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$.**

El problema es determinar la función (y) que dio origen a la E.D. y que, verificando dicha ecuación, contiene, en general, **n** constantes arbitrarias. Se le llama, a dicha función, **integral general** (I.G.).

Si en la I.G. se dan valores definidos a las constantes arbitrarias se obtiene una **integral particular** (I.P.). Otro tipo de solución lo constituye la **integral singular** (I.S.), caso de las ecuaciones de Clairaut y otras. Las ecuaciones diferenciales son muy utilizadas en todas las ramas de la ingeniería para el modelado de los fenómenos físicos. Su uso es común tanto en la Ingeniería y en las ciencias aplicadas, como en las ciencias fundamentales (física, química, biología), como también, especialmente, en la economía.

## 2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

### 2.1. *Ecuaciones diferenciales de variables separables*

Si una ecuación diferencial de primer orden se puede escribir en la forma:

$$f_1(x)\cdot dx = f_2(y)\cdot dy$$

recibe el nombre de ecuación de "variables separables o separadas".

La integral general se obtiene mediante una cuadratura (se entiende por cuadratura la obtención de una primitiva); siendo $F_1(x)$ y $F_2(y)$, respectivamente, las primitivas de $f_1(x)$ y $f_2(y)$, se tendrá que:

$$\int f_1(x)\cdot dx = \int f_2(y)\cdot dy$$

de donde se obtiene la integral general, dependiendo de una única constante arbitraria:

$$F_1(x) = F_2(y) + C$$

Si nos hubieran dado alguna condición inicial, como por ejemplo, "pasar un punto determinado", la constante se determina imponiendo la referida condición. En este caso, nos hallamos ante un "problema de valor inicial" (PVI).

## 2.2. *Ejemplo*

*Resolver:*

$$y'(x^2 - x) - y = 0$$

Escribiendo dy/dx en lugar de y', se obtiene que:

$$\frac{dy}{dx}(x^2 - x) = y$$ , que se puede escribir: $$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2 - x}$$

Calculando las integrales:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y \; ; \quad \int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \ln(x-1) - \ln x + \ln C = \ln \frac{C(x-1)}{x}$$

puesto que: $$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 - x} - \frac{x-1}{x^2 - x} = \frac{1}{x^2 - x};$$ de donde: $$\boxed{y = C\frac{x-1}{x}} \Rightarrow \text{I.G.}$$

Obsérvese que solo se ha tomado en la integración una constante escrita en forma logarítmica, puesto que la integral general depende de una única constante.

Si nos hubieran dado la condición de que la curva integral debe pasar por el punto de coordenadas cartesianas rectangulares (2,1), la constante se determina como sigue:

$$1 = C\frac{2-1}{2}; \quad 1 = \frac{1}{2}C; \quad C = 2$$

Luego la integral particular sería: $$\boxed{y_p = \frac{2(x-1)}{x}} \Rightarrow \text{I.P.}$$

esto es, la curva del haz que pasando por el punto dado, satisface la ecuación inicial propuesta.

## 2.3. *Ecuaciones homogéneas*

Son las que pueden expresarse de la forma: $y' = f(y/x)$.

Escrita la ecuación diferencial de primer orden en la forma:

$$M(x, y)\cdot dx + N(x, y)\cdot dy = 0$$

se dice que dicha ecuación es "homogénea" si las funciones M(x, y) y N(x, y) son homogéneas y del mismo grado *n*, esto es si:

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y) \quad \text{y} \quad N(tx, ty) = t^n N(x, y)$$

Efectuando el cambio de variable $y = t\cdot x$ ($t = y/x$), de donde: $\frac{dy}{dx} = t + \frac{dt}{dx}\cdot x$

la ecuación anterior se convierte en: $M(x, tx) + N(x, tx)(t + \frac{dt}{dx}\cdot x) = 0$

y simplificando por $x^n = x' = x$; $M(1, t) + N(1, t)(t + x\frac{dt}{dx}) = 0$ , o bien: $M(1, t) + tN(1, t) = -N(1, t)x\frac{dt}{dx}$

de donde: $\boxed{\frac{dx}{x} = \frac{-N(1, t)dt}{M(1, t) + tN(1, t)}}$

que es una ecuación de variables separables, cuya integración resulta conocida.

## 2.4. *Ejemplos diversos*

**Ejemplo 1.** Sea la ecuación, $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$;

que es homogénea y de grado 1, ya que puede ser escrita de la forma:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1+2(y/x)}{2-(y/x)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$ , o también: $(x + 2y)dx – (2x – y)dy = 0$

Por lo tanto, haciendo el cambio de variable:

$$y = tx, \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$$ , resulta: $$(x+2tx)-(2x-tx)\left(t+x\frac{dt}{dx}\right) = 0$$ ,

de donde se obtiene sucesivamente: $$(1+2t)-(2-t)t-(2-t)x\frac{dt}{dx} = 0$$

y también: $$1+t^2 = (2-t)x\frac{dt}{dx}; \quad \frac{dx}{x} = \frac{2-t}{1+t^2}dt$$

Ello puede deducirse también directamente de la aplicación de la fórmula anterior, ya que:

$M(1,t) = 1 + 2t$ ; $N(1,t) = -2+t$

e integrando en ambos miembros: $\ln x + \ln C = 2 \text{ arc tg } t – 1/2 \ln(1 + t^2)$ , o sea:

$$\boxed{\ln Cx = 2 \text{ arc tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}$$ $\Rightarrow$ I.G., después de substituir: $t = y/x$.

**Ejemplo 2.** Sea ahora la ecuación reducible a homogénea:

$$y' = \frac{x + 2y + 4}{2x - y + 3} \quad \text{; o lo que es lo mismo:}$$

$$(x + 2y + 4)\cdot dx - (2x - y + 3)\cdot dy = 0$$

Las ecuaciones de este tipo se reducen a la forma anterior, efectuando:

$$x = X + a \;; \quad y = Y + b \quad \text{, de donde:} \quad dx = dX \quad y \quad dy = dY \text{ , luego:}$$

$$(X + 2Y + a + 2b + 4)\cdot dX - (2X - Y + 2a - b + 3)\cdot dY = 0 \;;$$

Haciendo:
$$\left.\begin{array}{l} a + 2b + 4 = 0 \\ 2a - b + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

de donde $a = -2$, $b = -1$, resultando la ecuación: $(X + 2Y)\cdot dX - (2X - Y)\cdot dY = 0$

ya integrada en el ejemplo anterior, como hemos visto, y cuya solución es:

$$\ln CX = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X} - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{Y^2}{X^2}\right); \quad \boxed{\ln C(x+2) = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y+1}{x+2} - \frac{1}{2} \ln\left[1 + \frac{(y+1)^2}{(x+2)^2}\right]} \Rightarrow \text{I.G.}$$

habiendo bastado substituir X por (x + 2) e Y por (y + 1) para encontrar la integral general de la ecuación propuesta.

**Ejemplo 3.** Obtener la solución general de la EDO:

Es homogénea, puesto que: $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{3xy^2}$

Puede expresarse de la forma: $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{3xy^2} = \dfrac{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3}{\dfrac{3y^2}{x^2}} = \dfrac{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3}{3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$(x^3 + y^3)\cdot dx - 3xy^2\cdot dy = 0$ ;

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 + y^3}{3xy^2}$; o sea :

$$\left.\begin{array}{r} x^3t^3 + y^3t^3 = t^3 (x^3 + y^3) \\ \\ -3tx\cdot t^2\cdot y^2 = t^3 (-3xy^2) \end{array}\right\} \text{Ambas funciones son homogéneas de grado 3}$$

$$\left.\begin{array}{l} M(1, t) = 1 + t^3 \\ \\ N(1, t) = -3t^2 \end{array}\right\} \text{Hagamos el cambio: } t = y/x$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,t)\cdot dt}{M(1,t) + t\cdot N(1,t)} = \frac{3t^2\cdot dt}{1 + t^3 - 3t^3} = \frac{3t^2}{1 - 2t^3}dt \text{ ;}$$

Haciendo una cuadratura: $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln Cx = \int \frac{3t^2}{1 - 2t^3}dt = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2t^3\right);$

de donde: $\boxed{\ln Cx = -\dfrac{1}{2}\ln\left(1 - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)}$ o mejor, con $C^2 = K$, $\boxed{y = \sqrt[3]{\dfrac{kx^3 - x}{2k}}}$ $\Rightarrow$ I.G.

**Ejemplo 4.** Solve: $(x^2 - y^2)\cdot dx - 2xy\cdot dy = 0$ (in English language)

$$\left.\begin{array}{l} t^2x^2 - t^2y^2 = t^2(x^2-y^2) \\ \\ -2tx\cdot ty = t^2(-2xy) \end{array}\right\}$$

The given equation is homogeneous of degree two. The transformation:

$y = t\cdot x$, $dy = t\cdot dx + x\cdot dt$ , yields: $2x\cdot tx(t\cdot dx + x\cdot dt) = (x^2 - t^2x^2)\cdot dx$, or:

$$\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,t)\cdot dt}{M(1,t) + t\cdot N(1,t)} = \frac{2t}{1-3t^2}dt\ ;$$ integrating this equation, then:

$$-1/3 \ln |1 - 3t^2| = \ln|x| + \ln C'; \quad \ln|1 - 3t^2| + 3\ln|x| + \ln C = 0$$

Or: $C|x^3(1 - 3t^2)| = 1$.

Now, $\pm C\cdot x^3(1 - 3t^2) = 1$ , and using the change: $t = y/x$, to obtain:

$$C(x^3 - 3xy^2) = 1 = Cx^3 - 3Cxy^2\ ;$$

$$3Cxy^2 = Cx^3 - 1\ ;$$

$$\boxed{y = \sqrt{\frac{Cx^3 - 1}{3Cx}} \Rightarrow \text{G.I.}}$$

## Ejemplo 5

El método de la doble integración aunque es el más antiguo, sigue siendo el más útil para entender, en un principio, el comportamiento de los elementos estructurales y maquinales expuestos a deformación por flexión en el caso de las vigas isostáticas.

En lo que sigue, suponemos que las deformaciones verticales producidas por cargas transversales se verifican siempre dentro del período elástico, siendo muy pequeñas comparadas con la longitud de la viga.

El cálculo de la deformación de una viga por el método de la doble integración, es una operación de varios pasos o etapas que pueden generalmente ser facilitadas siguiendo un proceso definido. Aparece una ecuación diferencial ordinaria cuya resolución se precisa. Las etapas para la solución de problemas por doble integración las definimos a continuación:

a) Dibujar o trazar la posible curva elástica de la viga y determinar, si fuera necesario, las reacciones de sus soportes o empotramientos.

b) Seleccionar los intervalos de la viga que se vayan a estudiar indicando los límites de x en cada intervalo, estableciendo previamente un sistema de ejes coordenados en la viga con el origen en el extremo de uno de los intervalos. Por ejemplo, dos intervalos adyacentes pueden estar definidos como $O \leq x \leq L$ y $L \leq x \leq 3L$.

c) Escribir el momento de flexión expresándolo en función de x para cada intervalo seleccionado e igualando $M_X$ a $E \cdot I_X \dfrac{d^2y}{dx^2}$. Se integra posteriormente dicha expresión dos veces determinando dos ecuaciones, que nos expresarán la inclinación o pendiente y la deformación.

d) Evaluar y resolver las constantes de integración y otras incógnitas si las hubiera (caso de las vigas hiperestáticas), determinando finalmente la deformación en los puntos específicos requeridos.

Como $E \cdot I_X \frac{d^2y}{dx^2} = M_X$ puede expresarse por $E \cdot I_X \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x)$ o igualmente, $E \cdot I_X \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x) \cdot dx$

integrando esta EDO obtenemos:

$$E \cdot I_X \frac{dy}{dx} = \int f(x) \cdot dx + C_1 = \varphi(x) + C_1$$

ecuación llamada de la *inclinación de la tangente* que nos da los valores de la pendiente $\frac{dy}{dx}$ en cada punto.

Igualmente, $E \cdot I_x \cdot dy = \varphi(x) \cdot dx + C_1 \cdot dx$, que integrada da la ecuación finita de la elástica siguiente:

$$E \cdot I_x \cdot dy = \int \varphi(x) \cdot dx + C_1 \cdot x + C_2 = \psi(x) + C_1 \cdot x + C_2 \qquad (1)$$

Las constantes de integración pueden ser evaluadas por las condiciones límites en las ecuaciones de inclinación y deformación. Por ejemplo: en las vigas apoyadas, por las condiciones de sus apoyos $y = 0$ para $x = 0$ y $x = L$. Sin embargo, muchas vigas se encuentran sometidas a cambios bruscos de cargas (cargas concentradas o móviles), lo que origina a la izquierda o a la derecha de cualquier cambio brusco de carga, expresiones diferentes del momento de flexión, que dan ecuaciones distintas de la elástica para cada uno de los intervalos en la viga, aunque la pendiente y la deformación tienen el mismo valor en la sección que gravita una carga concentrada por la condición de continuidad de la elástica. Igualando las dos expresiones, obtenemos una ecuación que nos permite determinar una de las constantes de integración.

Ejemplo: por la condición de continuidad en la unión de diversos intervalos, se produce que:

$$y_1 = y_2 \text{ , con lo que: } \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2}.$$

Conocidas, como ya hemos señalado, las constantes $C_1$ y $C_2$ por las condiciones relativas a cada problema, para cada valor de *x* a lo largo de la viga tenemos el correspondiente de *y* por la expresión (1) que nos da la flecha correspondiente al punto de la elástica de abscisa *x*.

Como método general, se determinará la flecha máxima en el punto en que la tangente es horizontal. Para ello anularemos la ecuación de la inclinación de la tangente, y el valor o valores obtenidos para *x*, lo llevamos a la ecuación anterior (1) de la curva elástica, obteniéndose la flecha máxima $y_{máx} = \delta$ (PEREZ WHITE, 1976).

El presente ejemplo ilustra el método de la doble integración en el caso de una viga isostática. Se recomienda hacer el cálculo de deformaciones en vigas isostáticas correspondientes a distintos casos de sustentación y carga. Pues bien, el caso es el siguiente:

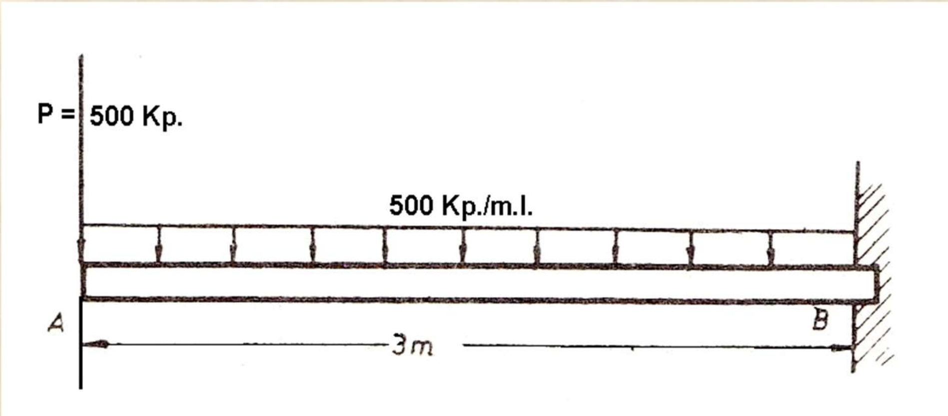
Una viga de acero en voladizo está cargada (con una carga puntual P = 500 kp = 4905 N) en el extremo libre y otra uniformemente repartida) y sustentada como representa la figura siguiente. Si el módulo de elasticidad del acero es: $E = 2.1 \times 10^6$ kp/cm$^2$, se trata de determinar:

1º. El perfil doble T de la viga si se considera un coeficiente de trabajo del acero de:
$\sigma_{adm.}$= 1.200 kp/cm$^2$ (120 N/mm$^2$), dibujando el correspondiente diagrama de momentos flectores.

2º. La deformación en el extremo A de la viga.

*Solución*:

Un esquema de la viga mencionada podría ser el siguiente:




Viga empotrada por un extremo y libre por el otro.

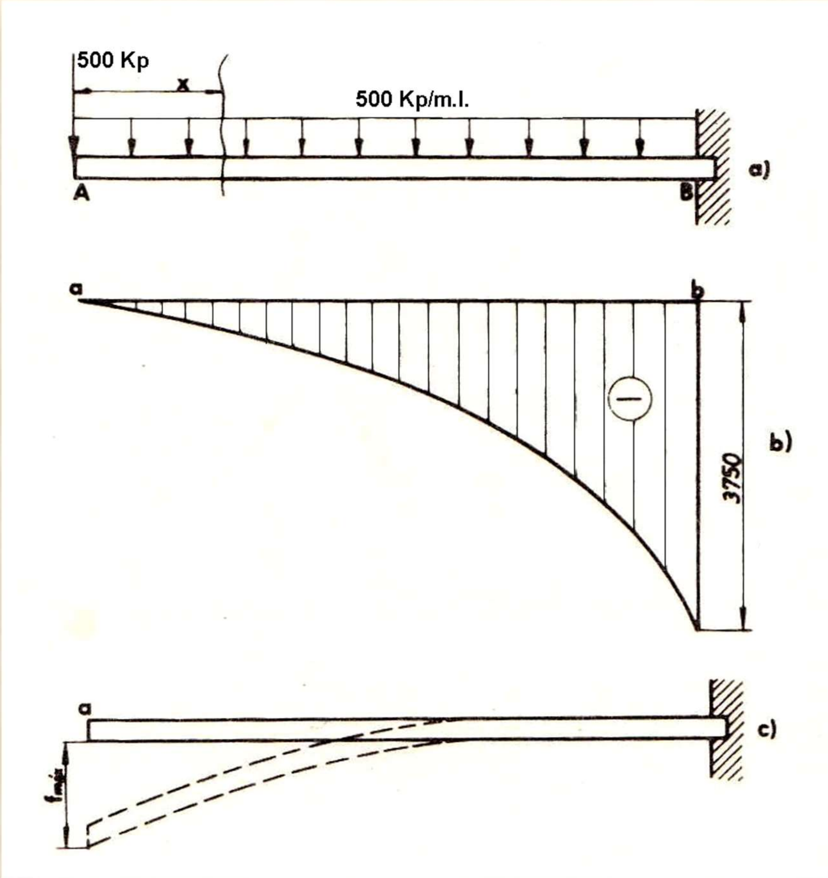
1º) El momento máximo se produce en el empotramiento B, y:

$M_B$ = -500·3 – 1.500·1’5 = -3.750 m.kp., y con un módulo resistente de:

$$W_x = \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{3.750 \cdot 100}{1.200} = 312{,}5\ cm^3$$

, correspondiendo un perfil de acero laminado en caliente IPN 240 mm. (con $W_x$ = 354 > 312’5 $cm^3$) o bien IPE 240 mm. (con $W_x$ = 324 > 312’5 $cm^3$).

Veamos, ahora, la figura siguiente:



Diagramas de cargas, momentos y deformación o flecha.

El diagrama de momentos se representa en la subfigura b).

2º) Para calcular la deformación o flecha, tomaremos momentos respecto a una sección cualquiera de abscisa x, con lo que:

$$M_x = -500 \cdot x - 500 \cdot \frac{x^2}{2}$$

y llevemos este valor a la ecuación de deformaciones, o sea:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -500 \cdot x - 500 \cdot \frac{x^2}{2} \quad \text{(I)}$$

Integrando esta expresión, que es una ecuación diferencial de variables separadas, tendremos la ecuación de inclinación de las tangentes:

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = -500 \cdot \frac{x^2}{2} - 500 \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \text{ (II)}$$

Para hallar la constante de integración $C_1$ por las condiciones iniciales, la tangente es horizontal (nula) en el empotramiento B impidiendo toda rotación, luego haciendo $\frac{dy}{dx} = 0$ para x = L, obtenemos que:

$$C_1 = \frac{500 \cdot L^2}{2} + \frac{500 \cdot L^3}{6}$$

valor éste que substituido en (II) y volviendo a integrar, ofrece la ecuación de la curva elástica:

$$E \cdot I \cdot y = -\frac{500 \cdot x^3}{6} - \frac{500 \cdot x^4}{24} + \frac{500 \cdot L^2}{2} x + \frac{500 \cdot L^3}{6} x + C_2$$

La constante de integración $C_2$ que calculamos con y = 0 para x = L y sustituyendo su valor:

$C_2 = -\frac{500 \cdot L^3}{3} - \frac{3}{24} 500 \cdot L^4$ , en la (I), obtenemos después de reducir:

$$y = \frac{1}{E \cdot I}\left[-\frac{250 \cdot x^3}{3} - \frac{125 \cdot x^4}{6} + 250 \cdot L^2 \cdot x + \frac{250 \cdot L^3}{3} \cdot x - \frac{500 \cdot L^3}{3} - \frac{125}{2} \cdot L^4\right]$$

ecuación de la curva elástica, que para cada valor de x nos permite obtener el correspondiente valor de y.

El valor máximo de y lo obtenemos obviamente en el extremo libre, para x = 0, luego será:

$$y_{máx}(x = 0) = f_{máx} = -\frac{500}{3 \cdot E \cdot I}\left(L^3 + \frac{3L^4}{8}\right)$$

y substituyendo valores con: E = 2’1·$10^6$ kp/cm$^2$, L = 300 cm. e $I_x$ = 4.250 cm$^4$ (que es el momento de inercia correspondiente a un perfil laminado IPN 240 mm.), obtenemos: $f_{máx}$ = 1’07 cm.

El perfil de la viga para una deformación máxima igual a $\frac{luz}{500}$, esto es, 300/500 = 0'60 cm. nos daría, por la expresión anterior:

$$I_x = \frac{1'07x4.250}{0'60} = 7.579 \text{ cm}^4$$, correspondiendo a un perfil normal IPN 280 mm.

con $I_x$ = 7.590 $cm^4$ o bien a un perfil IPE 300 mm. con $I_x$ = 8.360 $cm^4$.

Por aplicación directa de las fórmulas existentes al respecto (pueden consultarse en los manuales *ad hoc*), se tendría una flecha o sagita de (correspondiente a un perfil IPN 240 mm.):

$$f_{máx} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{Q \cdot L^3}{8 \cdot E \cdot I} = \frac{500 \cdot 300^3}{3 \cdot 2'1 \cdot 10^6 \cdot 4.250} + \frac{1.500 \cdot 300^3}{8 \cdot 2'1 \cdot 10^6 \cdot 4.250} = 0'50 + 0'57 = 1'07 \text{ cm.}$$

o sea $\cong \frac{1}{280}$ de la luz, que resulta ACEPTABLE para el caso de una viga metálica en voladizo, según la normativa constructiva vigente. En el caso de utilizar alternativamente un perfil IPE 240 mm., se tendría una flecha máxima de:

$$f_{máx} = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{Q \cdot L^3}{8 \cdot E \cdot I} = \frac{500 \cdot 300^3}{3 \cdot 2'1 \cdot 10^6 \cdot 3.890} + \frac{1.500 \cdot 300^3}{8 \cdot 2'1 \cdot 10^6 \cdot 3.890} = 0'55 + 0'62 = 1'17 \text{ cm.}$$

o sea $\cong \frac{1}{256}$ de la luz, que resulta ACEPTABLE (aunque más justo) para el caso de una viga metálica en voladizo, según la normativa constructiva vigente.

Como se ha visto antes, el método de la doble integración, ofrece:

$$M_B = -500 \cdot 3 - (500 \cdot 3) \cdot 1'5 = -3.750 \text{ mkp } (36.787 \text{ mN}) ;$$

$$E \cdot I \cdot y'' = -M_x ; \ M_x = -P \cdot x - \frac{\omega \cdot x^2}{2} = -500 \cdot x - 250 \cdot x^2 ;$$

$$E \cdot I \cdot y'' = 500 \cdot x + 250 \cdot x^2 ; \quad \text{Integrando: } E \cdot I \cdot y' = 500 \cdot \frac{x^2}{2} + 250 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1 ;$$

$$E{\cdot}I{\cdot}y = 500\cdot\frac{x^3}{6} + 250\cdot\frac{x^4}{12} + C_1x + C_2 \;;\quad x = 3 \rightarrow y' = 0 \;;\quad \text{de donde:}$$

$$0 = 250 \text{ x } 9 + 250 \text{ x } 9 + C_1;\ \text{de donde: } C_1 = -4.500;$$

$$x = 3 \rightarrow y = 0,\ \text{de donde:}$$

$$0 = \frac{500\cdot 27}{6} + \frac{250\cdot 81}{12} - 4.500\cdot 3 + C_2,\ \text{con lo que:}$$

$$C_2 = 13.500 - 2.250 - 1.687'5 = 9.562'5\ ;$$

$$y = \frac{1}{E{\cdot}I} = \left(\frac{250\cdot x^3}{3} + \frac{250\cdot x^4}{12} - 4.500\cdot x + 9.562'5\right) \;;\quad y_{máx} \rightarrow x = 0\ ;$$

o sea, en el caso de emplear un perfil laminado en caliente IPN 240 mm.:

$$\boxed{y_{máx} = \frac{9.562'5}{(2'1{\cdot}10^6{\cdot}10^4)\cdot\left(\frac{4.250}{10^8}\right)} = 0'0107 \text{ m.} = 1'07 \text{ cm.}}\ ,$$

, o bien, alternativamente, en el caso de emplear un perfil laminado en caliente IPE 240 mm.:

$$\boxed{y_{máx} = \frac{9.562'5}{(2'1{\cdot}10^6{\cdot}10^4)\cdot\left(\frac{3.890}{10^8}\right)} = 0'0117 \text{ m.} = 1'17 \text{ cm.}}\ \text{c.s.q.d.}$$

## Ejemplo 6

El PB-209, que es un isótopo radioactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene un periodo medio de vida de 3'30 horas. Si al principio había un gramo de plomo, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que se desintegre el 90%?

*Solución*:

Sea:

$$\begin{cases} \text{A: cantidad de plomo PB-209 presente en el tiempo } t. \\ A_0\text{: cantidad inicial de plomo PB-209.} \\ t\text{: tiempo, en horas.} \\ \dfrac{dA}{dt}\text{: rapidez de desintegración del PB-209.} \\ k>0\text{: constante de proporcionalidad.} \end{cases}$$

De tal manera que: $\dfrac{dA}{dt} = -k \cdot A$: hipotéticamente, resulta que la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente del elemento, y entonces:

$$\frac{dA}{A} = -k \cdot dt \Leftrightarrow \ln A = -k \cdot t + c_1 \Leftrightarrow A = e^{-kt+c_1} \Leftrightarrow A = c \cdot e^{-kt}\text{, con } c = e^{c_1} \qquad (1)$$

$$A_0 = A(0) = 1\text{: cantidad de PB-209 en } t = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = ce^{-k(0)} \Leftrightarrow c = 1 \qquad \{(2) \text{ en } (1)\} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad A = e^{-kt} \qquad \{(3) \text{ en } (1)\} \qquad (4)$$

$$A(3'3) = 0'5\text{: en } t = 3'3 \text{ se desintegra la mitad del PB-209} \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad 0'5 = e^{-k(3'3)} \Leftrightarrow -3'3k = \ln 0'5 \Leftrightarrow k = \frac{-0'6931471}{-3'3} \approx 0'21 \quad \{(5) \text{ en } (4)\} \qquad (6)$$

Substituyendo (6) en (4) se obtiene la función para la cantidad de PB-209 en el tiempo *t*, a saber:

$$A = e^{-0'21 \cdot t} \qquad (7)$$

Ahora necesitamos averiguar cuánto tiempo se necesita para que se desintegre el 90% de PB-209, es decir, para que la cantidad presente sea el 10% ⇔ 0’1 (10% de 1) de la original; substituyendo este valor de A en (7), se obtiene que:

$$0'1 = e^{-0'21t\cdot} \Leftrightarrow -0'21\cdot t = \ln 0'1 \Leftrightarrow t = \frac{-2'3025851}{-0'21} = 10'964691 \approx 11 \text{ horas.}$$

*Respuesta:* para que se desintegre el 90% de PB-209, se necesitan transcurrir, aproximadamente, 11 horas.

## Ejemplo 7

Un termómetro se saca de un horno donde la temperatura del aire es de 70ºC y se lleva al exterior, donde la temperatura es de 10ºC. Pasado medio minuto el termómetro indica 50ºC. a) ¿Cuál es la lectura cuando t = 1 minuto?, b) ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a los 15ºC?

*Solución*:

a) La ley de enfriamiento de Newton establece que en un cuerpo que se enfría, la rapidez con que la temperatura del cuerpo T cambia en el tiempo *t* es proporcional a la diferencia existente entre la temperatura del cuerpo y la temperatura constante $T_m$ del medio ambiente que le rodea. Es decir, que si k es una constante de proporcionalidad, se tendrá que: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$ . Pero, en el presente problema se tiene que: $T_m$ = 10ºC. Ahora:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-10) \Leftrightarrow \frac{dT}{(T-10)} = k\cdot dt \Leftrightarrow \ln(T-10) = k\cdot t + c_1 \Leftrightarrow T - 10 = e^{kt+c_1},$$

Y haciendo: $\Rightarrow T = c\cdot e^{kt} + 10$ (1)

En: t = 0, T = 70ºC (2); por lo que, al substituir (2) en (1), se tiene que:

$$70 = c\cdot e^{k(0)} + 10 \Leftrightarrow c = 60 \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{ll} T = 60e^{k\cdot t} + 10 & \{(3)\text{ en }(1)\} \quad (4) \\ \quad T(0'5) = 50 \quad (5) & \end{array}\right\} \Rightarrow 50 = 60\cdot e^{0'5\cdot k} + 10 \quad \{(5)\text{ en }(4)\},$$

$$\Rightarrow e^{0'5\cdot k} = 0'\widehat{6} \Leftrightarrow 0'5\cdot k = \ln 0'\widehat{6} \Leftrightarrow k = \frac{-0'40547}{0'5} \Leftrightarrow k = -0'81094 \qquad (6)$$

Substituyendo el valor de k dado por (6) en (4), se obtiene que:

$T = 60\cdot e^{-0'81094\cdot t} + 10$ (7), y la lectura buscada será:

$T(1) = 60\cdot e^{-0'81094(1)} + 10 = 60(0'44444) + 10 =$ 36'67ºC

b) Para calcular el tiempo en que la temperatura sea de 15ºC, se substituye T = 15 en (7), esto es: $15 = 60\cdot e^{-0'81094\cdot t} + 10$ ; $60\cdot e^{-0'81094\cdot t} = 5$; $e^{-0'81094\cdot t} = 0'08$ , y entonces:

$$\Rightarrow \quad -0'81094\cdot t = \ln 0'08\widehat{3} \Leftrightarrow \quad \boxed{t = \frac{-2'48491}{-0'81094} = 3'064\text{ minutos.}}$$

## Ejemplo 8

Una partícula se mueve a lo largo del eje OX de tal manera que su velocidad es proporcional al producto de su posición instantánea x (medida desde x = 0) y el tiempo t (medido de t = 0). Si la partícula está localizada en x = 54 m. cuando t = 0 s y x = 36 m. cuando t = 1 s, ¿dónde estará situada cuando haya transcurrido un tiempo de t = 2 s?.

*Solución:*

Es obvio que si la velocidad de desplazamiento fuera constante, a los 2 segundos la partícula se hallaría a 18 m. a la derecha del origen. Pero al ser la velocidad variable, se tendrá que:

$\dfrac{dx}{dt} = k\cdot x\cdot t$ (k: constante de proporcionalidad), que es una EDO de variables separables.

$\Rightarrow \dfrac{dx}{x} - ktdt = 0$ (separando variables),

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int k \cdot t \cdot dt = c \quad \text{(integrando cada término de la ecuación),}$$

$$\Rightarrow \ln|x| - \frac{k}{2}t^2 = c_1 \Leftrightarrow \ln|x| = c_1 + \frac{k}{2}t^2 \Leftrightarrow x = \pm \exp\left(c_1 + \frac{k}{2}t^2\right),$$

$$\Rightarrow x = \pm \exp(c_1) \cdot \exp\left(\frac{k}{2}t^2\right) \Leftrightarrow x = c \cdot \exp\left(\frac{k}{2}t^2\right) \qquad (1)$$

Las condiciones del problema planteado son las siguientes:

$$\begin{cases} x = 54 \text{ m., } t = 0 \text{ seg.} & (2) \\ x = 36 \text{ m., } t = 1 \text{ seg.} & (3) \end{cases}$$

Substituyendo ahora (2) en (1), se obtiene que:

$$54 = c \cdot \exp(0) \Leftrightarrow c = 54 \qquad (4)$$

Substituyendo (3) y (4) en (1), se obtiene que:

$$36 = 54 \cdot \exp\left(\frac{k}{2}\right) \Leftrightarrow \exp\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{k}{2} = \ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 2\ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow k \approx -0'81093 \qquad (5)$$

Al substituir (4) y (5) en (1), se obtiene la solución particular requerida:

$x = 54 \cdot \exp\left(\frac{-0'81093}{2}t^2\right) \Leftrightarrow x = 54 \cdot e^{-0'40547 \cdot t^2}$. De tal manera que:

$$x(2) = 54 \cdot e^{-0'40547(2)^2} \Leftrightarrow x(2) = 54 \cdot e^{-1.62186} = 54(0'19753) = 10'67 \text{ m.}$$

*Respuesta:* la partícula en cuestión, a los 2 segundos, se encontrará, aproximadamente, situada a 10’67 m. a la derecha del origen.

## Ejemplo 9

En cierto cultivo de bacterias de uso agrícola, el número de éstas se ha sextuplicado en 10 h. ¿Qué tiempo tarda la población bacteriana en duplicar su número inicial?

*Solución:*

Suponiendo que la tasa de cambio del número de bacterias con respecto al tiempo, dx/dt, sea proporcional al número existente de bacterias en un momento determinado, x, se tiene que:

$\frac{dx}{dt} = k\cdot x, \quad \Rightarrow \qquad x^{-1}dx = k\cdot dt$ (separando variables),

$\Rightarrow \qquad \int x^{-1}dx = \int k\cdot dt$ (aplicando la integral mediante una cuadratura),

$\Rightarrow \qquad \ln x = k\cdot t + c_1$ (integrando en ambos miembros),

$\Rightarrow \qquad x = \exp(k\cdot t + c_1) \Leftrightarrow x = \exp(c_1)\cdot\exp(k\cdot t) \Leftrightarrow x = c\cdot e^{k\cdot t}$ (1)

Sea ahora:

$c_0$: población inicial (número de bacterias cuando t = 0: cuando se inició el estudio).

$c_f$: población final (número de bacterias en el último conteo realizado).

Así, (1) queda del siguiente modo: $c_f = c_0e^{kt}$ (2)

Debido a que el número inicial de bacterias se ha sextuplicado en 10 horas, se tiene que: $c_f = 6c_0$, t = 10 horas (3). Substituyendo (3) en (2), se obtiene que:

$$6c_0 = c_0e^{10k} \Leftrightarrow 6 = e^{10k} \Leftrightarrow \ln 6 = 10k \Leftrightarrow k = \frac{\ln 6}{10} \approx 0'1791759469 \qquad (4)$$

De tal manera que: $c_f = c_0e^{0'1791759469\cdot t}$ $\{(4)$ en $(2)\}$

Se pide averiguar cuándo el número de bacterias se duplicó, esto es, cuando se cumpla que: $c_f = 2c_0$; de esta forma, la expresión anterior queda así:

$$2 = e^{0'1791759469 \cdot t} \Leftrightarrow \ln 2 = 0'1791759469 \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{0'6031471806}{0'1791759469};$$

$$t \approx 3'868528073 \text{ horas} = 3\text{h}, 52'$$

*Respuesta:* la población de bacterias se duplicará al cabo de aproximadamente 3 horas y 52 minutos.

## Ejemplo 10

Cuando un rayo vertical de luz pasa a través de una substancia transparente, el grado con que su intensidad I disminuye es proporcional a I(t), en donde *t* representa el espesor del medio, expresado en pies. En agua de mar limpia, la intensidad a 3 pies bajo la superficie es el 25% de la intensidad inicial $I_0$ del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie del agua?

*Solución*:

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = -k \cdot I: & \text{la intensidad del rayo de luz disminuye con una rapidez proporcional a la intensidad presente.} \\ k > 0: & \text{constante de proporcionalidad.} \\ t: & \text{espesor del medio, expresado en pies.} \end{cases}$$

De tal modo que: $\dfrac{dI}{I} = -k \cdot dt \Leftrightarrow \ln I = -k \cdot t + c_1 \Leftrightarrow I = e^{-k \cdot t + c_1} \Leftrightarrow I = ce^{-k \cdot t}$ (1)

(habiendo hecho: $e^{c_1} = c$) . $I(0) = I_0$: intensidad del rayo en t = 0 (2)

Substituyendo (2) en (1) y operando, se obtiene $c = I_0$; reemplazamos este valor de c en (1), con lo que: $I = I_0 e^{-kt}$ (3)

$$\left.\begin{array}{r} t = 3 \\ I = 25\,\% I_0 \Leftrightarrow I = 0'25 I_0 \end{array}\right\}$$: A 3 pies bajo la superficie la intensidad es el 25% de la inicial $I_0$ (4)

Substituyendo (4) en (3), se obtiene que:

$$0'25{\cdot}I_0 = I_0 e^{-3k}; e^{-3k} = 0'25; -3k = \ln 0'25 \Leftrightarrow k = \frac{-1'3862944}{-3} \Leftrightarrow k = 0'4620981 \sim$$

$\sim 0'4621$ (5), $\Rightarrow$ $I(t) = I_0 e^{-4621\cdot t}$ $\{(5)$ en $(3)\}$ (6)

$$I(15) = I_0 e^{-0'4621(15)} = I_0 e^{-6'9} = 0'001\cdot I_0 \Leftrightarrow 0'1\% \text{ de } I_0.$$

*Respuesta:* aproximadamente, a una profundidad de 15 pies bajo la superficie del agua, la intensidad del rayo de luz es de solo el 0’1% de la intensidad en la superficie.

UNED TORTOSA

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 2

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (II)

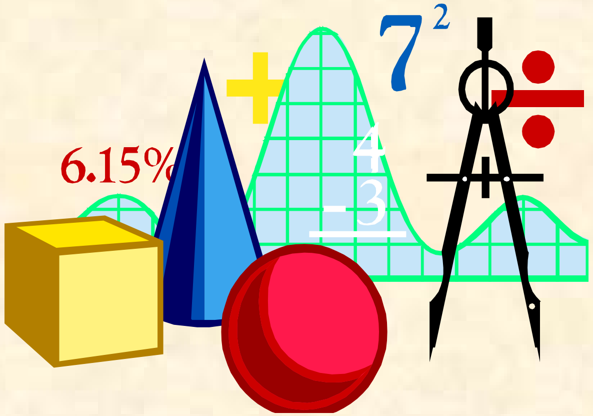
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 2.5. Ecuación lineal de primer orden

Una ecuación de primer orden y lineal, esto es, de primer grado en la función y en sus derivadas, solo puede tener términos en **y**, en **y'** además de aquellos independientes de **y**. Adoptará, por tanto, la forma:

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0$$

donde X = -f(x) y $X_1$ = -g(x) representan funciones de la única variable x.

Si $X_1$ = -g(x) = 0, la ecuación recibe el nombre de “homogénea” o incompleta; empezaremos por la integración en este caso particular más simple.

Sea, por tanto, la ecuación lineal de primer orden y homogénea: $\frac{dy}{dx} + Xy = 0$

Su integración resulta inmediata, puesto que se trata de una ecuación de variables separables:

$$\frac{dy}{y} = -X \cdot dx$$

Integrando:

$$\ln y - \ln C = \ln(y/C) = -\int X \cdot dx$$

de donde resulta:

$$\boxed{y = - C \cdot e^{-\int X dx}} \Rightarrow \text{I. G.}$$

Para la obtención de la fórmula directa de integración de la ecuación completa, seguiremos un procedimiento muy utilizado en ecuaciones diferenciales, denominado “variación de constantes”. Consiste el método expresado en substituir la constante C, hallada anteriormente, por una función desconocida que designaremos por C(x), de forma tal que la expresión:

$y = - C(x) \cdot e^{-\int X dx}$ [I] , verifique a la ecuación completa, esto es, a la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0 \qquad [II]$$

Derivando en [I], se obtiene: $\frac{dy}{dx} = -\frac{dC}{dx} e^{-\int X dx} + CXe^{-\int X dx}$

Sustituyendo en [II] los valores de y e y’, se tendrá:

$$-\frac{dC}{dx} e^{-\int X dx} + CXe^{-\int X dx} - XCe^{-\int X dx} + X_1 = 0 \quad \text{, o sea:} \quad \frac{dC}{dx} e^{-\int X dx} = X_1$$

de donde: $dC = X_1 \cdot e^{\int X dx} \cdot dx$ .

Una cuadratura proporciona: $C + K = \int X_1 \cdot e^{\int X dx} \cdot dx$ ,

donde por K se representa la nueva constante. Substituyendo en [I] C por su valor, se obtiene la fórmula directa [III]:

$$\boxed{y = e^{-\int X dx} \left[ K - \int X_1 \cdot e^{\int X dx} \cdot dx \right]} \Rightarrow \text{I. G.}$$

que es la integral general de la ecuación diferencial lineal de primer orden.

Veamos, a continuación, el siguiente ejemplo ilustrativo:

Se trata de resolver la ecuación diferencial genérica: $y' + y \cdot f(x) + g(x) = 0$, siendo y una función económica cualquiera.

*Solución:*

Para integrar esta ecuación, conocida con la denominación de “ecuación lineal de primer orden”, se empieza por resolver la ecuación homogénea:
$y' + y \cdot f(x) = 0$, cuya integral general, obtenida en la teoría anterior, es: $y_1 = K \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx}$.
A continuación, se supone que la constante K es una función K(x), que se determina con la condición de que:

$y_1 = K(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx}$, verifique la ecuación propuesta. Como:

$y_1' = K'(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} - K(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} \cdot f(x)$ , substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$$K'(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} - K(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} \cdot f(x) + K(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} \cdot f(x) + g(x) = 0 \ ,$$

o bien: $K'(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} + g(x) = 0$, de donde: $K'(x) = -g(x) \cdot e^{\int f(x) \cdot dx}$, e integrando mediante una cuadratura, se obtiene que: $K(x) = C - \int g(x) \cdot e^{\int f(x) \cdot dx} \cdot dx$ , donde C es la nueva constante de integración.

Por lo tanto, la integral general de la ecuación propuesta, coincidente con la expresión [III] anterior, es la siguiente:

$$\boxed{y = \left[ C - \int g(x) \cdot e^{\int f(x) \cdot dx} \cdot dx \right] \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx}}$$

, que constituye la formulación teórica válida para la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias, como ya hemos tenido ocasión de resaltar en la introducción teórica, en que se ha hecho:

$$g(x) = X_1(x) \text{ y } f(x) = X(x).$$

## *2.6. Ejemplos*

### **Ejemplo 1**

Resolver, por aplicación: a) del método de variación de constantes (opcional), y b) de la fórmula directa III, la ecuación diferencial siguiente:

$$y' + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0$$

*Solución:*

a) La ecuación homogénea correspondiente será: $y' + 2xy = 0$ $(X_1 = 0)$ ,

que se puede escribir:

$$\frac{dy}{y} = -2x \cdot dx$$

e integrando se obtiene:

$$\ln y - \ln C = -x^2 , \quad \text{de donde: } y = C \cdot e^{-x^2}$$

Suponiendo ahora que en vez de la constante C se escribe la función C(x), aunque por comodidad de escritura no lo haremos, derivando se obtiene:

$$y' = C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2}$$

Substituyendo en la ecuación inicial dada:

$$C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} - 2xe^{-x^2} = 0 , \quad \text{o sea: } \frac{dC}{dx} = 2x \ ; \quad C = K + x^2$$

y la solución general buscada será:

$$\boxed{y = (K + x^2)e^{-x^2}} \quad \Rightarrow \text{I.G.}$$

b) Se llega, obviamente, al mismo resultado por aplicación directa de la fórmula [III]. En efecto:

$$y' + 2xy - 2x \cdot e^{-x^2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} X &= 2x \\ X_1 &= -2x \cdot e^{-x^2} \end{aligned}\right\}$$

$$\int X dx = 2\int x \cdot dx = x^2$$

$$\int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} dx = -2\int x e^{-x^2} \cdot e^{x^2} dx = -2\int x \cdot dx = -x^2;$$

La fórmula directa III a aplicar será, como hemos visto:

$y = e^{-\int X dx}$ [ K - $\int X_1 \cdot e^{\int X dx} \cdot dx$ ], con lo que se obtiene:

$$\boxed{y = e^{-x^2}\left[K + x^2\right]}$$ , c.s.q.d.

## Ejemplo 2

Sea ahora, integrar la ecuación diferencial siguiente: a) por aplicación directa de la fórmula y b) por el método de variación de constantes.

$$y' + 2y - x^2 - 2x = 0.$$

*Solución:*

a) Apliquemos directamente la fórmula [III]:

$$y = e^{-\int X \cdot dx}\left[K - \int X_1 e^{\int X \cdot dx} dx\right]$$

donde: $X = 2$ y $X_1 = -(x^2 + 2x)$.

Para ello calculemos las integrales:

$$\int X \cdot dx = 2\int dx = 2x$$

$$\int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx = -\int (x^2 + 2x) \cdot e^{2x} \cdot dx = -\int x^2 e^{2x} dx - \int 2x \cdot e^{2x} dx \qquad (1)$$

Pero aplicando la integración por partes, se tiene que:

$$\int x^2 e^{2x} dx = \tfrac{1}{2} \int x^2 \cdot 2 \cdot e^{2x} dx = \tfrac{1}{2} (x^2 \cdot e^{2x}) - \tfrac{1}{2} \int e^{2x} \cdot 2x \cdot dx = \tfrac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \int e^{2x} \cdot x \cdot dx$$

Substituyendo en (1), se tendrá:

$$-\tfrac{1}{2}\,x^2\cdot e^{2x} + \int e^{2x}\cdot x\cdot dx - \int 2x\cdot e^{2x}\cdot dx = -\tfrac{1}{2}\,x^2\cdot e^{2x} - \int x\cdot e^{2x}\cdot dx \qquad (2)$$

Pero:

$$\int x\cdot e^{2x}dx = \tfrac{1}{2}\int x\cdot 2\cdot e^{2x}dx = \tfrac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} - \tfrac{1}{2}\int e^{2x}\cdot dx = \tfrac{1}{2}\,x\cdot e^{2x} - \tfrac{1}{4}\,e^{2x} \;;$$

Substituyendo en (2), se tiene que:

$$-\tfrac{1}{2}\cdot x^2\cdot e^{2x} - \tfrac{1}{2}\,x\cdot e^{2x} + \tfrac{1}{4}\,e^{2x} =$$

$$= -\frac{2x^2\cdot e^{2x}}{4} - \frac{2x\cdot e^{2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{4} = -\frac{e^{2x}}{4}(2x^2 + 2x - 1)$$

La integral o solución general de esta EDO será:

$$\boxed{y = e^{-2x}\left[K + \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 + 2x - 1)\right] = Ke^{-2x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1)} \Rightarrow \text{I.G.}$$

b) Llegaríamos al mismo resultado por aplicación del método de variación de constantes (opcional). Empleando dicho método, en efecto, se tiene que:

$$y' + 2y - x^2 - 2x = 0 \qquad (3)$$

$$y' + 2y = 0 \;;\quad dy/dx = -2y \;;\quad dy/y = -2\cdot dx \;;\quad \ln y - \ln C = -2x \;;\quad \text{o sea:}$$

$$y = C\cdot e^{-2x} \;;\quad y' = C'\cdot e^{-2x} - 2\cdot C\cdot e^{-2x} \;;$$

Substituyendo en la expresión (3), se tiene:

$$C'\cdot e^{-2x} - 2\cdot C\cdot e^{-2x} + 2\cdot C\cdot e^{-2x} - x^2 - 2x = 0 \;;$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{x^2 + 2x}{e^{-2x}} \;;\quad C = \int (x^2 + 2x)e^{2x}dx = \int x^2 e^{2x}dx + \int 2x\cdot e^{2x}dx \;;$$

Ahora bien:

$$\int x^2\cdot e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int x^2\cdot 2\cdot e^{2x}\cdot dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x^2 \\ v = e^{2x} \\ du = 2x\cdot dx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2x\cdot dx \;;\; \text{de donde :}$$

$$C = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2x\cdot dx + \int e^{2x}\cdot 2x\cdot dx = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2x\cdot dx \;;$$

Así mismo, integrando por partes, se tendrá que:

$$\int e^{2x} \cdot 2x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x \\ v = e^{2x} \\ du = dx \end{array} \right\} = x \cdot e^{2x} - \int e^{2x} \cdot dx = x \cdot e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{, con lo que:}$$

$$C = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + K = \frac{2}{4} x^2 \cdot e^{2x} + \frac{2}{4} x \cdot e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + K =$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 + 2x - 1) + K \ ;$$

y la solución general buscada de la E.D. será:

$$\boxed{y = C \cdot e^{-2x} = e^{-2x}\left[K + \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 + 2x - 1)\right] = K \cdot e^{-2x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1)} \Rightarrow \text{I.G.}$$

plenamente coincidente con la solución anteriormente hallada por aplicación directa de la fórmula [III], c.s.q.d.

## Ejemplo 3

Sea *x* el número de unidades fabricadas e *y* el coste de producción de un bien determinado. Sabiendo que la tasa a la que cambia el coste respecto al número de unidades producidas viene dado por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - x + \frac{9}{x}$ , se pide calcular el coste en función de las unidades producidas, siendo el coste unitario de producción de 4€/ud. cuando el número de unidades fabricadas es 3.

*Solución:*

Se trata, en este caso, de resolver la ecuación diferencial lineal dada. Esto es:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + x - \frac{9}{x} = 0; \quad \text{donde: } X = -\frac{1}{x}; X_1 = x - \frac{9}{x};$$

$$\int X \cdot dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x;$$

$$\int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} = \int \left(x - \frac{9}{x}\right) \cdot e^{-\ln x} \cdot dx = \int \left(x - \frac{9}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot dx =$$

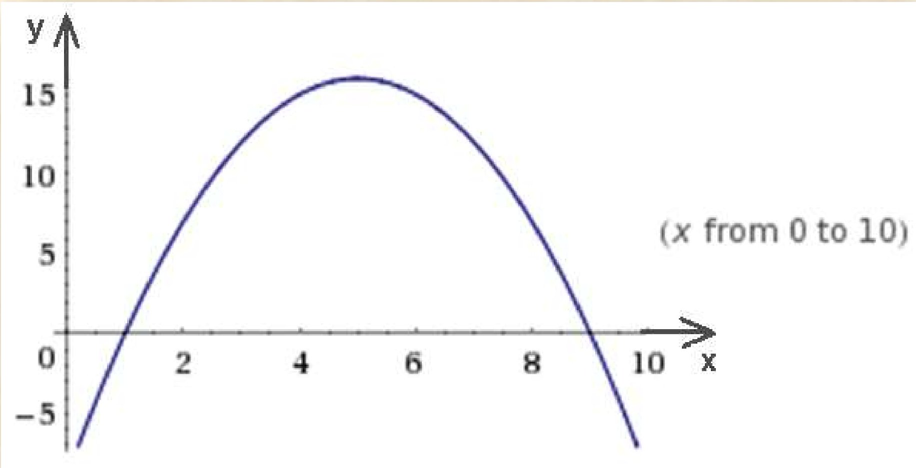
$$= \int \left(1 - \frac{9}{x^2}\right) \cdot dx = x - 9\int \frac{1}{x^2} \cdot dx = x + \frac{9}{x}; \text{ luego:}$$

$y = x\left(k - x - \frac{9}{x}\right) = kx - x^2 - 9$ ; para y = 3 x 4 = 12'00 € → x = 3 ud., o sea:

y = 12 = 3k – 9 – 9 = 3k – 18 ; $k = \frac{18 + 12}{3} = 10$; y resulta la integral particular:

$$\boxed{y = -x^2 + 10x - 9}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



Esta función tiene un máximo relativo o local para x = 5 ud. e y = 16'00 € (coste unitario de producción de 3'2 €/ud.). El coste de producción se anula para x = 1 ud. y x = 9 ud. de producto, puesto que se trata de resolver la ecuación: $x^2 - 10x + 9 = 0$; de donde:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$, y resulta: $x_1 = 1$ y $x_2 = 9$.

## Ejemplo 4

Integrar la ecuación diferencial ordinaria: $y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$ .

*Solución:*

Se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden (véase el ejercicio anterior). Su integración se puede lograr directamente aplicando la fórmula hallada y expuesta en la introducción teórica así como en el ejercicio anterior, o sea:

$$y = \left[ C - \int g(x) \cdot e^{\int f(x) \cdot dx} \cdot dx \right] \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx},$$

pero preferimos aplicar el método expuesto de variación de constantes para su mejor comprensión. Empezaremos, pues, por integrar la ecuación homogénea:

$y' + \frac{y}{x} = 0$ , que es una ecuación de variables separables que se puede escribir: $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ , y, después de integrar resulta que: $\ln y = -\ln x + \ln C = \ln \frac{C}{x}$ , de donde se obtiene: $y = \frac{C}{x}$ .

Substituyendo la constante C por la función C(x), se obtiene y = C(x)/x, función que vamos a obligar que satisfaga la ecuación diferencial propuesta. Derivando y substituyendo, se obtiene que:

$\frac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$ , de donde: $x \cdot C'(x) = 1$; $C'(x) = \frac{1}{x}$ , y, de aquí: $C(x) = \ln x + \ln K = \ln K \cdot x$,

donde K es la nueva constante arbitraria. La integral general será, pues: $\boxed{y = \frac{\ln K \cdot x}{x}}$ .

**Ejemplo 5**

Resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y' + 3y = \sin 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

*Solución:*

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda + 3 = 0\ ;\quad \lambda = -3\ ;\quad \text{con lo que:}\quad y^* = c \cdot e^{-3x}.$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

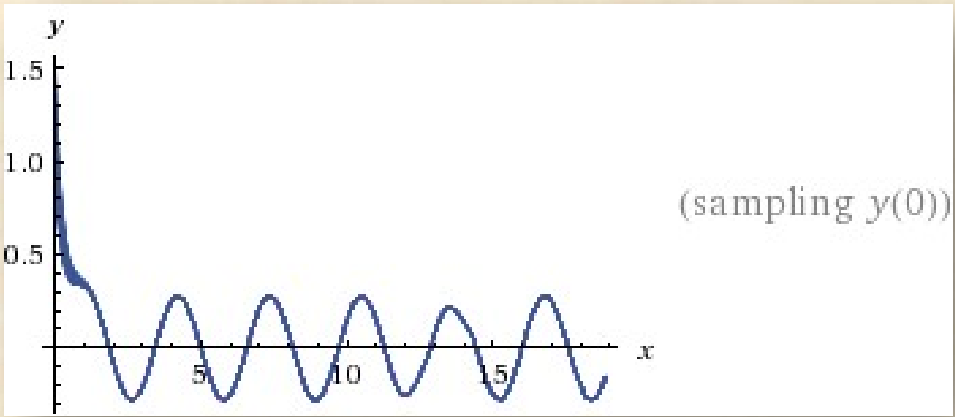
$$\begin{cases} y_p = h \cdot \cos 2x + k \cdot \sin 2x \\ y'_p = -2h \cdot \sin 2x + 2k \cdot \cos 2x \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene:

$$-2h \cdot \sin 2x + 2k \cdot \cos 2x + 3h \cdot \cos 2x + 3k \cdot \sin 2x = \sin 2x\ ;$$
$$-2h + 3k = 1\ ;\quad \text{de donde: } h = -2/13\ ;\quad k = 3/13\ ;\quad 3h + 2k = 0\ ;$$

$$y(x) = y^* + y_p = c \cdot e^{3x} - 2/13 \cdot \cos 2x + 3/13 \cdot \sin 2x\ ;$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Como: y(0) = c – 2/13 = 0 ;   c = 2/13 ;   con lo que: $\boxed{y(x) = \frac{2}{13} \cdot e^{-3x} - \frac{2}{13} \cdot \cos 2x + \frac{3}{13} \cdot \sin 2x}$

Este problema lo hemos resuelto siguiendo los procedimientos establecidos para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de grado superior que veremos en siguientes lecciones. Sin embargo, de hecho se trata de una ecuación lineal de primer orden, con: X = 3 ; $X_1$ = - sin 2x ; y:

$$\int X \cdot dx = 3x \; ; \quad \int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx = -\int \sin 2x \cdot e^{3x} \cdot dx \quad ,$$

de solución más laboriosa. Veámosla seguidamente, integrando por partes la siguiente función:

$$\int \cos 2x \cdot e^{3x} \cdot dx = \boxed{\begin{matrix} u = \cos 2x \\ v = \dfrac{e^{3x}}{3} \\ du = -2 \cdot \sin 2x \end{matrix}} = \frac{\cos 2x \cdot e^{3x}}{3} + \frac{2}{3} \int e^{3x} \cdot \sin 2x \cdot dx$$

y alternativamente,
integrando también por partes: $\int \cos 2x \cdot e^{3x} \cdot dx = \boxed{\begin{matrix} u = e^{3x} \\ v = \dfrac{\sin 2x}{2} \\ du = e^{3x} \end{matrix}} = \frac{\sin 2x \cdot e^{3x}}{2} - \frac{3}{2} \int \sin 2x \cdot e^{3x} \cdot dx$

Llamando a la integral problema: $I = \int \text{sen } 2x \cdot e^{3x} \cdot dx$ , se tiene que:

$$\frac{\cos 2x \cdot e^{3x}}{3} + \frac{2I}{3} = \frac{\sin 2x \cdot e^{3x}}{2} - \frac{3I}{2} \; ; \quad 2 \cdot \cos 2x \cdot e^{3x} + 4I = 3 \cdot \sin 2x \cdot e^{3x} - 9I \; ;$$

$13I = 3 \cdot \sin 2x \cdot e^{3x} - 2 \cdot \cos 2x \cdot e^{3x} = e^{3x}(3 \cdot \sin 2x - 2 \cdot \cos 2x)$ ;   $I = \frac{e^{3x}(3 \cdot \sin 2x - 2 \cdot \cos 2x)}{13}$ ;   con lo que:

$$y(x) = e^{-3x} \left[ c + \frac{e^{3x}(3 \cdot \sin 2x - 2 \cdot \cos 2x)}{13} \right] = c \cdot e^{-3x} + \frac{3 \cdot \sin 2x - 2 \cdot \cos 2x}{13} \quad ,$$

que ofrece el mismo resultado ya obtenido por el método anterior, como no podría ser de otra manera, al cual habría que aplicar las condiciones iniciales dadas para hallar la integral particular correspondiente.

## Ejemplo 6

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' - 5y = e^{5x} \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

*Solución:*

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda - 5 = 0 \;;\quad \lambda = 5 \;;\quad \text{con lo que:}\quad y^* = c\cdot e^{5x}.$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea, teniendo en cuenta que 5 es raíz de la homogénea, con lo que:

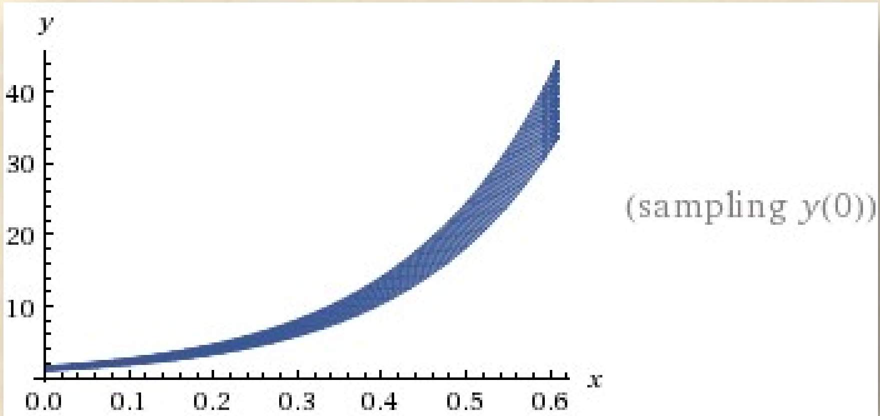
$$\begin{cases} y_p = A\cdot x\cdot e^{5x} \\ y'_p = A\cdot e^{5x} + 5Ax\cdot e^{5x} \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$A\cdot e^{5x} + 5A\cdot x\cdot e^{5x} - 5A\cdot x\cdot e^{5x} = e^{5x}$ ;   $A = 1$ ;   con lo que la I.G. será:

$y(x) = y^* + y_p = c\cdot e^{5x} + x\cdot e^{5x} = e^{5x}(c + x).$

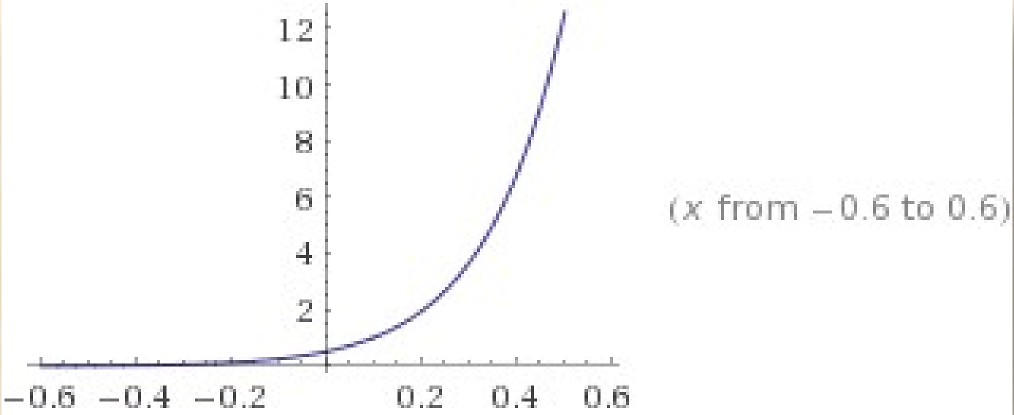
La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:

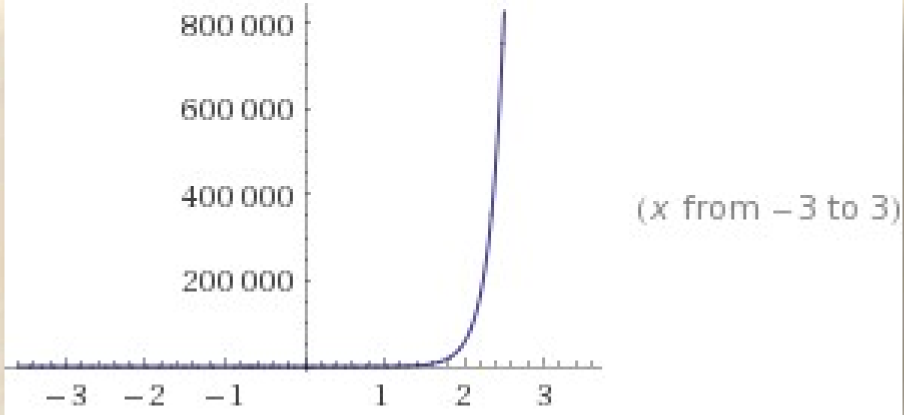





Como: $y(0) = c = ½$ ; luego la solución particular buscada será: $\boxed{y(x) = e^{5x}(½ + x)}$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):




Considerando ahora, que se trata de una ecuación lineal de primer orden, podríamos haberla resuelto por el método de variación de constantes o bien por aplicación directa de la fórmula "ad hoc". En este último caso, se tendría que: $X = -5$ ; $X_1 = -e^{5x}$ ; y:

$$\int X\cdot dx = -5x\,;\quad \int X_1\cdot e^{\int X\cdot dx}\cdot dx = -\int e^{5x}\cdot e^{-5x}\cdot dx = -x\ \text{, y la I.G. será:}$$

$$y(x) = e^{5x}(c + x)\ \text{, c.s.q.d.}$$

**Ejemplo 7**

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' - 5y = \cos 3x \\ y(0) = \tfrac{1}{2} \end{cases}$$

*Solución:*

La ecuación característica de la homogénea, será: $\lambda - 5 = 0$ ; $\lambda = 5$ ; con lo que: $y^* = c\cdot e^{5x}$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} y_p = h\cdot\cos 3x + k\cdot\sin 3x \\ y'_p = -3h\cdot\sin 3x + 3k\cdot\cos 3x \end{cases}$$

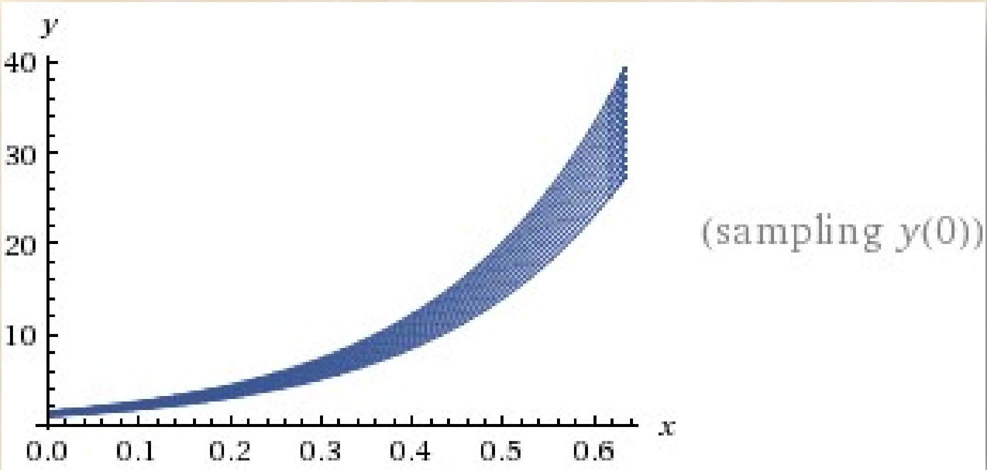
y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$-3h\cdot\sin 3x + 3k\cdot\cos 3x – 5h\cdot\cos 3x – 5k\cdot\sin 3x = \cos 3x \;;$$

$$\left.\begin{array}{l} 3k – 5h = 1 \\ -5k – 3h = 0 \end{array}\right\}$$ de donde: $k = 3/34$ ; $h = -5/34$ ; y la I.G. será:

$$y(x) = y^* + y_p = c\cdot e^{5x} – (5/34)\cdot\cos 3x + (3/34)\cdot\sin 3x.$$

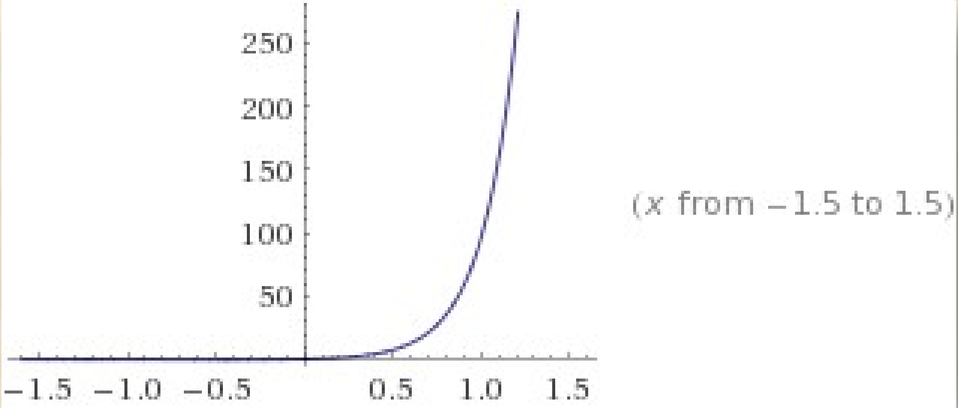
La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:

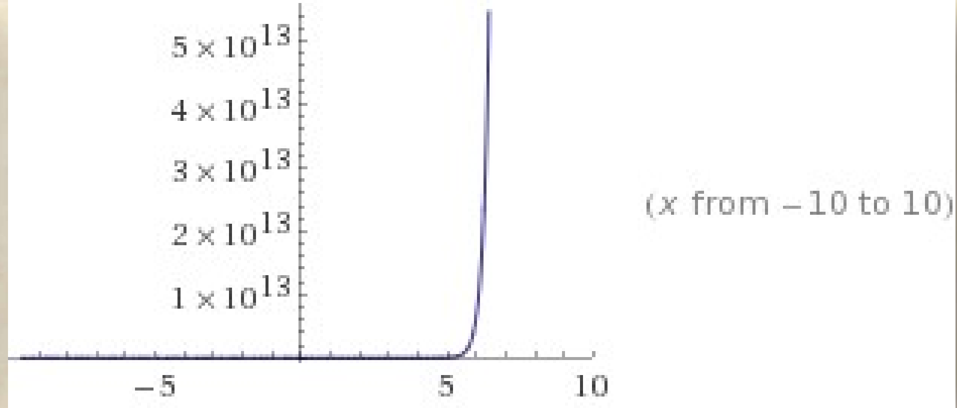



Como: $y(0) = c – 5/34 = ½$ ; o sea: $c = 11/17$ ; con lo que la I.P. será:

$$\boxed{y(x) = \frac{11}{17}\cdot e^{5x} - \frac{5}{34}\cdot\cos 3x + \frac{3}{34}\cdot\sin 3x}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):




De hecho, se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden, con:

$X = -5$ ; $X_1 = -\cos 3x$ ; y entonces:

$$\int X\cdot dx = -5x\,; \quad \int X_1\cdot e^{\int X\cdot dx}\cdot dx = -\int \cos 3x\cdot e^{-5x}\cdot dx$$

de solución más laboriosa y que resolveríamos integrando por partes:

$$I = \int \sin 3x\cdot e^{-5x}\cdot dx$$

tal como se ha efectuado en el problema anterior, alcanzando, obviamente, el mismo resultado que acabamos de obtener en este mismo problema.

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 3

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (III)

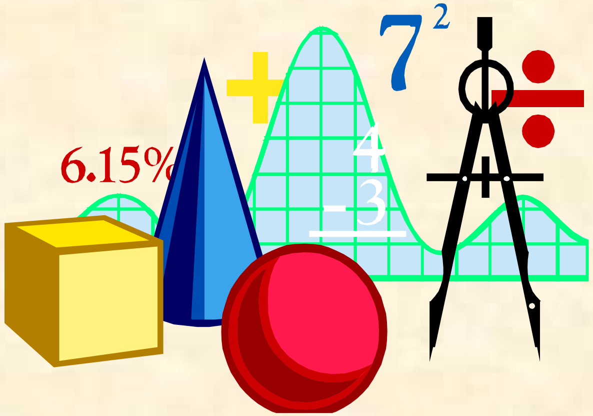
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





### *2.7. Ecuación de Bernouilli*

Entre las numerosas ecuaciones diferenciales que mediante un adecuado cambio de variable se pueden reducir a lineales de primer orden, se encuentra la ecuación de Bernouilli, que se presenta, por ejemplo, al resolver diversos problemas en Economía. Su forma general es:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 y^n = 0} \quad (\forall n \in \Re)$$

Obsérvese que la ecuación de Bernouilli es de primer orden y de primer grado, pero sin embargo, no es lineal. Para su resolución basta dividir por $y^n$, efectuando a continuación el cambio de variable,

$$\frac{1}{y^{n-1}} = t \,; \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{-(n-1)\cdot y^{n-2}\cdot\frac{dy}{dx}}{y^{2n-2}} \,;$$

de donde:

$$-\frac{(n-1)}{y^n}\cdot\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{dt}{dx} = \frac{1-n}{y^n}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

quedando la ecuación convertida en una lineal de primer orden cuya integral general viene dada, como hemos visto, por la expresión:

$$\boxed{y^{1-n} = (1-n)\cdot e^{-\int (1-n)\cdot X\cdot dx}\left[C - \int e^{\int (1-n)\cdot X\cdot dx} X_1\cdot dx\right]}$$

, o bien por:

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{(1-n)\cdot e^{-\int (1-n)\cdot X\cdot dx}\left[C - \int e^{\int (1-n)\cdot X\cdot dx} X_1\cdot dx\right]}}} \quad .$$

**NOTA**: En algunos manuales, se denota: t = z.

⇒ ***EJEMPLO***:

Sea resolver: $\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$ . Dividiendo por $y^4$: $\frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{y^3} + x = 0$

Haciendo $\frac{1}{y^3} = t$, de donde : $-\frac{3}{y^4}\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$, se obtiene :

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{y^4 dx} = \frac{1}{y^4}(-2xy - xy^4) = \frac{-2x}{y^3} - x = -2tx - x \text{; de donde :}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{dt}{dx} + 2tx + x = 0 \quad \text{o bien:} \quad \frac{dt}{dx} - 6xt - 3x = 0$$

que es lineal, e integrada proporciona, después de substituir t por su valor, la solución general:

$$\frac{dt}{dx} - 6xt - 3x = 0; \quad \left.\begin{array}{l} X = -6x \\ X_1 = -3x \end{array}\right\}$$

$$\int X\cdot dx = -6\int x\cdot dx = -3x^2 \text{;} \quad \int X_1\cdot e^{\int X dx} dx = \int -3x\cdot e^{-3x^2} dx = \frac{e^{-3x^2}}{2}\text{;}$$

$$t = e^{3x^2}\left(K - \frac{e^{-3x^2}}{2}\right) = K\cdot e^{3x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{y^3}\text{; de donde :}$$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{\frac{1}{K\cdot e^{3x^2} - \frac{1}{2}}}} \Rightarrow \text{I.G.}$$

## 2.8. Ecuaciones diferenciales exactas

Dada una ecuación diferencial de primer orden, escrita en la forma: du = 0, o sea:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad [I]$$

se llama diferencial exacta, si su primer miembro es la diferencial total de una función u(x, y), esto es, si existe una tal función que cumpla:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \;\; ; \quad P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \;\; .$$

Derivando las igualdades anteriores respecto a "y" y a "x": $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

y recordando el teorema de Schwarz de las derivadas parciales cruzadas, resulta: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,

que expresa la condición necesaria y suficiente para que [I] sea una ecuación diferencial exacta.

Supuesto que [I] sea una ecuación diferencial exacta, su integración se consigue teniendo en cuenta que:

$$u(x, y) = \int P(x, y)\, dx + \varphi(y) = \int Q(x, y)\, dy + \varphi(x) \qquad [II]$$

puesto que $\int P(x, y)\, dx$, contendrá todos los términos de u(x, y) dependientes de x; luego solo faltarán los términos no dependientes de x que figuran en $\varphi(y)$. Para determinar esta última función, derivaremos [II] con respecto a y:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + \varphi'(y) \text{ , de donde: } \varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx$$

que permite calcular $\varphi(y)$ y por tanto u(x, y). La integral general, en fin, adoptará la forma:

$$\boxed{u(x, y) = C} \Rightarrow \text{I.G.}$$

⇒ ***EJEMPLOS:***

Ejemplo 1 Integrar la ecuación diferencial: $\left(2x+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$ .

*Solución:*

Como se verifica que: $$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+\frac{1}{y}\right)=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)$$

la ecuación es diferencial exacta y, por tanto existe la función u(x, y) que se determina como sigue:

$$u(x,y)=\int\left(2x+\frac{1}{y}\right)dx+\varphi(y)=x^2+\frac{x}{y}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}=-\frac{x}{y^2}+\varphi'(y)$$

de donde: $\varphi'(y)=\frac{1}{y}=\frac{d\varphi(y)}{dy}$; $\varphi(y)=\ln y$ , y por tanto:

$$u(x,y)=x^2+\frac{x}{y}+\ln y$$

y la integral general será:

$$\boxed{x^2+\frac{x}{y}+\ln y=C} \Rightarrow \text{I.G.}$$

Ejemplo 2 Integrar la ecuación diferencial:

$$2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$$

*Solución:*

Como: $\frac{\partial}{\partial y}\left[2x(ye^{x^2}-1)\right]=2xe^{x^2}=\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2}$

es diferencial exacta. Entonces:

$$u(x,y)=\int e^{x^2}dy+\varphi(x)=ye^{x^2}+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2xye^{x^2}+\varphi'(x)=2xye^{x^2}-2x$$

De donde: $\varphi'(x) = -2x$ ; $\varphi(x) = -x^2$ .

Luego u(x, y) = $ye^{x^2}-x^2$ , y la integral general será:

$$\boxed{ye^{x^2}-x^2=C\,;\qquad y=\frac{C+x^2}{e^{x^2}}}$$

Obsérvese que en el presente ejemplo, se ha invertido el orden, lo cual es perfectamente lícito, integrándose Q(x, y)·dy, y obteniendo $\varphi(x)$.

## Ejemplo 3

Sea $y$ (en $10^4$ €) el resultado contable anual obtenido por un fabricante cuando vende $x$ (en $10^3$) unidades de su producto. La tasa a la que cambia el resultado respecto a la cantidad vendida viene dada por la EDO: $y' = -\dfrac{xy + x^3}{\dfrac{x^2}{2} + y^2}$. Hallar la expresión que relaciona ambas variables del problema y juzgar la rentabilidad o viabilidad de la empresa en cuestión.

*Solución:*

De la expresión: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{xy + x^3}{\dfrac{x^2}{2} + y^2}$, se deduce la ecuación:

$(-xy - x^3)dx = \left(\dfrac{x^2}{2} + y^2\right)dy$ , o sea: $(-xy - x^3)dx - \left(\dfrac{x^2}{2} + y^2\right)dy = 0$ ; se cumple que: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ;

por lo que es una EDO exacta. Entonces:

$$u(x,y) = \int (-xy - x^3)dx + \varphi(y) = -y\int x \cdot dx - \int x^3 \cdot dx + \varphi(y) = -\frac{yx^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \varphi(y)\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = N(x,y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 = -\frac{x^2}{2} + \varphi'(y)\ ;\ \varphi'(y) = -y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3}\ ;\ u(x,y) = -\frac{yx^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{y^3}{3}\ .$$

La integral general es, pues:

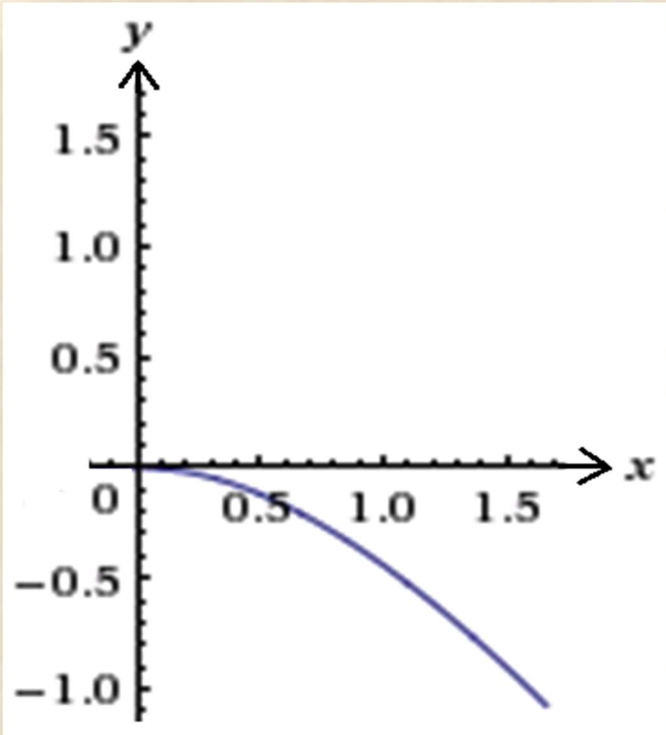
$$\frac{yx^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} = C \quad \to \text{I.G.} \qquad \text{Se cumple que:}$$

y(0) = 0 $\Rightarrow$ C = 0, puesto que si no hay producción puede también considerarse nulo el resultado contable (suponiendo que los costes fijos de la empresa, de haberlos, están compensados por otros ingresos), con lo que la integral particular vendrá dada por:

$\frac{yx^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{y^3}{3}=0$ . Esta expresión, en forma implícita, puede resolverse también, en el campo real, de forma explícita, así:

$$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{9x^8+8x^6}-3x^4}-\frac{2x^2}{\sqrt[3]{\sqrt{9x^8+8x^6}-3x^4}}\right)$$

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:




A la vista de los resultados obtenidos, es evidente que la empresa en cuestión carece de rentabilidad presente y futura al ser sus resultados contables siempre negativos (pérdidas), aumentando las mismas conforme lo hacen también las ventas, por lo que procede llevar a cabo su disolución o cierre.

## Ejemplo 4

El precio de venta *y* de un bien, respecto a la cantidad demandada *x*, cambia con la razón expresada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 24x}{x^2 + 16}$. Obtener:

a) el precio en función de la demanda, sabiendo que cuando el precio es de 7'50 euros/unidad, la cantidad demandada es de 4 unidades, y b) la elasticidad arco entre los puntos extremos de dicha función de demanda y la elasticidad en el punto en que y = 10 €/ud.

*Solución:*

a) Podemos escribir la ecuación dada en el enunciado así:

$(2xy + 24x)dx + (x^2 + 16)dy = 0$, que es diferencial exacta, como puede comprobarse. En efecto:

$M(x, y) = 2xy + 24x$; $N(x,y) = x^2 + 16$; entonces, se cumple que:

$$\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 2x = \frac{\delta N(x,y)}{\delta x} \quad .$$

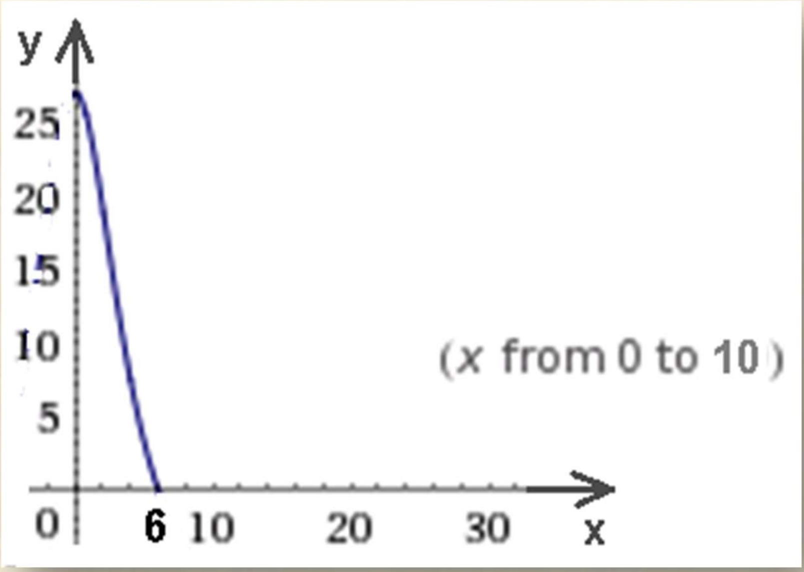
Así pues: $\int (2xy + 24x)dx = x^2y + 12x^2 + C(y)$ . Derivando respecto de *y* se obtiene que:

$x^2 + C'(y) = x^2 + 16 \rightarrow C'(y) = 16 \rightarrow C(y) = 16y + C$. Luego, la solución general será:

$x^2y + 12x^2 + 16y + C = 0 \leftrightarrow y = \frac{-12x^2 - C}{x^2 + 16}$ . Substituyendo los valores dados, se obtiene que:

$C = -x^2y - 12x^2 - 16y = -16·7'5 - 12·16 - 16·7'5 = -16(15 + 12) = -432$. La solución o integral particular buscada es, pues: $y = \frac{-12x^2 + 432}{x^2 + 16}$ . La curva, en el primer cuadrante, recorre desde el punto máximo (0,27) al mínimo (6,0), como puede comprobarse seguidamente.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):




b) La *elasticidad arco* buscada entre los puntos (0, 27) y (6, 0) viene dada por la expresión:

$$e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \text{x} \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{6-0}{6+0} \text{x} \frac{0+27}{0-27} = (1) \times (-1) = -1 \,,$$

por lo que se trata de una *elasticidad unitaria*.

Por otra parte, la *elasticidad puntual* en y = 10 €/ud. deberá tener en cuenta que:

$$x = +\sqrt{-\frac{16(y-27)}{y+12}} = +\sqrt{\frac{16(27-y)}{y+12}}$$ . La derivada es:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{78}{\sqrt{\frac{27-y}{y+12}} \times (y+12)^2}$$ . Además: $x = \sqrt{\frac{16 \times 17}{22}} = 3'52$ , y entonces se obtiene:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{78}{\sqrt{\frac{17}{22}} \times 22^2} = -0'18$$ , y la elasticidad-punto buscada será:

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -0'18 \times \frac{10}{3'52} = -0'51 \in (-1, 0) \ ,$$

por lo que se trata de una *demanda relativamente inelástica*.

Obsérvese que también el valor de la expresión dx/dy puede obtenerse por diferenciación del siguiente modo:

$$yx^2 + 16y + 12x^2 - 432 = 0 \ ; \quad (12 + y)x^2 + 16y - 432 = 0 = f(x, y) \ ; \quad f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy = 0 \ ;$$

$$2x(12 + y) \cdot dx + (x^2 + 16)dy = 0 \ ; \quad 2x(12 + y) \cdot \frac{dx}{dy} = -x^2 - 16 \ ;$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-x^2 - 16}{24x + 2xy} = \frac{-3'52^2 - 16}{24 \cdot 3'52 + 2 \cdot 3'52 \cdot 10} = \frac{-28'3904}{\underbrace{84'48 + 70'4}_{154'88}} = -0'18 \ , \text{ c.s.q.d.}$$

## Ejemplo 5

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su demanda *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x^2 + xy)}{x^2 + y^2}$ . Se pide: a) calcular el precio en función de la demanda, sabiendo que cuando el precio es de 5'00 €, la demanda es de 15 unidades, y b) calcular la elasticidad arco entre los puntos extremos de la función de demanda, así como la elasticidad en el punto anteriormente dado.

*Solución:*

a) Escribiendo la expresada ecuación de la forma: $2(x^2 + xy)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$, podemos comprobar que se trata de una ecuación diferencial exacta. En efecto, siendo:

$M(x,y) = 2(x^2 + xy)$ y $N(x,y) = x^2 + y^2$ , se cumple que: $\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 2x = \frac{\delta N(x,y)}{\delta x}$ , luego:

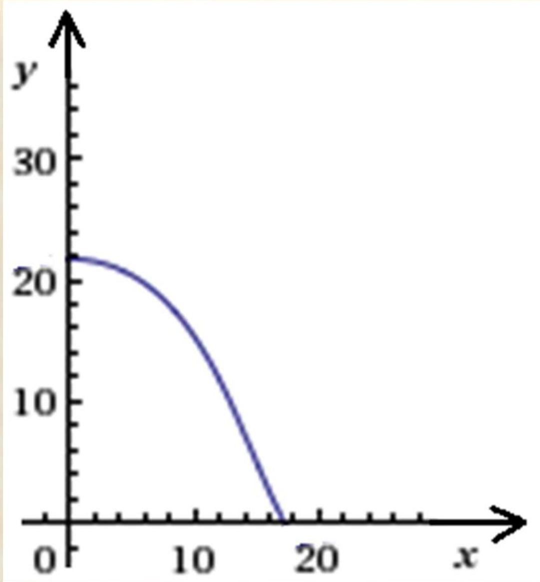
$\int 2(x^2 + xy)dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 y + C(y)$ , y derivando respecto a *y*, se debe cumplir que:

$x^2 + C'(y) = x^2 + y^2 \rightarrow C'(y) = y^2 \rightarrow C(y) = \frac{y^3}{3} - C$ . La integral general es, pues: $\frac{2x^3}{3} + x^2 y + \frac{y^3}{3} = C$.

Pues bien, para las condiciones dadas (con y = 5'00 € $\rightarrow$ x = 15 ud.), se tendría que:

$\frac{2}{3}x3.375 + 225x5 + \frac{125}{3} = \frac{10.250}{3}$; C = 10.250/3, por lo que la integral particular buscada ofrece la solución implícita:

$$\boxed{f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3 = 10.250}$$




La curva, en el primer cuadrante, recorre desde el punto máximo (0, 21'72) al mínimo (17'24, 0), como puede comprobarse seguidamente.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):

b) Los puntos extremos son los siguientes:

$$\left.\begin{cases} \text{Para } x = 0 \rightarrow y = \sqrt[3]{10.250} = 21'72 \\ \text{Para } y = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{10.250}{2}} = 17'24 \end{cases}\right\} (0, 21'72) \rightarrow (17'24, 0)$$

, y con ello se tendrá la siguiente elasticidad-arco: $e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} x \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{17'24 - 0}{17'24 + 0} x \frac{0 + 21'72}{0 - 21'72} = (1) \times (-1) = -1$ , por lo que se trata de una *elasticidad unitaria*.

Por otra parte, en el punto dado de coordenadas (15,5), la elasticidad puntual vendrá dada así:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{x^2 + y^2}{2x^2 + 2xy} \rightarrow \text{en } (15,5) \rightarrow = -\frac{225 + 25}{450 + 150} = -\frac{250}{600} = -0'42$$

, y la elasticidad puntual será:

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -0'42 \times \frac{5}{15} = -0'14 \in (-1, 0),$$

por lo que se trata de una demanda *relativamente inelástica*.

## 2.9. Ecuación diferencial no exacta. Factor integrante

En ciertas ocasiones, aunque $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ no sea diferencial exacta, multiplicada por una cierta función $\mu(x, y)$ se puede convertir en diferencial exacta; entonces, se dice que $\mu(x, y)$ es un *factor integrante* y la ecuación:

$$\boxed{\mu(x, y)\cdot P(x, y)\cdot dx + \mu(x, y)\cdot Q(x, y)\cdot dy = 0}$$

se integra por el método expuesto anteriormente.

La determinación de los factores integrantes es un problema dificultoso, pues conduce, en general, a una ecuación en derivadas parciales como las que veremos en algunas lecciones posteriores (13, 14 y 15). Sin embargo, su determinación es sumamente sencilla en algunos casos, de los cuales citaremos los siguientes:

a) Existe un multiplicador que depende de la única variable x (o de la única variable y).

b) Existe un multiplicador que depende únicamente de: $z = x \pm y$.

c) Existe un multiplicador que depende de la única variable: $z = x \cdot y$.

d) Existe un multiplicador que depende de la única variable $z = y/x$.

e) Existe un multiplicador que depende de la única variable $z = x^2 \pm y^2$.

f) Existe un multiplicador de la forma $z = x^p \cdot y^q$.

g) Existe un multiplicador de la forma $\mu(x,y) = f(x)g(y)$.

En la ecuación lineal: $dy + P \cdot dx = 0$, en que P es de primer grado en y, el factor integrante a utilizar tiene la siguiente forma: $\mu = e^{\int \frac{\delta \rho}{\delta y} dx}$. En las ecuaciones homogéneas, el factor integrante es el de la expresión: $\mu = \frac{1}{Px+Qy}$.

Un método que permite, en algunos casos, descubrir el factor integrante consiste en descomponer la expresión dada en otra de la forma: $G \cdot du + H \cdot d\mu = 0$, siendo G, H, u, $\mu$, funciones de x e y. La expresión general de todo factor integrante de $G \cdot du = 0$ será $\frac{f(u)}{G}$. La de $H \cdot d\mu = 0$ será $\frac{F(\mu)}{H}$. Para que puedan aprovecharse ambos factores en la ecuación $G \cdot du + H \cdot d\mu = 0$, hay que admitir que: $\frac{f(u)}{G} = \frac{F(\mu)}{H} = \alpha$. Se hallará el factor integrante $\alpha$ determinando las funciones más sencillas $f(u)$, $F(\mu)$, de tal suerte que verifique la relación anterior, atendiendo a los grados de u, $\mu$. En general, los factores integrantes pueden no resultar de fácil descubrimiento. Si una ecuación diferencial no presenta una de las formas expuestas con anterioridad, entonces es probable que la búsqueda de un factor de integración no se vea necesariamente coronada por el éxito, para lo cual se recomienda el recurso a otros métodos de solución.

En cualquier caso, algunos de los factores integrantes más comunes se muestran en la tabla siguiente:

| Grupo de términos | Factor de integración $\mu(x, y)$ | Diferencial exacta du(x, y) |
|---|---|---|
| $Y\cdot dx - x\cdot dy$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$ |
| $Y\cdot dx - x\cdot dy$ | $\frac{1}{y^2}$ | $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$ |
| $Y\cdot dx - x\cdot dy$ | $-\frac{1}{xy}$ | $\frac{xdy - ydx}{xy} = d\left(\ln\frac{y}{x}\right)$ |
| $Y\cdot dx - x\cdot dy$ | $-\frac{1}{x^2+y^2}$ | $\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$ |
| $Y\cdot dx + x\cdot dy$ | $\frac{1}{xy}$ | $\frac{ydx + xdy}{xy} = d(\ln xy)$ |
| $Y\cdot dx + x\cdot dy$ | $\frac{1}{(xy)^n}$, $(\forall n > 1)$ | $\frac{ydx + xdy}{(xy)^n} = d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$ |
| $Y\cdot dx + x\cdot dy$ | $\frac{1}{x^2+y^2}$ | $\frac{ydy + xdx}{x^2+y^2} = d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]$ |
| $Y\cdot dx + x\cdot dy$ | $\frac{1}{(x^2+y^2)^n}$, $(\forall n > 1)$ | $\frac{ydy + xdx}{(x^2+y^2)^n} = d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right]$ |
| $Ay\cdot dx + bx\cdot dy$ (a, b constantes) | $x^{a-1}y^{b-1}$ | $x^{a-1}y^{b-1}(ay\cdot dx + bx\cdot dy) = d(x^a y^b)$ |

⇒ ***EJEMPLOS***:

1) Integrar la ecuación diferencial: $(x + y^2)\cdot dx - 2xy\cdot dy = 0$.

*Solución:*

En este caso, se trata de una E.D. **no** exacta, puesto que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq -2y = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad \text{Además}: \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}$$

por lo que admite un multiplicador que depende de la única variable x.

Sea entonces, el multiplicador $\mu(x)$, y la ecuación resultará:

$$\mu(x)\cdot(x + y^2)\cdot dx - 2xy\cdot\mu(x)\cdot dy = 0$$

Como: $\frac{\partial P}{\partial y} = \mu(x)\cdot 2y\,; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\cdot\mu(x) - 2xy\cdot\mu'(x)$

Obligando a que sea una diferencial exacta, o sea:

$$\mu(x)\cdot 2y = -2y\cdot\mu(x) - 2xy\cdot\mu'(x)\,; \quad \mu(x) = -\mu(x) - x\cdot\mu'(x)\,;$$

simplificando: $x\cdot\mu'(x) = -2\mu(x)$, o bien: $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{2}{x}$ ;

e integrando: $\ln\mu(x) = -2\ln x = \ln x^{-2}$, o bien: $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$

La ecuación quedará entonces: $\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-2\frac{y}{x}dy=0$; $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$;

que ya es diferencial exacta y la resolveremos por los métodos conocidos.

Integrada, debe obtenerse:

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\varphi(y)=\ln x-\frac{y^2}{x}+\varphi(y)\,;$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{2y}{x}=-\frac{2y}{x}+\varphi'(y)\,;\quad \varphi'(y)=0\Rightarrow\varphi(y)=C\,;$$

$$u(x,y)=\ln x-\frac{y^2}{x}+C\,;\quad \text{o sea, la I.G. será}:\ \ln x-\frac{y^2}{x}=C\,,$$

o lo que es lo mismo: $\quad x\cdot e^{-\frac{y^2}{x}}=C$ ,

que se puede también expresar así:

$$x\cdot e^{-\frac{y^2}{x}}=C=\frac{x}{e^{y^2/x}}\,;\quad e^{y^2/x}=\frac{x}{C}=K\cdot x\,;\quad \frac{y^2}{x}=\ln K\cdot x\,;$$

de donde: $\boxed{y=\sqrt{x(\ln K+\ln x)}=\sqrt{Cx+\ln x^x}}\ \Rightarrow$ I.G.

2) Sea ahora, integrar la ecuación:

$(x^2y^3 + 2y)\cdot dx + (2x - 2x^3y^2)\cdot dy = 0$ ; $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2 \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2 - 6x^2y^2$

sabiendo que admite un factor integrante dependiente de $z = x\cdot y$.

*Solución:*

El factor integrante será $\mu(z) = \mu(x, y)$, tal que: $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'\cdot y$ ; $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'\cdot x$

Obligando a que sea diferencial exacta:

$\mu(x^2y^3 + 2y)\cdot dx + \mu(2x - 2x^3y^2)\cdot dy = 0$ ; se obtiene:

$$\mu(3x^2y^2 + 2) + \mu' x(x^2y^3 + 2y) = \mu(2 - 6x^2y^2) + \mu' y(2x - 2x^3y^2)$$

de donde: $9x^2y^2\mu = -\mu'\cdot 3x^3y^3$ , o bien, simplificando: $\dfrac{\mu'}{\mu} = -\dfrac{3}{xy}$

de donde integrando se tiene: $\ln \mu = -3\ln(x\cdot y)$ ; $\mu = \dfrac{1}{x^3y^3}$

Integrada la ecuación resultante (cuestión que dejamos en manos del amable lector/a), se debe obtener:

$$\boxed{x\cdot y^{-2}\cdot e^{-1/x^2+y^2} = C} \Rightarrow \text{I.G.}$$

3) En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen las siguientes funciones de demanda y oferta:

$$\begin{cases} D \rightarrow y(x) = \dfrac{120 - 3x}{4} \\ O \rightarrow x(1\text{-}y)\cdot dx + (x^2 + y)\cdot dy = 0 \end{cases}$$

siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en miles de unidades anuales. Se trata de estudiar: a) el equilibrio del mercado teniendo en cuenta que a una cantidad ofertada nula corresponde un precio de 2'00 €, b) la elasticidad puntual de ambas funciones económicas en el punto de equilibrio, y c) los ingresos brutos anuales del productor.

*Solución:*

a) Evidentemente, la función de demanda es una recta decreciente que transcurre en el primer cuadrante del círculo desde el punto (0,30) al (40,0). Por lo que se refiere a la función de oferta, veamos que:

$$M(x,y) = x(1\text{-}y);\ N(x,y) = x^2 + y;\ \frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = -x \neq \frac{\delta N(x,y)}{\delta x} = 2x,$$

luego se trata de una EDO no exacta y habrá que buscar el correspondiente factor integrante de la forma $\mu(t)$, y siendo presumiblemente $t = x^2 + y^2$, deberá verificarse, según hemos visto en la exposición teórica precedente, que:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{2(xN - yM)} = f(t),$$

siendo este segundo miembro una función que solo dependa de t.

En efecto, en nuestro caso, como hemos visto, se cumple que: $\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{dt} = -\dfrac{3}{2t}.$

Integrando mediante una cuadratura se tiene que: 2ln $\mu$(t) = -3ln t. Quitando logaritmos y deshaciendo el cambio de variable, resulta:

$$\mu\left(x^2+y^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} \ .$$

Aplicando este factor integrante a la ecuación diferencial propuesta, se obtiene que:

$$\frac{x(1-y)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dx + \frac{x^2+y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}dy = 0 \ .$$

Integrando esta ecuación diferencial total, que ahora ya es exacta, resulta que:

$$\int_a^x \frac{t(1-y)}{\sqrt{\left(t^2+y^2\right)^3}}dt + \int_b^y \frac{a^2+t}{\sqrt{\left(a^2+t^2\right)^3}}dt = k \ .$$

Para calcular el primer sumando, hagamos el cambio de variable:

$u = t^2 + y^2$, $du = 2t \cdot dt$ con lo cual se tendrá que:

$$I = (1-y)\int_a^x \frac{tdt}{\sqrt{\left(t^2+y^2\right)^3}} = (1-y)\int_{a^2+y^2}^{t^2+y^2} \frac{du}{2\sqrt{u^3}} = (1-y)\left[\frac{-1}{\sqrt{u}}\right]_{a^2+y^2}^{t^2+y^2} = \frac{-(1-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1-y}{\sqrt{a^2+y^2}} \ ,$$

La segunda integral la descomponemos en dos sumandos, así:

$$J = \int_b^y \frac{a^2+t}{\sqrt{\left(a^2+t^2\right)^3}}dt = \int_b^y \frac{a^2}{\sqrt{\left(a^2+t^2\right)^3}}dt + \int_b^y \frac{t}{\sqrt{\left(a^2+t^2\right)^3}}dy = J_1 + J_2 \ .$$

En $J_1$, hacemos $t = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} \Rightarrow dt = \frac{a^2 dy}{\sqrt{(a^2+y^2)^3}}$, con lo cual, resulta:

$$J_1 = \left[ \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} \right]_b^y = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

En $J_2$, ponemos $t = a^2 + y^2 \Rightarrow dt = 2y \cdot dy$, de donde, $J_2 = \left[ \frac{-1}{\sqrt{a^2+y^2}} \right]_b^y = -\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

Sumando ahora: $J = J_1 + J_2$ ; $J = -\frac{(1-y)}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{1-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, y por fin se tendrá que:

$I + J = -\frac{(1-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1-b}{\sqrt{a^2+b^2}} = k$.

Poniendo una sola constante arbitraria, resultará, en fin, la integral general: $\sqrt{x^2+y^2} + C(1-y) = 0$.

Ahora bien, teniendo en cuenta la condición inicial dada, se tendrá que: $y(0) = 2$, o sea:
$2 + C(1-2) = 0$, de donde: $C = 2$, y resulta la integral particular:

$$\sqrt{x^2+y^2} + 2(1-y) = 0 .$$

Esta ecuación ofrece las dos soluciones siguientes:

$$y_1 = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{3x^2+4}) \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{3}(\sqrt{3x^2+4} + 4) ,$$

y tratándose de una función de oferta (creciente) adoptaremos la segunda de ellas, con lo que la búsqueda del punto de equilibrio del mercado exige, como siempre, que: O = D, esto es:

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)=\frac{120-3x}{4}; \quad \sqrt{3x^2+4}=\frac{3(120-3x)}{4}-4=\frac{344-9x}{4};$$

elevando al cuadrado ambos miembros de esta igualdad resultará que :

$$3x^2+4=\frac{118.336+81x^2-6.192x}{16}; \quad 48x^2+64=81x^2-6.192x+118.336;$$

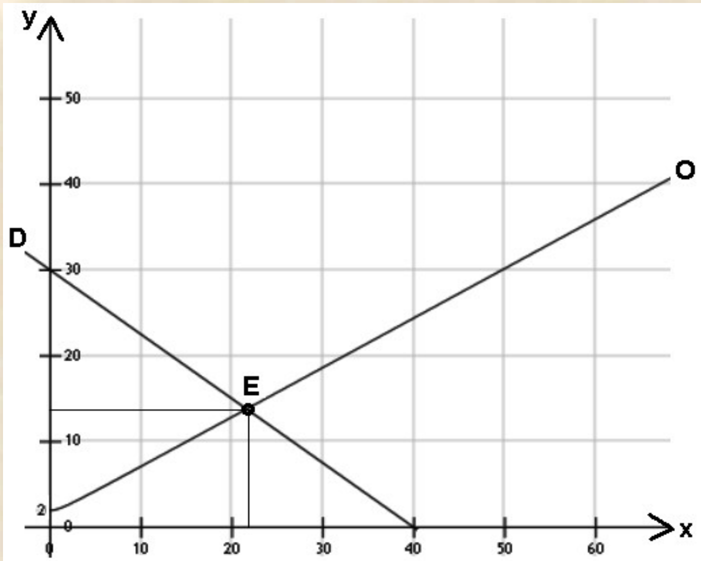
$$33x^2-6.192x+118.272=0; \quad 11x^2-2.064x+39.424=0;$$

$$x=\frac{2.064\pm\sqrt{4.260.096-1.734.656}}{22}=\frac{2.064\pm 1.589'2}{22}=\begin{cases}166'05=x_1\\ 21'58=x_2\end{cases}$$

siendo $x_2$ = 21’58 (21.580 ud./año) el único resultado válido como puede comprobarse en la siguiente figura anexa, al que corresponde un precio de equilibrio de:

$$\boxed{y = 13'82\ €/ud.}$$

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:




Oferta, demanda y punto de equilibrio.

b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado hallado anteriormente E(21’58, 13’82), se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

D $\Rightarrow$ y = (120 – 3x)/4; dy/dx = -3/4; $\frac{dx}{dy} = -\frac{4}{3}$. Y la elasticidad de la función de demanda será:

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{4}{3} \times \frac{120 - 3x}{4x} = \frac{x - 40}{x} = (21'58 - 40) / 21'58 = -0'85 \in (-1,0),$$

por lo que se trata de una *demanda relativamente inelástica*.

Del mismo modo:

O $\Rightarrow$ $y = \frac{1}{3}(\sqrt{3x^2 + 4} + 4)$ ; $dy/dx = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$ ; $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{3x^2 + 4}}{x}$. Y entonces, la elasticidad buscada de la oferta será la siguiente:

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3x^2 + 4}}{x} \times \frac{\sqrt{3x^2 + 4} + 4}{3x} = \frac{3x^2 + 4 + 4\sqrt{3x^2 + 4}}{3x^2} = 1'11 > 1.$$

En este caso, la función en estudio resulta *relativamente elástica*, y ante una variación del precio la cantidad ofertada del bien en cuestión disminuye en una proporción mayor.

c) Los ingresos brutos del productor vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 13’82 €/ud. $\times$ 21.580 ud./año = 298.235’60 €/año.

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 4

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (IV)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

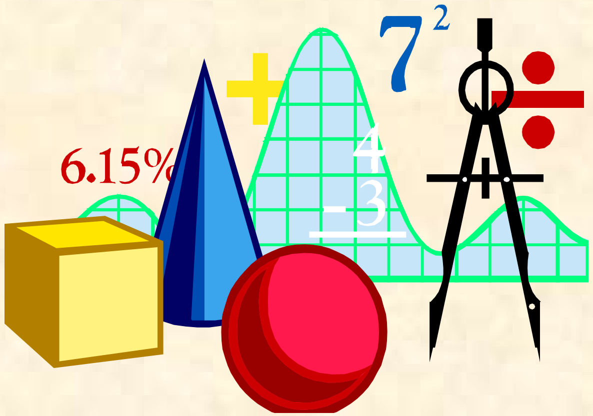
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





## 1. ECUACIÓN DE RICCATI

El conocimiento de una integral o solución particular de una ecuación diferencial, simplifica, en general, el correspondiente proceso resolutivo de la ecuación mediante el cambio aditivo: $y = y_p + u$, donde por $y_p$ representamos una solución particular de la ecuación dada y por *u* una nueva función. En otras ocasiones, el conocimiento de una solución particular se debe aprovechar mediante la substitución multiplicativa: $y = y_p \cdot u$.

Como ejemplo de aplicación, presentamos la denominada ecuación de Riccati que adopta la forma:

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1y + X_2 = 0$$

donde $X$, $X_1$ y $X_2$ representan funciones de la única variable independiente x. Si falta X resulta una ecuación lineal, y si se anula $X_2$ resulta una ecuación del tipo Bernouilli anteriormente estudiada. Esta ecuación no puede ser integrada, en general, por cuadraturas, pero basta el conocimiento de una solución particular para, mediante el cambio de variable indicado, reducirla a un tipo ya conocido y, por tanto, que ya sea integrable por cuadraturas.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos de este tipo de ecuaciones:

**Ejemplo 1**

Sea resolver la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + y^2 - xy - (x+2) = 0$, sabiendo que admite como solución particular: $y_p = x + 1$.

*Solución:*

En este caso, $X = 1$, $X_1 = -x$, $X_2 = -x - 2$. Pues bien, se realiza la substitución: $y = u + x + 1$, de donde: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 1$, que proporciona: $\frac{du}{dx} + 1 + u^2 + x^2 + 1 + 2x \cdot u + 2u + 2x - x^2 - x \cdot u - 2x - 2 = 0$, y simplificando: $\frac{du}{dx} + u^2 + u(2 + x) = 0$, que es una ecuación del tipo Bernouilli, que se resolvería mediante el cambio de variable: $1/u = z$, cuestión ésta que proponemos, como ejercicio recapitulatorio, a nuestros amables lectores/as.

**Ejemplo 2**

Algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden se pueden reducir a otras de primer orden mediante una ecuación del tipo Ricatti. Sea, por ejemplo, resolver la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

, sabiendo que admite la solución particular: $y_p = e^x$.

*Solución:*

Efectuando, ahora, el cambio: $y = e^x \cdot u$, de donde:

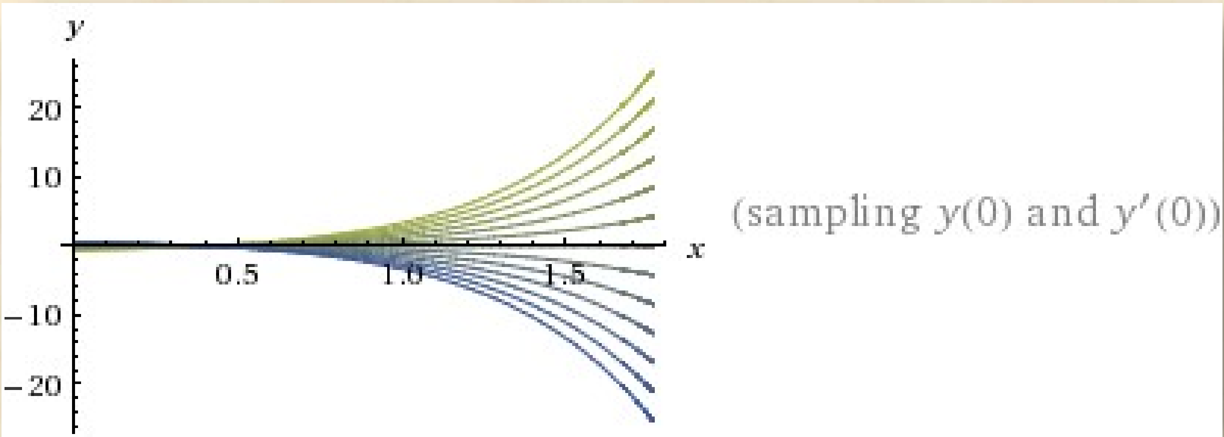
$$\frac{dy}{dx} = e^x \frac{du}{dx} + e^x u \; ; \; \frac{d^2y}{dx^2} = e^x \frac{d^2u}{dx^2} + 2e^x \frac{du}{dx} + e^x u$$

y substituyendo en la ecuación inicial resultará que: $e^x \frac{d^2u}{dx^2} - e^x \frac{du}{dx} = 0$ , que simplificada y haciendo: $\frac{du}{dx} = p, \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ , queda en la forma:

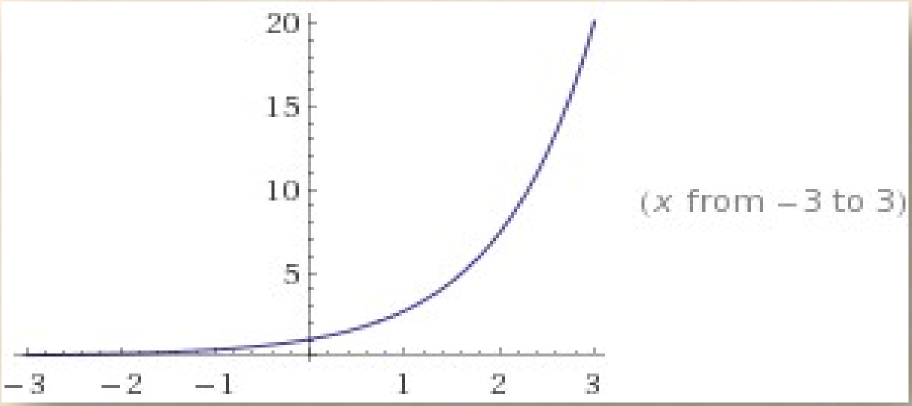
$$\frac{dp}{dx} - p = 0 \text{ , de donde: } p = \frac{du}{dx} = c_1 e^x .$$

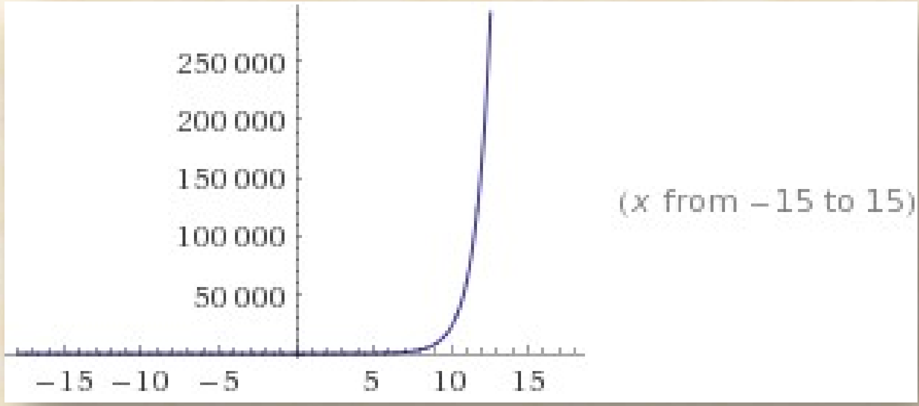
Luego, por mediación de una nueva cuadratura, se obtiene: $u = c_1e^x + c_2$ , y como $y = y_p \cdot u$, se tiene: $\boxed{y = e^x(c_1e^x + c_2) = c_1e^{2x} + c_2e^x}$, que es la integral general de la ecuación propuesta que más adelante, en el siguiente capítulo de nuestro libro, será resuelta de forma directa y totalmente general.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:




En este caso, la solución particular expresada: $y_p = e^x$, se presentaría para los siguientes valores de las constantes: $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$. La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función exponencial, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):




Con el presente ejemplo, en fin, solo se ha pretendido insistir en las simplificaciones resolutivas que puede introducir el conocimiento de una ecuación particular.

## Ejemplo 3

Resolver la ecuación de segundo orden siguiente: $y'' + x \cdot y' - x^2 y = 0$, por reducción a otra EDO de primer orden.

*Solución:*

Por ser homogénea de primer grado en y, y' e y'', dividiendo por y, resultará que: $\frac{y''}{y} + x\frac{y'}{y} - x^2 = 0$ .

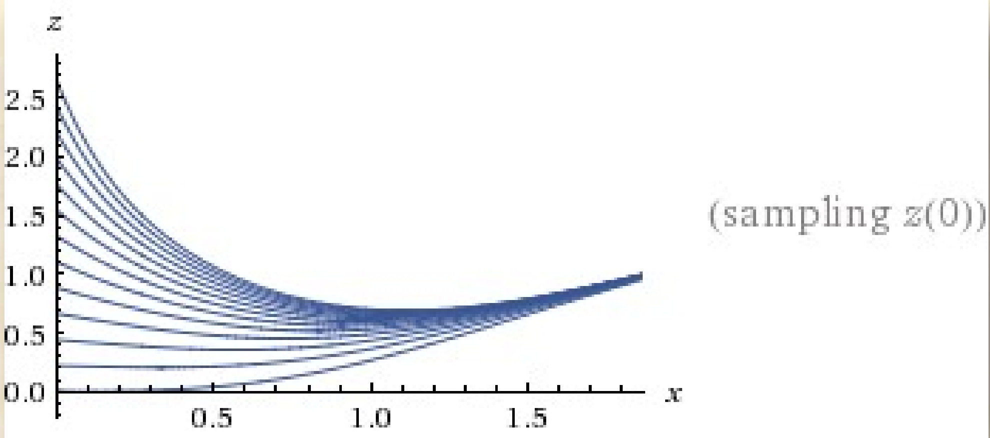
Haciendo $z = \frac{y'}{y}$ , de donde:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y \cdot y'' - y'^2}{y^2} = \frac{y \cdot y''}{y^2} - \frac{y'^2}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2$$ , se obtiene que:

$$\frac{y''}{y} = \frac{dz}{dx} + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{dz}{dx} + z^2$$ . Substituyendo: $\frac{dz}{dx} + z^2 + x \cdot z - x^2 = 0$ ,

que es una ecuación del tipo Ricatti, que ya ha sido estudiada anteriormente, con X = 1, $X_1 = x$, y $X_2 = -x^2$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:




## 2. ECUACIÓN DE CLAIRAUT

Se llama así la ecuación diferencial ordinaria que tiene la siguiente forma: y = y'·x + φ(y'). Se integra por un método de derivación, obteniéndose como haz integral general: y' = c , o sea:
y = c·x + φ(c).

El haz integral de toda ecuación de Clairaut es, pues, un haz de rectas que se obtiene substituyendo y' por la constante *c* del haz. Si este haz tiene una curva envolvente ésta será una *solución singular* de la ecuación, puesto que en cada uno de sus puntos será tangente a una recta involuta y tendrá en él los mismos valores x, y e y' que los de dicha recta, verificando, en su consecuencia, igualmente la primera ecuación del presente enunciado.

La integral singular reseñada se halla eliminando *c* entre la general y su derivada respecto a c, que es x + φ'(c) = 0, o sea, la eliminante del sistema:

$$\begin{cases} y = c \cdot x + \varphi(c) \\ 0 = x + \varphi'(c) \end{cases}$$

La ecuación diferencial de Clairaut, así llamada en honor a su inventor, el físico francés Alexis-Claude Clairaut, es una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$y(x) = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Donde f es una función continuamente diferenciable y constituye un caso particular de la ecuación de Lagrange que veremos a continuación, en que:
f(y') ≡ y'. Para resolver esta ecuación, diferenciamos respecto a *x*, quedando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2},$$

por tanto: $0 = \left(x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\frac{d^2y}{dx^2}$., y así: $0 = \frac{d^2y}{dx^2}$ , o bien: $0 = x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

En el primer caso, *c* = *dy*/*dx* para cualquier constante arbitraria *c*. Substituyéndolo en la ecuación de Clairaut, tenemos la familia de ecuaciones dadas por la expresión: y(x) = c·x + f(c), llamadas *soluciones generales* de la ecuación de Clairaut. El otro caso,

$$0 = x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

define solo una solución *y*(*x*), llamada *solución singular*, cuyo gráfico es envolvente de las gráficas de las soluciones generales. La solución singular se representa normalmente usando notación paramétrica, como: [*x*(*p*), *y*(*p*)], donde *p* representa *dy*/*dx*.

El interés que presenta este tipo de ecuación se debe al hecho de que tiene como solución a una familia de rectas, como ya se ha apuntado. Además, la envolvente, es decir, la curva cuyas tangentes están dadas por la familia, también es solución, en este caso una solución singular de la ecuación de Clairaut. Ésta fue una de las primeras ocasiones en la historia en que este tipo de solución (la solución singular) se puso de relieve.

Veamos, en fin, por lo que se refiere a su interpretación geométrica, que las isoclinas de esta ecuación son rectas como también sucede en la ecuación de Lagrange, pero aquí la pendiente de los elementos de dirección del campo, a lo largo de cada isoclina, es la pendiente de la propia isoclina, es decir, son al mismo tiempo isoclinas y curvas integrales, a diferencia de la ecuación de Lagrange en que este hecho solo ocurre eventualmente en isoclinas excepcionales.

Planteamos, a continuación, algunos ejemplos de este tipo de EDO para la buena comprensión del método anteriormente expuesto. A saber:

**Ejemplo 1**

Sea resolver la EDO: $xy''' + (y''')^2 = y''$.

*Solución:*

Para ello, hacemos: $y'' = p$, por tanto: $xp' + (p')^2 = p$,

obteniendo la ecuación de Clairaut, cuya solución es: $p = y'' = Cx + C^2$,

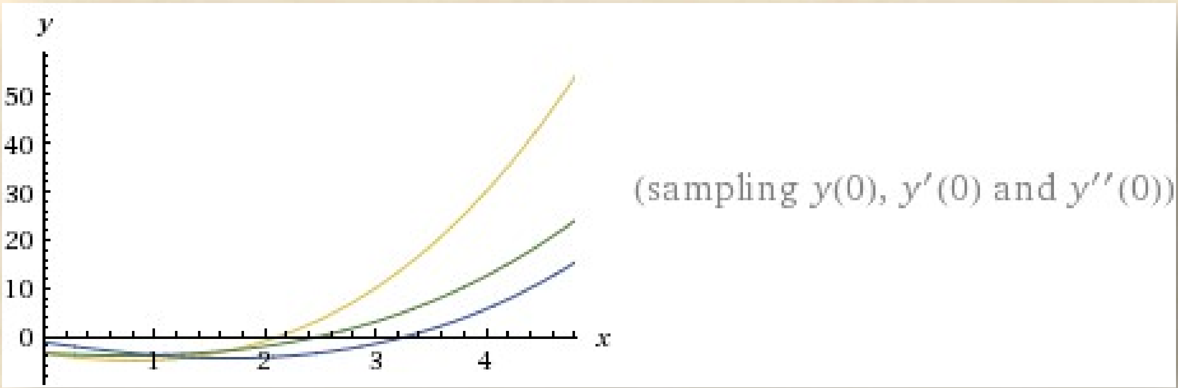
de la cual podemos obtener *y* integrando sucesivamente dos veces, así:

$$y = \int\int y''\,dxdx = \int\int (Cx+C^2)\,dxdx = \int (\frac{Cx^2}{2}+C^2x+D)\,dx = \frac{Cx^3}{6}+\frac{C^2x^2}{2}+Dx+E,$$

siendo *D* y *E* otras dos constantes cualesquiera.

Así pues, la integral general buscada será: $\boxed{y = \frac{Cx^3}{6} + \frac{C^2x^2}{2} + Dx + E.}$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



## Ejemplo 2

Resuelva la ecuación diferencial ordinaria: $y = x \cdot y' + 2\sqrt{1+t^2}$ .

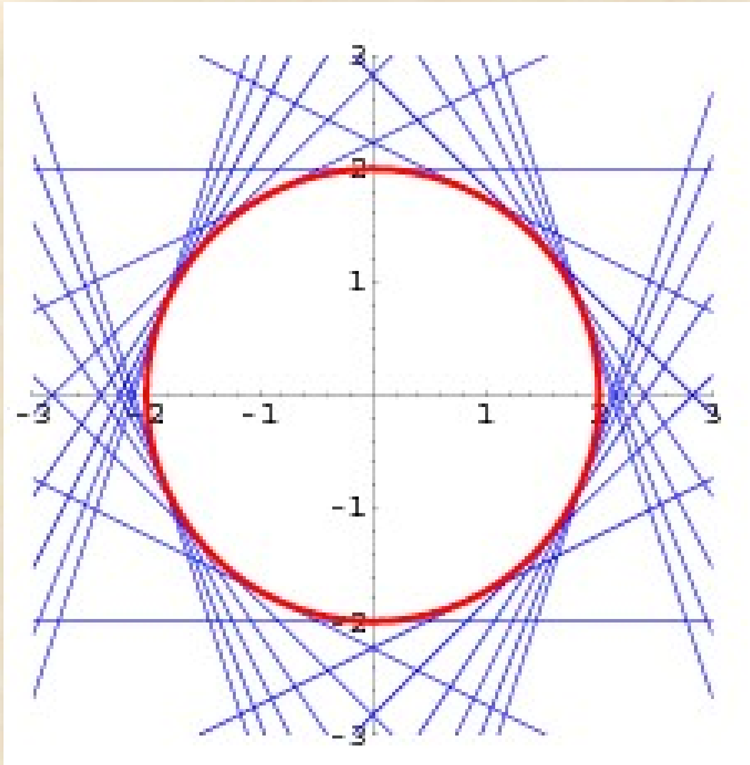
*Solución:*

La solución general es la familia de rectas: $y = c \cdot x \pm 2\sqrt{1+t^2}$ y como $f(t) = 2\sqrt{1+t^2}$ la solución singular está dada por:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

Obsérvese que éstas son las ecuaciones paramétricas de un círculo de radio 2, de ecuación: $x^2 + y^2 = 4$ y de centro el origen (0,0) de las coordenadas cartesianas rectangulares.

En la figura siguiente se muestra la familia de rectas tangentes $y = c \cdot x + 2\sqrt{1+t^2}$ y la envolvente es la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = 4$. Así:



**Ejemplo 3**

Hallar las curvas cuyas tangentes interceptan un segmento constantemente igual a *a* entre los ejes coordenados.

*Solución:*

La ecuación de la recta tangente (X e Y son las coordenadas de la tangente, mientras x e y son las coordenadas del punto de contacto) es la siguiente:

$$Y - y = y'(X - x)$$

, que intercepta en el eje OX el segmento (Y = 0): X = x – y/y', e intercepta en el eje OY (X = 0) el segmento: Y = y –y'·x. Ahora bien, el enunciado del problema exige que: $(x - \frac{y}{y'})^2 + (y - y'\cdot x)^2 = a^2$, o sea: $(y - y'\cdot x)^2(\frac{1}{y'^2} + 1) = a^2$, de donde: $(y - y'\cdot x)^2 = \frac{a^2\cdot y'^2}{1 + y'^2}$, con lo que: $y = y'\cdot x \pm \frac{a\cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, que es una ecuación de Clairaut con $\frac{a\cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, que ofrece el haz de rectas: $\boxed{y = c\cdot x \pm \frac{a\cdot c}{\sqrt{1+c^2}}}$

La envolvente de este haz es, en este caso, la curva astroide de ecuación: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

## 3. ECUACIÓN DE LAGRANGE

La ecuación diferencial de Lagrange (o también llamada de D'Alambert-Lagrange o de Morge) es de primer orden pero no lineal, al igual que la de Clairaut, y presenta la forma siguiente:

$$y = x \cdot f(y') + \varphi(y') \Rightarrow y = x \cdot f(p) + \varphi(p) \qquad (1\ DL)$$

, donde f(y') no puede ser igual a y', resolviéndose con la substitución y' = p, obteniéndose una solución general y una solución particular.

En efecto, si derivamos esta expresión respecto de x obtenemos:

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{f'(y')}{f(y')-y'}x + \frac{\varphi'(y')}{f(y')-y'} = 0$$ , cuya integral general es: $x = e^{-\int \frac{f'(y')}{f'(y')-y'}dy'}\left[C - \int e^{\frac{f'(y')}{f(y')-y'}dy'} \frac{\varphi'(y')dy'}{f(y')-y'}\right]$

O lo que es igual:

$$\frac{dy}{dx} = p = f(p) + x \cdot f_x'(p) \cdot \frac{dy}{dx} + \varphi_p'(p) \cdot \frac{dp}{dx} \quad ; \quad p - f(p) = \left[x \cdot f_x'(p) + \varphi_p'(p)\right] \cdot \frac{dp}{dx}$$

Tomando ahora *x* como variable dependiente o funcional, podemos poner:

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} - x \cdot f_x'(p) = \varphi_p'(p)$$

, que es una ecuación lineal en *x* integrable por métodos ya desarrollados en esta misma monografía.

Podemos recordar que en las ecuaciones lineales el factor integrante y la solución general vienen dados por la expresión: $$\mu(p) = \frac{1}{P_0(p)} \cdot exp \int \frac{P_1(p)}{P_0(p)} \cdot dp \quad ; \quad x(p) = \frac{1}{\mu P_0} \int \mu R(p)\, dp + \frac{C}{\mu P_0}$$

De donde tenemos que: $$\mu(p) = \frac{1}{p - f(p)} \cdot exp \int \frac{\varphi_p'(p)}{p - f(p)} \cdot dp = \frac{1}{p - f(p)} \cdot \exp \psi(p)$$

Y substituyendo el valor del factor integrante en la otra ecuación, se obtiene:

$$x(p) = \exp[-\psi(p)]\left[\int \frac{\varphi_p'(p)}{p - f(p)} \cdot \exp[\psi(p)]\, dp + C \cdot \exp[-\psi(p)]\right]$$

Obtenemos de ese modo una ecuación de la forma x = x(p, C) que, junto a la ecuación anterior (1 DL), nos permite llegar a una solución de la forma:

$$h(x, y, C) = 0.$$

Su interpretación geométrica explica que las isoclinas del campo de direcciones que define esta EDO son rectas dadas por la propia ecuación, considerando *p* como un parámetro. Toda isoclina excepcional cuya pendiente f(p) coincida con el valor *p* del parámetro correspondiente a dicha isoclina será evidentemente (si existe) una solución de la ecuación planteada, por estar constituida por elementos tangenciales del campo.

Veamos ahora algunos ejemplos representativos de este tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias:

**Ejemplo 1**

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y = -x + \frac{1-y'}{1+y'}$ .

*Solución:*

Esta EDO da, con y' = p, la expresión: $x = (1 + p)^{-2} + C$ ;   $y = -p^2(1 + p)^{-2} - C$ ;

Eliminando p resulta el haz de parábolas congruentes:

$4(x - C) = (x + y + 1)^2$ , que tienen por eje común la recta y = -x.

En este caso no existe integral excepcional rectilínea. El valor que satisface a $p = f(p) \equiv -1$ anula el denominador de: $\varphi(p) = \frac{1-p}{1+p}$ .

De hecho, esta EDO adopta la presente configuración analítica:

$$y(1 + y') = -x(1 + y') + 1 - y' ; \quad y + y \cdot y' = -x - x \cdot y' + 1 - y' ;$$

y·y' + x·y' + y' = -x + 1 – y ;   y'(y + x + 1) = 1 – x – y ;   y entonces:

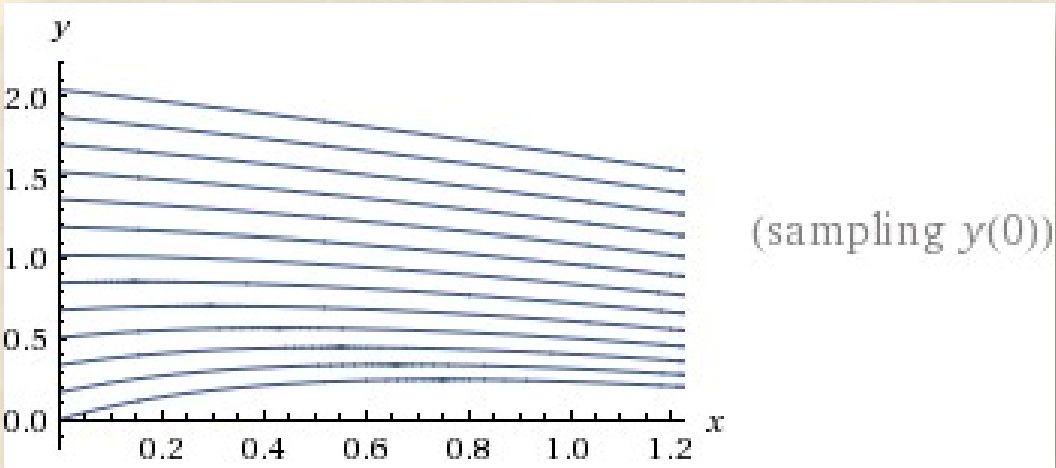
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1-x-y}{1+x+y} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \frac{y}{x}}{\frac{1}{x} + 1 + \frac{y}{x}} = f(y/x)$$

y queda reducida a una EDO homogénea. En efecto, se tiene la expresión general: M(x, y)·dx + N(x, y)·dy = 0, o sea: (1 – x – y)dx – (1 + x + y)dy = 0, que se puede resolver, como ya se ha hecho en la lección anterior. Lo mismo sucede con los dos ejemplos que siguen a continuación.

Aquí, la I.G. obtenida viene dada, ya expresada en forma explícita, por:

$$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{c + 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) + (x+1)^2} - x - 1}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



**Ejemplo 2**

Resolver la ecuación diferencial del haz ortogonal al problema anterior, esto es: $y = -x - \dfrac{1+y'}{1-y'}$ .

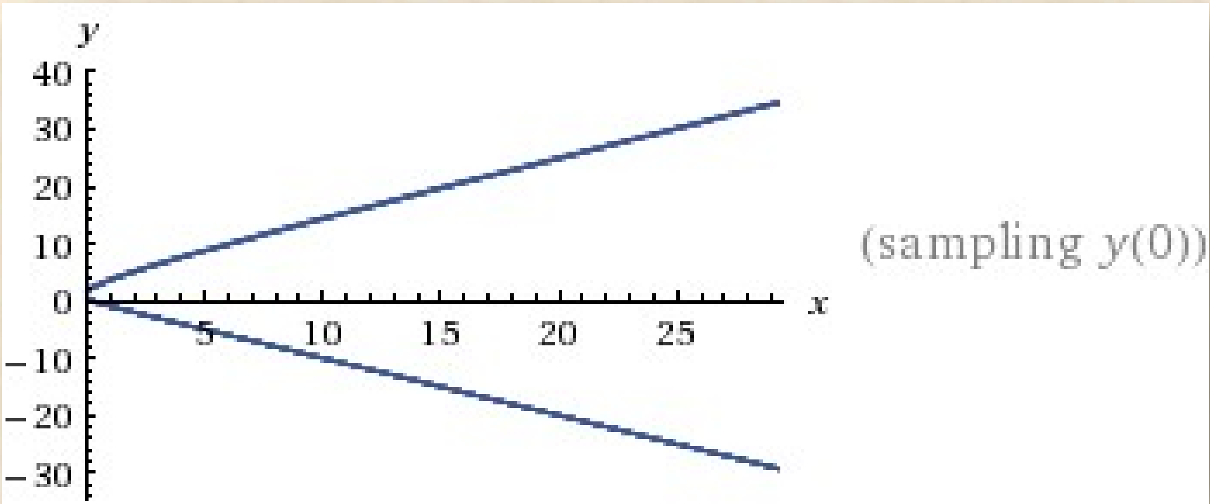
*Solución:*

Ahora tendremos que:

$$\left.\begin{array}{l} [1] \quad -x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+p}{1-p} + \dfrac{1}{1-p} + C \\ [2] \quad y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+p}{1-p} + \dfrac{1}{1-p} - \dfrac{1+p}{1-p} + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} y + x = K{\cdot}e^{y-x} \\ (\text{con}\, K = -e^{2C-1}) \end{array} \quad [3]$$

Para p = -1 la recta y = -x que resulta en [2] satisface evidentemente la ecuación diferencial; y como también resulta de [3] para K = 0 (correspondiente a $C \to \infty$ en [1][2]) parece natural considerarla solución particular (y no singular). Es el eje de las parábolas anteriores y como tal es trayectoria ortogonal de las mismas.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



**Ejemplo 3**

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y = -x + \left(\frac{1+y'}{1-y'}\right)^2$.

*Solución:*

Se tiene que: $x = \frac{2}{(1-p)^2} + C; \quad y = \frac{(1+p)^2 - 2}{(1-p)^2} - C$

Eliminando p resulta el haz de parábolas tangentes a la recta y = -x:

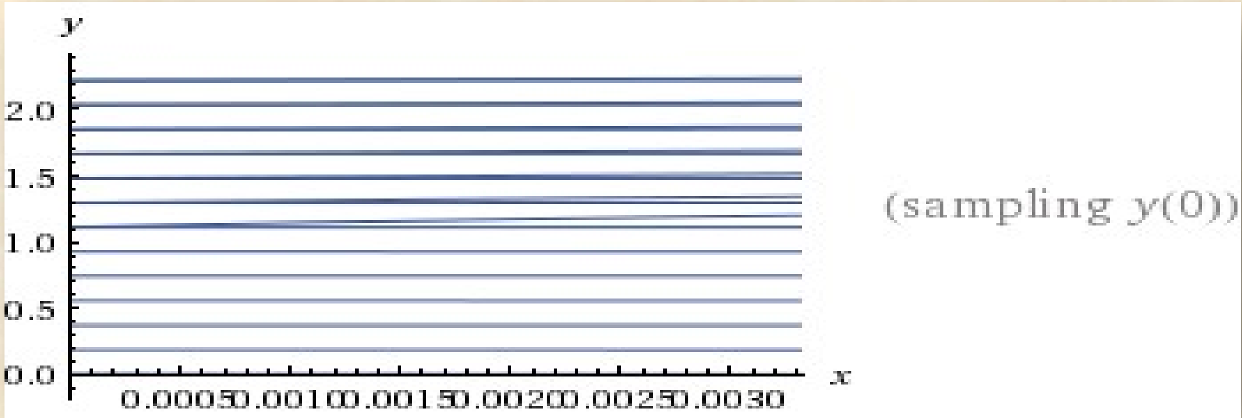
$$(x - y + K)^2 = 4(x + y)$$

La solución rectilínea y = -x correspondiente a p = -1 no pertenece, en este caso, al haz integral, sino que es precisamente su envolvente. Esta es, propiamente, una integral singular.

La I.G. expresada en forma explícita será, pues:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = \pm 2\sqrt{-c+2x+1} - c + x + 2 \\ y(x) = \pm 2\sqrt{c+2x+1} + c + x + 2 \end{array}}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



## 4. RESOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE LAS SERIES DE POTENCIAS

La aplicabilidad de este método a la resolución de las EDO de cualquier orden no resulta en absoluto despreciable, como tendremos ocasión de comprobar seguidamente.

Veamos, a continuación, algunos ejercicios suficientemente representativos de ello, aunque la teoría correspondiente así como otros ejercicios de aplicación de este método se estudiarán en sucesivas lecciones de este mismo curso para las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior al primero.

**Ejemplo 1**

Resolver la EDO: y' + y = 0.

*Solución:*

Esto es: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$ .

Teniendo en cuenta que: k = n – 1 ; k = n

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[ (k+1) C_{k+1} + C_k \right] = 0 \Rightarrow C_{k+1} = -\dfrac{C_k}{k+1} \end{cases}$$

Se tiene que:

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow C_1 = -C_0 \\ k = 1 \Rightarrow C_2 = \dfrac{-C_1}{2} = \dfrac{-(-C_0)}{2} = \dfrac{C_0}{2} \\ k = 2 \Rightarrow C_3 = \dfrac{-C_2}{3} = \dfrac{-\left(C_0/2\right)}{3} = \dfrac{-C_0}{6} \\ k = 3 \Rightarrow C_4 = \dfrac{-C_3}{4} = \dfrac{-\left(-C_0/6\right)}{4} = \dfrac{C_0}{24} \\ k = 4 \Rightarrow C_5 = \dfrac{-C_4}{5} = \dfrac{-\left(C_0/24\right)}{5} = \dfrac{-C_0}{120} \end{cases}$$

$$y = C_0 - C_0 x + \frac{C_0}{2} x^2 - \frac{C_0}{6} x^3 + \frac{C_0}{24} x^4 - \frac{C_0}{120} x^5;$$

$$y = C_0 \left[ 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \right].$$

Lo que ofrece la integral general: $\boxed{y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = C_0 e^{-x}}$

El resultado obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, considerando la ecuación característica o modular:

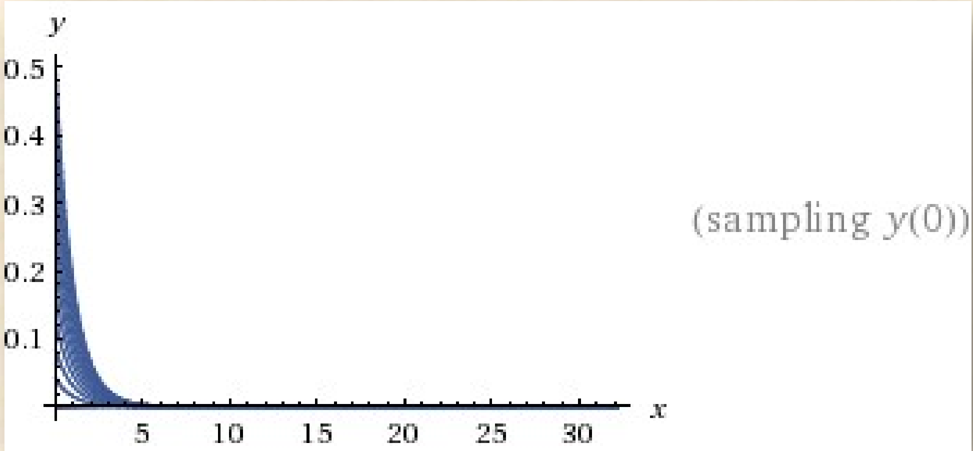
$\lambda + 1 = 0$; $\lambda = -1$, con lo que se tendrá la integral general siguiente: $y(x) = C_0 \cdot e^{-x}$

A la misma conclusión llegaríamos integrando directamente si consideramos que se trata de una sencilla ecuación de variables separables, puesto que:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0; -\frac{dy}{y} = dx; \quad \text{y mediante una cuadratura se tiene que:}$$

$\ln y = C - x$; $y = e^{C-x} = e^C \cdot e^{-x} = C_0 \cdot e^{-x}$, c.s.q.d., habiendo hecho: $C_0 = e^C$.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:




## 5. RESOLUCIÓN POR SUBSTITUCIÓN

El cambio de variable: z = ax + by + c, transforma una ecuación diferencial ordinaria del tipo: y' = f(ax + by + c) en una ecuación de variables separables de fácil resolución, tal como ya se apuntó en su momento. En efecto, se tiene que:

$$(ax + by + c) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(ax + by + c). \text{ Sea ahora:}$$

$$z = ax + by + z\ (2), \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right).$$

Substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \Leftrightarrow \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = b{\cdot}f(z) + a\ , \quad \frac{dz}{b{\cdot}f(z) + a} = dx\ ,$$

que ya es una EDO con variables separables que podemos resolver mediante una cuadratura.

Veamos, al respecto de lo expuesto, los siguientes ejemplos representativos:

**Ejemplo:**

Probar que el cambio de variable: z = ax + by + c transforma la EDO siguiente: y' = f(ax + by + c) en una ecuación de variables separables, y aplicar este método para resolver las tres ecuaciones diferenciales que se indican a continuación:

(a) $y' = (x + y)^2$; (b) $y' = \sin^2(x - y + 1)$; (c) $y' = -(a/b)\cdot\sin^2(ax + by + c)$.

*Solución:*

Respectivamente:

(a) Se trata ahora de resolver la EDO: $y' = (x+y)^2 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$

Sea: $z = x + y, \ \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 1 + \dfrac{dy}{dx} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - 1$

Substituyendo en las expresiones anteriores, se obtiene que:

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx \Leftrightarrow \tan^{-1} z = x + c$$

Substituyendo z = x + y en la ecuación anterior, se obtiene que:

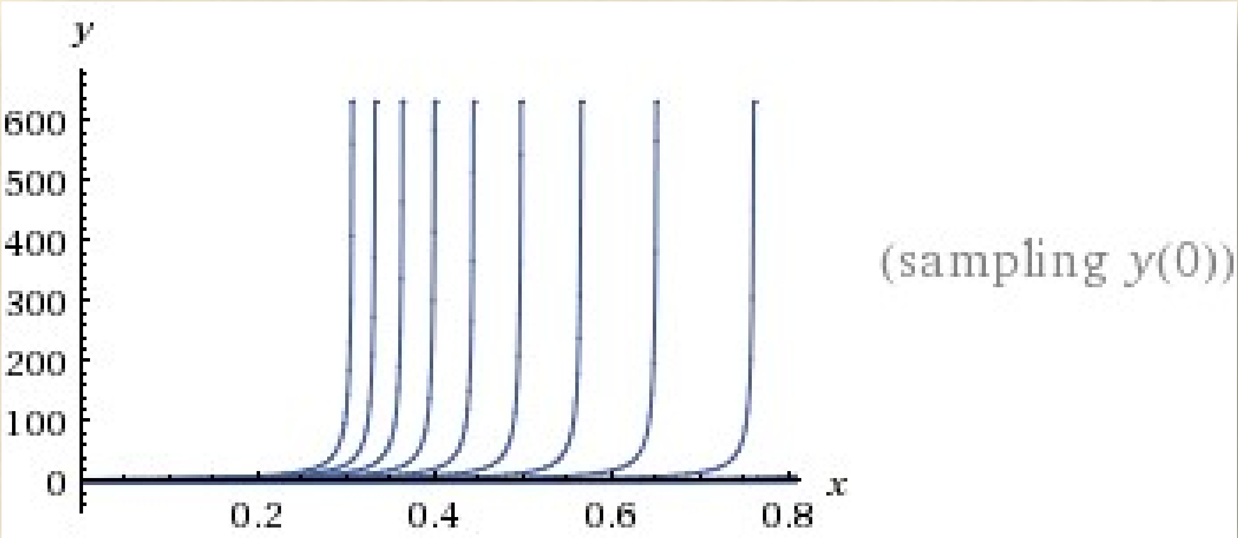
$\tan^{-1}(x + y) = \arctan(x + y) = x + c \Leftrightarrow x + y = \tan(x + c)$, y entonces se tiene la I.G. en forma explícita:

$$y(x) = \tan(x + c) - x$$

La correspondiente solución en forma explícita, alternativamente, también vendrá dada por la expresión:

$$y(x) = \frac{1}{c_1\, e^{2\,i\,x} - \frac{i}{2}} - x - i$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:




(b) Se trata ahora de resolver la EDO: $y' = \sin^2(x - y + 1) \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \sin^2(x - y + 1)$

Sea: $z = x - y + 1, \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 1 - \dfrac{dy}{dx}; \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{dz}{dx} + 1$

Substituyendo en las expresiones anteriores, se obtiene que:

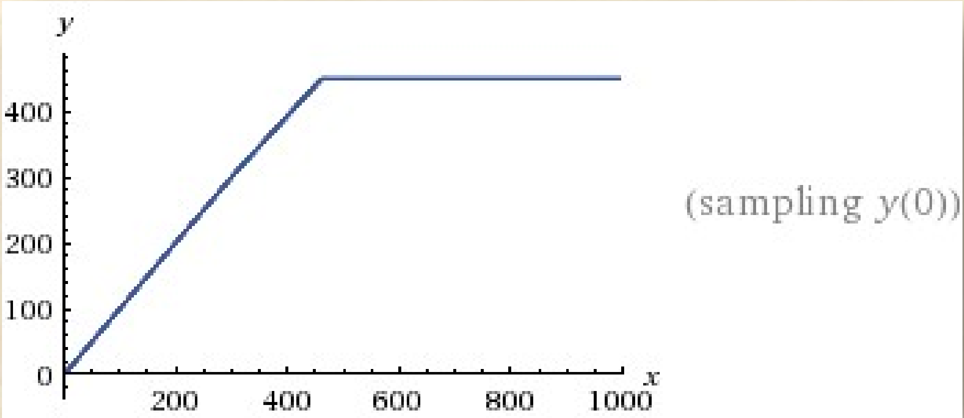
$$-\frac{dz}{dx} + 1 = \sin^2 z \Leftrightarrow -\frac{dz}{dx} = \sin^2 z - 1 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \sin^2 z \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \cos^2 z \Leftrightarrow \sec^2 z \cdot dz = dx$$

$$\Rightarrow \int \sec^2 z \cdot dz = \int dx \Leftrightarrow \tan z = x + c$$

Substituyendo: z = x – y + 1 en la expresión anterior, se obtiene, por último la I.G. buscada en forma explícita, puesto que: tg(x – y + 1) = x + c; y, por último:

$$\boxed{y(x) = x + 1 \pm \text{arc tg } (x + c)}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:




(c) Se trata ahora, por último, de resolver la EDO: $y' = -(a/b)\cdot\sin^2(ax + by + c)$.

Efectuando el cambio de variable: $z = ax + by + c$, se tendrá que:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + b\left(-\frac{a}{b}\sin^2 z\right) = a - a\cdot\sin^2 z = a(1 - \sin^2 z) = a\cdot\cos^2 z,$$

, y se llega a la siguiente EDO de variables separadas: $\dfrac{dz}{\cos^2 z} = a\cdot dx$ .

Integrando ahora ambos miembros de esta igualdad mediante una cuadratura, se obtiene que: $\mathrm{tg}\, z = a\cdot x + C$, y deshaciendo el cambio anterior:

$\mathrm{tg}\,(ax + by + c) = a\cdot x + C$; $\mathrm{arc\,tg}\,(a\cdot x + C) = ax + by + c$; de donde resulta la I.G. buscada, a saber:

$$\boxed{y = (1/b)\cdot[-a\cdot x - c + \mathrm{arc\,tg}\,(a\cdot x + C)]}$$

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 5

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (V)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

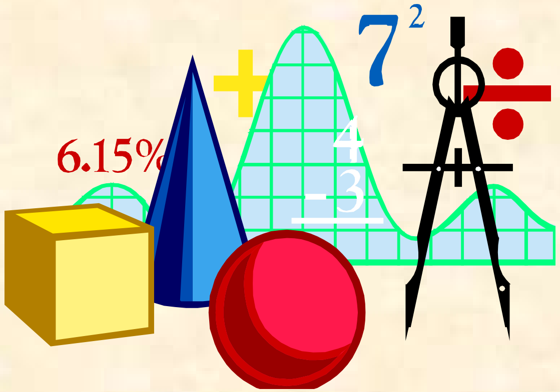
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





## 1. Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria de orden **n** es aquella cuya expresión general es:

$$F(x, y, y', \ldots, y^n) = 0 \; ; \quad \text{o, en forma normal:} \quad y^n = H(x, y, y', \ldots, y^{n-1}) \, ,$$

en la que H es una función real definida en un subconjunto $A \subset R^{n+1}$. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria, cuyo **orden**, como ya sabemos, viene dado por la derivada de mayor orden, siendo su **grado** el mayor exponente o potencia con que figure elevada la susodicha derivada.

Una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \, ,$$

donde $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ y $b(x)$ son funciones reales y continuas en un determinado intervalo $(a, b)$, es una ecuación diferencial lineal de orden n.

Cuando $b(x) \equiv 0$, de la ecuación anterior se dice que es *homogénea o incompleta*; cuando no sucede así, se denomina *no homogénea, inhomogénea o completa*.

Si las funciones $a_i(x)$, $\forall i = 1, \ldots, n$, son constantes, tendremos una "ecuación diferencial lineal de orden **n** con coeficientes constantes". Por el contrario, si dichas funciones son variables tendremos una "ecuación diferencial lineal de orden **n** con coeficientes variables".

Una función real $y_1$ derivable hasta el orden *n* en el intervalo (a, b) es solución de la primera ecuación si en ese intervalo se verifica que:

$$y_1^n + a_1(x)y_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)y'_1 + a_n(x)y_1 \equiv b(x).$$

## 2. Ecuación diferencial lineal homogénea de orden n y coeficientes constantes

### *2.1. Generalidades*

Estudiaremos ahora la ecuación diferencial ordinaria:

$$y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \ ,$$

en la que $(a_1, \ldots, a_n) \in R^n$.

Para obtener su solución o integral general necesitamos conocer *n* soluciones cualesquiera de la misma que sean linealmente independientes (sabemos que ello es posible). Con ese fin, sea:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \ ,$$

la denominada "ecuación característica" de la ecuación diferencial anterior, que puede ofrecer distintos tipos de raíces que estudiaremos a continuación.

## *2.2. Raíces simples reales de la ecuación característica*

En este caso, la I.G. (Integral General) viene dada por la expresión:

$$\boxed{y = c_1 \times e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n \times e^{\lambda_n x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot e^{\lambda_i x}}$$

Ejemplo 1:

Sea: a) resolver la ecuación: y'' – 4y' + 3y = 0 ;

y b) hallar la solución particular tal que: y(0) = 0 e y'(0) = 1.

*Solución:*

a) La ecuación característica será:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 ;$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$ , luego la I.G. será:

$$\boxed{y = c_1 \times e^{3x} + c_2 \times e^{x}} \rightarrow \text{I.G.}$$

b) Para hallar la solución particular o problema de valor inicial (PVI), hacemos:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0 \text{ . Además:}$$

$$y'(x) = 3 \times c_1 \times e^{3x} + c_2 \times e^x \text{ ; } y'(0) = 3c_1 + c_2 = 1; \text{ entonces:}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_2 = 1 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 2c_1 = 1 \text{ ; } c_1 = ½ \\ c_2 = - ½ \text{ ;} \end{array}$$

con lo que la solución particular buscada será:

$$\boxed{y_p = \frac{e^{3x}}{2} - \frac{e^x}{2} = \frac{e^{3x} - e^x}{2}}$$

*2.3. Raíces múltiples reales de la ecuación característica*

En general, si $\lambda_i$ es raíz múltiple de orden k de la ecuación característica, son integrales particulares:

$$\boxed{y_p = e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, x^2 \cdot e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_1 x}}$$

Ejemplo 2:

Sea resolver la ecuación:

$$y^{III} - 5y^{II} + 8y^{I} - 4y = 0$$

*Solución:*

La ecuación característica es:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \ ,$$

que admite las siguientes raíces reales divisores del término independiente:

$$\lambda_1 = 2 = \lambda_2 \ , \ \lambda_3 = 1 \ .$$

Luego la integral general será:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{x}} \rightarrow \text{I.G.}$$

## Ejemplo 3:

Sea resolver la ecuación:

$$y^{IV} + 6y^{III} + 5y^{II} - 24y^{I} - 36y = 0$$

*Solución:*

La ecuación característica es:

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 5\lambda^2 - 24\lambda - 36 = 0$$

que admite las siguientes raíces reales divisores del término independiente:

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3 = \lambda_4$$

Para las raíces $\lambda_1$ y $\lambda_2$, como simples, existen las soluciones particulares:

$$y_1 = e^{2x}\ ;\ \ y_2 = e^{-2x}$$

Para la raíz doble -3, existe el par:

$$y_3 = e^{-3x}\ ;\ \ y_4 = x\cdot e^{-3x}$$

Luego la integral general será:

$$\boxed{y = c_1\cdot e^{2x} + c_2\cdot e^{-2x} + c_3\cdot e^{-3x} + c_4\cdot xe^{-3x}} \to \text{I.G.}$$

## *2.4. Raíces complejas de la ecuación característica*

En este caso, la integral general viene dada por:

$$y = e^{\alpha x}\,(A\cdot\cos\beta x + B\cdot\sin\beta x)\ ,$$

en que $\lambda_i = \alpha \pm i\beta$, o sea, $\alpha$ y $\beta$ son, respectivamente, los coeficientes de la parte real e imaginaria del anterior número complejo expresado en forma binomia o binómica (ver Apéndice V).

Ejemplo 4:

Sea resolver la ecuación: $y^{IV} + 5y^{II} - 36y = 0$ .

*Solución:*

La ecuación característica: $\lambda^4 + 5\lambda^2 - 36 = 0$, es una ecuación bicuadrada (de 4º grado) que proporciona las soluciones (haciendo el cambio de variable $\lambda^2 = \mu$):

$$\mu^2 + 5\mu - 36 = 0\ ; \qquad \mu = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2} = \begin{cases} \mu_1 = 4 \\ \mu_2 = -9 \end{cases}$$

de tal modo que: $\lambda = \begin{cases} \lambda_1 = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ \lambda_2 = \pm\sqrt{-9} = \pm 3\,i \end{cases}$

, con lo que se tendrán, en definitiva, las 4 soluciones de la ecuación característica:

$$\lambda_1 = 2\ ,\ \ \lambda_2 = -2\ ,\ \ \lambda_3 = 3i\ ,\ \ \lambda_4 = -3i$$

A las raíces reales simples $\lambda_1$ y $\lambda_2$ corresponderán las soluciones particulares:

$$y_1 = e^{2x} \;;\; y_2 = e^{-2x}$$

Al par de raíces complejas conjugadas $\pm 3i$, que son imaginarias puras (con $\alpha = 0$ y $\beta = 3$), le corresponde, como hemos visto, la expresión:

$$A \cdot \cos 3x + B \cdot \sin 3x$$

Luego la integral general será:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot \cos 3x + c_4 \cdot \sin 3x} \quad \to \text{I.G.}$$

donde en vez de las constantes A y B, se ha escrito $c_3$ y $c_4$.

Finalmente, indicaremos que si existen raíces complejas múltiples, basta combinar los métodos de los casos anteriores para obtener la integral general de la EDO en cuestión.

## 3. Ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n y coeficientes constantes

### *3.1. Generalidades*

Estudiaremos aquí la ecuación diferencial:

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n y = b(x) ,$$

donde, como ya indicamos, las $a_i(x)$, $\forall i = 1, \ldots, n$, y $b(x)$ son funciones continuas en un intervalo $(a, b)$.

Podemos, por tanto, dar la siguiente expresión para la solución o integral general de la ecuación completa:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot y_1 + \ldots + c_n \cdot y_n + y_p = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_i + y_p} \rightarrow \text{I.G.}$$

que es suma o adición de la solución general de la ecuación homogénea ($y^*$) y de una solución particular de la completa ($y_p$) cuya investigación se verá, para los diferentes casos que se puedan presentar, en epígrafes posteriores de este mismo curso.

También para hallar la solución particular de la completa se puede utilizar el denominado *método de Cauchy*, en que se supone conocida la integral y = z de la ecuación homogénea o incompleta; entonces, la ecuación dada quedará satisfecha poniendo: $y = \int_0^x z \cdot d\alpha$, para cuya determinación definiremos las m constantes de la integral general y = z, expresando que para x = $\alpha$, se verifica que: z, z', z''… $z^{(m-\alpha)}$ son iguales a cero y $z^{(m-1)} = f(\alpha)$. Siendo:

$$z = c_1 \cdot e^{\alpha_1 (x-\alpha)} + c_2 \cdot e^{\alpha_2 (x-\alpha)} + ... + c_m \cdot e^{\alpha_m (x-\alpha)} = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot e^{\alpha_i (x-\alpha)} \quad ,$$

e imponiéndole las condiciones antedichas, se obtiene que:

$$c_1 = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_1)}; \quad c_2 = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_2)} \quad ;...; \; c_m = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_m)} \quad ,$$

siendo $\varphi(a)$ el primer miembro de la ecuación característica.

La integral particular buscada es, entonces:

$$z = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_1)} e^{\alpha_1 (x-\alpha)} + \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_2)} e^{\alpha_2 (x-\alpha)} + ... + \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_m)} e^{\alpha_m (x-\alpha)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_i)} \cdot e^{\alpha_i (x-\alpha)} \quad ,$$

pero como $y = \int_0^x z \cdot d\alpha$, y para hallar la integral general de la ecuación dada hay que sumarle la solución de la incompleta u homogénea, tendremos, después de efectuada toda reducción:

$$y = e^{\alpha_1 x}\left[c_1 + \frac{1}{\varphi'(a_1)} \int_0^x e^{-a_1 \alpha} \cdot f(\alpha) \cdot dx\right] + e^{\alpha_2 x}\left[c_2 + \frac{1}{\varphi'(a_2)} \int_0^x e^{-a_2 \alpha} \cdot f(\alpha) \cdot dx\right] + ... +$$

$$+ e^{\alpha_m x}\left[c_m + \frac{1}{\varphi'(a_m)} \int_0^x e^{-a_m \alpha} \cdot f(\alpha) \cdot dx\right] = \sum_{i=1}^{m} e^{\alpha_i x}\left[c_i + \frac{1}{\varphi'(a_i)} \int_0^x e^{-a_i \alpha} \cdot f(\alpha) \cdot dx\right]$$



, que constituye la integral general de la ecuación completa.

Las ecuaciones diferenciales cuya forma es la siguiente:

$$y^{(m)} + \frac{A}{ax+b} y^{(m-1)} + \ldots + \frac{T}{(ax+b)^{m-1}} y' + \frac{U}{(ax+b)^m} y = 0 \ ,$$

se integran poniendo y = $(ax + b)^{\alpha}$, valor que, substituido en la ecuación dada, conduce a una de grado m en $\alpha$, siendo $\alpha_1$, $\alpha_2$ … $\alpha_m$ las raíces de la ecuación resultante, y la integral general buscada resulta ser, entonces:

$$y = c_1(ax+b)^{\alpha_1} + c_2(ax+b)^{\alpha_2} + \ldots + c_m(ax+b)^{\alpha_m} = \sum_{i=1}^{m} c_i(ax+b)^{\alpha_i}.$$

Veamos, en fin, que la expresión: $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$, posee como integral general:

$$y(x) = \int\int \ldots^{(n)} \ldots \int f(x) \cdot dx^n + g(x) \ ,$$

en donde g(x) es una función arbitraria entera a lo más de grado (n-1). También esta I.G. puede escribirse bajo la forma empleada frecuentemente:

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t) \cdot (x-t)^{n-1} \cdot dt + g(x) \ ,$$

conocida *como fórmula de las integrales iteradas*, que constituye un importante resultado de Cauchy que recoge, en una sola integral, la generalización de este proceso, y que tendremos ocasión de aplicar en algún ejercicio posterior.

## 3.2. Ejemplos

**Ejemplo 1**

The electric current in a certain circuit is given by the expression $\frac{d^2I}{dt^2} + 4\frac{dI}{dt} + 2.504 \cdot I = 110.$ If I = 0 and $\frac{dI}{dt} = 0$ when t = 0, find I in terms of t.

*Solution:*

The characteristic equation of the homogeneous is: $\lambda^2 + 4\lambda + 2.504 = 0$; thus:

$\lambda = -2 + 50i, -2 - 50i$, with $\alpha = -2$ and $\beta = 50$. The complementary function is:

$$I^* = e^{-2t}(A\cdot\cos 50t + B\cdot\sin 50t).$$

The particular integral is: $I_p = k$; $k = 110/2.504 = 0'044$.

Thus, the general solution is: $I = I^* + I_p = e^{-2t}(A\cdot\cos 50t + B\cdot\sin 50t) + 0'044$.

$$\begin{cases} \text{When } t = 0,\ I = 0 = A + 0'044; \text{ then } A = -0'044. \\ \text{When } t = 0,\ \frac{dI}{dt} = 0 = e^{-2t}[(-2A + 50B)\cdot\cos 50t - (2B + 50A)\cdot\sin 50t] = -2A + 50B. \end{cases}$$

Then B = -0’00176, and the required relation (particular solution) is:

$$\boxed{I = 0'044 - e^{-2t}(0'044\cdot\cos 50t + 0'00176\cdot\sin 50t)}\ .$$

**Ejemplo 2**

Determinar la corriente I(T) de un circuito eléctrico ¨LRC¨ en serie, cuando la inductancia es L = 0’005 henrios, la resistencia R = 1 Ω y la capacidad C = 0’02 faradios, teniendo en cuenta que:

$$E(T) = 100[1 - u(T-1)],\qquad I(0) = 0$$

*Solución:*

Sabemos que la ecuación diferencial de la corriente eléctrica en este circuito es del tipo siguiente:

$$L\frac{dI}{dT}+RI+\frac{1}{C}\int_o^T I(\tau)d\tau=100[1-u(T-1)],\ \text{y substituyendo valores se tiene que :}$$

$$0'005\frac{dI}{dT}+I+\frac{1}{0'02}\int_o^T I(\tau)d\tau=100[1-u(T-1)],\ \text{o sea :}$$

$$0'005(SI_s-I(0))+I_s+\frac{50{\cdot}I_s}{S}=100\left(\frac{1}{S}-\frac{e^{-S}}{S}\right)$$

$$SI_s+200{\cdot}I_s+\frac{10.000{\cdot}I_s}{S}=20.000\left(\frac{1}{S}-\frac{e^{-S}}{S}\right)$$

$$I_s\left(\frac{S^2+200{\cdot}S+10.000}{S}\right)=20.000\left(\frac{1}{S}-\frac{e^{-S}}{S}\right)\Rightarrow I_s\left(\frac{(S+100)^2}{S}\right)=20.000\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right)$$

O también:

$$I_s=\frac{20.000S}{(S+100)^2}\left(\frac{1-e^{-S}}{S}\right)=\frac{20.000}{(S+100)^2}-\frac{20.000e^{-S}}{(S+100)^2},\ \text{y en definitiva, se tendrá la I.P. :}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&I(T)=20.000Te^{-100T}-20.000Te^{-100T}e^{-S}=\\&=20.000Te^{-100T}-20.000(T-1)e^{-100(T-1)}u(T-1)\end{aligned}}$$

## Ejemplo 3

Resolver la EDO: $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 1$, que es una curva de costes variables medios de cierta empresa, con $y(0) = 4$ € e $y'(0) = -3$ €. Se pide también representar gráficamente las restantes curvas de coste considerando unos costes fijos de 100 € .

*Solución*:

La ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$.

Al ser -1 y -2 las raíces de la ecuación característica, la integral general de la ecuación homogénea será:

$$y^* = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

Una solución particular de la ecuación dada, puede ser: $y_p = Ax^2 + Bx + C$, de donde $\begin{cases} y'_p = 2Ax + B \\ y_p'' = 2A \end{cases}$, que llevadas a la ecuación inicial, da:

$$2A + 6Ax + 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C \equiv 2x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} 2A = 2 & A = 1 \\ 6A + 2B = 0 & B = -3 \\ 2A + 3B + 2C = 1 & C = 4 \end{cases}$$

La solución particular es, pues: $y_p = x^2 - 3x + 4$, y la solución general de la ecuación dada, será:

$$y = y^* + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + x^2 - 3x + 4.$$

De acuerdo con las condiciones iniciales dadas, se tiene que:

$$y(0) = 4 = C_1 + C_2 + 4 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0.$$

Derivando, $y' = -C_1e^{-x} - 2C_2e^{-2x} + 2x - 3$, luego también: $y'(0) = - 3 = - C_1 - 2C_2 - 3 \Rightarrow - C_1 - 2C_2 = 0$.

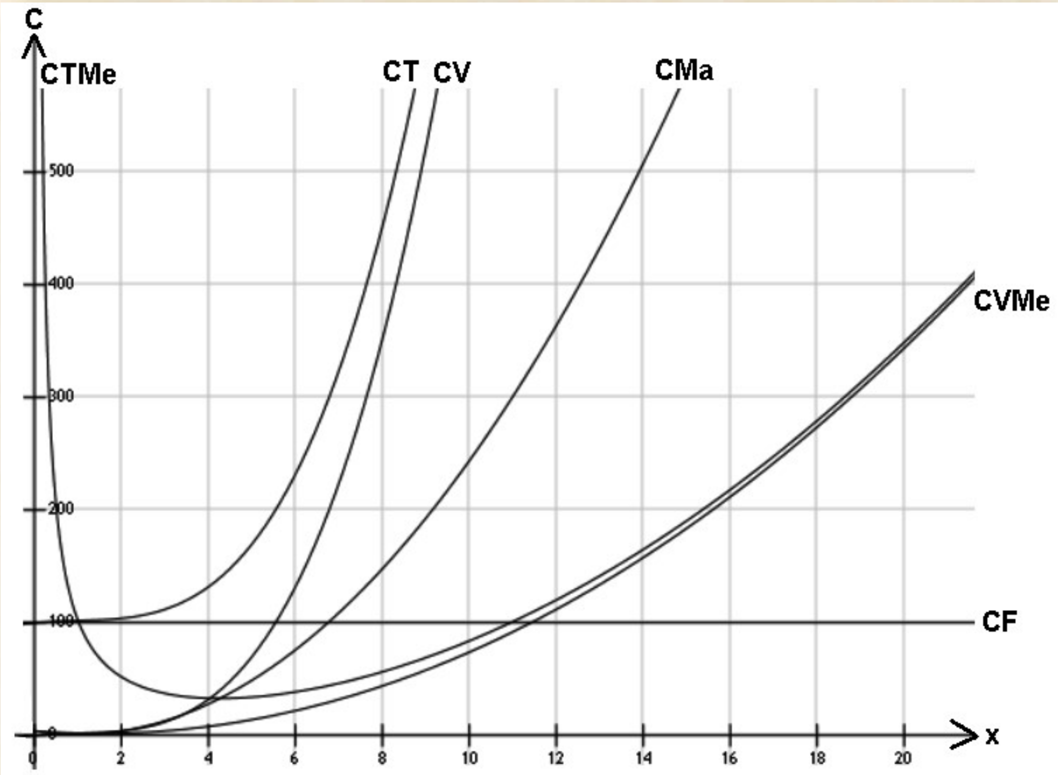
Por tanto, $C_1 = C_2 = 0$ y la solución del problema de valores iniciales plateado, es la siguiente:



$$y = x^2 - 3x + 4.$$

Por último, se tendrán las siguientes funciones de coste y su respectiva representación gráfica:

$$\begin{cases} \text{Costes totales} = CT = CV + CF = x^3 - 3x^2 + 4x + 100 \\ \text{Costes totales medios} = CTMe = x^2 - 3x + 4 + \dfrac{100}{x} \\ \text{Costes variables} = CV = x^3 - 3x^2 + 4x \\ \text{Costes variables medios} = CVMe = x^2 - 3x + 4 \\ \text{Costes marginales} = CMa = 3x^2 - 6x + 4 \\ \text{Costes fijos} = CF = 100 \end{cases}$$




Diferentes curvas de coste.

Obsérvese que:

$$\begin{cases} \text{Costes variables} = CV = x^3 - 3x^2 + 4x \\ \text{Costes variables medios} = CVMe = x^2 - 3x + 4 \end{cases}$$

El volumen de producción mínimo de la empresa es $x = 1'5$, puesto que: CMa = CVMe; o sea: $3x^2 - 6x + 4 = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow x = 1'5$ (la otra solución $x = 0$ es rechazable).

Este punto coincide con el mínimo de la curva de CVMe, puesto que: $\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 4) = 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow x = 1'5$, y la condición suficiente o de 2º grado exige que: $\frac{d}{dx}(2x - 3) = 2 > 0$, luego se trata, efectivamente, de un mínimo. Se corresponde a: $C = 1'5^2 - 3\cdot 1'5 + 4 = 1'75$ € .

## Ejemplo 4

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* € de un producto, respecto a su oferta *x* (en miles de ud.), viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $y'' - 6y' + 9y = x^2 \cdot e^{3x}$ . Se pide:
a) calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 2'00 € , no existe oferta alguna de dicho producto y que, en este caso, la pendiente de la curva de oferta es igual a 6, y b) calcular la elasticidad puntual cuando la oferta es de 2.000 ud.

*Solución:*

a) Se trata, en definitiva, de resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = x^2 \cdot e^{3x} \\ y(0) = 2 \ ; \quad y'(0) = 6 \ ; \end{cases}$$

La ecuación característica de la homogénea, es:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \ ; \ \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}, \text{ y su solución será: } y^* = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x} .$$

Ensayaremos ahora una solución particular que sea combinación lineal de soluciones, habida cuenta de la naturaleza del segundo miembro (producto de un polinomio por una función exponencial), así como para evitar indeseables fenómenos de resonancia, con lo que:

$$y_p = (ax^2 + bx + c)\cdot x^2\cdot e^{3x} = e^{3x}(ax^4 + bx^3 + cx^2) ;$$

$$y'_p = 3\cdot e^{3x}(ax^4 + bx^3 + cx^2) + e^{3x}(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) =$$
$$= e^{3x}(3ax^4 + 3bx^3 + 3cx^2 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)$$

$$y''_p = 3\cdot e^{3x}(3ax^4 + 3bx^3 + 3cx^2 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) +$$
$$+ e^{3x}(12ax^3 + 9bx^2 + 6cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) =$$
$$= e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 12ax^3 + 9bx^2 + 6cx +$$
$$+ 12ax^3 + 9bx^2 + 6cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) =$$
$$= e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 +$$
$$+ 12cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) ;$$

y substituyendo los valores obtenidos en la ecuación inicial, se tiene que:

$$e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 + 12cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) –$$
$$– e^{3x}(18ax^4 + 18bx^3 + 18cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 + 12cx) +$$
$$+ e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2) = e^{3x}(12ax^2 + 6bx + 2c) = e^{3x}\cdot x^2 ;$$

$12ax^2 + 6bx + 2c = x^2$ ; o sea: $a = 1/12$ ; $b = 0$ ; $c = 0$ ; con lo que resultará la integral general:

$$y(x) = y^* + y_p = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot x\cdot e^{3x} + \frac{e^{3x}\cdot x^4}{12} .$$

Ahora bien, las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

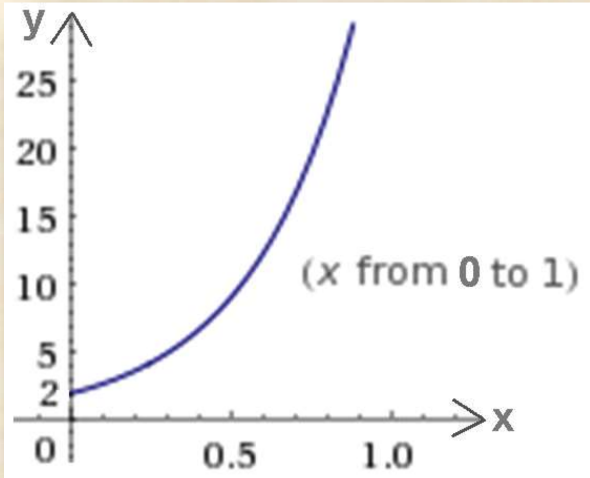
$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 2 ; \\ y'(x) = 3\cdot c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{3x} + 3c_2\cdot x\cdot e^{3x} + \dfrac{3\cdot e^{3x}\cdot x^4 + 4x^3\cdot e^{3x}}{12} ; \\ y'(0) = 3c_1 + c_2 = 6 ; \quad c_2 = 0 ; \end{cases}$$



y resultará, en definitiva, la I.P. buscada:

$$\boxed{y(x) = 2 \cdot e^{3x} + \frac{e^{3x} \cdot x^4}{12} = \frac{e^{3x}(24 + x^4)}{12}}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):




Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}(24 + x^4)}{12x} = +\infty$ , luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) Se tiene que: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{3x}(3x^4 + 4x^3 + 72)}{12}$ ; $\frac{dx}{dy} = \frac{12}{e^{3x}(3x^4 + 4x^3 + 72)}$ ; y entonces:

$$e_O = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{12}{e^{3x}(3x^4 + 4x^3 + 72)} \times \frac{e^{3x}(24 + x^4)}{12x} =$$

$$= \frac{24 + x^4}{3x^5 + 4x^4 + 72x} = \frac{24 + 16}{96 + 64 + 144} = 0'13 < 1,$$

por lo que resulta *relativamente inelástica*, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción menor.

## Ejemplo 5

Sea un modelo de mercado con expectativas de precios en el que:

$$\begin{cases} D(t) = 2 - 2P(t) + 2\dfrac{dP(t)}{dt} + \dfrac{d^2P(t)}{dt^2} \\ S(t) = -2 + 3P(t) + 6\dfrac{dP(t)}{dt} + 2\dfrac{d^2P(t)}{dt^2} \end{cases}$$

con P(0) = 2'00 € y dP(0)/dt = 1. Obténgase P(t) y estúdiese la trayectoria temporal del precio.

*Solución:*

Igualando la oferta y la demanda (equilibrio), se tendrá que:

$$2 - 2P + 2P' + P'' = -2 + 3P + 6P' + 2P'' ;$$

de donde se obtiene la EDO no homogénea siguiente: $P'' + 4P' + 5P = 4$.

La ecuación característica de la homogénea, será: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ ;

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \left\langle \begin{matrix} \lambda_1 = -2 + i \\ \lambda_2 = -2 - i \end{matrix} \right. \text{, (con } \alpha = -2 \text{ y } \beta = 1) \text{ ,}$$

y la solución de la homogénea será: $P^*(t) = e^{-2t}(A\cdot\cos t + B\cdot\sin t)$.

Para hallar una solución de la completa o inhomogénea, ensayaremos la solución particular:

$$\begin{cases} P_p = a \\ P'_p = P''_p = 0 \end{cases}$$

con lo que substituyendo en la ecuación inicial resulta que: $5a = 4 \rightarrow a = = 4/5$ , y entonces la I.G. será:

$$P(t) = P^*(t) + P_p = e^{-2t}(A\cdot\cos t + B\cdot\sin t) + \frac{4}{5} \text{ .}$$

Para las condiciones dadas en el enunciado, se tendrá que:

$$P(0) = A + \frac{4}{5} = 2; \quad A = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5};$$

$$P'(t) = -2 \cdot e^{-2t}(A \cdot \cos t + B \cdot \sin t) + e^{-2t}(B \cdot \cos t - A \cdot \sin t) =$$
$$= e^{-2t}(-2A \cdot \cos t - 2B \cdot \sin t + B \cdot \cos t - A \cdot \sin t)$$

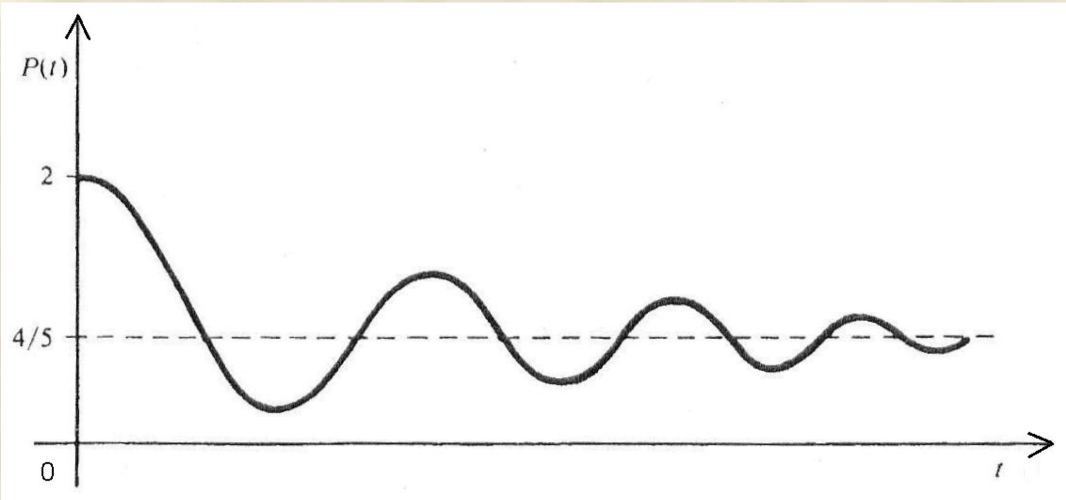
$$P'(0) = -2A + B = 1 \; ; \; B = 1 + \frac{12}{5} = \frac{17}{5};$$

y la I.P. resultante, que es la solución pedida del modelo, es la siguiente:

$$P(t) = e^{-2t}\left(\frac{6}{5} \cdot \cos t + \frac{17}{5} \cdot \sin t\right) + \frac{4}{5} \; .$$

En este caso, se tendrá un precio de equilibrio, a largo plazo, de: $P_e = \lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{4}{5}$ = 0’80 € , y el precio oscilará alrededor de este valor.

La representación gráfica de la trayectoria temporal del precio es:




Trayectoria o evolución temporal del precio.

UNED TORTOSA

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 6

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (VI)

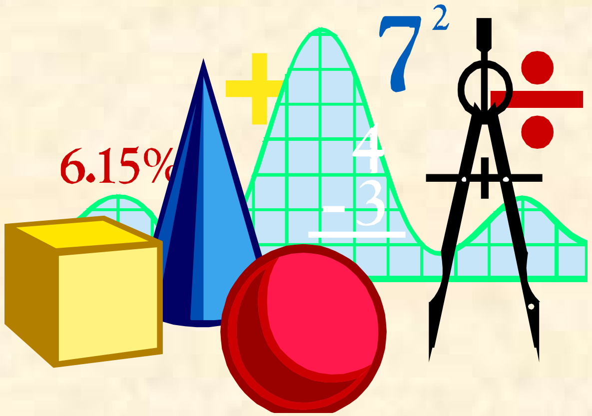
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## *3.3. b(x) ES UN POLINOMIO EN x*

En este caso, se ensayará un polinomio del mismo grado de b(x), pero si el primer miembro carece de y, aumentaremos el grado de cada término en una unidad; si careciese de y e y' aumentaríamos el grado de cada término en dos unidades, etc.

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación diferencial: $y' = x + y$

*Solución:*

Se trata de una ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes, que se puede escribir de la forma:

$$y' - y = x \; ;$$

resolviendo la ecuación homogénea, se tiene:

$$\lambda - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1 \;\rightarrow\; y^* = c \cdot e^x$$

Para hallar una solución particular de la no homogénea:

$$\begin{cases} y_p = ax + b \\ y'_p = a \; ; \end{cases}$$

$a - ax - b = x$ ; $-ax + a - b = x$ ; $-a = 1 \;\rightarrow\; a = -1$ ; $a - b = 0 \;\Rightarrow\; b = -1$ , o sea:

$y_p = -x - 1$, con lo que:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c \cdot e^x - x - 1} \rightarrow \text{I.G.}$$

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 4x + 7$$

*Solución:*

Se empieza por resolver la homogénea correspondiente. A partir de la ecuación característica o modular:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

se obtiene la integral de la ecuación homogénea, puesto que:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad ; \; y^* = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$

Investiguemos ahora una solución particular; para ello ensayamos el polinomio (de igual grado que el 2º miembro):

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax + b \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación original, se obtiene:

$$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 + 4x + 7$$

Identificando los coeficientes de los términos de igual grado, se tendrá:

$$\begin{cases} 2a = 2 & \text{(coeficientes de } x^2\text{)} \\ -6a + 2b = 4 & \text{(coeficientes de } x\text{)} \\ 2a - 3b + 2c = 7 & \text{(términos independientes)} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior se obtienen los valores:

$$a = 1,\ b = 5,\ c = 10$$

Luego resulta:

$$y_p = x^2 + 5x + 10\ ,$$

que es una solución particular de la ecuación completa.

La integral general, como se ha dicho en el apartado anterior, se obtiene como suma de la general de la homogénea y de una particular de la completa (o no homogénea). Por tanto:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{x} + x^2 + 5x + 10} \rightarrow \text{I.G.}$$

Ejemplo 3:

Sea resolver la ecuación:

$$\overbrace{\frac{d^4y}{dx^4}}^{y^{IV}} - 2\cdot\overbrace{\frac{d^3y}{dx^3}}^{y^{III}} = x^2;$$

*Solución:*

La ecuación característica o modular de la homogénea es, en este caso:

$\lambda^4 - 2\cdot\lambda^3 = 0$ , que proporciona las raíces reales:

$\lambda^3 (\lambda - 2) = 0$; con lo que: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ; $\lambda_4 = 2$ ;

Consecuentemente, a la raíz triple 0 le corresponden las integrales particulares siguientes:

$y_1 = e^{0x} = 1$; $y_2 = x\cdot e^{0x} = x$; $y_3 = x^2\cdot e^{0x} = x^2$

Ahora, para determinar una solución particular de la ecuación completa, empezaríamos por formar un polinomio de segundo grado, $ax^2 + bx + c$, puesto que el segundo miembro b(x) de la ecuación problema es precisamente de 2º grado. Pero como el primer miembro de dicha ecuación carece de y, y' e y'', aumentamos el grado de cada término en tres unidades; luego la solución particular a investigar será:

$y_p = ax^5 + bx^4 + cx^3$, siendo sus derivadas sucesivas:

$$\begin{cases} y'_p = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 \\ y''_p = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx \\ y'''_p = 60ax^2 + 24bx + 6c \\ y''''_p = 120ax + 24b \end{cases}$$

Luego, substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$120ax + 24b - 120ax^2 - 48bx - 12c = x^2$$

$$-120a = 1 \;; \quad 120a - 48b = 0 \;; \quad 24b - 12c = 0$$

de donde resultan: $a = -\dfrac{1}{120}, \quad b = -\dfrac{1}{48}, \quad c = -\dfrac{1}{24}$

Luego la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot e^{2x} - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{24}x^3} \rightarrow \text{I.G.}$$

## Ejemplo 4:

Sea resolver la ecuación:

$$y^{III} - y' = 2 \ .$$

*Solución:*

La ecuación característica o modular es:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \ ; \quad \lambda\cdot(\lambda^2 - 1) = 0 \ ;$$
$$\lambda^2 = 1, \text{ con lo que se tiene: } \lambda_1 = 0; \ \lambda_2 = 1; \ \lambda_3 = -1;$$

La solución de la homogénea, será, entonces:

$$y^* = c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-x}$$

Para determinar una solución de la ecuación completa ensayaríamos una solución de la forma y = c (polinomio de grado cero), pero como el primer miembro carece de término en y, aumentaremos en una unidad su grado, esto es, ensayaremos:

$$y_p = c\cdot x \ ; \quad y'_p = c \ ; \quad y''_p = y'''_p = 0$$
de donde - c = 2, o sea c = -2, esto es: $y_p = -2x$.

La integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-x} - 2x} \rightarrow \text{I.G.}$$

Ejemplo 5:

Solve the ordinary differential equation: $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2$ .

*Solution:*

The complementary (homogeneous) function is: $y^* = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x}$ (the roots of the characteristic function are: $\lambda = 1, -4$).

To find a particular integral of the equation, note that the right hand member is $b(x) = x^2$. This suggest that the particular integral will contain a term in $x^2$ and perhaps other terms obtained by successive differentiation. We shall assume it to be of the form: $y = Ax^2 + Bx + C$, where the constants A, B, C are to be determined.

Substitute: $y_p = Ax^2 + Bx + C$, $y'_p = 2Ax + B$, $y''_p = 2A$, in the differential equation to obtain:

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 \text{ , } -4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = x^2$$

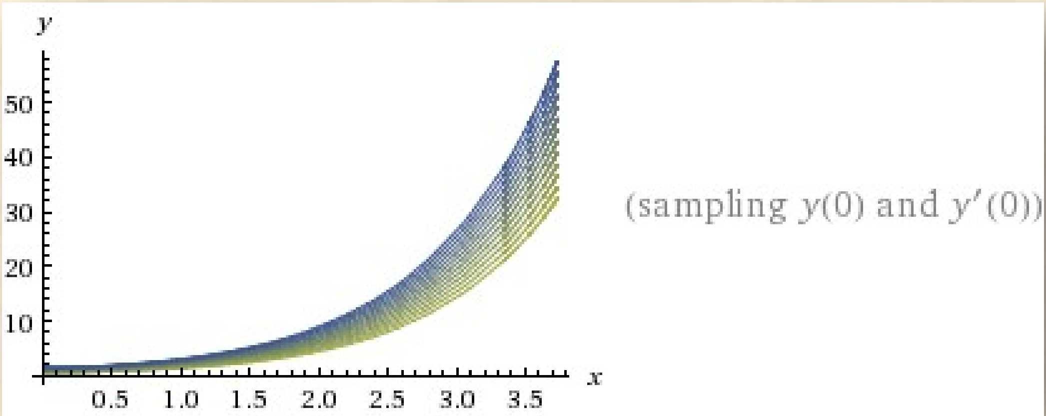
Since this is an identity in x, $-4A = 1$, $6A - 4B = 0$, $2A + 3B - 4C = 0$.

Then: $A = -\frac{1}{4}$ , $B = -\frac{3}{8}$ , $C = -\frac{13}{32}$ , and $y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$ is a particular integral of the equation.

Thus, the general solution is:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1e^x + c_2e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}}$$

The graphical representation of the sample solution family is:



## Ejemplo 6:

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$ .

*Solución:*

$$\frac{dy}{dx} = \int (3x+2)dx = 3\frac{x^2}{2} + 2x + c_1 \quad ; \qquad dy = \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x + c_1\right)dx \text{ ; o sea:}$$

$$\boxed{y} = \int\left(\frac{3}{2}x^2 + 2x + c_1\right)dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 = \boxed{\frac{x^3}{2} + x^2 + c_1x + c_2} \quad \rightarrow \text{I.G.}$$

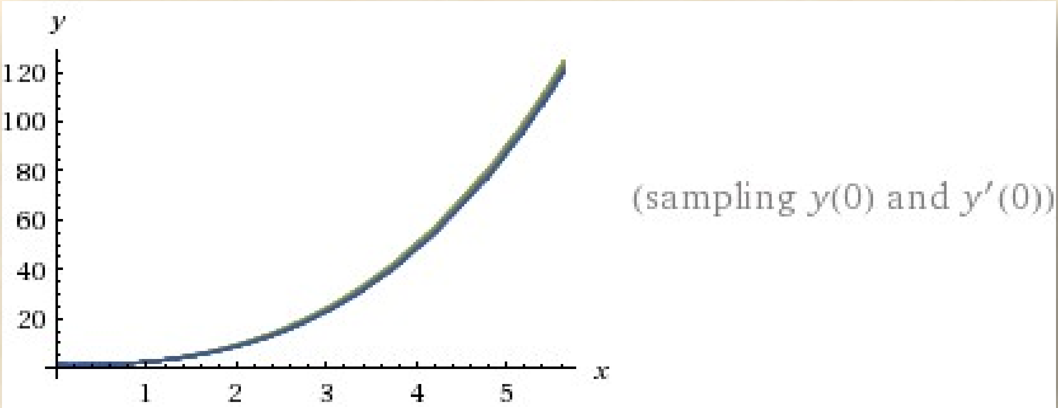
También se podría resolver considerando la solución de la homogénea mediante la ecuación característica: $\lambda^2 = 0$ ; o sea: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ; $y^* = c_1 \cdot x + c_2$ ; y ensayando la solución particular adecuada y sus derivadas sucesivas, puesto que faltan los términos en y e y' (por lo que aumentaremos en dos unidades el grado del polinomio en cuestión), a saber:

$$\begin{cases} y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y'_p = 3ax^2 + 2bx + c \\ y''_p = 6ax + 2b \end{cases}$$

$6ax + 2b = 3x + 2$ ; o sea; $a = ½$; $b = 1$; $c = d = 0$; con lo que la integral general buscada será:

$$\boxed{y} = y^* + y_p = \boxed{c_1x + c_2 + \frac{x^3}{2} + x^2} \text{ , c.s.q.d.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



## Ejemplo 7:

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x - x^2$ .

*Solución:*

La ecuación característica o modular de la homogénea, ofrece:

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1) = 0 \;; \quad \text{o sea: } \lambda_1 = 0 \;; \quad \lambda_2 = 1 \;;$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea subiendo un grado (puesto que el primer miembro de la E.D. propuesta carece del término en *y*):

$$\begin{cases} y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ y'_p = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y''_p = 6Ax + 2B \end{cases}$$

que substituyendo en la ecuación inicial, ofrece:

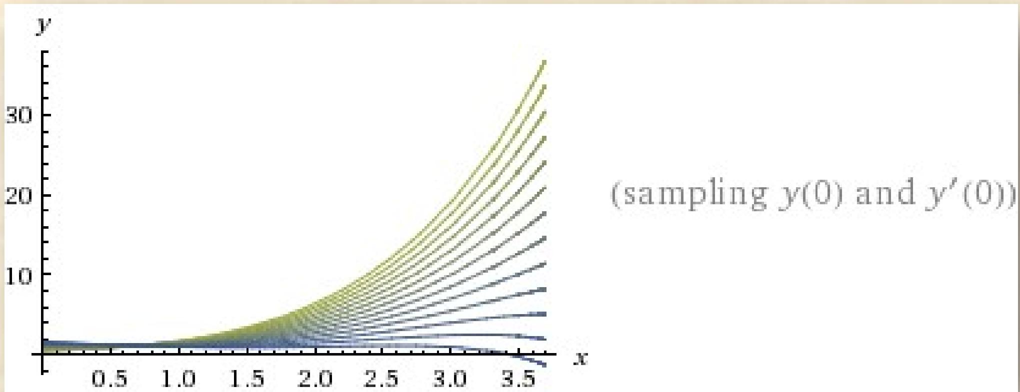
$6Ax + 2B - 3Ax^2 - 2Bx - C = 2x - x^2$; $-3A = -1$

$-3Ax^2 + (6A - 2B)x + 2B - C = 2x - x^2$; $\boxed{A = 1/3}$

$6A - 2B = 2 = 2 - 2B \Rightarrow \boxed{B = 0 \;; D = 0 \;; C = 0}$; y la integral general buscada será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^x + \frac{x^3}{3}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 8:

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 6x + 23$ .

*Solución:*

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \;;\; \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea:

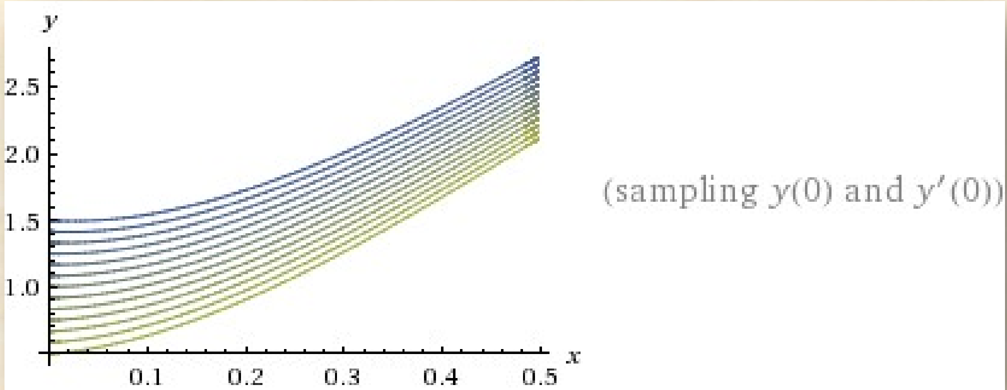
$$\begin{cases} y_p = ax + b \\ y'_p = a \\ y''_p = 0 \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene: $4a + 3ax + 3b = 6x + 23$; o sea:

$a = 2$; $8 + 3b = 23$; $b = \frac{23-8}{3} = 5$ ; luego $y_p = 2x + 5$, y la integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-3x} + 2x + 5}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:



Ejemplo 9:

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = x^2 - 5$

*Solución:*

La solución de la homogénea ya se ha hallado en otro problema del presente curso. Pero como el primer miembro carece de término en **y**, en el ensayo de la solución particular del segundo miembro aumentaremos el grado de cada término en una unidad, con lo que probaremos, en definitiva, la solución particular:

$$\begin{cases} y_p = ax^3 + bx^2 + cx \\ y'_p = 3ax^2 + 2bx + c \\ y''_p = 6ax + 2b \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene:

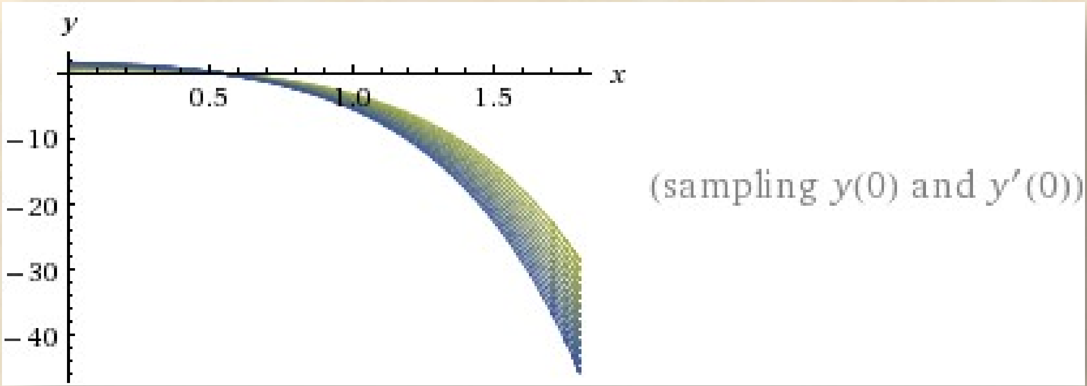
$$6ax + 2b - 6ax^2 - 4bx - 2c = x^2 - 5; \quad -6ax^2 + (6a - 4b)x + 2b - 2c = x^2 - 5; \quad \text{de donde:}$$

$$\boxed{a = -\frac{1}{6}}\ ; \quad 6a = 4b = 1; \boxed{b = -\frac{1}{4}}\ ; \ 2c = 2b + 5 = -\frac{1}{2} + \frac{10}{2} = \frac{9}{2}\ ; \boxed{c = \frac{9}{4}}$$

De este modo, la integral general buscada será:

$$y = y^* + y_p = \boxed{c_1 + c_2 \cdot e^{2x} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{9x}{4}}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



## Ejemplo 10:

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $y'' + y' = 3x^2 - x$.

*Solución:*

Como el primer miembro carece de término en y, aumentaremos el grado de la solución particular, con lo que ensayaremos una expresión del tipo:

$$\begin{cases} y_p = ax^3 + bx^2 + cx \\ y'_p = 3ax^2 + bx + c \\ y''_p = 6ax + 2b \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene:

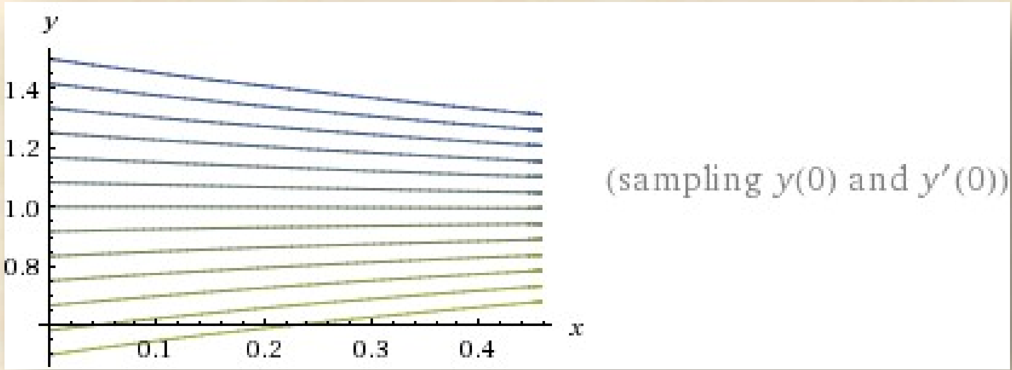
$$6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c = 3x^2 - x \ ; \ \ 3ax^2 + (6a + 2b)x + 2b + c = 3x^2 - x \ ; \text{ de dónde:}$$

$$a = 1 \ ; \ 6a + 2b = -1 \ ; \ 2b = -7 \ ; \ \boxed{b = -\frac{7}{2}} \ ; \ \ c = -2b = 7 \ ;$$

y puesto que: $y^* = c_1 + c_2 \cdot e^{-x}$, es la integral de la ecuación homogénea, ya que la ecuación característica es : $\lambda^2 + \lambda = \lambda\ (\lambda + 1) = 0$, con las raíces: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$, se tendrá una integral general:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^{-x} + x^3 - (7/2)x^2 + 7x} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



Ejemplo 11:

Resolver la ecuación diferencial y el problema de valor inicial siguiente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = b(x) \text{ , } / \, b(x) = \begin{cases} 8\pi - 4x; \forall x / 0 < x < 2\pi \\ 0; \forall x \geq 2\pi \end{cases} \text{ , con } \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

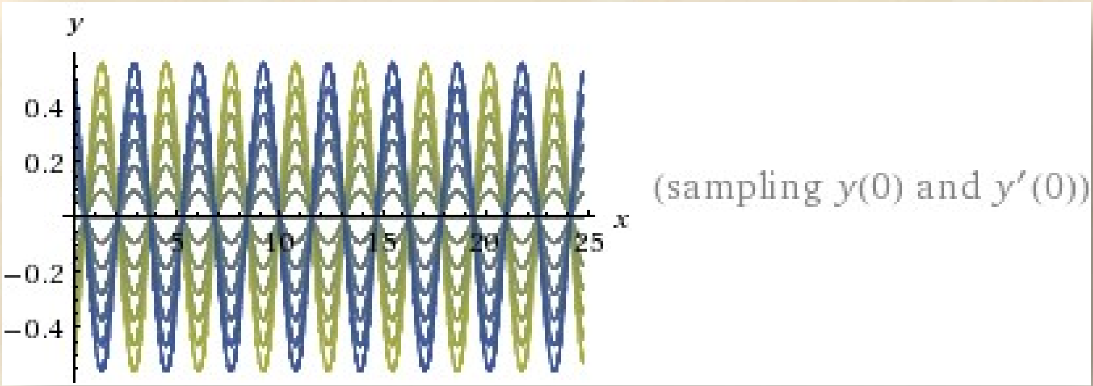
*Solución:*

a) Se presentan, pues, sendos casos según el valor que adopta la función b(x): vamos a resolver la ecuación homogénea, lo que sucederá:

$$\forall \; x \geq 2\pi \; ; \quad \lambda^2 + 4 = 0 \; ; \quad \lambda = \pm\, 2i \; ; \qquad \text{con } \alpha = 0 \text{ y } \beta = 2 \; ;$$

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}(A\cdot\cos \beta x + B\cdot\sin \beta x) = c_1\cdot\cos 2x + c_2\cdot\sin 2x}$$

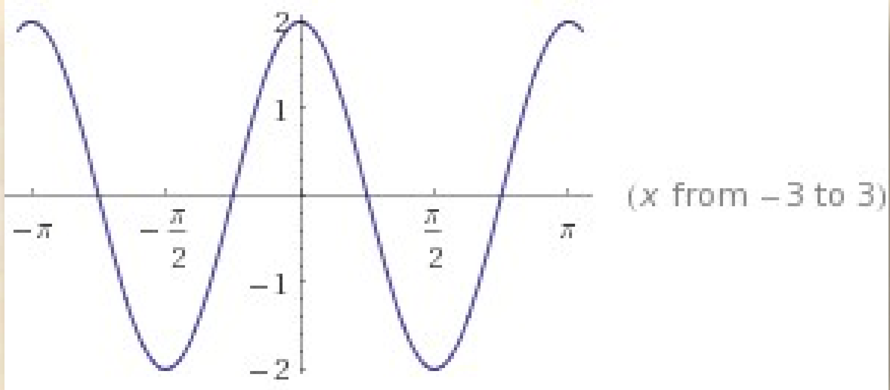
La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:

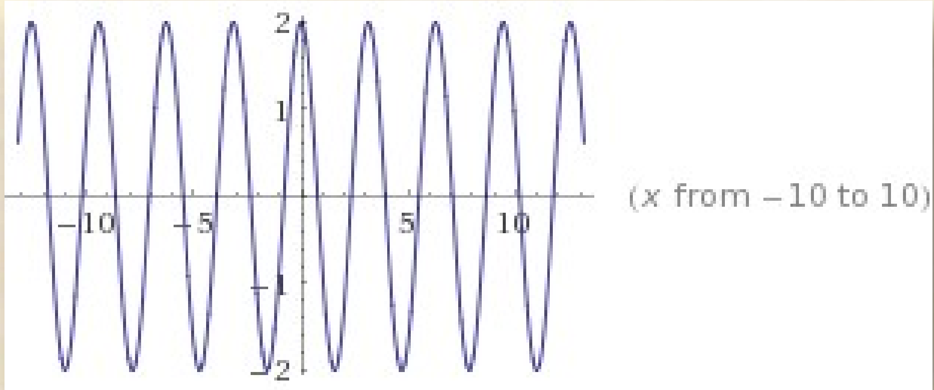



Por otra parte, de las condiciones iniciales dadas se desprende que:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 2 \\ y'(x) = -2c_1\cdot\sin 2x + 2c_2\cdot\cos 2x \\ y'(0) = 2c_2 = 0 \; ; \quad c_2 = 0 \; ; \end{cases}$$

con lo que: $\boxed{y = 2\cdot\cos 2x}$ . La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):




b) La no homogénea o completa tiene lugar $\forall x \,/\, 0<x<2\pi$. Como el primer miembro carece de término en y' aumentaremos el grado del polinomio de la solución particular a ensayar en una unidad, esto es:

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

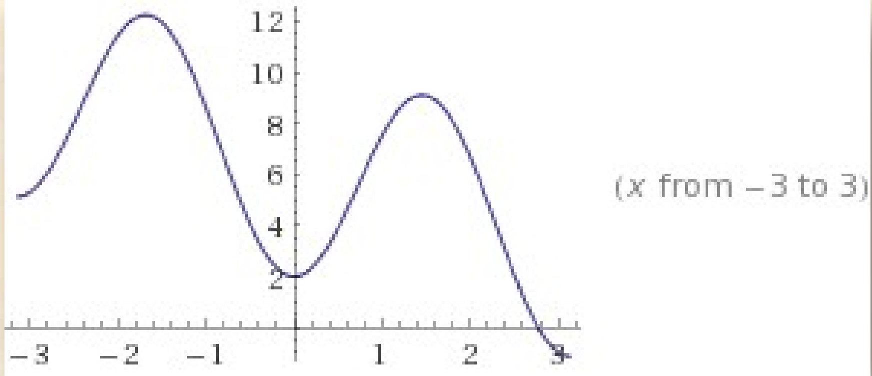
$$2a + 4ax^2 + 4bx + 4c = -4x + 8\pi \;;\quad b = -1 \;;\quad a = 0 \;;$$

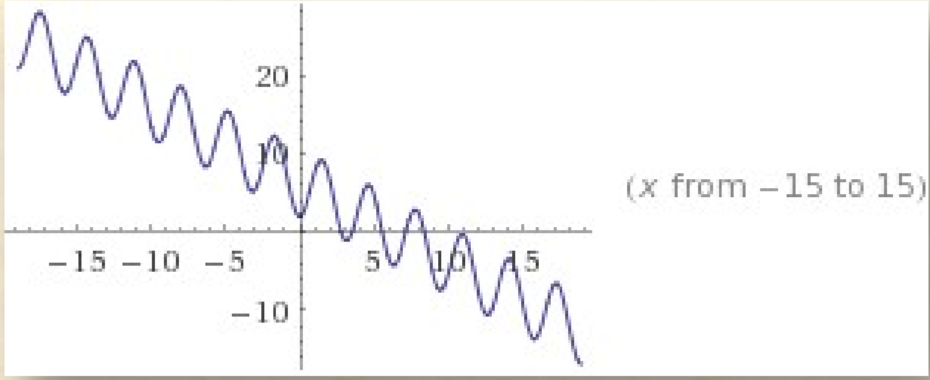
$$2a + 4c = 8\pi \;;\quad c = 2\pi \;;\quad \text{y entonces:}$$

$$\begin{cases} y(x) = y^* + y_p = c_1\cdot\cos 2x + c_2\cdot\sin 2x - x + 2\pi \\ y(0) = c_1 + 2\pi = 2 \;;\quad c_1 = 2(1-\pi) \\ y'(x) = -2c_1\cdot\sin 2x + 2c_2\cdot\cos 2x - 1 \\ y'(0) = 2c_2 - 1 = 0 \;;\quad c_2 = \tfrac{1}{2} \text{, con lo que resulta la I.P. buscada:} \end{cases}$$

$$\boxed{y = (2-2\pi)\cos 2x + \frac{\sin 2x}{2} - x + 2\pi}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):




<u>Ejemplo 12:</u>

Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''' - 4y'' - 5y' = 3, \text{ con:} \\ y(0) = y''(0) = 0 \ ; \ \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

*Solución:*

La ecuación característica de la homogénea, es:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda = 0 = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \ ; \quad \lambda_1 = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$$y^* = c_1 + c_2 \cdot e^{5x} + c_3 \cdot e^{-x} \ ;$$

Ensayaremos una solución particular de la no homogénea, del tipo:

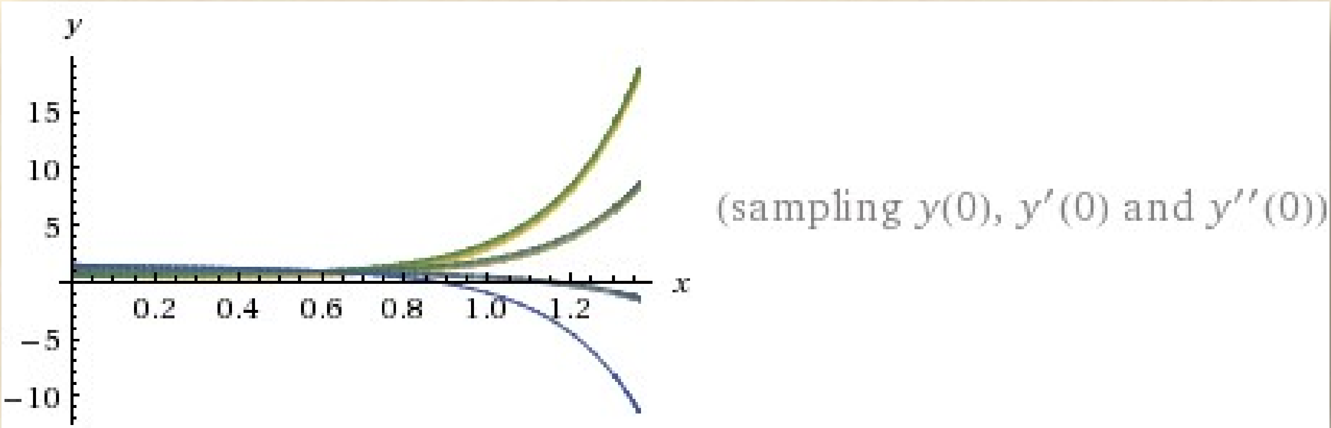
$$\begin{cases} y_p = ax + b \quad \text{(pues no hay término en y)} \\ y'_p = a \\ y''_p = 0 \\ y'''_p = 0 \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

-5a = 3 ;   a = -3/5 ;   b = 0 ; de donde se deduce la I.G.:

$$y(x) = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^{5x} + c_3 \cdot e^{-x} - \frac{3x}{5} \ .$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:




Las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

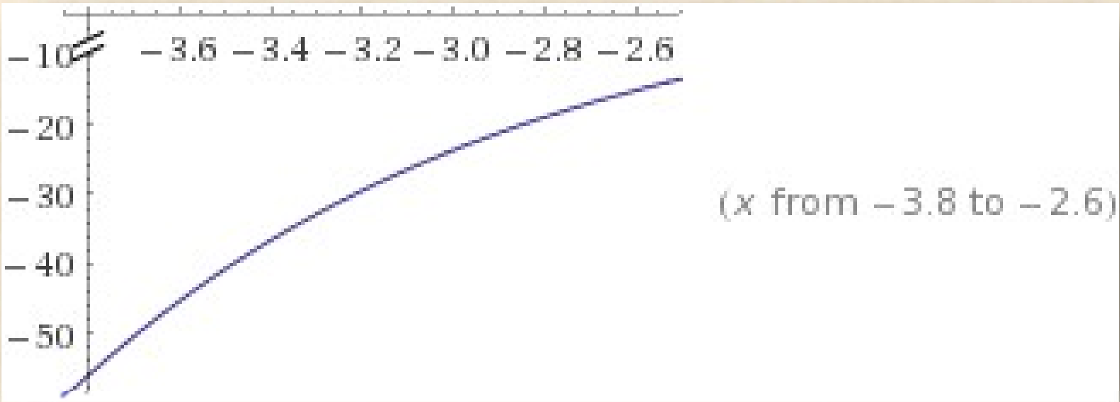
$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0 \ ; \\ y'(x) = 5c_2 \cdot e^{5x} - c_3 \cdot e^{-x} - 3/5 \ ; \\ y'(0) = 5c_2 - c_3 - 3/5 = 1 \ ; \\ y''(x) = 25c_2 \cdot e^{5x} + c_3 \cdot e^{-x} \\ y''(0) = 25c_2 + c_3 = 0 \ ; \end{cases}$$

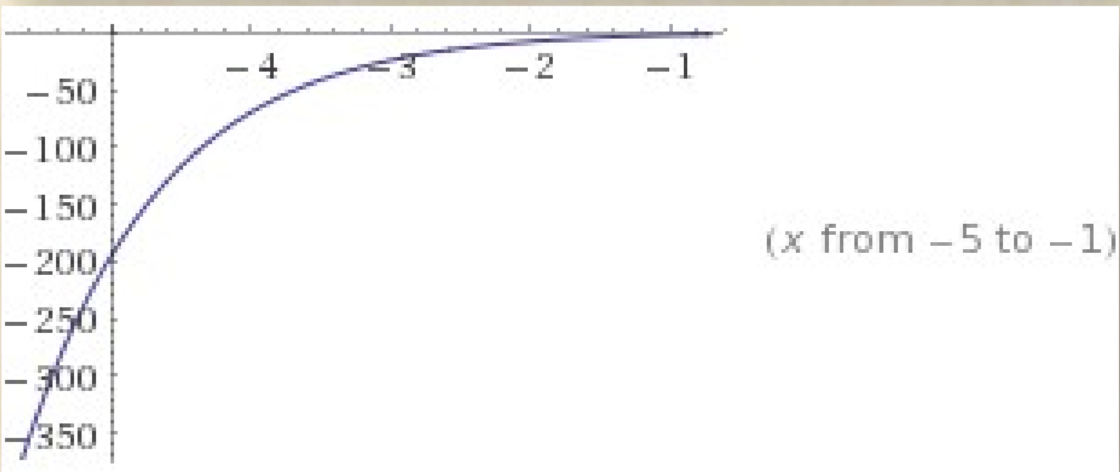
Con ello se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 5c_2 - c_3 = 8/5 \\ 25c_2 + c_3 = 0 \end{array}\right\} \quad c_3 = -4/3\ ; \quad c_2 = 4/75\ ; \quad c_1 = 32/25\ ;$$

$$\boxed{y(x) = \frac{32}{25} + \frac{4 \cdot e^{5x}}{75} - \frac{4 \cdot e^{-x}}{3} - \frac{3x}{5}}$$

que constituye la I.P. buscada. La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Ejemplo 13:

Resolver la EDO: $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.

*Solución:*

Se empieza por resolver la ecuación homogénea correspondiente:

$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$, para lo cual se forma la ecuación característica o modular siguiente:

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$, que admite las raíces reales: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

La solución de la homogénea es, pues: $y^* = e^x(C_1 + C_2x) + C_3e^{2x}$.

Para investigar una solución particular de la ecuación completa, como el segundo miembro es un polinomio de primer grado y la ecuación característica no admite $\lambda = 0$ como raíz, se ensaya un polinomio genérico precisamente de grado uno, esto es: $y_p = ax + b$; de aquí:
$y'_p = a \; ; \; y''_p = y'''_p = 0$ .

Substituyendo ahora en la ecuación inicial, se obtiene que:

$0 - 4\cdot0 + 5a - 2(ax + b) = 2x + 3$. Identificando los coeficientes de los términos de igual grado, resulta que: $-2a = 2$; $5a - 2b = 3$, de donde $a = -1$ y $b = -4$. Luego $y_p = -x - 4$. La solución general será, pues:

$$\boxed{y = y^* + y_p = e^x(C_1 + C_2x) + C_3e^{2x} - x - 4}\ .$$

### *3.4. b(x) ES UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE LA FORMA $k\cdot e^{ax}$*

Entonces se ensaya una solución particular de la forma: $y_p = h\cdot e^{ax}$ ,

en donde h se determina identificando coeficientes indeterminados; pero si **a** es raíz de la ecuación característica o modular, de orden de multiplicidad **m**, la solución que se debe investigar es del tipo:

$$y_p = h\cdot x^m\cdot e^{ax} .$$

Ejemplo 14:

Sea resolver: $y'' - 5y' + 6y = 2e^{4x}$

*Solución:*

La ecuación característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ proporciona $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$; como 4 no es raíz de dicha ecuación se ensaya directamente:

$$y_p = h\cdot e^{4x} \; ; \; y'_p = 4h\cdot e^{4x} \; ; \; y''_p = 16\cdot he^{4x} .$$

Luego substituyendo en la ecuación diferencial inicial, se tiene que:

$$16he^{4x} - 20he^{4x} + 6he^{4x} = 2e^{4x} \; ; \; \text{de donde se deduce que: } 2h\cdot e^{4x} = 2e^{4x} \; ; \quad h = 1 \; ;$$

y la solución particular será: $y_p = e^{4x}$.

La integral general será: $\boxed{y = y^* + y_p = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{2x} + e^{4x}} \rightarrow$ I.G.

Ejemplo 15:

Sea ahora resolver: $y^{III} - 4y^{II} + 4y^{I} = 3 \cdot e^{2x}$.

*Solución:*

La ecuación característica o modular vendrá dada por:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0, \text{ o lo que es lo mismo: } \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \; ;$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \text{ y, obviamente, también } \lambda_3 = 0$$

y como 2, es raíz doble de dicha ecuación característica, ensayaremos:

$$\begin{cases} y_p = hx^2e^{2x} \\ y'_p = 2hxe^{2x} + 2hx^2e^{2x} \\ y''_p = 2he^{2x} + 8hxe^{2x} + 4hx^2e^{2x} \\ y'''_p = 12he^{2x} + 24hxe^{2x} + 8hx^2e^{2x} \end{cases}$$

de donde substituyendo en la ecuación diferencial inicial, se tiene:

$$e^{2x}(12h + 24hx + 8hx^2 - 8h - 32hx - 16hx^2 + 8hx + 8hx^2) = 3e^{2x}$$

o bien: $4h = 3$, de donde: $h = 3/4$.

Luego la integral general será: $\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + c_3 + \frac{3}{4} e^{2x} \cdot x^2} \rightarrow$ I.G.

UNED TORTOSA

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 7

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (VII)

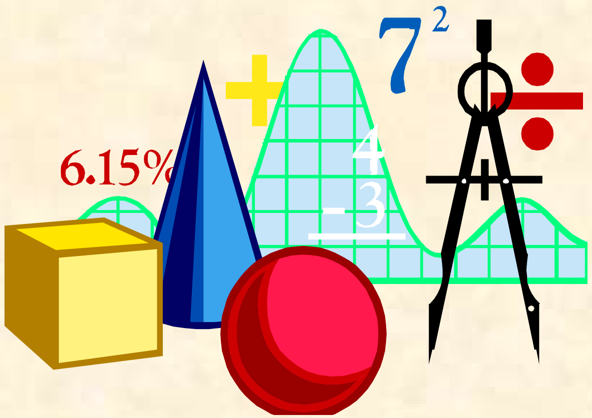
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





### *3.5. b(x) ES UNA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA DE LA FORMA (A·cos bx + B·sin bx)*

Entonces se ensaya una solución de la forma:

$$y_p = h\cdot\cos bx + k\cdot\sin bx\ ,$$

pero si $b_i$ es raíz de la ecuación característica de orden de multiplicidad **m**, se ensayará dicha solución multiplicada por $x^m$.

Ejemplo 1:

Sea, como ejemplo, resolver la ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 2y' + 5y = 3\sin x$$

*Solución:*

La ecuación característica, $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, proporciona las raíces imaginarias conjugadas siguientes:

$$\lambda_1 = 1 + 2i\ ;\quad \lambda_2 = 1 - 2i\ (\alpha = 1,\ \beta = 2),$$

o sea, la integral general de la homogénea será:

$$y^* = e^x\cdot(c_1\cdot\cos 2x + c_2\cdot\sin 2x)$$

Para determinar una solución particular de la completa se ensaya:

$$\begin{cases} y_p = h\cdot\cos x + k\cdot\sin x \\ y'_p = -h\cdot\sin x + k\cdot\cos x \\ y''_p = -h\cdot\cos x - k\cdot\sin x \end{cases}$$

substituyendo, ahora, en la ecuación diferencial inicial, se tiene que:

$$-h\cdot\cos x - k\cdot\sin x - 2(-h\cdot\sin x + k\cdot\cos x) + 5h\cdot\cos x + 5k\cdot\sin x = 3\sin x\ ;$$
$$2h\cdot\sin x - k\cdot\sin x + 5k\cdot\sin x - h\cdot\cos x - 2k\cdot\cos x + 5h\cdot\cos x = 3\sin x\ ;$$
$$(2h - k + 5k)\cdot\sin x + (5h - h - 2k)\cdot\cos x = 3\sin x\ ;$$

$$\begin{array}{ll} 2h + 4k = 3 & 2h + 4k = 3 \\ 4h - 2k = 0 & \underline{8h - 4k = 0} \\ & 10\,h = 3 \ \rightarrow \ \boxed{h = \frac{3}{10}} \end{array}$$

Así mismo: $2k = 4h$ ;

o sea: $\boxed{k = 2h = \frac{3}{5}}$

Identificando ahora coeficientes de cos x y de sin x, se obtiene: $y_p = \frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x$

y la integral general buscada será:

$$\boxed{y = e^x\cdot(c_1\cdot\cos 2x + c_2\cdot\sin 2x) + \frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x} \ \rightarrow \text{I.G.}$$

Ejemplo 2:

Propongámonos, ahora, resolver la ecuación diferencial: $y'' + y = \cos x$ .

*Solución:*

Como la ecuación característica, $\lambda^2 + 1 = 0$, proporciona las raíces imaginarias conjugadas: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, la solución particular de la completa que se deberá ensayar es del tipo:

$$\begin{cases} y_p = hx \cdot \cos x + kx \cdot \sin x \, ; \\ y'_p = h \cdot \cos x - hx \cdot \sin x + k \cdot \sin x + kx \cdot \cos x \, ; \\ y''_p = -h \cdot \sin x - h \cdot \sin x - hx \cdot \cos x + k \cdot \cos x + k \cdot \cos x - kx \cdot \sin x = \\ \qquad = -2h \cdot \sin x + 2k \cdot \cos x - hx \cdot \cos x - kx \cdot \sin x. \end{cases}$$

Substituyendo, ahora, en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$2h \cdot \sin x + 2k \cdot \cos x - hx \cdot \cos x - kx \cdot \sin x + hx \cdot \cos x + kx \cdot \sin x = \cos x,$$

de donde:

$$-2h \cdot \sin x + 2k \cdot \cos x = \cos x \, ;$$

$$-2h = 0 \Rightarrow \mathbf{h = 0} \, ; \; 2k = 1 \Rightarrow \mathbf{k = 1/2}$$

Luego la integral general será:

$$\boxed{y = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x + \frac{1}{2} x \cdot \sin x} \quad \to \text{I.G.}$$

Del mismo modo, si se tratara de resolver la ecuación: y'' + y = sin x, al ensayar la misma solución particular se obtiene:

$$\boxed{y = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x - \frac{x}{2} \cdot \cos x} \quad \to \text{I.G. ,}$$

y si, por último, se trata de resolver la ecuación: y'' + y = sin 2x, se obtendría:

$$\boxed{y = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x - \frac{1}{3} \cdot \sin 2x} \quad \to \text{I.G. ,}$$

siendo suficiente, en este caso, ensayar la solución particular:

$$y_p = k \cdot \sin 2x \, .$$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} = -9 \cdot \sin\ 3x.$

*Solución:*

Integrando sucesivamente, se tiene que: $\frac{dy}{dx} = -9\int \sin 3x \cdot dx = 3\cos 3x + c_1$

y entonces:

$$\boxed{y = 3\int \cos 3x \cdot dx + c_1x + c_2 = \sin 3x + c_1x + c_2} \rightarrow \text{I.G.}$$

A la misma conclusión llegaríamos considerando la ecuación constante: $\lambda^2 = 0$ ; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ; $y^* = c_1x + c_2$ ; y ensayando la solución particular de la completa:

$$\begin{cases} y_p = h \cdot \cos 3x + k \cdot \sin 3x \\ y'_p = -3h \cdot \sin 3x + 3k \cdot \cos 3x \\ y''_p = -9h \cdot \cos 3x - 9k \cdot \sin 3x \end{cases}$$

que substituyendo en la ecuación inicial, ofrece:

$-9h \cdot \cos 3x - 9k \cdot \sin 3x = -9 \cdot \sin 3x$ ; de donde:

$\boxed{\begin{matrix} h = 0 \\ k = 1 \end{matrix}} \rightarrow y_p = \sin 3x$ ; y la integral general, como siempre, será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = \sin 3x + c_1x + c_2}$$ , c.s.q.d.

### *3.6. b(x) COMO COMBINACIÓN LINEAL*

Finalmente, si el segundo miembro de la ecuación diferencial problema resulta ser una combinación lineal de los tipos anteriores, para obtener una solución particular basta con formar la suma o el producto de las soluciones particulares correspondientes a cada uno de los sumandos o factores. Veámoslo a continuación:

Ejemplo 4:

Resolver, determinando una solución particular, la ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = x \cdot e^x$

*Solución:*

La solución de la ecuación homogénea se obtiene de $\lambda^2 - 4 = 0$, de donde $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$; por tanto es: $y^* = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x}$; para determinar una solución particular, ensayaremos la expresión mixta: $y_p = e^x(ax + b)$, de donde: $\frac{dy_p}{dx} = e^x(ax + a + b)$; $\frac{d^2y_p}{dx^2} = e^x(ax + 2a + b)$

, que substituida en la ecuación diferencial inicial, ofrece: $e^x(ax + 2a + b) - 4e^x(ax + b) = x \cdot e^x$ , de donde se deduce que :

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases}$$

y por tanto, $a = -1/3$, $b = -2/9$.

La solución general será, pues:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x} - e^x \cdot \left( \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \right)} \rightarrow \text{I.G.}$$

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dt} = (x^3 - 2x + 1)\cdot e^{-x}$

*Solución:*

La ecuación característica o modular de la homogénea ofrece:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \ ; \quad \lambda_1 = 0 \ ; \quad \lambda_2 = 2 \ ;$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$y_p = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\cdot e^{-x}$$

$$y^I_p = (3ax^2 + 2bx + c)\cdot e^{-x} - (ax^3 + bx^2 + cx + d)\cdot e^{-x} =$$
$$= e^{-x}(3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d)$$

$$y^{II}_p = e^{-x}(6ax + 2b - 3ax^2 - 2bx - c) -$$
$$- e^{-x}(3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d) =$$
$$= e^{-x}(6ax + 2b - 3ax^2 - 2bx - c - 3ax^2 - 2bx - c + ax^3 + bx^2 + cx + d) =$$
$$= e^{-x}(ax^3 - 6ax^2 + bx^2 - 4bx + 6ax + bx^2 + cx + d)$$

Substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$e^{-x}(ax^2 - 6ax^2 + bx^2 - 4bx + 6ax + cx + 2b - 2c + d) -$$
$$- 2\cdot e^{-x}(3ax^2 + 2bx + c - ax^3 - bx^2 - cx - d) = (x^3 - 2x + 1)\cdot e^{-x};$$

$$ax^3 - 6ax^2 + bx^2 - 4bx + 6ax + cx + 2b - 2c +$$
$$+ d - 6ax^2 - 4bx - 2c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = x^3 - 2x + 1;$$

$$3ax^3 - 12ax^2 + 3bx^2 - 8bx + 6ax + 3cx + 2b - 4c + 3 = x^3 - 2x + 1;$$

$$3ax^3 + (3b - 12a)x^2 + (6a - 8b + 3c)x + 2(b - 2c) + 3d = x^3 - 2x + 1;$$

$$6a - 8b + 3c = -2; \quad 2 - 32/3 + 3c = -2; \quad 6 - 32 + 9c = -6; \quad 3b = 12a = 4;$$

$$9c = 32 - 6 - 6 = 20; \quad 2b - 4c + 3d = 1; \quad 3d = 1 - 2b + 4c = 1 - 8/3 + 80/9;$$

$$\boxed{a = \frac{1}{3}; \quad b = \frac{4}{3}; \quad c = \frac{20}{9};} \qquad \boxed{d = \frac{1}{3} - \frac{8}{9} + \frac{80}{27} = \frac{9}{27} - \frac{24}{27} + \frac{80}{27} = \frac{65}{27}}$$

De este modo, la integral general buscada vendrá dada por la expresión:

$$y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^{2x} + \left( \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{3} + \frac{20x}{9} + \frac{65}{27} \right) \cdot e^{-x}$$

También existen las ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes variables (ecuación de Euler-Cauchy, que es un caso particular de la ecuación de Lagrange), homogéneas o completas, que veremos en la lección siguiente del presente curso.

## Ejemplo 6

Resolver, para $\omega \neq \omega_0$, el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} x'' + \omega_0^2 \cdot x = k \cdot \sin \cdot \omega \cdot t, \ \forall \ t > 0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

que describe las oscilaciones forzadas de una masa en un resorte no amortiguado. ¿Qué pasa si $\omega = \omega_0$?

*Solución:*

El presente problema puede resolverse por aplicación del método de las transformadas de Laplace, teniendo en cuenta que:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cdot \cos\ at) \quad ,$$

tal como consta en la tabla de transformadas laplacianas que se adjunta en el Apéndice 3. En cualquier caso, su resolución por el método clásico de los coeficientes indeterminados plantea una ecuación característica de la homogénea del tipo:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \text{y:} \quad \left.\begin{matrix} \lambda_1 = \omega_0 \cdot i \\ \lambda_2 = -\omega_0 \cdot i \end{matrix}\right\} \quad \lambda = \alpha \pm \beta i \ ; \ \text{con } \alpha = 0 \ ; \ \beta = \omega_0 \ ;$$

Y la solución de la homogénea será: $x^* = A \cdot \cos \omega_0 \cdot t + B \cdot \sin \omega_0 \cdot t$ ;

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea, del tipo:

$$\begin{cases} x_p = a(h \cdot \cos \omega t + q \cdot \sin \omega t) \\ x'_p = a(-h \cdot \omega \cdot \sin \omega t + q \cdot \omega \cdot \cos \omega t) \\ x''_p = a(-h \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t - q \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t) \end{cases}$$

y substituyendo ahora en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$a(-h\cdot\omega^2\cdot\cos\omega t - q\cdot\omega^2\cdot\sin\omega t) + a(h\cdot\omega_0{}^2\cdot\cos\omega t + q\cdot\omega_0{}^2\cdot\sin\omega t) =$$
$$= -a\cdot h\cdot\omega^2\cdot\cos\omega t - a\cdot q\cdot\omega^2\cdot\sin\omega t + a\cdot h\cdot\omega_0{}^2\cdot\cos\omega t + a\cdot q\cdot\omega_0{}^2\cdot\sin\omega t =$$
$$= k\cdot\sin\omega t\ ;\ \text{ o sea: } k = a\cdot q(\omega_0{}^2 - \omega^2)\ ;$$

$$q = \frac{k}{a(\omega_0^2 - \omega^2)}\ ;\quad h = 0\ ;\quad \text{y entonces: } x_p = \frac{k\cdot\sin\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}\quad \text{; y la I.G. buscada será:}$$

$$x(t) = x^* + x_p = A\cdot\cos\omega_0 t + B\cdot\sin\omega_0 t + \frac{k\cdot\sin\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Por aplicación de las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} x(0) = A = 0 \\ x'(t) = -A\cdot\omega_0\cdot\sin\omega_0 t + B\cdot\omega_0\cdot\cos\omega_0 t + \dfrac{k\cdot\omega\cdot\cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ x'(0) = B\cdot\omega_0 + \dfrac{k\cdot\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0\ ;\ B = -\dfrac{k\cdot\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{cases}$$

con lo que se tendrá la integral particular:

$$\boxed{x(t) = \frac{k\cdot\omega_0\cdot\sin\omega t}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} - \frac{k\cdot\omega\cdot\sin\omega_0 t}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{k}{\omega_0} \times \frac{\omega_0\cdot\sin\omega t - \omega\cdot\sin\omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2}}\quad (\text{si } \omega \neq \omega_0).$$

Por último, veamos que en el supuesto planteado de que: $\omega = \omega_0$, en la solución expuesta tendría lugar una indeterminación del tipo: 0/0. De hecho, en el ensayo de la solución particular de la no homogénea o completa debería tenerse en cuenta que: $\omega i = \omega_0 i$ es raíz de la ecuación característica de la homogénea, por lo que se debería ensayar la solución particular del tipo:

$$\begin{cases} x_p = a\cdot t(h\cdot\cos\omega t + q\cdot\sin\omega t) \\ x'_p = a(h\cdot\cos\omega t + q\cdot\sin\omega t) + a\cdot t(-h\cdot\omega\cdot\sin\omega t + q\cdot\omega\cdot\cos\omega t) \\ x''_p = a(-h\cdot\omega\cdot\sin\omega t + q\cdot\omega\cdot\cos\omega t) + a(-h\cdot\omega\cdot\sin\omega t + q\cdot\omega\cdot\cos\omega t) + \\ + a\cdot t(-h\cdot\omega^2\cdot\cos\omega t - q\cdot\omega^2\cdot\sin\omega t)\ ; \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$2a(-h\cdot\omega\cdot\sin\omega t + q\cdot\omega\cdot\cos\omega t) - a\cdot t(h\cdot\omega^2\cdot\cos\omega t + q\cdot\omega^2\cdot\sin\omega t) +$$
$$+ a\cdot t(h\cdot\omega_0^2\cdot\cos\omega t + q\cdot\omega_0^2\cdot\sin\omega t) = k\cdot\sin\omega t\ ;$$

pero como $\omega = \omega_0$, quedará: $-2ah\cdot\omega\cdot\sin\omega t + 2aq\cdot\omega\cdot\cos\omega t = k\cdot\sin\omega t$ ; de donde:

$q = 0$ ; $-2ah\cdot\omega = k$ ; $h = -\dfrac{k}{2a\omega}$ ; y entonces se tendrá que: $x_p = -\dfrac{k\cdot at}{2a\omega}\cdot\cos\omega t = -\dfrac{k\cdot t\cdot\cos\omega\cdot t}{2\omega}$ ,

y la I.G. se formulará mediante la expresión:

$$x(t) = x^* + x_p = A\cdot\cos\omega_0 t + B\cdot\sin\omega_0 t - \frac{k\cdot t\cdot\cos\omega_0 t}{2\omega_0}\ .$$

Por aplicación de las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} x(0) = A = 0 \\ x'(t) = -A\cdot\omega_0\cdot\sin\omega_0 t + B\cdot\omega_0\cdot\cos\omega_0 t - \dfrac{k\cdot\cos\omega_0 t - k\cdot t\cdot\omega_0\cdot\sin\omega_0 t}{2\omega_0} \\ x'(0) = B\cdot\omega_0 - \dfrac{k}{2\omega_0} = 0\ ;\quad B = \dfrac{k}{2\omega_0^2}\ ; \end{cases}$$

y resultaría la integral particular buscada siguiente:

$$\boxed{x(t) = \frac{k}{2\omega_0^2}\cdot\sin\omega_0 t - \frac{k\cdot t\cdot\omega_0\cdot\cos\omega_0 t}{2\omega_0^2} = \frac{k}{2\omega_0^2}(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cdot\cos\omega_0 t)}\quad (\text{si } \omega = \omega_0).$$

## Ejemplo 7

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* € de un producto, respecto a su oferta *x* (en miles de ud.), viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $y'' - 6y' + 9y = x^2 \cdot e^{3x}$. Se pide: a) calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 2'00 €, no existe oferta alguna de dicho producto y que, en este caso, la pendiente de la curva de oferta es igual a 6, y b) calcular la elasticidad puntual cuando la oferta es de 2.000 ud.

*Solución:*

a) Se trata, en definitiva, de resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = x^2 \cdot e^{3x} \\ y(0) = 2 \ ; \quad y'(0) = 6 \ ; \end{cases}$$

La ecuación característica de la homogénea, es:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}, \text{ y su solución será:}$$

$$y^* = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x} \ .$$

Ensayaremos ahora una solución particular que sea combinación lineal de soluciones, habida cuenta de la naturaleza del segundo miembro (producto de un polinomio por una función exponencial), así como para evitar indeseables fenómenos de resonancia, con lo que:

$$y_p = (ax^2 + bx + c) \cdot x^2 \cdot e^{3x} = e^{3x}(ax^4 + bx^3 + cx^2) \ ;$$

$$y'_p = 3 \cdot e^{3x}(ax^4 + bx^3 + cx^2) + e^{3x}(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) =$$
$$= e^{3x}(3ax^4 + 3bx^3 + 3cx^2 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)$$

$$y''_p = 3\cdot e^{3x}(3ax^4 + 3bx^3 + 3cx^2 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) +$$
$$+ e^{3x}(12ax^3 + 9bx^2 + 6cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) =$$
$$= e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 12ax^3 + 9bx^2 + 6cx +$$
$$+ 12ax^3 + 9bx^2 + 6cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) =$$
$$= e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 +$$
$$+ 12cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) ;$$

y substituyendo los valores obtenidos en la ecuación inicial, se tiene que:

$$e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 + 12cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) -$$
$$- e^{3x}(18ax^4 + 18bx^3 + 18cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 + 12cx) +$$
$$+ e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2) = e^{3x}(12ax^2 + 6bx + 2c) = e^{3x}\cdot x^2 ;$$

$12ax^2 + 6bx + 2c = x^2$ ; o sea: $a = 1/12$ ; $b = 0$ ; $c = 0$ ; con lo que resultará la integral general:

$$y(x) = y^* + y_p = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot x\cdot e^{3x} + \frac{e^{3x}\cdot x^4}{12} .$$

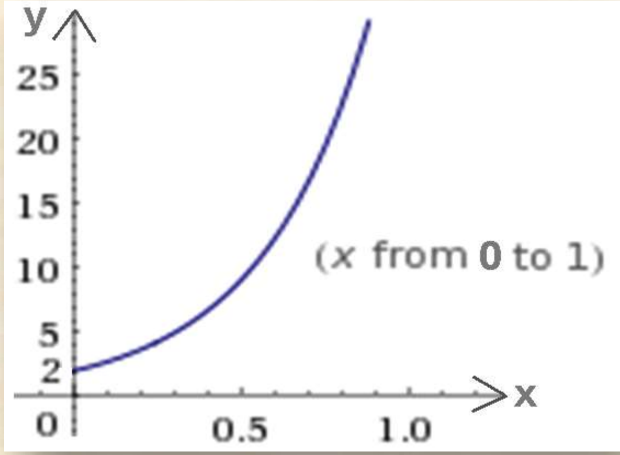
Ahora bien, las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 2 ; \\ y'(x) = 3\cdot c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{3x} + 3c_2\cdot x\cdot e^{3x} + \dfrac{3\cdot e^{3x}\cdot x^4 + 4x^3\cdot e^{3x}}{12} ; \\ y'(0) = 3c_1 + c_2 = 6 ; \quad c_2 = 0 ; \end{cases}$$

y resultará, en definitiva, la I.P. buscada:

$$\boxed{y(x) = 2\cdot e^{3x} + \frac{e^{3x}\cdot x^4}{12} = \frac{e^{3x}(24 + x^4)}{12}}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):




Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es:

$$m = \underset{x\to+\infty}{\text{lím.}} \frac{y}{x} = \underset{x\to+\infty}{\text{lím.}} \frac{e^{3x}(24+x^4)}{12x} = +\infty$$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) Se tiene que: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{3x}(3x^4+4x^3+72)}{12}$ ;

$$\frac{dx}{dy} = \frac{12}{e^{3x}(3x^4+4x^3+72)}$$ ; y entonces: $$e_O = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{12}{e^{3x}(3x^4+4x^3+72)} \times \frac{e^{3x}(24+x^4)}{12x} =$$

$$= \frac{24+x^4}{3x^5+4x^4+72x} = \frac{24+16}{96+64+144} = 0'13 < 1,$$

por lo que resulta *relativamente inelástica*, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción menor.

## Ejemplo 8

Se pide: a) Hallar la función de oferta de un bien normal expresada así: $y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}(\sin x + \cos x)$, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades/día, que verifica las condiciones iniciales siguientes: $y(0) = 1$ € , $y'(0) = 2$ € ; b) teniendo en cuenta la función de demanda siguiente: $y = -8x^3 - 10x^2 - 7x + 8$, estudiar el equilibrio del mercado y la elasticidad de la demanda en dicho punto de equilibrio; c) los ingresos brutos anuales del productor, con un calendario laboral de 240 días/año.

*Solución*:

a) La ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$.
Las raíces (complejas imaginarias conjugadas mixtas) de la ecuación característica son: $2 \pm i$, luego la solución general de la ecuación homogénea es la siguiente:

$$y^* = e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Al coincidir la parte imaginaria de las raíces con el coeficiente de x en el seno y el coseno, la solución particular a ensayar de la ecuación completa puede ser, para evitar molestos fenómenos de resonancia:

$$y_p = xe^{2x}(A \sin x + B \cos x).$$

Al derivar dos veces, substituir en la ecuación inicial e identificar los coeficientes de los términos con igual parte literal, se obtienen los valores de los coeficientes indeterminados, que son,
$A = 1$, $B = -1$, como puede comprobar el amable lector/a.

Así pues la solución particular de la ecuación completa es: $y_p = xe^{2x} (\sin x – \cos x)$.

Sumándole la solución general de la homogénea antes hallada, obtenemos la integral general de la ecuación diferencial dada, que resulta ser la siguiente:

$$y = y^* + y_p = e^{2x} [(C_1 + x) \sin x + (C_2 – x) \cos x].$$

Al derivar esta función y hacer $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, se obtienen los valores de las constantes arbitrarias, $C_1 = C_2 = 1$, siendo la solución al problema de valores iniciales propuesto, en definitiva:

$$y(x) = e^{2x} [(1 + x) \sin x + (1 – x) \cos x].$$

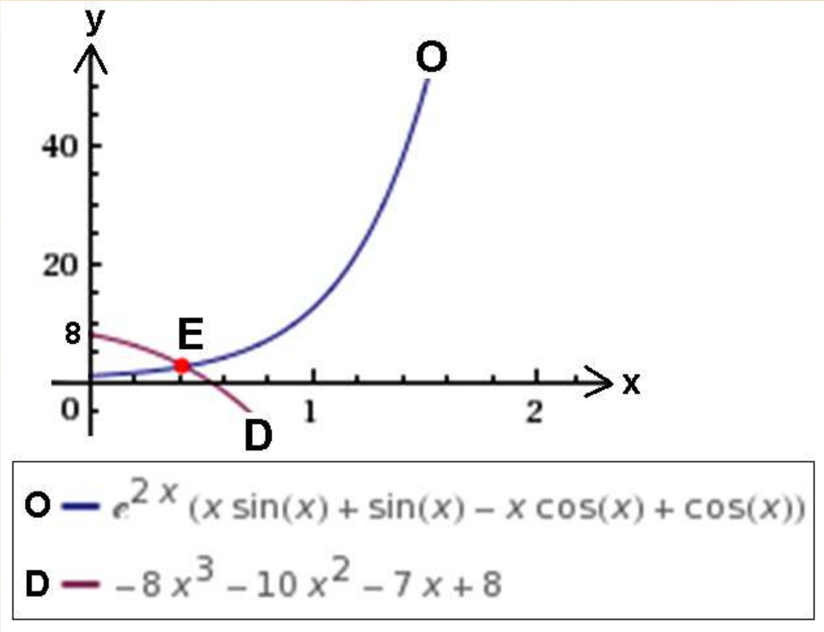
b) La búsqueda del punto de equilibrio del mercado exige, como siempre, que: O = D, esto es:

$$e^{2x} [(1 + x) \sin x + (1 – x) \cos x] = -8x^3 – 10x^2 – 7x + 8 ,$$

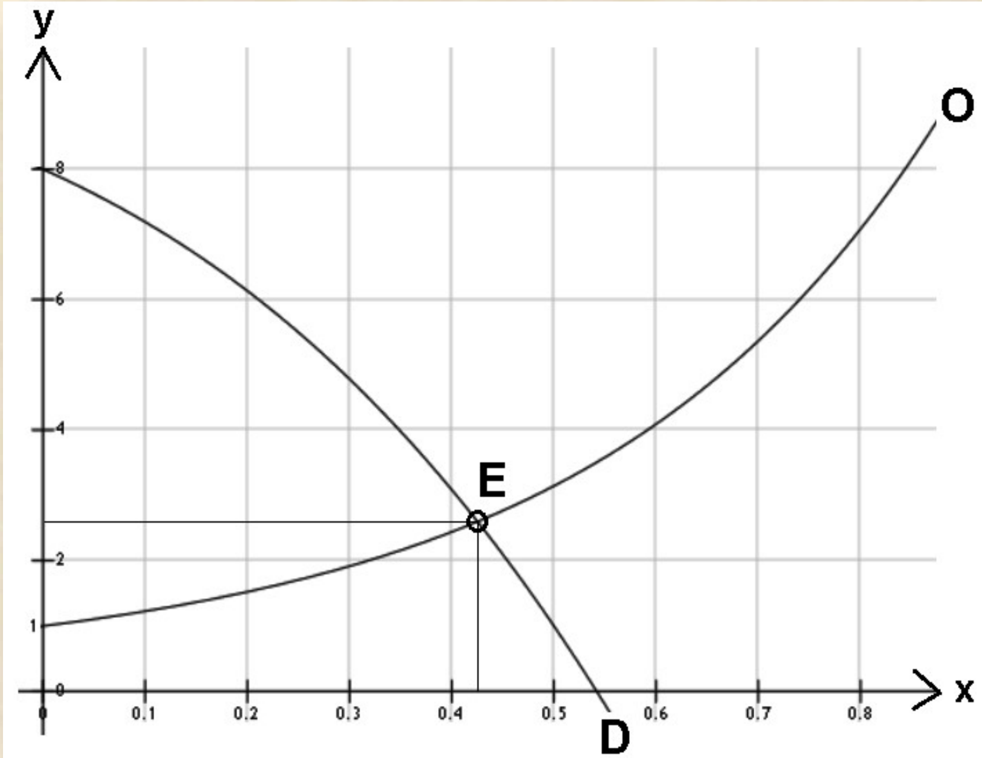
que ofrece las soluciones reales siguientes (tendremos en cuenta solamente la primera de ellas):

$$\begin{cases} x \approx 0.425164333253664\ldots \\ x \approx 3.72553815861385\ldots \\ x \approx 6.92485734534581\ldots \\ x \approx 10.1116014334378\ldots \end{cases}$$

, esto es, a x = 0’425 (425 ud./día) corresponde un precio y = 2’61 €/ud., lo que también puede apreciarse así:




La representación gráfica correspondiente puede verse a continuación con mayor detalle:




Oferta, demanda y punto de equilibrio.

Por último, la elasticidad de la función de demanda en el punto de equilibrio del mercado anteriormente hallado E(0'425, 2'61) vendrá dada por:

D $\Rightarrow$ y = -8x$^3$ – 10x$^2$ – 7x + 8; dy/dx = -24x$^2$ – 20x - 7; $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{24x^2+20x+7}$. Y la elasticidad de la función de demanda será:

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{1}{24x^2+20x+7} \times \frac{-8x^3-10x^2-7x+8}{x} = -0'31 \in (-1,0),$$

por lo que se trata de una demanda *relativamente inelástica*.

c) Los ingresos brutos anuales del productor vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 2'61 €/ud. $\times$ 425 ud./día $\times$ 240 días/año = 266.220 €/año.

UNED TORTOSA

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 8

## ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (VIII)

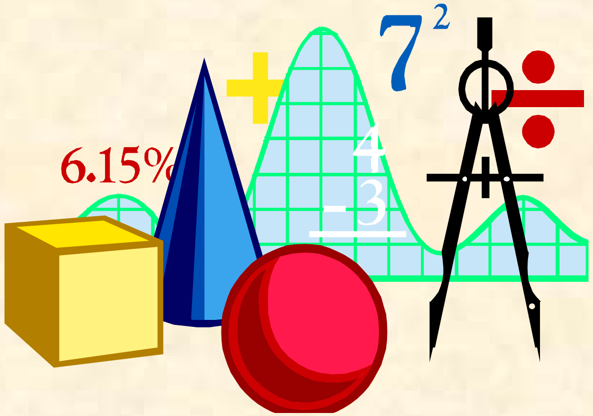
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES VARIABLES

### 1.1. EL POLINOMIO P(D) SE PUEDE DESCOMPONER EN FACTORES LINEALES

**Ejemplo 1**

Sea resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - y = 3x^2$ .

*Solución:*

Esta ecuación puede ser escrita en términos del operador diferencial D, cuya notoria aplicabilidad a la resolución de las EDO veremos en numerosas ocasiones así como en la lección siguiente referida a los sistemas de EDO, con lo que: $(D^2 - x \cdot D - 1)y = 3x^2$.

Supongamos que P(D) sea descomponible: $(D - a)(D - b)y = 3x^2$, de donde:
$(D - a)(Dy - by) = D^2y - b'y - bDy - aDy + aby$.

Para $a = 0$, $b = x$, se observa que: $D(D - x)y = D^2y - y - xDy$.

Luego la ecuación se puede escribir: $D(D - x)y = 3x^2$. Haciendo $(D - x)y = z$, resulta: $Dz = 3x^2$ , de donde: $z = x^3 + c_1$.

Substituyendo: $(D - x)y = z = x^3 + c_1$, o sea: $y' - xy - x^3 - c_1 = 0$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden ya estudiada en temas anteriores y de resolución conocida.

Estos problemas también pueden presentarse del siguiente modo:

**Ejemplo 2 (in english language)**

Show that (a) $y = 2e^x$, (b) $y = 3x$, and (c) $y = C_1 \cdot e^x + C_2 x$, where $C_1$ and $C_2$ are arbitrary constants, are solutions of the ordinary differential equation:

$$(1 - x)y'' + x \cdot y' - y = 0.$$

*Solution:*

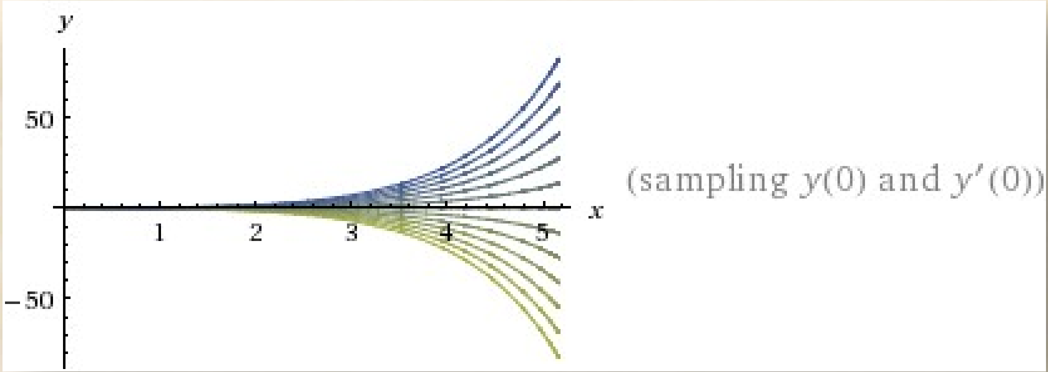
(a) Differentiate $y = 2e^x$ twice to obtain $y' = 2e^x$ and $y'' = 2e^x$. Substitute in the differential equation to obtain the identity: $2e^x(1 - x) + 2e^x x - 2e^x = 0$.

(b) Differentiate y = 3x twice to obtain y' = 3 and y'' = 0. Substitute in the differential equation to obtain the identity: $0(1 - x) + 3x - 3x = 0$.

(c) Differentiate $y = C_1e^x + C_2x$ twice to obtain $y' = C_1e^x + C_2$ , and $y'' = C_1e^x$. Substitute in the differential equation to obtain the identity: $C_1e^x(1 - x) + (C_1e^x + C_2)x - (C_1e^x + C_2x) = 0$.

Solution (c) is the general solution of the differential equation since it satisfies the equation and contains the proper number of essential arbitrary constants. Solutions (a) and (b) are called *particular* solutions since each may be obtained by assigning particular values to the arbitrary constants of the general solution.

The graphical representation of the sample solution family is:




## 1.2. ECUACIÓN DE EULER-CAUCHY

También existen otras ecuaciones diferenciales de coeficientes variables (como la ecuación de Euler-Cauchy, que es un caso particular de la ecuación de Lagrange), ya sean homogéneas o completas, que veremos a continuación.

Se conoce con este nombre una ecuación unidimensional (o aún mejor *equidimensional*) de la forma:

$$a_0(ax+b)^n \frac{d^ny}{dx^n} + a_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(ax+b)^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots +$$

$$+ \ldots + a_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx} + a_ny = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(ax+b)^{n-i}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} + a_ny = F(x)$$

, que se reduce a una EDO lineal de coeficientes constantes, mediante el cambio de variable: $ax + b = z = e^t$. En este caso extensivo, recibe el nombre de “ecuación de Legendre”. Para $a = 1$ y $b = 0$ estaríamos hablando propiamente de la “ecuación de Euler-Cauchy” (E-C).

A continuación, pueden verse los siguientes ejemplos representativos de este tipo de EDO:

**Ejemplo 1**

Sea resolver la ecuación: $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ .

*Solución:*

Haciendo el cambio de variable $x = e^t$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{e^{2t}}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{e^{3t}}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right]$$

que substituidas en la ecuación dada resulta:

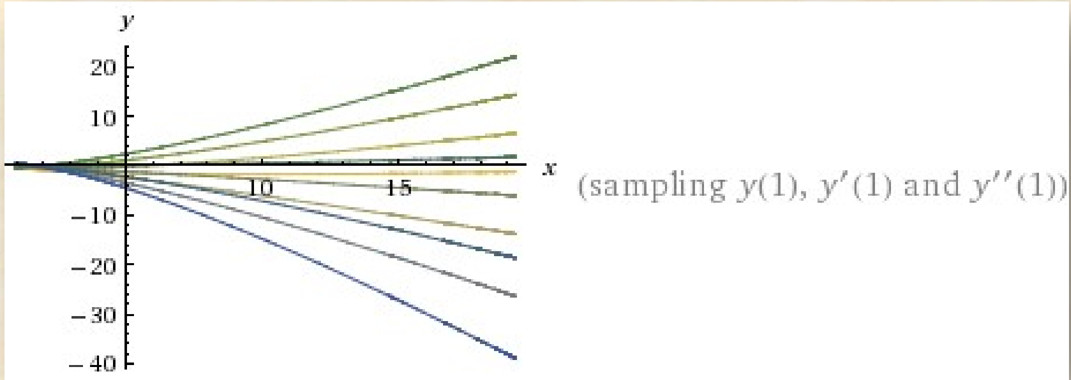
$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ , cuya ecuación característica:

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$, proporciona las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Por tanto:

$y = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t + c_3 \cdot e^{-2t}$, y como $x = e^t$, $t = \ln x$, resultará que:

$$\boxed{y = c_1 x + c_2 x \cdot \ln x + c_3 \frac{1}{x^2}} \quad \to \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



**Ejemplo 2**

Sea ahora resolver: $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=18x\cdot\ln x$, por el método de variación de constantes.

*Solución:*

Como la ecuación homogénea correspondiente se ha resuelto en el ejercicio anterior, obteniéndose la solución:

$$y=c_1x+c_2x\cdot\ln x+\frac{c_3}{x^2}$$

vamos a aplicar aquí el método de variación de constantes, a saber:

$$y'=\frac{dy}{dx}=c_1+c_2\cdot\ln x+c_2-\frac{2c_3}{x^2} \qquad (1)$$

después de hacer:

$$\frac{dc_1}{dx}x+\frac{dc_2}{dx}x\cdot\ln x+\frac{dc_3}{dx}\cdot\frac{1}{x^2}=0 \qquad (2)$$

Derivando de nuevo, se obtiene que: $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{c_2}{x}+\dfrac{6c_3}{x^4}$ (3)

después de hacer: $\dfrac{dc_1}{dx^2}x+\dfrac{dc_2}{dx}(1+\ln x)-2\dfrac{dc_3}{dx}\cdot\dfrac{1}{x^3}=0$ (4)

Finalmente: $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}=-\dfrac{c_2}{x^2}+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{dc_2}{dx}-\dfrac{24c_3}{x^5}+\dfrac{6}{x^4}\cdot\dfrac{dc_3}{dx}$ (5)

Substituyendo (1), (3) y (5) en la ecuación dada se tiene que: $x^2\dfrac{dc_2}{dx}+\dfrac{6}{x}\cdot\dfrac{dc_3}{dx}=18x\cdot\ln x$ (6)

Resuelto el sistema formado por las ecuaciones (2), (4) y (6), tomando como incógnitas:

$$\frac{dc_1}{dx},\ \frac{dc_2}{dx}\ \text{y}\ \frac{dc_3}{dx}$$

, resulta que:

$$\begin{cases} c'_1 = \dfrac{dc_1}{dx} = -\dfrac{2}{x}\ln x - \dfrac{6}{x}(\ln x)^2 \\ c'_2 = \dfrac{dc_2}{dx} = \dfrac{6}{x}\ln x \\ c'_3 = \dfrac{dc_3}{dx} = 2x^2 \ln x \end{cases}$$

que una vez integradas, ofrecen, respectivamente:

$$c_1 = K_1 - (\ln x)^2 - 2(\ln x)^3 \; ; \;\; c_2 = K_2 + 3(\ln x)^2 \; ; \;\; c_3 = K_3 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^3 \ln x$$

y substituidas en la solución de la homogénea, permiten escribir:

$$\boxed{y(x) = \left[K_1 - (\ln x)^2 - 2(\ln x)^3\right]x + \left[K_2 + 3(\ln x)^2\right]x \cdot \ln x + \left[K_3 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^3 \cdot \ln x\right]\frac{1}{x^2}}$$

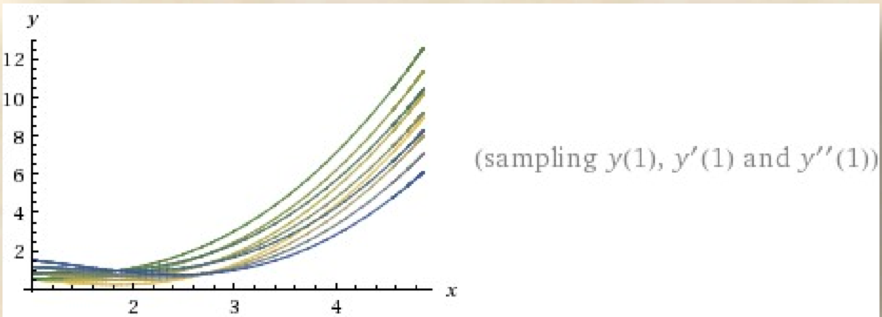
, o bien teniendo en cuenta la arbitrariedad de las constantes:

$$y(x) = \frac{c_1}{x^2} + c_2\, x + c_3\, x \log(x) + \frac{1}{9}\, x\left(9 \log^3(x) - 9 \log^2(x) + 6 \log(x) - 2\right)$$

, o aún más simplificadamente: $\boxed{y(x) = \dfrac{c_1}{x^2} + c_2\, x + c_3\, x \log(x) + x \log^3(x) - x \log^2(x)}$

que es la integral general buscada [la notación log(x) = ln x representa aquí el logaritmo neperiano o natural de la variable independiente x, que no debe confundirse con el correspondiente logaritmo decimal o de Briggs, de igual notación].

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



## Ejemplo 3

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $x\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+4x=0$ .

*Solución:*

De hecho se trata de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, no homogénea, puesto que multiplicando por **x** en ambos miembros, se tiene:

$x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-3x\cdot\frac{dy}{dx}=-4x^2$ ; haciendo el cambio de variable: $x = e^t$ ; $dx = e^t\cdot dt$ ; $t = \ln x$ ;

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}$ ; $y''=\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$ ; con lo que, substituyendo:

$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-3\cdot e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}=-4\cdot e^{2t}$ ; o sea: $\frac{d^2y}{dt^2}-4\cdot\frac{dy}{dt}=-4\cdot e^{2t}$ ,

que ya es una E.D. lineal de coeficientes constantes, con una ecuación característica de la homogénea: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ ; $\lambda_1 = 0$ ; $\lambda_2 = 4$ ; ensayaremos, ahora, la solución particular de la no homogénea o completa del tipo:

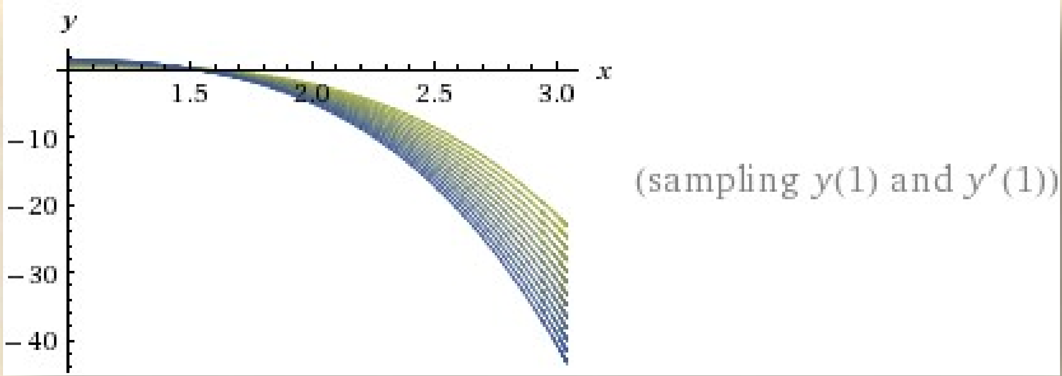
$$\begin{cases} y_p = A\cdot e^{2t} \\ y'_p = 2A\cdot e^{2t} \\ y''_p = 4A\cdot e^{2t} \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación anterior, ofrece: $4A\cdot e^{2t} - 8A\cdot e^{2t} = -4A\cdot e^{2t} = -4\cdot e^{2t}$ ; de donde resulta que:

$\boxed{A = 1}$ , con lo que: $y_p = e^{2t}$ ; y la integral general buscada será:

$$\boxed{y=y^*+y_p=c_1+c_2e^{4t}+e^{2t}=c_1+c_2\cdot x^4+x^2}$$ , c.s.q.d.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:




**Ejemplo 4**

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 8x^2$ .

*Solución:*

De hecho se trata también de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, no homogénea, puesto que multiplicando por x en ambos miembros, se tiene que:

$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - x \cdot \frac{dy}{dx} = 8x^3$ ; haciendo el cambio de variable: $x = e^t$ ; $dx = e^t \cdot dt$ ; $t = \ln x$ ; se tendrá que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \; ; \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$ ; con lo que, substituyendo:

$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = 8 \cdot e^{3t}$ , que ya es una E.D. lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea siguiente: $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ ; de raíces: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$ ; ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{3t} \\ y'_p = 3A \cdot e^{3t} \\ y''_p = 9A \cdot e^{3t} \end{cases}$$

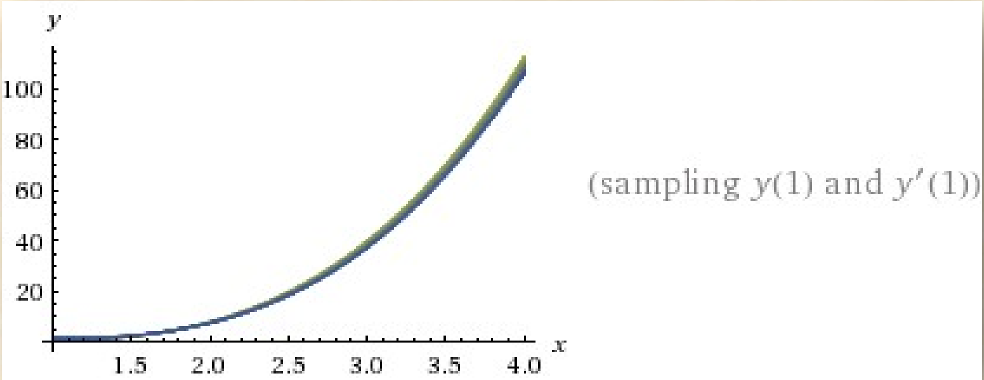
que substituyendo estos valores en la ecuación anterior, ofrece:

$9A \cdot e^{3t} – 6A \cdot e^{3t} = 8 \cdot e^{3t} = 3A \cdot e^{3t}$ ; de donde:

$\boxed{A = 8/3}$ , con lo que: $y_p = (8/3) \cdot e^{3t}$ ; y la integral general será:

$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{8}{3} e^{3t} = c_1 + c_2 \cdot x^2 + \frac{8}{3} x^3}$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones, será:




**Ejemplo 5**

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 8x^3$ .

*Solución:*

Procediendo como en el caso anterior, se tiene: $x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - x \cdot \frac{dy}{dx} = 8x^4$ ;

y después de efectuar el correspondiente cambio de variable, se tiene que: $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = 8 \cdot e^{4t}$ .

En este caso, la solución particular de la no homogénea ofrece:

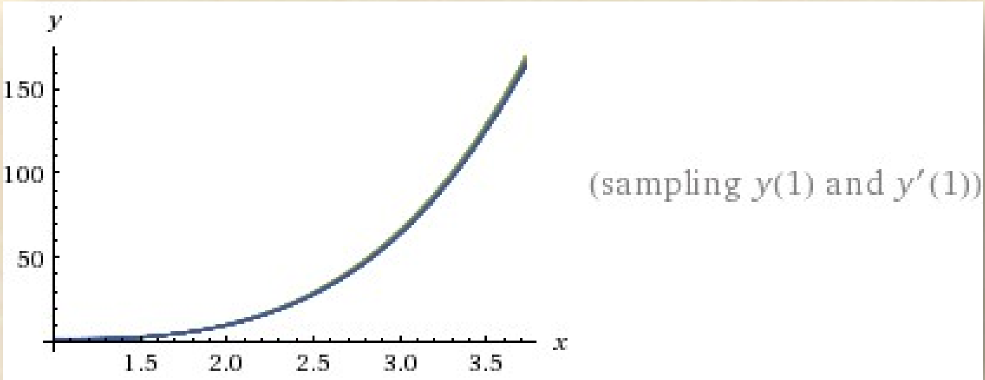
$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{4t} \\ y'_p = 4A \cdot e^{4t} \\ y''_p = 16A \cdot e^{4t} \end{cases}$$

que substituyendo estos valores en la ecuación anterior proporciona:

$$16A \cdot e^{4t} - 8A \cdot e^{4t} = 8 \cdot e^{4t} = 8A \cdot e^{-4t} \text{ ; de donde:}$$

A = 1 , con lo que: $y_p = e^{4t}$ ; y la integral general será: $\boxed{y = y^* + y_p = c_1 + c_2 \cdot e^{2t} + e^{4t} = c_1 + c_2 \cdot x^2 + x^4}$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones, será:




## Ejemplo 6

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' - y = x^3$, y representar gráficamente una solución particular cualquiera.

*Solución:*

Se trata evidentemente de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, no homogénea, por lo que haremos el conocido cambio de variable:

$x = e^t$ ; $dx = e^t \cdot dt$ ; $t = \ln x$ ; y las derivadas sucesivas siguientes:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \quad ; \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \quad ; \qquad y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

con lo que substituyendo en la ecuación inicial, resultará que (la y''' no es necesaria aquí):

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} - y = e^{3t} \quad ,$$

que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la siguiente ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \; ; \; \lambda = \pm\sqrt{1} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^{3t} \\ y'_p = 3 \cdot A \cdot e^{3t} \\ y''_p = 9 \cdot A \cdot e^{3t} \end{cases}$$

que, substituyendo los valores así obtenidos en la ecuación anterior, ofrece:

$9 \cdot A \cdot e^{3t} - A \cdot e^{3t} = e^{3t} = 8 \cdot A \cdot e^{3t}$ ; de donde se deduce que:

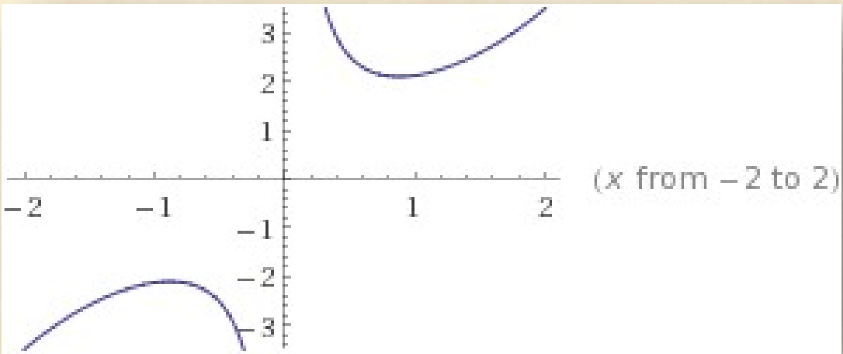
$A = \frac{1}{8}$ , con lo que: $y_p = \frac{e^{3t}}{8}$ ; y la integral general será:

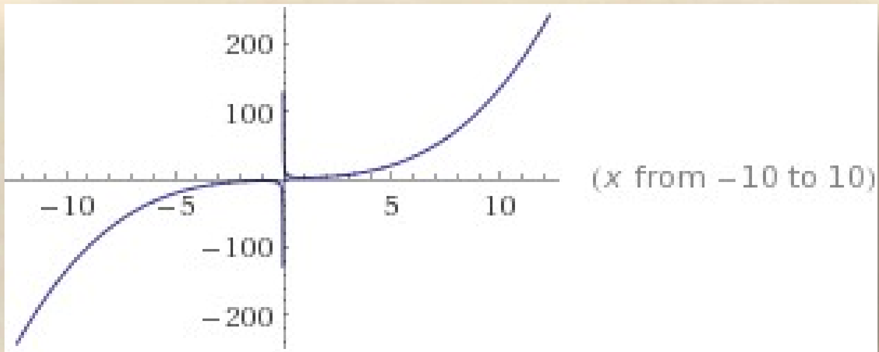
$$\boxed{y = y^* + y_p = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-t} + \frac{e^{3t}}{8} = c_1 \cdot x + \frac{c_2}{x} + \frac{x^3}{8}}$$

Si hacemos ahora, por ejemplo: $c_1 = c_2 = 1$, obtendremos la solución particular siguiente:

$$y(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x^3}{8} \; .$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



## Ejemplo 7

Resolver la ecuación diferencial ordinaria: $4x^2 \cdot y''' - 15 \cdot y' = 4$.

*Solución:*

De hecho, se trata de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, no homogénea, puesto que multiplicando ambos miembros por **x**, se tiene la expresión:

$4x^3 \cdot y''' - 15x \cdot y' = 4x$ ; haciendo el cambio de variable:

$x = e^t$ ; $dx = e^t \cdot dt$ ; $t = \ln x$ ; y las derivadas sucesivas:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \ ; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \ ; \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

por aplicación de la denominada "regla de la cadena", con lo que substituyendo se tiene que:

$$4 \cdot \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt}\right) - 15\frac{dy}{dt} = 4 \cdot e^t \ ; \qquad 4 \cdot \frac{d^3y}{dt^3} - 12 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} = 4 \cdot e^t \ ;$$

que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea:

$4\lambda^3 - 12\lambda^2 - 7\lambda = 0$ ; $\lambda_1 = 0$, y operando por la regla de Ruffini:

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 7 = 0 \ ; \qquad \lambda = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 112}}{8} = \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{7}{2} \\ \lambda_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea, del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A \cdot e^t \\ y'_p = A \cdot e^t \\ y''_p = A \cdot e^t \\ y'''_p = A \cdot e^t \end{cases}$$

que, substituyendo estos valores en la ecuación anterior, ofrece:

$$4A\cdot e^t - 12A\cdot e^t - 7\,A\cdot e^t = 4\cdot e^t = -15A\cdot e^t$$ ; de donde se deduce que:

$$A = -\frac{4}{15}$$ , con lo que: $y_p = -\frac{4e^t}{15}$ ; y la integral general buscada será:

$$y = y^* + y_p = c_1 + c_2\cdot e^{\frac{7}{2}t} + c_3^{-\frac{t}{2}} - \frac{4e^t}{15} = \boxed{c_1 + c_2\cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{c_3}{\sqrt{x}} - \frac{4x}{15}} \quad \rightarrow \text{I.G.}$$

Otra forma alternativa de solucionarlo, sin necesidad de multiplicar previamente la ecuación por **x**, ni de hacer el cambio de variable: $x = e^t$, se produce al ensayar directamente soluciones homogéneas de la forma $y = x^\lambda$ , que dan:

$$y' = \lambda\cdot x^{\lambda-1} \text{ ; } y'' = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} \text{ ; } y''' = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)x^{\lambda-3}$$

y substituyendo se habrá de satisfacer:

$4\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 15\lambda = 0$, que tiene las raíces:

$$\lambda_1 = 0 \text{ ; } \lambda_2 = 7/2 \text{ ; } \lambda_3 = -½ \text{ ;}$$

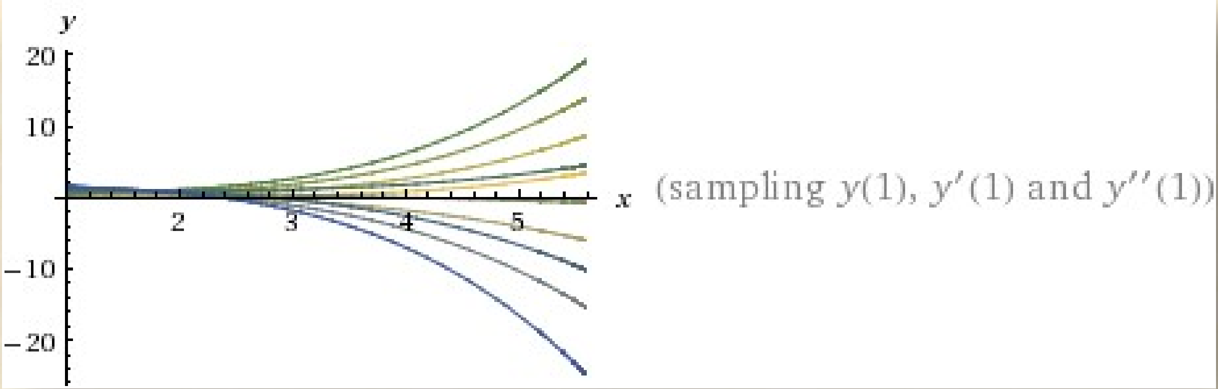
La integral general de la ecuación incompleta, pues, será:

$$y^* = c_1 + c_2\cdot x^{7/2} + c_3\cdot x^{-1/2}$$

Para buscar una solución particular de la completa, veamos que la transformada (después de multiplicar por **x**) tendría un segundo miembro de la forma $4e^t$ y en ella ensayaríamos soluciones de la forma $y = k\cdot e^t$; aquí ensayaremos, pues, soluciones de la forma $y = k\cdot x$ que da inmediatamente: $-15k = 4$, o sea: $k = -4/15$. En resumen, la integral general buscada es la siguiente:

$$\boxed{y = c_1 + c_2\cdot x^{\frac{7}{2}} + c_3\cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{15}x}$$ , c.s.q.d.

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones será:




**Ejemplo 8**

Resolver la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$x^4 \cdot y^{IV} - 11x^2 \cdot y^{II} + 49xy^{I} - 81y = 0.$$

*Solución:*

Se trata de una E.D.O. del tipo Euler-Cauchy, homogénea, por lo que haremos el cambio de variable: $x = e^t$ ; $dx = e^t \cdot dt$ ; $t = \ln x$ ; y las derivadas sucesivas siguientes mediante la aplicación de la “regla de la cadena”:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \;; \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \;;$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \quad ; \quad y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4} = e^{-4t}\left(\frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 11\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt}\right)$$

, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se obtiene la expresión:

$$\frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 11\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} - 11\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 49\frac{dy}{dt} - 81y = 0 \;; \quad \frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 54\frac{dy}{dt} - 81y = 0\,,$$

que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la siguiente ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 54\lambda - 81 = 0 \text{ ; donde: } \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3 \text{ (raíz triple)} \\ \lambda_4 = -3 \end{cases}$$

con lo que la integral general buscada vendrá dada por la expresión:

$$y = c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot t \cdot e^{3t} + c_3 \cdot t^2 \cdot e^{3t} + c_4 \cdot e^{-3t} = c_1 \cdot x^3 + c_2 \cdot x^3 \cdot \ln x + c_3 \cdot x^3 \cdot \ln^2 x + c_4/x^3 =$$

$$= \boxed{x^3(c_1 + c_2 \cdot \ln x + c_3 \cdot \ln^2 x) + c_4/x^3} \rightarrow \text{I.G.}$$

Tal como ya hemos expuesto en ejercicios precedentes, se consigue una resolución más simplificada del presente ejercicio realizando el ensayo: $y = x^\lambda$, que conduce a:

$$\begin{cases} y^{I} = \lambda \cdot x^{\lambda-1} \\ y^{II} = \lambda(\lambda-1) \cdot x^{\lambda-2} \\ y^{III} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \cdot x^{\lambda-3} \\ y^{IV} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \cdot x^{\lambda-4} \end{cases}$$

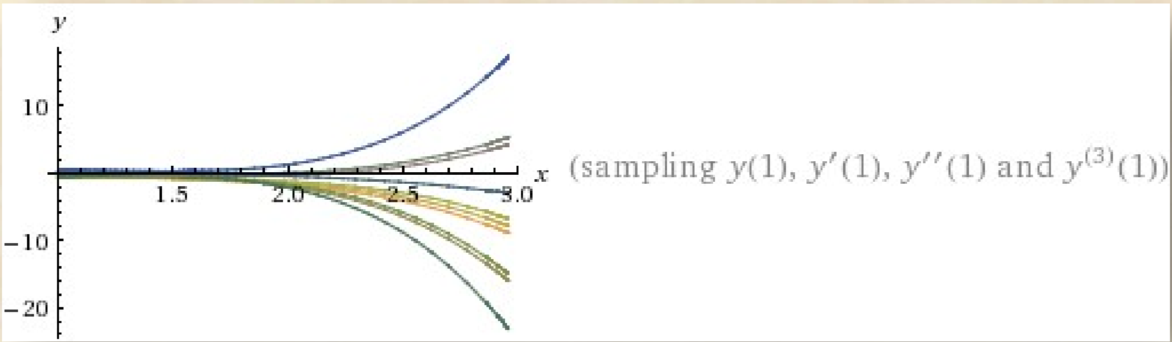
y substituyendo estos valores en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$x^4 \cdot \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \cdot x^{\lambda-4} - 11x^2 \cdot \lambda(\lambda-1) \cdot x^{\lambda-2} + 49 \cdot x \cdot \lambda \cdot x^{\lambda-1} - 81x^\lambda = 0;$$

$$\text{de donde: } \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) - 11\lambda(\lambda-1) + 49\lambda - 81 = 0, \quad \lambda^4 - 6\lambda^3 + 54\lambda - 81 = 0,$$

que resulta ser la misma ecuación característica del caso anterior, por lo que se deduce también, obviamente, el mismo resultado, c.s.q.d.

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente es la siguiente:



## Ejemplo 9

Resolver: a) la ecuación diferencial y b) el problema de valor inicial siguiente:

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad , \quad \text{con} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 4 \end{cases}$$

*Solución:*

a) Se trata de una EDO del tipo Euler-Cauchy, por lo que efectuaremos el cambio de variable habitual:

$$x = e^t \; ; \quad dx = e^t \cdot dt \; ; \quad t = \ln x \; ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} \; ; \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \; ,$$

con lo que substituyendo estas expresiones en la ecuación inicial, se obtiene que:

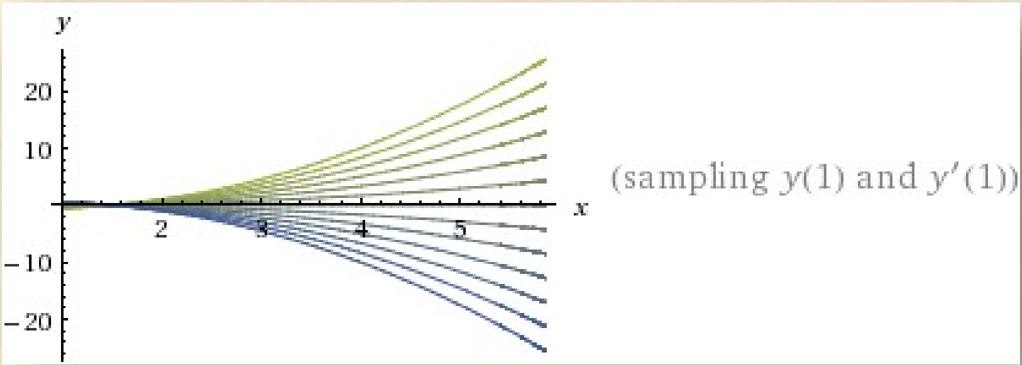
$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \; ; \text{ con lo que resulta: } \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \; ;$$

que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \; ; \; \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

y la integral general vendrá dada por la expresión: $\boxed{y = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^t = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x}$ .

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



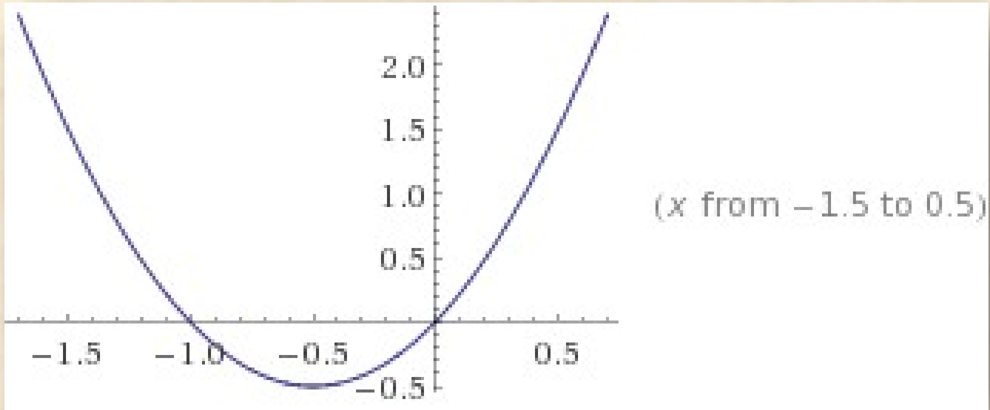
b) Las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

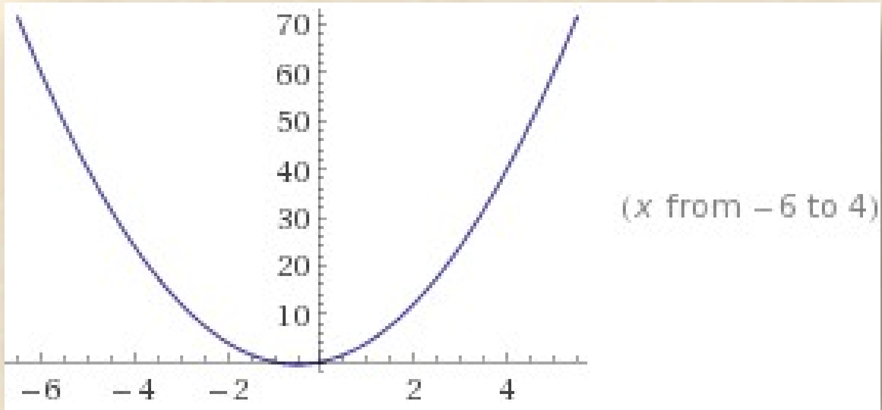
$$\begin{cases} y\,(0) = 0\ ; \\ y'(x) = 2c_1x + c_2\ ; \quad y'(0) = c_2 = 2 \\ y''(x) = 2c_1\ ;\ y''(0) = 2c_1 = 4\ ;\ c_1 = 2\ ; \end{cases}$$

por lo que, con las condiciones iniciales prefijadas, se obtendría la solución:

$$\boxed{y = 2x^2 + 2x = 2(x + x^2)}$$

La representación gráfica correspondiente de esta solución particular pedida es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 9

## SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

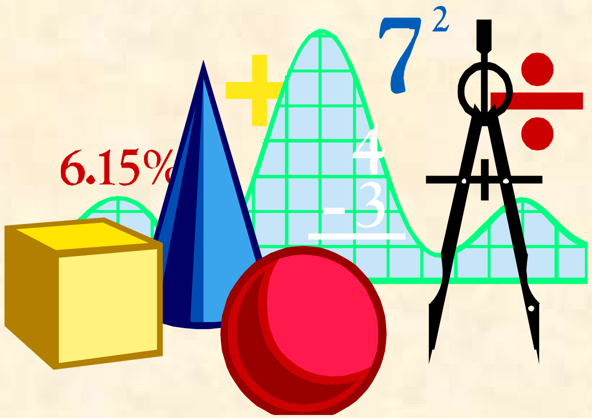

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. Introducción

Para la determinación de varias funciones: $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, son necesarias entre ellas, sus derivadas y la variable independiente o explicativa *x*, por lo menos tantas ecuaciones diferenciales como indica el número *n* de funciones incógnita. Si estas ecuaciones diferenciales no son todas de primer orden, por la introducción de funciones de nuevas incógnitas se podrá conseguir siempre la obtención de un denominado *sistema de primer orden*.

En efecto, un sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, se puede escribir así:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i}y_i + b_1(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{2i}y_i + b_2(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ni}y_i + b_n(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{cases}$$

donde, en general, las $a_{ij}$ son funciones de la variable independiente x, aunque nosotros estudiaremos únicamente el caso de que dichos coeficientes sean constantes. En el caso en que todas las $b_i(x)$ sean idénticamente nulas, el sistema se llama “homogéneo”.

El método general para resolver el sistema anterior consiste, mediante derivaciones convenientes, en eliminar (n-1) funciones $y_i$, quedando reducido el sistema a una ecuación diferencial lineal de orden n; si el sistema es de coeficientes constantes, la ecuación resultante, también lo será.

## 2. Integral general de un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes

*2.1. Raíces simples de la ecuación característica*

**Ejemplo 1**

Se trata de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + 4y_1 + 3y_2 = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} + 2y_1 + 5y_2 = 0 \end{cases}$$

*Solución:*

Este sistema se puede expresar también de la forma siguiente:

$$\begin{matrix} y'_1 = -4y_1 - 3y_2 \\ y'_2 = -2y_1 - 5y_2 \end{matrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \text{; con la siguiente ecuación característica :}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 3 \\ 2 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 4)\cdot(\lambda + 5) - 6 = 0 \ ; \quad \lambda^2 + 5\lambda + 4\lambda + 20 - 6 = 0 \ ; \quad \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0$$

$$\lambda = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \begin{cases} -2 = \lambda_1 \\ -7 = \lambda_2 \end{cases} \ ; \quad A\cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i$$

$\boxed{\lambda_1 = -2}$

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 - 3x_2 &= -2x_1 \\ -2x_1 - 5x_2 &= -2x_2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 2x_1 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 2x_2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x_1 &= -3x_2 \\ 3x_2 &= -2x_1 \end{aligned}\right\} \quad k\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2 = -7}$

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7x_1 \\ -7x_2 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 - 3x_2 &= -7x_1 \\ -2x_1 - 5x_2 &= -7x_2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 7x_1 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 7x_2 \end{aligned}\right\} 3x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \ ; \quad k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego la integral general será la siguiente:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-7x} \quad ; \text{ o sea:}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 3c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-7x} \\ y_2 &= -2c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-7x} \end{aligned}}$$

que constituye la solución buscada, en que también se cumple que:

$$y_1 - y_2 = 5c_1 \cdot e^{-2x}.$$

**Ejemplo 2**

Se trata de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -6y_1 - 3y_2 + 14y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 3y_2 - 8y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -2y_1 - y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

*Solución:*

Este sistema se puede expresar también de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = -6y_1 - 3y_2 + 14y_3 \\ y'_2 = 4y_1 + 3y_2 - 8y_3 \\ y'_3 = -2y_1 - y_2 + 5y_3 \end{array}\right\} \quad A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

con la siguiente ecuación característica o secular del sistema:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+6 & 3 & -14 \\ -4 & \lambda-3 & 8 \\ 2 & 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda+6)\cdot(\lambda-3)\cdot(\lambda-5) + 48 + 56 + 28\cdot(\lambda-3) + 12\cdot(\lambda-5) - 8\cdot(\lambda+6) = 0$$
$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 33\lambda + 90 + 104 + 28\lambda - 84 + 12\lambda - 60 - 8\lambda - 48 = 0$$
$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \;;$$

una primera raíz de esta ecuación de tercer grado, que es inmediata, es $\lambda_1 = 1$.

Ahora, por aplicación de la regla de Ruffini, se obtiene que:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
1) & & 1 & -1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & 0
\end{array}
\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \;;
$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 = \lambda_2 \\ -1 = \lambda_3 \end{cases} \quad ; \quad A \cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i \;;$$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \;; \quad \left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = x_3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2x_1 + 6x_3 = x_1 + x_2 \\ -3x_1 + 6x_3 = x_2 \\ -2x_1 + 4x_3 = x_2 \end{array}\right\}$$

$$-3x_1 + 6x_3 = -2x_1 + 4x_3 \;; \qquad 2x_3 = x_1 \;\Rightarrow k\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Del mismo modo operaremos con las otras 2 raíces características:

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ Ofrece:

$$\left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = 2x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2x_3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2x_1 + 6x_3 = 2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 3x_3 = x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 3x_3 = x_2 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow k\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ; o también: $k\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ (sería, por ejemplo, otra posible solución).

$\boxed{\lambda_3 = -1}$ Ofrece: $\left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = -x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = -x_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2x_1 + 6x_3 = -x_1 - x_2 \\ -x_1 + 6x_3 = -x_2 \\ x_1 - 6x_3 = x_2 \end{array}\Bigg\}$

$-2x_1 - x_1 + 6x_3 + 5x_3 = -x_3$ ; $-3x_1 + 12x_3 = 0 \Rightarrow 4x_3 - x_1 = 0$ ;

$\Rightarrow k\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; luego la integral general será la siguiente:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e^{x} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}e^{2x} + c_3\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-x}$$ ; o sea:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = 2c_1 \cdot e^{x} + 3c_2 \cdot e^{2x} + 4c_3 \cdot e^{-x} \\ y_2 = -2c_3 \cdot e^{-x} \\ y_3 = c_1 \cdot e^{x} + 2c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-x} \end{array}}$$

De haber considerado, para el valor propio $\lambda_2 = 2$ el autovector alternativo $\Rightarrow k\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, se obtendría el resultado siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = 5c_1 \cdot e^{2x} + 2c_2 \cdot e^{x} + 4c_3 \cdot e\text{-}x \\ y_2 = -4c_1 \cdot e^{2x} - 2c_3 \cdot e^{-x} \\ y_3 = 2c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{x} + c_3 \cdot e^{-x} \end{array}}$$

*2.2. Raíces múltiples de la ecuación característica*

**Ejemplo**

Obténgase la solución general del sistema:

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= 2y_1 + y_2 \\ y'_2 &= -y_1 + 4y_2 \end{aligned}\right\}$$

*Solución:*

Su ecuación característica o secular es:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)+1=0$$

esto es: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ , que posee una raíz $\lambda = 3$ (doble).

Notemos que la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ no es diagonalizable.

Por la proposición anterior, podemos afirmar que el sistema dado poseerá soluciones de la forma:

$$z = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1 x + c_2)\cdot e^{3x} \\ (c_3 x + c_4)\cdot e^{3x} \end{bmatrix}$$

que, substituidas en el sistema, nos dan:

$$\left.\begin{array}{l} c_1e^{3x} + 3(c_1x + c_2)e^{3x} = 2(c_1x + c_2)e^{3x} + (c_3x + c_4)e^{3x} \\ c_3e^{3x} + 3(c_3x + c_4)e^{3x} = -(c_1x + c_2)e^{3x} + 4(c_3x + c_4)e^{3x} \end{array}\right\}$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l} 3c_1x+ 3c_2 + c_1 = (2c_1 + c_3)x + 2c_2 + c_4 \\ 3c_3x+ c_3 + 3c_4 = (4c_3 – c_1)x – c_2 + 4c_4 \end{array}\right\}$$

por ello:

$$\left.\begin{array}{l} 3c_1 = 2c_1 + c_3 \\ 3c_2 + c_1 = 2c_2 + c_4 \\ 3c_3 = 4c_3 – c_1 \\ c_3 + 3c_4 = -c_2 + 4c_4 \end{array}\right\}$$

que nos proporciona las relaciones: $c_3 = c_1$ y $c_4 = c_1 + c_2$.

La solución general buscada es:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = (c_1x + c_2)\cdot e^{3x} \\ y_2 = (c_1x + c_1 + c_2)\cdot e^{3x} \end{array}}$$

de donde: $y_2 – y_1 = c_1\cdot e^{3x}$.

## 3. INTEGRAL GENERAL DE UN SISTEMA LINEAL COMPLETO CON COEFICIENTES CONSTANTES

***- Ejemplo 1***

Obtener la solución general del sistema completo de EDO siguiente:

$$\begin{cases} y'_1 = 3x + y_1 + y_2 \\ y'_2 = x - 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

*Solución:*

Este sistema es reducible a una sola ecuación diferencial ordinaria por eliminación, lo que se consigue sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, así:

$$y'_1 + y'_2 = 4x - y_1 \;; \quad \text{además: } y''_1 = 3 + y'_1 + y'_2 \text{ , con lo que:}$$

$$y''_1 + y'_1 = 3 + y'_1 + y'_2 + 4x - y_1 - y'_2 \text{ ; de donde:}$$

$$y''_1 + y_1 = 4x + 3$$

La integral de la ecuación homogénea, como ya se ha visto anteriormente, conduce a:

$$y_1^* = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x.$$

Ensayando una solución particular de la no homogénea del tipo (porque carece de término en $y'_1$):

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax + b \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial: $2a + ax^2 + bx + c = 4x + 3$ ; de donde: $a = 0$ ; $b = 4$ ; $c = 3$ ; con lo que se tendrá una integral general del tipo:

$$\boxed{y_1 = y_1{}^* + y_p = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x + 4x + 3} \quad ;$$

a su vez, se tiene que: $y'_1 = -c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x + 4$, con lo que substituyendo en la 1ª ecuación se tiene que:

$$\boxed{y_2} = y'_1 - y_1 - 3x = -c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x + 4 - c_1 \cdot \cos x - c_2 \cdot \sin x - 4x - 3 - 3x =$$

$$= \boxed{(c_2 - c_1) \cdot \cos x - (c_1 + c_2) \cdot \sin x - 7x + 1} \, ,$$

que constituyen ambas la solución general del sistema diferencial propuesto.

A continuación, se presentan diversos ejercicios de utilidad en la Ingeniería hidráulica (Franquet, 2019).

***- Ejemplo 2***

Se trata de un sistema de dos tuberías de fundición en serie cuyas trayectorias temporales de la rugosidad absoluta, al cabo de efectuar las determinaciones empíricas correspondientes, responden a la siguiente relación sistémica infinitesimal:

$$\begin{cases} \dfrac{dK_1}{dt} = 2K_1 + 3K_2 \\ \dfrac{dK_2}{dt} = 2K_1 + K_2 \end{cases}$$

Se pide hallar la trayectoria temporal de la rugosidad absoluta de ambas tuberías sabiendo que inicialmente: $K_{01}$ = 0.20 mm y $K_{02}$ = 0.30 mm, desde el punto de vista analítico y gráfico, con el tiempo *t* expresado en siglos.

*Solución:*

La matriz del sistema diferencial planteado es la siguiente: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Procederemos del siguiente modo:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 0 \begin{cases} \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \\ (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$[\lambda_1 = 4] \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-4 & 3 \\ 2 & 1-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \quad ;$$

$$\left. \begin{aligned} -2k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 - 3k_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ Si } \begin{aligned} & k_1 = 1 \Rightarrow -2 + 3k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{2}{3}(3) = 2 \\ & k_1 = 1(3) = 3 \end{aligned}$$

Entonces: $Q_1 = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$ , $[\lambda_2 = -1] \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 2 & 1-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} 3k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 + 2k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ Si } \quad k_2 = 1 \Rightarrow 2k_1 + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -1$$

También se cumple que: $Q_2 = C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Así pues: $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$, con lo que la solución general buscada será:

$$\boxed{\begin{aligned} K_1(t) &= 3C_1 \cdot e^{4t} - C_2 \cdot e^{-t} \\ K_2(t) &= 2C_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot e^{-t} \end{aligned}}$$

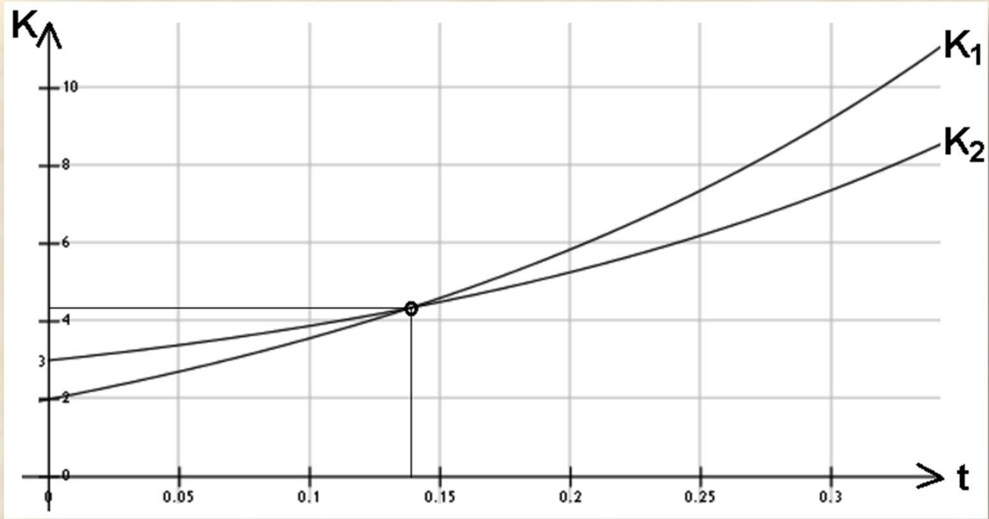
, y también se cumple que: $K_1(t) + K_2(t) = 5C_1 \cdot e^{4t}$.

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema, donde, para mayor comodidad de cálculo, las rugosidades absolutas se han expresado en decimilímetros (dmm) se tendrá que:

$K_1(0) = 3C_1 – C_2 = 2$ dmm, y también: $K_2(0) = 2C_1 + C_2 = 3$ dmm, de donde se deduce que: $C_1 = C_2 = 1$, y resultarán las siguientes trayectorias temporales:

$$K_1(t) = 3 \cdot e^{4t} – e^{-t}, \ \ K_2(t) = 2 \cdot e^{4t} + e^{-t}.$$

Por otra parte, se presume también en ambos casos de las funciones de rugosidad absoluta $K_1$ y $K_2$ la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si $t \to \infty$ también $K \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{K}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OK (vertical, hacia arriba) en ambas situaciones.



Trayectorias temporales de las rugosidades absolutas.

La correspondiente representación gráfica de $K_1$ y $K_2$ puede verse a continuación:

Como puede observarse en la figura precedente, ambas trayectorias de rugosidad absoluta coincidirán cuando: $K_1(t) = K_2(t)$; o sea, cuando se cumpla que: $3 \cdot e^{4t} - e^{-t} = 2 \cdot e^{4t} + e^{-t}$. Y así:

$3e^{4t} - 2e^{4t} - e^{-t} - e^{-t} = 0$; $e^{4t} = 2e^{-t}$; $4t = \ln 2 - t$; $t = \frac{\ln 2}{5} = 0.139$ = 13.9 años. A ello le corresponde una rugosidad absoluta de: K = 0.436 mm en ambas conducciones.

En este caso, se tendrá que, para la primera tubería:

$$\int_0^{t_u} K_1(t) \cdot dt = \int_0^{0.5} \left(3 \cdot e^{4t} - e^{-t}\right) \cdot dt = \left[e^{-t} + \frac{3e^{4t}}{4}\right]_0^{0.5} \cong 4.40 \text{, y entonces: } K_{1m} = \frac{4.40}{0.5} = 8.80 \text{ dmm} = 0.88 \text{ mm.}$$

Del mismo modo, para la segunda tubería se tendrá:

$$\int_0^{t_u} K_2(t) \cdot dt = \int_0^{0.5} \left(2 \cdot e^{4t} + e^{-t}\right) \cdot dt = \left[\frac{e^{4t}}{2} - e^{-t}\right]_0^{0.5} \cong 3.59 \text{, y entonces: } K_{2m} = \frac{3.59}{0.5} = 7.18 \text{ dmm} = 0.72 \text{ mm,}$$

de donde se deduce que la rugosidad temporal de esta segunda tubería es inferior a la de la primera a lo largo de una vida útil, para ambas, de 50 años. Además, el "producto escalar" o interior de ambas funciones vendrá dado por la expresión:

$$(K_1,K_2) = (K_1 | K_2) = \int_0^{t_u} K_1(t)\cdot K_2(t)\cdot dt = \int_0^{0.5}(3e^{4t} - e^{-t})(2e^{4t} + e^{-t})\cdot dt =$$

$$= \int_0^{0.5}(6e^{8t} + e^{3t} - e^{-2t})\cdot dt = \left[\frac{3e^{8t}}{4} + \frac{e^{3t}}{3} + \frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^{0.5} = 41.0431 \neq 0,$$

luego no se trata de dos funciones de envejecimiento ortogonales.

Por último, los respectivos "índices de rugosidad absoluta temporal" de cada tubería serán, entonces:

$$\boxed{\begin{array}{l} I_{K1} = \dfrac{\int_0^{t_u} K_1(t)\cdot dt}{K_{10} \times t_u} \times 100 = \dfrac{4.40}{2 \times 0.5} \times 100 = 440\% \\ I_{K2} = \dfrac{\int_0^{t_u} K_2(t)\cdot dt}{K_{20} \times t_u} \times 100 = \dfrac{3.59}{3 \times 0.5} \times 100 = 239.33\% \end{array}}$$

resultando ambos ciertamente elevados, como cabría esperar de la observación de las respectivas trayectorias temporales de la rugosidad absoluta.

## - *Ejemplo 3*

Se trata de un sistema de tres tuberías en paralelo de fundición dúctil cuyas trayectorias temporales de la rugosidad absoluta, al cabo de efectuar las determinaciones empíricas correspondientes, responden a la siguiente relación infinitesimal definida por el sistema de ecuaciones simultáneas configurantes del modelo hidráulico correspondiente (con *K* expresada en mm y *t* en siglos):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dK_1}{dt} = 3K_1 - K_2 + K_3 \\ \dfrac{dK_2}{dt} = 2K_1 + K_3 \\ \dfrac{dK_3}{dt} = K_1 - K_2 + 2K_3 \end{array}\right\}$$

con los valores iniciales: $K_1(0) = K_2(0) = K_3(0) = 1$ mm. Se pide hallar la trayectoria temporal de la rugosidad absoluta de estas tuberías desde el punto de vista analítico y gráfico.

*Solución:*

Se trata, en principio, de un sistema homogéneo de coeficientes constantes. Estos sistemas de EDO también pueden resolverse por aplicación de las funciones de matrices. Así, matricialmente se le puede escribir:

$$K' = A \cdot K \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dK_1}{dt} \\ \frac{dK_2}{dt} \\ \frac{dK_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} \quad .$$

La matriz característica o secular del sistema es:

$$[A - \lambda \cdot I_3] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$ , cuyo determinante característico es:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\ (-\lambda)(2-\lambda) - 1 - 2 + \lambda + (3-\lambda) + 2\,(2-\lambda),$$

con lo que: $\Delta(\lambda) = -(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2)^2$.

El máximo común divisor de los menores de orden 2 es: $D_2(\lambda) = 1$ , de donde:

$$\phi(\lambda) = \Delta(\lambda) = -(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2)^2 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \quad .$$

La fórmula fundamental de la función matricial es ahora:

$$f(A) = f(1) \cdot Z_1 + f(2) \cdot Z_2 + f'(2) \cdot Z_3 \,.$$

En $f(\lambda)$, considerando sucesivamente: $1, (\lambda - 2), (\lambda - 2)^2$ , se obtiene que:

$$Z_1 + Z_2 = E = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; -Z_1 + Z_3 = A - 2 \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; ,$$

y también: $Z_1 = (A - 2 \cdot E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , de donde se tienen las matrices $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ del siguiente modo:

- de $Z_1 + Z_2 = E$ , se obtiene que: $Z_2 = E - Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

-de $-Z_1 + Z_3 = A - 2 \cdot E$ se obtiene que:

$$Z_3 = (A - 2 \cdot E) + Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Substituyendo ahora en la fórmula fundamental de la función matricial resultará que:

$$f(A) = f(1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + f'(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Como ahora: $f(\lambda)=e^{\lambda\cdot t}$, reemplazando en la anterior expresión: $\begin{cases} f(1)=e^{1\cdot t}=e^{t} \\ f(2)=e^{2\cdot t} \\ f'(2)=t\cdot e^{2\cdot t}\end{cases}$, resultará que:

$$e^{A\cdot t}=e^{t}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}+e^{2t}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}+t\cdot e^{2t}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\-e^{t}&e^{t}&0\\-e^{t}&e^{t}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^{2t}&0&0\\e^{2t}&0&0\\e^{2t}&-e^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\cdot e^{2t}&-t\cdot e^{2t}&t\cdot e^{2t}\\t\cdot e^{2t}&-t\cdot e^{2t}&t\cdot e^{2t}\\0&0&0\end{pmatrix};$$

$$e^{A\cdot t}=\begin{pmatrix}(1+t)\cdot e^{2t}&-t\cdot e^{2t}&t\cdot e^{2t}\\-e^{t}+(1+t)\cdot e^{2t}&e^{t}-t\cdot e^{2t}&t\cdot e^{2t}\\-e^{t}+e^{2t}&e^{t}-e^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix},$$

luego, como la solución es: $K = K_0 \cdot e^{A\cdot t}$, por consiguiente se tiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}K_1\\K_2\\K_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+t)\cdot e^{2t}&-t\cdot e^{2t}&t\cdot e^{2t}\\-e^{t}+(1+t)\cdot e^{2t}&e^{t}-t\cdot e^{2t}&t\cdot e^{2t}\\-e^{t}+e^{2t}&e^{t}-e^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k_{10}\\k_{20}\\k_{30}\end{pmatrix},$$

donde: $C_1 = k_{10} = K_{10}$, $C_2 = k_{20} = K_{20}$, $C_3 = k_{30} = K_{30}$, son los valores iniciales (conocidos). En consecuencia, la solución buscada del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned}K_1&=k_{10}\cdot(1+t)\cdot e^{2t}-k_{20}\cdot t\cdot e^{2t}+k_{30}\cdot t\cdot e^{2t}\\K_2&=k_{10}\left[-e^{t}+(1+t)\cdot e^{2t}\right]+k_{20}\cdot\left(e^{t}-t\cdot e^{2t}\right)+k_{30}\cdot t\cdot e^{2t}\\K_3&=k_{10}\cdot\left(-e^{t}+e^{2t}\right)+k_{20}\cdot\left(e^{t}-e^{2t}\right)+k_{30}\cdot e^{2t}\end{aligned}\right\}$$

o lo que es lo mismo, se tendrá la integral general del sistema:

$$K_1(t) = C_1 \cdot e^{2t}(t+1) - C_2 \cdot e^{2t} \cdot t + C_3 \cdot e^{2t} \cdot t$$
$$K_2(t) = C_1 \cdot e^{t}[e^{t}(t + 1) - 1] - C_2 \cdot e^{t}(e^{t} \cdot t - 1) + C_3 \cdot e^{2t} \cdot t$$
$$K_3(t) = C_1 \cdot e^{t}(e^{t} - 1) - C_2 \cdot e^{t}(e^{t} - 1) + C_3 \cdot e^{2t}$$

Aplicando, ahora, las condiciones iniciales dadas, se tendrá que: $\begin{cases} K_1(0) = C_1 = 1 \text{ mm.} \\ K_2(0) = C_2 = 1 \text{ mm.} \\ K_3(0) = C_3 = 1 \text{ mm.} \end{cases}$

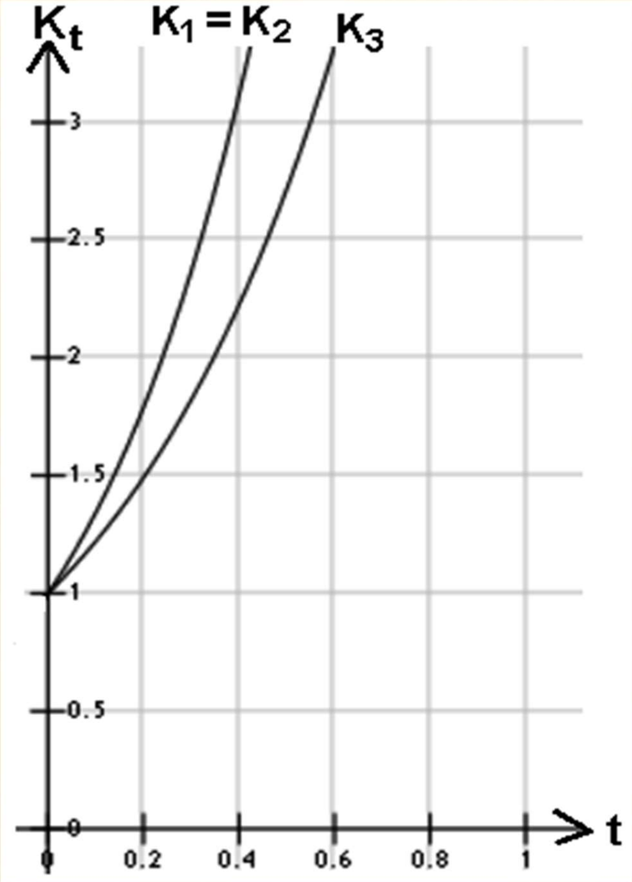
o sea: $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ mm, y entonces, nos queda la solución o integral particular buscada siguiente:

$$\begin{cases} K_1(t) = e^{2t}(t+1) \\ K_2(t) = e^{2t}(t+1) \\ K_3(t) = e^{2t} \end{cases},$$

de lo que se deduce que $K_1 = K_2 = e^{2t}(t+1)$, y $K_3 = e^{2t}$, como también puede comprobarse por substitución en el sistema inicial dado. Del mismo modo, podría deducirse que: $\frac{dK_3}{dt} = 2K_3$, con lo que se obtiene una sencilla EDO homogénea de primer orden: $K'_3 - 2K_3 = 0$, cuya ecuación característica ofrece: $\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$, y se tendrá la integral general $\rightarrow K_3 = C \cdot e^{2t}$. De hecho se trata de una sencilla EDO de variables separables, puesto que se puede escribir así: $\frac{dK_3}{K_3} = 2 \cdot dt$ , y mediante una simple cuadratura, se obtiene que:

$\ln K_3 = 2t + k$ ; $K_3 = e^{2t + k} = e^{k} \cdot e^{2t} = C \cdot e^{2t}$, (habiendo hecho la siguiente substitución: $e^{k} = C$), c. s. q. d. Ahora bien, en base a las condiciones iniciales dadas, se exige que: $K_3(0) = C = 1$ mm $\Rightarrow$ $K_3(t) = e^{2t}$, c. s. q. d.

En este caso, pues, las rugosidades absolutas conjuntas de las tres tuberías analizadas se presentan en la correspondiente representación gráfica, a saber:




Trayectorias temporales de las rugosidades absolutas de las tuberías.

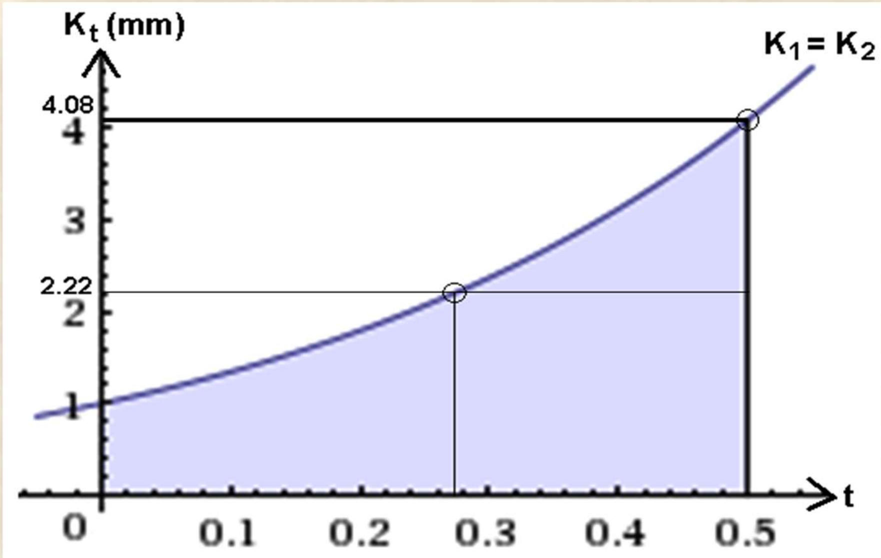
Por otra parte se presume, también en los tres casos de las funciones anteriores, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si en ellas $t \to \infty$ también tienden a $+\infty$. Y además, en todos los casos: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{K}{t} = +\infty$, luego existe en todas ellas una rama parabólica según el eje OK (vertical, hacia arriba).

En este caso, la primera y segunda tuberías poseen idéntica trayectoria temporal, con lo que:

$$\int_0^{t_u} K_{1,2}(t)\cdot dt = \int_0^{0.5} (t+1)\cdot e^{2t}\cdot dt = \left[ e^{2t}\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]_0^{0.5} \cong 1.11$$

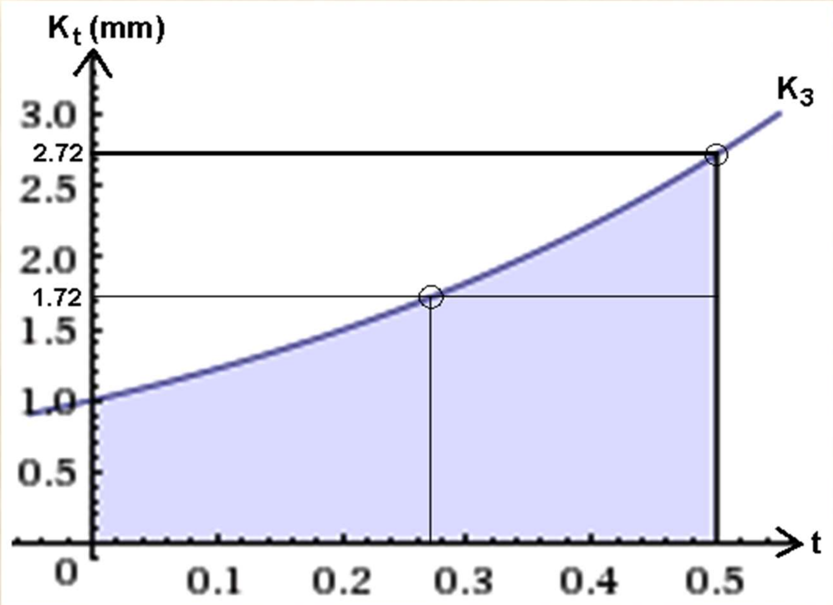
, y entonces la rugosidad temporal media vendría dada por:

$K_{1m} = K_{2m} = \frac{1.11}{0.5} = 2.22\,\text{mm}$ , con la siguiente representación gráfica:



Por último, para la tercera tubería se tendrá lo siguiente: $\int_0^{t_u} K_3(t)\cdot dt = \int_0^{0.5} e^{2t}\cdot dt = \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{0.5} \cong 0.86$ ,

y entonces la rugosidad temporal media vendría dada por: $K_{3m} = \frac{0.86}{0.5} = 1.72\,mm$ , con la siguiente representación gráfica:




Por último, los respectivos "índices de rugosidad absoluta temporal" de cada tubería serán, entonces:

$$I_{K1} = I_{K2} = \frac{\int_0^{t_u} K_{1,2}(t)\cdot dt}{K_{10,20}\times t_u}\times 100 = \frac{1.11}{1\times 0.5}\times 100 = 222\%$$

$$I_{K3} = \frac{\int_0^{t_u} K_3(t)\cdot dt}{K_{30}\times t_u}\times 100 = \frac{0.86}{1\times 0.5}\times 100 = 172\%$$

***- Ejemplo 4***

La relación existente entre los valores observados de los incrementos de presión experimentados en sindas tuberías interrelacionadas y sometidas a un golpe de ariete, viene dada por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\begin{cases} \Delta P'_1 = 2\Delta P_1 - 5\Delta P_2 \\ \Delta P'_2 = \Delta P_1 - 2\Delta P_2 \end{cases}$$

En el inicio del estudio (con t = 0 segundos), existen para ambas tuberías unos valores positivos de los incrementos de la presión, debidos al supuesto fenómeno transitorio, de 1.00 bar y 2.00 bar, respectivamente. ¿Se trata efectivamente de un golpe de ariete hidráulico? (Franquet, 2019).

*Solución:*

Se tiene la siguiente matriz del sistema diferencial dado: $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Así, la correspondiente ecuación característica o secular vendrá dada por:

$$[\lambda \cdot I_2 - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 5 \\ -1 & \lambda + 2 \end{bmatrix},$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece: $(\lambda\text{-}2)\cdot(\lambda\text{+}2) + 5 = 0$ ;

$$\lambda^2 - 4 + 5 = \lambda^2 + 1 = 0 \ ; \begin{cases} \lambda_1 = +i \\ \lambda_2 = -i \end{cases}, \text{ con } \alpha = 0, \beta = 1.$$

$$\boxed{\lambda_1 = i} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ ;$$

$$\boxed{\lambda_2 = -i} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 2x_1 - 5x_2 = -ix_1 \\ x_1 - 2x_2 = ix_2 \end{matrix}\right\} x_1 = (2-i)x_2 \Rightarrow k\begin{bmatrix} 2 - i \\ 1 \end{bmatrix},$$

que conforman la integral general del sistema diferencial planteado:

$$\Delta P(t) = \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{it} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-it} \quad \text{; o sea:}$$

$$\Delta P_1(t) = c_1(2+i)e^{it} + c_2(2-i)e^{-it} =$$
$$= c_1(2+i)(\cos t + i\cdot \sin t) + c_2(2-i)(\cos t - i\cdot \sin t), \text{ y también:}$$

$$\Delta P_2(t) = c_1\cdot e^{it} + c_2\cdot e^{-it} = c_1(\cos t + i\cdot \sin t) + c_2(\cos t - i\cdot \sin t),$$

que, a su vez, pueden desarrollarse dando la expresión real de la solución anterior.

Para ello, basta hacer $c_1 = A + Bi$ y $c_2 = A - Bi$, lo que nos permite obtener los valores de $\Delta P_1(t)$ y $\Delta P_2(t)$ del siguiente modo:

$$\Delta P_1(t) = (A+Bi)(2+i)(\cos t + i\cdot \sin t) + (A-Bi)(2-i)(\cos t - i\cdot \sin t) =$$
$$= 2A \cos t + (A+2B)\, i\cdot \cos t - B\cdot \cos t + 2Ai\cdot \sin t -$$
$$- (A+2B) \sin t - Bi\cdot \sin t + 2A\cdot \cos t - (A+2B)\, i\cdot \cos t -$$
$$- B \cos t - 2Ai\cdot \sin t - (A+2B) \sin t + Bi\cdot \sin t =$$
$$= (4A - 2B) \cos t - (2A + 4B) \sin t \,.$$

Procediendo de manera similar con la segunda tubería, se tendrá que:

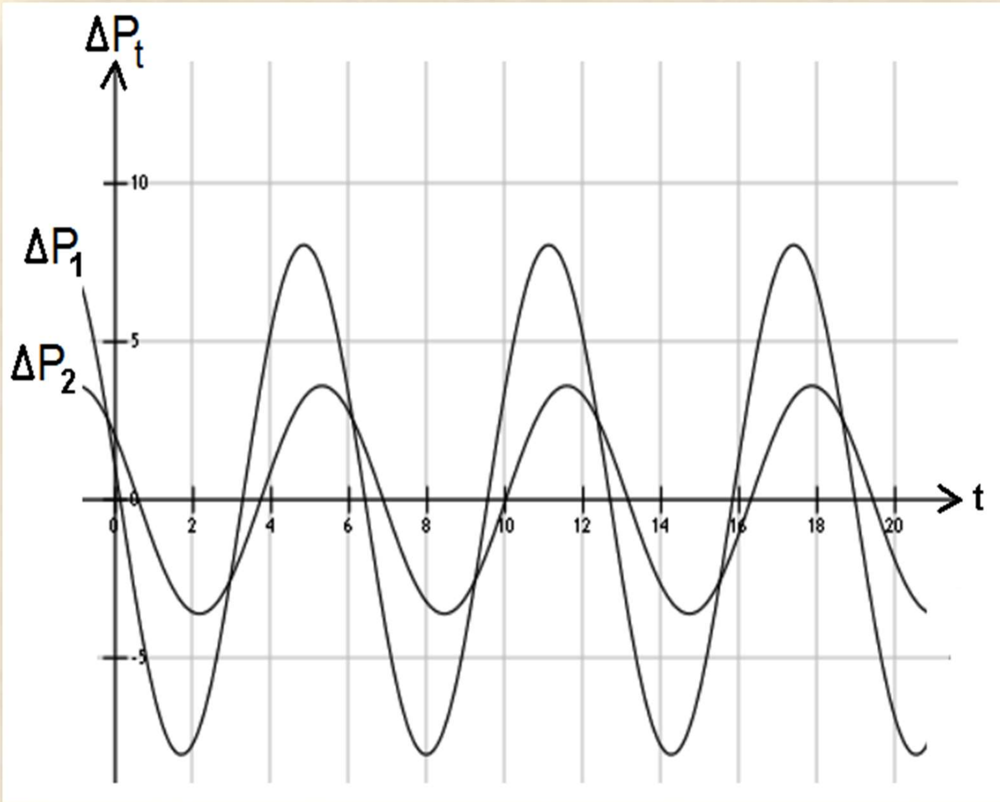
$$\Delta P_2(t) = (A+Bi)(\cos t + i\cdot \sin t) + (A-Bi)(\cos t - i\cdot \sin t) = 2(A\cdot \cos t - B\cdot \sin t)\,.$$

Teniendo ahora en cuenta las condiciones iniciales dadas del problema planteado, se tiene que: $\Delta P_1(0) = 1.00$ bar y $\Delta P_2(0) = 2.00$ bar, con lo que el valor de las constantes A y B es: $A = 1$ ; $B = 3/2$, y resultan las siguientes trayectorias temporales periódicas de ambas ondas de presión:

$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta P_1(t) = \cos t - 8\cdot \sin t \\ \Delta P_2(t) = 2[\cos t - (3/2)\cdot \sin t] = 2\cdot \cos t - 3\cdot \sin t \end{array}}$$

De la contemplación de la representación gráfica siguiente de ambas trayectorias se deduce inmediatamente que **no pueden corresponder a un golpe de ariete hidráulico**, habida cuenta de su no convergencia o amortiguación temporal, mientras que sus picos de presión positivos o negativos determinan siempre los mismos valores (sucesión constante).

En efecto, se tiene que:




Evolución temporal continua de las trayectorias supuestas de las ondas de presión.

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 10

## ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS (I)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

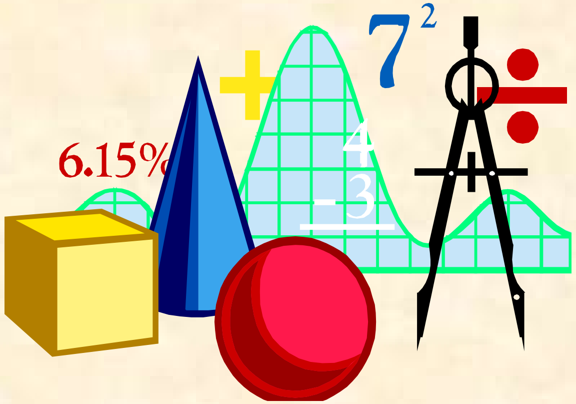
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





## 1. ECUACIONES LINEALES

### 1.1. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Son ecuaciones tales que estén definidas en cierto dominio de una variable y que relacionen una función incógnita de la variable *n* con la función de la variable *n* + 1, que difiere en 1 de la primera, o sea, $u_n$ y $u_{n+1}$, y se llaman *ecuaciones en diferencias finitas de primer orden.*

Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación: $2a_{n+1} + 3a_n = 0$, $\forall n \in \{\mathbf{N}\}$, con la condición: $a_2 = 0$.

*Solución:*

Primero se calcula la solución general, con lo que:

$a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n$ , y al ser de primer orden la solución es: $a_n = C\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ .

Para hallar la solución particular se substituyen los valores de la condición dada en la ecuación general, de tal forma que:

$$a_2 = C\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2 \; ;$$

se despeja C, de donde C = $\frac{8}{9}$ , y la solución particular será, por tanto: $\boxed{a_p = \frac{8}{9}\left(-\frac{3}{2}\right)^n}$ .

Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación no homogénea:

$$u_{n+1} - 3 \cdot u_n = n + 2, \ \forall n \in \{\mathbf{N}\}.$$

*Solución:*

La ecuación homogénea asociada tiene por solución: $u_n^* = \alpha \cdot 3^n$.

Como veremos con mayor especificidad en epígrafes posteriores, para hallar una solución particular, ensayaremos una del tipo (puesto que el segundo miembro es un polinomio de primer grado): $u_p = an + b$.

Substituyendo en la ecuación inicial, agrupando términos e igualando coeficientes indeterminados, llegamos al sistema:

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ a - 2b = 2 \end{cases}$$

de donde se deduce que: $a = -½$ y $b = -5/4$.

Entonces, la solución general de la ecuación pedida será:

$$\boxed{u_n = u_n{}^* + u_p = \alpha \cdot 3^n - \frac{1}{2} n - \frac{5}{4}}$$

## 1.2. ECUACIÓN LINEAL HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES Y ORDEN K

### 1.2.1. Introducción

Si la ecuación homogénea en diferencias finitas de orden *k* siguiente:

$$a_0 \cdot f(x+k) + a_1 \cdot f(x+k-1) + a_2 \cdot f(x+k-2) + \dots + a_{k-1} \cdot f(x+1) + a_k \cdot f(x) = 0;$$

o bien, expresada en notación de subíndices:

$$a_0 \cdot u_{n+k} + a_1 \cdot u_{n+k-1} + a_2 \cdot u_{n+k-2} + \dots + a_{k-1} \cdot u_{n+1} + a_k \cdot u_n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot u_{n+k-i} = 0,$$

admite, como ya hemos dicho, k soluciones particulares linealmente independientes: $f_1(n), f_2(n), f_3(n), \dots, f_k(n)$, resulta inmediato comprobar que:

$$u_n = c_1 \cdot f_1(n) + c_2 \cdot f_2(n) + c_3 \cdot f_3(n) + \dots + c_k \cdot f_k(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot f_i(n) \quad ,$$

es la solución general de la ecuación propuesta, puesto que contiene k constantes arbitrarias. Por lo tanto, el problema de resolver la ecuación dada se reduce a la obtención de k soluciones particulares que son linealmente independientes.

### 1.2.2. Raíces reales distintas

Si las raíces son reales y distintas ($\forall\ r_i \neq r_j$), es inmediato comprobar que las k soluciones particulares siguientes: $r_1^n$, $r_2^n$, $r_3^n$, … , $r_k^n$, son linealmente independientes y, por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias será una combinación lineal de las funciones $r_1^n$ y $r_2^n$, así:

$$u_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n + \ldots + c_k \cdot r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n$$

siendo las $c_i$ constantes arbitrarias.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos que juzgamos suficientemente representativos:

Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0, \forall n \in \{\mathbf{N}\}.$$

*Solución:*

La ecuación característica es: $r^2 - r - 2 = 0$, con las raíces: $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$, por lo que la solución general buscada será:

$$\boxed{u_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 2^n\ ,}\ \forall\ c_1, c_2 \in \{\Re\}$$

Ejemplo 2

Hállese la solución particular de la ecuación homogénea, que cumple las siguientes condiciones:

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0, \forall n \in \{\mathbf{N}\}, \text{ con: } a_0 = 1 \text{ y } a_1 = 0.$$

*Solución:*

Como en los ejercicios anteriores, la ecuación característica es: $r^2 + 3r + 1 = 0$, con sus raíces:

$$r_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

y la solución general será:

$$a_n = c_1\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

Para hallar la solución particular se hace que se cumplan las condiciones dadas:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= c_1\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1 \\ a_1 &= c_1\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

y de este sistema de ecuaciones despejamos las constantes $c_1$ y $c_2$, de donde resulta que:

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10} \quad ,$$

y, por lo tanto, la solución particular buscada será:

$$\boxed{a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n} .$$

### 1.2.3. Raíces reales múltiples

En el caso de que una de las raíces sea doble, por ejemplo, las $r^i$, se tiene que $r_i^n$ y $r_i^n$ no son linealmente independientes sino iguales, y se hace necesario encontrar una segunda solución, aunque se comprueba que: $(c_i + c_{i+1} \cdot n)r_i^n$ es una solución particular de la ecuación planteada.

Del mismo modo, si $r_i$ es raíz triple, se tendrá que:

$$(c_i + c_{i+1} \cdot n + c_{i+2} \cdot n^2)r_i^n$$

Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 9u_{n+1} = 0, \forall n \in \{\mathbf{N}\}, \text{ con las condiciones: } u_1 = 1 \text{ y } u_2 = 2.$$

*Solución:*

La ecuación dada es equivalente a: $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$, cuya ecuación característica: $r^2 - 6r + 9 = 0$, tiene la raíz: $r = 3$, doble. Luego la solución general será: $u_n = C_1 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n$.

Por lo que se refiere a la solución particular buscada, veamos que:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 3C_1 + 3C_2 = 1 \\ u_2 &= 9C_1 + 18C_2 = 2 \end{aligned}\right\}$$

, de donde se deduce que: $C_1 = 4/9$ y $C_2 = -1/9$, y la solución particular será:

$$\boxed{u_p = \frac{4}{9}3^n - \frac{1}{9}n \cdot 3^n = 3^n \cdot \frac{4-n}{9} = f(n)}$$

### 1.2.4. Raíces complejas

Si una de las raíces de la ecuación característica es compleja (pura o mixta), de la forma binómica general: $(a + bi)$, también existirá la conjugada: $(a – bi)$, con módulo r y argumento $\theta$. Escritas en forma polar, resultará (véase el Apéndice V):

$$c_1(a + bi)^n + c_2(a - bi)^n = c_1 \cdot r^n(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)^n + c_2 \cdot r^n(\cos\theta - i \cdot \sin\theta)^n =$$
$$= c_1 \cdot r^n(\cos n\theta + i \cdot \sin n\theta) + c_2 \cdot r^n(\cos n\theta - i \cdot \sin n\theta)$$

Elegidos convenientemente los números complejos $c_1$ y $c_2$, se obtiene una solución general de la forma:

$$r^n(c_1 \cdot \cos n\theta + c_2 \cdot \sin n\theta) ,$$

aunque también se pueden emplear las expresiones alternativas siguientes:

$$u_n = C \cdot r^n \cdot \cos(n\theta + \phi) \quad \text{o bien:} \quad u_n = (\alpha + i\beta) \cdot r_1^n + (\alpha - i\beta) \cdot r_2^n$$

En el caso de obtener raíces complejas múltiples se opera como en el caso ya visto de las raíces reales múltiples, esto es, combinando convenientemente los procedimientos anteriores.

## Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0, \ \forall n \in \{\mathbf{N}\}.$$

*Solución:*

La ecuación característica es: $r^2 + 2r + 2 = 0$, y sus raíces características son las complejas conjugadas: $r_1 = -1+i$ y $r_2 = -1-i$, cuyo módulo es: $\rho = \sqrt{2}$ y el argumento, que se halla en el segundo cuadrante del círculo, es:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135º.$$

Por consiguiente, la solución general buscada será:

$$\boxed{y_n = c_1(\sqrt{2})^n \cdot \cos \frac{3\pi n}{4} + c_2(\sqrt{2})^n \cdot \sin \frac{3\pi n}{4},} \ \forall \ c_1, c_2 \in \{\Re\}$$

## 1.3. ECUACIÓN LINEAL NO HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES Y ORDEN K

### 1.3.1. Introducción

Sea la ecuación lineal no homogénea o completa de coeficientes constantes:

$$a_0 \cdot u_{n+k} + a_1 \cdot u_{n+k-1} + a_2 \cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot u_{n+1} + a_k \cdot u_n = b_n$$

Sea $u_n^*$ la solución de la correspondiente homogénea, o sea:

$$a_0 \cdot u_{n+k} + a_1 \cdot u_{n+k-1} + a_2 \cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot u_{n+1} + a_k \cdot u_n = 0 ,$$

y sea $u_p$ una solución particular de la ecuación completa dada. Entonces, se verifica que la solución general de la ecuación buscada será la suma de las soluciones anteriores, esto es: $u_n = u_n^* + u_p$ , como sucedía también con las ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas.

### 1.3.2. Si $b_n$ es un polinomio

En este caso, se ensaya un polinomio genérico de igual o menor grado que se obtiene por aplicación del método de los coeficientes indeterminados. Los coeficientes de este polinomio son las incógnitas a determinar, lo que se puede llevar a efecto substituyendo en la ecuación en diferencias dada. Si se obtuviese un sistema incompatible (problema de “resonancia”), se ensayaría un polinomio de grado una unidad mayor. En general, si en la solución de la homogénea figurasen términos de un polinomio, se debería multiplicar el polinomio a ensayar por una potencia conveniente de *n* para que no resultasen términos linealmente dependientes, como tendremos ocasión de comprobar en algún ejemplo desarrollado.

## Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = n,\ \forall n \in \{\mathbf{N}\}.$$

*Solución:*

La ecuación característica es: $r^2 - r + 1 = 0$ cuyas soluciones complejas son:

$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\frac{\pi}{3} \pm i \cdot \sin\frac{\pi}{3}$ , luego la solución de la ecuación homogénea es:

$$u_n^* = c_1 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} + c_2 \cdot \sin\frac{n\pi}{3}$$

Una solución particular de la ecuación completa será de la forma polinómica genérica de primer grado: $u_p = An + B$. Substituyendo en la ecuación inicial, se tendrá que:

$$A(n+2) + B - A(n+1) - B + An + B = n \leftrightarrow An + A + B = n \leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}.$$

Luego la solución general de la ecuación dada es:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c_1 \cdot \cos\frac{n\pi}{3} + c_2 \cdot \sin\frac{n\pi}{3} + n - 1},\ \forall\ c_1, c_2 \in \{\Re\}$$

## Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2n + 1, \ \forall n \in \{\mathbf{N}\}.$$

*Solución:*

La ecuación característica: $r^2 - 3r + 2 = 0$ tiene por soluciones: $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$, luego la solución de la ecuación homogénea es: $a^*_n = c_1 + c_2 \cdot 2^n$. Para ensayar la solución particular de la completa, puesto que la solución de la homogénea contiene un monomio de grado cero, ensayaremos una función de la forma:

$a_p = (An + B)n = An^2 + Bn$, con lo que se obtiene la ecuación:

$A(n+2)^2 + B(n+2) - 3A(n+1)^2 - 3B(n+1) + 2An^2 + 2Bn = 2n + 1$. Desarrollando e identificando coeficientes indeterminados, se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -2A = 2 \\ A - B = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad A = -1,\ B = -2.$$ Luego la solución general buscada es:

$$\boxed{a_n = a_n^* + a_p = c_1 + c_2 \cdot 2^n - n^2 - 2n}, \ \forall\, c_1, c_2 \in \{\Re\}$$

## Ejemplo 3

Se considera el siguiente modelo macroeconómico en una economía determinada:

$$\begin{cases} Y = G \\ G = C + I \\ C = c\cdot Y \\ I = v\cdot \Delta Y \\ s = 1 - c \end{cases}$$

donde: Y = Renta Nacional; G = Gasto total; C = Consumo; I = Inversión;
c = propensión marginal al consumo; s = propensión marginal al ahorro;
v = relación capital-producto = K/Y.

Existen rendimientos de escala constantes y no hay progreso técnico. Los valores de los parámetros v y c no varían. Se pide:

a) Calcular el tipo o ritmo de crecimiento cuando la economía en cuestión se mantiene en equilibrio de crecimiento, si v = 4 y el ahorro es igual al 20% de la renta total.

b) Se considera ahora un modelo análogo, en el que la inversión en el período **t** es igual a:
$I_t = v\cdot \Delta Y = v(Y_{t+1} - Y_t)$.

c) El mismo modelo anterior, pero ahora la inversión viene dada de la siguiente manera:
$I_t = v\cdot \Delta Y = v(Y_t - Y_{t-1})$.

*Solución:*

a) En equilibrio de crecimiento, todas las magnitudes económicas implicadas crecen al mismo ritmo g, esto es:

$\Delta Y/Y = g$ ; $Y = C + I = c\cdot Y + I = c\cdot Y + v\cdot \Delta Y$; de donde:

$\frac{\Delta Y \cdot v}{Y} = 1 - c$; g = $\frac{1-c}{v} = \frac{s}{v} = \frac{0'2}{4} = 0'05$ , luego el ritmo de crecimiento es del 5%.

b) En este caso:

$Y_t = c \cdot Y_t + v(Y_{t+1} - Y_t) = c \cdot Y_t + v \cdot Y_{t+1} - v \cdot Y_t =$
$= Y_t(c - v) + v \cdot Y_{t+1}$; $v \cdot Y_{t+1} = Y_t - Y_t(c - v) = Y_t(1 - c + v)$; entonces:

$Y_{t+1} = Y_t(\frac{1}{v} - \frac{c}{v} + 1) = Y_t(1 + \frac{s}{v})$ , y se tendrá la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$Y_{t+1} - (1 + \frac{s}{v}) \cdot Y_t = 0$, cuya ecuación característica es: $r - (1 + \frac{s}{v}) = 0$, y la solución general de la ecuación buscada es:

$$Y_t = c \cdot (1 + \frac{s}{v})^t$$

La renta inicial será: $Y_0 = c$, o sea: $Y_t = Y_0 \cdot (1 + \frac{s}{v})^t$, que es la fórmula del interés compuesto, luego el ritmo de crecimiento es de:

$$g = \frac{s}{v} = \frac{0'2}{4} = 0'05 \quad \text{, o sea, del 5\%.}$$

c) En este caso:

$Y_t = c \cdot Y_t + v(Y_t - Y_{t-1}) = c \cdot Y_t + v \cdot Y_t - v \cdot Y_{t-1} =$
$= Y_t(c + v) - v \cdot Y_{t-1}$; $v \cdot Y_{t-1} = Y_t(c + v) - Y_t = Y_t(c + v - 1) = Y_t(v - s)$; $Y_{t-1} = Y_t(1 - \frac{s}{v})$, y se tendrá la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$(1 - \frac{s}{v}) \cdot Y_t - Y_{t-1} = 0$, cuya ecuación característica es: $(1 - \frac{s}{v}) \cdot r - 1 = 0$, y la solución general de la ecuación buscada es:

$$Y_t = c \cdot (\frac{v}{v - s})^t$$

La renta inicial será: $Y_0 = c$, o sea: $Y_t = Y_0 \cdot (\frac{v}{v-s})^t = Y_0 \cdot (1 + \frac{s}{v-s})^t$, que es la fórmula del interés compuesto, luego el ritmo de crecimiento es aquí de:

$$g = \boxed{\frac{s}{v-s} = \frac{0'2}{4-0'2} = 0'053}, \text{ o sea, del } 5'3\%,$$

que resulta ligeramente superior al que tiene lugar en los dos casos anteriores a) y b).

## Ejemplo 4

Suponga que alguien invierte 100 € el último día del mes en un depósito bonificado a una tasa anual de 6%, compuesto mensualmente. Si invierte 50 € adicionales el último día de cada mes subsiguiente, ¿cuánto dinero tendría depositado después de cinco años?.

*Solución:*

Modelaremos esta situación usando una ecuación en diferencias finitas.

Aquí $y_n$ representa la cantidad total de dinero (€) al fin del mes *n*. Por lo tanto, $y_0$ = 100 €. Dado que el 6% de interés se compone mensualmente, la cantidad de dinero existente al final del primer mes es igual a la suma de $y_0$ y la cantidad generada durante el primer mes, que es de: 100(0'06/12) = 0'50 € (dividimos por 12 porque estamos componiendo mensualmente). De aquí se deduce que: $y_1$ = (100 + 0'50 + 50) €, pues agregamos 50 € al final de cada mes. Vemos que $y_1 = y_0 + 0'005y_0 + 50 = 1'005 \cdot y_0 + 50$.

Trabajando sobre la ecuación anterior, vemos que: $y_2 = 1'005 \cdot y_1 + 50$. Y así sucesivamente, por lo que, en general, nuestra ecuación en diferencias finitas se convierte en:
$y_{n+1} - 1'005 \cdot y_n = 50$, con la condición inicial $y_0 = 100$.

La ecuación característica de la homogénea es: $r – 1'005 = 0$, con lo que se deduce la raíz real: $r = 1'005$, y nos queda la solución: $y_n^* = k \cdot 1'005^n$.

Ahora tantearemos la solución particular de la completa del tipo: $y_p = C$. Substituyendo en la ecuación anterior resulta que:

$$C – 1'005 \cdot C = 50 = C(1 – 1'005) = -0'005 \cdot C \ ; \ \ C = -50/0'005 = -10.000,$$

o sea, se tendrá la solución general: $y_n = y_n^* + y_p = k \cdot 1'005^n – 10.000$.

Pero la condición inicial dada exige que: $y_0 = k – 10.000 = 100$, con lo que $k = 10.100$, y se tendrá la solución particular:

$$y_n = 10.100 \cdot 1'005^n – 10.000,$$

ecuación que nos ofrece la cantidad de dinero acumulada al cabo de *n* meses.

Por último, al cabo de 5 años ($5 \times 12 = 60$ meses), se tendrá que:

$$\boxed{y_{60} = 10.100 \cdot 1'005^{60} – 10.000 = 3.623'39 \text{ €}.}$$

## Ejemplo 5

Determinar la evolución temporal de las ondas de presión de una instalación donde se ha observado que vienen dadas por las siguientes ecuaciones: $Q = 5 – 3P_t$ ; $Q = -2 + P_{t-1}$ .

*Solución:*

Las funciones observadas definitorias del transitorio hidráulico que nos ocupa ("golpe de ariete") son, respectivamente: $Q = 5 – 3P_t$ , $Q = -2 + P_{t-1}$.

Resolviendo el sistema dado, se tendrá que: $5 – 3P_t = -2 + P_{t-1}$. Por tanto, se tiene que:

$P_t + 1/3 \cdot P_{t-1} = 7/3$, que resulta ser una ecuación en diferencias de primer orden equivalente a: $3P_{t+1} + P_t = 7$, cuya ecuación característica de la homogénea es: $3r + 1 = 0$; $r = -(1/3)$.

Al ser: $0 < |r| < 1$ y $r < 0$, la solución converge de forma oscilante al punto de equilibrio estable; es decir, la presión de trabajo tiende a la presión de equilibrio. De hecho, la ecuación anterior se puede escribir de la forma siguiente:

$P_{t+1} = a \cdot P_t + c = -\frac{1}{3}P_t + \frac{7}{3}$, en que se cumple que: $a = -(1/3)$ y $c = 7/3$. Al ser:

$-1 < (a = r = -0.333) < 0$, todas las soluciones son oscilantes, y los términos de índice par tienen signo diferente que los de índice impar.

La solución de la ecuación homogénea es: $P^*_t = k\left(-\frac{1}{3}\right)^t$, con k como constante arbitraria, ya que el polinomio característico es: $3r + 1$.

Como solución particular busquemos: $P_p = k'$, y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$k' + \frac{1}{3}k' = \frac{7}{3};\quad \frac{4}{3}k' = \frac{7}{3};\quad k' = \frac{7}{4}\ .$$

La solución general de la ecuación no homogénea o completa es:

$$\boxed{P_t = P^*_t + P_p = \frac{7}{4} + k\left(-\frac{1}{3}\right)^t}\ ,\ \forall\ t \in \{\mathbf{N}\}.$$

el mismo modo, si hacemos $P_t = P_{t-1} = P_e$, resultará una presión de equilibrio de: $P_e = 7/4 = 1.75$ bar, con lo que el golpe de ariete que tiene lugar es del orden de: $\Delta P = P_0 – P_e = 4.00 – 1.75 = 2.25$ bar.

Puesto que la condición inicial dada exige que: $P_0 = 4.00$ bar, se tendrá que:

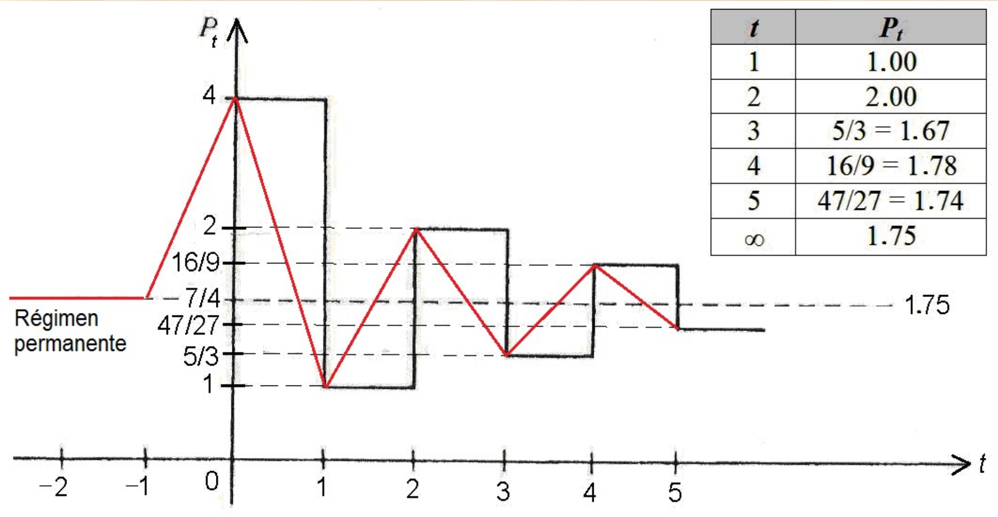
$$\frac{7}{4}+k\left(-\frac{1}{3}\right)^0=4\,;\quad \frac{7}{4}+k=4\,;\quad k=4-\frac{7}{4}=\frac{9}{4}.$$

Así pues, la solución particular es: $P_t=\frac{7}{4}+\frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^t$, $\forall\ t\in\{\mathbf{N}\}$ , y, a largo plazo, sucederá que:

$\lim\limits_{t\to+\infty}P_t=\frac{7}{4}+\frac{9}{4}\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^t=\frac{7}{4}$ = 1.75 bar, es decir, que la presión de equilibrio se estabilizará en (7/4) bar, y la sucesión indefinida convergente de Cauchy de los "picos" de presión (números reales) originados sigue la ley de formación o término general alternativo:

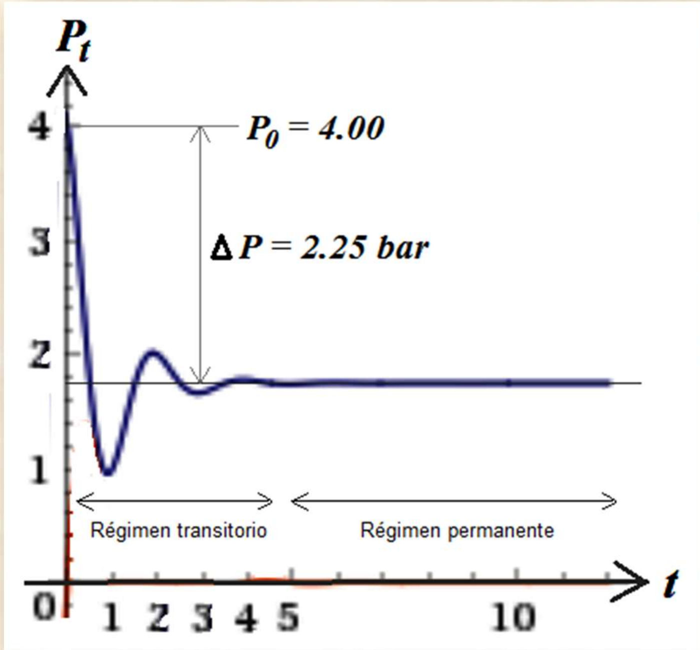
$$P_t=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^t\left(7(-3)^t+9\right)\ .$$

Gráficamente, lo expuesto hasta ahora se puede representar mediante las siguientes figuras:




| $t$ | $P_t$ |
|---|---|
| 1 | 1.00 |
| 2 | 2.00 |
| 3 | 5/3 = 1.67 |
| 4 | 16/9 = 1.78 |
| 5 | 47/27 = 1.74 |
| ∞ | 1.75 |

Evolución temporal discreta de las ondas de presión.




Evolución temporal continua de las ondas de presión.

## Ejemplo 6

Determinar la evolución temporal de las ondas de presión de una instalación hidráulica de baja presión, donde se ha observado que viene dada por las siguientes ecuaciones (Franquet, 2019):

$$\begin{cases} Q = 3 - 5P_t \\ Q = -2 + 4P_{t-1} \end{cases}$$

*Solución:*

Igualando ambas ecuaciones, se tiene que: $3 - 5P_t = -2 + 4P_{t-1}$ ; esto es: $5P_{t+1} + 4P_t - 5 = 0$, que es una ecuación equivalente en diferencias finitas, lineal, y de primer orden, cuya ecuación característica de la homogénea viene dada por: $5r + 4 = 0$, de donde: $r = -\frac{4}{5}$ .

Al ser: $0 < | r | < 1$, y $-1 < r < 0$ , la solución converge de forma oscilante al punto de equilibrio. Es decir, la presión tiende a alcanzar la presión de equilibrio.

La solución de la ecuación homogénea es, pues: $P_t^* = k(-\frac{4}{5})^t$ , siendo k una constante arbitraria.

Como solución particular de la ecuación completa ensayemos: $P_p = k'$, y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$5k' + 4k' = 5, \text{ de donde: } k' = 5/9,$$

y la solución general de la ecuación no homogénea o completa será:

$$\boxed{P_t = P_t^* + P_p = k(-\frac{4}{5})^t + \frac{5}{9}} \text{ , } \forall\, t \in \{\mathbf{N}\}$$

O también, para t = 0, se tendrá que: $P_0 = k + \frac{5}{9} = 0.60$, o sea:

$$\boxed{P_t = (P_0 - \frac{5}{9})\cdot(-\frac{4}{5})^t + \frac{5}{9} = \frac{2}{45}\cdot(-\frac{4}{5})^t + \frac{5}{9}} \text{ , } \forall\, t \in \{\mathbf{N}\}$$

Dando valores temporales, se obtiene que:

| *t (s)* | *$P_t$ (bar)* |
|---|---|
| 0 | 3/5 = 0.60 |
| 1 | 13/25 = 0.52 |
| 2 | 73/125 = 0.58 |
| 3 | 333/625 = 0.53 |
| 4 | 1793/3125 = 0.57 |
| 5 | 8453/15625 = 0.54 |
| … | … |
| +∞ | 5/9 = 0.56 |

A largo plazo sucederá, efectivamente, que:

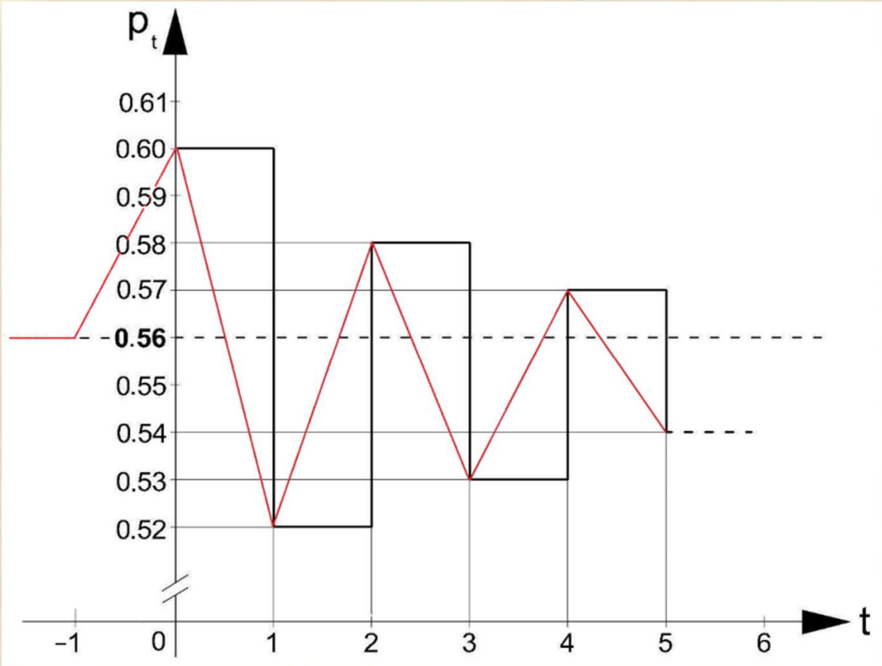
$$P_e = \lim_{t\to+\infty} P_t = \frac{5}{9} + k\cdot \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^t = \frac{5}{9} = 0.56\ \text{bar} \quad ,$$

con lo que la presión de trabajo se estabilizará necesariamente en 0.56 bar, y la sucesión indefinida convergente de Cauchy de los “picos” de presión (números reales) originados sigue la ley de formación o término general alternativo $\forall\ t \geq 1$:

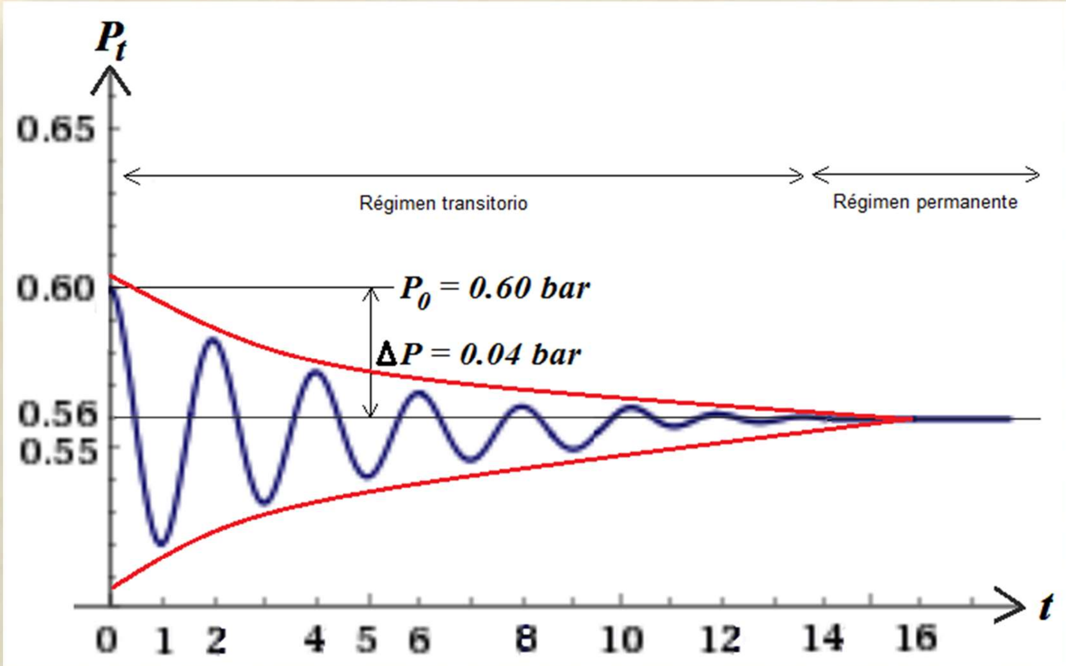
$$P_t = \frac{-432t^3 + 4032t^2 + 4153t - 33753}{3125(9t - 25)} \quad .$$

De hecho, también la presión de equilibrio vendría dada por la condición ($P_{t+1} = P_t = P_e$), o sea: $5P_e + 4P_e - 5 = 0$, de donde se deduce igualmente que: $P_e = 0.56$ bar, con lo que el pequeño golpe de ariete que tiene lugar es del orden de: $\Delta P = P_0 - P_e = 0.60 - 0.56 = 0.04$ bar.

Por último, las representaciones gráficas de la trayectoria temporal de las ondas de presión serán las siguientes, habiendo señalado en la segunda de ellas el efecto amortiguador debido al rozamiento que provoca la generación de una cierta envolvente o “empaquetamiento” de las expresadas ondas:




Evolución temporal discreta de las ondas de presión.




Evolución temporal continua de las ondas de presión.

## Ejemplo 7

Se observa que la presión derivada de un golpe de ariete en una instalación sigue la relación: $Q = 10 + \frac{1}{5} \cdot P_{t-1}$, donde $P_{t-1}$ indica el valor del pico de presión en el instante *t-1*. Si en otra medición efectuada en la misma tubería se ha observado que $Q = 20 - P_t$, encuéntrese la presión de equilibrio de la instalación y la trayectoria temporal de las ondas de presión, si la presión máxima alcanzada es de 10.00 bar.

*Solución:*

En consecuencia, deberá cumplirse que: $Q = 10 + \frac{1}{5} \cdot P_{t-1}$, de donde: . Por lo tanto, $P_t = 10 - \frac{1}{5} \cdot P_{t-1}$

$\Delta P_t = P_{t+1} - P_t = 10 - \frac{1}{5} \cdot P_t - P_t = 10 - \frac{6}{5} \cdot P_t$, de donde: $\Delta P_t + \frac{6}{5} \cdot P_t = 10$, o lo que es lo mismo: $5P_{t+1} + P_t = 50$, lo que implica una presión de equilibrio de valor ($P_{t+1} = P_t = P_e$): $6P_e = 50$, de donde: $P_e = (25/3)$ bar.

Se trata de una ecuación en diferencias finitas lineal de primer orden completa, con coeficientes y término independiente constantes, con: $P = \frac{6}{5}$ . Calculemos, en primer lugar, la solución general de la ecuación en diferencias finitas lineal reducida asociada. En efecto, como sucede que, $\forall t \in T \subset \{\mathbf{N}\}$, se tendrá:

$$0 = \Delta P_t + \frac{6}{5} \cdot P_t = P_{t+1} - P_t + \frac{6}{5} \cdot P_t = P_{t+1} + \frac{1}{5} \cdot P_t \text{ , entonces: } P_{t+1} = -\frac{1}{5} \cdot P_t \text{ .}$$

Dando valores concretos al subíndice *t*, tenemos que:

$$\begin{cases} \text{Para } t = 0, \quad P_1 = -\frac{1}{5} \cdot P_0. \\ \text{Para } t = 1, \quad P_2 = -\frac{1}{5} \cdot P_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot P_0. \\ \text{Para } t = 2, \quad P_3 = -\frac{1}{5} \cdot P_2 = -\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot P_0. \\ \text{Para } t = 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

, y así sucesivamente. Por lo tanto, $\forall t \in T \subset \{\mathbf{N}\}$, tenemos la siguiente expresión:

$$P_t = (-1)^t \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t \cdot P_0 = (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot P_0 \quad ,$$

siendo $P_0$ un parámetro que depende de las condiciones iniciales dadas del problema y que representa la presión máxima que se deriva del golpe de ariete.

La solución general $P_t$ de la ecuación en diferencias finitas lineales completa se obtiene introduciendo en su expresión el cambio de variable:

$$P_t = u_t \cdot v_t,$$

siendo $u_t$ la solución general de la ecuación en diferencias finitas lineal reducida asociada.
La ecuación en diferencias finitas que nos permite obtener la expresión de $v_t$ es la siguiente:

$$\Delta v_t = \frac{q(t)}{u_{t+1}} = \frac{10}{(-1)^{t+1}\cdot 5^{-(t+1)} + u_t} = \frac{1}{u_0}\cdot(-1)^{t+1}\cdot 10\cdot 5^{t+1}$$ , de donde: $v_{t+1} = \frac{1}{u_0}\cdot(-1)^{t+1}\cdot 10\cdot 5^{t+1} + v_t$ .

Dando ahora valores concretos al subíndice **t**, tenemos que:

$$\begin{cases} \text{Para } t = 0\,\text{s}, \quad v_1 = \frac{1}{u_0}\cdot(-1)^1\cdot 10\cdot 5^1 + v_0. \\ \text{Para } t = 1\,\text{s}, \quad v_2 = \frac{1}{u_0}\cdot(-1)^2\cdot 10\cdot 5^2 + v_1 = \frac{1}{u_0}\cdot 10\cdot 5^2 - \frac{1}{u_0}\cdot 10\cdot 5^1 + v_0. \\ \text{Para } t = 2\,\text{s}, \quad v_3 = \frac{1}{u_0}\cdot(-1)^3\cdot 10\cdot 5^3 + v_2 = -\frac{1}{u_0}\cdot 10\cdot 5^3 + \frac{1}{u_0}\cdot 10\cdot 5^2 - \frac{1}{u_0}\cdot 10\cdot 5^1 + v_0. \end{cases}$$

..., y así sucesivamente.

Por lo tanto, $\forall t \in T \subset \{\mathbf{N}\}$ con $t \geq 1$, se tiene que:

$$v_t = v_0 + \sum_{s=1}^{t}\frac{1}{u_0}\cdot(-1)^s\cdot 10\cdot 5^s = v_0 + \frac{10}{u_0}\cdot\sum_{s=1}^{t}(-1)^s\cdot 5^s =$$

$\{$se trata de la suma de los *t* primeros términos de una progresión geométrica de razón -5 y de primer término -5$\}$

$$= v_0 + \frac{10}{u_0}\cdot\left(\frac{-5-(-1)^{t+1}\cdot 5^{t+1}}{1+5}\right) = v_0 - \frac{5}{u_0}\cdot\left(\frac{5+(-1)^{t+1}\cdot 5^{t+1}}{3}\right).$$

En su consecuencia, la solución general $P_t$ de la ecuación en diferencias finitas lineal completa de primer orden, $\forall t \in T \subset \{\mathbf{N}\}$, es la siguiente:

$$P_t = u_t\cdot v_t = (-1)^t\cdot 5^{-t}\cdot u_0\cdot\left[v_0 - \frac{5}{u_0}\cdot\left(\frac{5+(-1)^{t+1}\cdot 5^{t+1}}{3}\right)\right] =$$

$$= (-1)^t\cdot 5^{-t}\cdot\left[P_0 - 5\cdot\left(\frac{5+(-1)^{t+1}\cdot 5^{t+1}}{3}\right)\right]$$

, siendo $P_0$ un parámetro que depende directamente de las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema aquí planteado.

Finalmente, como se sabe que: $P_0$ = 10.00 bar, considerando $\forall t \in T \subset \{\mathbf{N}\}$, podremos dibujar la pertinente trayectoria temporal de las ondas de presión.

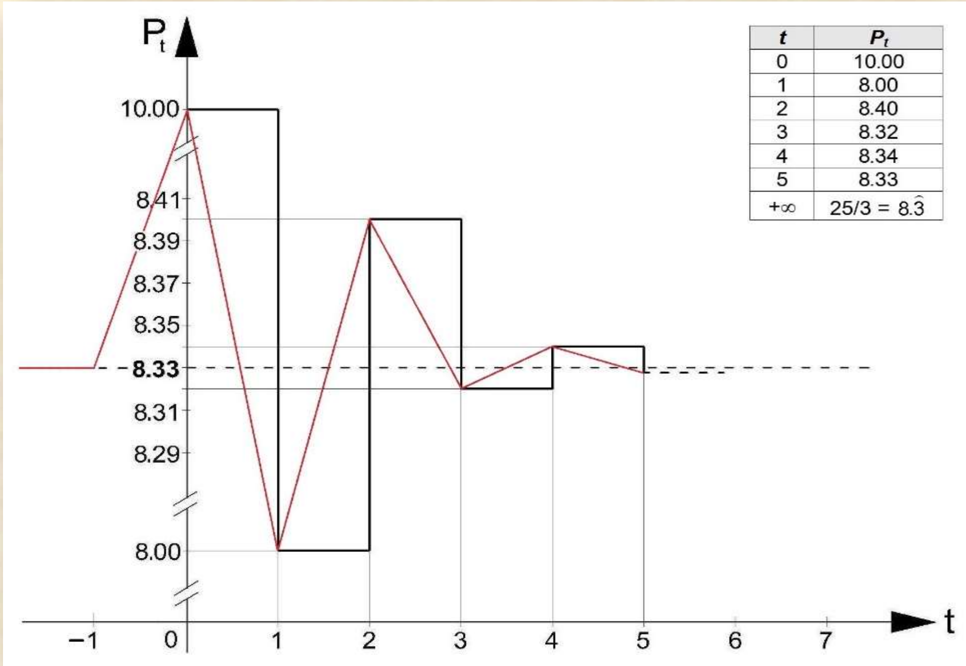
$$P_t = (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot \left[10 - 5 \cdot \left(\frac{5 + (-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3}\right)\right] = (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot 5 \cdot \left[2 - \frac{5}{3} - \frac{(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3}\right] =$$

$$= (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot 5 \cdot \left[2 - \frac{5}{3}\right] - (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot 5 \cdot \left[\frac{(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3}\right] =$$

$$= (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot \frac{5}{3} + \frac{25}{3} = \frac{5}{3} \cdot \left[5 + (-1)^t \cdot 5^{-t}\right] = \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^t + \frac{25}{3},$$

y la presión de equilibrio o estática tenderá, efectivamente, al valor: $P_e = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^t + \frac{25}{3}\right] = \frac{25}{3}$ bar ,

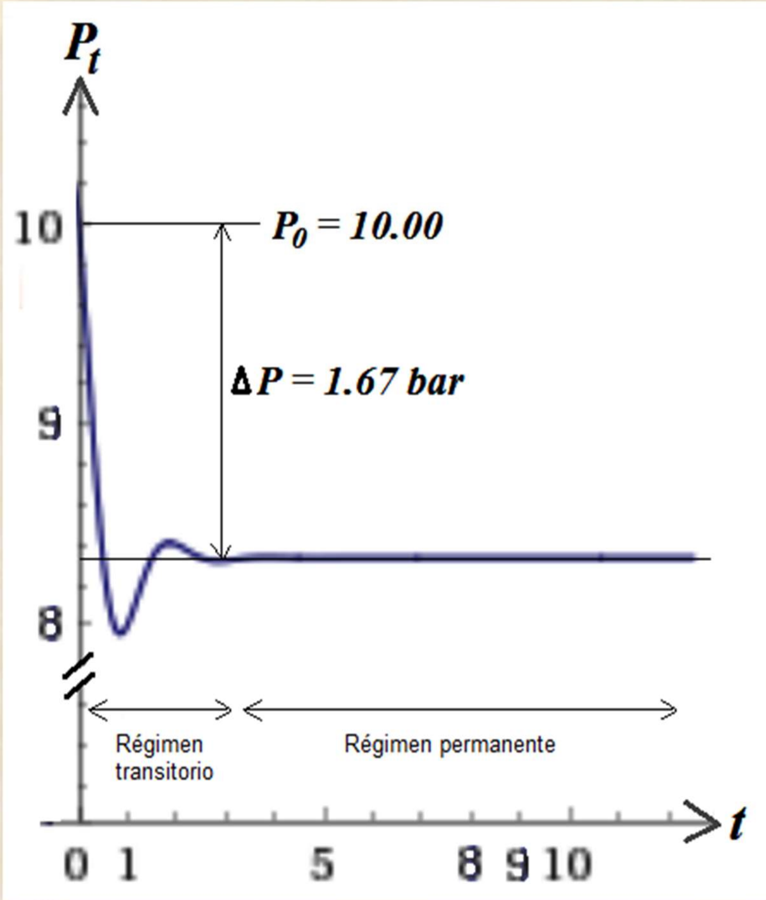
tal como se ha calculado con anterioridad, con las siguientes representaciones gráficas:




Evolución temporal discreta de las ondas de presión.

con lo que el golpe de ariete que tiene lugar es del orden de:

$$\Delta P = P_0 - P_e = 10.00 - 8.33 = 1.67 \text{ bar},$$




Evolución temporal continua de las ondas de presión.

y la sucesión indefinida convergente de Cauchy de los “picos” de presión (números reales) originados sigue la ley de formación o término general alternativo: $P_t = \frac{5^{1-t}}{3}\left[(-1)^t + 5^{t+1}\right]$.

Veamos que r = -1/5, por lo que: |r| < 1 y también se cumple que: -1 < (r = -1/5) < 0, por lo que todas las soluciones oscilantes convergen a un punto de equilibrio estable, puesto que se trata de una sucesión amortiguada.

En este caso, pues, a largo plazo, se tiene que la presión de equilibrio o estática es:

$$P_e = \lim_{t \to +\infty} P_t = \frac{25}{3} = 8.33 \text{ bar}$$

De hecho, considerando como siempre que: $P_t = P_{t-1} = P_e$ para la búsqueda de la presión de equilibrio o estática de la instalación, se tendría, efectivamente, que:

$$5P_e = 50 - P_e, \text{ de donde: } P_e = (25/3) \text{ bar}.$$

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 11

## ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS (II)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

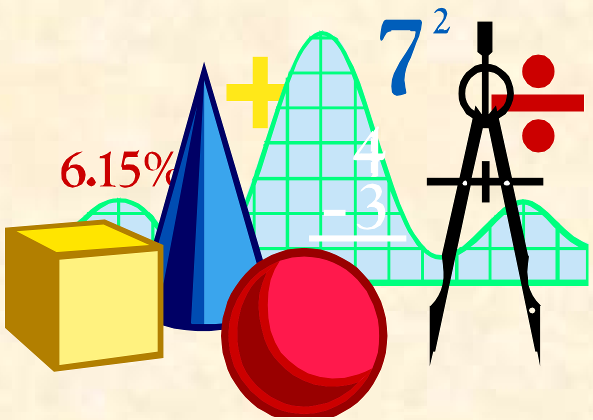
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





### 1.3.3. Si $b_n$ es una función exponencial

Si el segundo miembro de la ecuación es del tipo: $b_n = h \cdot a^n$, se debe ensayar otra función exponencial de la forma: $u_p = C \cdot a^n$, donde la constante C se determina igualando coeficientes. Si *a* fuera una raíz de orden de multiplicidad *p* de la ecuación característica de la homogénea, la solución particular que debe ensayarse será del tipo: $u_p = C \cdot n^p \cdot a^n$, de tal modo que este término no aparezca en la ecuación complementaria (solución de la ecuación homogénea asociada).

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos representativos:

Ejemplo 1

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias:

$$a_{n+3} - 7a_{n+2} + 16a_{n+1} - 12a_n = 5 \cdot 2^n,\ \forall n \in \{\mathbf{N}\}.$$

*Solución:*

Como es una ecuación completa o no homogénea, primero calculamos la solución de la homogénea: $a_{n+3} - 7a_{n+2} + 16a_{n+1} - 12a_n = 0$, de ecuación característica:
$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$, cuyas raíces son: $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ y $r_3 = 2$ ;
($r_2$ y $r_3$ forman una raíz doble = 2).

Por tanto, la solución de la homogénea es: $a_n^* = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot n \cdot 2^n$.

Ahora buscamos una solución particular de la completa probando con un polinomio de la forma $a_p = a \cdot n^2 2^n + b$, por ser 2 una solución doble de la ecuación característica.

Substituyendo en la ecuación completa resultará que:

$$a(n+3)^2 \cdot 2^{(n+3)} + b - 7\,[a(n+2)^2 \cdot 2^{(n+2)} + b] +$$
$$+16[a(n+1)^2 \cdot 2^{(n+1)} + b] - 12[an^2 \cdot 2^n + b] = 5 \cdot 2^n$$

Simplificando se obtiene: $-a \cdot 2^{n+3} - 2b = 5 \cdot 2^n$, e identificando coeficientes, resultará que:

$$a = -\frac{5}{8} \text{ y } b = 0 \ .$$

Y la solución general de la ecuación completa será:

$$\boxed{a_n = a_n{}^* + a_p = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot n \cdot 2^n - \frac{5}{8} n^2 \cdot 2^n} \ , \ \forall\ c_1, c_2, c_3 \in \{\Re\}$$

## Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias: $a_{n+3} - a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n = 13\cdot 3^n$, $\forall n \geq 0$.

*Solución:*

La ecuación característica de la homogénea es:

$r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$ ; se obtiene: $r_1 = 1$ ; y operando según la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1) & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \rightarrow r^2 + 4 = 0; \qquad r = \pm\sqrt{-4} = \left\langle \begin{array}{l} 2i = r_2 \\ -2i = r_3 \end{array} \right. ;$$

y la solución de la homogénea en sus diversas formas es, teniendo en cuenta que $\alpha = 0$ y $\beta = 2$:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2; \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\beta}{\alpha} = \infty; \quad \theta = \frac{\pi}{2}; \quad \text{con lo que se tiene las diferentes formas:}$$

$$a^*_n = C_1 + 2^n\left(C_2\cdot\cos\frac{n\pi}{2} + C_3\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\right) = C_1 + C_2\cdot 2^n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \phi\right) = C_1 + (C_2 + i\cdot C_3)\cdot(2i)^n + (C_2 - i\cdot C_3)\cdot(-2i)^n.$$

Investigaremos ahora una solución particular de la ecuación completa del tipo: $a_p = A\cdot 3^n$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tiene que:

$$A\cdot 3^{n+3} - A\cdot 3^{n+2} + 4A\cdot 3^{n+1} - 4A\cdot 3^n = 13\cdot 3^n \,;\; 27A\cdot 3^n - 9A\cdot 3^n + 12A\cdot 3^n - 4A\cdot 3^n = 26A\cdot 3^n = 13\cdot 3^n \,;$$

de donde $A = \frac{1}{2}$, y la solución buscada será:

$$\boxed{a_n = a^*_n + a_p = C_1 + 2^n\left(C_2\cdot\cos\frac{n\pi}{2} + C_3\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{2}}, \ \forall\, C_1, C_2, C_3 \in \{\Re\}$$

## 1.3.4. Si $b_n$ es una expresión trigonométrica

Éste es, sin duda, un caso menos común que los anteriores. Si el segundo miembro es de la forma *cos an* o bien *sin an*, se ensayará una solución de la forma: A·cos an + B·sin an. Veamos, al respecto, el siguiente ejemplo representativo:

Ejemplo

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas: $u_{n+2} + u_n = \cos n\cdot\pi$, $\forall n \in \{\mathbf{N}\}$.

*Solución:*

La solución de la homogénea será: $u_n^* = c_1\cdot\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$, con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

Para encontrar una solución particular de la ecuación completa se debe investigar, como se ha dicho, una solución de la forma: $u_p = A\cdot\cos n\cdot\pi + B\cdot\sin n\cdot\pi$, obteniéndose los valores: A = ½ y B = 0, por lo que la solución general buscada, será:

$$\boxed{u_n = u_n^* + u_p = c_1\cdot\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\cdot\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos n\pi}{2}}, \forall\ c_1, c_2 \in \{\Re\}$$

NOTA: En este caso, si el segundo miembro de la ecuación en diferencias finitas planteada fuese de la forma: $\cos n\cdot\frac{\pi}{2}$, o bien: $\sin n\cdot\frac{\pi}{2}$, se habría investigado una solución particular que es de la forma: $u_p = n(A\cdot\cos n\cdot\frac{\pi}{2} + B\cdot\sin n\cdot\frac{\pi}{2})$, esto es, la solución que habitualmente se ensaya multiplicada por una potencia conveniente de *n*, a fin de que no existan combinaciones lineales indeseables que produzcan molestos fenómenos de *resonancia*.

### 1.3.5. Si $b_n$ es una combinación lineal de los anteriores

En este caso, se ensayará también una combinación lineal de las soluciones particulares propuestas. Del mismo modo, si el segundo miembro es el producto de una exponencial $a^n$ por un polinomio bastará con ensayar el producto de dicha exponencial por un polinomio del mismo grado, teniendo en cuenta las advertencias realizadas en los epígrafes anteriores. Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos representativos:

Ejemplo 1

Resuélvase la ecuación recurrente: $u_{n+1} - 2u_n = 2^n(1 + n)$, $\forall n \in \{\mathbf{N}\}$.

*Solución:*

La ecuación característica de la homogénea es: $r - 2 = 0$, con lo que la solución de la homogénea será: $u_n^* = c\cdot 2^n$. Ensayaremos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo: $u_p = n\cdot 2^n(an + b)$, para no tener problemas de resonancia, por lo que substituyendo en la ecuación inicial y dividiendo ambos miembros por $2^n$, se tendrá: $2(n + 1)[a(n + 1) + b] - 2n(an + b) = (n + 1)$, y al final, identificando coeficientes, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 2b + 1 \\ 2a + 2b = 1 \end{cases}$$

de donde se deduce que: $a = b = 1/4$, por lo que la solución particular buscada resulta ser: $u_p = n\cdot 2^n\cdot \frac{n+1}{4}$, y la solución general buscada será:

$$u_n = \boxed{u_n^* + u_p = c\cdot 2^n + n\cdot 2^n\cdot \frac{n+1}{4} = 2n(c + \frac{n^2+n}{4}) = f(n)}, \ \forall\ c \in \{\Re\}$$

## Ejemplo 2

Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n + 1$, $\forall n \in \{\mathbf{N}\}$.

*Solución:*

La ecuación característica es: $r^2 - 4r + 4 = 0$, y posee las raíces reales: $r_1 = r_2 = 2$ (doble), por lo que la solución de la homogénea es:

$$y_n^* = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n.$$

Para ensayar ahora una solución particular de la ecuación completa, lo llevaremos a cabo por partes, o sea, buscaremos la solución para: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n$, con lo que probaremos: $y_p' = c' \cdot n^2 \cdot 2^n$, ya que la base 2 es también raíz doble de la ecuación característica. Substituyendo en la ecuación inicial llegaríamos a que: $8c' \cdot 2^n = 2^n$, con lo que necesariamente: $c' = 1/8 \rightarrow y_p' = (1/8) \cdot n^2 \cdot 2^n$.

Del mismo modo, buscaremos la otra solución particular para la ecuación: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 1$. En este caso, el término independiente es una constante y, por consiguiente, un polinomio de grado cero. Ensayando, pues, otro polinomio de grado cero, se tendrá: $y_p'' = c''$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial, se llega a que:

$$c'' - 4c'' + 4c'' = c'' = 1 \rightarrow y_p'' = 1,$$

y la solución general de la ecuación buscada será:

$$\boxed{y_n = y_n^* + y_p' + y_p'' = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n + \frac{1}{8} n^2 \cdot 2^n + 1}, \ \forall\, c_1, c_2 \in \{\Re\}$$

## 2. ECUACIÓN NO LINEAL

En este tipo de ecuaciones recurrentes, algún término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a una potencia diferente a la primera potencia, como por ejemplo:

$$u_{n+1}^2 = 3u_n^2,\ u_0 = 3,\ \forall n \geq 0.$$

Se puede transformar una relación de recurrencia no lineal a lineal para poder resolverla mediante una substitución algebraica del tipo: $b_n = u_n^2$.

Esta modalidad de ecuaciones en diferencias finitas, cuya presencia resulta menos común en el análisis de algoritmos que las lineales, se pueden resolver también, además de la substitución ya reseñada, por diferentes procedimientos (cambio de variable, inducción constructiva, fórmulas maestras, etc.). Veámoslo posteriormente mediante un sencillo ejemplo en que se trata de hallar $u_n$ en función de n.

Existen, sin embargo, otras ecuaciones no lineales que resultan más complicadas de resolver. Un ejemplo de ellas podría ser el siguiente: $u_{n+2}^3 - 3u_{n+1} \cdot u_n = 1$.

En cualquier caso, toda ecuación en diferencias finitas da una relación recurrente siempre que podamos despejar. Así, en el ejemplo anterior, es:

$$u_{n+2} = \sqrt[3]{1 + 3u_n \cdot u_{n+1}}$$

Ello posibilita calcular un gran número de términos partiendo de los iniciales, siempre que éstos sean fijos y mediante el uso de ordenadores con el *software* adecuado. El inconveniente de esta solución estriba en que puede complicar notablemente el estudio de algunas propiedades importantes como, por ejemplo, los comportamientos a largo plazo, o bien los estudios de sensibilidad, y no permite, en general, llevar a cabo trabajos sobre la expresión analítica de las funciones.

Ejemplo

Resolver la ecuación recurrente: $u_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2n - u_n}$, siendo: $u_1 = ½$, $\forall n \geq 0$.

*Solución:*

Para ello, efectuamos un cambio de variable: $u_n = n \cdot v_n$, con lo que se obtiene la expresión siguiente:

$(n+1)v_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2n - n \cdot v_n}$, de donde: $v_{n+1} = \dfrac{1}{2 - v_n}$. Como: $u_1 = v_1 = ½$, se tendrá que:

$$v_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}; \quad v_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}; \quad v_4 = \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

y en general se cumple que: $v_n = \dfrac{1}{2 - \frac{n-1}{n}} = \dfrac{n}{n+1}$,

y como $u_n = n \cdot v_n$, se obtiene la solución particular buscada: $\boxed{u_n = \dfrac{n^2}{n+1}}$.

## 3. APLICACIÓN A LA TEORÍA MICROECONÓMICA

Ejemplo 1

La demanda inversa de patatas por parte de los consumidores responde al precio del mercado según la función siguiente: $q = 500\ (10 – p_t)$. La oferta inversa de patatas por parte de los agricultores, que es proporcional a la superficie sembrada de dicho tubérculo, responde al precio de mercado que rigió el año o campaña anterior, según la función siguiente: $q = 1.000\ (p_{t-1} – 1)$. Se pide:

1º) Determinar el precio de equilibrio del mercado y la producción de patatas correspondiente, así como los ingresos netos de los agricultores considerando un 15% de impuestos.
2º) Estudiar la estabilidad del equilibrio del mercado.

*Solución:*
Se contestará a ambos apartados simultáneamente. La condición de equilibrio es que la oferta del mercado iguale a la demanda, por lo que igualando ambas ecuaciones resulta:

$$500\ (10 – p_t) = 1.000\ (p_{t-1} – 1);\ 10 – p_t = 2p_{t-1} – 2;\ \text{y resulta que: } p_t + 2p_{t-1} = 12,$$

o bien su ecuación en diferencias finitas lineal de primer grado equivalente: $p_{t+1} + 2p_t = 12$.

La ecuación característica de la homogénea será: $r + 2 = 0$; $r = -2$ y la solución de la homogénea será: $p_t^* = c\cdot(-2)^t$.

Ensayamos ahora una solución particular de la ecuación completa, del tipo: $p_p = k$, y substituyendo en la ecuación inicial se tiene que: $k + 2k = 12$, de donde: $k = 4$, con la solución general:

$$p_t = p_t^* + p_p = c\cdot(-2)^t + 4$$

Si ahora hacemos $t = 0$, $p_0 = c + 4$, entonces: $c = p_0 – 4$, luego:

$$p_t = (p_0 - 4)\cdot(-2)^t + 4,\ \forall\ t \in \{\mathbf{N}\}$$

De hecho, genéricamente, la solución de la ecuación recurrente: $a\cdot p_t + b\cdot p_{t-1} + c = 0$, es la siguiente:

$$p_t = (p_0 + \frac{c}{a-b})\cdot(-\frac{b}{a})^t - \frac{c}{a+b}$$

Veamos, en fin, que el precio de equilibrio es 4 €, y el mercado oscila alrededor del nivel de equilibrio con tendencia a alejarse. En efecto, al ser $|r| = 2 > 1$ y $r < 0$, las soluciones (todas las sucesiones) siempre divergen de forma oscilante (salvo, evidentemente, la solución constantemente igual a 4 €). En particular, el punto de equilibrio no es estable, puesto que se trata de oscilaciones explosivas. En este caso, el modelo solo tiene sentido para un período de tiempo limitado, precisamente el período a partir del cual aparecen precios negativos.

El precio de equilibrio del mercado resultará de la ecuación que iguala la oferta y la demanda (con $p_t = p_{t-1}$) siguiente:

500 (10 – p) = 1.000 (p – 1), de donde: p = 4 € y q = 500 (10 – 4) = 3.000,

con lo que los ingresos netos de los agricultores (deduciendo los impuestos) serán:

$$I = 0'85 \times p \times q = 0'85 \times 4 \times 3.000 = 10.200\ €$$

## Ejemplo 2

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+2} + 4P_{t+1} + 4P_t = 7$, $\forall\ t \in \{\mathbf{N}\}$, con las condiciones iniciales: $P_0$ = 1'00 €/ud. y $P_1$ = 2'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

*Solución:*

a) La ecuación característica de la homogénea, que tiene una raíz real doble, es la siguiente:

$$r^2 + 4r + 4 = 0\ ; \quad r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -2 \\ -2 \end{array} \right. \quad ;\ \text{y la solución es:}$$

$$P_t^* = C_1 \cdot (-2)^t + t \cdot C_2 \cdot (-2)^t = f(t).$$

Ensayaremos ahora una solución particular de la completa o inhomogénea, del tipo constante: $P_p = a$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$$a + 4a + 4a = 9a = 7;\ a = 7/9\ ;$$

y la solución general del problema planteado será:

$$P_t = P_t^* + P_p = C_1 \cdot (-2)^t + t \cdot C_2 \cdot (-2)^t + 7/9.$$

Aplicando las condiciones iniciales dadas en el enunciado, se tendrá que:

$$\begin{cases} P_0 = C_1 + 7/9 = 1 \\ P_1 = -2C_1 - 2C_2 + 7/9 = 2 \end{cases}$$

De ello se deduce que el valor de las constantes viene dado por: $C_1 = 2/9$ y $C_2 = -(5/6)$, con lo que la expresión particular buscada de la trayectoria temporal del precio será:

$$P_t = (2/9)\cdot(-2)^t - t\cdot(5/6)\cdot(-2)^t + 7/9 = (-2)^t\left(\frac{2}{9} - \frac{5t}{6}\right) + \frac{7}{9} = f(t)\ .$$

b) A largo plazo sucederá que:

$$\lim_{t\to+\infty} P_t = \lim_{t\to+\infty} (-2)^t\cdot\left(\frac{2}{9} - \lim_{t\to+\infty}\frac{5t}{6}\right) + \frac{7}{9}\ .$$

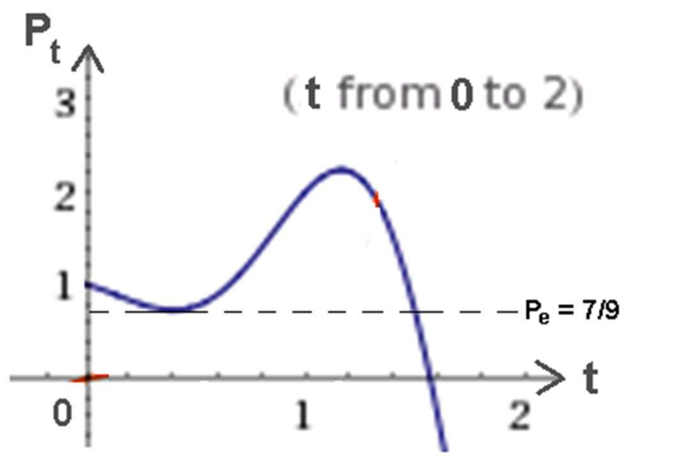
Debe tenerse en cuenta que el segundo límite de la expresión anterior es infinito y el primero ofrece una solución compleja infinita, por lo que dicha expresión no existe en el campo de los números reales y, en su consecuencia, carece de significación real.

En cualquier caso, a partir de t = 2 (con $P_t = -5$) se obtienen algunos precios negativos, lo que carece de significado económico.

Desde luego, se tendría un supuesto precio de equilibrio de:

$$P_{t+2} = P_{t+1} = P_t = P_e;\ 9P_e = 7, \text{ de donde: } P_e = 7/9 \text{ €/ud.}$$

c) La representación gráfica correspondiente será (considerando la *t* como variable continua), así como la tabla con números enteros:




| $t$ | $P_t$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | -5 |
| 3 | 19 |
| 4 | -49 |
| 5 | 127 |
| -- | -- |

## Ejemplo 3

Hallar la evolución temporal del precio de un bien determinado en un modelo donde la oferta y la demanda vienen dadas por:

$$\begin{cases} D_t = 2 - 3P_t \\ O_t = -3 + 2P_{t-1} \end{cases}$$

y el ajuste del precio se efectúa de dos maneras diferentes: a) no precisamente a través del equilibrio del mercado sino mediante la siguiente ecuación: $P_{t+1} = P_t - 2(O_t - D_t)$, en que se relacionan los precios con la variación en el nivel de inventario, y b) con equilibrio del mercado, suponiendo un $P_0$ = 1'50 €/ud. y viniendo las cantidades expresadas en miles de unidades diarias.

*Solución:*

a) En este primer caso, pues, se cumplirá que:

$$P_{t+1} - P_t = -2(-3 + 2P_{t-1} - 2 + 3P_t) = 6 - 4P_{t-1} + 4 - 6P_t \text{; o también:}$$

$$P_{t+1} - P_t + 4P_{t-1} + 6P_t = 10, \text{ o bien su ecuación equivalente:}$$

$P_{t+2} + 5P_{t+1} + 4P_t = 10$, que es una ecuación inhomogénea de segundo orden, cuya ecuación característica de la homogénea viene dada por la ecuación:

$$r^2 + 5r + 4 = 0;\ r = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2};$$

de donde: $r_1 = -1$ y $r_2 = -4$, y su solución será: $P_t^* = c_1 \cdot (-1)^t + c_2 \cdot (-4)^t$ .

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo constante: $P_p = a$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tendrá que: $a + 5a + 4a = 10a = 10$, de donde: $a = 1$, con lo que se tiene la solución general buscada:

$$\boxed{P_t = P_t^* + P_p = c_1 \cdot (-1)^t + c_2 \cdot (-4)^t + 1} \ .$$

A largo plazo sucederá que:

$$\lim_{t\to+\infty} P_t = c_1 \cdot \lim_{t\to+\infty} (-1)^t + c_2 \cdot \lim_{t\to+\infty} (-4)^t + 1 \ .$$

Este límite no existe, ya que nos hallamos en presencia de una sucesión oscilante. Ello puede comprobarse calculando por separado los límites:

- $\lim_{t\to\infty}\left(c_1(-1)^t\right) = c_1 \sin\infty + ic_1 \sin\infty$ , que es un número complejo.
- $\lim_{t\to\infty}\left(c_2(-4)^t\right) = unit\_circle \cdot \infty$ , donde $unit\_circle$ representa un punto arbitrario de la circunferencia unidad del plano complejo (p.e. 1, -1, i, -i), es decir, que se trata de una solución compleja infinita.

Per lo tanto, llegamos a la conclusión de que el límite mencionado no existe en el conjunto de los números reales y, en su consecuencia, este caso carece de significado económico.

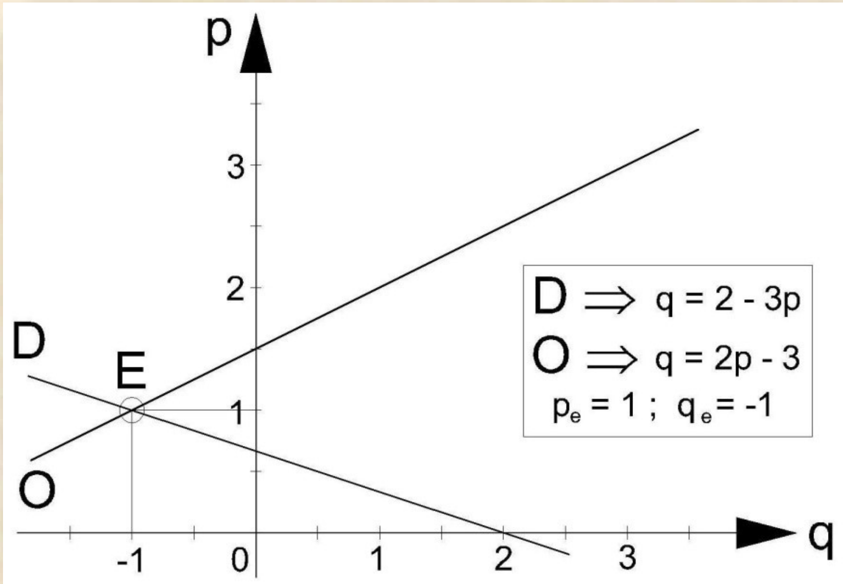
b) En este segundo caso, se cumplirá, igualando la oferta y la demanda, que ($P_e = P_t = P_{t-1}$):

$2 - 3P_t = 2P_{t-1} - 3$, y resulta la ecuación equivalente:

$3P_{t+1} + 2P_t = 5$; $5P_e = 5$ ; $P_e = 1'00$ €/ud., con $q_e = -1$,

que es una ecuación inhomogénea en diferencias finitas, lineal y de primer orden, cuya ecuación característica de la homogénea viene dada por la expresión: $3r + 2 = 0$, de donde: $r = -\frac{2}{3}$ .

La representación gráfica del equilibrio del mercado, será la siguiente:




Oferta, demanda y punto de equilibrio.

Al ser: $0 < | r | < 1$, y $-1 < r < 0$ , la solución converge de forma oscilante a un punto de equilibrio estable. Es decir, los precios tienden al precio de equilibrio.

La solución de la ecuación homogénea es, pues: $P_t^* = k$ , siendo k una constante arbitraria. Como solución particular de la ecuación completa ensayemos: $P_p = k'$, y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$3k' + 2k' = 5, \text{ de donde: } k' = 1,$$

y la solución general de la ecuación no homogénea o completa será:

$$\boxed{P_t = P_t^* + P_p = k\left(-\frac{2}{3}\right)^t + 1}, \ \forall\, t \in \{\mathbf{N}\}.$$

Puesto que nos dicen que $P_0 = 1'50$ €/ud., se tendrá que:

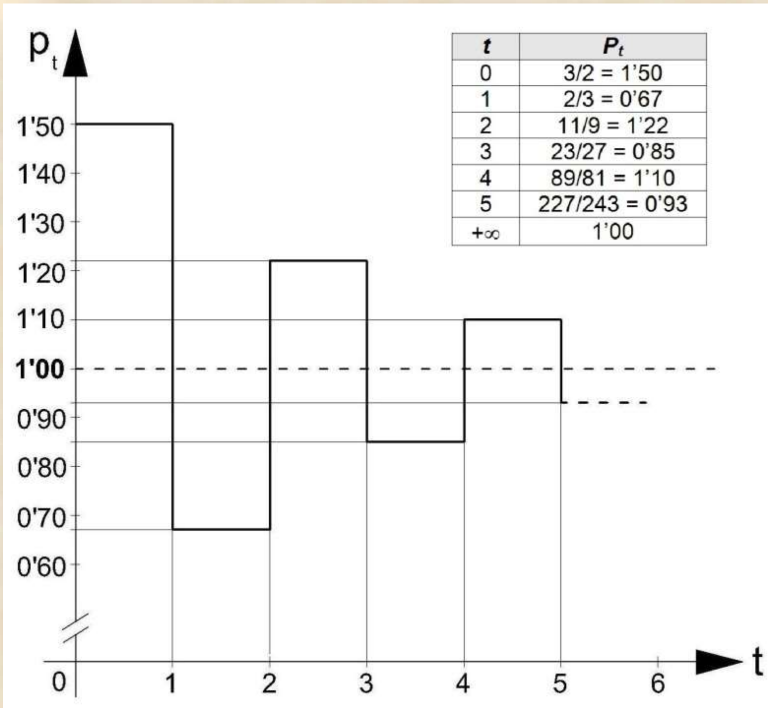
$P_0 = k + 1 = 1'50$, por lo que: $k = 0'50$, luego la solución particular es: $\boxed{P_t = 0'5\left(-\frac{2}{3}\right)^t + 1}$ , $\forall\, t \in \{\mathbf{N}\}$,

y, a largo plazo, sucederá que:

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} P_t = 1 + 0'5 \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^t} = 1,$$

es decir, que el precio de equilibrio se estabilizará en 1'00 €/ud.

Por último, la representación gráfica de la trayectoria temporal del precio de mercado será la siguiente:




Evolución temporal del precio.

## 4. APLICACIÓN A LA INGENIERÍA

Ejemplo

En una instalación determinada de RLAF (riego localizado de alta frecuencia) para cultivo hortícola bajo plástico, a base de tubería secundaria de PVC de 160 mm (DN 6") que abastece las cintas regantes de baja presión, por la que circula agua en régimen de Weyrauch (1915), se simula el siguiente modelo hidráulico para definir la trayectoria temporal de las ondas de presión generadas por el cierre normal de una válvula de compuerta, resultando el siguiente análisis ecuacional no lineal de la trayectoria temporal del golpe de ariete producido (Franquet, 2019):

$$2P_{t+1}^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt[3]{\sin t}} = -\int_0^1 \ln t \cdot dt \; - P_t^2, \text{ con } P_0 = 3 \text{ bar}, \; \forall t \geq 0.$$ Se desea saber:

a) La trayectoria temporal de las ondas de presión.
b) La tendencia de la presión de trabajo.

*Solución:*

a)Resolveremos, en primer lugar, las integrales que aparecen en ambos miembros de la expresión dada, con lo que: $\int_0^1 \ln t \cdot dt = \left[t \cdot \ln t - t\right]_0^1 = -1$ , teniendo en cuenta, además, que:

$$2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt[3]{\sin t}} = 2\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt[3]{\sin t}} = 2\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{3}{2}\sin^{2/3} t\right]_\varepsilon^{\pi/2} = 3$$ , resultando, en definitiva, la ecuación recurrente no lineal: $3P_{t+1}^2 = 1 - P_t^2$.

La previa determinación del valor del golpe de ariete máximo (positivo o negativo) en función de las características de la instalación, nos ha ofrecido como resultado la condición inicial expresada. Se puede transformar una relación de recurrencia no lineal, como la dada, a otra lineal para poder resolverla mediante una substitución algebraica del tipo: $b_t = P_t^2$ y $b_{t+1} = P_{t+1}^2$ .

En este caso, resultará la expresión: $3b_{t+1} + b_t = 1$, y la solución de la homogénea ofrece:

$r = -1/3$, con lo que: $b_t^* = C(-1/3)^t \Rightarrow b_t = b_t^* + b_p = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^t \left[-12C + (-3)^t - 1\right] \Rightarrow$ con $P_0 = 3$ bar $\Rightarrow$

$b_0 = 9$ bar$^2$ y $C = -3$, o sea: $b_t = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^t \left[35 + (-3)^t\right]$, que es la solución particular.

Con ello, puede elaborarse la siguiente tabla:

| ***t (s)*** | ***$b_t$ (bar$^2$)*** | ***$P_t$ (bar)*** |
|---|---|---|
| 0 | 9 | 3 |
| 1 | -2.67 | Imag. |
| 2 | 1.22 | 1.10 |
| 3 | -0.07 | Imag. |
| 4 | 0.36 | 0.60 |
| 5 | 0.21 | 0.46 |
| 6 | 0.26 | 0.51 |
| 7 | 0.25 | 0.50 |
| 8 | 0.25 | 0.50 |
| 9 | 0.25 | 0.50 |
| 10 | 0.25 | 0.50 |
| … | … | … |
| $+\infty$ | 0.25 | 0.50 |

Así pues, la trayectoria temporal de las ondas de presión originadas por el golpe de ariete será:

$$P_t = \sqrt{b_t} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^t \cdot \left[35 + (-3)^t\right]} = f(t) \cdot$$

b) Resulta una presión estática o de equilibrio de: $3b_e + b_e = 1$ ; $b_e = ¼$ ; $P_e = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.50$ bar, y la sobrepresión originada por efecto del golpe de ariete (positivo) será:

$$\Delta P = P_0 - P_e = 3.00 - 0.50 = +2.50 \text{ bar.}$$

UNED TORTOSA

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 12

## SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

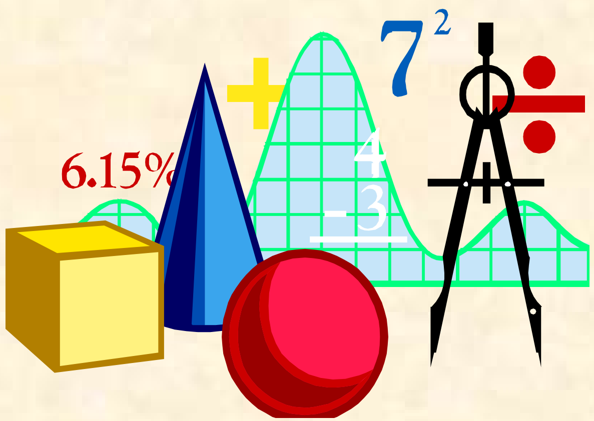
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Dentro de los sistemas de ecuaciones recurrentes, los más fáciles de resolver son los lineales, y son éstos precisamente los que aquí vamos a estudiar.

Un sistema lineal homogéneo de primer orden con **n** ecuaciones e incógnitas es el que tiene la forma general:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) \\ y_2(x+1) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x+1) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) \end{array}\right\}$$

donde las $a_{ij}(x)$ son sucesiones que consideramos datos del problema.

Ejemplo 1

Resolvamos ahora el siguiente sistema por dos procedimientos diferentes:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = 3y_1(x) + 5y_2(x) \\ y_2(x+1) = y_1(x) + 7y_2(x) \end{array}\right\}$$

a) Utilizando el operador E.
b) Por el método matricial.

*Solución:*

a) El sistema planteado se puede escribir en la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{l} y_{x+1} = 3y_x + 5z_x \\ z_{x+1} = y_x + 7z_x \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} y_{x+1} - 3y_x - 5z_x = 0 \\ z_{x+1} - y_x - 7z_x = 0 \end{array}\right\}$$

Utilizando el operador **E** se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} (E-3)y_x - 5z_x = 0 \\ (E-7)z_x - y_x = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} (E-3)y_x - 5z_x = 0 \\ (E-7)(E-3)z_x - (E-3)y_x = 0 \end{array}\right\}$$

$$(E-7)(E-3)z_x - 5z_x = 0 \ ; \quad (E^2 - 3E - 7E + 21)z_x - 5z_x = 0 \ ;$$

$$(E^2 - 10E + 16)z_x = 0 \ \Rightarrow \ z_{x+2} - 10z_{x+1} + 16z_x = 0 \ ; \quad \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \ ;$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \left\langle\begin{array}{l} 8 \\ 2 \end{array}\right. \text{, o sea: } \boxed{z_x = c_1 \cdot 8^x + c_2 \cdot 2^x}$$

$$y_x = z_{x+1} - 7z_x = c_1 \cdot 8^{x+1} + c_2 \cdot 2^{x+1} - 7c_1 \cdot 8^x - 7c_2 \cdot 2^x =$$
$$= 8c_1 \cdot 8^x + 2c_2 \cdot 2^x - 7c_1 \cdot 8^x - 7c_2 \cdot 2^x \text{ ; de donde:}$$

$$\boxed{y_x = c_1 \cdot 8^x - 5c_2 \cdot 2^x} \text{; o sea, también:}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(x) = c_1 \cdot 8^x - 5c_2 \cdot 2^x \\ y_2(x) = c_1 \cdot 8^x + c_2 \cdot 2^x \end{array}}$$

con lo que también se cumple: $y_1(x) - y_2(x) = -c_2 \cdot 2^x - 5c_2 \cdot 2^x = -6c_2 \cdot 2^x$.

b) La matriz A es: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

y sus autovalores son las raíces de la ecuación característica (ver Apéndice IV):

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0.$$

que son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$. A es diagonalizable, porque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, y:.$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

Los autovectores asociados a $\lambda_1 = 2$ son los vectores que verifican: $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

es decir, la variedad lineal generada por (-5, 1).

Análogamente, los autovectores del $\lambda_2 = 8$ salen de: $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

y están formados por la variedad lineal generada por (1, 1).

Tomando: $M = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, obtenemos: $A = M \cdot J \cdot M^{-1}$.

Como: $M^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$, llegamos a que la solución general es:

$$Y(x) = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 8^x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 \cdot 2^x - 8^x & 5(2^x - 8^x) \\ 2^x - 8^x & -2^x - 5 \cdot 8^x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

siendo $c_1$ y $c_2$ $y_1(0)$ e $y_2(0)$, respectivamente.

En casos como el anterior, en los que la matriz es diagonalizable en el cuerpo real, también hay otras expresiones más cómodas de la solución general del sistema.

Desde luego, el resultado así obtenido coincide con el resultado hallado anteriormente por aplicación del método del operador E teniendo en cuenta la arbitrariedad de las constantes $c_1$ y $c_2$. En efecto:

$$-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5\cdot 2^x - 8^x & 5(2^x - 8^x) \\ 2^x - 8^x & -2^x - 5\cdot 8^x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5c_1\cdot 2^x - c_1\cdot 8^x + 5c_2(2^x - 8^x) \\ c_1\cdot 2^x - c_1\cdot 8^x - c_2\cdot 2^x - 5c_2\cdot 8^x \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} (5c_2 - 5c_1)\cdot 2^x - (c_1 + 5c_2)8^x \\ (c_1 - c_2)\cdot 2^x - (c_1 + 5c_2)8^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{c_1 + 5c_2}{6}\cdot 8^x - \dfrac{5c_2 - 5c_1}{6}\cdot 2^x \\ \dfrac{c_1 + 5c_2}{6}\cdot 8^x + \dfrac{c_2 - c_1}{6}\cdot 2^x \end{pmatrix},$$

que, comparando con la solución hallada por el procedimiento anterior, ofrece el mismo resultado como no podría ser de otra manera, dado que si hacemos:

$$\frac{c_1 + 5c_2}{6} = K_1 \quad \text{y} \quad \frac{c_2 - c_1}{6} = K_2$$ , resultará la solución:

$$\begin{cases} y_1(x) = K_1\cdot 8^x - 5K_2\cdot 2^x \\ y_2(x) = K_1\cdot 8^x + K_2\cdot 2^x \end{cases}, \qquad \text{c.s.q.d.}$$

Ejemplo 2

Sean dos bienes sustitutivos, 1 y 2, en un mercado cuyos precios conforman el sistema recurrente siguiente:

$$\begin{cases} y_1(t+1) = 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2(t+1) = 2y_2(t) \end{cases}$$

Se trata de resolver este sistema por dos procedimientos diferentes:

a) Utilizando el operador E.

b) Por el método matricial. Y además:

c) Representar gráficamente ambas trayectorias temporales a partir de las condiciones iniciales: $y_1(0) = 1'00$ €/ud.; $y_2(0) = 2'00$ €/ud., así como la trayectoria del sistema.

d) Calcular la elasticidad cruzada correspondiente de la demanda del bien 2 si en el período que va de t = 2 a t = 3 su demanda aumenta de 300 a 400 ud. diarias.

*Solución:*

El sistema en cuestión se puede escribir en la siguiente forma:

$$\begin{cases} y_{t+1} = 2y_t + z_t & , \qquad y_{t+1} - 2y_t - z_t = 0 \\ z_{t+1} = 2z_t & , \qquad z_{t+1} - 2z_t = 0 \end{cases}$$

Utilizando el operador **E** se tendrá que:

$$\left.\begin{matrix} (E-2)y_t - z_t = 0 \\ (E-2)z_t = 0 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} (E-2)(E-2)y_t - (E-2)z_t = 0 \\ (E-2)z_t = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$(E^2 - 4E + 4)y_t = 0 \;\Rightarrow\; y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 0\;;\quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0\;;$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right.$$ , o sea: $y_t = c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot t \cdot 2^t$

$$z_t = y_{t+1} - 2y_t = c_1 \cdot 2^{t+1} + c_2(t+1) \cdot 2^{t+1} - 2c_1 \cdot 2^t - 2c_2 \cdot t \cdot 2^t =$$

$$= 2c_1 \cdot 2^t + 2c_2(t+1) \cdot 2^t - 2c_1 \cdot 2^t - 2c_2 \cdot t \cdot 2^t =$$

$= c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot t \cdot 2^t + c_2 \cdot 2^t - c_1 \cdot 2^t - c_2 \cdot t \cdot 2^t = \boxed{c_2 \cdot 2^t}$; o sea, también se puede escribir así:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot t \cdot 2^t = 2^t(c_1 + c_2 \cdot t) \\ y_2(t) = c_2 \cdot 2^t \end{array}}$$

b) Aquí, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y el amable lector/a podrá comprobar que la matriz A no es diagonalizable.

Por inducción se demuestra que (ver Apéndice IV):

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a^t & t \cdot a^{t-1} \\ 0 & a^t \end{bmatrix} \quad \forall\ t = 1,2,\ldots \forall a \in \{\Re\}.$$

En efecto, pues las sucesivas potencias de la matriz A(t) conducen a (tomando los términos principales $a_{11} = a_{22} = a = 2$): $A(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$,

de donde sucede que:

$$A^2(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

.....................................

$$A^t(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a^t & t \cdot a^{t-1} \\ 0 & a^t \end{pmatrix}$$

, con lo que, en definitiva, en este caso: $A^t(t) = \begin{pmatrix} 2^t & t\cdot 2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}$, luego la solución general del sistema recurrente planteado es la siguiente:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 2^t & t\cdot 2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2^t \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t\cdot 2^{t-1} \\ 2^t \end{bmatrix} \quad \forall\, t = 1,2,\ldots\ ,$$

siendo $Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ arbitrario. Se puede escribir también:

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1\cdot 2^t + c_2\cdot t\cdot 2^{t-1} = 2^t[c_1 + (c_2/2)\cdot t] \\ y_2(t) = c_2\cdot 2^t \end{cases} \qquad \forall\, t = 1, 2, \ldots,$$

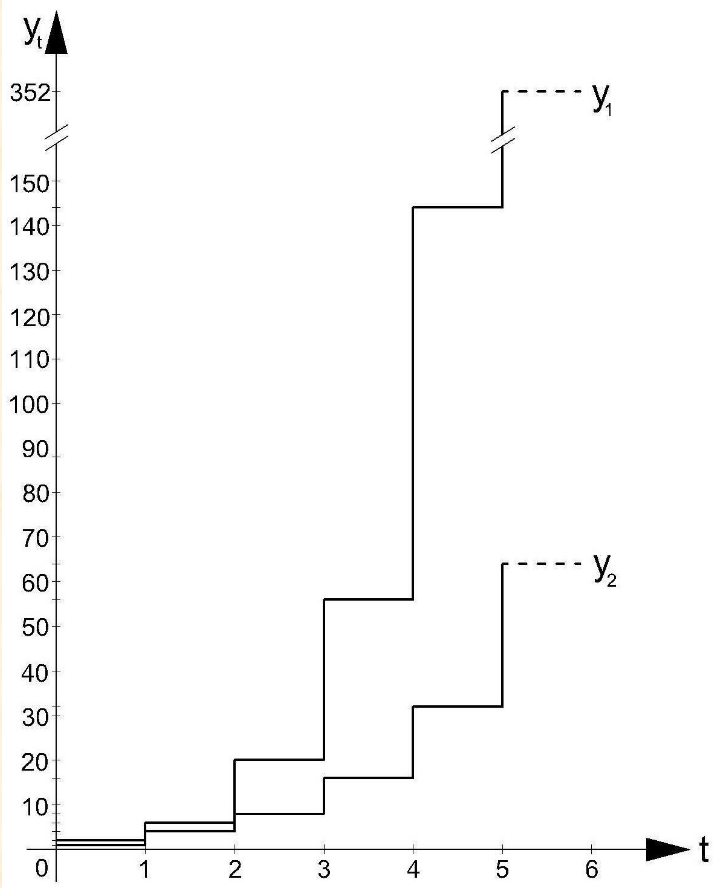
que coincide obviamente con el resultado anteriormente obtenido por aplicación del método del operador E teniendo en cuenta la arbitrariedad de las dos constantes del problema $c_1$ y $c_2$.

c) Teniendo en cuenta las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema planteado, se tendrá que: $\begin{cases} y_1(0) = c_1 = 1 \\ y_2(0) = c_2 = 2 \end{cases}$

, y consecuentemente:

$$\begin{cases} y_1(t) = 2^t + 2t\cdot 2^t = 2^t(1 + 2t) \\ y_2(t) = 2\cdot 2^t = 2^{t+1} \end{cases}$$

con las siguientes representaciones gráficas para ambos bienes:

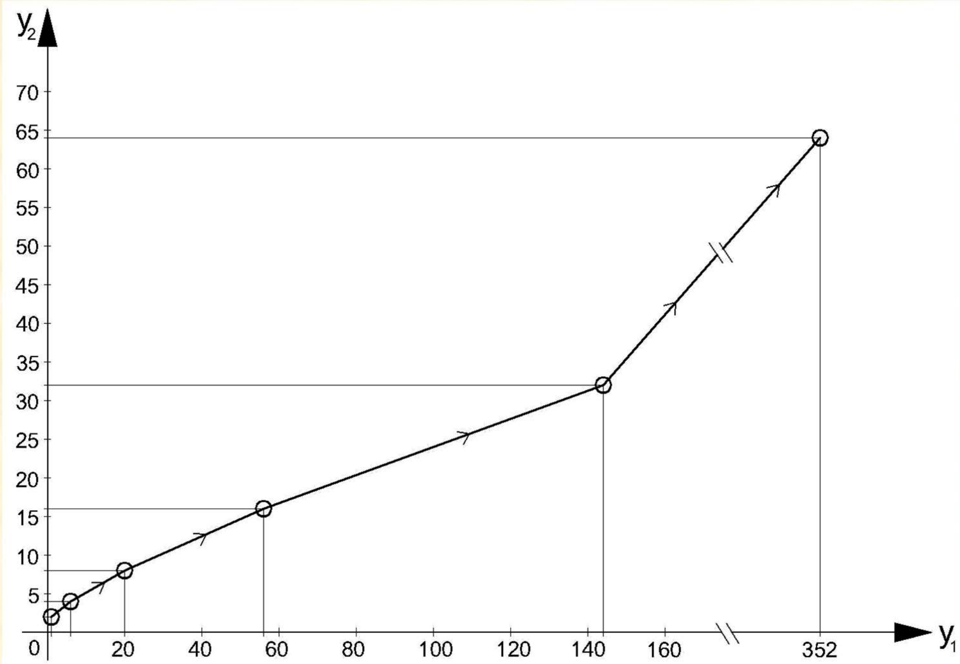



Evolución temporal de los precios.

, que se corresponden, a su vez, con la siguiente tabla en función de los diferentes períodos de tiempo:

| **t** | ***$y_1$* (€ /ud.)** | ***$y_2$* (€ /ud.)** |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 1 | 6 | 4 |
| 2 | 20 | 8 |
| 3 | 56 | 16 |
| 4 | 144 | 32 |
| 5 | 352 | 64 |
| … | … | … |
| + ∞ | + ∞ | + ∞ |

, con la correspondiente trayectoria temporal del sistema bidimensional planteado:




Trayectoria temporal del sistema.

Para hallar los puntos de equilibrio, por otra parte, obsérvese que: $\begin{cases} y_{1e} = 2y_{1e} + y_{2e} \\ y_{2e} = 2y_{2e} \end{cases}$

, y a simple vista ya se deduce la única solución trivial: $y_{1e} = y_{2e} = 0$ €/ud.

d) El proceso en cuestión se puede representar esquemáticamente del siguiente modo:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Bien 1} \Rightarrow \text{P: } P_1 = 20 \text{ €/ud.} \rightarrow P_2 = 56 \text{ €/ud.} \\ \text{Bien 2} \Rightarrow \text{Q: } Q_1 = 300 \text{ ud./día} \rightarrow Q_2 = 400 \text{ ud./día} \end{array}}$$

La elasticidad cruzada de la demanda es una medida positiva (en este caso, por tratarse de bienes sustitutivos) de sensibilidad de la demanda de un cierto bien ante el cambio en el precio de un bien sustitutivo, *ceteris paribus*.

Se determina así: $$E_c = \frac{(Q_2 - Q_1) \times (P_2 + P_1)}{(Q_2 + Q_1) \times (P_2 - P_1)} = \frac{(400 - 300) \times (56 + 20)}{(400 + 300) \times (56 - 20)} = \frac{7.600}{25.200} \approx 0\text{'}30.$$

Ejemplo 3

Sea resolver el sistema de EDF:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x+1) = 6y_1(x) + y_2(x) \\ y_2(x+1) = -y_2(x) - 12y_1(x) \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_{x+1} = 6y_x + z_x \\ z_{x+1} = -z_x - 12y_x \end{array}\right.$$

*Solución:*

En definitiva, se trata de resolver el sistema de ecuaciones recurrentes con otra notación como:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} - 6u_n - v_n = 0 \\ v_{n+1} + v_n + 12u_n = 0 \end{array}\right.$$

, que también se puede escribir del siguiente modo, usando el operador E:

$$\left\{\begin{array}{l} (E-6)\cdot u_n - v_n = 0 \\ 12u_n + (E+1)\cdot v_n = 0 \end{array}\right.$$

Eliminaremos $v_n$, para lo cual se procede como sigue:

$$\begin{array}{l} (E+1)(E-6)u_n - (E+1)v_n = 0 \\ 12u_n + (E+1)v_n = 0 \end{array}$$

y sumando miembro a miembro, se obtiene: $[(E+1)(E-6)+12]u_n = 0$,
o bien: $(E^2 - 5E + 6)u_n = 0 \Rightarrow u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$; la ecuación característica correspondiente será:

$r^2 - 5r + 6 = 0 \rightarrow$ con las raíces $\left\{\begin{array}{l} r_1 = 3 \\ r_2 = 2 \end{array}\right.$, ecuación que resuelta proporciona la solución general:

$\boxed{u_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n}$, $\forall$ A, B $\in \Re$, y también se obtendrá que:

$$v_n = u_{n+1} - 6u_n = A \cdot 3^{n+1} + B \cdot 2^{n+1} - 6A \cdot 3^n - 6B \cdot 2^n;$$

$$\boxed{v_n = -A \cdot 3^{n+1} - B \cdot 2^{n+2}}.$$

Es frecuente, tanto en los sistemas como en las ecuaciones recurrentes, que se conozcan ciertas condiciones iniciales que permiten determinar la solución particular correspondiente, tal como acontecía con las ecuaciones diferenciales que hemos visto en lecciones anteriores. Se trataría, pues, de PVI ("problemas de valor inicial").

Así, por ejemplo, si en el problema que nos ocupa se hubiesen dado las condiciones: $u_1 = 12$, $u_2 = 30$, podríamos formar el sistema de ecuaciones ordinarias siguiente:

$$u_1 = 3A + 2B = 12 \ ; \ \ u_2 = 9A + 4B = 30,$$

que resuelto proporciona los valores: $A = 2$ y $B = 3$. Luego la solución particular, correspondiente a dichos valores iniciales, sería la siguiente:

$$u_p = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n \quad ; \quad v_p = -2 \cdot 3^{n+1} – 3 \cdot 2^{n+2} = -6 \cdot 3^n – 12 \cdot 2^n$$

con lo que también se cumple que: $3u_p + v_p = -3 \cdot 2^n$.

## Ejemplo 4

Para la mejor comprensión de todo ello, apuntamos un sencillo ejemplo. Se tiene un subsistema hidráulico compuesto por sendas tuberías de PVC interconectadas (1) y (2) en bifurcación, de diámetros nominales 315 y 250 mm, timbradas a 10 bar, que funcionan en régimen permanente a una altura manométrica de 4.00 bar. Efectuadas las observaciones y mediciones pertinentes de las sobrepresiones máximas por el golpe de ariete originado por el cierre de una válvula que son, respectivamente, de 4.00 y 5.00 bar, se concluyen las siguientes relaciones entre ellas:

$$\begin{cases} 2\Delta P_{1,t+1} = 2\Delta P_{1,t} - 3\Delta P_{2,t} \\ 2\Delta P_{2,t+1} = \Delta P_{1,t} - 2\Delta P_{2,t} \end{cases}$$

Se desea estudiar la trayectoria temporal de las ondas de presión en cada tubería (Franquet, 2019).

*Solución:*

El sistema recurrente biecuacional reseñado, que es homogéneo y de coeficientes constantes, también puede escribirse así:

$$\begin{cases} \Delta P_{1,t+1} = \Delta P_{1,t} - (3/2)\Delta P_{2,t} \\ \Delta P_{2,t+1} = (½)\Delta P_{1,t} - \Delta P_{2,t} \end{cases}$$

y, así mismo, se cumple que: $2(\Delta P_{1,t+1} + \Delta P_{2,t+1}) = 3\Delta P_{1,t} - 5\Delta P_{2,t}$ , o sea, por lo que se refiere a la presión de equilibrio (estática):

$$4\Delta P_e = 3\Delta P_e - 5\Delta P_e = -2\Delta P_e \Rightarrow 6\Delta P_e = 0 \Rightarrow \Delta P_e = 0, \text{ con } P_e = 4.00 \text{ bar.}$$

Teniendo en cuenta que $\Delta P_{1,0}$ = 4.00 bar y $\Delta P_{2,0}$ = 5.00 bar, se puede expresar el sistema de ecuaciones en diferencias finitas anterior, en forma matricial, así:

$$\begin{pmatrix} \Delta P_{1,t+1} \\ \Delta P_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta P_{1,t} \\ \Delta P_{2,t} \end{pmatrix}, \text{ y también: } \begin{pmatrix} \Delta P_{1,t} \\ \Delta P_{2,t} \end{pmatrix} = A^t \cdot \begin{pmatrix} \Delta P_{1,0} \\ \Delta P_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Así, por ejemplo, para t = 1, sucede que:

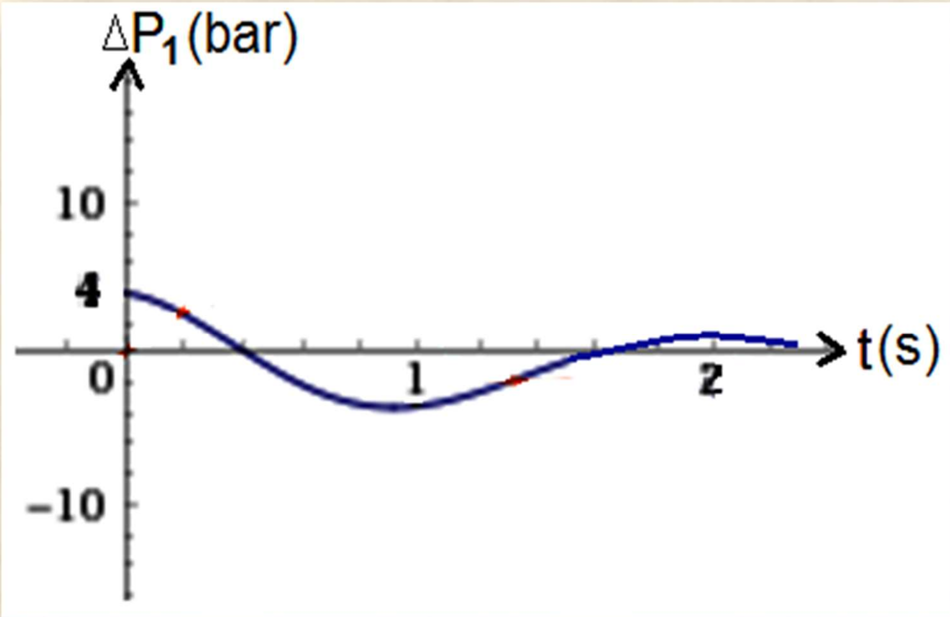
$$\begin{pmatrix} \Delta P_{1,1} \\ \Delta P_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

y de este modo se hallarían los diferentes valores de las sobrepresiones resultantes en cada instante temporal.

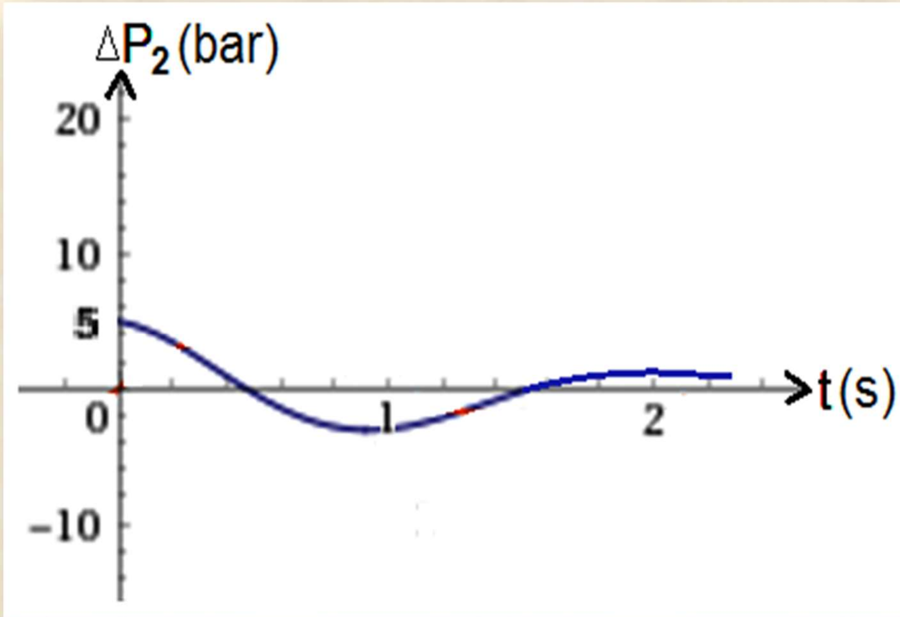
En cualquier caso, la solución particular del sistema planteado conduciría a las expresiones respectivas:

$$\begin{cases} \text{Tubería (1)} \Rightarrow \Delta P_{1,t} = 2^{-t-1}[11(-1)^t - 3] \\ \text{Tubería (2)} \Rightarrow \Delta P_{2,t} = 2^{-t-1}[11(-1)^t - 1] \end{cases}$$

cumpliéndose que: $\lim_{t\to+\infty} \Delta P_{1,t} = \lim_{t\to+\infty} \Delta P_{2,t} = 0$ , luego se trata de sendas sucesiones alternadas del tipo "convergentes infinitesimales", puesto que su límite es cero, con las siguientes representaciones gráficas:




Evolución temporal continua de las ondas de presión (tubería 1).



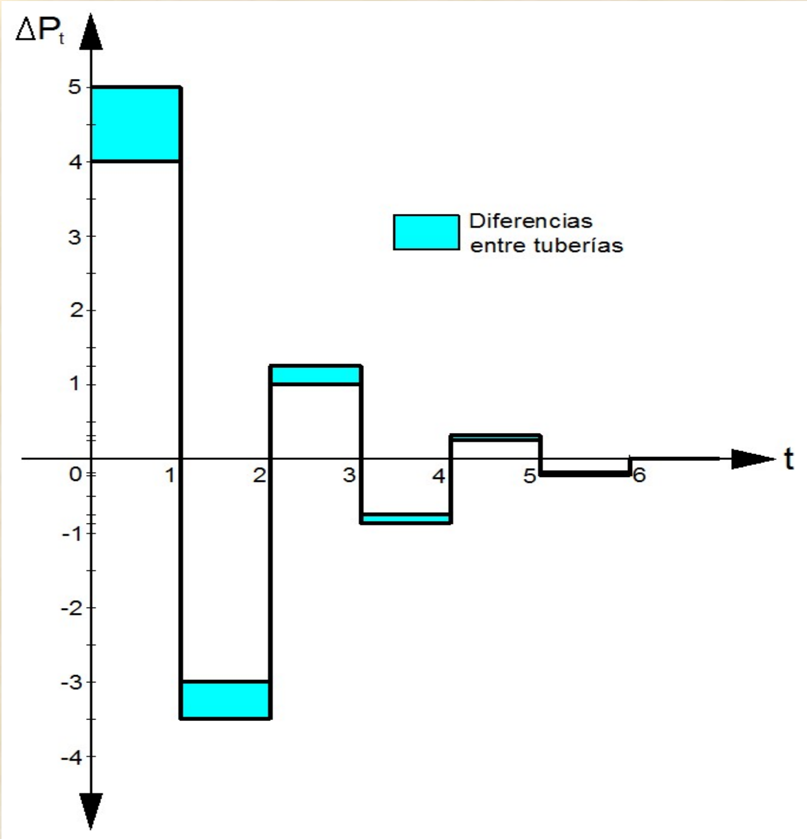

Evolución temporal continua de las ondas de presión (tubería 2).

y las tablas de valores respectivos de ambas tuberías son:

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-t-1}(11(-1)^t - 3)$ | $-\frac{7}{2}$ | 1 | $-\frac{7}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{7}{32}$ |
| approximation | −3.5 | 1 | −0.875 | 0.25 | −0.21875 |

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^{-t-1}(11(-1)^t - 1)$ | −3 | $\frac{5}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{16}$ | $-\frac{3}{16}$ |
| approximation | −3 | 1.25 | −0.75 | 0.3125 | −0.1875 |

La representación gráfica de la trayectoria temporal de las ondas de presión de ambas tuberías analizadas, donde se observan con suficiente claridad, durante los primeros seis segundos del transitorio hidráulico en cuestión, las diferencias de los "picos" de presión existentes entre ellas, es la siguiente:




Evolución temporal discreta de las ondas de presión en ambas tuberías.

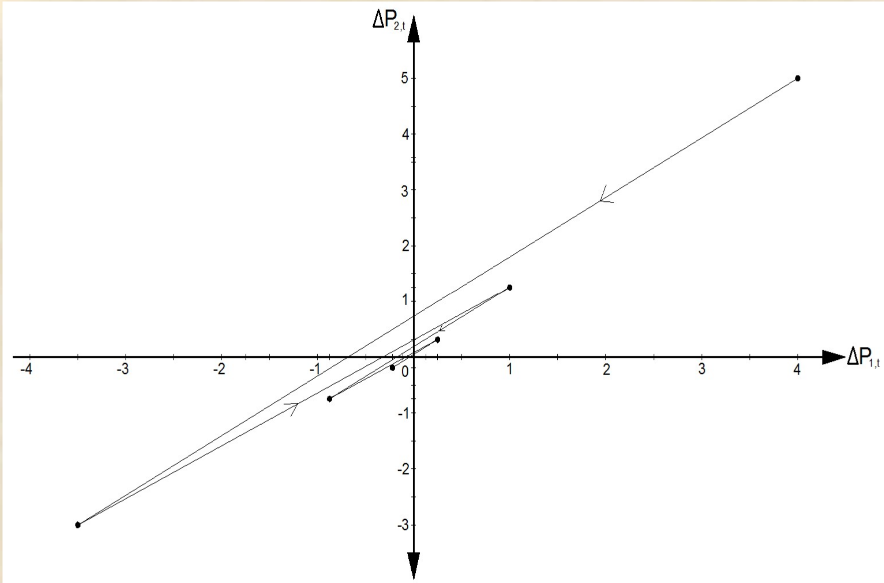
Para formar la trayectoria temporal del sistema, debe elaborarse la siguiente tabla:

| *t (s)* | *$\Delta P_{1,t}$ (bar)* | *$\Delta P_{2,t}$ (bar)* | *$\Delta P_{2,t}$ - $\Delta P_{1,t}$ (bar)* | *$P_{1,t}$ (bar)* | *$P_{2,t}$ (bar)* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 5 | 1 | 8 | 9 |
| 1 | -7/2 | -3 | ½ | ½ | 1 |
| 2 | 1 | 5/4 | ¼ | 5 | 21/4 |
| 3 | -7/8 | -3/4 | 1/8 | 25/8 | 13/4 |
| 4 | 1/4 | 5/16 | 1/16 | 17/4 | 69/16 |
| 5 | -7/32 | -3/16 | 1/32 | 121/32 | 61/16 |
| … | … | … | … | … | … |
| +∞ | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 |

En ella se observa la progresiva reducción de la diferencia que tiene lugar, cada instante temporal, entre los valores de las ondas de presión en ambas tuberías hasta anularse (teóricamente en el infinito) o alcanzar nuevamente el régimen permanente. Dicha diferencia o "gap" existente entre ambas trayectorias temporales, observable en la figura siguiente, vendrá dada por la siguiente secuencia:

$$\Delta P_{2,t} - \Delta P_{1,t} = 2^{-t-1}[11(-1)^t - 1] - 2^{-t-1}[11(-1)^t - 3] = -2^{-(t+1)} + 3\cdot 2^{-(t+1)} = 2\cdot 2^{-(t+1)} = 2\cdot 2^{-t-1} = 2^{-t} = 1/2^t \ .$$

Entonces, la trayectoria temporal del sistema formado por ambas tuberías (1) y (2), es la siguiente:




Trayectoria temporal del sistema.

## Ejemplo 5

Los resultados contables *y* en el tiempo de tres empresas del mismo *holding* se hallan relacionados entre sí mediante el siguiente sistema recurrente:

$$Y(t+1)=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}\cdot Y(t) \ .$$

Se pretende por la dirección dejar en activo solamente las dos más rentables. Teniendo en cuenta que los resultados iniciales, expresados en miles de euros/día, son: $y_1$ = 1, $y_2$ = 2 e $y_3$ = 3, se trata de determinar cuál de ellas se cerrará, así como los resultados anuales de cada una de ellas a los tres años de su actividad económica.

*Solución:*

Este sistema, que resolveremos por la teoría matricial, también puede escribirse así:

$$\begin{cases} y_{t+1}=3y_t+z_t+w_t \\ z_{t+1}=y_t+3z_t+w_t \\ w_{t+1}=y_t+z_t+3w_t \end{cases} \quad y \quad A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Consecuentemente, la ecuación característica o secular es (ver Apéndice IV):

$\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$, de la que se obtiene la ecuación: $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = 0$.

Los autovalores de A son las raíces: $\lambda_1$ = 2 (doble) y $\lambda_3$ = 5 (simple). El subespacio de autovectores asociado a $\lambda_1 = \lambda_2$ = 2 es: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, y está generado por los vectores: $\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ .

Como tiene dimensión dos, la matriz es diagonalizable. Análogamente, el subespacio de autovectores asociados a $\lambda_3 = 5$ está generado por el vector (1, 1, 1), luego los vectores:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^t, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 2^t, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 5^t \quad ,$$

forman una base del espacio vectorial de soluciones, y la solución general es:

$$Y(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^t + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 2^t + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 5^t \text{ , es decir:}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = -c_1 2^t - c_2 2^t + c_3 5^t \\ y_2(t) = c_1 2^t + c_3 5^t \\ y_3(t) = c_2 2^t + c_3 5^t \end{array}\right\} \qquad \forall\ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \{\Re\}$. Obsérvese que la misma solución se obtiene poniendo:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 0 & 2^t & 0 \\ 0 & 0 & 5^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad ,$$

que corresponde a la fórmula matricial: $Y(t) = M \cdot J^t \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ .

Aplicando las condiciones iniciales dadas en el enunciado, resultará que:

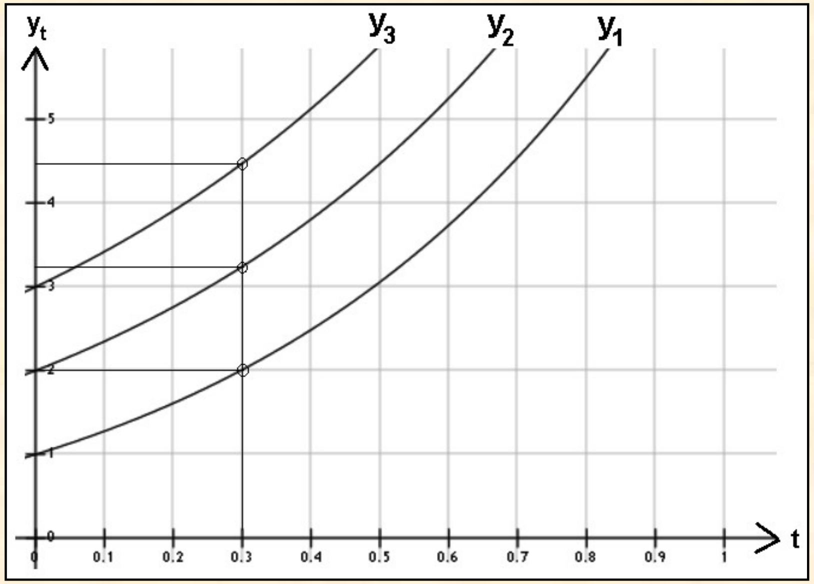
$$\left.\begin{array}{c} y_1(0) = -c_1 - c_2 + c_3 = 1 \\ y_2(0) = c_1 + c_3 = 2 \\ y_3(0) = c_2 + c_3 = 3 \end{array}\right\}$$

, sistema que resuelto proporciona los valores: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$.

De este modo, resultará que:

$$\left.\begin{array}{c} y_1(t) = -2^t + 2 \cdot 5^t \\ y_2(t) = 2 \cdot 5^t \\ y_3(t) = 2^t + 2 \cdot 5^t \end{array}\right\}$$

A la vista de las ecuaciones anteriores, en que siempre $t \geq 0$, resulta evidente que la opción menos rentable es la primera, que será la que se suprimirá pese a tener una rentabilidad notable, lo cual queda corroborado a la vista del gráfico de las trayectorias temporales siguiente, en que se ha considerado la variable tiempo como continua teniendo en cuenta que el resultado se expresa diariamente y en el eje de abscisas el tiempo viene expresado en decenas de años:




Evolución temporal de los resultados contables.

A los tres años del inicio de la actividad empresarial, los resultados económicos anuales obtenidos por cada una de las tres empresas relacionadas, serán los siguientes:

$$y_1(0'3) = 2'010 \cong 2.010 \text{ €/día x } 365 \text{ días/año} = 733.650 \text{ €/año}$$
$$y_2(0'3) = 3'241 \cong 3.241 \text{ €/día x } 365 \text{ días/año} = 1.182.965 \text{ €/año}$$
$$y_3(0'3) = 4'472 \cong 4.472 \text{ €/día x } 365 \text{ días/año} = 1.632.280 \text{ €/año}$$

Para hallar los puntos de equilibrio, por otra parte, obsérvese que:

$$\begin{cases} y_e = 3y_e + z_e + w_e \\ z_e = y_e + 3z_e + w_e \\ w_e = y_e + z_e + 3w_e \end{cases}$$

, o también:

$$\begin{cases} 2y_e + z_e + w_e = 0 \\ y_e + 2z_e + w_e = 0 \\ y_e + z_e + 2w_e = 0 \end{cases}$$

que constituye un sistema homogéneo, compatible y determinado, con la única solución trivial: $y_e = z_e = w_e = 0$.

Por otra parte, se presume también en los tres casos de las funciones de resultados $y_1$, $y_2$ e $y_3$ la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es:

$m = \lim_{t \to +\infty} \frac{y}{t} = +\infty$, luego existe en todas ellas una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

## 2. SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Un sistema lineal no homogéneo (o completo) de primer orden es el que tiene la forma general:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = a_{11}(x)y_1(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x+1) = a_{n1}(x)y_1(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x) \end{array}\right\}$$

donde $b_1(x)$, …, $b_n(x)$ son sucesiones arbitrarias en la variable x. Con las mismas notaciones que para el caso homogéneo, y llamando b(x) a la sucesión vectorial:

$\begin{bmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}$, el sistema admite la representación matricial:

$$Y(x+1) = A(x)\cdot Y(x) + b(x)\ .$$

Dado el sistema anterior, llamaremos “sistema homogéneo asociado” al siguiente: $Y(x+1) = A(x)\cdot Y(x)$, y, si la matriz A(x) es constante, diremos que el sistema (homogéneo y no homogéneo) es de coeficientes constantes, independientemente de que b(x) sea o no constante.

Las propiedades que relacionan un sistema no homogéneo con el sistema homogéneo asociado son similares a las que hemos estudiado para las ecuaciones diferenciales, de tal forma que el camino que se sigue en la resolución de un sistema completo es paralelo al estudiado entonces. Veamos algunos ejemplos representativos.

## Ejemplo 1

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones recurrentes:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x+1) &= y_1(x) + 2y_2(x) + 1 \\ y_2(x+1) &= 2y_1(x) + y_2(x) - 1 \end{aligned}\right\}$$

*Solución:*

La matriz A es, en este caso: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , siendo -1 y 3 sus autovalores (Apéndice IV). El subespacio de los autovectores asociados al autovalor -1 es la variedad lineal generada por (1, -1), y el subespacio de autovectores asociados al autovalor 3 es la variedad lineal generada por (1, 1). Por consiguiente, la solución general del sistema homogéneo asociado es:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (-1)^x + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3^x$$

Puesto que $b(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es constante, busquemos una solución particular del tipo: $U(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$. Deberá verificarse que:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= k_1 + 2k_2 + 1 \\ k_2 &= 2k_1 + k_2 - 1 \end{aligned}\right\}$$

de donde: $U(x) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ es, efectivamente, una solución particular. La solución general del sistema no homogéneo es:

$$Y(x) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} (-1)^x \\ (-1)^{x+1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3^x \\ 3^x \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{cases} y_1(x) = \tfrac{1}{2} + c_1 \cdot (-1)^x + c_2 \cdot 3^x \\ y_2(x) = -\tfrac{1}{2} + c_1 \cdot (-1)^{x+1} + c_2 \cdot 3^x = -\tfrac{1}{2} - c_1 \cdot (-1)^x + c_2 \cdot 3^x \,; \end{cases}$$

de este modo también se cumple que: $y_1(x) + y_2(x) = 2c_2 \cdot 3^x$.

## Ejemplo 2

Los resultados contables *y* en el tiempo de dos empresas del mismo *holding* se hallan relacionados entre sí mediante el siguiente sistema recurrente:

$$\begin{cases} y_1(t + 1) = 2y_1(t) + y_2(t) + 3 \\ y_2(t + 1) = 2y_2(t) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que los resultados iniciales son nulos (no hay pérdidas ni ganancias), expresados en millones de euros, se trata de determinar los resultados de cada una de ellas en el cuarto año de su actividad económica.

*Solución:*

El sistema homogéneo asociado es el resuelto en un ejemplo anterior, tanto por el método del operador E como por el matricial, y la matriz fundamental correspondiente es la siguiente:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2^t & t{\cdot}2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} \quad \forall\, t = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Busquemos ahora una solución particular U(t) del sistema completo. En base al procedimiento de variación de las constantes, basta con tomar:

$$U(0) = 0; \quad U(t) = A^t \sum_{k=0}^{t-1} (A^{-1})^{k+1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obviamente: $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, y se demuestra sin dificultad (por inducción) que:

$$\begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a^t & -t{\cdot}a^{t-1} \\ 0 & a^t \end{bmatrix}$$, de donde se deduce que: $(A^{-1})^{k+1} = \frac{1}{4^{k+1}} \begin{bmatrix} 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}$.

Por consiguiente, también: $U(t) = A^t \sum_{k=0}^{t-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} & -\frac{k+1}{4} \cdot \frac{1}{2^k} \\ 0 & \frac{1}{2^{k+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = A^t \sum_{k=0}^{t-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{2^{k+1}} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Puesto que, por la fórmula general de la suma de los términos de una progresión geométrica, sabemos que:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^s = \frac{r^{s+1} - 1}{r - 1} \quad \text{si} \quad r \neq 1 \text{, y se tiene que:}$$

$$\sum_{k=0}^{t-1} \frac{3}{2^{k+1}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{3}{2^t} = \frac{\frac{3}{2^t} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -(\frac{3}{2^t} - 3) = 3\left[1 - \frac{1}{2^t}\right] \text{. Luego: } U(t) = 3\begin{bmatrix} 2^t & t \cdot 2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2^t} \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para t = 0, la expresión anterior da U(0) = 0, y, por tanto, es válida para cualquier t. Finalmente, la solución general buscada del sistema completo es:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 2^t & t \cdot 2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{, es decir:}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = c_1 2^t + c_2 t \cdot 2^{t-1} + 3(2^t - 1) \\ y_2(t) = c_2 2^t \end{array}\right\} \qquad \forall\ t = 0, 1, 2, \ldots$$

Puesto que inicialmente los resultados de ambas empresas son nulos, sucederá que:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(0) = c_1 = 0 \\ y_2(0) = c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

, y se tendrá la solución particular siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = 3(2^t - 1) \\ y_2(t) = 0 \end{array}\right\}$$

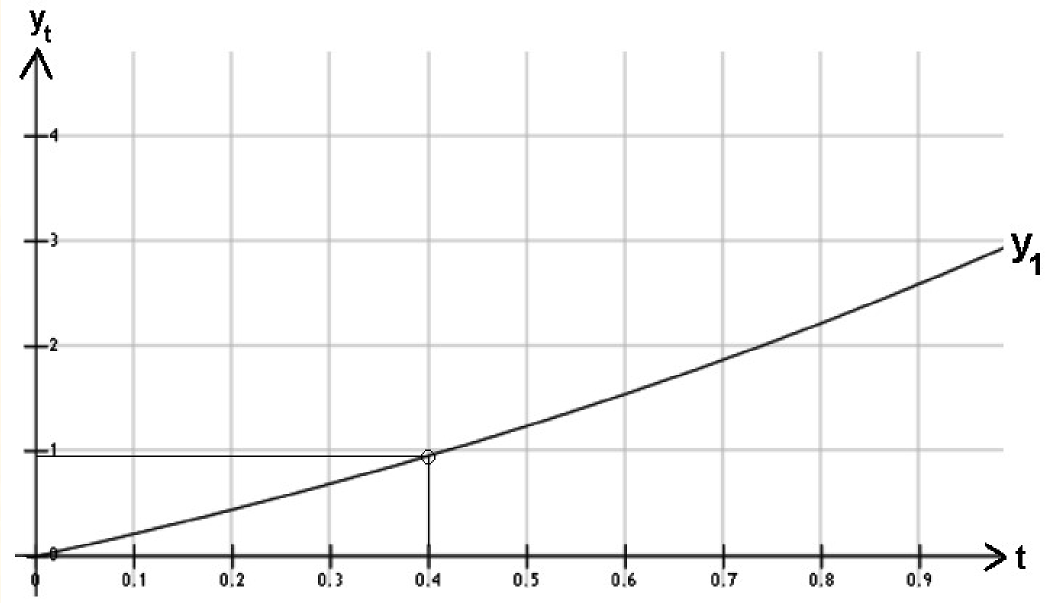
En el cuarto año de la actividad económica, los resultados contables respectivos serán:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1(0'4) = 3(2^{0'4} - 1) = 0'959 \text{ (958.524 €/año)} \\ y_2(0'4) = 0 \text{ €/año} \end{array}}$$

Al ser la $y_2(t)$ nula en todos los casos, es evidente que su trayectoria temporal se superpone con el eje de abscisas en sentido creciente, por lo que obviaremos su representación. Por otra parte, por lo que se refiere a $y_1(t)$ se presume la existencia de ramas parabólicas puesto que si $t \rightarrow \infty$ también $y \rightarrow \infty$.

Esto es: $m = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{3(2^t - 1)}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

A la vista de las ecuaciones anteriores, resulta que esta segunda empresa no obtiene, a lo largo de su trayectoria temporal (que se confunde o superpone con el eje de abscisas), ni beneficios ni pérdidas, lo cual queda corroborado a la vista del gráfico de las trayectorias temporales siguiente, en que se ha considerado la variable tiempo como continua teniendo en cuenta que el resultado se expresa en millones de euros y en el eje de abscisas el tiempo viene expresado en decenas de años:




Evolución temporal de los resultados contables.

Para hallar los puntos de equilibrio, por otra parte, obsérvese que:

$$\left.\begin{array}{l} y_{1e} = 2y_{1e} + y_{2e} + 3 \\ y_{2e} = 2y_{2e} \end{array}\right\}$$

y se deduce que: $y_{1e} = -3$, $y_{2e} = 0$.

*Observaciones*. Cuando la sucesión b(t) es constante (tal y como pasa en el ejemplo presente) se puede también intentar ensayar una solución particular constante del tipo: $U(t) = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$.

## 3. SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTES VARIABLES

Veámoslos mediante un sencillo ejemplo que resolveremos utilizando el operador E:

Ejemplo

Los resultados contables *y* en el tiempo de dos empresas del mismo *holding* se hallan relacionados entre sí mediante el siguiente sistema recurrente:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t+1) = t \cdot y_1(t) \\ y_2(t+1) = y_1(t) + y_2(t) \end{array}\right\}$$

Teniendo en cuenta que los resultados del primer año son de 500 € en ambos casos, se trata de determinar los resultados de cada una de ellas en el quinto año de su actividad económica.

*Solución:*

El sistema planteado se puede escribir también de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} y_{t+1} = t\cdot y_t \\ z_{t+1} = y_t + z_t \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y_{t+1} - t\cdot y_t = 0 \\ z_{t+1} - z_t - y_t = 0 \end{array}\right\}$$

Utilizando para su resolución el operador **E**, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} (E - t)y_t = 0 \\ (E - 1)z_t - y_t = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} (E - t)y_t = 0 \\ (E - 1)(E - t)z_t - (E - t)y_t = 0 \end{array}\right\}$$

$$(E^2 - t\cdot E + t - E)z_t = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{t+2} - t\cdot z_{t+1} + t\cdot z_t - z_{t+1} = 0$$

$$z_{t+2} - (t + 1)z_{t+1} + t\cdot z_t = 0 \; ; \quad \lambda^2 - (t + 1)\lambda + t = 0 \; ;$$

$$\lambda = \frac{t + 1 \pm \sqrt{t^2 + 2t + 1 - 4t}}{2} = \frac{t + 1 \pm (t - 1)}{2} = \left\langle \begin{array}{l} t \\ 1 \end{array} \right. \text{, o sea:}$$

$$\boxed{z_t = c_1\cdot t^t + c_2\cdot 1^t = c_2 + c_1\cdot t^t}$$

$y_t = z_{t+1} - z_t = c_2 + c_1\cdot(t + 1)^{t+1} - c_2 - c_1\cdot t^t$ ; $\boxed{y_t = c_1(t + 1)^{t+1} - c_1\cdot t^t}$ ; o también:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = c_1(t + 1)^{t+1} - c_1\cdot t^t \\ y_2(t) = c_2 + c_1\cdot t^t \end{array}}$$

, con lo que también se cumple que: $y_1(t) + y_2(t) = c_1(t + 1)^{t+1} + c_2$.

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas en el enunciado, se tendrá que:

$$\begin{cases} y_1(1) = c_1(2)^2 - c_1 = 3c_1 = 1/2 \\ y_2(1) = c_2 + c_1 = 1/2 \end{cases}$$

Del anterior sistema de ecuaciones dedúcense los siguientes valores: $c_1 = 1/6$ ; $c_2 = 1/3$, y, como consecuencia, las trayectorias temporales de los resultados contables de ambas empresas serán las siguientes:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{(t+1)^{t+1} - t^t}{6} \\ y_2(t) &= \frac{2 + t^t}{6} \end{aligned}}$$

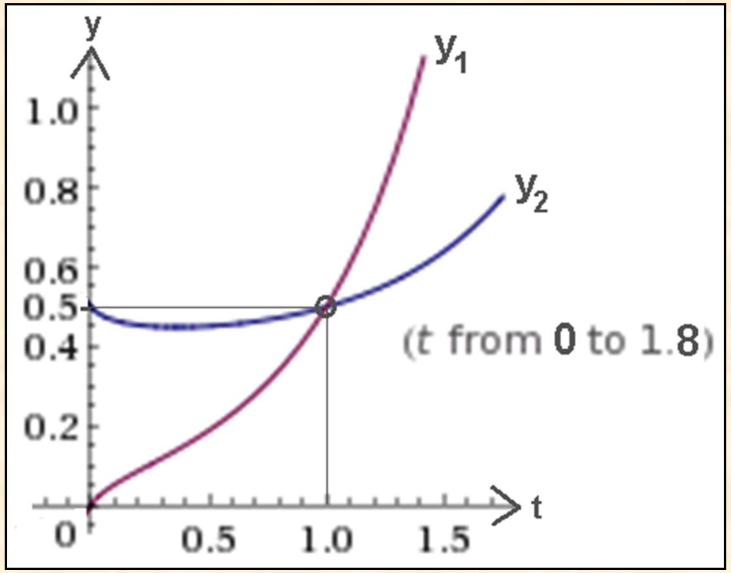
De este modo, a partir de dichas expresiones, podemos elaborar la siguiente tabla:

| ***t*** | ***y₁* (10³ € )** | ***y₂* (10³ € )** |
|---|---|---|
| 0 | 0'00 | 0'50 |
| 1 | 0'50 | 0'50 |
| 2 | $3'8\hat{3}$ | 1'00 |
| 3 | $38'1\hat{6}$ | $4'8\hat{3}$ |
| 4 | $478'1\hat{6}$ | 43'00 |
| 5 | $7.255'1\hat{6}$ | $521'1\hat{6}$ |
| ... | ... | ... |
| + ∞ | + ∞ | + ∞ |

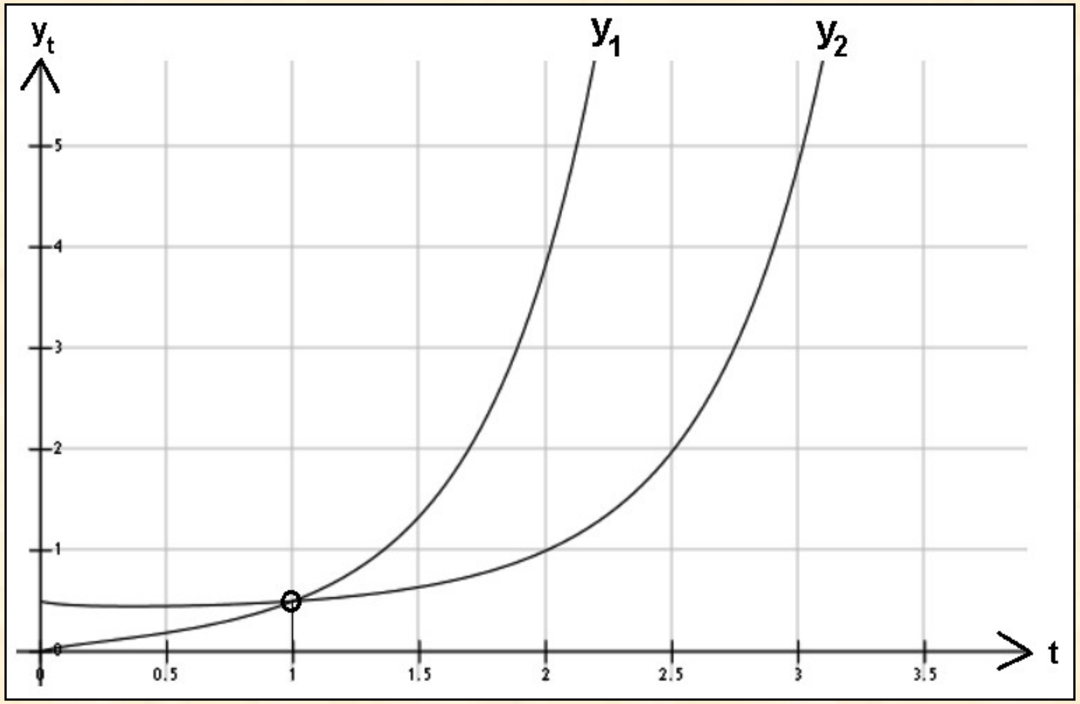
Y así, en el quinto año de actividad económica, los resultados contables de ambas empresas son de 7.255.167 € la primera y de 521.167 € la segunda.

Por otra parte, aunque las expresiones anteriores resultan indeterminadas para t = 0, se presume también en los dos casos de las funciones de resultados $y_1$ e $y_2$ la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = +\infty$, luego existe en ambas una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

A continuación, se adjuntan las gráficas correspondientes de las trayectorias temporales estudiadas de los resultados contables de ambas empresas, con indicación expresa del instante temporal de su coincidencia, a saber:

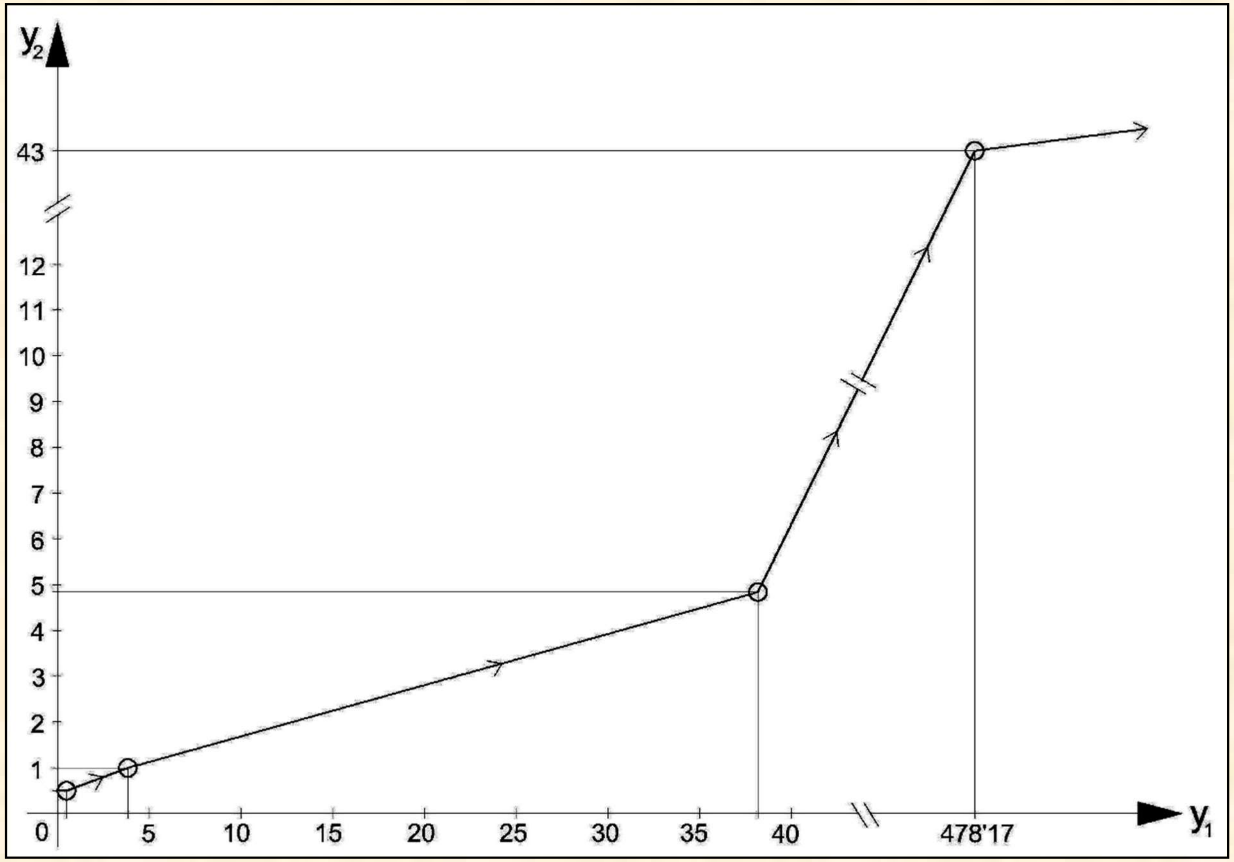



O bien con mayor detalle hasta los tres primeros años, se tiene que:




Evolución temporal de los resultados contables.

A su vez, la trayectoria temporal del sistema planteado puede verse en la siguiente figura:




Trayectoria temporal del sistema.

## 4. SISTEMA LINEAL EQUIVALENTE

Dada la ecuación lineal de diferencias finitas de orden *n*:

$$y(x + n) + a_1(x)y(x + n - 1) + \dots + a_n(x)y(x) = b(x),$$

si hacemos el cambio de variable:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y(x+1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) = y(x+n-1) \end{array}\right\} \qquad \forall x = 0, 1, 2, \dots$$

obtenemos el sistema lineal de primer orden (con *n* incógnitas):

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x+1) = y_2(x) \\ y_2(x+1) = y_3(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}(x+1) = y_n(x) \\ y_n(x+1) = -a_1(x)y_n(x) - a_2(x)y_{n-1}(x) - \dots - a_n(x)y_1(x) + b(x). \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema y observando que $y(x) = y_1(x)$ obtendremos también la solución general de la ecuación recurrente planteada de orden *n*.

En concreto, el problema de determinar una solución particular de la ecuación no homogénea se puede resolver determinando una solución particular del sistema equivalente.

Veamos, al respecto de lo expuesto, el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Obténgase el sistema equivalente para la ecuación de diferencias no homogénea de orden dos:

$$y_{x+2} + 4y_{x+1} + 4y_x = 1.$$

*Solución:*

Poniendo:

$$\left.\begin{array}{l} y_x = y_1(x) \\ y_{x+1} = y_2(x) \\ y_{x+2} = y_3(x) \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

y así sucesivamente, y puesto que: $y_{x+2} = 1 - 4y_{x+1} - 4y_x$ , se obtiene el sistema equivalente buscado siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(x+1) = y_2(x) \\ y_2(x+1) = 1 - 4y_2(x) - 4y_1(x) \end{array}}$$

que también se puede escribir así con otra notación:

$$\left.\begin{array}{r} y_{x+1} = z_x \\ z_{x+1} = 1 - 4y_x - 4z_x \end{array}\right\}$$

## 5. SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS NO LINEALES

Al igual que ocurría con las ecuaciones diferenciales, hay muchos sistemas de ecuaciones recurrentes que se presentan en la práctica de la Ingeniería o de la Economía que no son lineales. Un ejemplo cualquiera de ellos puede ser el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} y_1(x+1) = y_2(x)^3 \\ y_2(x+1) = -3y_1(x) + 4y_2(x)^2 \end{array}\right\}$$

Algunos de ellos se pueden resolver de forma explícita mediante el empleo de diversas técnicas analíticas, pero la mayor parte no pueden ser tratados mediante estos procedimientos. En cualquier caso, fijados los valores iniciales $y_1(0)$, $y_2(0)$, …, $y_n(0)$, el propio sistema nos ofrece una ley recurrente para calcular los términos posteriores de éste. Los inconvenientes del método son los mismos que señalábamos anteriormente para las ecuaciones de diferencias lineales.

# SEGUNDA PARTE

(2º cuatrimestre)

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 13

## ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (I)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

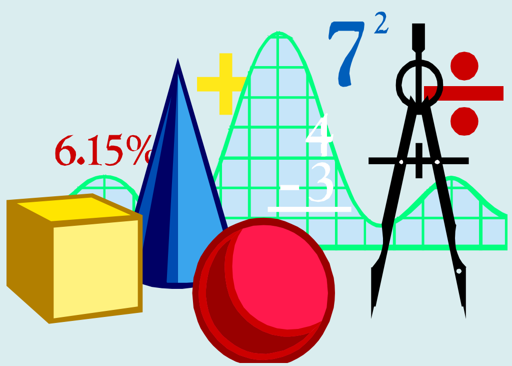
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





## 1. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

### 1.1. CONCEPTOS PREVIOS Y DEFINICIONES

En el presente apartado se realiza una introducción básica a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que abreviaremos, como se ha dicho, por las siglas EDP.

**- Ecuación diferencial en derivadas parciales** es cualquier igualdad del tipo:

$$F\left(\overline{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right) = 0 \qquad (1)$$

que evidentemente conexiona las variables independientes o explicativas $x_i$, $\forall_i$ = 1, 2, …, n, la función buscada *u* y sus derivadas parciales, donde se cumple que: $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R^n$ con $\Omega$ abierto y de sólo una pieza, siendo F la función prefijada de sus argumentos.

También: $F: \Omega \times \Re \times \Re^M \to \Re$ se supone conocida y M > 0 es un número natural. En el caso n = 2, que será el que mayormente contemplaremos en la presente monografía, resultará más sencillo utilizar la notación habitual: $\overline{x} = (x,y) \in \Omega \subset \Re^2$.

-**Orden de una EDP** es el mayor de los órdenes que tienen las derivadas que en ella intervienen. Así, posee derivadas de orden (n) pero no de orden (n+1).

-**Solución o integral particular** de la EDP (1) es toda función $u: \Omega \to R$ suficientemente regular, tal que al sustituirla en la ecuación hace que se cumpla.

- **Solución o integral general** de la EDP (1) es la expresión que teóricamente contiene a todas las soluciones particulares.

- **Solución o integral singular** de la EDP (1) que no puede ser considerada como un caso particular de la integral general ni de la integral completa, y cuya interpretación geométrica es la superficie envolvente de todas las integrales completas.

Veamos ahora, con mayor especificidad, algunas definiciones de particular interés para la mejor conceptualización de este tipo de ecuaciones infinitesimales.

**- Definición 1 (Ecuación diferencial en derivadas parciales)**. Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) a la ecuación de la forma identitaria (1):

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 ... \partial^{k_n} x_n}\right) = 0 \text{ ,}$$

Se cumple que: $k_i$, $\forall_i$ = 1, 2, …, n son números enteros no negativos (naturales) tales que:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m.$$

**- Definición 2 (Orden)**. Se llama orden de una EDP el orden superior de las derivadas parciales que figuran en la ecuación.

Así, si x,y son variables independientes, u = u(x,y) es la función buscada, entonces:

a) $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, es una EDP de 1$^{er}$ orden, homogénea y de coeficientes variables.

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , es una EDP de 2º orden, homogénea y de coeficientes constantes.

**Nota**: También, como se ha apuntado, utilizaremos las notaciones simplificadas siguientes:

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ... \text{quad}\Delta$$

**- Definición 3 (Solución)**. Sea la EDP definida en la anterior definición 1, de orden *m*. Se llama solución de dicha EDP en cierta región D de variación de las $x_i$, $\forall_i$ = 1, 2, …, n, a una función cualquiera del tipo siguiente: $u = u(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in C^m(D)$ (conjunto de funciones continuas en la región D junto con todas las derivadas de hasta orden *m* inclusive), tal que al sustituir *u* y sus derivadas en su expresión, la última se convierte en la identidad respecto a $x_i$, $\forall_i$ = 1, 2, …, n, en la región D.

## 1.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL EN DERIVADAS PARCIALES

Una ecuación en derivadas parciales (1), es **lineal** si la función F se puede expresar como suma de una función solamente dependiente de $\overline{x}$, más una función lineal de las variables correspondientes a u, y a las derivadas parciales que intervengan.

Para el caso de dos variables independientes, es decir $\overline{x}$ = (x,y), la expresión general de la ecuación en derivadas parciales lineal y de segundo orden, con una función u(x,y) es de la forma:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=g \tag{2}$$

donde a, b, c, d, e, f, g son funciones de *x* e *y*. Estas funciones a, b, c, …, pueden ser independientes de *x* e *y*, en cuyo caso la EDP será **lineal de coeficientes constantes**. Veremos este tipo de ecuaciones, con mayor especificidad, en lecciones sucesivas.

Si g = 0 se tiene la expresión general de la ecuación **lineal homogénea** de segundo orden. Por el contrario, si $g \neq 0$, la EDP sería *no homogénea, inhomogénea o heterogénea*, debiéndose obtener su solución en función de la naturaleza de la expresión del 2º miembro, como también hemos visto que sucede con las EDO. Al igual que sucedía con las EDO de orden *n*, el Principio de Superposición resulta válido para la ecuación lineal y el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea tiene estructura algebraica de espacio vectorial. Sin embargo, la diferencia fundamental con respecto al caso ordinario radica en que el espacio vectorial de las soluciones para una EDP lineal tiene dimensión infinita, puesto que dada una EDP lineal existen infinitas soluciones linealmente independientes. Esta circunstancia provoca que las combinaciones finitas no sean suficientes como para encontrar todas las soluciones y se hace necesario considerar combinaciones infinitas, surgiendo los correspondientes problemas de convergencia.

A continuación se responde a algunas cuestiones básicas:

**Cuestión 1.** ¿De qué orden son las siguientes ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, donde la función es u(x,y), en dos variables independientes?

$$\begin{cases} u_x + u_y + x = 0 \\ u_x + u_{xy} + xu_y = 0 \\ u_x + \sin(u_y) + x = 0 \\ u_{xy} = u^2 \end{cases}$$

*Solución:*

En los casos a) y c) las ecuaciones son de primer orden. En los otros de segundo orden.

**Cuestión 2.** Indicar las características básicas (linealidad, homogeneidad, coeficientes), de las siguientes ecuaciones en derivadas parciales, donde la función es u(x,y) en todos los casos.

$$\begin{cases} 5u_x + x = 0 \\ u_x + u_{xy} + xu_y = 5 \\ u_x + yu = u \\ uu_{xx} + (u_y)^2 = u^2 \\ u_x + \ln(x)u_{yy} + u_{xy} = u \end{cases}$$

*Solución:*

Respectivamente, se tienen las siguientes respuestas:

a) Ecuación lineal, no homogénea, de coeficientes constantes.
b) Lineal, no homogénea, de coeficientes no constantes (variables).
c) Lineal, homogénea, de coeficientes no constantes (variables).
d) Ecuación no lineal, homogénea, de coeficientes constantes.
e) Lineal homogénea y de coeficientes no constantes (variables).

## 2. RESOLUCIÓN DE LAS EDP

### 2.1. MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

Este método, denominado “de las características”, se aplica al caso de las EDP lineales de primer orden o más dimensiones. Por ejemplo, en el caso de dimensión 3, la EDP lineal de primer orden es:

$$a(x,y,z)u_x + b(x,y,z)u_y + c(x,y,z)u_z + d(x,y,z)u = f(x,y,z), \text{ siendo } u = u(x,y,z),$$

para las funciones dadas a, b, c, d y f. Las curvas características o generatrices $x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\overline{k}$, parametrizadas de la manera preferida, son las soluciones del siguiente sistema:

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t), y(t), z(t)), \quad \frac{dy}{dt} = b(x(t), y(t), z(t)), \quad \frac{dz}{dt} = c(x(t), y(t), z(t)) .$$

En la práctica, resulta usualmente más conveniente tratar a *x* como un parámetro en lugar de *t*, en cuyo caso el sistema anterior se transforma en un sistema de dos ecuaciones (si ahora suponemos que $a(x,y,z) \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y(x), z(x))}{a(x, y(x), z(x))}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{c(x, y(x), z(x))}{a(x, y(x), z(x))},$$

para las incógnitas: y = y(x) , z = z(x).

Se puede utilizar la primera terminología de “problemas de valor inicial y de frontera” para las EDP’s. Sin embargo, debido a que generalmente existe una combinación de condiciones de frontera e iniciales, con frecuencia nos referimos extensivamente a tales problemas como *Problemas de Valor de Frontera* (PVF o bien PVDF).

## 2.2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

**Ejercicio 1**

Sea la función de utilidad de un consumidor, donde u(x,y) es la raíz cuadrada de la inversa de la función v(x,y) que, a su vez, satisface la siguiente EDP:

$$x\left(v^2-y^2\right)v_x+y\left(x^2-v^2\right)v_y=v\left(y^2-x^2\right) \quad \text{, con} \quad v(x,x)=\frac{1}{x^2}, \forall x>1 .$$

Si la renta personal del individuo es de 125 u.m. afecta a unos impuestos directos del 20%, que la gasta en dos bienes *x* e *y*, siendo el precio de x = 5 u.m. y el de y = 4 u.m., se desea saber: a) ¿Qué cantidad se demandará de ambos bienes?. b) Si ahora el precio de *x* pasa a ser de 2 u.m., ¿cuáles serán las nuevas cantidades demandadas?. c) Considerando las dos situaciones de equilibrio anteriores y que la función de demanda es rectilínea, construir la función de demanda del bien *x*.

*Solución*:

a) En este caso, los datos del problema son los siguientes:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = x\,(z^2 - y^2) \\ f_2(x, y, z) = y\,(x^2 - z^2) \\ f(x, y, z) = z\,(y^2 - x^2) \end{cases}$$

y entonces la condición inicial queda parametrizada del siguiente modo:

$$\gamma(s)\equiv(\alpha_1(s),\alpha_2(s),\beta(s))=\left(s,s,\frac{1}{s^2}\right) \quad , \forall s\in\Re.$$

Dado que por aplicación de la regla de Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s)\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} s\left(\frac{1}{s^4}-s^2\right) & 1 \\ -s\left(\frac{1}{s^4}-s^2\right) & 1\end{pmatrix}=2s\left(\frac{1}{s^4}-s^2\right)$$

, vemos que este problema tiene solución única.

La transformada de Jacobi será:

$$x\,(z^2 - y^2)\,w_x + y\,(x^2 - z^2)\,w_y + z\,(y^2 - x^2)w_z = 0.$$

En un primer momento elegimos los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = x, \qquad a_2 = y, \qquad a_3 = z.$$

La integral primera asociada a estos valores se obtiene teniendo en cuenta que $x = w_x$, con lo cual $w = \frac{x^2}{2} + f(y,z)$ y, como consecuencia, la igualdad $y = w_y = \frac{\partial f}{\partial y}(y,z)$ implica que: $f(y,z) = \frac{y^2}{2} + g(z)$ .

Finalmente, $z = w_z = g'(z)$ implica que:

$$w(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$ , es una integral primera de esta ecuación.

Dado que: $w(\gamma(s)) = s^2 + \frac{1}{2s^4}$ , no es una función constante, debemos encontrar una segunda integral primera funcionalmente independiente de ésta. Para ello consideramos los siguientes factores integrantes:

$$a_1 = \frac{1}{x}, \qquad a_2 = \frac{1}{y}\ , \qquad a_3 = \frac{1}{z}.$$

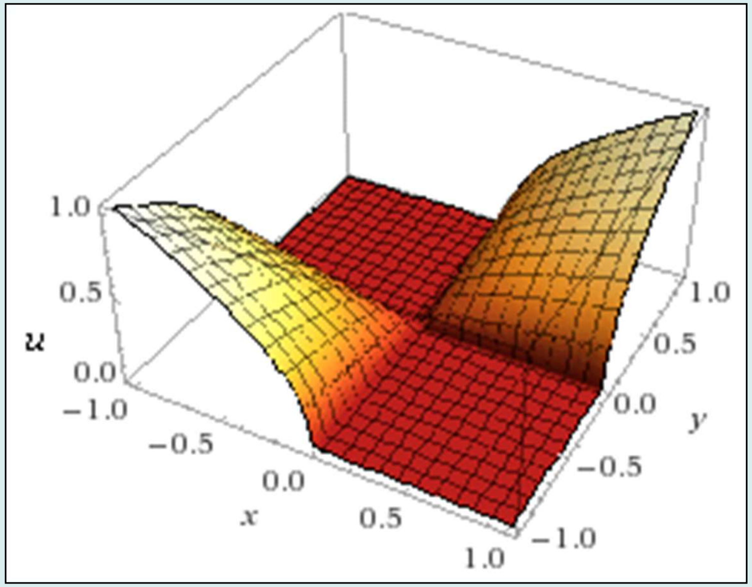
La solución del sistema se obtiene para estos valores del siguiente modo: Al ser $\frac{1}{x} = w_x$ , deducimos que $w = \log|x| + f(y,z)$. De la segunda igualdad obtenemos que $f(y,z) = \log|y| + g(z)$ . De la última expresión concluimos que: $w(x,y,z) = \log(|xyz|)$ .

Ahora bien, dado que: $w(\gamma(s)) = \log 1 = 0$, resulta que la función definida implícitamente al igualar esta segunda función a cero nos da la solución particular buscada, es decir:

$$v(x,y) = \frac{1}{xy}$$ , de donde: $u(x,y) = \sqrt{\frac{1}{v(x,y)}} = \sqrt{x\cdot y} = x^{1/2}\cdot y^{1/2}$ ,



con la siguiente representación gráfica:




La función de utilidad dada es tal que: $u(x,y) = x^{1/2} \cdot y^{1/2}$, con lo que:

$$u(tx,ty) = t^{1/2}x^{1/2} \cdot t^{1/2}y^{1/2} = t \cdot x^{1/2} \cdot y^{1/2} = t \cdot u(x,y) \ ,$$

luego es una función homogénea (y consecuentemente también homotética) de grado m = 1 (linealmente homogénea), que cumple el teorema de Euler, como puede comprobarse.

En efecto: $x \cdot f'_x + y \cdot f'_y = m \cdot u(x,y)$, y substituyendo se tiene que:

$$(1/2) \cdot y^{1/2} \cdot x^{1/2} + (1/2) \cdot y^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{1/2} \cdot y^{1/2} = u(x,y) \text{ , c.s.q.d.}$$

El punto de equilibrio ha de estar situado en la recta de balance y, por otra parte, ha de satisfacer que la RMS entre ambos bienes sea igual al cociente de sus precios.

En estas condiciones de equilibrio, sucederá que la recta de balance será:

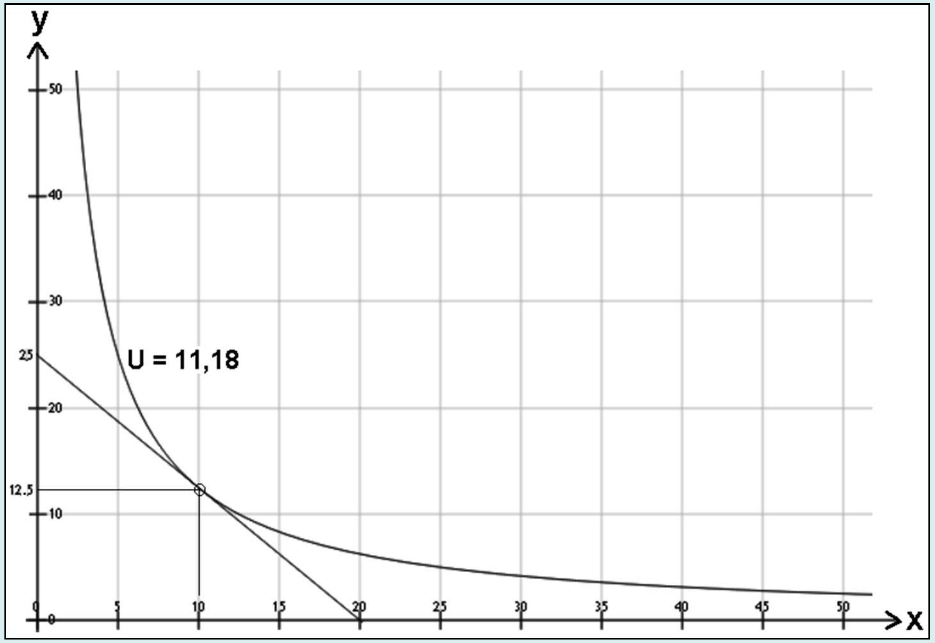
$y^0 = 125 \times 0'80 = 100 = 5x + 4y$, siendo $y^0$ la renta disponible del consumidor. Además:

$$(RMS)_2^1 = \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{(1/2)y^{1/2} \cdot x^{-1/2}}{(1/2)y^{-1/2} \cdot x^{1/2}} = \frac{y}{x} \text{ , y entonces: } \frac{y}{x} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{4} \text{ , luego se obtiene:}$$

$x = 10$ ; $y = 12'5$ ; y el nivel de utilidad será:

$$U = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{10 \times 12'5} \cong 11'18 \ ,$$

con la siguiente representación gráfica:



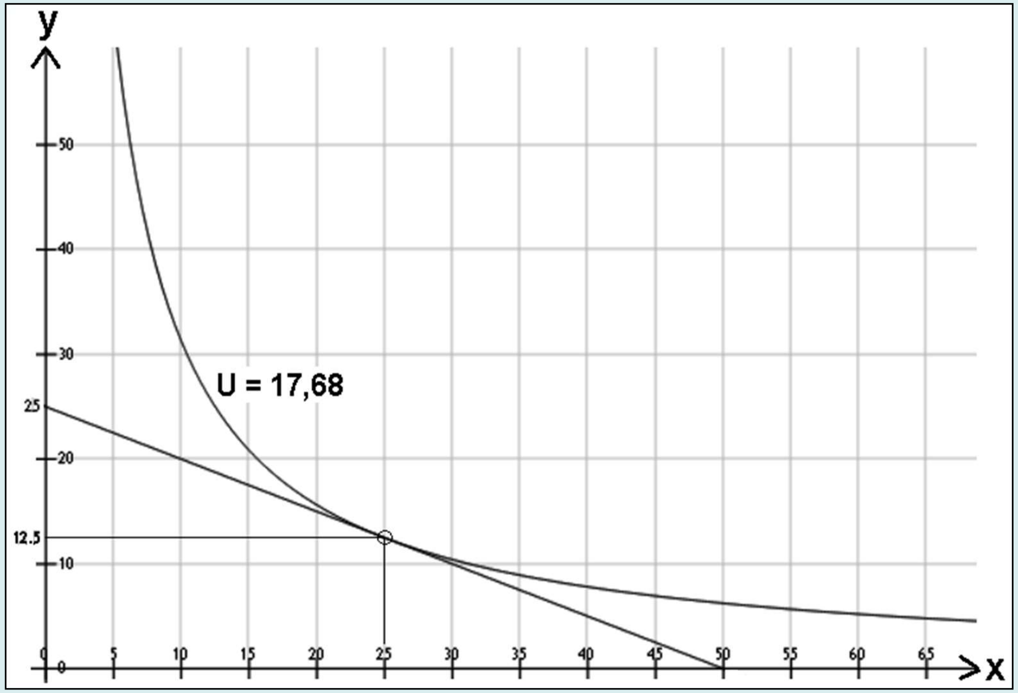
Curva de utilidad y recta de balance en a).

El valor de la relación marginal de substitución (RMS) en el punto de equilibrio obtenido (se trata de una situación óptima), es el siguiente: $\left(RMS\right)_2^1 = \frac{12'5}{10} = 1'25$.

b) En estas condiciones de equilibrio, sucederá que la recta de balance será: 100 = 2x + 4y, y entonces: $\frac{y}{x} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, luego se obtiene:
x = 25 ; y = 12'5 ; y el nivel de utilidad será, ahora:

$$U = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{25 \times 12'5} \cong 17'68 \ ,$$

con la siguiente representación gráfica:



Curva de utilidad y recta de balance en b).

El valor de la RMS en el punto de equilibrio obtenido (situación óptima), es: $(\mathrm{RMS})_2^1 = \frac{12'5}{25} = 0'50$ .

c) Considerando las dos situaciones de equilibrio anteriores y que la función de demanda debe ser recta, se tendrá que para el bien *x* la recta debe pasar por los puntos: (p,x) → (5,10) → (2,25) , o sea:

$$\frac{x-5}{2-5} = \frac{p-10}{25-10} ; \frac{x-5}{-3} = \frac{p-10}{15}$$ ; de donde: p = 35 – 5x ,

que constituye la función inversa de demanda, con la siguiente representación gráfica:


Función inversa de demanda.

**Ejercicio 2**

Una empresa monopolística vende su producto en dos mercados separados, cuyas funciones de demanda son las siguientes:

$$\begin{cases} x_1 = 10 - \dfrac{p_1}{2} \\ x_2 = 10 - p_2 \end{cases}$$

, siendo sus costes de producción:

$C(x_1,x_2) = 4u(x_1,x_2) + \dfrac{u(x_1,x_2)^2}{2} + 7$ , viniendo $u(x_1,x_2)$ dada por la EDP:

$x_2 \dfrac{\partial v}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial v}{\partial x_2} = \sin 0$, que cumple la condición que $v(0,x_2) = x_2^2$, para todo $x_2$, siendo:

$u(x_1,x_2) = \sqrt{v(x_1,x_2) + 2x_1x_2}$ . Se desea obtener el beneficio neto de la empresa si puede discriminar precios entre los dos mercados, considerando una fiscalidad del 25%, así como las diversas funciones de costes y su representación gráfica (adaptado de Martín y Sánchez, UNED, 2001, p.128).

*Solución:*

En primer lugar habrá que resolver la EDP dada, que es lineal, de primer orden, homogénea y de coeficiente variables, para obtener la correspondiente función de costes. Las líneas de campo verifican las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Si se multiplica la primera ecuación por $x_1$ y la segunda por $x_2$, y se suman, se deduce que:

$$x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = 0 \text{ , o bien su equivalente: } \frac{d}{dt}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 0 \text{ .}$$

De aquí se concluye la relación: $x_1^2 + x_2^2 = c$, donde *c* es constante en cada línea de campo. La expresión $x_1^2 + x_2^2$ es una integral primera del campo ya que permanece constante en el flujo. Es decir, se verifica que:

$$x_1(t,s)^2 + x_2(t,s)^2 = x_1(0,s)^2 + x_2(0,s)^2, \text{ para todo } t.$$

Si se impone la condición inicial se obtiene la expresión:

$$x_1(t,s)^2 + x_2(t,s)^2 = x_2(0,s)^2 = x_3(0,s).$$

Esta relación tiene el siguiente significado geométrico: las curvas características de la ecuación son circunferencias de centro en el origen de coordenadas.

De modo similar, de la segunda ecuación diferencial, se deduce que: $x_3 = c$, con *c* constante, es otra integral primera y por consiguiente:

$$x_3(t,s) = x_3(0,s).$$

Esta relación indica que el valor de la solución permanece constante a lo largo de una curva característica.

De las dos relaciones anteriores se desprende, en definitiva, que:

$x_3 = v(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$, es la función cuya gráfica es la superficie buscada. Se trata de un paraboloide infinito, con un mínimo global en el punto $(x_1,x_2) = (0,0)$. Al cabo, de la solución particular obtenida de la EDP se deduce que:

$$u(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2} = x_1 + x_2 = x,$$

y la función de costes totales quedará configurada así:

$$C(x_1,x_2) = 4(x_1 + x_2) + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + 7 \ .$$

La empresa en cuestión tenderá, como siempre, a maximizar sus beneficios. Si no se le prohíbe discriminar permitiéndole vender su producto a precios distintos en los diferentes mercados separados, la función de beneficio a maximizar será:

$$p_1 = 20 - 2x_1 \ ; \ p_2 = 10 - x_2 \ .$$

$$\pi = I - C = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - C(x_1, x_2) = (20 - 2x_1)x_1 + (10 - x_2)x_2 - 4(x_1 + x_2) - \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} - 7.$$

Procederemos como resulta habitual en estos casos (Apéndice II):

- *Condiciones necesarias o de primer grado*:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} = 20 - 4x_1 - 4 - x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow 5x_1 + x_2 = 16 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} = 10 - 2x_2 - 4 - x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Se trata de resolver, pues, un simple sistema lineal no homogéneo, de dos ecuaciones con 2 incógnitas, compatible y determinado, a saber:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{42}{14} = 3 \text{ ud.} \ ; \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 16 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1 \text{ ud.}$$

- *Condiciones suficientes o de segundo grado*:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = -4 - 1 = -5 \, ; \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = -1 ; \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = -2 - 1 = -3$$ , y el determinante funcional hessiano ofrece:

$$H(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 1 = 14 > 0$$ , y además: $-5 < 0$ ,

luego se trata, efectivamente, de un máximo.

Consecuentemente, los precios a los que vende la empresa en cuestión su producto en cada uno de los dos mercados separados, son los siguientes:

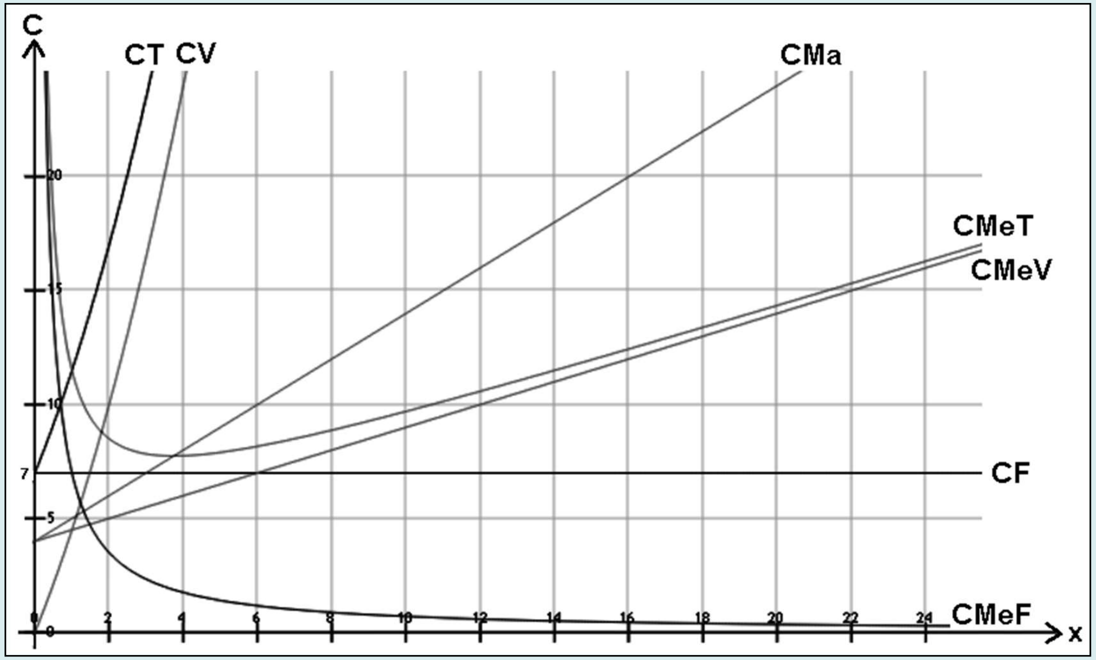
$$\begin{cases} p_1 = 20 - 2x_1 = 14 \text{ u.m.} \\ p_2 = 10 - x_2 = 9 \text{ u.m.} \end{cases}$$, y entonces se tiene un beneficio bruto de:

$\pi$ = (14 $\times$ 3) + (9 $\times$ 1) – (4 $\times$ 4) – 8 - 7 = 20 u.m. y un beneficio neto de: B = 0.75 $\times$ $\pi$ = 0.75 $\times$ 20 = 15 u.m.

Las diversas funciones de costes pedidas serán:

$$\begin{cases} CT = \dfrac{x^2}{2} + 4x + 7 \\ CF = 7 \\ CV = \dfrac{x^2}{2} + 4x \\ CMa = x + 4 \\ CMeT = \dfrac{x}{2} + 4 + \dfrac{7}{x} \\ CMeV = \dfrac{x}{2} + 4 \\ CMeF = \dfrac{7}{x} \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica:




Curvas de coste.

## Ejercicio 3

La función de producción *u* de una pequeña empresa, cuyo precio de venta de su único *output* es de p = 70 € /ud, viene expresada en miles de unidades por la siguiente EDP no lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}=\int_0^1 x\cdot \ln x\cdot dx\ .$$

Se pide hallar: a) la cifra de negocios de esta empresa teniendo en cuenta que los “inputs” son x = 5 e y = 8 y que al final del proceso productivo se computa un 1’5% de mermas, b) la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

*Solución:*

a) Procede, en primer lugar, resolver la integral definida del 2º miembro en la ecuación de la EDP. Entonces:

$\int_0^1 x\cdot \ln x\cdot dx=\left[\frac{x^2}{2}(\ln x)-\frac{x^2}{4}\right]_0^1=-\frac{1}{4}$ , quedando la EDP homogénea, de primer orden y coeficientes variables, configurada analíticamente así: $\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=0$ .

Para resolver la EDP planteada, emplearemos el método de Darboux-Cauchy (alternativo del de Lagrange-Charpit para obtener una integral completa) que proporciona una interpretación muy clara del problema planteado y de su solución aunque exija conocer la solución completa del sistema característico, que será un conjunto de 5 funciones de la variable auxiliar *t* que representa una “banda característica”, es decir, una curva junto con un plano tangente en cada uno de sus puntos: {x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)} . Se han de verificar, además, las denominadas “condiciones de banda”. El problema de Cauchy, pues, consistirá en encontrar la superficie integral que contiene una cierta curva: $\Gamma \equiv$ {f(s), g(s), h(s)}; para ello, se resuelve el sistema característico siguiente, que es un sistema no lineal asociado a la EDP, y cuyas curvas-solución se denominan “líneas características”:

.

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_u} = -\frac{dq}{F_y + qF_u} = dt \quad .$$

Geométricamente la solución es clara. Puesto que el plano tangente a la superficie integral buscada tiene que contener la tangente a la curva en cada punto de ella, trazaremos los planos tangentes al cono correspondiente a cada punto, que pasan por la tangente a la curva dada en él, y éstos serán planos tangentes a otras tantas superficies integrales que pasan por dicho punto. Cada uno de ellos individualizará, con el punto, una banda característica que pasa por él. Al mover el punto sobre la curva, la sucesión de planos tangentes determinará la superficie integral como lugar geométrico de las curvas características individualizadas por cada uno de dichos planos. Tendremos, pues, tantas superficies integrales como planos tangentes al cono podamos trazar por cada tangente (Puig, 1962).

Debe tenerse en cuenta que la superficie buscada u(x,y) ha de contener la curva, obteniéndose la superficie solución en forma paramétrica: [x(t,s), y(t,s), u(t,s)] .

Pongamos esta EDP en la forma F(x,y,u,p,q) = 0, esto es:

px + qy – pq = 0, y la solución pasando por la curva:

$$\Gamma \equiv \{x = \alpha(s) = 0,\ y = \beta(s) = s,\ u = \gamma(s) = s\}, \tag{1}$$

es obviamente la bisectriz del plano (y,u). Para determinar si existe una solución única, veamos si existen dos funciones $\sigma(s)$ y $\tau(s)$ satisfaciendo las debidas condiciones. En nuestro caso, estas condiciones son:

$$\begin{cases} 0\cdot\sigma(s) + 1\cdot\tau(s) = 1 \\ 0\cdot\sigma(s) + s\tau(s) - \sigma(s)\tau(s) = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones tienen una única solución que es:

$\tau(s) = 1$, $\sigma(s) = s$. Tenemos, por consiguiente, una sola banda integral: $B \equiv (0,s,s,s,1)$.

Vamos ahora a comprobar que se verifica la condición de transversalidad. Como $F_p = x - q$ y $F_q = y - p$, tenemos: $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ , lo cual demuestra que la solución está bien definida. Para calcularla, consideremos el sistema característico siguiente:

$$dt = \frac{dx}{x-q} = \frac{dy}{y-p} = \frac{du}{px+qy-2pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q} \quad . \tag{2}$$

Nuestro objetivo, como se ha dicho, es encontrar una solución del tipo:

$$\{x = x(s,t),\ y = y(s,t),\ u = u(s,t),\ p = p(s,t),\ q = q(s,t)\},$$

que satisfaga las siguientes condiciones iniciales del problema planteado:

$$\{x(s,0) = \alpha(t),\ y(s,0) = \beta(s),\ u(s,0) = \gamma(s),\ p(s,0) = \sigma(s),\ q(s,0) = \tau(s)\}.$$

De esta manera, encontramos una superficie de $\Re^5$. Su proyección a $\Re^3$ mediante sus tres primeras coordenadas nos dará la superficie solución. Ésta será:

$$\{x = x(s,t),\ y = y(s,t),\ u = u(s,t)\} ,$$

en función de los parámetros *s* y *t*. Para encontrarla, vamos a integrar el sistema, paso a paso, escribiendo las constantes que surgen en función del parámetro *s*:

$$\begin{cases} dt = -\dfrac{dp}{p} \Rightarrow p(s,t) = a(s)\cdot e^{-t}, \quad p(s,0) = a(s) = \sigma(s) = s \Rightarrow p(s,t) = s\cdot e^{-t} \\ dt = -\dfrac{dq}{q} \Rightarrow q(s,t) = b(s)\cdot e^{-t}, \quad q(s,0) = b(s) = \tau(s) = 1 \Rightarrow q(s,t) = e^{-t} \end{cases}$$

Éstas son las ecuaciones más sencillas de resolver del sistema (2). Tenemos también:

$$dt = \frac{dx}{x-q} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x - e^{-t} \Rightarrow x' - x = -e^{-t} \Rightarrow x^* = A(s)\cdot e^{t} \Rightarrow \text{si } x_p = h\cdot e^{-t} \Rightarrow x'_p = -h\cdot e^{-t}$$

$$\text{y resulta: } -2h\cdot e^{-t} = -e^{-t} \Rightarrow h = 1/2 \Rightarrow x(s,t) = A(s)e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}, \quad x(s,0) = A(s) + \frac{1}{2} = \alpha(s) = 0$$

lo que implica que: $x(s,t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{t})$.

La ecuación: $dt = \dfrac{dy}{y-p}$ se resuelve de una manera similar y da como solución: $y(s,t) = \dfrac{s}{2}(e^{-t} + e^{t})$, como puede comprobarse con facilidad.

Resolvamos ahora la ecuación: $dt = \dfrac{du}{px + qy - 2pq}$ .

Substituyendo adecuadamente en la ecuación anterior, se obtiene: $dt = -\dfrac{du}{s\cdot e^{-2t}}$ ,

e integrando resulta: $u(s,t) = -\int s\cdot e^{-2t}\cdot dt = -\dfrac{s}{2}e^{-2t} + C = \dfrac{s}{2}(1 + e^{-2t})$.

Las ecuaciones anteriores nos ofrecen, de forma paramétrica, la solución de nuestro problema.

Aunque no siempre es posible, en este caso concreto se pueden eliminar los dos parámetros (s,t) entre estas tres ecuaciones, para dar la solución al problema de Cauchy en forma implícita, siendo ésta la siguiente:

$$u^2 = y^2 + 2xyu \,.$$

Un cálculo sencillo permite demostrar que ésta es efectivamente una solución de la EDP planteada y que la curva dato (1) está contenida en esta superficie.

Esta función se puede expresar así: $u = \dfrac{u^2 - y^2}{2xy}$ , y explícitamente:

$$u = xy \pm \sqrt{(x^2+1)y^2} = xy \pm y\sqrt{x^2+1} = y(x \pm \sqrt{x^2+1}).$$

Tratándose de una función de producción, con lo que necesariamente u > 0, será necesario adoptar el valor, $u = y(x + \sqrt{x^2 + 1})$, y en este caso, el "output" total valdrá, con x = 5 e y = 8:

$$u = 8(5 + \sqrt{26}) = 80'792 \equiv 80.792 \text{ ud.},$$

y restando las mermas (1'5%), se tendrá una producción neta de:

$$80.792 \times 0'985 = 79.580 \text{ ud.}$$

De este modo, la cifra de negocios pedida vendrá dada por:

$$I = u \times p = 79.580 \text{ ud.} \times 70 \text{ € /ud.} = 5.570.600 \text{ € .}$$

<u>NOTA:</u> Obsérvese que la ecuación inicial dada se ha expresado abreviadamente en la forma: F(x,y,u,p,q) = 0, esto es:

$$p \cdot x + q \cdot y - p \cdot q = 0,$$

donde, como siempre, se ha considerado que: $p = u'_x$ ; $q = u'_y$.

b) Por último, la relación de transformación de productos pedida vendrá dada por:

$h(x,y) = y(x + \sqrt{x^2 + 1})$, en (5,8), esto es:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+1}} + y \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = x + \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2} = -\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+1}} + y}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}} = 4\sqrt{\dfrac{2}{13}} = 1'569$ .

## Ejercicio 4

En un mercado de duopolio, la función de demanda de una de las empresas oferentes viene dada por la EDP:

$$\begin{cases} xu_x - 2yu_y + u_x^2 - u_y^2 + 2u = \int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx - \int_1^e \ln x\cdot dx, \\ u(x,0) = 1 - x^2. \end{cases}$$

, viniendo el precio *u* expresado en €/kg. Si las cantidades de producto que ofrece cada empresa son (expresadas en millones de toneladas métricas): x = 0.012 e y = 0.016, se desea conocer la cifra de negocios de aquella empresa.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 30).

*Solución*:

Procede, en primer lugar, calcular el 2º miembro de la EDP de demanda planteada, formado por la diferencia de sendas integrales definidas que se pueden resolver por partes, esto es:

$$\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx = \left[x\cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\cdot dx = e - (e-1) = 1, \text{ y también: } \int_1^e \ln x\cdot dx = \left[x\cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1 \ ,$$

con lo que la EDP quedará configurada así: $xu_x - 2yu_y + u_x^2 - u_y^2 + 2u =$ 1-1 = 0.

Se trata, pues, de una EDP no lineal y de primer orden, homogénea y de coeficientes variables. Así pues, la función que define la ecuación anterior viene dada por:

$$F(x,y,z,p,q) = xp - 2yq + p^2 - q^2 + 2z.$$

La curva inicial se parametriza del siguiente modo:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s),\alpha_2(s),\beta(s)) = (s,0,1 - s^2),\ \forall s \in \Re.$$

Por consiguiente, debemos resolver las ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = x + 2p, & x(0) = s, \\ y' = -2y - 2q, & y(0) = 0, \\ z' = px + 2p^2 - 2yq - 2q^2, & z(0) = 1 - s^2, \\ p' = -3p, & p(0) = p_0(s), \\ q' = 0, & q(0) = q_0(s), \end{cases} \tag{1}$$

conjuntamente con la siguiente ecuación de compatibilidad:

$$x(t,s)p(t,s) - 2y(t,s)q(t,s) + p^2(t,s) - q^2(t,s) + 2z(t,s) = 0. \tag{2}$$

En este caso $p_0$ y $q_0$ deben verificar las siguientes propiedades:

(i) Condición de banda inicial: $p_0(s)\alpha_1'(s) + q_0(s)\alpha_2'(s) = \beta'(s) \quad \Leftrightarrow \quad p_0(s) = -2s$.

(ii) Condición de compatibilidad: $F(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s), p_0(s), q_0(s)) = 0 \Leftrightarrow sp_0(s) + p_0^2(s) - q_0^2(s) = 2(s^2 - 1)$.

(iii) Condición de transversalidad: $0 \neq \det\begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} s + 2p_0(s) & 1 \\ -2q_0(s) & 0 \end{pmatrix} = 2q_0(s)$.

Por lo tanto, sabemos que este problema tiene exactamente dos soluciones que vienen dadas para los siguientes valores:

$$p_0(s) = -2s, \qquad q_0(s) = \pm\sqrt{2}.$$

Calculemos, en un primer momento, la solución asociada al valor $q_0(s) = \sqrt{2}$. De las dos últimas ecuaciones del sistema (1) obtenemos de inmediato que:

$$q(t,s) = \sqrt{2} \text{ , y } p(t,s) = -2se^{-3t}.$$

Por consiguiente, sin más que tener en cuenta la ecuación (2), las restantes variables se calculan como la solución obtenida de problemas anteriores para el caso particular de:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ , } b(t,s) = \begin{pmatrix} -4se^{-3t} \\ -2\sqrt{2} \\ 4s^2e^{-6t} - 2 \end{pmatrix} \text{ , } C(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 1 - s^2 \end{pmatrix}.$$

Así pues, obtenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t,s) = se^{-3t} \\ y(t,s) = \sqrt{2}\left(e^{-2t} - 1\right) \\ z(t,s) = -s^2e^{-6t} - 1 + 2e^{-2t} \end{array}}$$

Por lo tanto, la superficie solución está parametrizada por la expresión:

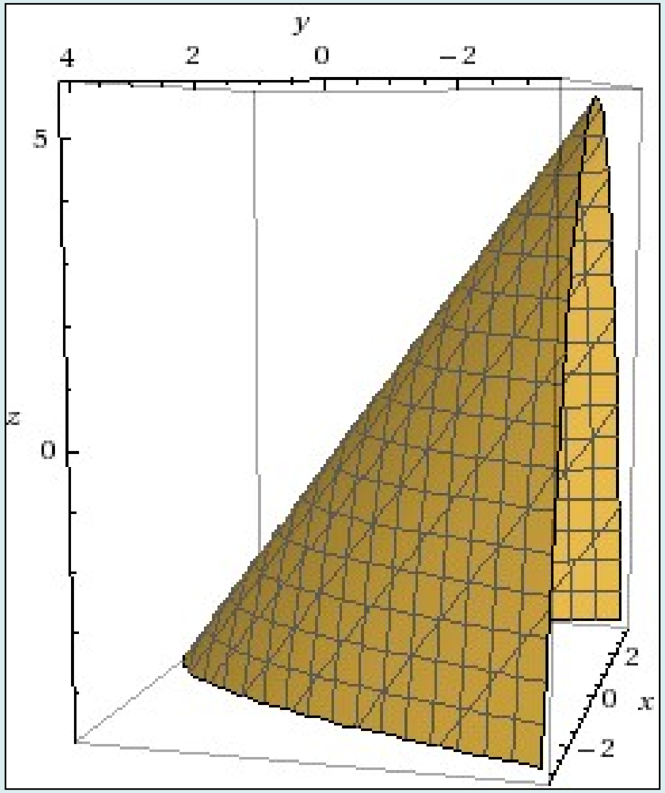
$$\Gamma(t,s) = \left(se^{-3t}, \sqrt{2}\left(e^{-2t} - 1\right), -s^2e^{6t} - 1 + 2e^{-2t}, -2se^{-3t}, \sqrt{2}\right).$$

De las expresiones de *x* e *y* no es difícil comprobar que una solución particular buscada es:

$$u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y)) = -x^2 + 1 + \sqrt{2}y.$$

Cuando $q_0(s) = -\sqrt{2}$ , haciendo similares argumentaciones, obtenemos que: $u(x,y) = -x^2 + 1 - \sqrt{2}y$ ,

y esta segunda solución buscada es la correcta desde el punto de vista de su interpretación microeconómica, puesto que se trata de una función de demanda, de ecuación: $x^2 + y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, con la siguiente representación gráfica como cilindro parabólico:




Debe tenerse en cuenta que, para que exista un significado económico, al tratarse de una función de demanda (decreciente), necesariamente debe cumplirse que: $u \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, o sea, que la función en cuestión tiene como dominio de definición el octante positivo de la esfera.

El precio se anulará ($u = z = 0$) en la sección cónica de ecuación: $x^2 + y\sqrt{2} - 1 = 0$, con:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} ; |A| = -1/2 < 0 ; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

luego se trata de una parábola real, cuyo centro es impropio.

Para la conceptualización de esta cuádrica o superficie de 2º orden, debe tenerse en cuenta que su matriz (A) es:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ y entonces: } |A| = 0 .$$

También: $A'_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 , \text{ con } |A| = 0 \text{ y: } a_{11} \cdot A_{44} = 0, \text{ y como:}$$

$$\text{Rango o característica } \begin{cases} r(A) = k = 3 \\ r(A_{44}) = h = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Cilindro parabólico.}$$

Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0 \,,$$

de donde: $S_1 = 1$, $S_2 = S_3 = 0$. Se trata, pues, de una cuádrica de revolución, con la siguiente ecuación reducida:

$S_1 x^2 \pm 2y\sqrt{\frac{-I'_3}{I_1}} = 0$, siendo el invariante especial de los cilindros:

$I'_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33}$, y también: $I_1$ (invariante métrico o lineal) $= a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1 + 0 + 0 = 1$,

$$I'_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \,.$$

Con ello resultará, que la ecuación reducida buscada es: $x^2 \pm y\sqrt{3}$ .

Por último, si entendemos que estamos analizando, v. gr., la segunda empresa, se tendrá:

$$u = 1 - x^2 - \sqrt{2}y = 1 - 0.012^2 - 0.016 \times \sqrt{2} \cong 0.98 \text{ €/kg},$$

y la cifra de negocios pedida, será, en definitiva:

$$I_2 = p_2 \times q_2 = u \cdot y = 0.98 \times 0.016 = 0.01568 \equiv 15.680.000 \text{ €} \,.$$

## 3. CONCEPTOS BÁSICOS EN RELACIÓN A LA OFERTA Y LA DEMANDA

Como explicación general comprensiva de algunos conceptos introducidos en los anteriores ejercicios, veamos que la ley de la oferta y demanda es un modelo económico básico postulado para la formación de precios de mercado de los bienes dentro de la escuela neoclásica y otras afines, usándose para explicar una gran variedad de fenómenos y procesos, tanto macro como microeconómicos. Además, sirve como base para la explicación de otras teorías y modelos económicos.

El modelo se basa en la relación existente entre el precio de un bien y las ventas del mismo y asume que, en un mercado de competencia perfecta, el precio de mercado se establecerá en un punto —llamado *punto de equilibrio*— en el cual se produce un "vaciamiento del mercado", es decir, que todo lo producido se vende y no queda demanda insatisfecha.

El postulado de la oferta y la demanda implica tres leyes, a saber:

- Cuando, al precio corriente, la demanda excede a la oferta, aumenta el precio. Inversamente, cuando la oferta excede la demanda, disminuye el precio.

- Un aumento en el precio disminuye, más tarde o más temprano, la demanda y aumenta la oferta. Inversamente, una disminución en el precio aumenta, más tarde o más temprano, la demanda y disminuye la oferta.

- El precio tiende a establecerse al nivel en el cual la demanda iguala la oferta (punto de equilibrio).

UNED TORTOSA

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 14

## ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (II)

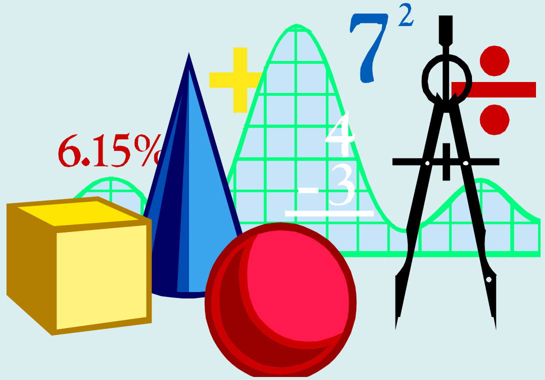
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





# 1. EDP'S LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

## 1.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado se analizan -más específicamente por su particular interés en los modelos económicos- las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales lineales de segundo orden, cuya expresión general es:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \quad , \qquad (x,y) \in \Omega \ , \tag{1}$$

donde a, b, c, d, e, f, g son funciones de las variables explicativas *x* e *y*, o bien constantes.

## 1.2. TIPOS DE EDP'S LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Se dice que la ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden (1) es, en función del valor del discriminante ($b^2 - 4ac$):

1. Hiperbólica si ($b^2 - 4ac$) > 0.
2. Parabólica si ($b^2 - 4ac$) = 0.
3. Elíptica si ($b^2 - 4ac$) < 0.

Los nombres empleados surgen por analogía de nuestra ecuación con la ecuación de las secciones cónicas en el plano. La clasificación anterior se puede extender a ecuaciones con coeficientes diversos. El carácter de las ecuaciones lineales con coeficientes variables (en las que a, b, c son funciones de *x* e *y*) puede ser distinto según sea el subconjunto $(x,y) \in R^2$, o de otra forma, según sea la región del plano Oxy.

## 2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

### Ejercicio 1

Hallar la cifra de negocios de una empresa fabricante de motocicletas cuya función de producción viene dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{, determinada por las condiciones: } \begin{cases} u(x,0) = 6z(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 6[z(x) + 1] \end{cases}$$

, en que se cumple que: $z'(x) - 2x = 0$, con $z(0) = 0$, si los “inputs” del proceso productivo son: $x = 5$ ud. e $y = 7$ ud., y el precio medio ponderado del único “output” es 10.000 €/ud., así como la correspondiente relación de transformación de productos (relación marginal de transformación).

*Solución:*

Procede, en primer lugar, hallar la expresión de la función z(x) que aparece en las ecuaciones condicionantes. Esta función se resuelve mediante una sencilla EDO de primer orden, puesto que:

$$\frac{dz}{dx} = 2x \quad \text{, e integrando resultará que:}$$

$z(x) = \int dz = 2\int x \cdot dx = x^2 + C$; pero según la condición inicial dada:

$z(0) = C = 0$, y se tiene la integral particular: $z(x) = x^2$.

De este modo, las condiciones de la EDP quedarán nuevamente establecidas así:

$$\begin{cases} u(x,0) = 6x^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 6x^2 + 6 \end{cases}$$

Se trata de una ecuación lineal, homogénea, de segundo orden y coeficientes constantes. Como: a = 1, b = 0 y c = -1, con el discriminante: $(b^2 – 4ac) = 4 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico.

Poniendo, ahora, la ecuación en derivadas parciales en la forma siguiente, usando el operador D, se tiene:

$$(D_x^2 - D_y^2)u = (D_x + D_y)(D_x - D_y)u = 0,$$

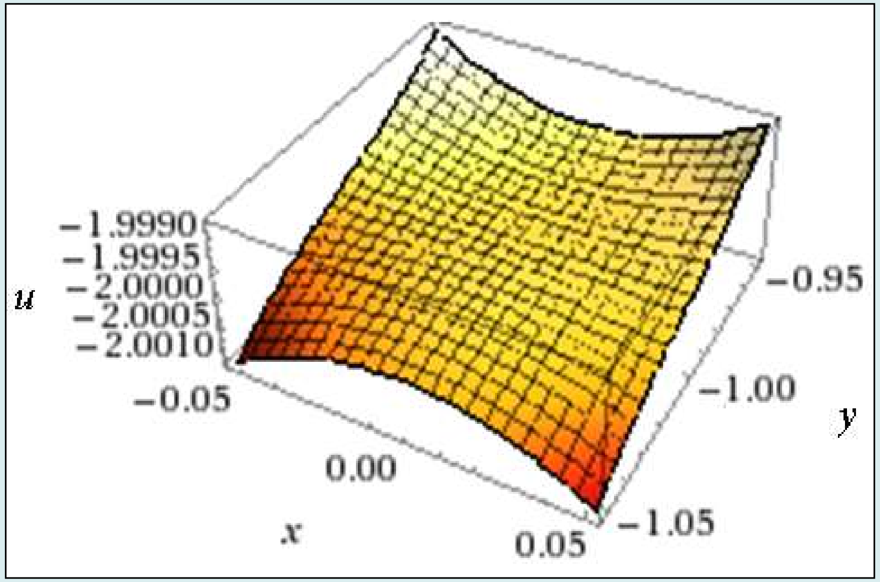
y se encuentra inmediatamente su solución general:

u = f(x + y) + g(x – y), donde *f* y *g* son funciones arbitrarias.

Se imponen ahora las condiciones geométricas y se obtiene como solución de nuestro problema:

$$u(x,y) = (x + y)^3 + 3(x + y)^2 + 3(x + y) – (x – y)^3 + 3(x – y)^2 – 3(x – y) =$$
$$= 2(3x^2y + 3x^2 + y^3 + 3y^2 + 3y),$$

cuya representación gráfica es la siguiente:



Ello puede comprobarse sin más que haciendo:

$$u(x,0) = 6x^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 6x^2 + 6 \text{, c.s.q.d.}$$

De este modo, el "output" total anual será:

$$u = 2(3 \times 25 \times 7 + 3 \times 25 + 343 + 3 \times 49 + 21) = 2.222 \text{ ud.,}$$

y los ingresos totales o cifra de negocios del ejercicio será:

$$I = u \times p = 2.222 \text{ ud.} \times 10.000 \text{ € /ud.} = 22.220.000 \text{ € .}$$

Por último, la relación de transformación de productos vendrá dada por: $h(x,y) = 2(3x^2y + 3x^2 + y^3 + 3y^2 + 3y)$ en (5,7), esto es:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial x} = 12x(y+1) \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial y} = 6x^2 + 6(y+1)^2 \end{cases}$$

, de donde: RTP (RMT) = $\dfrac{h_1}{h_2} = -\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x(y+1)}{6x^2 + 6(y+1)^2} = \dfrac{80}{89} \approx 0'90$ .

## Ejercicio 2

a) Determinar la trayectoria temporal de los resultados contables cooperativos de una sociedad cooperativa fiscalmente protegida, dedicada a central hortofrutícola, $u(x,t)$, expresados en millones de €, que vienen dados por la siguiente EDP, donde *x* es la cifra de ventas (en millones de €) y *t* el tiempo expresado en décadas, a los 5 años del inicio de su actividad económica:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = t + e^t, & \forall x \in \{\Re\}, \forall t > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^4 - 5x^2 + 4)\cdot dx, & \forall x \in \{\Re\}. \end{cases}$$

b) Determinar, para el mismo ejercicio, la cuota íntegra a ingresar, en su caso, del Impuesto de Sociedades, teniendo en cuenta que:

- La cifra de ventas ha sido de 47.650.000 € .

- La sociedad se halla sujeta a unos tipos del 20% para los resultados cooperativos y del 30% para los extra-cooperativos.

- Se han producido resultados extra-cooperativos (básicamente por relaciones comerciales con terceros no socios y otras actividades económicas ajenas) por importe de 300.000 €.

- La retribución del gerente excede en 10.000 € del valor de mercado de un puesto de trabajo de la misma naturaleza.

- Los excedentes cooperativos se destinan en un 20% al FRO (Fondo de Reserva Obligatorio) y en un 5% al FEP (Fondo de Educación y Promoción).

*Solución*:

a) La condición lateral dada ofrece como solución:

$$u(x,0) = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(x^4 - 5x^2 + 4)\cdot dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = 2.$$

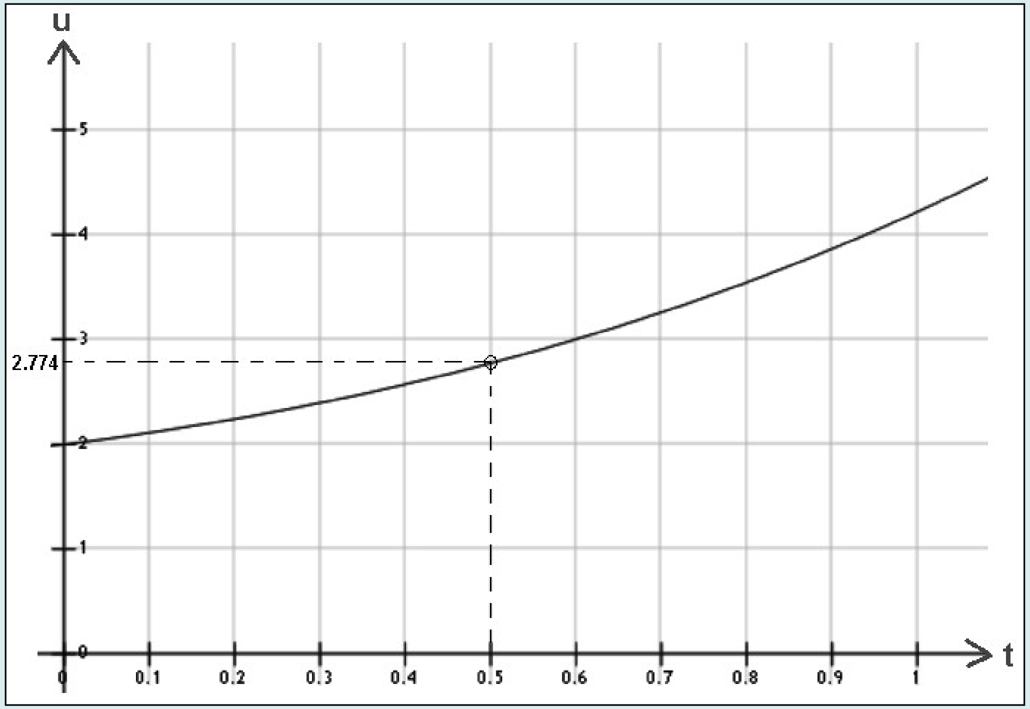
Para resolver este ejercicio no necesitamos aplicar la fórmula de Poisson. En efecto, observamos, de la contemplación de los datos del problema, que u(x,t) es independiente de la variable *x*, así que la solución buscada es de la forma:

$$u(x,t) = z(t) \text{ , con z resolviendo } \begin{cases} z'(t) = t + e^t \\ z(0) = 2. \end{cases}$$

Entonces se obtiene la solución:

$$u(x,t) = 2 + \int_0^t (s + e^s)ds = 2 + \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t + \left[e^s\right]_0^t = \frac{t^2}{2} + e^t + 1$$

con la siguiente representación gráfica:




Trayectoria temporal de los resultados contables cooperativos.

b) Como puede comprobarse, la trayectoria temporal no depende de la cifra de ventas, y al 5º año del inicio de la actividad económica se tendrán unos resultados contables cooperativos de:

$$u = \frac{0'5^2}{2} + e^{0'5} + 1 = 2'774 \equiv 2.774.000 \text{ €} .$$

De este modo, de acuerdo con los datos del enunciado del problema planteado, se tendrá la siguiente base imponible de los resultados cooperativos:

| | |
|---|---|
| -Resultados contables cooperativos: | +2.774.000 € |
| -Ajustes por valoración de mercado: | +10.000 € |
| -Dotación FRO: 50% × 20% × 2.774.000 € = | -277.400 € |
| -Dotación FPE: 5% × 2.774.000 € = | -138.700 € |
| Base Imponible: | +2.367.900 € |

En consecuencia, la cuota íntegra a ingresar del Impuesto de Sociedades vendrá determinada por:

| | |
|---|---|
| - De resultados cooperativos: 20% s/ 2.367.900 € = | +473.580 € |
| -De resultados extra-cooperativos: 30% s/ 300.000 € = | +90.000 € |
| CUOTA ÍNTEGRA: | +563.580 € |

En su caso, por último, deberían practicarse las deducciones y bonificaciones que procedan según la legislación vigente, como por ejemplo las deducciones por doble imposición (interna y/o internacional), retornos cooperativos, creación de empleo, reinversión de beneficios extraordinarios por plusvalía obtenidos en la enajenación de elementos del inmovilizado material, etc.

## Ejercicio 3

El modelo hidráulico que define la rugosidad absoluta de una tubería K(x,t) de acero soldado de ∅ 4" viene dado, en función del pH del agua por ella circulante y del tiempo o edad de la instalación, por la siguiente ecuación diferencial parabólica unidimensional en derivadas parciales:

$$\begin{cases} K_t(x,t) - K_{xx}(x,t) = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \ldots + \dfrac{t^n}{n!} + e^{\xi}\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!},\ \forall\, t \geq 0.2, \forall\, x \in \{\Re\}, \\ \\ \qquad\qquad \forall\, \xi \in (t_0, t), \text{con}: K(x,0) = \cos z(x), \forall t \in \{\Re\}. \end{cases}$$

, $\forall\, n \in \{N\} \cup \{0\}$, tal que: $z(x) = x + \int_{-1}^{1} x \cdot t \cdot z(t)\,dt$ , viniendo el tiempo *t* expresado en siglos y siendo x = 1/pH. Se desea estudiar la evolución temporal de la rugosidad relativa en el intervalo de pH ∈ [6.0,8.5], para una vida útil de la instalación de 50 años (Franquet, 2019).

*Solución:*

Procede, en primer lugar, resolver el valor de la función z(x) que aparece en la condición lateral de la EDP dada, que es una ecuación integral del tipo Freedholm de 2ª especie e inhomogénea, con un $\lambda$ = 1, para cuya resolución emplearemos el método de Bubnov-Galiorkin. La resolución de este tipo de ecuaciones infinitesimales es más propia de la lección 22 del presente curso, mientras que la metodología teórica aplicable al caso puede consultarse (Franquet, 2014). Para ello, tomemos como sistema completo de funciones en el intervalo [-1,1] el sistema de polinomios de Legendre: $P_n(x)$ ($\forall n$ = 0, 1, 2, …). La solución aproximada $z_n(x)$ de la ecuación planteada la buscaremos en la forma:

$$z_3(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2}\ .$$

Substituyendo $z_3(x)$ en lugar de z(x) en la ecuación integral planteada, tendremos que:

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xt\left(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2 - 1}{2}\right)dt\ ,$$

o bien: $a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + x\frac{2}{3}a_2$ .

Multiplicando ambos miembros de esta última ecuación sucesivamente por 1, x, $\frac{3x^2 - 1}{2}$ e integrando respecto a x desde -1 hasta 1, se halla que:

$$2a_1 = 0, \qquad \frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a_2\ , \qquad \frac{2}{5}a_3 = 0\ .$$

De aquí se obtienen los valores: $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, por lo que resulta $z_2(x) = 3x$. No es difícil comprobar que ésta es precisamente la solución exacta de la ecuación planteada. En efecto:

$$z(x) = x + \int_{-1}^{1} x{\cdot}t{\cdot}3t{\cdot}dt = x + x\int_{-1}^{1} 3t^2{\cdot}dt = x + 3x\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = x + 2x = 3x\ \text{, c.s.q.d.}$$

De este modo, la condición de contorno quedará expresada así:

$$K(x,0) = \cos 3x\ \ , \forall\ x \in \Re\ .$$

En este caso se trata de una expresión multivariante de la rugosidad absoluta, con dos variables explicativas (x,t). Recordemos que el pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una disolución, que viene definida como:

$$pH = -\log_{10}[H^+] = \mathrm{colog}_{10}[H^+] = 14 - pOH = 14 + \log_{10}[OH^-],$$

y que indica, en nuestro caso, la concentración de hidrogeniones presentes en el agua.

Por otra parte, el 2º miembro de la EDP planteada no es más que el desarrollo en serie de Taylor (Mc Laurin) en el origen ($t_0 = 0$), hasta el grado n, de la función exponencial: $f(t) = e^t$ , con la forma de Lagrange del resto, de valor:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2n+t)\cdot t^{2n}}{(1+2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+t)\cdot t^{2n-1}}{(2n)!} \quad .$$

En su consecuencia, la EDP del enunciado del problema planteado resultará ser:

$$\begin{cases} K_t(x,t) - K_{xx}(x,t) = e^t, \ \forall\, t \geq 0.2, \forall\, x \in \{\Re\}, \\ \qquad \text{con}: K(x,0) = \cos 3x, \forall x \in \{\Re\}. \end{cases}$$

Pues bien, definiendo para todo $x \in \{\Re\}$ y $t > 0$ el núcleo integral k del siguiente modo:

$$k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{1}$$

y denotando por:

$$K_1(x,t) \equiv \int_0^t \int_{\Re} k(x-y, t-s) e^s \cdot dy \cdot ds \quad , \ y \qquad K_2(x,t) \equiv \int_{\Re} k(x-y,t) \cos 3y \cdot dy \tag{2}$$

sabemos que la única solución buscada viene dada por la expresión:

$$K(x,t) = K_1(x,t) + K_2(x,t).$$

Por otro lado, dado que:

$$\int_{\Re} k(z,r) dz = 1 \text{ , para todo } r > 0 \tag{3}$$

deducimos que: $K_1(x,t) = \int_0^t e^s \left( \int_{\Re} k(x-y, t-s) \cdot dy \right) ds = e^t - 1$ .

Sin embargo resolver la integral (2) resulta mucho más complicado. Para ello, debemos tener en cuenta que $K_2$ es la única solución del siguiente problema:

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, \ \forall\ t > 0 \ ; \ v(x,0) = \cos 3x \tag{4}$$

Este problema puede resolverse buscando una solución dada a variables separadas, así:

$$v(x,t) = X(x)T(t),$$

con lo cual la ecuación (4) se transforma en la otra:

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0, \qquad X(x)T(0) = \cos 3x.$$

De la segunda igualdad, deducimos que, en el caso de existir solución de este tipo, necesariamente se ha de verificar que:

$$X(x) = \frac{\cos 3x}{T(0)} \equiv c \cdot \cos 3x \; .$$

Por consiguiente: $X''(x) = -9 \cdot X(x)$. Así pues, deducimos que la primera de las ecuaciones se transforma en:

$$X(x)(T'(t) + 9T(t) = 0, \text{ para todo } x \in \{\Re\} \text{ , y } \; t > 0.$$

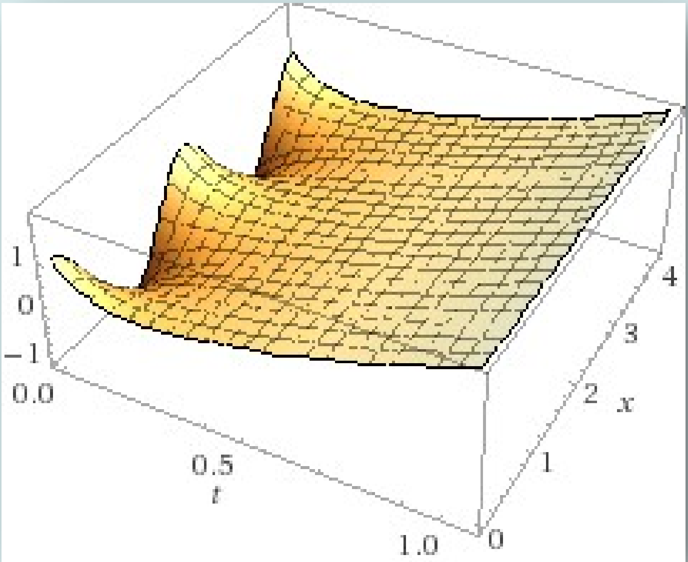
Al no ser la función X idénticamente nula en $\{\Re\}$, obtenemos que forzosamente se ha de verificar que:

$$T(t) = T(0)e^{-9t} \equiv \frac{e^{-9t}}{c} \; ,$$

con lo cual, la única solución del problema (4) viene dada por la expresión:

$K_2(x,t) = v(x,t) = e^{-9t} \cdot \cos 3x$ ,

y, como consecuencia, la única solución particular del problema estudiado resulta ser: $K(x,t) = K_1(x,t) + K_2(x,t) = e^t - 1 + e^{-9t} \cdot \cos 3x$, a la que corresponde la siguiente representación gráfica tridimensional:



Según la tabla 6.4. del libro recomendado (Franquet, 2019), para esta tubería nueva puede considerarse una K de 0.10 mm. La evolución temporal pedida de la rugosidad relativa $\varepsilon_r$, a partir anualmente de los 20 años de vida de la instalación, deberá tener en cuenta, en nuestro caso, que: $\varepsilon_r$ = K/D = K/100.

En general, un agua con un pH bajo < 6.5 podría ser ácida y corrosiva. Por lo tanto, el agua podría disolver iones metálicos, tales como: hierro, manganeso, cobre, plomo y zinc, accesorios de plomería y tuberías. Así, un agua con un pH bajo y corrosiva podría causar un daño prematuro en las tuberías de metal, y ello asociado también a problemas estéticos tales como un sabor metálico o amargo, manchas en la ropa y la característica de coloración "azul-verde" en tuberías y desagües. Contrariamente, un agua con un pH > 8.5 indica que el agua es alcalina; puede presentar problemas de incrustaciones por dureza, aunque no representa un riesgo para la salud, pero sí puede causar problemas estéticos. La formación de sarro, que precipita en tuberías y accesorios, causa una baja presión del agua y disminuye el diámetro interior útil de la tubería, cuyos efectos de envejecimiento de la instalación se estudian cumplidamente en el capítulo 6 del citado libro.

Los diversos valores de K(x,t) en el intervalo de pH $\in$ [6.0,8.5] que resulta ser el más habitual, pueden verse calculados en la tabla siguiente:

Diferentes valores de la rugosidad absoluta.

| t (siglos) | x = 1/pH | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1/6** | **1/6.5** | **1/7** | **1/7.5** | **1/8** | **1/8.5** |
| **0.20** | 0.366 | 0.369 | 0.372 | 0.374 | 0.375 | 0.377 |
| **0.21** | 0.366 | 0.369 | 0.371 | 0.373 | 0.374 | 0.375 |
| **0.22** | 0.367 | 0.370 | 0.372 | 0.373 | 0.375 | 0.376 |
| **0.23** | 0.369 | 0.372 | 0.373 | 0.375 | 0.376 | 0.377 |
| **0.24** | 0.372 | 0.375 | 0.376 | 0.377 | 0.379 | 0.379 |
| **0.25** | 0.377 | 0.378 | 0.380 | 0.381 | 0.382 | 0.383 |
| **0.26** | 0.381 | 0.383 | 0.385 | 0.386 | 0.387 | 0.387 |
| **0.27** | 0.387 | 0.389 | 0.390 | 0.391 | 0.392 | 0.393 |
| **0.28** | 0.394 | 0.395 | 0.396 | 0.397 | 0.398 | 0.399 |
| **0.29** | 0.401 | 0.402 | 0.403 | 0.404 | 0.405 | 0.405 |
| **0.30** | 0.409 | 0.410 | 0.411 | 0.412 | 0.412 | 0.413 |
| **0.31** | 0.417 | 0.418 | 0.419 | 0.420 | 0.421 | 0.421 |
| **0.32** | 0.426 | 0.427 | 0.428 | 0.429 | 0.429 | 0.430 |
| **0.33** | 0.436 | 0.437 | 0.438 | 0.438 | 0.439 | 0.439 |
| **0.34** | 0.446 | 0.447 | 0.448 | 0.448 | 0.449 | 0.449 |
| **0.35** | 0.457 | 0.457 | 0.458 | 0.459 | 0.459 | 0.459 |
| **0.36** | 0.468 | 0.468 | 0.469 | 0.469 | 0.470 | 0.470 |
| **0.37** | 0.479 | 0.480 | 0.480 | 0.481 | 0.481 | 0.481 |
| **0.38** | 0.491 | 0.492 | 0.492 | 0.492 | 0.493 | 0.493 |
| **0.39** | 0.503 | 0.504 | 0.504 | 0.505 | 0.505 | 0.505 |
| **0.40** | 0.516 | 0.516 | 0.517 | 0.517 | 0.517 | 0.517 |
| **0.41** | 0.529 | 0.529 | 0.530 | 0.530 | 0.530 | 0.530 |
| **0.42** | 0.542 | 0.542 | 0.543 | 0.543 | 0.543 | 0.543 |
| **0.43** | 0.556 | 0.556 | 0.556 | 0.556 | 0.557 | 0.557 |
| **0.44** | 0.569 | 0.570 | 0.570 | 0.570 | 0.570 | 0.571 |
| **0.45** | 0.584 | 0.584 | 0.584 | 0.584 | 0.585 | 0.585 |
| **0.46** | 0.598 | 0.598 | 0.599 | 0.599 | 0.599 | 0.599 |
| **0.47** | 0.613 | 0.613 | 0.613 | 0.613 | 0.614 | 0.614 |
| **0.48** | 0.628 | 0.628 | 0.628 | 0.628 | 0.628 | 0.629 |
| **0.49** | 0.643 | 0.643 | 0.643 | 0.644 | 0.644 | 0.644 |
| **0.50** | 0.658 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 |

## Ejercicio 4

La función de producción de una empresa viene dada por:

$$u(x,y) = \frac{3x^2y}{2} + \frac{8xy^3}{3} + y^3 + x^2 - \int_0^1 \ln x \cdot dx \text{ , cuando } u_{xy} = 3x + 8y^2,$$

siendo los precios de los “inputs”, en un mercado de competencia perfecta, respectivamente: $r_1 = 2$ y $r_2 = 8$.

Se pide:

a) Comprobar la expresión de la EDP de la función de producción dada.

b) Con los mismos precios, determinar la trayectoria de expansión y las diferentes funciones de costes de otra empresa competidora, en función del volumen de producción, si los costes fijos ascienden a 200 u.m. y su función de producción viene dada por la expresión:
$u(x,y) = (x + 5)^{1/6} \cdot (y + 6)^{1/6} + 4$ .

*Solución:*

a) La integral definida que aparece en el enunciado del problema ofrece, como resultado:
$\int_0^1 \ln x \cdot dx = [x \cdot \ln x]_0^1 = -1$ , por lo que la expresión de la EDP planteada será:
$u(x,y) = \frac{3x^2y}{2} + \frac{8xy^3}{3} + y^3 + x^2 + 1$. Vamos, ahora, a partir de la expresión propuesta, la EDP de 2º orden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 3x + 8y^2$$. Integrando respecto a *x*, se tendrá:

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] \cdot dx = \int (3x + 8y^2) \cdot dx = \frac{3x^2}{2} + 8xy^2 + \phi(y) = \frac{\partial u}{\partial y} \ .$$

Integrando ahora respecto de y: $\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int \left( \frac{3}{2} x^2 + 8xy^2 + \phi(y) \right) dy \Rightarrow$

$$u(x,y) = \frac{3}{2}x^2 y + \frac{8}{3}xy^3 + \int \phi(y)dy + \varphi(x) .$$

De aquí que como la integral de una función arbitraria de la variable *y* es otra función arbitraria de la variable *y* se tiene que: $\int \phi(y)dy = \xi(y)$ , y por tanto:

$$u(x,y) = \frac{3}{2}x^2 y + \frac{8}{3}xy^3 + y^3 + x^2 + 1 \text{ , c.s.q.d.}$$

b) La ecuación de la trayectoria de expansión de esta segunda empresa vendrá dada por:

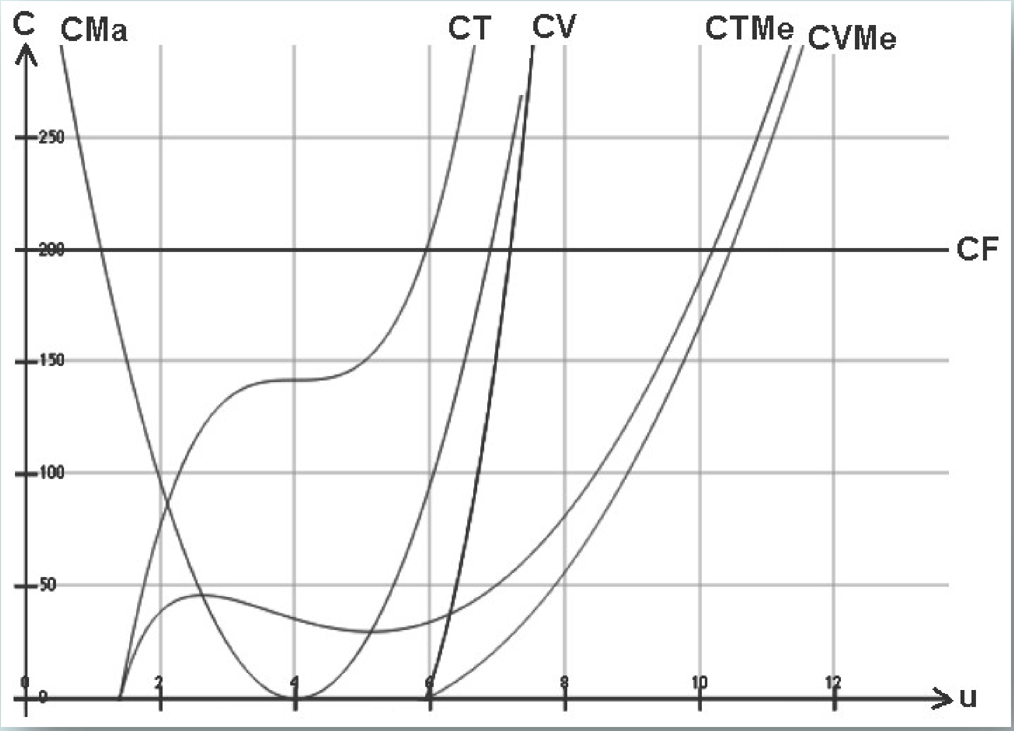
$$\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{r_1}{r_2}; \quad \begin{cases} f'_1 = \frac{1}{6}(x+5)^{-5/6} \cdot (y+6)^{1/6} \\ f'_2 = \frac{1}{6}(x+5)^{1/6} \cdot (y+6)^{-5/6} \end{cases}$$

Entonces: $\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{y+6}{x+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ , por lo que: x + 5 = 4(y + 6), o también: $y = \frac{x-19}{4}$ , que será la ecuación de la trayectoria de expansión de esta empresa.

Como también: $u = (x + 5)^{1/6} \cdot (y + 6)^{1/6} + 4$, eliminando *x* e *y* en las dos ecuaciones anteriores, y teniendo en cuenta que las diferentes funciones de costes son:

$$\begin{cases} CV = 2x + 8y = 8(u-4)^3 - 58 = 8u^3 - 96u^2 + 384u - 570 \\ CT = CV + CF = 8(u-4)^3 - 58 + 200 = 8(u-4)^3 + 142 \\ CMa = \frac{dCT}{du} = 24(u-4)^2 = 24u^2 - 192u + 384 \\ CVMe = 8u^2 - 96u + 384 - \frac{570}{u} \\ CTMe = 8u^2 - 96u + 384 - \frac{370}{u} \\ CFMe = 200/u \end{cases}$$

con las siguientes representaciones gráficas:




Funciones de costes.

## Ejercicio 5

El beneficio anual bruto *u* de una gran empresa se expresa, en millones de €, por la siguiente ecuación, siendo *t* el tiempo en años y *x* el precio de un "input" del proceso productivo en €:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = \lim_{(x,t)\to(0,0)} \left(xt\cdot \sin\frac{\pi}{x}\cdot \sin\frac{\pi}{t}\right)$$

, con las condiciones: u(x,0) = - z(x), u(0,t) = t , tal que la función *z*, en la primera condición de contorno dada, viene dada por la ecuación infinitesimal: $z'(x) - 2x = \int_0^{2\pi} \sin x \cdot dx$ , con la condición inicial: z(0) = ln(cos 0). Hallar el beneficio neto anual de la empresa al cabo de 10 años, con un precio del "input" de 1'20 €, considerando una fiscalidad aplicable del 25%.

*Solución:*

El límite doble direccional que aparece en el 2º miembro de la expresión de la EDP dada ofrece un valor de:

$$\lim_{(x,t)\to(0,0)} (xt\cdot\sin\frac{\pi}{x}\cdot\sin\frac{\pi}{t}) = \lim_{x\to 0} (mx^2\cdot\sin\frac{\pi}{x}\cdot\sin\frac{\pi}{mx}) = 0$$ , y nos queda: $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = 0$ .

Por otra parte, en la primera condición de contorno dada, aparece la integral:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\cdot dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0 \text{ .}$$

A su vez, la función z(x) debe hallarse teniendo en cuenta que se trata de una sencilla EDO de primer orden, puesto que: z' – 2x = 0; dz/dx = 2x, e integrando resultará que:

$z(x) = 2\int x\cdot dx = x^2 + C$ ; pero según la condición inicial:

z(0) = C = ln 1 = 0, y se tiene la integral particular:

$z(x) = x^2$, con lo que la primera condición de contorno quedará establecida así: $u(x,0) = -x^2$.

Se trata, pues, de una ecuación de 2º orden, lineal, homogénea y de coeficientes constantes. Como a = 0, b = 1 y c = 0, con el discriminante: $(b^2 – 4ac) = 1 > 0$, es una ecuación del tipo hiperbólico.

Expresando la ecuación del problema en la forma: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$, e integrando respecto a *x*, se obtiene: $\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función arbitraria que se supone continua.

Integrando ahora respecto a *t* se obtiene la solución general.

$$u = \int\varphi(t)dt + g(x), \qquad u = f(t) + g(x),$$

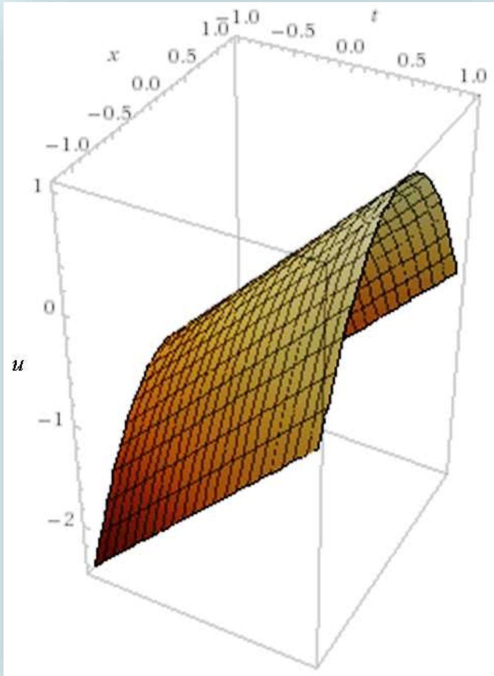
donde f(t) es una función primitiva de $\varphi(t)$.

Aplicando ahora a esta solución general las condiciones particulares dadas, se obtiene que:

$u(x,0) = -x^2$; $-x^2 = f(0) + g(x)$; $g(x) = -f(0) - x^2$, y con ello $g(0) = -f(0)$ ;
$u(0,t) = t$ ; $t = f(t) + g(0)$; $f(t) = t - g(0)$; $f(t) = t + f(0)$.

Y por último, substituyendo f(t), g(x) en la expresión general, resulta la solución particular buscada siguiente:

$u(x,t) = t - x^2$, con la siguiente representación gráfica de un cilindro parabólico:




De este modo, el beneficio neto anual, descontando la fiscalidad, con los datos suministrados y al cabo de 10 años será:

$$B = 0'75 \times u = 0'75\,(t - x^2) = 0'75 \times (10 - 1'2^2) = 6'42 \equiv 6.420.000 \text{ €} .$$

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 15

## ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (III)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

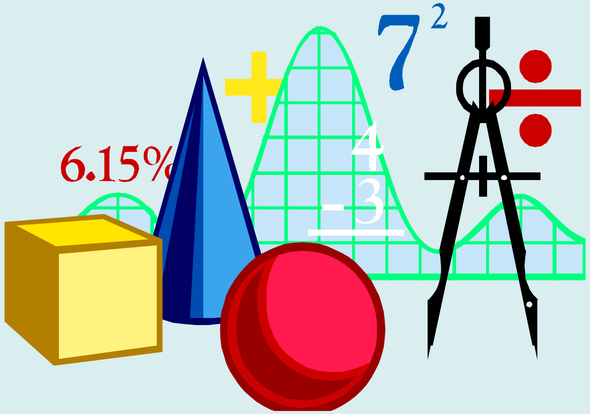
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





## 1. OTROS EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE EDP'S DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

### Ejercicio 1

En un mercado de duopolio con un producto diferenciado, se tiene que la función de demanda de una de las empresas viene dada por la EDP:

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - u = 2\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} - \int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-|x|}}, \\ \text{con}: u(x,0) = \frac{1-x^2}{2}. \end{cases}$$

mientras que su función de oferta correspondiente viene dada por la siguiente EDP:
$y \cdot u_x - x \cdot u_y = 0$, con $u(x,x) = z(x)$, donde el segundo miembro de la condición de contorno viene dado, a su vez, por la ecuación integral: $z(x) = x^2 + x\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + 1 - x \cdot \text{arc tg}\left(\frac{1}{x}\right) + \int_1^x \frac{z(s)}{x^2 + s^2} ds.$

Hallar, en el equilibrio del mercado, el precio del producto *u* cuando la cantidad *x* es de 0'5.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 28).

*Solución*:

En primer lugar, veamos que el 2º miembro de la EDP planteada de demanda, formada por la suma algebraica de sendas integrales impropias de 2ª especie, se puede resolver del siguiente modo:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-2\sqrt{2-x}\right]_0^{2-\varepsilon} = 2\sqrt{2}$$ . Así mismo:

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-|x|}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-2+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-|x|}} + \lim_{\delta \to 0^+} \int_0^{2-\delta} \frac{dx}{2-|x|} = 4\sqrt{2}.$$

En su consecuencia, la EDP dada de demanda ofrece:

$$xu_x + yu_y + \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - u = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0 \;,$$

que es una ecuación no lineal de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

En segundo lugar, resolveremos la condición de contorno de la función de oferta dada, que es una ecuación integral de Volterra, inhomogénea de 2ª especie, con $\lambda$ = 1. El núcleo es $k(x,s) = \frac{1}{x^2 + s^2}$ , con $x_0$ = 1, y tomaremos que $\phi(x) = x^{-2}$, y todas las condiciones del teorema correspondiente (ver nuestra anterior monografía “Aplicaciones…”, citada en la bibliografía) son satisfechas con $l^* = \frac{1}{2}$ , mientras que la solución exacta de esta ecuación integral (ver lección 22) es la parábola cuadrática: de ecuación: $z(x) = x^2$. Como comprobación, habrá que demostrar que se cumple que:

$$x - \frac{\pi \cdot x}{4} - 1 + x \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{z(s)}{x^2 + s^2} ds. \text{ En efecto:}$$

$$\int_1^x \frac{z(s)}{x^2+s^2} ds = \int_1^x \frac{s^2}{x^2+s^2} ds = \left[ s - x \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{s}{x}\right)\right]_1^x = (x - x\cdot\text{arc.tg}1) - (1 - x\cdot\text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right)) =$$

$$= x - \frac{\pi}{4}x - 1 + x\cdot\text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right), \text{c.s.q.d.}$$

El método de resolución de esta EI se verá en la posterior lección 22. En tercer lugar, resolveremos la ecuación diferencial de demanda en derivadas parciales de tal suerte planteada, a saber:

$$F(x,y,z,p,q) = xp + yq + \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) - z \;,$$



y la curva inicial se parametriza del siguiente modo:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = \left(s, 0, \frac{1-s^2}{2}\right), \qquad \forall s \in \{\Re\},$$

que son los datos del problema planteado.

El sistema característico a considerar será, en este caso:

$$\begin{cases} x' = x + p, & x(0) = s \\ y' = y + q, & y(0) = 0 \\ z' = px + qy + p^2 + q^2, & z(0) = \dfrac{1}{2}\left(1 - s^2\right), \\ p' = 0, & p(0) = p_0(s), \\ q' = 0, & q(0) = q_0(s), \end{cases} \tag{1}$$

conjuntamente con la ecuación adicional:

$$x(t,s)p(t,s) + y(t,s)q(t,s) + \frac{1}{2}\left(p^2(t,s) + q^2(t,s)\right) = z(t,s) \quad . \tag{2}$$

La condición de banda se verifica si y sólo si: $p_0(s) = -s$. Con lo cual, la condición de compatibilidad es equivalente a que: $q_0(s) = \pm 1$.

La condición de transversalidad se verifica siempre que:

$$0 \neq \det\begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_0(s) & 0 \end{pmatrix} = -q_0(s) \ .$$

Por consiguiente, el problema considerado tiene dos soluciones. Cada una de ellas se obtiene resolviendo el sistema (1) junto con la ecuación (2) para cada banda inicial correspondiente.

Es evidente que la solución asociada al valor $q_0(s) = 1$ verifica que $p(t,s) = -s$, y $q(t,s) = 1$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la igualdad (2), para obtener el valor de las restantes variables es suficiente con usar la expresión para el caso tridimensional en el que:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad b(t,s)=\begin{pmatrix}-s\\1\\\frac{1+s^2}{2}\end{pmatrix},\qquad C(s)=\begin{pmatrix}s\\0\\\frac{1-s^2}{2}\end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, obtenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{l}x(t,s)=s\\y(t,s)=e^t-1\\z(t,s)=e^t-\dfrac{(1+s^2)}{2}\end{array}}$$

La superficie parametrizada viene dada por la expresión: $\Gamma(t,s)=\left(s,e^t-1,e^t-\frac{1+s^2}{2}\right)$, con lo cual, la solución en coordenadas cartesianas es igual a: $u(x,y)=\frac{1-x^2}{2}+y$.

Cuando $q_0(s)$ = -1, haciendo los mismos razonamientos que en el caso anterior, obtenemos que la superficie solución viene parametrizada por la expresión:

$\Gamma(t,s)=\left(s,1-e^t,e^t-\frac{1+s^2}{2}\right)$, de donde deducimos que: $u(x,y)=\frac{1-x^2}{2}-y$ , es la segunda solución al problema considerado.

En este caso adoptaremos esta solución particular: $u(x,y)=\frac{1-x^2}{2}-y$ , considerando que, por la propia naturaleza de función de demanda, es la que posee significado económico. Debe tenerse en cuenta que, para que exista un significado económico, al tratarse de una función de demanda (decreciente), necesariamente debe cumplirse que: $u \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, o sea, que la función en cuestión tiene como dominio de definición el octante positivo de la esfera, y el precio se anulará cuando: $y=\frac{1-x^2}{2}$.

Por otra parte, la función inversa dada de oferta, que es lineal, de primer orden, homogénea y de coeficientes variables, tiene como solución particular: $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ , como puede comprobar el amable lector/a haciendo la sustitución pertinente. En efecto, en la condición de contorno: $u(x,x)=\dfrac{x^2+x^2}{2}=\dfrac{2x^2}{2}=x^2$ . Y en la ecuación dada, siendo:

$$u_x = x\ ;\quad u_y = y\ ;\quad y \cdot u_x - x \cdot u_y = yx - xy = 0,\quad \text{c.s.q.d.}$$

Para ello, en el equilibrio de mercado, se producirá: $u_D = u_O$, o sea: $\dfrac{1-x^2}{2}-y=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ ; de donde:

$$1 - x^2 - 2y = x^2 + y^2\ ;\ \ 2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0,\ \text{si } x = 0'5,\ \text{resulta: } y^2 + 2y - 0'5 = 0;\quad 2y^2 + 4y - 1 = 0;$$

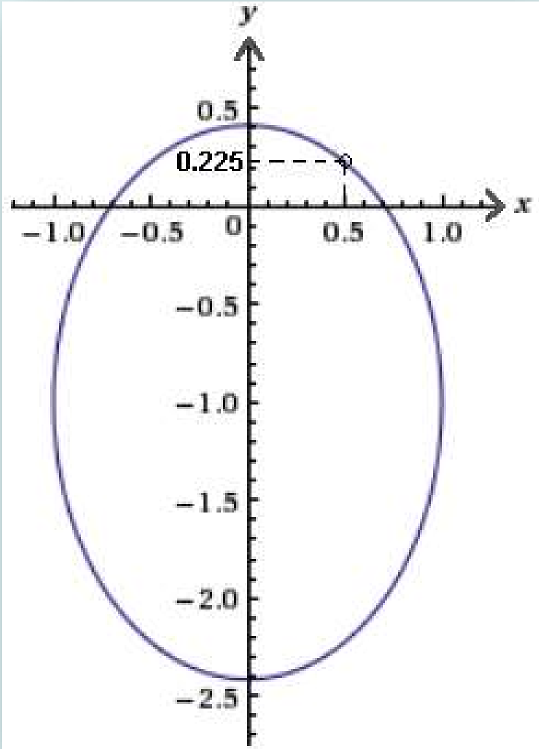
$$y=\frac{-4\pm\sqrt{16+8}}{4}=\frac{-4\pm2\sqrt{6}}{4}=-1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}0'225\\-2'225\end{array}\right.\ ,$$

luego el único valor (positivo) con significado económico es: y = 0’225.

Con ello, el precio de equilibrio será:

$$u=u_D=u_O=\frac{0'5^2+0'225^2}{2}\cong 0'15\ \text{ u. m.}$$

Obsérvese que la función de equilibrio ($2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$) es una sección cónica, con la siguiente representación gráfica:




Función de equilibrio.

Ello se pone de manifiesto formando la matriz de los coeficientes:

$$(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ ; $|A|$ = - 2 - 2 = - 4 $\neq$ 0, luego se trata de una sección cónica no degenerada. También se cumple que: $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$ , luego se trata de una elipse.

Como: $a_{11} \cdot |A| = 2 \times (-4) = -8 < 0$, es una elipse real que, en nuestro caso, sólo tiene significado económico en el primer cuadrante del círculo. Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$S^2 - I_1 S + I_2 = 0$, siendo el invariante métrico (lineal): $I_1 = a_{11} + a_{22} = 2 + 1 = 3$,

y el invariante afín (cuadrático): $I_2 = A_{33} = 2$, con lo que: $S^2 - I_1 S + I_2 = 0$, o sea:

$S^2 - 3S + 2 = 0$, de donde: $S = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 = S_1 \\ 1 = S_2 \end{array} \right.$ , y la ecuación reducida será:

$S_1 x^2 + S_2 y^2 + \dfrac{I_3}{I_2} = 0$, siendo $I_3$ el invariante proyectivo (cúbico) = $|A|$ = - 4. Entonces,

$2x^2 + y^2 - 2 = 0$ es la ecuación reducida buscada.

Por último, el centro de la elipse vendrá dado por el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x = 0 \Rightarrow x = 0; \\ y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{array} ,$$

o sea, el centro buscado es el punto (0, –1), como también puede comprobarse gráficamente en la figura adjunta de la función de equilibrio.

## Ejercicio 2

En un mercado de duopolio, con producto diferenciado, una empresa quiere mantener una participación fija en las ventas totales, independientemente de los efectos de su actuación, sobre los beneficios a corto plazo. La otra empresa es líder del mercado, en el sentido de que sus acciones siempre serán seguidas por la empresa primera. La función de costes marginales de la empresa segunda, líder, es la siguiente: $\frac{q_2}{2}+10$ , siendo sus costes fijos de 100 u.m., y su función inversa de demanda viene dada por: $p_2 = 50 - q_2 - \frac{q_1}{4}$.

Si la empresa primera desea mantener una participación del 25% de las ventas totales, se pide:

a) Determinar las cantidades de producto que ofrecería cada empresa, el precio de venta del producto de la empresa líder, sus diferentes curvas de coste, y su beneficio neto, considerando una fiscalidad aplicable del 25%.

b) Comparar los resultados obtenidos en a) si en un período posterior se estima que la función inversa de demanda *u* de la empresa líder viene dada por la EDP:

$$\text{b-1)}\ \begin{cases} x \cdot u_x + y \cdot u_y + \dfrac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) - u = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos x \cdot dx \\ \text{con}: u(x,0) = \dfrac{1-x^2}{2} \end{cases}$$

o bien en otro período:

$$\text{b-2)}\ \begin{cases} (y-x)u_x + 2yu_y = 3x - y + 2u \\ \text{con}: u(0,x) = -x \end{cases}$$

, y en este último caso resulta ser la función inversa de demanda: $p_2$ = 100 + u, en que, para mayor simplicidad operativa, se han efectuado las siguientes substituciones:



$$x = q_1;\ y = q_2;\ u(x,y) = p_2(q_1,q_2).$$

*Solución:*

a) La función de costes totales de la empresa líder, será: $CT_2 = \int (\frac{q_2}{2} + 10) \cdot dq_2 = \frac{q_2^2}{4} + 10q_2 + CF$

.

Deberá cumplirse que: $\frac{q_1}{q_1 + q_2} = \frac{25}{100}$ ; luego: $q_1 = \frac{q_2}{3}$ .

Los beneficios brutos de la empresa líder, serán: $B_2 = I - CT = p_2 \cdot q_2 - (\frac{q_2^2}{4} + 10q_2 + 100) =$

$$= (50 - q_2 - \frac{q_2}{12})q_2 - \frac{q_2^2}{4} - 10q_2 - 100 .$$

La maximización de beneficios exige que (condición necesaria o de primer grado):

$$\frac{dB_2}{dq_2} = (-1 - \frac{1}{12})q_2 + 50 - q_2 - \frac{q_2}{12} - \frac{q_2}{2} - 10 = 0 \quad ;$$

de donde resulta: $q_2 = \frac{480}{32} = 15$ .

Condición suficiente o de 2º grado:

$\frac{d^2B_2}{(dq_2)^2} = -\frac{8}{3} < 0$ , luego se trata, efectivamente, de un máximo.

$$q_1 = \frac{q_2}{3} = \frac{15}{3} = 5 \quad ; \quad p_2 = 50 - 15 - 0'25 \times 5 = 33'75 \text{ u.m.};$$

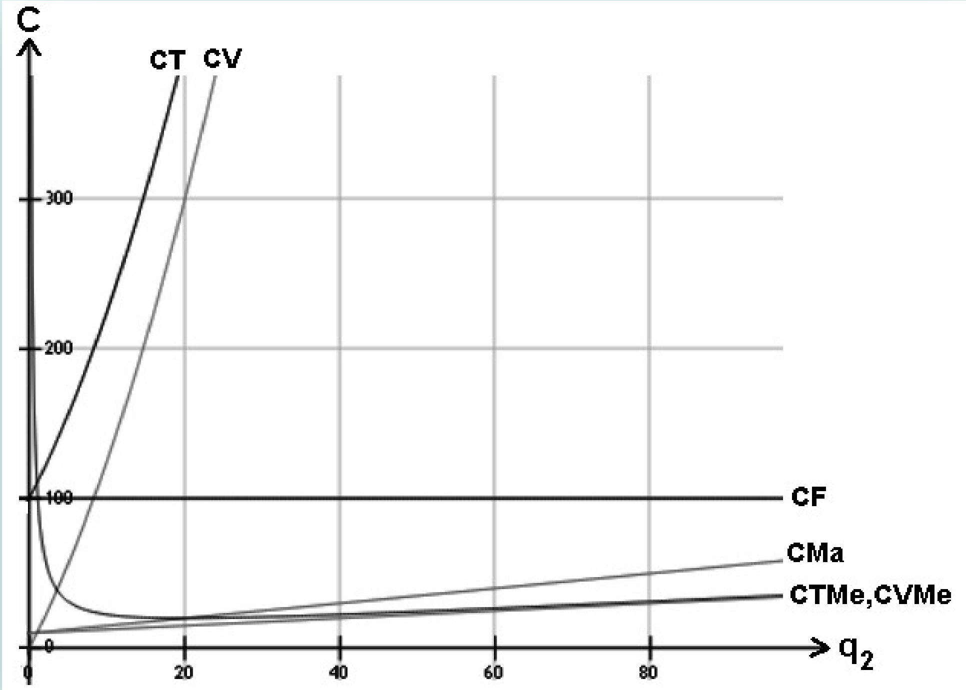
$B_2 = 33'75 \times 15 - 150 - 100 = 200$ u.m., y un beneficio neto de:

$B'_2 = 200 \times 0'75 = 150$ u.m.

Las diferentes funciones de costes de la empresa líder, son:

$$\begin{cases} CT = \dfrac{q_2^2}{4} + 10q_2 + 100 \\ CV = \dfrac{q_2^2}{4} + 10q_2 \\ CMa = \dfrac{q_2}{2} + 10 \\ CTMe = \dfrac{q_2^2}{4} + 10 + \dfrac{100}{q_2} \\ CVMe = \dfrac{q_2}{4} + 10 \\ CF = 100\,;\ CFMe = \dfrac{100}{q_2} \end{cases}$$

, cuyas representaciones gráficas pueden verse a continuación:




Diferentes curvas de coste.

Del mismo modo, se tendrán los siguientes ingresos y costos totales de la empresa líder:

$$\begin{cases} I_2 = p_2 \times q_2 = 33'75 \times 15 = 506'25 \text{ u.m.} \\ C_2 = I_2 - B_2 = 506'25 - 200 = 306'25 \text{ u.m.} \end{cases}$$

b)

b-1) Habrá que resolver dicha EDP, para lo cual hay que empezar hallando su 2º miembro, dado por la integral definida:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{2\pi} = 0\,.$$

En este caso, la solución de la EDP $\begin{cases} xu_x + yu_y + \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - u = 0, \\ \text{con}: u(x,0) = \frac{1-x^2}{2}. \end{cases}$,

ya ha sido obtenida en el primer ejercicio del presente capítulo, ofreciendo como resultado (puesto que se trata también de una función de demanda): $p_2(q_1, q_2) = \frac{1-q_1^2}{2} - q_2$.

O sea, que la nueva función inversa de demanda es:

$$p_2 = \frac{1-q_1^2}{2} - q_2 = \frac{9-q_2^2}{18} - q_2 \text{ , (puesto que } 3q_1 = q_2\text{).}$$

Los beneficios brutos serán, ahora: $B_2 = I - CT = p_2 \cdot q_2 - (\frac{q_2^2}{4} + 10q_2 + 100) =$

$$= \frac{9q_2 - q_2^3}{18} - q_2^2 - \frac{q_2^2}{4} - 10q_2 - 100.$$

Entonces, se tiene que: $\frac{dB_2}{dq_2} = \frac{9-3q_2^2}{18} - 2q_2 - \frac{q_2}{2} - 10 = 0$ , o lo que es lo mismo: $q_2^2 + 15q_2 + 57 = 0$ ,

de donde resulta que $q_2$ no tiene raíces reales, por lo que la función de demanda resultante de la resolución de la EDP planteada carece de significado real. Si se adoptara como solución de la EDP la segunda posible, esto es,

$$p_2 = \frac{1-q_1^2}{2} + q_2 = \frac{9-q_2^2}{18} + q_2 \text{ ,}$$

y los beneficios brutos serán, ahora:

$$B_2 = I - CT = p_2 \cdot q_2 - (\frac{q_2^2}{4} + 10q_2 + 100) =$$

$$= \frac{9q_2 - q_2^3}{18} + q_2^2 - \frac{q_2^2}{4} - 10q_2 - 100.$$

Entonces: $\frac{dB_2}{dq_2} = \frac{9-3q_2^2}{18} + 2q_2 - \frac{q_2}{2} - 10 = 0$ , o lo que es lo mismo: $q_2^2 - 9q_2 + 57 = 0$ , que tampoco ofrece raíces en el campo real.

b-2) En este segundo caso, la solución de la EDP correspondiente también ha sido hallada con motivo de un ejercicio anterior de este mismo libro, con lo que la nueva función de demanda será:

$$p_2(q_1,q_2) = 100 + u(q_1,q_2) = 100 - q_1 - q_2 = \frac{300-4q_2}{3} \ .$$

Los beneficios brutos serán, ahora: $B_2 = I - CT = p_2 \cdot q_2 - (\frac{q_2^2}{4} + 10q_2 + 100) = 90q_2 - \frac{19q_2^2}{12} - 100$ .

La maximización de beneficios exige que (condición necesaria o de primer grado):

$$, \qquad \frac{dB_2}{dq_2} = 90 - \frac{19q_2}{6} = 0 \text{ , de donde: } q_1 \cong 9'47 \text{ y } q_2 \cong 28'42 \ .$$

La condición suficiente o de 2º grado exige que: $\frac{d^2B_2}{dq_2^2} = -\frac{19}{6} < 0$, luego se trata, efectivamente, de un máximo.

El precio resultante será: $p_2$ = 100 – 9'47 – 28'42 = 62'11 u.m.;

$$B_2 = I - CT = 90q_2 - \frac{19q_2^2}{12} - 100 = 90 \times 28'42 - \frac{19 \times 807'7}{12} - 100 = 1.179 \text{ u.m.,}$$

y se obtendrá, en definitiva, un beneficio neto de:

$$B'_2 = 1.179 \times 0'75 = 884'25 \text{ u.m.}$$

Del mismo modo, se tendrán, en este último caso, los siguientes ingresos y costos totales de la empresa líder:

$$\begin{cases} I_2 = p_2 \times q_2 = 62'11 \times 28'42 = 1.765'17 \text{ u.m.} \\ C_2 = I_2 - B_2 = 1.765'17 - 1.179'00 = 586'17 \text{ u.m.} \end{cases}$$

## Ejercicio 3

El beneficio bruto anual *u* de una empresa se expresa, en miles de €, por la siguiente ecuación, siendo *t* el tiempo en decenas de años y *x* el precio del "output" del proceso productivo expresado en €, de la siguiente forma:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2t \cdot z(x)$ , con las condiciones: u(0,t) = t² y $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t) = t$ , viniendo z(x) dada por la ecuación integral: $z(x) = h(x) + \int_0^1 (xy)^{-1/2} z(y) dy$ .

Se desea hallar el beneficio neto anual de la empresa al cabo de 5 años de funcionamiento, con un precio del "output" estimado en 20'00 € , considerando una fiscalidad aplicable del 24%.

*Solución:*

La función z(x) es una ecuación integral inhomogénea de Freedholm de 2ª especie, con $\lambda$ = 1, que habrá que resolver en primer lugar (ver lección 22). En ese caso la integral: $K_{11} = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = \ln \frac{1}{0} = +\infty$ , diverge y no podemos formar z(x) por el procedimiento normal. Ahora bien, esto no quiere decir que la ecuación integral propuesta no tenga solución. En efecto, una solución de la ecuación integral propuesta es: z(x) = x, esto es:

$$z(y) = y \quad \text{para} \quad h(x) = x - x^{-1/2} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot dy .$$

Ello puede comprobarse substituyendo en la ecuación inicial del siguiente modo:

$z(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot dy + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot y \cdot dy = x - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \left( \sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{y}} \right) dy$ , por la propiedad aditiva del integrando.

O sea, debe cumplirse que: $\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^1\left(\sqrt{y}-\frac{y}{\sqrt{y}}\right)dy=0$ . Veamos que, en efecto, se cumple que: $\int_0^1\left(\sqrt{y}-\frac{y}{\sqrt{y}}\right)dy=0$ . Así pues, la solución de esta ecuación es, efectivamente: z(x) = x.

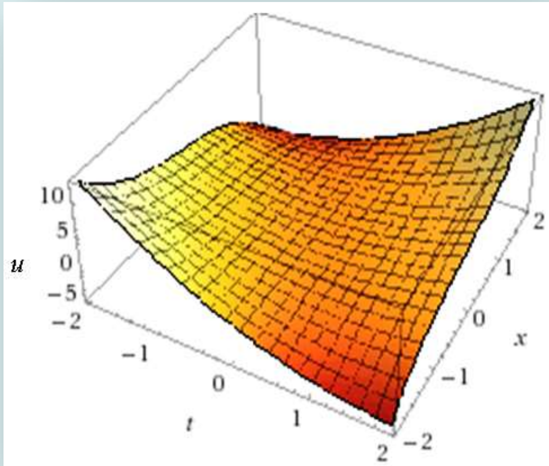
Se trata, pues, por lo que se refiere al primer miembro, de una ecuación de 2º orden, lineal, inhomogénea y de coeficientes constantes. Como a = 1, b = 0 y c = 0, con el discriminante de valor: $(b^2 - 4ac) = 0$, es una ecuación del tipo parabólico.

Así pues, puesta la EDP dada en la forma $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2xt$, e integrando respecto a *x* dos veces, se obtiene:

$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2t+f(t)$, $u(x,t)=\frac{x^3}{3}t+xf(t)+g(t)$, que es la solución general de la EDP planteada.

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas, se tiene:

- De $u(0,t) = t^2$ se deduce que $g(t) = t^2$.
- De $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t)=t$ , al ser $\frac{\partial u}{\partial x}=x^2t+f(t)$, entonces $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t)=f(t)=t$ .




Así pues, el beneficio bruto anual viene dado por la solución particular siguiente:

$u(x,t)=\frac{x^3}{3}t+xt+t^2$ , con la siguiente representación gráfica:

De este modo, el beneficio neto anual, descontando la fiscalidad, con los datos suministrados y al cabo de 5 años, será:

$$B=0'76\times u=0'76\times\left(\frac{tx^3}{3}+xt+t^2\right)=0'76\left(\frac{0'5\times 8.000}{3}+20\times 0'5+0'5^2\right)=$$

$$=1.021'123\equiv 1.021.123\ €.$$

## Ejercicio 4

El beneficio bruto anual *u* de una empresa, expresado en millones de €, cuyos precios de los dos "inputs" que emplea son *x* e *y*, viene dado por la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$(6x - 2y - 3u)\, u_x - 9u \cdot u_y - 4y = 2I_1 + I_2$, siendo: $I_1 = \int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot dx$, $I_2 = 16 \int_0^{\pi/2} \sin y(-\sin y) \cdot dy$ ,

teniendo en cuenta que si el precio del segundo "input" es nulo (gratuito), el beneficio bruto (antes de impuestos) es de un millón de euros. Se desea conocer el beneficio neto de dicha empresa cuando x = 0'08 €/kg e y = 0'10 €/kg, considerando una fiscalidad aplicable al caso del 26'5%.

(adaptado de Cabada, A., Santiago de Compostela, 2011, p. 1).

*Solución*:

Habrá que resolver, en primer lugar, las integrales definidas que figuran en la expresión dada de esta EDP de primer orden y coeficientes variables, por lo que, respectivamente:

$$I_1 = \int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot dx = \left[ -\frac{\sin^2 x}{x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx = 2\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{2x} dx = 2\pi \quad ,$$

en base a las condiciones de la regla de Leibnitz aplicable para las integrales impropias. Del mismo modo, se tendrá:

$$I_2 = 16 \int_0^{\pi/2} \sin y(-\sin y) \cdot dy = -16 \int_0^{\pi/2} \sin^{2\cdot} y \cdot dy = -16 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2y}{2} dy =$$

$$= -16 \left[ \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right]_0^{\pi/2} = -16 \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) = -4\pi.$$

Y la expresión de la EDP dada quedará, definitivamente, así:

$$(6x - 2y - 3u)\, u_x - 9u \cdot u_y - 4y = 4\pi - 4\pi = 0 \ .$$

En este caso, se tendrá que: $\begin{cases} f_1(x,y,z) = 6x - 2y - 3z, \\ f_2(x,y,z) = -9z, \\ f(x,y,z) = 4y \end{cases}$

´

y la condición inicial queda parametrizada del siguiente modo:

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv (s,0,1) \ , \qquad \forall s \in \{\Re\}.$$

Dado que: $\det\begin{pmatrix} f_1(\gamma(s)) & \alpha_1'(s) \\ f_2(\gamma(s)) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6s-3 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$ , sabemos que hay una única solución en torno a la condición inicial.

El sistema característico resulta ser el siguiente: $\begin{cases} x' = 6x - 2y - 3z, & x(0) = s, \\ y' = -9z, & y(0) = 0, \\ z' = 4y, & z(0) = 1, \end{cases}$ y su solución

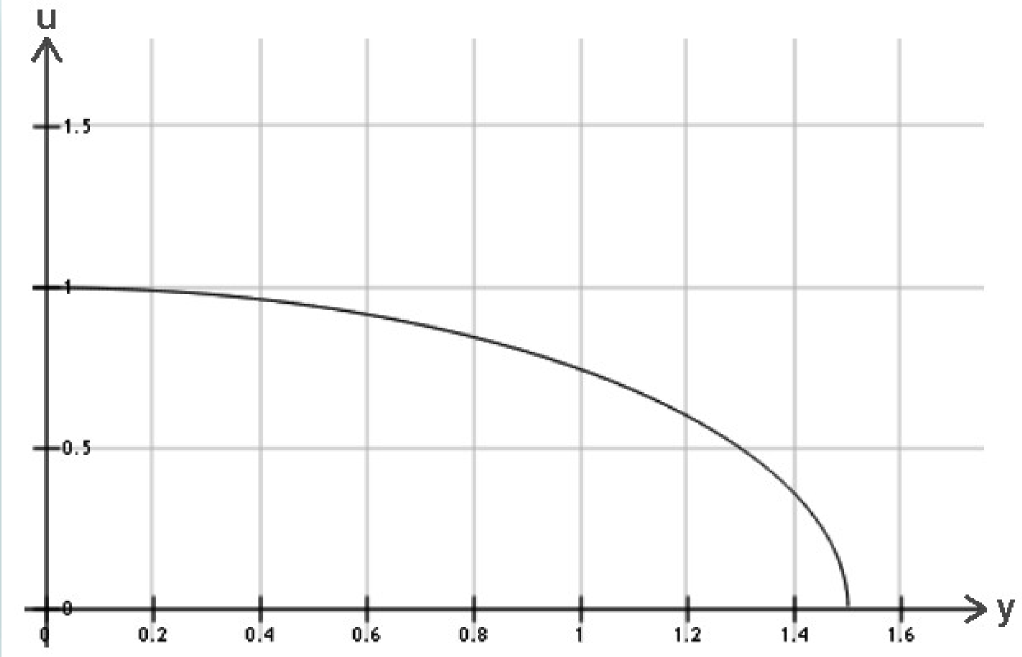
viene dada por: $\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , con: $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ .

Es decir: $\begin{cases} x(t,s) = se^{6t} - \dfrac{1}{2}\sin 6t, \\ y(t,s) = -\dfrac{3}{2}\sin 6t, \\ z(t,s) = \cos 6t. \end{cases}$

A partir de esta expresión vemos que la superficie solución está situada sobre el cilindro elíptico de ecuación: $9z^2 + 4y^2 = 9$.

De la condición inicial: u(x,0) = 1, deducimos que: $u(x,y) \equiv z(t(x,y), s(x,y)) = \sqrt{1 - 4y^2/9}$ ,

con la siguiente representación gráfica:




Función del beneficio bruto anual.

Se trata, al parecer, de una sección cónica de ecuación: $4y^2 + 9u^2 - 9 = 0$ , por lo que procede averiguar su naturaleza. Ello se pone de manifiesto formando la matriz de los coeficientes:

$$(A) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix};$$ $|A| = -324 \neq 0$, luego se trata de una sección cónica no degenerada. También se cumple que: $A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36 > 0$ , luego se trata del género elipse.

Como: $a_{11} \cdot |A| = 4 \times (-324) = -1.296 < 0$, es una elipse real que, en nuestro caso, sólo tiene significado económico en el primer cuadrante del círculo. Para hallar su ecuación reducida, haremos:

$S^2 - I_1 S + I_2 = 0$, siendo el invariante métrico (lineal): $I_1 = a_{11} + a_{22} = 4 + 9 = 13$,

y el invariante afín (cuadrático): $I_2 = A_{33} = 36$, con lo que:

$S^2 - I_1 S + I_2 = 0$, o sea: $S^2 - 13S + 36 = 0$, de donde se deduce: $S = \dfrac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 = S_1 \\ 4 = S_2 \end{array} \right.$ ,

y la ecuación reducida correspondiente será: , siendo $I_3$ el invariante proyectivo (cúbico):

$|A| = -324$. Entonces: $9y^2 + 4u^2 - 9 = 0$, es la ecuación reducida buscada.

Por último, el centro de la elipse vendrá dado por el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y} = a_{11}y + a_{12}u + a_{13} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} = a_{12}y + a_{22}u + a_{23} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 9u = 0 \Rightarrow u = 0 \end{array}$$

sea, el centro buscado es el centro de coordenadas (0,0), como puede comprobarse gráficamente en la figura adjunta.

Con los datos del problema planteado, pues, el beneficio neto anual de la empresa en cuestión será:

$$B = (1 - 0'265)\sqrt{1 - \frac{4y^2}{9}} = 0'735 \times \sqrt{1 - \frac{0'04}{9}} = 0'733365 \equiv 733.365\ € .$$

*Nota.* El problema anterior, al igual que todos aquellos en los que el sistema característico es un sistema lineal, puede ser resuelto directamente mediante programación en lenguajes de cálculo simbólico como, por ejemplo, en MAPLE.

## Ejercicio 5

El resultado contable bruto de una empresa viene dado, en el tiempo, por la EDP siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \displaystyle\int_3^5 (x^2 - 2x - 3)\cdot dx - 2\int_0^2 (4 - x^2)\cdot dx, \ \forall t > 0, \\ u(x,t)\big|_{t=0} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \end{cases}$$

con *t* expresado en años y siendo *x* el coste total (en millones de €). Se desea conocer: a) El resultado neto de la empresa al 4º ejercicio de su actividad económica, teniendo en cuenta unos costes fijos de 100.000 € y unos costes variables de 900.000 €, considerando una fiscalidad aplicable del 25%. b) La representación gráfica correspondiente.

*Solución*:

a) El segundo miembro de la EDP planteada será:

$$\int_3^5 (x^2 - 2x - 3)\cdot dx - 2\int_0^2 (4 - x^2)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_3^5 - 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3} - \frac{32}{3} = 0.$$

Se trata, pues, de una ecuación lineal de 2º orden, homogénea y de coeficientes constantes. Como a = -1, b = 0 y c = 0, con el discriminante: ($b^2 - 4ac$) = 0, es una ecuación del tipo parabólico.

Aprovechándose de la fórmula de Poisson, obtenemos: $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, a = 1. Entonces:

$$u(x,t) = \frac{2}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}}\, d\lambda\,. \qquad (1)$$

La integral del segundo miembro la resolvemos de la misma forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}+\frac{x\lambda}{2t}-\frac{\lambda^2}{4t}} d\lambda = e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(1+2t)}{2t}\left(\lambda-\frac{x}{1+2t}\right)^2} d\lambda \ . \qquad (2)$$

Llamando $\frac{\sqrt{1+2t}}{\sqrt{2t}} = \left(\lambda - \frac{x}{1+2t}\right) = \alpha$, la integral del segundo miembro de (2) tomará la forma:

$$\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{1+2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \frac{2\sqrt{\pi}t}{\sqrt{1+2t}} \ .$$

(Hemos utilizado la igualdad $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \sqrt{2\pi}$ ). Por eso de (1) se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda = \frac{2\sqrt{\pi}t}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}} \ .$$

Así, la solución particular u(x,t) del problema dado se determina por la expresión:

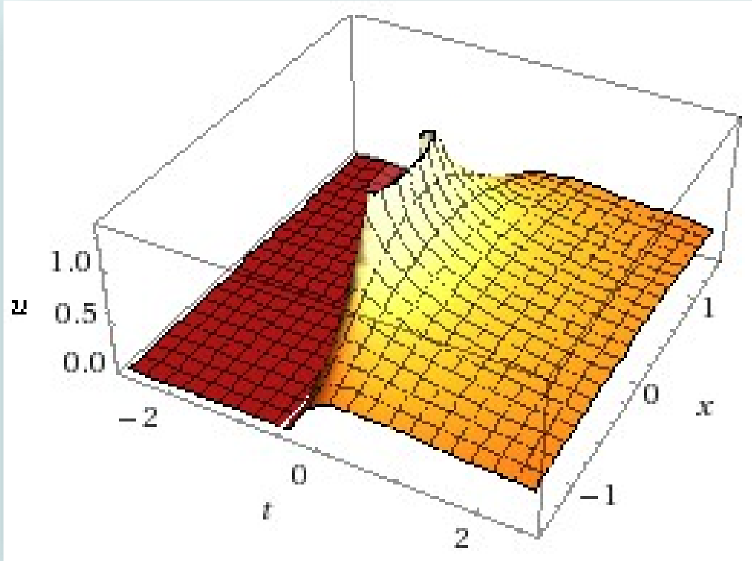
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}, \forall t > 0 \ .$$

Pues bien, con los datos del problema, se tendrá en el 4º ejercicio económico:

x = CT = CF + CV = 0’1 + 0’9 = 1’0;   t = 4;

$$u(1,4) = \frac{1}{3 \cdot e^{1/18}} = 0'31532 \ \equiv 315.320 \text{ €} \text{ , y } B = 0'75 \times 315.320 = 236.490 \text{ €} \ .$$

b) La representación gráfica pedida correspondiente será la siguiente:




## Ejercicio 6

Se considera la siguiente ecuación en derivadas parciales de segundo orden que nos da el resultado bruto *z* de un ejercicio empresarial, expresado en $10^6$ € , en función de los precios de venta de sus dos "outputs" *x* e *y*:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos x \cdot dx \quad , \quad \text{y se pide:}$$

a) Clasificar dicha EDP.
b) Determinar sus curvas características.
c) Reducirla a la forma canónica.
d) Hallar una solución general de la misma.
e) Resolver para dicha ecuación el problema de Cauchy, hallando el beneficio neto de la empresa, con una fiscalidad aplicable del 25%, y las condiciones siguientes: $\begin{cases} z(1,y) = 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,y) = 0 \end{cases}$.

*Solución*:

a) El segundo miembro de la EDP ofrece un valor:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{2\pi} = 0 \text{, y la EDP será: } x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ ,}$$

Se trata, pues, de una ecuación de 2º orden, lineal, homogénea y de coeficientes variables. De acuerdo con la notación empleada, tenemos que:

$$a = x^2,\ b = 0,\ c = -y^2, \text{ por tanto: } (b^2 - 4ac) = 4x^2y^2 > 0,$$

luego la ecuación planteada es de tipo hiperbólico.

b) La ecuación diferencial de las características, en el plano X0Y, es la siguiente:

$$a \cdot dy^2 - b \cdot dx \cdot dy + c \cdot dx^2 = 0,$$

luego, en nuestro caso:

$$x^2dy^2 - y^2dx^2 = 0, \text{ o sea: } (xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0,$$

que se desdobla en las dos ecuaciones de primer orden:

$$xdy + ydx = 0,\quad xdy - ydx = 0.$$

Las soluciones generales de estas ecuaciones son, respectivamente: $\begin{cases} xy = C_1 \\ \dfrac{y}{x} = C_2 \end{cases}$

con $C_1$, $C_2$ siendo constantes arbitrarias.

Las ecuaciones anteriores representan los dos haces de curvas características.

c) A la vista de las ecuaciones de las características procede hacer el cambio de variables:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Derivando en estas igualdades, se tiene: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} y - \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{y}{x^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} x + \dfrac{\partial z}{\partial v}$ .

$$\frac{1}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} y^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{2y}{x^3}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{1}{x^2} .$$

Substituyendo las dos últimas expresiones en la ecuación propuesta, se obtiene, después de simplificar adecuadamente:

$$2u\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$ , que es la forma canónica buscada.

d) Para integrar esta última ecuación introduciremos como incógnita auxiliar:

$\omega = \dfrac{\partial z}{\partial v}$ , la ecuación se escribe entonces: $2u\dfrac{\partial \omega}{\partial u} - \omega = 0$ ,

que es una ecuación lineal de primer orden que se integra inmediatamente, cuya solución general es:

$\omega = \sqrt{u}C(v)$ , donde C(v) es una función arbitraria de la variable *v*.

Se tiene entonces: $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{u}C(v)$, de donde, integrando respecto de *v*:

$z(u,v) = \sqrt{u}\int C_1(v)dv + C_2(u)$ , es decir: $z(u,v) = \sqrt{u}\, C_1(v) + C_2(u)$ ,

donde $C_1(v)$ y $C_2(u)$ son dos funciones arbitrarias.

Regresando ahora a las antiguas variables, encontramos: $z(x,y) = \sqrt{xy}\, C_1\left(\frac{y}{x}\right) + C_2(xy)$ (1) ,

como solución general de la ecuación propuesta.

e) Derivando respecto de *x* en la igualdad anterior, se tiene: $\frac{\partial z}{\partial x} = -x^{-1/2}y^{1/2}C_1\left(\frac{y}{x}\right) - x^{-3/2}y^{3/2}C'_1\left(\frac{y}{x}\right) + yC'_2(xy)$ .

Impongamos ahora las condiciones del problema de Cauchy: $\begin{cases} z(1,y) = \sqrt{y}\, C_1(y) + C_2(y) = 1 \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1,y) = \frac{1}{2}\sqrt{y}\, C_1(y) - y^{3/2}C'_1(y) + yC'_2(y) = 0 \end{cases}$

Derivando la primera de estas igualdades, resulta: $\frac{1}{2} y^{-1/2}C_1(y) + y^{1/2}C'_1(y) + C'_2(y) = 0$.

y multiplicando ambos miembros por *y*: $\frac{1}{2} y^{1/2}C_1(y) + y^{3/2}C'_1(y) + yC'_2(y) = 0$.

Restando de esta igualdad la que expresa la segunda condición del problema de Cauchy, resulta:

$2y^{3/2}C'_1(y) = 0$, de donde se deduce que: $C'_1(y) = 0$, y, por tanto: $C_1(y) = K$, con K constante.

Llevando este resultado a la primera condición del problema de Cauchy se despeja: $C_2(y) = 1 - K\sqrt{y}$ .

Ahora substituimos en la expresión (1) de la solución general las funciones $C_1(y)$ y $C_2(y)$ que acabamos de determinar y se obtiene:

$z(x,y) = K\sqrt{xy} + 1 - K\sqrt{xy} = 1$ , luego:

$z(x,y) = 1 \equiv 1.000.000$ € (resultado antes de impuestos),

que es la solución del problema de Cauchy propuesto.

Así pues, el beneficio neto (después de impuestos) será: B = 0’75 $\times$ 1.000.000 = 750.000 € .

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 16

## SISTEMAS DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. FUNCIONES MULTIVARIANTES

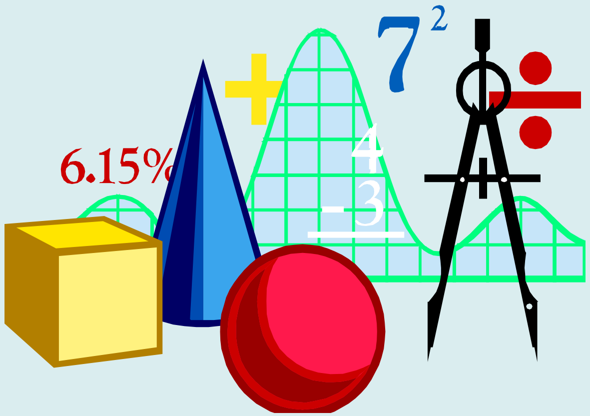
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

A continuación, se presentan tres ejemplos de sistemas de EDP de primer orden condicionados, de funciones económicas diversas $u_1$, $u_2$, v. Los dos primeros son homogéneos y todos ellos son de coeficientes constantes. Para simplificar, en lo sucesivo nos referiremos únicamente a sistemas de dos ecuaciones (y dos funciones). Esto es:

a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 4\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{con: } u_1(x,0) = f(x),\ u_2(x,0) = g(x).$$

( restando ambas ecuaciones se obtendría: $3\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = 0$ )

b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 8\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{con: } u_1(x,0) = f(x),\ u_2(x,0) = g(x).$$

c) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = h_1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = h_2 \end{cases} \quad \text{con: } u(0,y) = f(y),\ v(0,y) = g(y);\ \text{con } h_1, h_2 \text{ ctes.}$$

## 2. SISTEMAS HIPERBÓLICOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Consideraremos ahora sistemas hiperbólicos espacialmente unidimensionales, $\vec{x} = x \in \Re$, con coeficientes constantes. La variable es un vector de dimensión d:

$$\vec{U} = \vec{U}(x,t) = [u_1(x,t),...,u_d(x,t)] \in \Re^d, \ \forall d \geq 2.$$

Un sistema de la forma: $\vec{U}_t + [A]\vec{U}_x + [B]\vec{U} = \vec{F}(x,t)$, se dice que es *hiperbólico* si la matriz $[A]$ es diagonalizable con autovalores reales. Los autovalores $a_i$ de la matriz $[A]$ se denominan generalmente, empleando términos físicos, *velocidades características* del sistema.

Recuérdese que si $[A]$ es diagonalizable entonces existe una matriz (regular) no singular $[P]$, llamada de "paso" o "modal", tal que: $[\Lambda] = [P^{-1}][A][P]$, siendo $[\Lambda]$ una matriz diagonal.

En el caso particular de que $[B] \equiv 0$, definiendo entonces el cambio de variables $\vec{W} = [P^{-1}]\vec{U}$, se tiene:

$$\vec{W}_t + [\Lambda]\vec{W}_x = [P^{-1}]\vec{F}(x,t) = \vec{G}(t,x), \text{ es decir: } w_t^i + \lambda_i w_x^i = g^i(t,x), \ \forall i = 1,...,d,$$

que es de la forma hiperbólica más general, para las componentes de los vectores $\vec{W} = (w^1,...,w^d), \vec{G} = (g^1,...,g^d)$ y los autovalores $\lambda_i$, $\forall i$ = 1, …, d, de la matriz del sistema $[A]$.

Por tanto, cuando $[B] \equiv 0$ el sistema hiperbólico se reduce a un sistema desacoplado de ecuaciones hiperbólicas escalares independientes que se resuelven por separado (Schiavi y Muñoz, 2006-07). Consideraremos precisamente esta situación en el siguiente ejemplo, donde supondremos $[B] \equiv 0$ y $\vec{F}(x,t) \equiv 0$ (caso homogéneo).

## Ejercicio 1

Se considera el PVI dado por el sistema hiperbólico:

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + v_x = 0 \\ v_t + u_x + 2v_x = 0 \end{cases}$$ , y las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq 1 \\ 0 \text{ si } |x| > 1 \end{cases}, \quad v(x, 0) = v_0(x) = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx - \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)dx ,$$

en que las funciones **u** y **v** representan la trayectoria temporal de los resultados antes de impuestos de sendas empresas pertenecientes al mismo "holding", viniendo la cifra de negocios **x** expresada en millones de € y el tiempo **t** en siglos. Se desea conocer la trayectoria temporal de los resultados netos de dichas empresas, considerando una fiscalidad aplicable del 25% y una cifra de negocios, en ambos casos, de 1 millón de €. ¿Cuáles serán dichos resultados en el vigésimo ejercicio económico?

*Solución:*

Procede resolver, en primer lugar, la 2ª condición inicial dada, a saber:

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx - \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)dx = \frac{32}{3} - \frac{32}{3} = 0$$, por lo que: $v(x, 0) = v_0(x) = 0$.

Para la resolución del sistema planteado, se utiliza la teoría matricial, concretamente la técnica de diagonalización de matrices cuadradas (ver Apéndice IV). El sistema anterior se puede escribir en la forma:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x = 0$$ , siendo $\vec{U} =$ (u, v). Es decir, que:

$$\vec{U}_t + [A]\vec{U}_x = 0, \quad [A] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Es fácil ver que la matriz $[A]$ (que es simétrica) tiene como autovalores o raíces características:

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. En efecto: $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$ ,

entonces, si desarrollamos la ecuación característica o secular:

$$|\lambda \cdot I_2 - A| = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 - 1 = 0; \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$ , o sea:

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 = \lambda_1 \\ 1 = \lambda_2 \end{matrix} \right. .$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, su forma diagonal será: $\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y al ser $[A]$ simétrica, sus valores propios son números reales. En efecto: $(3, 1) \in \{\Re\}$. Para obtener los autovectores o vectores propios debe cumplirse (por la derecha) que: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$, o sea:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 3} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$$ ; o sea: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3x_1 \\ x_1 + 2x_2 = 3x_2 \end{cases}$ ;

de donde: $x_1 = x_2$, y una solución cualquiera será del tipo: $k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{; o sea: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = x_1 \\ x_1 + 2x_2 = x_2 \end{cases} ;$$

de donde: $x_1 = -x_2$, y una solución cualquiera será del tipo: $k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Los autovectores son, pues, para k = 1, $\vec{\mu}_1 = (1,1)$ y = $\vec{\mu}_2$ (1,-1). La matriz es diagonalizable y el sistema se puede desacoplar mediante el cambio $\vec{W} = [P^{-1}]\vec{U}$ . Nótese que la matriz de "paso" o "modal" $[P]$ viene dada del siguiente modo (escribiendo en columna las componentes de los autovectores $\vec{\mu}_1$ y $\vec{\mu}_2$):

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [P^{-1}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ luego: } \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u+v) \\ \frac{1}{2}(u-v) \end{pmatrix}.$$

Puede comprobarse que se cumple: $[A] = [P] \cdot [\Lambda] \cdot [P^{-1}]$ . En efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = [A] \text{, c.s.q.d.}$$

Un simple razonamiento nos confirma que el cambio de coordenadas a efectuar es el anterior. En efecto, sumando y restando las dos ecuaciones dadas resulta que:

$$u_t + 2u_x + v_x = 0, \quad v_t + u_x + 2v_x = 0 \ .$$

El sistema anterior se puede reescribir en la forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,[(u+v)_t + 3(u+v)_x] = 0, \text{ con } 0 < x < \infty \\ \frac{1}{2}\,[(u-v)_t + (u-v)_x] = 0, \text{ con } 0 < x < \infty \end{cases}$$

y definiendo $w^1 = u + v$, $w^2 = u - v$ se tienen los dos PVI para las componentes $(w^1, w^2)$:

$$\begin{cases} w_t^1 + 3w_x^1 = 0 \\ w^1(0,x) = \frac{1}{2}u_0(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} w_t^2 + w_x^2 = 0 \\ w^2(0,x) = \frac{1}{2}u_0(x) \end{cases}$$

donde las condiciones de contorno se deducen observando que $v_0(x) = 0$. La solución es, por tanto: $w^1(t, x) = w_0^{\,1}(x - 3t)$ , $w^2(t, x) = w_0^{\,2}(x - t)$ .

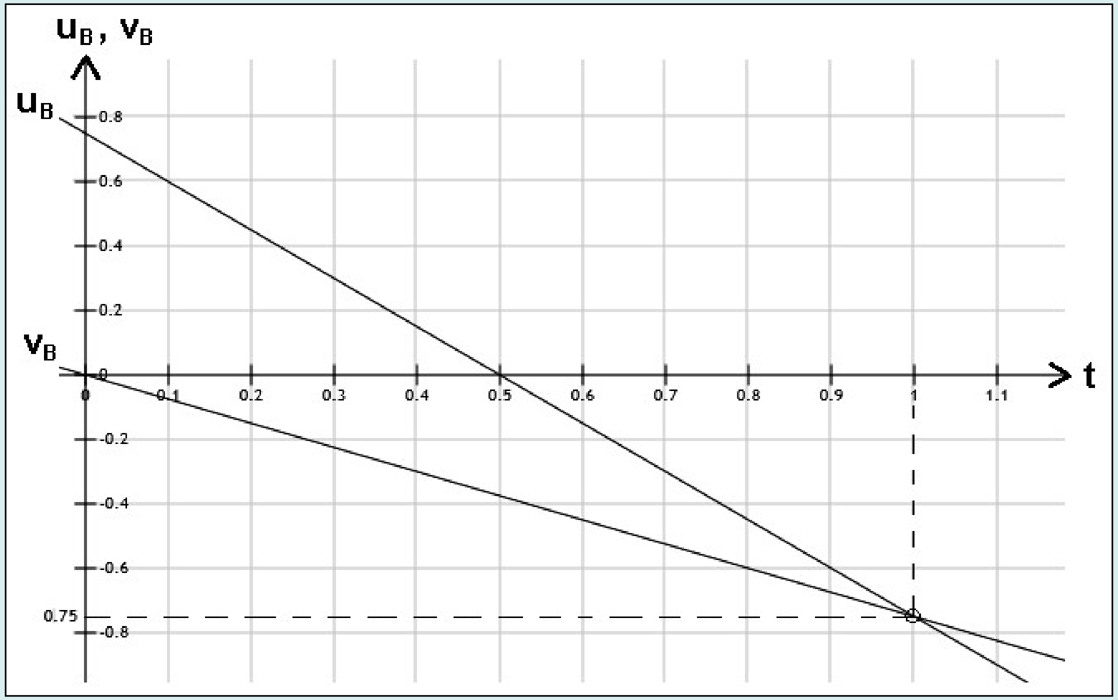
En términos de las componentes originales $[u(x, t), v(x, t)]$ se tiene la solución particular siguiente:

$$\begin{cases} u(x,t) = w^1 + w^2 = \frac{1}{2}\,[u_0(x - 3t) + u_0(x - t)] \\ v(x,t) = w^1 - w^2 = \frac{1}{2}\,[u_0(x - 3t) - u_0(x - t)] \end{cases}$$

Como consecuencia de ello, los resultados netos de ambas empresas serán, considerando la fiscalidad:

- 1ª empresa: $u(x, t) = \frac{1}{2}\,[(1 - 3t) + (1 - t)] = 1 - 2t$ ; $u_B = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}t$ .
- 2ª empresa: $v(x, t) = \frac{1}{2}\,[(1 - 3t) - (1 - t)] = -t$ ; $v_B = -\frac{3t}{4}$ .

Las correspondientes representaciones gráficas de dichas trayectorias temporales son las siguientes:




Trayectorias temporales de ambas empresas.

Al cabo de 20 años (t = 0'2), se tendrá que:

$$\begin{cases} u_B = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{9}{20} = 0'45 \cong 450.000 \text{ € (beneficios)} \\ v_B = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = -\frac{3}{20} = -0'15 \cong -150.000 \text{ € (pérdidas)} \end{cases}$$

Así pues, la primera empresa experimentará ganancias en dicho ejercicio, aunque se anularán cuando t = 50 años, y la segunda siempre experimentará pérdidas, aunque el conjunto del "holding" tendrá 300.000 € de beneficios aquel año. Obsérvese que ambas trayectorias temporales coinciden justamente cuando t = 1 (a los 100 años de inicio de su actividad económica) y entonces, en ambos casos, se espera que:

$$u_B = v_B = -750.000 \text{ € (pérdidas).}$$

## 3. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL Y DE CONTORNO PARA SISTEMAS DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos ahora el sistema hiperbólico:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x = 0 , \quad \text{con } 0 \le x \le 1, \ \forall t \ge 0 , \qquad (1)$$

que también puede escribirse así: $\begin{cases} u_t^1 + au_x^1 + bu_x^2 = 0 \\ u_t^2 + bu_x^1 + au_x^2 = 0 \end{cases}$.

Los autovalores (o “raíces características”) del sistema son:

$\lambda_1 = a + b$, $\lambda_2 = a - b$. En efecto:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - a \end{bmatrix};$$

entonces, desarrollando la ecuación característica o secular, se tiene:

$$|\lambda \cdot I_2 - A| = 0 \Rightarrow (\lambda - a)^2 - b^2 = 0; \quad \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0; \text{ de donde:}$$

$$\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2 - b^2)}}{2} = \frac{2a \pm 2b}{2} = \left\langle \begin{matrix} a + b = \lambda_1 \\ a - b = \lambda_2 \end{matrix} \right. .$$

Al tratarse $[A]$ de una matriz simétrica, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, su forma diagonal será:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{bmatrix}, \ \forall (a, b) \in \{\Re\}.$$

Consideremos sólo el caso donde *a* y *b* son positivos. Si $0 < b < a$, entonces los autovalores son ambos positivos y las dos familias de características se propagan de izquierda a derecha. Esto significa que la solución (vector) $\vec{U} = (u^1,u^2)^T$ se debe prefijar en $x = 0$ y ningún dato se debe especificar en $x = 1$. Nótese que la pendiente de las características es $(a^{-1})$, luego las características más lentas serán aquellas con mayor pendiente. El caso más interesante se da cuando $0 < a < b$. Los autovalores son de signo contrario y las familias de características se propagan en direcciones opuestas. Escribimos el sistema en la forma de ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} u^1+u^2 \\ u^1-u^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^1+u^2 \\ u^1-u^2 \end{pmatrix}_x = 0 \ ,$$

cuyo desarrollo ofrece: $\begin{cases} u^1_t + u^2_t + au^1_x + au^2_x + bu^1_x + bu^2_x = 0 \\ u^1_t - u^2_t + au^1_x - au^2_x - bu^1_x + bu^2_x = 0 \end{cases}$ ,

donde las ecuaciones se tienen que verificar para $0 \leq x \leq 1$ y $t \geq 0$. Ciertamente, una forma de determinar una única solución consiste en prescribir $(u^1 + u^2)$ en $x = 0$ y prescribir $(u^1 - u^2)$ en $x = 1$. Sin embargo, existen otras posibilidades. Por ejemplo, cualquier condición de la forma:

$$\begin{cases} u^1 + u^2 = \alpha_0(u^1 - u^2) + \beta_0(t)\ , \quad \text{en } x = 0 \\ u^1 - u^2 = \alpha_1(u^1 + u^2) + \beta_1(t)\ , \quad \text{en } x = 1 \end{cases} \tag{2}$$

determinará (únicamente) la solución del problema. Los coeficientes $\alpha_0$, $\alpha_1$ pueden ser funciones de *t* o constantes. Las condiciones de contorno que determinan una única solución se dicen *bien puestas* y el problema se dice *bien planteado*. Las condiciones (2) están bien puestas para el sistema (1). Además son las únicas condiciones bien puestas posibles para el sistema (1). Las condiciones de contorno (2) expresan el valor de las variables características en la característica *entrante* en términos de la variable característica *saliente*. Por tanto, si especificamos $u^1$ o $u^2$ en $x = 0$ el problema está bien planteado y las condiciones bien puestas. Especificar $u^1$ o $u^2$ en $x = 1$ también genera un problema bien planteado con condiciones bien puestas. Sin embargo, especificar $(u^1 - u^2)$ en $x = 0$ o especificar $(u^1 + u^2)$ en $x = 1$ origina un problema mal planteado pues las condiciones están mal puestas.

Para que un problema hiperbólico de valores iniciales y de contorno esté bien puesto, en definitiva, el número de condiciones de contorno debe ser igual al número de características *entrantes* en el dominio (Schiavi y Muñoz, 2006-07).

## Ejercicio 2

Considérese el sistema hiperbólico (1) en el intervalo [0, 1], con los valores: $a = 0$ y $b = \int_{-\infty}^{0} e^x \cdot dx$ , y las condiciones de contorno $u^1(0, t) = 0$ (en la frontera lateral izquierda) y $u^1(1, t) = 1$ (en la frontera lateral derecha). Determinar: a) su solución siendo $u^1(x, 0) = x$ y $u^2(x, 0) = 1$ los datos iniciales del problema, y b) si en este sistema, $u^1(u)$ y $u^2(v)$ representan los resultados brutos de sendas empresas expresados en millones de €, **t** es el tiempo en siglos y **x** el volumen de ventas en millones de €, se pide hallar los resultados netos de ambas empresas, considerando una fiscalidad aplicable del 25%, al decimoquinto año del inicio de su actividad económica, cuando el volumen de ventas de la primera empresa es de 950.000 €. (adaptado de Schiavi y Muñoz, 2006-07, p. 68)

*Solución*:

a) Las condiciones de contorno están bien puestas pues son del tipo (2) para los valores paramétricos $\alpha_0$ = -1, $\alpha_1$ = -1 y se tiene las funciones: $\beta_0(t) \cong 0$, $\beta_1(t) \cong 2$. A su vez, se tiene que:

$$b = \int_{-\infty}^{0} e^x \cdot dx = \lim_{h\to-\infty} \int_{h}^{0} e^x \cdot dx = \lim_{h\to-\infty} (1 - e^h) = 1 \quad .$$

Los autovalores (o velocidades características) del sistema son:

$$\lambda_1 = a + b = 1, \qquad \lambda_2 = a - b = -1.$$

Escribimos el sistema en la forma: $\begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}_x = 0$ ,

donde las ecuaciones se tienen que verificar para: $0 \le x \le 1$ y $t \ge 0$. Introduciendo, como antes, las componentes $w^1 = ½(u^1 + u^2)$ y también: $w^2 = ½(u^1 - u^2)$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}_x = 0 \quad ,$$

y nos hemos reconducido a resolver los dos PVI para las componentes $(w^1, w^2)$, esto es:

$$\begin{cases} w^1_t + w^1_x = 0 \\ w^1(x,0) = \dfrac{1}{2}(u^1_0(x) + u^2_0(x)) = \dfrac{1}{2}(x+1) \end{cases} ; \qquad \begin{cases} w^2_t - w^2_x = 0 \\ w^2(x,0) = \dfrac{1}{2}(u^1_0(x) - u^2_0(x)) = \dfrac{1}{2}(x-1) \end{cases}$$

donde las condiciones de contorno se deducen a partir de los datos del problema. La solución es, por tanto:

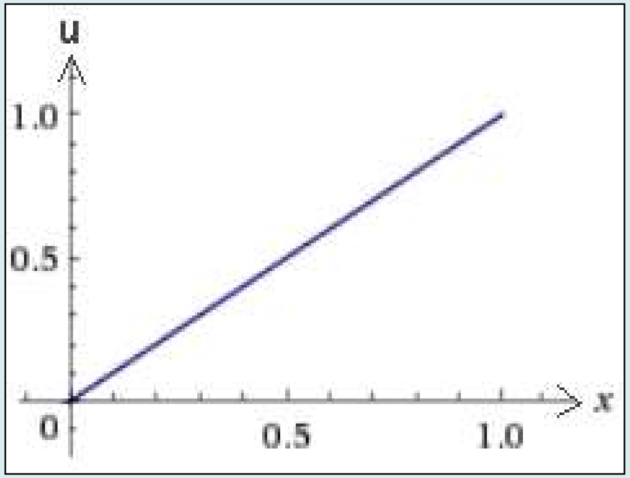
$$w^1(x,t) = w_0{}^1(x - t) = ½(x - t + 1) , \qquad w^2(x,t) = w_0{}^2(x + t) = ½(x + t - 1).$$

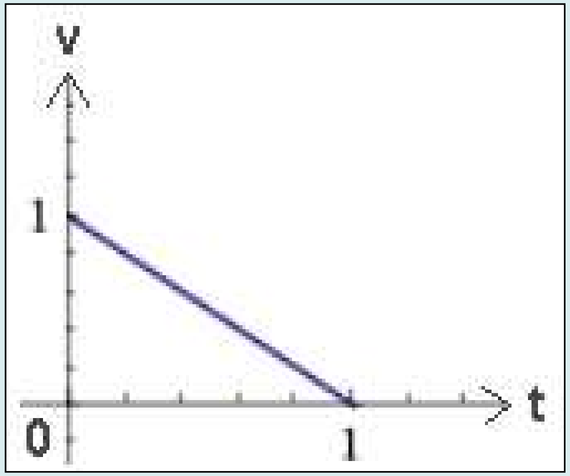
En términos de las componentes originales [u(x, t), v(x, t)] se tiene que:

$$\begin{cases} u(x,t) = w^1 + w^2 = w_0^{\,1}(x-t) + w_0^{\,2}(x+t) = x \\ v(x,t) = w^1 - w^2 = w_0^{\,1}(x-t) - w_0^{\,2}(x+t) = 1 - t \end{cases}$$

Se comprueba directamente que las condiciones de contorno para la componente $u^1$ en las fronteras laterales están satisfechas.

b) Las representaciones gráficas correspondientes, rectas en ambos casos, son las siguientes:




y los resultados netos (después de impuestos), serán:

$$\begin{cases} u = \dfrac{3x}{4} = \dfrac{3 \times 0'95}{4} = 0'7125 \cong 712.500\ € \\ v = \dfrac{3(1-t)}{4} = \dfrac{3(1-0'15)}{4} = 0'6375 \cong 637.500\ € \end{cases}$$

Obsérvese que los resultados de la primera empresa sólo dependen del volumen de ventas (son crecientes e independientes del tiempo), mientras que los de la segunda empresa son sólo dependientes del tiempo y decrecientes, anulándose a partir de los 100 años de actividad económica.

## 4. SISTEMAS DE EDP DE INTERÉS EN LA INGENIERÍA

### *4.1. Sistemas de EDP lineales*

1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann (variable compleja):

$$u_x - v_y = 0, \qquad u_y + v_x = 0.$$

2. Ecuaciones de Maxwell (electromagnetismo):

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\varsigma\,, \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}\,,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0\,, \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\,.$$

3. Ecuaciones de Navier (elasticidad):

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \vec{u} = \varsigma\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

### *4.2. Sistemas de EDP no lineales*

1. Ecuaciones de Yang-Mills (teoría cuántica de campos):

$$(u^* u_t)_t - (u^* u_x)_{x^*} = 0\ .$$

2. Ecuaciones del campo quiral (teoría cuántica de campos):

$$(u^* u_x)_t - (u^* u_t)_x = 0\ .$$

3. Ecuaciones de Klein-Gordon-Maxwell (teoría cuántica de campos):

$$\nabla^2 s - (|\vec{a}|^2 + 1)s = 0, \qquad \nabla^2 \vec{a} - \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - s^2 \vec{a} = \vec{0}.$$

4. Ecuaciones de Euler (mecánica de fluidos):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P, \qquad \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

5. Ecuaciones de Heisenberg (ferromagnetismo): $\vec{s}_t = \vec{s} \times \vec{s}_{xx}$ .

6. Ecuaciones de von Kármán (dinámica de fluidos):

$$\nabla^4 u = E(w^2_{xy} - w_{xx} w_{yy}), \qquad \nabla^4 w = a + b(u_{yy} w_{xx} + u_{xx} w_{yy} - 2u_{xy} w_{xy}).$$

7. Ecuaciones de Navier-Stokes (elasticidad):

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\varsigma}\nabla P + \nu \nabla^2 \vec{u}.$$

## 5. FUNCIONES MULTIVARIANTES Y EDP's

### *5.1. Introducción*

En este apartado del curso estudiamos funciones reales de varias variables reales, cuya utilidad resulta clara en las aplicaciones económicas e ingenieriles. Numerosas magnitudes de la vida cotidiana o incluso ciertas cantidades económicas o físicas dependen de dos o más variables independientes o explicativas. Por otra parte, la práctica de la optimización de las funciones multivariantes, mediante la búsqueda de sus extremos, puede consultarse en el Apéndice II.

El conjunto D de pares ordenados de números reales se denomina *dominio de la función* y el conjunto de todos los valores de la función es el *rango de la función*. Una función real de dos o tres variables reales, como las que empleamos profusamente en el presente curso, es una regla que asigna a cada par o triplete ordenado un único número real.

Normalmente, no se específica cual es el dominio de la función. Cuando éste es el caso, tenemos que considerar el dominio implícito. El *dominio implícito* de una función multivariante es el conjunto más amplio donde tiene sentido evaluar la fórmula, y el resultado es un número real. Muchas veces, este dominio se representa gráficamente. En el caso de dos variables la representación es una región en el plano y con tres variables lo es en el espacio afín tridimensional.

En algunos casos enfocamos el estudio y resolución de las ecuaciones infinitesimales (diferenciales, integrales e integro-diferenciales, así como las ecuaciones recurrentes o en diferencias finitas y los sistemas de todas ellas) de una sola variable y sus aplicaciones, lo que, sin duda, constituye una simplificación de los problemas reales que se presentan en la Economía y en las diferentes ramas de la Ingeniería. Pero también muchos otros modelos de estas disciplinas son susceptibles de utilizar funciones multivariantes, así como sus derivadas parciales, elasticidades (funciones derivadas elásticas), integrales múltiples, etc. Las ecuaciones resultantes, con frecuencia, lo son en derivadas parciales (EDP); de ahí el interés de su estudio y el conocimiento de la metodología precisa para su correcta resolución.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de lo expuesto.

## *5.2. Ejercicios resueltos*

### ***Ejercicio 1***

Hallar (con precisión hasta las milésimas) el valor de la función hidráulica *u* dada por la superficie integral de la EDP de primer orden:

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{x+\sin x\cdot\cos x}{2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{2}\right),$$

que pasa por la curva: x = 0, z = $y^2$, cuando x = 1 e y = 2.

(adaptado de Moreno, C., UNED, 1999).

*Solución*:

De la expresión de la EDP del enunciado, derivando con respecto a **x**, se deduce que:

$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, que es la expresión general de la EDP.

A este mismo resultado se podría llegar simplemente haciendo:

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{2}+\frac{x+\sin x\cdot\cos x}{2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{2}\right)=1\text{, c.s.q.d.}$$

Por otra parte, se tiene que: $x^2 + y^2 = c^2$, con *c* independiente de *t*.

Si se integra la ecuación diferencial: $\frac{dx}{dt}=\sqrt{c^2-x^2}$, se deduce que una solución positiva (con posible significado hidráulico) sería la siguiente:

$x=\frac{c\cdot tg(t-k)}{\sqrt{tg^2(t-k)+1}}=\frac{c\cdot tg(t-k)}{\sec(t-k)}=c\cdot\sin(t-k)$, o también: x = c·sin (t), con k = 0,

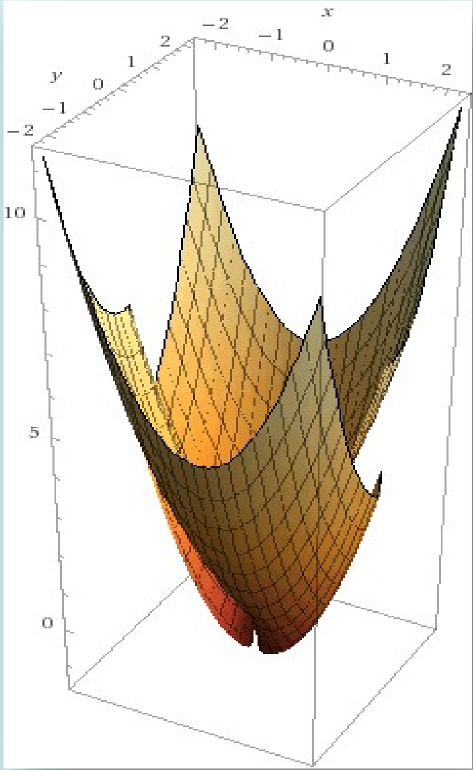
y, en consecuencia, se obtiene que: $c^2\cdot\sin^2(t) + y^2 = c^2$; $y^2 = c^2\cdot\cos^2(t)$, con lo que: y = c·cos(t).

Además, de la tercera ecuación diferencial se desprende que:

$$z = t + d,$$

donde *d* es una constante. En definitiva, las líneas de campo de esta ecuación son hélices circulares. De la condición inicial se desprende que:

$$\begin{cases} x = s \cdot \cos(t), \\ y = s \cdot \sin(t), \\ z = t + s^2 \end{cases}$$




Finalmente, si se eliminan *s* y *t* se obtiene la expresión:

$u = z = x^2 + y^2 + \text{arc tan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, cuya representación gráfica es:

Veamos, en fin, que en el punto (1,2) se tendrá que la función hidráulica valdrá:

$$u = 1 + 4 + \text{arc tan } (1/2) = 5'464.$$

***Ejercicio 2***

Hallar el valor de la función económica *u*, con precisión hasta las cienmilésimas, dada por la ecuación: $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = l_1 - l_2$ , con la condición inicial: $u(x,0) = (v(x) + 1)^x$ , cuando x = 3 e y = 2, viniendo v(x) dada por la EDO:

$$v'(x) - v(x) = \cos 0, \text{ con la condición: } v(0) = \ln (\csc^2 x - \cot^2 x), \text{ y siendo:}$$

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz \cdot dy \cdot dx\ , \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{\rho^2} \rho \cdot \cos\theta \cdot \rho \cdot dz \cdot d\rho \cdot d\theta\ .$$

*Solución*:

En primer lugar se deberá obtener el 2º miembro de la EDP planteada por diferencia de las dos integrales triples dadas, $I_1$ e $I_2$, estando expresado el minuendo en coordenadas cartesianas rectangulares y el sustraendo en coordenadas cilíndricas. Así, respectivamente:

$$\begin{cases} I_1 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz \cdot dy \cdot dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left[(4-y^2) - (2x^2+y^2) dy \cdot dx\right] = \\ = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(4y - 2x^2 y - \frac{2y^3}{3}\right)_0^{\sqrt{2-x^2}} \cdot dx = \frac{4}{3} \int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)^{3/2} \cdot dx = \pi\ . \\ I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{\rho^2} \rho \cdot \cos\theta \cdot \rho \cdot dz \cdot d\rho \cdot d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \rho^4 \cdot \cos\theta \cdot d\rho \cdot d\theta = \frac{32}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^6\theta \cdot d\theta = \pi\ . \end{cases}$$

De este modo, la EDP planteada adoptará la configuración analítica: $y \dfrac{\partial u}{\partial x} + x \dfrac{\partial u}{\partial y} = I_1 - I_2 = \pi - \pi = 0$ ,

luego se trata de una ecuación lineal de primer orden, homogénea y de coeficientes variables.

En segundo lugar habrá que resolver la función v(x) que aparece en la condición inicial de la EDP. Para ello, aplicando el método de las transformadas de Laplace (véase el Apéndice III), se obtiene:

$$\begin{cases} Sv_S - v(0) - v_S = L(1);\ v_S(S-1) = \dfrac{1}{S} \Rightarrow v_S = \dfrac{1}{S(S-1)}\ , \\ \dfrac{A}{S} + \dfrac{B}{S-1} = \dfrac{1}{S(S-1)}\ , A(S-1) + BS = 1, \quad A = -1 \Rightarrow B = 1, \\ v(x) = -L^{-1}\left\{\dfrac{1}{S}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{1}{S-1}\right\} = -1 + e^x\ . \end{cases}$$

Alternativamente, por aplicación del método clásico, se tendrá que la ecuación característica de la homogénea o incompleta, será la siguiente:

$\lambda - 1 = 0$; $\lambda = 1$; con lo que: $v^* = c\cdot e^x$; ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$\begin{cases} v_p = a \\ v'_p = 0 \end{cases}$$ ; y substituimos en la ecuación inicial:

-a = 1 ; a = -1 ; con lo que se tendrá la solución general:

$v(x) = v^* + v_p = c\cdot e^x - 1$; y aplicando la condición inicial (teniendo en cuenta las identidades o relaciones trigonométricas, resulta que $v(0) = \ln 1 = 0$), se tiene que:

$v(0) = c - 1 = 0$ ; de donde: c = 1, y nos quedará la I.P. buscada:

$$\boxed{v(x) = e^x - 1}$$ , c. s. q. d.

De hecho, se trata de una ecuación lineal de primer orden, con:

$X = -1$ ; $X_1 = -1$ , y: $\int X \cdot dx = -\int dx = -x$ ;$\int X_1 \cdot e^{\int X\cdot dx} \cdot dx = -\int e^{-x} \cdot dx = e^{-x}$ ; y aplicando la fórmula pertinente resulta:

$v(x) = e^x(c - e^{-x}) = c\cdot e^x - 1$, que es la I.G. a la cual habrá que aplicar la condición inicial para obtener la I.P. buscada (es evidente que con c = 1). De este modo, la expresada condición inicial quedará establecida así:

$$u(x,0) = (e^x)^x = e^{x^2} .$$

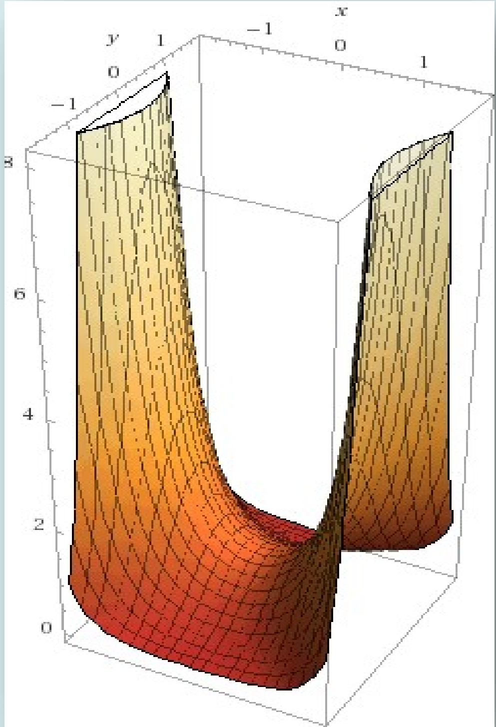
El sistema característico asociado a la ecuación, en forma autónoma, es el siguiente:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

De la primera igualdad se deduce fácilmente que: $x^2 - y^2 = c = s^2$ es una integral primera. De la segunda igualdad se deduce que:

$$u = c_3(s) = e^{s^2} \ .$$

De todo ello se obtiene, en definitiva, que: $u = e^{x^2 - y^2}$, es la solución buscada, con la siguiente representación gráfica:




Veamos, en fin, que en el punto (3,2) se tendrá que la función económica en cuestión valdrá:

$$u(x, y) = e^{x^2 - y^2} = e^5 = 148'41316 \ .$$

UNED TORTOSA

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 17

## CÁLCULO DE VARIACIONES (I)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

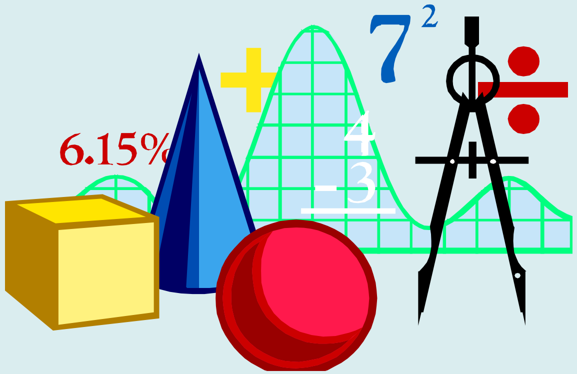
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





## 1. CONCEPTUALIZACIÓN

El cálculo de variaciones es un problema matemático consistente en buscar máximos y mínimos (o más generalmente extremos relativos) de funcionales continuos definidos sobre algún espacio funcional. Constituyen una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable. Como es sabido, uno de los problemas típicos en cálculo diferencial es el de encontrar el valor numérico de *x* para el cual la función f(x) alcanza un valor extremo (máximo o mínimo); el campo numérico en el cual hay que buscar estos valores posee propiedades perfectamente conocidas. En cambio, en el cálculo de variaciones el problema consiste en encontrar una cierta función uniforme y = f(x), varias veces derivable, para la cual un funcional A(y) alcance un valor extremo. El funcional antedicho está compuesto por una integral que depende de *x*, de la función f(x) y, en su caso, además, de algunas de sus derivadas. Las incógnitas son aquí infinitas y el campo funcional en el que se buscan las soluciones es de un grado de arbitrariedad tan amplio que se impone restringirlo para hacerlo analíticamente manejable. Se comprende, así mismo, la dificultad de hallar condiciones suficientes que aseguren la existencia de la solución sin efectuar un estudio previo del campo funcional en que se opere.

## 2. EXTREMOS DE UNA INTEGRAL DEFINIDA

### 2.1. Integrando con derivadas de primer orden

Sea $\varphi(x, y, y')$ una función continua en la región $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $c' \leq y' \leq d'$, que posee derivadas parciales primeras y segundas también continuas y sea, además y = f(x) una función continua, definida en el intervalo [a,b] y con derivada continua en el intervalo de la recta real: $a \leq x \leq b$ y tal que f(a) = b y f(b) = d.

Por tanto, la función $\varphi$[x, f(x), f'(x)] es función continua de x en el intervalo cerrado [a, b] y la integral definida:

$$A(y) = \int_a^b \varphi[x, f(x), f'(x)]\,dx \ ,$$

tendrá un valor finito, que dependerá de la función *f* elegida, esto es, la integral adquiere un valor perfectamente determinado para cada función *f*, que cumple las condiciones anteriores, por tanto es una funcional de f(x).

El primer problema del cálculo de variaciones es el de investigar si, entre todas las curvas planas que pasando por los puntos (a, c) y (b, d) y cumpliendo las citadas condiciones, existe alguna curva para la que A(y) alcance un valor máximo o un mínimo; una tal curva, si existe, recibe el nombre de "extremal", y solamente en ella puede alcanzarse un extremo de la funcional. Es fácil ver que el carácter extremal de una curva en [a,b] implica el mismo carácter en todo intervalo parcial [m,n], pues si existiera en [m,n] otro arco de curva que diera mayor (menor) valor a la integral anterior, complementándolo con los arcos de extremal entre a,m y entre n,b, tendríamos una curva que ofrecería, así mismo, mayor (menor) valor a la integral A(y) que la extremal considerada, en contra de la definición.

Ello posee singular interés por sus aplicaciones en la resolución de las ecuaciones integrales de Freedholm (ver lección 22) que expresen funciones económicas que interese maximizar (de beneficio, de ingreso, de utilidad, de producción) o bien minimizar (caso de las funciones de coste).

Si la función f(x) es una extremal de la funcional A(y), se verificará que: $A(y) = \int_a^b \varphi[x, f(x), f'(x)]\,dx$ ,

será, en el recinto considerado, constantemente mayor o menor que:

$$A(\lambda) = \int_a^b \varphi[x, f(x) + \lambda\eta(x), f'(x) + \lambda\eta'(x)]\,dx \ ,$$

donde $\eta$(x) es una función continua cualquiera, con derivada continua, tal que: $\eta$(a) = $\eta$(b) = 0 y $\lambda$ es un número que se puede tomar tan pequeño como se quiera. Obsérvese, por otra parte, que se cumple que: A(0) = A.

La función A($\lambda$) se puede desarrollar en serie de Taylor, obteniéndose:

$$A(\lambda) = A(0) + \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{2!}A_2 + \frac{\lambda^3}{3!}A_3 + \dots \quad ,$$

donde $A_i$ representa precisamente el valor que toma la derivada i-ésima de A($\lambda$), para $\lambda$ = 0.

El cálculo de variaciones tal como aquí se trata introduce la terminología y notación siguientes: $\lambda A_1$, recibe el nombre de variación primera y se escribe $\delta A$; $\lambda^2 A_2$ se designa por variación segunda, notándose $\delta^2 A$, etc. Para que A(0) = A se conserve constantemente mayor o menor que A($\lambda$), para un valor suficientemente pequeño de $\lambda$, es necesario que $A_1 = 0$, pues sino la diferencia:

$$A(\lambda) - A(0) = \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{2!}A_2 + \frac{\lambda^3}{3!}A_3 + \dots \quad ,$$

no mantendría signo constante.

Por tanto, resulta que es condición necesaria para que f(x) sea extremal de $A(y) = \int_a^b \varphi(x, y, y')\,dx$ ,que la función f(x) anule a $A_1$ o, lo que es lo mismo, que anule a la variación primera de A, esto es: $\left[\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=0} = 0$ que se puede escribir así: $\int_a^b \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta'(x)\right]dx = 0$ , donde y e y' representan a f(x) y f'(x).

La expresión anterior, integrando por partes el segundo sumando del integrando o función subintegral, resulta ser la siguiente:

$$\int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta(x)dx + \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta'(x)dx = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta(x)dx + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\cdot\eta(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\eta(x)dx =$$

$= \int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\right]dx$ , puesto que $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta(x)\right]_a^b$ se anula por las condiciones impuestas a $\eta$(x).

Como para que se anule la última integral para cualquier $\eta$(x), que cumpla las condiciones exigidas, basta que se cumpla:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = 0 \ , \qquad [\mathrm{I}]$$

resulta que la condición necesaria de optimalidad para que f(x) sea extremal de A es que f(x) sea solución de la ecuación diferencial [I].

La ecuación diferencial anterior recibe el nombre de ecuación de Euler-Lagrange-Poisson. Su carácter *necesario* indica que sólo entre las soluciones así obtenidas se hallará la buscada. Criterios analíticos de *suficiencia* resultan difíciles de formular y serán sistemáticamente omitidos de nuestro estudio dado que, afortunadamente, en la mayoría de los problemas de aplicación económica su propia naturaleza basta para comprobar la validez de dichas soluciones.

Como además sabemos que: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right)\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right)\cdot\frac{dy'}{dx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y'}y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}y''$ ,

resulta que la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson toma la forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y'}y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0} \ ,$$

que resulta ser una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Insistimos en que la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson representa sólo una condición *necesaria* o de primer grado; los criterios de *suficiencia* o de segundo grado son, en general, de gran complicación, por lo que no encuadran en la línea elemental que hemos seguido; ahora bien, en la mayoría de los problemas prácticos, la misma naturaleza del problema económico o físico (ingenieril) proporciona elementos suficientes para la determinación de la solución correcta.

Por otra parte, la integración de la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson proporcionará una función dependiente de dos constantes arbitrarias que, al menos teóricamente, quedarán determinadas por las condiciones de pasar la curva y = f(x) por los puntos (a, c) y (b, d), problema éste de contorno que, con frecuencia, resulta más difícil de resolver que la propia integración.

La integración de la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson puede presentar serias dificultades, pero en los siguientes casos, su integración se consigue con relativa facilidad, a saber:

a) Si la función $\varphi$ no contiene explícitamente la *y*, se deduce de: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = 0$, que: $\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \text{cte.}$ y la integración se logra por una única cuadratura.

b) Si $\varphi$ no contiene a y', resulta análogamente que: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$

Este será precisamente el caso usual en el que nos encontraremos en la resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales, como tendremos ocasión de comprobar en algunos ejercicios de las lecciones 22 y 23. Se tratará, entonces, de una ecuación algebraica que solo tendrá solución si, por casualidad, se cumplen las condiciones de frontera (la otra variable actúa como una constante).

c) Si $\varphi$ sólo depende de y', la ecuación: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$,

se reduce a la siguiente: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} y'' = 0$, esto es, a y" = 0, y por tanto, todos los extremales serán rectas.

d) Un caso interesante que puede presentarse en las aplicaciones económicas o físicas es aquél en el cual la función $\varphi$, no contiene la variable *x*. Entonces, su diferencial total es:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dy' .$$

Por otra parte, de: $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)$ , se obtiene que:

$$d\varphi=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)dy+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}dy'=y'd\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}dy'=d\left(y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)$$

Luego resultará que: $\varphi=\int d\left(y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)=y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'}+k$, ecuación que se resuelve mediante una única cuadratura y donde **k** es una constante arbitraria de integración.

## 2.2. Integrando con derivadas de orden superior al primero

Para fijar ideas, supongamos ahora que $\varphi$ es función de x, y, y', e y''. Entonces la expresión de:

$$\left[\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=0}=0 \text{ , sería: } \int_a^b\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta'(x)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\eta''(x)\right]\cdot dx=0$$

Integrando por partes el segundo sumando una vez, el tercero dos veces, y teniendo en cuenta que $\eta(a)=\eta(b)=0$, resultará:

$$\int_a^b\left[\eta(x)\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\right)\right]\cdot dx=0\ ,$$

de donde la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, en este caso, adopta la forma:

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\right)=0}\ ,$$

que constituye ecuación diferencial de cuarto orden cuya integración proporciona, en general, cuatro constantes que se determinan por las condiciones de pasar la extremal por los puntos dados y tener en dichos puntos tangentes dadas.

La generalización a que el integrando o función subintegral contenga derivadas de orden superior al segundo resulta inmediata.

## 2.3. Integrando con varias funciones

Sea: $A(y_1, y_2, ..., y_n) = \int_a^b \varphi(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, ..., y_n, y'_n) \cdot dx$ .

Para determinar las condiciones necesarias de extremos de la funcional A, variemos una sola de las funciones, dejando las demás invariables, estando por tanto, en el caso general. Reiterando el procedimiento descrito, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'_i}\right) = 0 \ , \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

cuyas constantes de integración se determinan con las condiciones de contorno. Análogamente se procede si aparecen en el integrando más de dos funciones o bien si las derivadas de las mismas son de orden superior, llegándose entonces a sistemas de más ecuaciones o de mayor orden.

## 2.4. Integrando con funciones ligadas mediante relaciones

Hasta ahora hemos considerado diversos problemas de cálculo de variaciones en los cuales la función o funciones incógnitas podían ser variadas arbitrariamente, y justamente en la arbitrariedad de dichas variaciones fundábamos el razonamiento conducente a la ecuación diferencial o al sistema de ecuaciones entre cuyas soluciones deben hallarse las extremales buscadas, es decir, las curvas que hacen estacionaria la integral. En las aplicaciones económicas o ingenieriles ocurre con frecuencia, no obstante, que las curvas extremales no admiten variaciones independientes sino ligadas por ciertas condiciones.

Sea: $A(y,z)=\int_a^b \varphi(x,y,y',z,z')\cdot dx$ , estando ligadas z e y por la relación: F(x, y, z) = 0. El método seguido en el apartado anterior, deja aquí de ser válido, puesto que presuponía la independencia de las funciones consideradas.

Siguiendo el método anterior, podríamos escribir:

$$A(\lambda)=\int_a^b \varphi\left[x,y(x)+\lambda\eta_1(x),y'(x)+\lambda\eta'_1(x),z(x)+\lambda\eta_2(x),z'(x)+\lambda\eta'_2(x)\right]\cdot dx\,,$$

o bien, en términos de variaciones:

$$\delta A=\int_a^b\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\right)\cdot\delta y+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\right)\right)\cdot\delta z\right]\cdot dx=0\,,$$

verificándose, a partir de la condición:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z=0$$

Eliminando $\delta y$ y $\delta z$, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)=0\\ \lambda\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\right)=0\end{aligned}\right\}$$

que con F(x, y, z) = 0 determinan las soluciones buscadas.

Pero las dos primeras ecuaciones anteriores equivalen a:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda F+\varphi)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = 0 \\ \frac{\partial(\lambda F+\varphi)}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$

lo que equivale a aplicar el método general al funcional: $A^*(y,z) = \int_a^b [\lambda F + \varphi] dx$ ,

método éste que recuerda el de los multiplicadores u operadores de Lagrange para la resolución de los extremos (máximos y mínimos) condicionados de funciones multivariantes.

## 3. EJERCICIOS DE APLICACIÓN

A continuación se exponen diferentes ejemplos de las aplicaciones económicas o ingenieriles del Cálculo de Variaciones (que constituye la base de la optimización dinámica), que pueden resultar de singular utilidad en algunos casos. A saber:

### Ejemplo 1

Se trata de optimizar la función eléctrica dada por la expresión: $E = 3 + 2A^2$, siendo A el funcional dado por: $A(y) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} \cdot dx$.

*Solución:*

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta que:

$\varphi = \sqrt{1+y'^2}$, por lo que: $\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = K_1$ , puesto que la función $\varphi$ no contiene explícitamente a la *y* , pero además sólo depende de y', por lo que todos los extremales serán rectas. En efecto, de la expresión anterior dedúcese que:

$$y' = K_1\sqrt{1+y'^2}\text{, o sea: } y'^2 = K_1(1+y'^2) = K_1 + K_1\cdot y'^2\text{, con lo que:}$$

$$y'^2 - K_1\cdot y'^2 = K_1 = y'^2(1 - K_1)\text{, de donde: } y'^2 = \frac{K_1}{1-K_1} = c_1 \text{ ; } y' = \pm\sqrt{c_1} = c_2 \quad ,$$

y mediante una cuadratura se obtiene que: $y = c_2x + c_3$, que resulta ser, efectivamente, una familia o haz de rectas cuyos valores de las constantes $c_2$ y $c_3$ vendrán, en su caso, determinados por las condiciones de contorno dadas.

Como $y' = c_2$, se tendrá un valor del funcional:

$$A(y) = \int_a^b \sqrt{1+c_2^2}\cdot dx = K_2\left[x\right]_a^b = K_2(b - a)\text{, habiendo hecho: } K_2 = \sqrt{1+c_2^2}\text{ .}$$

Entonces, la función eléctrica planteada valdrá:

$$\text{[OPT] } E = 3 + 2A^2 = 3 + 2K_2^2\,(b - a)^2 = 3 + 2K_3b^2 + 2K_3a^2 - 4K_3ba,$$

habiendo hecho $K_3 = K_2^2$.

**Ejemplo 2**

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio bruto contable de una empresa: E = 3 + 4A, siendo A el funcional, expresado en millones de euros, dado por:

$$A(y,z) = \int_0^1 \sqrt{y^2+z^2}\cdot dx\text{ , si } y + z = 1.$$

Determinar el beneficio neto resultante teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el Impuesto de Sociedades.

*Solución:*

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta que: $\varphi = y^2 + z^2$, por lo que formando el funcional:

$$A^*(y,z) = \int_0^1 \left[y^2 + z^2 + \lambda(y + z - 1)\right]dx \ ,$$

se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2y + \lambda = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \Rightarrow y = z \end{cases}$$

, que con la condición $y + z = 1$, proporcionan los valores:

$z = ½$ ; $y = ½$ , con lo que la funcional A será:

$$A(y,z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot dx = \frac{1}{2}[x]_0^1 = \frac{1}{2}$$ , y la función económica resultante será la siguiente:

[OPT] E = 3 + 4A = 5 ($\pi$ = 5.000.000’00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

B = 0’75 $\times$ $\pi$ = 0’75 $\times$ 5.000.000’00 = 3.750.000’00 € .

## Ejemplo 3

Se trata de optimizar la función mecánica dada por: E = 4 + ln A, siendo A el funcional dado por:

$$A(y) = \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx$$

*Solución:*

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta que: $\varphi = y\sqrt{1 + y'^2}$ , por lo que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sqrt{1+y'^2}\ ;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'}=\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\ ;\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\ ;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}=\frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}}\ ;$$

y la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson resultará, entonces:

$$\frac{yy''}{(1+y'^2)^{3/2}}+\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-\sqrt{1+y'^2}=0\quad ,$$

o bien: $\frac{yy''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ ; $yy''=1+y'^2$ ; que es una ecuación diferencial que se resuelve haciendo el cambio: $\frac{dy}{dx}=p$, con lo que:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p\ ,$$

luego: $py\frac{dp}{dy}=1+p^2$, de donde, separando variables: $\frac{p\cdot dp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}$ , que integraremos mediante una cuadratura, así:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{p}{1+p^2}dp\ ;\ \ln y+\ln k=(1/2)\cdot\ln(1+p^2)\Rightarrow \ln ky=\ln(1+p^2)^{1/2},$$

o sea: $\sqrt{1+p^2}=ky$ , donde k es una constante arbitraria de integración.

La expresión anterior, se escribe así: $\frac{dy}{dx}=\sqrt{k^2y^2-1}$ , o bien: $dx=\frac{dy}{\sqrt{k^2y^2-1}}$ ; $x=\int\frac{dy}{\sqrt{k^2y^2-1}}$ ;

cuya integración es inmediata al tratarse de una EDO no lineal de variables separadas, que se resuelve mediante una cuadratura. El resultado es el extremal:

$$y(x)=\frac{e^{-k(c+x)}(e^{2k(c+x)}+k^2)}{2k^2}\ .$$

Una vez obtenido este resultado se podría hallar el valor del funcional A y, a partir de ahí, el correspondiente de la función mecánica E, cuestión ésta de gran laboriosidad, por lo que obviaremos dicho cálculo por razones de espacio y oportunidad.

## Ejemplo 4

Se trata de optimizar la función electrónica dada por: $E = 6 + 3 \cdot e^A$, siendo A el funcional dado por:

$$A(y) = \int_a^b \sqrt{y^2 + y'^2}\,dx \ .$$

*Solución:*

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta que:

$\varphi = \sqrt{y^2 + y'^2}$ , donde la función $\varphi$ no contiene la variable *x*, con lo que:

$\varphi = \sqrt{y^2 + y'^2} = y'\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} + k = y'\dfrac{y'}{\sqrt{y^2 + y'^2}} + k$ , de donde: $y^2 + y'^2 = y'^2 + k\sqrt{y^2 + y'^2}$, o sea: , $k^2(y^2 + y'^2) = y^4$ ;

$$k^2y^2 + k^2y'^2 = y^4, \text{ y entonces: } k^2y'^2 = y^4 - k^2y^2 = y^2(y^2 - k^2) \ ;$$

$$ky' = y\sqrt{y^2 - k^2} \ \text{, o bien: } \frac{k\,dy}{y\sqrt{y^2 - k^2}} = dx \ ; \quad x = k\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - k^2}} \ ;$$

ecuación de integración inmediata al tratarse de una EDO no lineal de variables separadas, que se resuelve mediante una cuadratura. El resultado es:

$$y(x) = -\frac{4 \cdot i \cdot k \cdot e^{i(ck+x)}}{-4 + e^{2i(ck+x)}} \ .$$

Al igual que en el ejercicio anterior, una vez obtenido este resultado se podría hallar el valor del funcional A y, a partir de ahí, el correspondiente de la función electrónica E, cuestión ésta de gran laboriosidad, por lo que obviaremos dicho cálculo por razones de espacio y oportunidad.

# Ejemplo 5

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio bruto contable de una empresa, expresado en millones de euros, dada por la expresión:
$E = 2 + 3A^2 + 2e^A$, siendo, a su vez, A el funcional dado por la integral definida:

$A(y,z) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz) \cdot dx$, con las siguientes condiciones de contorno:

$y(0) = 0$ ; $y(\pi/2) = 1$ ; $z(0) = 0$ ; $z(\pi/2) = -1$.

Determinar el beneficio neto resultante teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

*Solución:*

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y'^2 + z'^2 + 2yz$, por lo que en este caso en el integrando figuran varias funciones, se obtiene que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 2y' \; ; \; \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 2z'.$$

En su consecuencia, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange-Poisson siguiente:

$$\begin{cases} y'' - z = 0 \\ z'' - y = 0 \end{cases}$$

Eliminando ahora una de las dos funciones desconocidas, por ejemplo la *z*, y teniendo en cuenta que: $z = y''$ ; $z' = y'''$ ; $z'' = y^{IV}$, resultará la ecuación:
$y^{IV} - y = 0$, que es una EDO homogénea de cuarto orden cuya ecuación característica es:
$\lambda^4 - 1 = 0$, con las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$ ; de la que se deduce la integral general:

$$\begin{cases} y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x; \\ y'(x) = C_1e^x - C_2e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x; \text{ y también:} \\ z(x) = y''(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x; \end{cases}$$

, y teniendo ahora en cuenta las condiciones de contorno dadas, resultará que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ y(\pi/2) = C_1 \cdot e^{\pi/2} + C_2 \cdot e^{-\pi/2} + C_4 = 1 \\ z(0) = C_1 + C_2 - C_3 = 0 \\ z(\pi/2) = C_1 \cdot e^{\pi/2} + C_2 \cdot e^{-\pi/2} - C_4 = -1 \end{cases}$$

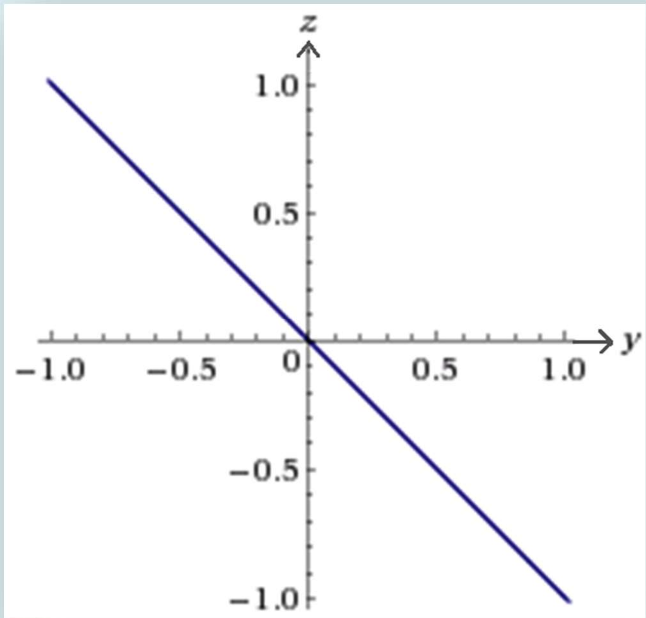
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 \cdot e^{\pi/2} + C_2 \cdot e^{-\pi/2} = 0 \text{ , y resultará que:} \end{cases}$$

$C_1 \cdot e^{\pi/2} - C_1 \cdot e^{-\pi/2} = 0 = C_1(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})$, de lo que se concluye que: $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, y $C_4 = 1$.

Y entonces se tienen las extremales:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \sin x \\ z = -\sin x \\ y = -z \end{array}}$$

con la siguiente representación paramétrica gráfica:



Consecuentemente se tendría: y’ = cos x ; z’ = -cos x, con lo que el funcional que nos ocupa alcanzará el valor siguiente:

$$A(y,z) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)\cdot dx = \int_0^{\pi/2} 2(\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos 2x\cdot dx = [\sin 2x]_0^{\pi/2} = 0 \ .$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

$$[\text{OPT}]\ E = 2 + 3A^2 + 2e^A = 4\ (\pi = 4.000.000'00\ €).$$

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 4.000.000'00 = 3.000.000'00\ € \ .$$

**Ejemplo 6**

Hallar el mínimo del funcional: $A(y) = \int_0^{\pi} y'(x)^2\cdot dx$ , afecto a la función económica: $E = 2 - 3A^2$, con las condiciones: $y(0) = y(\pi) = 0$, y sujeto a la restricción: $\int_0^{\pi} y(x)^2\cdot dx = 1$ .

*Solución:*

En los ejercicios anteriores hemos visto las condiciones necesarias para la existencia de un extremo de funcionales definidos en clases de funciones que toman valores constantes en la frontera. Ahora bien, pueden existir ciertas aplicaciones económicas en las que proceda considerar restricciones adicionales sobre el conjunto de las funciones admisibles; entre las más importantes se hallan las restricciones de tipo isoperimétrico (como es el caso de la que aquí nos ocupa) y las de igualdad.

En este caso, el funcional asociado es: $A^*(y) = \int_0^{\pi} [y'(x)^2 + \lambda y(x)^2] \cdot dx$, con: $\varphi = (y'^2 + \lambda y^2)$, y la ecuación de Euler-Legendre viene dada por la EDO: $y'' = \lambda \cdot y$, es decir, se trata de un problema de autovalores. La ecuación característica de esta EDO es: $r^2 - \lambda = 0$, con lo que sus raíces serán: $r = \pm\sqrt{\lambda}$ . Si $\lambda \geq 0$, entonces la integral general viene dada por:

$$y(x) = C_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$$, y las condiciones de frontera exigirían que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y(\pi) = C_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{\lambda}} = 0, \end{cases}$$

lo que implicaría el absurdo de que $\pi = -\pi$, por lo que no se cumplen las condiciones de frontera, de tal suerte que no hay solución para el caso en que $\lambda \geq 0$. En el caso contrario, o sea, para $\lambda < 0$, se tiene que la integral general es:

$$y(x) = C_1 \sin(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \cos(x\sqrt{-\lambda}) \ .$$

Aquí, las condiciones de frontera exigen que:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0 \\ y(\pi) = C_1 \sin(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \cos(x\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Con ello, resultará que: $C_1 \sin(\pi\sqrt{-\lambda}) = 0$, o bien: $y(x) = C_1 \sin kx$, habiendo hecho: $k = \sqrt{-\lambda}$ . Por otra parte, la condición isoperimétrica dada implica que:

$$1 = \int_0^{\pi} y(x)^2 \cdot dx = C_1^2 \int_0^{\pi} \sin^2 kx \cdot dx = C_1^2 \int_0^{k\pi} \sin^2 s \frac{ds}{k} = \frac{C_1^2}{k}\left[\frac{s}{2} - \frac{\sin 2s}{4}\right]_0^{k\pi} = \frac{C_1^2 \cdot \pi}{2} \ ,$$

habiendo hecho el cambio de variable: $x = s/k$, o bien directamente:

$$\int_0^{\pi} y(x)^2 \cdot dx = C_1^2 \int_0^{\pi} \sin^2 kx \cdot dx = C_1^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2kx}{4k}\right]_0^{\pi} = C_1^2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi k}{4k}\right] = \frac{C_1^2 \cdot \pi}{2}$$, c.s.q.d.,

de donde puede deducirse que: $C_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ , y la solución buscada quedará del siguiente modo:

$y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$ , es decir, hay una familia uniparamétrica de extremales que, de hecho, también satisfacen la condición de Legendre. En su consecuencia, $y'(x) = \pm k\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos kx$ , y la extremal dada será:

$$A(y) = \int_0^\pi y'(x)^2\cdot dx = \frac{2k^2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 kx\cdot dx = \frac{2k^2}{\pi}\left[\frac{\sin 2xk}{4k} + \frac{x}{2}\right]_0^\pi = \frac{2k^2}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = k^2 = -\lambda\ ,$$

por lo que la función económica que nos ocupa valdrá:

$$[\text{OPT}]\ E = 2 - 3\cdot A^2 = 2 - 3\lambda^2.$$

## Ejemplo 7

Hallar los extremales del funcional: $A(y) = \int_0^1 [y'(x)^2 + x^2]\cdot dx$ , afecto a la función económica: $E = 2 - 3A$, con las condiciones: $y(0) = y(1) = 0$, y sujeto a la restricción: $\int_0^1 y(x)^2\cdot dx = 2$ .

*Solución:*

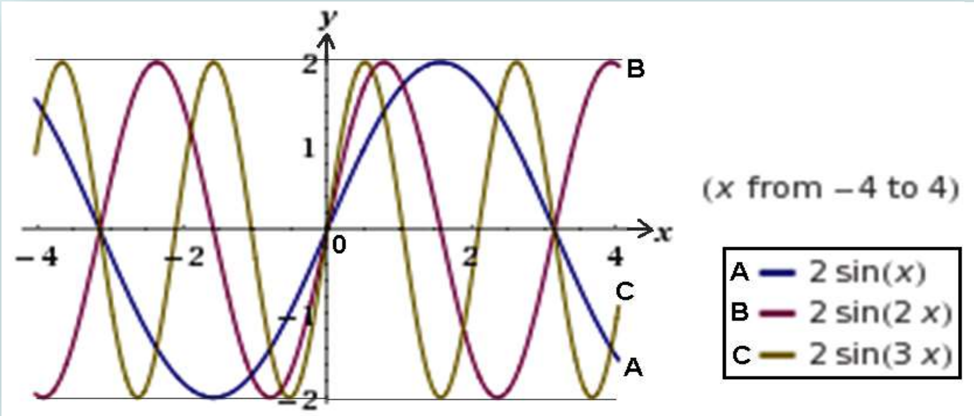
Siguiendo aquí los mismos pasos que en el ejercicio anterior veamos que, en este caso, el funcional asociado o auxiliar es el siguiente: $A^*(y) = \int_0^1 [y'(x)^2 + x^2 + \lambda y(x)^2]\cdot dx$ , con:

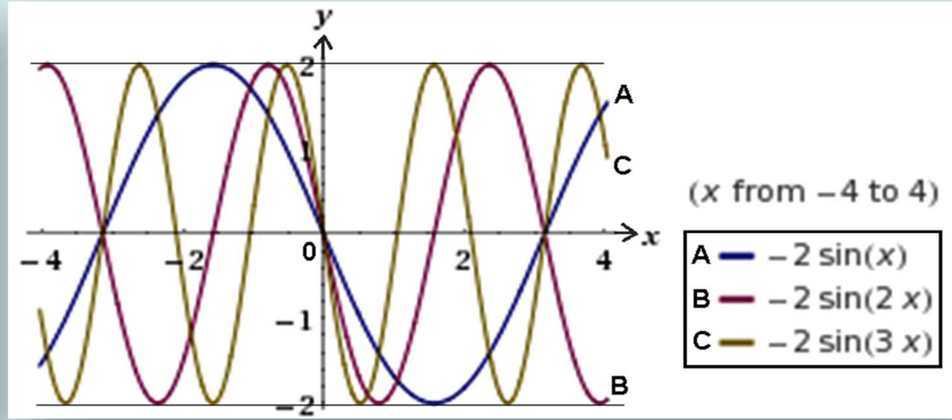
$\varphi = (y'^2 + x^2 + \lambda\cdot y^2)$, y después de aplicar la ecuación de Euler-Legendre y las condiciones de frontera, como puede comprobar el amable lector/a, exigirían que la integral general sea: $\varphi y(x) = C_1 \sin kx$, habiendo hecho: $k = n\cdot\pi$, $\forall\ n \in \{Z\}$. Por otra parte, la condición isoperimétrica dada implica que:

$$2=\int_0^1 y(x)^2\cdot dx = C_1^2\int_0^1 \sin^2 kx\cdot dx = C_1^2\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2kx}{4k}\right]_0^1 = C_1^2\left[\frac{1}{2}-\frac{\sin 2k}{4k}\right],$$

de donde puede deducirse que: $C_1=\pm\sqrt{\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin 2k}{4k}}}$ , y la solución buscada quedará establecida del siguiente modo:

$y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin 2k}{4k}}}\sin kx = (k=n\cdot\pi) = \pm\sqrt{4}\cdot\sin(kx) = \pm 2\cdot\sin(kx)$ , es decir, hay una familia uniparamétrica de extremales que, de hecho, también satisfacen la condición de Legendre. Se tendrán, por ejemplo, las siguientes representaciones gráficas para $k \in (1,2,3)$, respectivamente de: $y(x) = 2\cdot\sin(kx)$; $y(x) = -2\cdot\sin(kx)$. A saber:




En su consecuencia, $y'(x) = \pm 2k\cdot\cos kx$ , y la extremal dada será: $A(y) = \int_0^1 [y'(x)^2 + x^2]\cdot dx =$

$$= \int_0^1 (4k^2\cdot\cos^2 kx + x^2)\cdot dx = 4k^2\int_0^1 \cos^2 kx\cdot dx + \int_0^1 x^2\cdot dx = 4k^2\left[\frac{\sin 2xk}{4k}+\frac{x}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= 2k^2 + \frac{1}{3} = \frac{6n^2\cdot\pi^2+1}{3}, \text{por lo que la función económica que nos ocupa valdrá:}$$

[OPT] $E = 2 - 3\cdot A = 1 - 6\cdot n^2\cdot\pi^2$.

## Ejemplo 8

Hallar los extremales del funcional: $A(y,z) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\cdot dx$, viniendo expresado en millones de unidades anuales de producto, tratando de optimizar la función económica de producción neta de una fábrica de conservas vegetales dada por: E = 2 – 3A, con las condiciones de frontera: y(0) = 0; z(0) = 0; y(1) = 1; z(1) = 1, y sujeto a la restricción: $\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)\cdot dx = 2$, considerando un 3% de mermas en el proceso productivo. Estimar la cifra de negocios para un precio de salida de fábrica de 4'50 €/ud.

*Solución:*

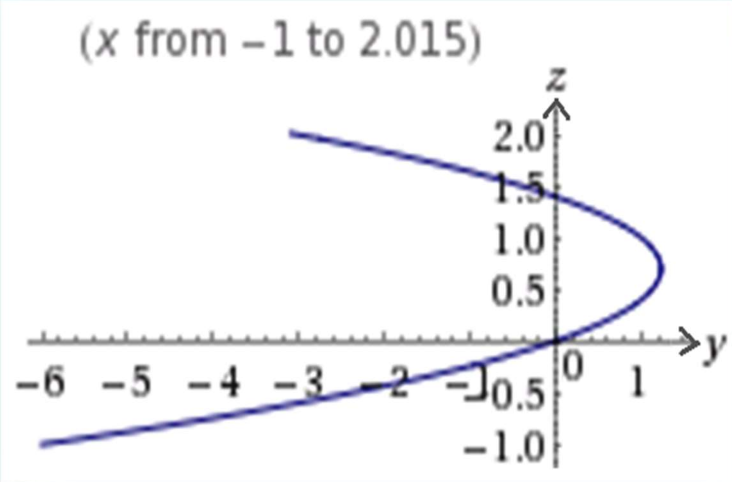
Siguiendo aquí los mismos pasos que en el ejercicio anterior veamos que, en este caso, el funcional asociado o auxiliar es el siguiente: $A^*(y) = \int_0^1 [y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda(y'^2 - xy' - z'^2)]\cdot dx$, con:

$$\varphi = (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda\cdot y'^2 - \lambda xy' - \lambda z'^2)$$

$\varphi$, y después de aplicar la ecuación de Euler-Legendre, la restricción isoperimétrica y las condiciones de frontera, como puede comprobar el amable lector/a, exigirían que la integral particular buscada sea:

$$y = -\frac{5x^2}{2} + \frac{7x}{2} = \frac{x(7-5x)}{2}$$, y también: z = x, por lo que: $y = \frac{z(7-5z)}{2}$,

con la siguiente representación paramétrica gráfica:




En su consecuencia, se tendrá que:

y' = - 5x + 7/2 ; z' = 1 ; y la extremal dada será la siguiente:

$$A(y,z) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\cdot dx =$$

$$\int_0^1 (25x^2 + \frac{49}{4} - 35x + 1 - 4x - 4x)\cdot dx = \int_0^1 (25x^2 - 43x + \frac{53}{4})\cdot dx =$$

$$= \left[ \frac{25x^3}{3} - \frac{43x^2}{2} + \frac{53x}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

por lo que la función económica que nos ocupa valdrá:

[OPT] E = 2 – 3·A = 2 – ¼ = 7/4, que representa la producción bruta.

La producción neta de la factoría será, pues, teniendo en cuenta las mermas del proceso productivo (3%), de:

$P_n$ = (7/4) × 1.000.000 × 0'97 = 1.697.500 ud./año, y una cifra de negocios correspondiente de:

1.697.500 ud./año × 4'50 €/ud. = 7.638.750'00 €/año.

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 18

## CÁLCULO DE VARIACIONES (II)

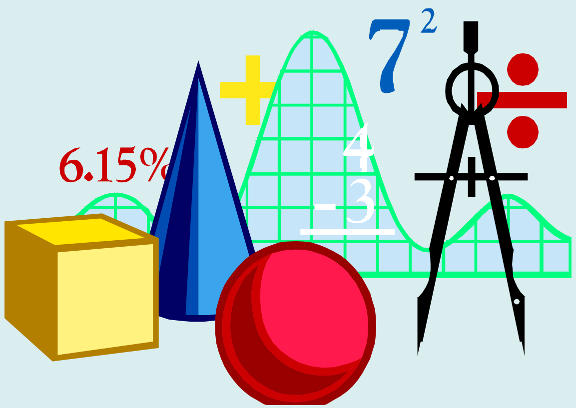
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 4. NUEVOS EJERCICIOS DE APLICACIÓN

### Ejemplo 1

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio contable bruto de sendas empresas: E = 4 + 5A, siendo A el funcional, expresado en miles de euros, dado respectivamente por:

a) $A(y) = \int_1^3 (y'^2 + 12xy)\cdot dx$, con las condiciones de frontera: y(0) = 0 ; y(1) = 2.

b) $A(y) = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)\cdot dx$, con las condiciones de frontera: y(1) = 0 ; y(3) = 26.

Determinar el beneficio neto resultante en ambas empresas, teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

*Solución:*

a) El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Veamos que, en el caso de la primera empresa, la función:

$\varphi = y'^2 + 12xy$, admite las derivadas:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 12x\,; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 2y'\,; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y'} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y'} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} = 2$$

Luego la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson será: $2y'' - 12x = 0$, de donde:

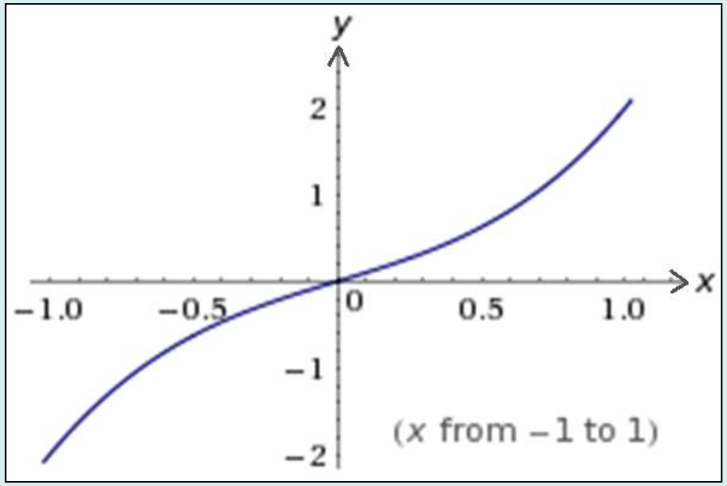
$$y'' = 6x \; ; \quad y' = 3x^2 + k_1 \; ; \quad y = x^3 + k_1x + k_2.$$

Por las condiciones dadas se tendrá que:

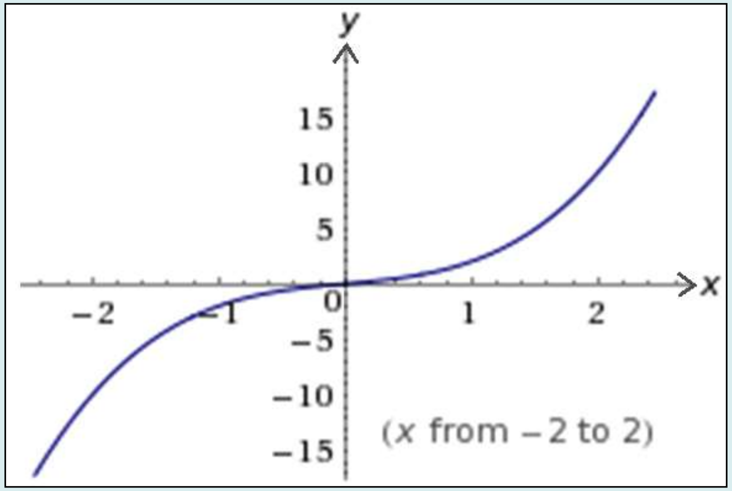
$$\begin{cases} y(0) = 0 = k_2 \\ y(1) = 2 = 1 + k_1 + k_2 \end{cases}$$

, de donde se deduce que: $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ , y la curva pedida será: $y = x^3 + x$,

con la siguiente representación gráfica:




O bien, con una mayor perspectiva:



Por otra parte se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 + x \\ y' = 3x^2 + 1 \end{array}\right\}$$ , con lo que el funcional A(y) será:

$$A(y) = \int_0^1 \left[(3x^2+1)^2 + 12(x^4+x^2)\right]dx = \int_0^1 (21x^4 + 18x^2 + 1)\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{21}{5}x^5 + 6x^3 + x\right]_0^1 = \frac{56}{5}.$$

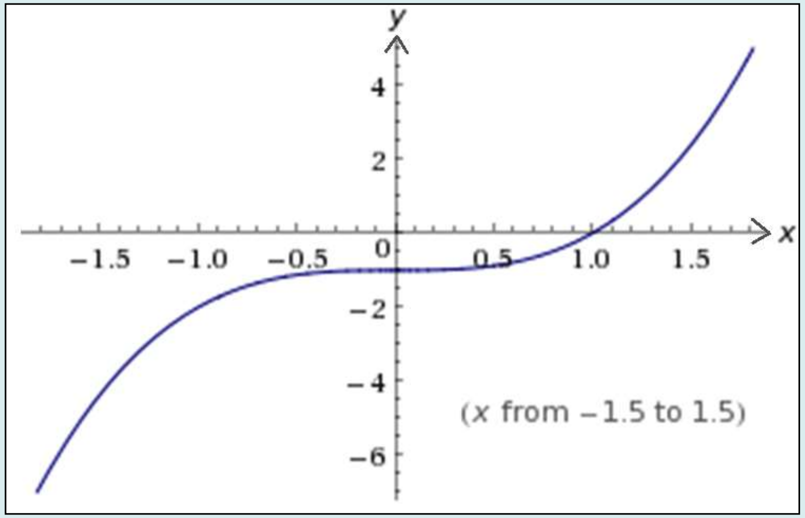
Y la función económica será, en definitiva: [OPT] E = 4 + 5A = 60 ($\pi$ = 60.000’00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será: B = 0’75 $\times$ $\pi$ = 0’75 $\times$ 60.000’00 = 45.000’00 € .

b) En este segundo caso, se tendrán unas nuevas condiciones de frontera, así como unos nuevos límites de integración en la integral definida del funcional en cuestión. Precisamente, como consecuencia de la aplicación de las nuevas condiciones de frontera o de contorno antedichas, resultará que:

$$\begin{cases} y(1) = 0 = 1 + k_1 + k_2 \\ y(3) = 26 = 27 + 3k_1 + k_2 \end{cases}$$

de donde se deduce que: $k_1 = 0$, $k_2 = -1$ , y la curva pedida será: $y = x^3 - 1$, con la siguiente representación gráfica:



La extremal hallada constituye un máximo fuerte. Por otra parte, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 1 \\ y' = 3x^2 \end{array}\right\}$$ , con lo que el funcional quedará establecido así:

$$A(y) = \int_1^3 \left[9x^4 + 12x(x^3 - 1)\right]dx = \int_1^3 (21x^4 - 12x)\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{21}{5}x^5 - 6x^2\right]_1^3 = \frac{4.842}{5}.$$

Y la función económica será, en definitiva: [OPT] E = 4 + 5A = 4.846 ($\pi$ = 4.846.000'00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

B = 0'75 $\times$ $\pi$ = 0'75 $\times$ 4.846.000'00 = 3.634.500'00 €.

## Ejemplo 2

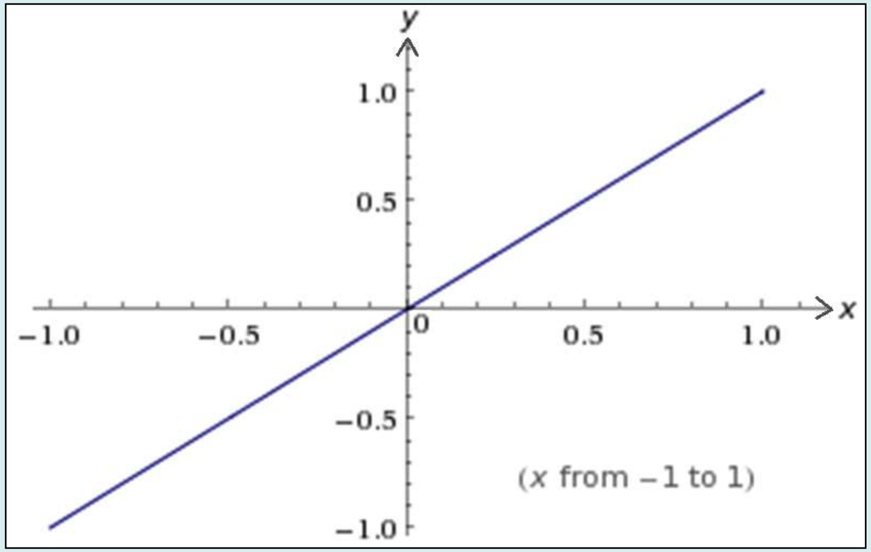
Se trata de optimizar la función económica de producción neta de una fábrica de electrodomésticos dada por: $E = 2 + 5A^2$, siendo A el funcional dado, en miles de unidades anuales de producto, por: $A(y) = \int_0^1 (y^2 + x^2 y')\cdot dx$ , con las condiciones: y(0) = 0 ; y(1) = 2, considerando un 5% de mermas en el proceso productivo. Estimar la cifra de negocios para un precio de salida de fábrica de 1.850'00 €/ud.

*Solución:*

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y^2 + x^2 y'$, se obtiene:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y\,;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = x^2\,;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y'} = 2x \qquad ; \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} = 0$$

Luego la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson se reduce a la expresión: $2x - 2y = 0$, sin ninguna constante, esto es: $y = x$, con la siguiente representación gráfica:




pero como no verifica las condiciones de contorno, puesto que:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \neq 2 \end{cases}$$ , no existe tampoco ninguna extremal que satisfaga el problema planteado.

Caso distinto sería si nos hubieran dado la condición $y(1) = 1$, que es la única satisfactoria. Entonces se tendría que: $y = x$ ; $y' = 1$, con lo que:

$$A(y) = \int_0^1 (x^2 + x^2)\cdot dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$ , y la función económica valdría:

$$[OPT]\ E = 2 + 5\cdot A^2 = 2 + \frac{20}{9} = \frac{38}{9}$$ , que representa la producción bruta.

La producción neta de la factoría será, pues, de: $P_n = (38/9) \times 1.000 \times 0'95 = 4.011$ ud./año,

y una cifra de negocios de: 4.011 ud./año $\times$ 1.850'00 €/ud. = 7.420.350'00 €/año.

## Ejemplo 3

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio contable bruto de sendas empresas expresado en miles de euros, a saber: $E = 2 + A^2 + \ln A$, siendo A el funcional dado por: $A(y) = \int_0^1 (1 + y''^2) \cdot dx$ , con las siguientes condiciones de frontera respectivas: a) $y(0) = 0$ ; $y(1) = 3$ ; $y'(0) = 2$ ; $y'(1) = 5$, y para la otra empresa, b) $y(0) = 0$ ; $y(1) = 1$ ; $y'(0) = 1$ ; $y'(1) = 1$. Determinar el beneficio neto resultante en ambas empresas, teniendo en cuenta una fiscalidad aplicable del 25% en el impuesto de sociedades.

*Solución:*

a) El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = 1 + y''^2$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y''} = 2y''; \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\right) = 2y^{IV}$$

y la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson ofrece: $y^{IV} = 0$, que es una EDO de cuarto orden cuya ecuación característica es: $\lambda^4 = 0$, que posee raíces reales múltiples, a saber: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, y su integral general vendrá dada por:

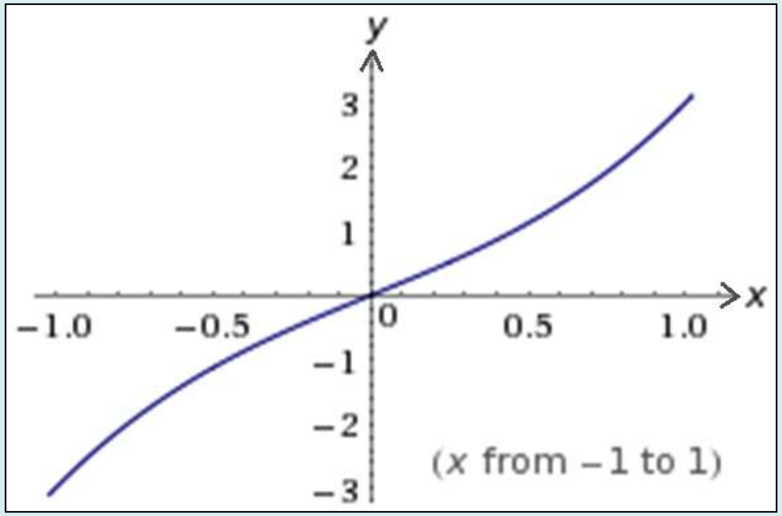
$$y(x) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 .$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las condiciones dadas, se tendrá que, siendo $y'(x) = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3$:

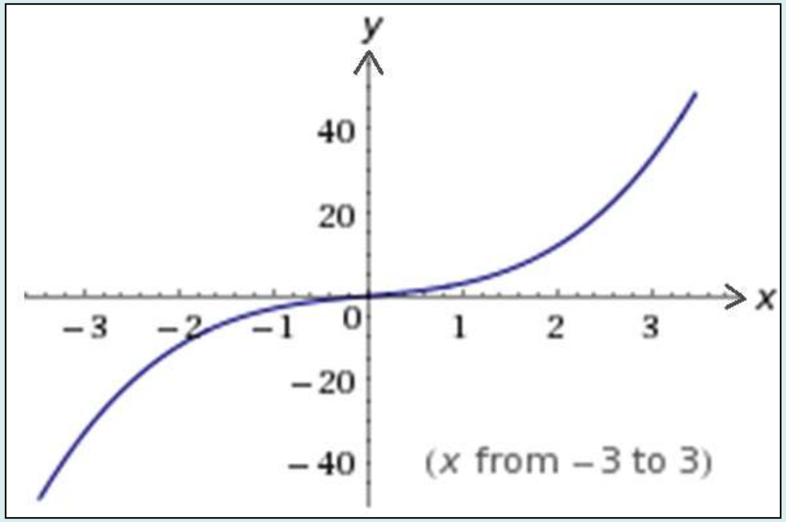
$$\begin{cases} y(0) = C_4 = 0 \\ y(1) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 3 \\ y'(0) = C_3 = 2 \\ y'(1) = 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 5 \end{cases}$$

con lo que: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases}$, de donde también: $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$,

y la integral particular resultante constituye la extremal buscada, esto es: $y(x) = x^3 + 2x$, que resulta ser una parábola cúbica cuya representación gráfica es la siguiente:




O bien con mayor perspectiva:




Debe tenerse en cuenta, además, que:

$$\begin{cases} y = x^3 + 2x \\ y' = 3x^2 + 2 \text{ , con lo que: } A(y) = \int_0^1 (1 + 36x^2)\cdot dx = \left[x + 12x^3\right]_0^1 = 13, \\ y'' = 6x \end{cases}$$

y resultará, en definitiva, el siguiente valor de la función económica:

$$[OPT]\ E = 2 + A^2 + \ln A = 2 + 169 + 2'565 = 173'565\ (\pi = 173.565'00\ €).$$

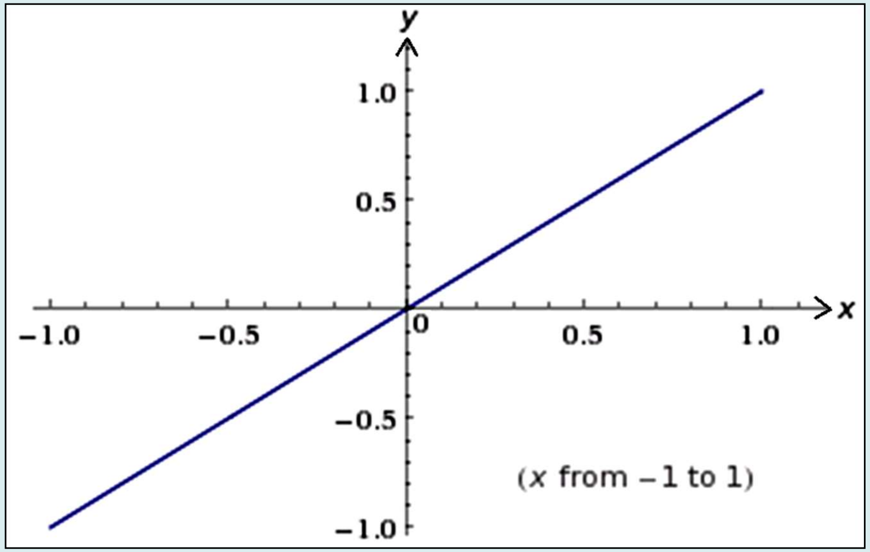
De este modo, el beneficio neto resultante después de impuestos será:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 173.565'00 = 130.173'75\ €\ .$$

b) Con estas nuevas condiciones de frontera para la segunda empresa, resulta que siendo $y'(x) = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3$:

$$\begin{cases} y(0) = C_4 = 0 \\ y(1) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 \\ y'(0) = C_3 = 1 \\ y'(1) = 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 1 \end{cases}$$

con lo que: $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $C_3 = 1$, y la integral particular resultante constituye la extremal buscada, esto es: $y(x) = x$, que resulta ser la recta bisectriz del primer cuadrante del círculo, cuya representación gráfica es:




Debe tenerse en cuenta, además, en este caso, que:

$$\begin{cases} y = x \\ y' = 1 \\ y'' = 0 \end{cases}, \text{ con lo que: } A(y) = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1, \text{ y resultará, en definitiva, el siguiente}$$

valor de la función económica en cuestión: [OPT] $E = 2 + A^2 + \ln A = 2 + 1 + 0 = 3$ ($\pi$ = 3.000’00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será: $B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 3.000'00 = 2.250'00$ €.

## Ejemplo 4

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio bruto contable de una empresa en miles de euros y dada por la expresión: $E = 2 + 3A^2 + 7 \cdot e^{(13-A)}$, siendo, a su vez, A el funcional dado por la integral definida: $A(y,z) = \int_0^1 (y'^2 + 2z'^2 + y'z') \cdot dx$ , con las siguientes condiciones de contorno: $y(0) = 0$ ; $y(1) = 1$ ; $z(0) = 0$ ; $z(1) = 2$. Determinar el beneficio neto resultante teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

*Solución:*

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y'^2 + 2z'^2 + y'z'$, por lo que en este caso en el integrando figuran varias funciones, se obtiene que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 2y' + z' \ ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 4z' + y' \ .$$

En su consecuencia, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange-Poisson siguiente:

$$\begin{cases} 2y'' + z'' = 0 \\ 4z'' + y'' = 0 \end{cases}$$

del que se deduce que: $y'' = z'' = 0$ y, por tanto, las integraciones son inmediatas, así: $\begin{cases} y = c_1 x + c_2 \\ z = c_3 x + c_4 \end{cases}$

, y teniendo ahora en cuenta las condiciones dadas, resultará que:

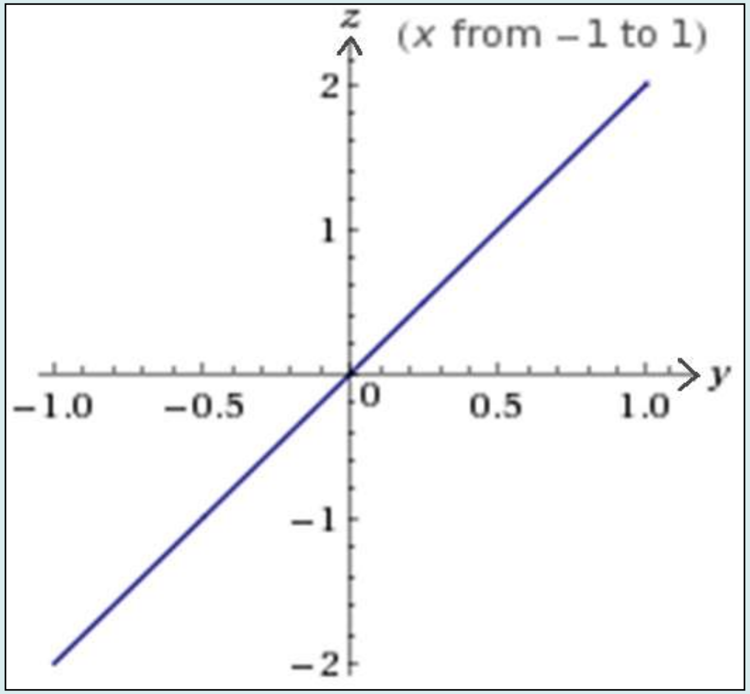
$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 = 1 \\ z(0) = c_4 = 0 \\ z(1) = c_3 + c_4 = 2 \end{cases}$$

, por lo que: $c_2 = c_4 = 0$ ; $c_3 = 2$ ; $c_1 = 1$.

Y entonces se tienen las extremales:

$$\begin{cases} y = x \\ z = 2x = 2y \end{cases}$$

, con la siguiente representación paramétrica gráfica:




Consecuentemente se tendría: y' = 1 ; z' = 2, con lo que el funcional que nos ocupa alcanzará el valor siguiente:

$$A(y,z) = \int_0^1 (y'^2 + 2z'^2 + y'z') \cdot dx = [11x]_0^1 = 11, \text{ y la función económica valdrá:}$$

$$[OPT]\ E = 2 + 363 + 7 \cdot e^2 = 416'72\ (\pi = 416.720'00\ €).$$

De este modo, el beneficio neto de la empresa (después de impuestos) será el siguiente:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 416.720'00 = 312.540'00\ €.$$

## Ejemplo 5

Se trata, ahora, de una tubería de fundición dúctil cuya trayectoria temporal de la rugosidad absoluta, al cabo de efectuar las determinaciones empíricas correspondientes y el modelo hidráulico subsiguiente, responde a la ecuación infinitesimal:

$$K(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + z(t) + \int_0^t e^{s-t} \cdot K(s) \cdot ds \ , \ \forall\ n \in \{\mathbb{N}\} \cup \{0\},$$

siendo z(t) la mayor de las extremales de la funcional:

$$F[y_1(t), y_2(t)] = \int_0^1 (y'^2_1 + 2y'^2_2 + y'_1 \cdot y'_2) \cdot dt \ , \text{ con las condiciones:}$$

$$y_1(0) = 0 \ ; \ y_1(1) = 1 \ ; \ y_2(0) = 0 \ ; \ y_2(1) = 2 \ ,$$

viniendo la rugosidad absoluta K expresada en mm y el tiempo t en siglos. Se desea averiguar, también, el tipo de agua circulante por dicha conducción (adaptado de Navarro, 2011).

*Solución:*

Habremos de resolver, en primer lugar, el valor de la función z(t) que aparece en la expresión de la ecuación integral, lo que constituye un problema de cálculo variacional. El problema planteado consiste en determinar los extremales de F, teniendo en cuenta las condiciones dadas.

Como resulta que la función: $\varphi = y_1'^2 + 2y_2'^2 + y_1'y_2'$, por lo que en este caso en el integrando figuran varias funciones, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0 \ ; \ \frac{\partial\varphi}{\partial y_1'} = 2y_1' + y_2' \ ; \ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} = 0 \ ; \ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2'} = 4y_2' + y_1' \ .$$

En su consecuencia, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange-Poisson siguiente:

$$\begin{cases} 2y_1'' + y_2'' = 0 \\ 4y_2'' + y_1'' = 0 \end{cases}$$

, del que se deduce que: $y_1'' = y_2'' = 0$ y, por tanto, las integraciones son inmediatas, con lo que:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 t + c_2 \\ y_2 = c_3 t + c_4 \end{cases}$$

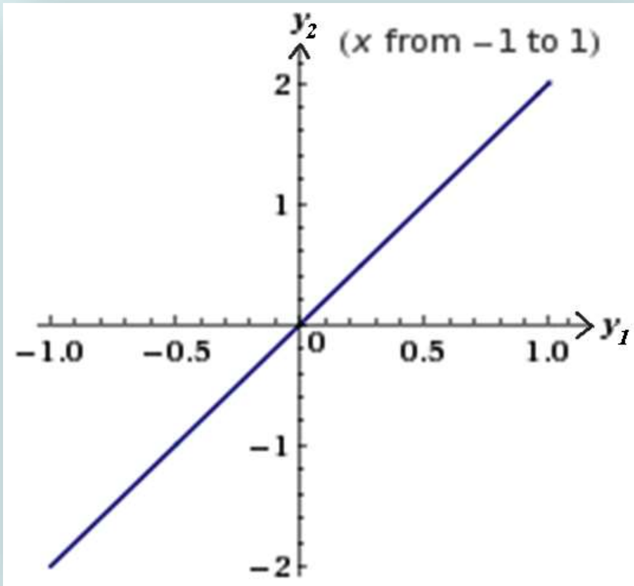
, y teniendo ahora en cuenta las condiciones dadas, resultará que:

$$\begin{cases} y_1(0) = c_2 = 0 \\ y_1(1) = c_1 + c_2 = 1 \\ y_2(0) = c_4 = 0 \\ y_2(1) = c_3 + c_4 = 2 \end{cases}$$

, por lo que: $c_2 = c_4 = 0$ ; $c_3 = 2$ ; $c_1 = 1$. Y entonces se tienen las extremales:

$$\boxed{\begin{matrix} y_1 = t \\ y_2 = 2t \end{matrix}}$$

, con la siguiente representación paramétrica gráfica:




Consecuentemente se tendría: $y_1' = 1$ ; $y_2' = 2$, con lo que el funcional que nos ocupa alcanzará el valor siguiente:

$F(y_1,y_2) = \int_0^1 (y'^2_1 + 2y'^2_2 + y'_1 \cdot y'_2)\cdot dt = \left[11t\right]_0^1 = 11$. La extremal mayor a considerar, según el enunciado del problema, es z(t) = 2t, y el segundo miembro de la ecuación planteada contiene en el primer y sucesivos sumandos el desarrollo en serie de Mc Laurin (con $t_0 = 0$) de la función exponencial $e^{-t}$, de valor:

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2n-t)\cdot(-t)^{2n}}{(1+2n)!} \quad ,$$

por lo que la ecuación integral dada adoptará, en definitiva, la configuración analítica siguiente:

$$K(t) = e^{-t} + 2t + \int_0^t e^{s-t} \cdot K(s)\cdot ds \quad \text{(ver lección 22 del curso)}$$

Se trata de una ecuación integral inhomogénea del tipo Volterra de 2ª especie o clase, con $\lambda = 1$, y se sabe que su solución exacta correspondiente es: $K(t) = 1 + 2t + t^2$, con $K_0 = 1$ mm, a = 2, b = 1, $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, de acuerdo con la expresión potencial al uso para este tipo de problemas hidráulicos (Franquet, 2019).

En efecto, substituyendo en la ecuación dada, podemos comprobar que:

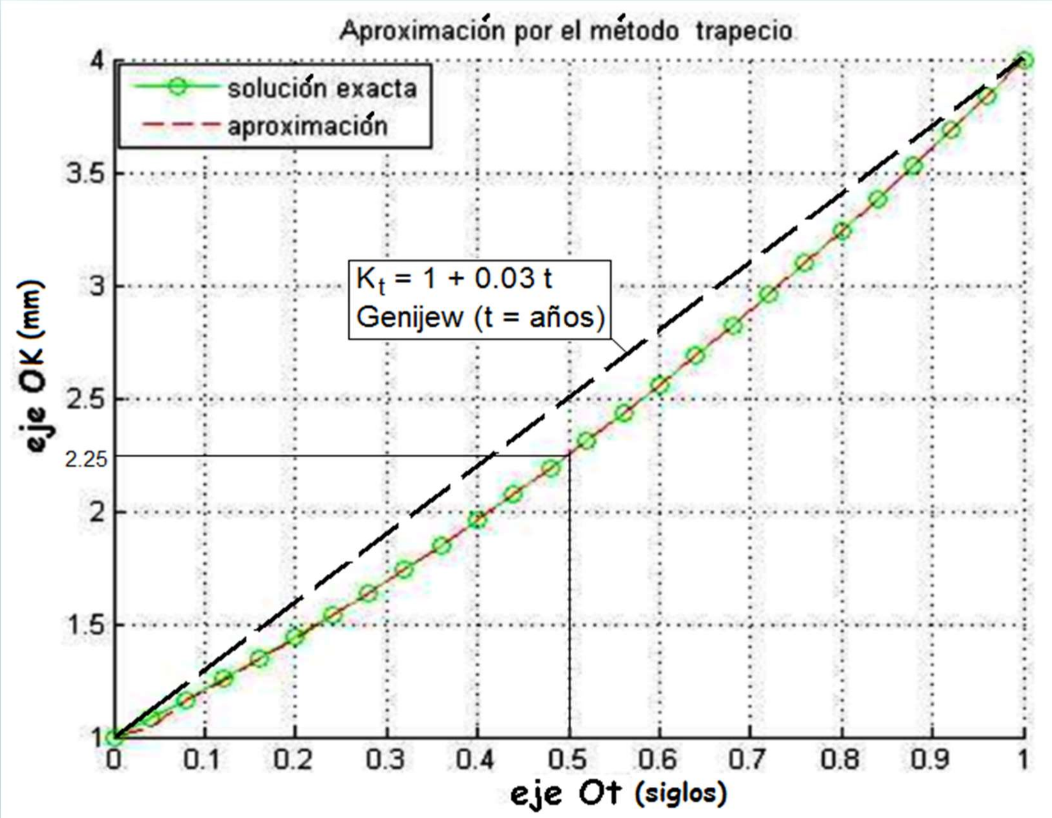
$$t^2 + 2t + 1 = e^{-t} + 2t + \frac{1}{e^t}\int_0^t e^s (s^2 + 2s + 1)\cdot ds =$$

$$= e^{-t} + 2t + \frac{1}{e^t}\left[e^t(t^2+1) - 1\right] = e^{-t} + 2t + t^2 + 1 - \frac{1}{e^t} = t^2 + 2t + 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Por otra parte, en el caso de esta función se presume, también en este caso, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si:

$t \to \infty$ también $K \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{K}{t} = \lim_{t\to+\infty} (t + 2 + 1/t) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OK (vertical, hacia arriba).

Y habiendo efectuado la discretización de esta EI, le corresponde la siguiente representación gráfica:




Trayectoria temporal de la rugosidad absoluta.

a la que corresponde la siguiente tabla para diferentes tamaños de paso *h*:

| t(i) | h=0.1 | h=0.05 | h=0.025 |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.10974540 | 0.00241087 | 0.00059481 |
| 0.2 | 0.00923953 | 0.00224578 | 0.00055354 |
| 0.3 | 0.00852535 | 0.00206734 | 0.00050893 |
| 0.4 | 0.00775601 | 0.00187514 | 0.00046089 |
| 0.5 | 0.00692984 | 0.00166876 | 0.00040931 |
| 0.6 | 0.00604518 | 0.00144779 | 0.00035408 |
| 0.7 | 0.00510034 | 0.00121181 | 0.00029510 |
| 0.8 | 0.00409365 | 0.00096040 | 0.00023226 |
| 0.9 | 0.00302343 | 0.00069315 | 0.00016547 |
| 1.0 | 0.00188802 | 0.00040963 | 0.00009461 |

De este modo, en el instante inicial o de la medición se tiene que $K_0$ = 1 mm y al cabo de 50 años de servicio de la tubería, se tendrá que:

$$K_{50} = 1 + 2·0.5 + 0.5^2 = 2.25 \text{ mm.}$$

En este caso, también se tiene que:

$$\int_0^{t_u} K(t)·dt = \int_0^{0.5} \left(t^2 + 2t + 1\right)·dt = \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + t\right]_0^{0.5} = 0.04 + 0.25 + 0.5 = 0.79 \ ;$$

y entonces, la "rugosidad temporal media" vendría dada por: $K_m = \frac{0.79}{0.5} = 1.58 \text{ mm.}$

Por otra parte, la "norma" de esta función de rugosidad será (Franquet, 2019):

$$\| K(t) \| = \sqrt{\int_0^{t_u} K^2(t)·dt} = \sqrt{\int_0^{0.5} \left(t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1\right)·dt} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{t^5}{5} + t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t\right]_0^{0.5}} = \sqrt{0.006 + 0.063 + 0.25 + 0.5 + 0.5} = 1.15.$$

La rugosidad media cuadrática, será, entonces, de: $K_{mc} = \sqrt{2} \times \| K(t) \| = \sqrt{2} \times 1.15 = 1.62 \text{ mm}$ ,

y el "índice de rugosidad temporal" será, entonces: $I_K = \frac{\int_0^{t_u} K(t)·dt}{K_0 \times t_u} \times 100 = \frac{0.79}{1 \times 0.5} \times 100 = 158\%$ .

El aumento de la rugosidad absoluta experimentado en 100 años es de:
$\Delta K_t = K_{100} - K_0 = 4.0 - 1.0 = 3.0$ mm, y supone, en comparación equivalente con la expresión lineal de Genijew, un índice de aumento anual $\alpha$ de:

$$K_{100} = K_0 + \alpha \cdot t = 1 + 0.03 \cdot 100 = 4.0 \text{ mm, o sea: } \alpha = 0.03 \text{ mm/año,}$$

razón por la que podemos clasificar el agua circulante por la instalación como del grupo I.

Este valor del índice $\alpha$ constituye también indirectamente un cierto índice medio de la calidad del agua. Al tratarse de una curva cóncava con respecto a las $K^+$, dicho índice resulta inferior a la media al principio del período analizado (100 años) y superior a la media al final del mismo. O sea, implica que la calidad del agua va empeorando progresivamente y, con ella, la rugosidad interior de la tubería en cuestión.

Con los valores más propios de esta tubería de fundición que nos ocupa ($k = 4$, $K_0 = 1$ mm y $t_u = 100$ años), su diámetro interior inicial sería, habiendo considerado un valor más ajustado del período de su vida útil (Franquet, 2019):

$$D_0 = (1 + 2k) \cdot (2K_0 + 2\alpha t_u) = 9(2 + 2 \cdot 0.03 \cdot 100) = 72 \text{ mm } (2\tfrac{1}{2}\text{''} = 75 \times 1.5 \text{ mm}),$$

lo que supone una rugosidad relativa o proporcional inicial (tubo nuevo), de:

$$\varepsilon_{r0} = \frac{K_0}{D_0} = \frac{1.00}{72} = 0.0139 \ .$$

## 5. CÁLCULO DE VARIACIONES Y EFICIENCIA VOLUMÉTRICA DE UNA INSTALACIÓN

Un problema que puede revestir singular interés es el siguiente: ¿cuál es la función de envejecimiento q(t) que encierra un trapecio mixtilíneo de mayor área (mayor $C_v$) entre todos los que tienen la misma longitud L?. Hay que tener en cuenta, al respecto, los siguientes conceptos: a) La función q(t) será siempre constante o decreciente, por su propia conceptualización, con lo que, a lo largo de toda la vida útil de la tubería, $q'(t) \leq 0$. b) El valor máximo del área del trapecio mixtilíneo relacionado, si no se produce descenso de la capacidad portante de la instalación, vendrá dado por $(q_0 \cdot t_u)$, según puede verse en la figura siguiente. c) Un índice adecuado, expresado en porcentaje, para evaluar la "eficiencia volumétrica" de la tubería vendrá dado por:

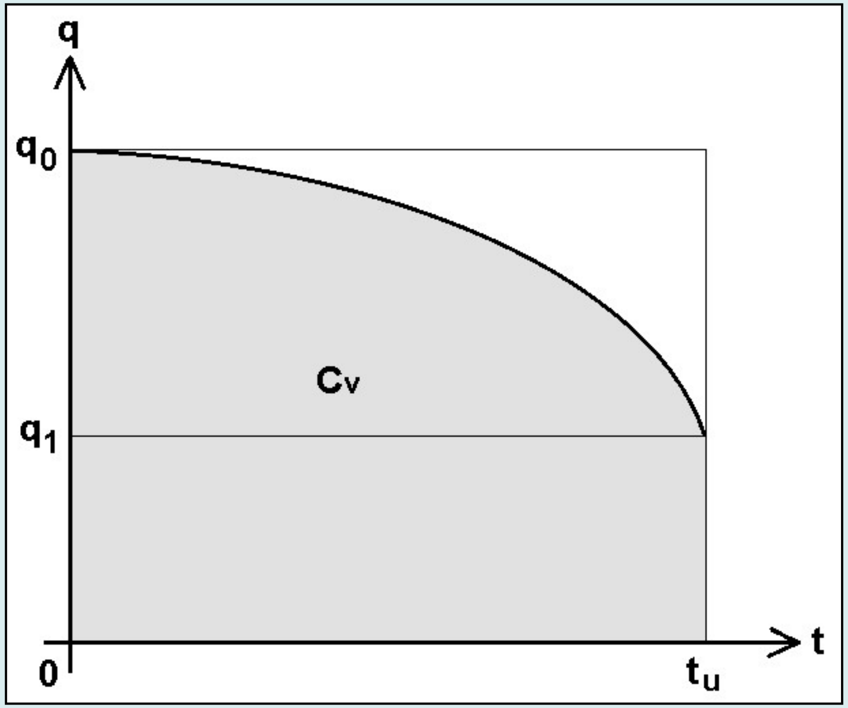
$$E_v(\%) = \frac{C_v}{q_0 \cdot t_u} \times 100 = \frac{100}{q_0 \cdot t_u} \int_0^{t_u} q(t) \cdot dt \quad ,$$

que tiene la ventaja de tratarse de una *medida relativa* del rendimiento hidráulico de la instalación frente a la *medida absoluta* de la capacidad volumétrica. Así pues, el conocimiento de la $E_v$ permite la comparación entre diversas tuberías aunque sean de dimensiones y prestaciones dispares.

También aquí el Cálculo de Variaciones podría resultar de aplicación, teniendo en cuenta que se trataría de hallar la función q(t) de longitud L dada para la cuál el área del trapecio mixtilíneo determinado por la función, el eje temporal y las ordenadas extremas será máxima. Se trataría, pues, de maximizar la $C_v$. El funcional a estudiar es:

$$C_v = A(q) = \int_0^{t_u} q(t) \cdot dt \,, \text{ con } \begin{cases} q(0) = q_0 \\ q(t_u) = q_1 \end{cases} ,$$

cuya representación gráfica es la siguiente:




que estaría sujeto a la condición isoperimétrica:

$$A(q) = \int_0^{t_n} \sqrt{1 + q'(t)^2} \cdot dt = L$$

La ecuación de Euler del funcional asociado:

$$A^{**}(q) = \int_0^{t_u} \left[ q(t) + \lambda \sqrt{1 + q'(t)^2} \right] dt$$ , viene dada por:

$$q + \lambda\sqrt{1 + q'^2} - \frac{\lambda q'^2}{\sqrt{1 + q'^2}} = C_1 \quad ,$$

donde hemos usado que el integrando no depende de *t*. Entonces:

$$q - C_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + q'^2}} \; .$$

Introduciendo, ahora, un parámetro $\theta$ tal que: $q' = \text{tg}\ \theta$, de la ecuación anterior obtenemos: $q = C_1 - \lambda \cdot \cos\theta$. Además, de: $\frac{dq}{dt} = \text{tg}\ \theta$, se deduce que: $dt = \frac{dq}{\text{tg}\,\theta} = \frac{\lambda \cdot \sin\theta \cdot d\theta}{\text{tg}\,\theta} = \lambda \cdot \cos\theta \cdot d\theta$ , y entonces: $t = \lambda \int \cos\theta \cdot d\theta = \lambda \cdot \sin\theta + C_2$.

Despejando $\theta$ de las expresiones para **q** y **t**, obtenemos: $(t - C_2)^2 + (q - C_1)^2 = \lambda^2$, que constituye un haz o familia de circunferencias de centro $(C_1, C_2)$ y diámetro $2\lambda$. En cualquier caso, la función buscada será: $q(t) = \sqrt{\lambda^2 - t^2 - C_2^2 + 2tC_2} + C_1$ .

Finalmente, las constantes $C_1$, $C_2$ y $\lambda$ se determinan a partir de las condiciones de frontera y de la condición isoperimétrica.

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 19

## CÁLCULO DE VARIACIONES (III)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

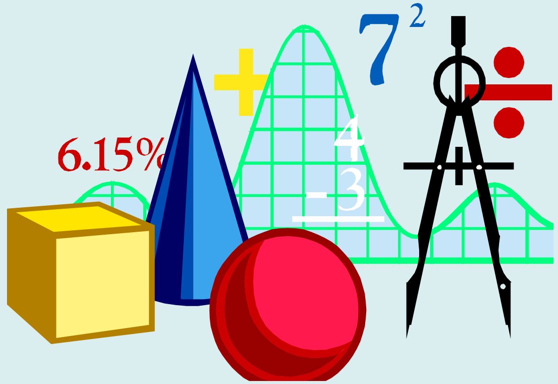
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





## 1. AMPLIACIÓN DEL CÁLCULO VARIACIONAL Y CONTROL ÓPTIMO

La economía dinámica permite los cambios en las variables económicas en el tiempo, incluyendo los sistemas dinámicos. El problema de encontrar soluciones óptimas para estos cambios se estudia en el cálculo variacional y en la teoría del control interno. Con anterioridad a la segunda guerra mundial (1939-1945), Frank P. Ramsey y Harold Hotelling ya usaron el cálculo de variaciones para ese fin.

Siguiendo el trabajo de Richard Bellman acerca de la programación dinámica y la traducción al inglés del 1962 del trabajo anterior de L. Pontryagin *et alt*, la teoría del control óptimo fue usada más extensamente en la economía para resolver los problemas dinámicos, especialmente en aquellos relacionados con el equilibrio del crecimiento económico y la estabilidad de los sistemas económicos del cual, un ejemplo de los libros de texto, es el consumo óptimo y el ahorro: una diferencia crucial entre los modelos deterministas y estocásticos. Otras aplicaciones a la teoría del control óptimo incluyen las presentadas en las finanzas, los inventarios y la producción.

En nuestro anterior libro titulado "Aplicación a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes", citado en la bibliografía, se trataba la aplicación del cálculo de variaciones a las funciones económicas de una sola variable. Ello constituye, sin duda, una simplificación de la problemática real, habida cuenta de que suelen ser varias –a menudo numerosas- las variables explicativas que aparecen en la casuística económica, tanto micro como macroeconómica.

Por ello hemos creído conveniente realizar una breve exposición teórica dando idea de la determinación de funciones extremales de varias variables independientes, que hacen estacionarios los valores de integrales múltiples, problema éste de aplicación frecuente en la técnica matemática del equilibrio elástico, tanto en la Economía como también en la Ingeniería.

Si $\Omega$ es una región limitada en el plano xOy por una curva cerrada C, y u (x, y) es una función real definida sobre $\Omega$ que toma valores prefijados sobre el contorno C, siendo por lo demás arbitraria (excepto las hipótesis conocidas de derivabilidad), podemos pensar que tal función define una superficie variable en el espacio con su contorno fijo.

## 2. GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA CON FRONTERAS FIJAS

Analizaremos, ahora, el caso de varias variables explicativas de un fenómeno económico, concretamente de dos, por su mayor simplicidad en la notación. El caso n-dimensional no es más que una extensión o generalización directa del mismo. Consideremos un funcional de la forma:

$$A(u)=\iint_{\Omega} L(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\cdot dy \quad ,$$

y nos planteamos el problema de hallar una función *u* estacionaria que asigne un valor estacionario a esta integral doble, con u: $\Omega \to \Re$, siendo $\Omega \subset \Re^2$. Supondremos, de nuevo, que la función *u* es un mínimo de A, con $u \in C^1(\Omega)$ tal que $u(x,y) = u_D(x,y)$ en $\partial\Omega$. Definiendo, para , por lo que $\Omega$ es un dominio finito del plano. Entonces:

$$F(t)=A(u+tv)=\iint_{\Omega} L(x,y,u+tv,u_x+tv_x,u_y+tv_y)\,dxdy \text{ , obtenemos:}$$

$$F'(t)=\iint_{\Omega}\Big(L_u(x,y,u+tv,u_x+tv_x,u_y,+tv_y)v+L_{u_x}(x,y,u+tv,u_x+tv_x,u_y+tv_y)v_x+$$
$$+L_{u_y}(x,y,u+tv,u_x+tv_x,u_y+tv_y)v_y\Big)dxdy \quad ,$$

de modo que en t = 0 se tiene:

$$0=\delta_u J(v)=F'(0)=\iint_{\Omega}\Big(L_u(x,y,u,u_x,u_y)v+L_{u_x}(x,y,u,u_x,u_y)v_x+$$
$$+L_{u_x}(x,y,u_x,u_y)v_y\Big)dxdy\,.$$

Usando el teorema de la divergencia deducimos que:

$$\iint_\Omega \left( L_u(x,y,u,u_x,u_y) - \frac{\partial}{\partial x} L_{u_x}(x,y,u,u_x,u_y) - \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y}(x,y,u_x,u_y) \right) v\,dx\,dy = 0,$$

para toda $v \in C_0^1(\Omega)$ . Finalmente, una extensión a dos dimensiones nos permite obtener la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson correspondiente para una extremal, a saber:

$$L_u(x,y,u,u_x,u_y) - \frac{\partial}{\partial x} L_{u_x}(x,y,u,u_x,u_y) - \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y}(x,y,u_x,u_y) = 0,$$

que es una EDP de segundo orden a la que tiene que satisfacer la función *u*, y que resulta análoga a la de Euler-Lagrange-Poisson en el caso de la integral simple y de una sola variable independiente. Desarrollándola, resulta:

$L_{u_x^2} \cdot r + 2L_{u_x u_y} \cdot s + L_{u_y^2} \cdot t + L_{u_x u} \cdot u_x + L_{u_y \cdot u} \cdot u_y + L_{u_x \cdot x} + L_{u_y \cdot y} - L_u = 0$ , que es una ecuación lineal en las derivadas segundas r, s, y t pero, en general, no en las primeras. Se trata de una ecuación del tipo Monge, llamada, también, "quasi-lineal". Puede integrarse esta ecuación buscando una "integral primera o intermedia" de ella, es decir, una ecuación de primer orden como la que sigue: $\varphi(x,y,z,u_x,u_y) = 0$.

Para la integral doble: $A(u) = \iint_\Omega L(x,y,u,u_x,u_y)\,dx \cdot dy$ , las condiciones naturales sobre el contorno son:

$$L'_{u'_x} \frac{dy}{ds} - L'_{u'_y} \frac{dx}{ds} = 0$$

, siendo *s* la longitud del referido contorno.

El problema, en fin, puede generalizarse al espacio afín tridimensional euclídeo, con u(x,y,z): $\Omega \to \Re$, siendo $\Omega \subset \Re^3$. Entonces, con tres variables, se tiene la integral triple:

$$A(u) = \iiint_\Omega L(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

o bien extendida al espacio n-dimensional; con $\Omega \subset \Re^n$, $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y:

$$A(u) = \int \overset{n}{\cup} \ldots \int_\Omega L(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}) \cdot \prod_{i=1}^{n} \cdot dx_i \quad .$$

Ejemplo: Sería el caso de optimizar una función económica E = f(A), siendo A el funcional dado por la expresión: $A(u)=\iint\left(u_x'^2+u_y'^2\right)\cdot dx\cdot dy$

Habría, pues, que determinar los extremales de A, teniendo en cuenta que: $\varphi=u_x'^2+u_y'^2$.
Entonces:

$$\varphi_u'=0\ ;\ \varphi_{u_x'}'=2\cdot u_x'\ ;\ \varphi_{u_y'}'=2\cdot u_y'\text{; de donde: }\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{u_x'}'=2\cdot u_{x^2}''\ ;\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi_{u_y'}'=2\cdot u_{y^2}'',$$

y por tanto, la condición necesaria buscada será:

$$\varphi_u'-\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{u_x'}'-\frac{\partial}{\partial y}\varphi_{u_y'}'=0\ ;\ \text{ esto es: }-2u_{x^2}''-2u_{y^2}''=0\ ;\ \text{ o también: }\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\text{ , que resulta}$$

ser la conocida ecuación diferencial lineal de Laplace, en derivadas parciales, de 2º orden y homogénea de coeficientes constantes.

El discriminantes ofrece: $(b^2 - 4ac) = 0 - 4\cdot1\cdot1 = -4 < 0$, luego se trata de un problema elíptico bidimensional que admite como solución a cualquier función u(x,y) armónica. Una vez hallada u, se resuelve la integral A(u) y se obtiene el valor de la función económica
E = f(A).

Por lo que se refiere a la ecuación de Laplace, se obtienen las soluciones:
$u(x,y) = (A_1\cdot e^{Kx} + B_1 \cdot e^{-Kx}) (A_2 \cdot \cos Ky + B_2 \cdot \sin Ky)$, con $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ y K como constantes arbitrarias, y también:

$$u(x,y)=\left(A_1'\cdot\cos K'x+B_1'\cdot\sin K'x\right)\left(A_2'\cdot e^{K'y}+B_2'e^{-K'y}\right)$$

considerando también a $A_1',B_1',A_2',B_2'$ y $K'$ como constantes arbitrarias.

## 3. CONDICIONES SUFICIENTES DE EXTREMO

### 3.1. Consideraciones previas

En el capítulo 8 de nuestro libro titulado "Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes", se realiza una aplicación a las funciones económicas del cálculo de variaciones, desarrollándose el tema tanto desde el punto de vista teórico como mediante la resolución de numerosos ejercicios. Convendría, ahora, ampliar lo anteriormente expuesto especificando los criterios teóricos existentes para delimitar las condiciones de suficiencia de extremos "débiles" y "fuertes".

En los epígrafes siguientes vamos a indicar las condiciones generales de suficiencia para que una cierta función sea extremal de una funcional dada. Pero antes resulta preciso fijar una noción, de gran importancia, que se conoce con el nombre de *campo de extremales*.

### 3.2. Campo de extremales

Si sucede que por cada punto de una cierta región D del plano pasa una y sólo una curva de la familia y = y(x,C), se dice que esta familia forma un "campo propio" en D. El coeficiente angular de la tangente p(x,y) a la curva de la familia considerada en (x,y) se llama inclinación del campo en el punto (x,y).

Si todas las curvas de la familia y = y(x,C) pasan por un cierto punto $(x_0, y_0)$ entonces es claro que si $(x_0, y_0) \in D$, la familia no forma un campo propio. Sin embargo, si la familia y = y(x,C) cubre una cierta región D y sólo se cortan -en su interior- en el centro del haz, se dice que las curvas de dicha familia forman un "campo central" en D.

Si un campo central o propio está formado por una familia de extremales, se dice que es un "campo de extremales".

Sea y(x) una extremal de la funcional:

$$F[y(x)] = \int_a^b \varphi(x, y, y')\,dx \ ,$$

con puntos frontera A(a,c) y B(b,d) fijos. Por definición, se dice que la extremal y = y(x) está incluida en un campo de extremales, si existe una familia de extremales y = y(x,C) que forma un campo, contiene a la extremal y = y(x), esto es y = y(x) se obtiene dando un valor particular a C, y dicha extremal no pertenece a la frontera de D, donde y = y(x,C) formaba un campo.

### 3.3. Condición de Jacobi

Dada la familia de curvas f(x,y,C) = 0, se denomina curva C-discriminante de dicha familia a la curva que se obtiene eliminando el parámetro C, entre las dos ecuaciones:

$$f(x,y,C) = 0 \ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial C} = 0 \ .$$

La curva C-discriminante incluye, en particular, la envolvente de la familia y los lugares geométricos de los puntos múltiples de dichas familias. Si f(x,y,C) = 0 es la ecuación de un haz de curvas, su centro pertenece también a la curva C-discriminante. Si el arco AB de la extremal y = y(x) no tiene puntos comunes distintos de A, con la curva C-discriminante del haz de extremales que incluye a la dada, las extremales del haz suficientemente próximas a AB, no se cortan y forman por tanto un campo central, que incluye el arco AB en un cierto entorno; pero si el arco AB de y = y(x) tiene en común con la curva C-discriminante otro punto $A^* \neq A$, entonces, las curvas del haz próximas a la extremal y = y(x) pueden cortarse entre sí en las proximidades de $A^*$ y, por tanto, las curvas del haz no forman campo.

El resultado anterior, que se conoce con el nombre de "condición de Jacobi" se puede resumir como sigue:

“Para construir un campo central de extremales con centro en el punto A y que contenga el arco AB de la extremal, es suficiente que el punto A*, conjugado de A, no pertenezca al arco AB”.

Para obtener la expresión analítica de dicha condición, basta observar que y = y(x,C) son soluciones de la ecuación de Euler, luego:

$$\varphi'_y\left[x, y(x,C), y'_x(x,C)\right] - \frac{d}{dx}\varphi'_{y'}\left[x, y(x,C), y'_x(x,C)\right] = 0 \ .$$

Derivando esta igualdad con respecto a C y haciendo: $\frac{\partial y(x,C)}{\partial C} = u$ , se obtiene, después de agrupar los términos convenientemente:

$$\left(\varphi''_{y^2} - \frac{d}{dx}\varphi''_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}\left(\varphi''_{y'^2} \cdot u'\right) = 0 \ .$$

Si la solución *u* de esta ecuación que se anula en el centro del haz, para x = a, se anula en algún otro punto de [a,b], el conjugado de A pertenece al arco AB.

Por el contrario, si existe una solución de la ecuación que se anula para x = a y no se anula en ningún otro punto de [a,b], se cumple la condición de Jacobi y se puede incluir el arco AB de la extremal en un campo central de extremales, con centro en A. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1:

Se trata de formar la ecuación de Jacobi para la funcional: $F[y(x)] = \int_0^{\frac{n}{2}} \left(y'^2 - y^2\right)dx$ , y verificar si se cumple la condición de Jacobi para la extremal que pasa por los puntos $A(0,0)$ y $B\left(\frac{\pi}{2},0\right)$. A partir del funcional F dado, optimizar la función económica que representa los costes variables, expresados en millones de € , de un establecimiento comercial, dada por la expresión:
$E_c = 4 – 3F^2 – e^{2F}$ .

*Solución*:

Como $\varphi$ = y'$^2$ – y$^2$ , se tendrá:

$$\varphi'_y = -2y \;;\quad \varphi'_{y'} = 2y';\; \varphi''_{y^2} = -2 \;;\quad \varphi''_{yy'} = 0 \;;\quad \varphi''_{y'^2} = 2 \;.$$

Luego la ecuación de Jacobi adoptará la forma: $-2u - \frac{d}{dx}(2u') = 0$

de donde u'' + u = 0 , que es una EDO homogénea cuya solución general será:
u = $C_1$·cos x + $C_2$·sin x, y como u(0) = 0, 0 = $C_1$ y las curvas del haz son la solución particular: u = $C_2$·sin x, que no se anulan en ningún punto distinto de la recta x = 0 (eje de ordenadas) y, por lo tanto, se cumple la condición de Jacobi.

Por otra parte, las condiciones de contorno dadas son: y(0) = 0 , y($\pi$/2) = 0.

El extremo sólo se puede alcanzar en y = 0. Calculemos , para valores cualesquiera de y'. Se puede comprobar que en esta recta (eje de abscisas) existe un mínimo débil.

Como sea que: y = 0 , y' = 0 , tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

F(y) = $\int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\cdot dx = 0$ , y la función económica en cuestión valdrá:

$$[OPT]\ E_c = 4 - 3F^2 - e^{2F} = 4 - 1 = 3 \;,$$

lo que supone unos costes variables del comercio antedicho de:

CV = 3.000.000 € , para el ejercicio económico de que se trate.

### 3.4. La función de Weierstrass

Sea ahora la funcional: $F[y(x)] = \int_a^b \varphi(x, y, y')\,dx$,

con y(a) = c, y(b) = d y supongamos que cumple la condición de Jacobi y por tanto la extremal C que pasa por (a, c), (b, d) se puede incluir en un campo con inclinación p(x, y).

Se puede probar que el $\Delta F$, que experimenta la funcional al pasar de la extremal C a otra curva próxima, se puede escribir así:

$$\Delta F = \int \left[\varphi(x, y, y') - \varphi(x, y, p) - (y' - p)\varphi'_p(x, y, p)\right] dx \ .$$

La función de Weierstrass es la función subintegral (integrando) y se representa del siguiente modo:

$$E\,(x, y, p, y') = \varphi(x, y, y') - \varphi(x, y, p) - (y' - p)\varphi'_p(x, y, p) \ .$$

Es evidente que una condición suficiente para que la funcional F tenga un mínimo es que $E \geq 0$ y para que tenga un máximo, deberá cumplirse análogamente $E \leq 0$. Si el extremo es débil bastará que $E \geq 0$ (o $E \leq 0$ en el caso de máximo) se cumpla para valores de *x* e *y* próximos a la extremal investigada y para valores de y’ cercanos a p(x, y); para que exista un extremo fuerte se deben cumplir análogas condiciones y además cumplirse para y’ cualquiera. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2:

Sea la funcional: $F[y(x)] = \int_0^1 y'^3 dx$ , con las condiciones de frontera: y(0) = 0, y(1) = 1. Como $\varphi = y'^3$, sólo depende de y’ (Franquet, 2014) (ver nuestra monografía, cap. 8a), resultará que, por aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, resulta: $\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 3y'^2 ; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} = 6y' \Rightarrow y'' = 0$ , y la ecuación característica de la homogénea: $\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, con lo que la solución general de la EDO será:



$$y = C_1 x + C_2 \ .$$

Aplicando ahora las condiciones de frontera dadas, veamos que:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0 \\ y(1) = C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \text{, entonces } C_1 = 1.$$

Resulta entonces la recta: y = x (bisectriz del primer cuadrante del círculo).

Las extremales, pues, son las rectas de ecuación: $y = C_1x + C_2$; el extremo sólo puede alcanzarse sobre la recta de ecuación: y = x. El haz de rectas $y = C_1x$, forma un campo central, que evidentemente incluye a la extremal, cumpliéndose la condición de Jacobi; la función E, toma la forma:

$$E = y'^3 - p^3 - (y' - p) \cdot 3p^2 = (y' - p)^2 (y' + 2p).$$

Si y' toma valores próximos a p = 1, la función E es positiva, luego se cumplen las condiciones de mínimo débil, un mínimo fuerte, no existe, puesto que si y' toma valores cualesquiera (y' + 2p) puede tener cualquier signo.

Si ahora, por ejemplo, a partir del funcional dado, se pretende optimizar la función económica que representa los costes totales de una empresa determinada (expresados en millones de €) y viene dada por la expresión: $E_c = 6 + 3 \cdot e^F$, se tendrá que (con y = x , y' = 1):

$$F(y) = \int_0^1 y'^3 \cdot dx = 1 \text{ , y la función económica en cuestión valdrá:}$$

$$[OPT]\ E_c = 6 + 3 \cdot e^F = 14'154845 \equiv 14.154.845 \text{ € (CT)}.$$

### 3.5. Condición de Legendre

Si en la función de Weierstrass se sustituye $\varphi(x,y,y')$, por su desarrollo mediante la fórmula de Taylor, se puede escribir la igualdad aproximada siguiente:

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y' - p)^2}{2!} \varphi''_{y'^2}(x, y, q),$$



siendo q un número intermedio entre y' y p.

Veamos como ejemplo de ello la misma funcional del ejemplo anterior. Se tendrá que: $\varphi = y'^3$ ; $\varphi'_{y'} = 3y'^2$ ; $\varphi''_{y'^2} = 6y'$ .

Como $\varphi''_{y'^2}$ , para valores de y' próximos a p = 1, se tiene $\varphi''_{y'^2} > 0$, luego existe mínimo débil; para y' cualquiera no se puede afirmar nada, luego no existe mínimo fuerte.

A continuación, vamos a resumir en los siguientes cuadros las condiciones de extremo débil y de extremo fuerte, indicando las distintas formas de combinar las condiciones de suficiencia:

## EXTREMO DÉBIL

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1ª | $\varphi'_Y - \frac{d}{dx}\varphi'_{y'} = 0$ | | |
| 2ª | Condición de Jacobi | Condición de Jacobi | Existe un campo de extremales que incluye a la dada |
| 3ª | Se estudia $\varphi''_{y'^2}$ en la extremal dada. Si > 0 mínimo, si < 0 máximo | Se estudia E para los puntos próximos a la extremal y para y' próxima a p(x,y). Si $E \geq 0$ mínimo, si $E \leq 0$ máximo | Se estudia E para los puntos próximos a la extremal y para y' próxima a p(x,y). Si $E \geq 0$ mínimo, si $E \leq 0$ máximo |

## EXTREMO FUERTE

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1ª | $\varphi'_Y - \frac{d}{dx}\varphi'_{y'} = 0$ | | |
| 2ª | Condición de Jacobi | Condición de Jacobi | Existe un campo de extremales que incluye a la dada |
| 3ª | Se estudia $\varphi''_{y'^2}$ para los puntos (x,y) próximos a los puntos de la extremal y para valores cualesquiera de y’. Si $\geq 0$ mínimo, si $\leq 0$ máximo | Se estudia E para los puntos próximos a la extremal y para y’ cualquiera. Si $E \geq 0$ mínimo, si $E \leq 0$ máximo | Se estudia E para los puntos próximos a la extremal y para y’ cualquiera. Si $E \geq 0$ mínimo, si $E \leq 0$ máximo |

## 4. MÉTODOS DIRECTOS EN LOS PROBLEMAS DE CÁLCULO DE VARIACIONES

La idea directriz de los llamados “métodos directos” es considerar los problemas variacionales como el límite de un problema sobre el extremo de una función con un número finito de variables. Sólo nos detendremos a exponer someramente el llamado de “diferencias finitas”, aunque existen otros, como el de Ritz o el de Kantorovich, mucho más potentes, pero que rebasan el carácter práctico de este curso.

Sea la funcional: $F[y(x)] = \int_a^b \varphi(x, y, y')dx$ . Dividamos el segmento [a,b] en n partes iguales, mediante las abscisas: $a = x_0$ , $x_0 + \Delta x$ , $x_0 + 2\Delta x$ , …$x_0 +(n - 1)\Delta x$ , $x_n = b$ , siendo:

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ , y así, la funcional se transforma en una función de las (n-1) variables $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$.

Eligiendo las ordenadas $y_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots n-1$ que hagan que la función $\Psi$ tenga extremo, para lo cual bastará:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} = 0, \ldots \frac{\partial \Psi}{\partial y_{n-1}} = 0 \text{ ,}$$

y haciendo después $n \to \infty$, se obtiene la solución del problema planteado.

## 5. EJERCICIOS DE APLICACIÓN

### Ejercicio 1º

Hallar la condición de transversalidad para la funcional:$F[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$ , con la condición: $y(0) = I_1 + I_2$, siendo I la integral: $I = \iint_\sigma \left( xz \cos\alpha + yz\cos\beta - z^2 \cdot \cos\gamma \right) d\sigma$ , tal que: a) si se extiende al casquete superior, en su cara externa, de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ limitado por la curva del contorno $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 1 \end{array}\right\}$ (caso $I_1$), b) En este caso, se extiende sobre el casquete del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$, con el mismo contorno (caso $I_2$).

*Solución*:

a) Sobre el casquete de esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

$$\cos\alpha = \frac{x}{R} \text{ ; } \cos\beta = \frac{y}{R} \text{ ; } \cos\gamma = \frac{z}{R} \text{ ; } d\sigma = \frac{dx \cdot dy}{|\cos\gamma|} = \frac{R \cdot dx \cdot dy}{z} \text{ .}$$

Obsérvese que $\gamma$ es siempre positivo ya que z es siempre positiva (por eso en $|\cos\gamma|$ tomamos $\left.\frac{z}{R}\right)$.

$\cos\alpha$ y $\cos\beta$ cambian de signo cuando lo hacen *x* e *y,* respectivamente.

$$I_1=\iint_\sigma\left(xz\frac{x}{R}+yz\frac{y}{R}-z^2\frac{z}{R}-z^2\frac{z}{R}\right)\frac{R\,dx\,dy}{z}=\iint_\sigma\left(x^2+y^2-z^2\right)dx\,dy=$$

$$=\iint_R\left(x^2+y^2-4+x^2+y^2\right)dx\,dy=\iint_R\left(2x^2+2y^2-4\right)dx\,dy.$$

Pasando a coordenadas polares: $\left.\begin{matrix}x=\rho\cdot\cos\theta\\ y=\rho\cdot\sin\theta\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial(xy)}{\partial(\rho\theta)}=\rho$, entonces:

$$I_1=\iint\left(2\rho^2\cos^2\theta+2\rho^2\sin^2\theta-4\right)\rho d\rho d\rho=\iint\left(2\rho^2-4\right)\rho\cdot d\rho\cdot d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left(2\rho^3-4\rho\right)d\rho=2\pi\left[\frac{2\rho^4}{4}-2\rho^2\right]_o^{\sqrt{3}}=2\pi\left[\frac{9}{2}-6\right]=-\frac{2\pi 3}{2}=-3\pi\ .$$

b) Sobre el casquete del paraboloide: $x^2 + y^2 = 3z$. En este caso:

$$\left\{\begin{aligned}
\cos\alpha&=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}=\frac{2x}{\pm\sqrt{4x^2+4y^2+9}}\\
\cos\beta&=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}=\frac{2y}{\pm\sqrt{4x^2+4y^2+9}}\\
\cos\gamma&=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}=\frac{-3}{\pm\sqrt{4x^2+4y^2+9}}
\end{aligned}\right.$$

Obsérvese que cos $\alpha$ y cos $\beta$ son positivos cuando *x* e *y* son positivos y negativos cuando x < 0 e y < 0.

El signo nos lo da, pues, la *x* y la *y*, por eso tomamos el signo + de la raíz. El cos $\gamma$ es siempre negativo, por eso tomamos el valor + de la raíz.

Entonces: $d\sigma = \frac{dx \cdot dy}{|\cos\gamma|} = \frac{dx \cdot dy}{\frac{-3}{-\sqrt{4x^2+4y^2+9}}} = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+9}}{3} dx \cdot dy$ ,

ya que siempre $d\sigma$ es positivo. Entonces:

$$I_2 = \iint_\sigma \left(xz\cos\alpha + yz\cos\beta - z^2\cos\gamma\right)d\sigma = \iint_\sigma \left(xz\,2x + yz\,2y + 3z^2\right)\frac{dx\,dy}{3} =$$

$$= \iint_R \left[\frac{x^2+y^2}{3}\left(2x^2+2y^2+x^2+y^2\right)\right]\frac{dx\,dy}{3} = \iint_R \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{3}dx\,dy = \frac{1}{3}\iint_R \left(x^2+y^2\right)^2 dx\,dy.$$

Pasando, en fin, a coordenadas polares, se alcanza la solución:

$$I_2 = \frac{1}{3}\iint \rho^4 \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^5 d\rho = \frac{1}{3}2\pi\left.\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\cdot 27}{3\cdot 6} = 3\pi\ .$$

El resultado es el mismo salvo la diferencia de signo, pero ello es debido a que al tomar las caras exteriores las normales son opuestas (sobre la esfera es hacia arriba y sobre el paraboloide es hacia abajo).

Esta igualdad de resultados absolutos nos dice que la integral de superficie no depende de la superficie a la que se extienda, sino que sólo depende del contorno.

Por último, se tendrá que la condición expresada en el enunciado del problema quedará establecida así:

$$y(0) = I_1 + I_2 = -3\pi + 3\pi = 0\ .$$

Como resulta que: $\varphi + (\lambda' - y')\varphi'_{y'} = 0$, se tendrá:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} + (\lambda' - y')\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = 0$$ , de donde: $1 + y'^2 + (\lambda' - y')y' = 0$,

o bien: $1 + \lambda' y' = 0$, que nos dice que la condición de transversalidad se reduce a la de ortogonalidad.

## Ejercicio 2º

Se define la familia de sinusoides: $y = C\cdot\sin x$. Decir si forma campo propio o campo central en las regiones siguientes:

a) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

c) $0 \leq x \leq 2\pi$

*Solución*:

En el caso a) forma un campo central; en el b) es un campo propio; en el c) el referido haz, no forma campo.

## Ejercicio 3º

a) ¿Cumple la condición de Jacobi la extremal de la funcional siguiente:

$$F[y(x)] = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + x^2\right)dx$$ , que pasa por los puntos A(0,0) y B(1,0) ?

b) Hallar el valor de la susodicha funcional.

*Solución*:

a) La ecuación de Jacobi, adopta la forma homogénea: $u'' - u = 0$, cuya ecuación característica es: $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = 1$ ; $\lambda_2 = -1$.

Así pues, se trata de una ecuación diferencial ordinaria que tiene como solución general:
$u = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Como sea que: $u(0) = 0$, se tendrá: $0 = C_1 + C_2$ y $C_2 = - C_1$,

y las curvas del haz adoptan la forma: $u = C_1(e^x - e^{-x})$, solución particular que sólo se anula en el punto $x = 0$ y, por lo tanto, se cumple la condición de Jacobi.

b) Por otra parte, en la búsqueda de la curva extremal de F(y), tendremos que: $\varphi = y'^2 + y^2 + x^2$ , con lo que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2y';\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = 2y'',$$

y la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson será, en este caso: $2y - 2y'' = 0$ , o sea: $y'' - y = 0$ ,

cuya ecuación característica es: $\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, y resulta la solución general de la EDO en cuestión: $y = C_1\cdot e^x + C_2\cdot e^{-x}$ , que con las condiciones iniciales prefijadas:

$y(0) = 0$ ; $y(1) = 0$ , se tendrá que:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1e + \dfrac{C_2}{e} \end{cases}$$

de donde: $C_1(e^2 - 1) = 0$ , y entonces: $C_1 = C_2 = 0$ , con lo que la curva extremal, que verifica las condiciones de extremo, sólo puede alcanzarse en la integral particular: $y = 0$ (eje de abscisas).

Entonces, la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$$F(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + x^2)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ .$$

## Ejercicio 4º

Mediante el método de las diferencias finitas obtener la ecuación de Euler para la funcional:

$$F[y(x)] = \int_a^b \varphi(x, y, y')\,dx \quad .$$

*Solución*:

La función $\Psi$, adoptará la y forma: $\Psi(y_1, y_2, \ldots y_{n\text{-}1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$ .

Calculemos ahora: $\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0$ . Esto es:

$$\varphi'_y\left(x_i, y_i\, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\Delta x + \varphi'_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right) + \varphi'_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = 0$$

, que también se puede escribir así: $\varphi'_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\varphi'_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \varphi'_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0$

, o bien: $\varphi'_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta \varphi'_{y'}}{\Delta x} = 0$ , que en el límite, cuando $\Delta x \to 0$, constituye la conocida

ecuación diferencial de Euler-Lagrange-Poisson: $\varphi'_y - \frac{d}{dx}\varphi'_{y'} = 0$ .

UNED TORTOSA

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 20

## FUNCIONES PERIÓDICAS Y ANÁLISIS ARMÓNICO (I)

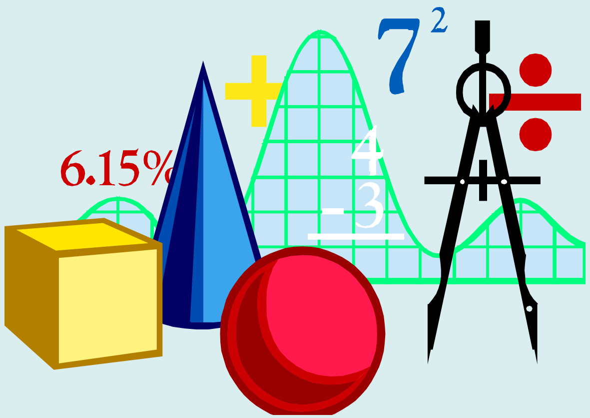
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. FUNCIONES PERIÓDICAS

En diversos problemas se presenta el estudio de los llamados “fenómenos periódicos”, esto es, aquellos fenómenos cuya cuantificación produce series de valores que se repiten a intervalos iguales de tiempo, lo que sucede frecuentemente en Economía o en Ingeniería. La representación de estos fenómenos viene definida por las denominadas *funciones periódicas* que son aquellas funciones que para todo valor de x, verifican:

$$f(x + p) = f(x),$$

donde *p* es una constante, llamada *período*. Es evidente, de la definición anterior, que:

$$f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = \ldots = f(x + np),\ \forall x,$$

o sea, todo múltiplo de *p* es también un período. El menor número positivo que sea período de una función, recibe el nombre de *período propio o fundamental* de la referida función y cuando no se indique lo contrario, será al que denominaremos simplemente “período”.

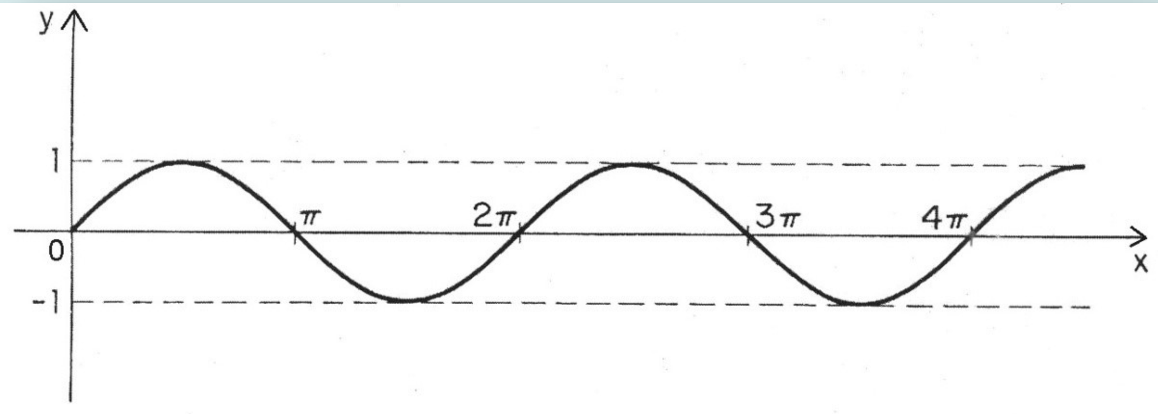
En nuestro libro titulado “Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes”, citado en la bibliografía (Franquet, 2014), aparecen diversos ejemplos de este tipo de funciones periódicas o trigonométricas.

La función y = sin x es tal que cumple (véase el ejercicio 19, pág. 492 del texto citado):

$$\sin x = \sin (x + 2\pi) = \sin (x + 4\pi) = \ldots$$

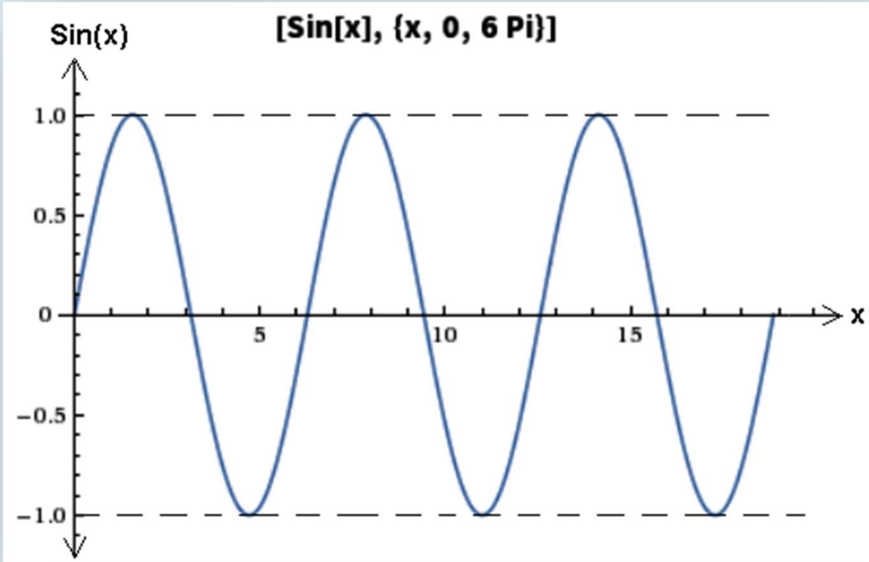
es una función que admite como períodos a $2\pi$, $4\pi$, $6\pi$.

El valor $2\pi = 6'2832$, es el “período propio” o simplemente “período”.




Función y = sin x (I).

Que también puede representarse así:




Función y = sin x (II).

También es de período $2\pi$ la función y = cos x (ejercicio 23, pág. 428 del texto citado); por tanto, toda función de la forma:

$$a\cdot\cos x + b\cdot\sin x,$$

también será periódica, de período $2\pi$. Otras funciones que tienen como período $2\pi$ son, entre otras, las siguientes:

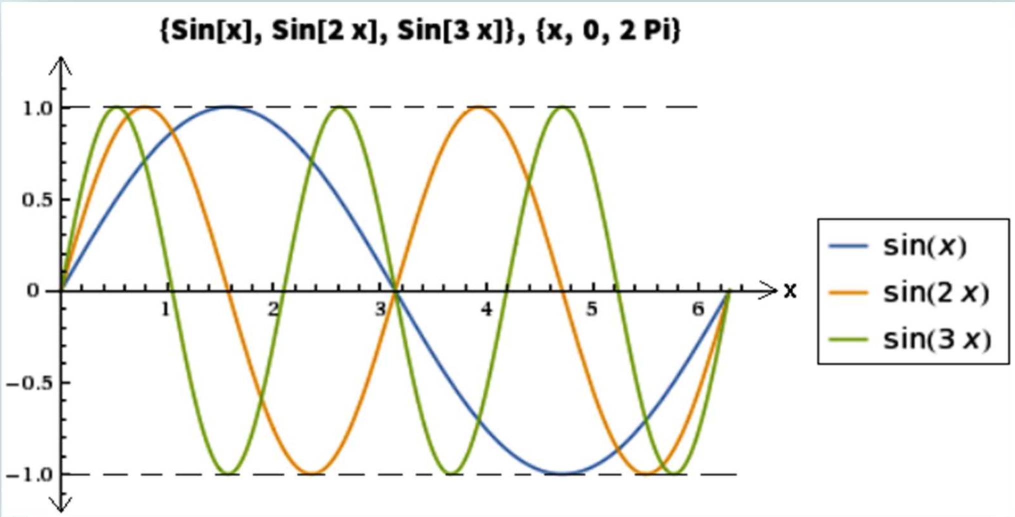
- $\cos t - 8\sin t$ y $2\cos t - 3\sin t$
- $\sin x\left(1-\frac{x}{2}\right)$
- $\frac{1}{4}-\frac{\cos t}{3}+\frac{25}{12}\times\cos 2t$

La función y = sin nx, también es periódica; su período p, se puede calcular como sigue:

$$\sin nx = \sin n(x + p),$$

y como el seno tiene como período $2\pi$, $nx + 2\pi = nx + np$, de donde: $p=\frac{2\pi}{n}$.

Las representaciones gráficas correspondientes para $n\in(1,2,3)$, serán:




Funciones y = sin x, sin 2x, sin 3x.

Análogamente, toda función de la forma b·sin (nx + k) o a·cos (nx + k), es también –como fácilmente se comprueba- una función periódica de período $2\pi/n$. Todas las funciones indicadas reciben el nombre genérico de *armónicos*. Es muy importante observar que todo armónico de período *p*, se puede, mediante un adecuado cambio variable, transformar en un armónico de período $2\pi$ y viceversa. En efecto, sea la función: y = sin nx de período $p = \frac{2\pi}{n}$, de donde: $n = \frac{2\pi}{p}$. Haciendo nx = t, resulta: $\frac{2\pi x}{p} = t$, o bien: $x = \frac{pt}{2\pi}$, que transforma sin nx en sin t, de período, evidentemente $2\pi$.

En lo que sigue, para mayor sencillez de las deducciones y salvo indicación expresa en sentido contrario, supondremos que todas las funciones tienen período $2\pi$, lo cual siempre se puede conseguir, teniendo en cuenta el párrafo anterior. Algunas funciones trigonométricas en que se cumple que $p = \pi$, como las siguientes:

- sin 2x
- sin (2x) – 1
- $\cos(2t)\left(1 - \frac{5t}{4}\right)$

## 2. FÓRMULAS DE EULER

Formemos ahora una suma de armónicos de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \quad , \quad [I]$$

y admitiendo que dicha suma defina una función f(x), o sea, que la serie sea convergente y que dicha función sea continua en $[0,2\pi]$, vamos a encontrar las relaciones existentes entre la función y los $a_i$ y los $b_i$.

Integrando en los dos miembros de la expresión anterior entre 0 y $2\pi$, se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} \sin nx\,dx$$

Observando que: $\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} = 0$ , y análogamente: $\int_0^{2\pi} \sin nx\,dx = -\left.\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} = 0$ , resulta:

$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot\int_0^{2\pi} dx = \pi\cdot a_0$ , de donde: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ . [II]

Multiplicando los dos miembros de [I] por cos mx e integrando entre 0 y $2\pi$, se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \cos mx\,dx + a_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \cos nx\cos mx\,dx + b_n \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\,dx \ .$$

Para $m \neq n$, las integrales del segundo miembro se reducen a:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos nx\cdot\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)x\,dx = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin nx\cdot\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n-m)x\,dx = 0 \end{cases}$$

y para m = n, resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos nx\cdot\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \cdot \frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^{2\pi} = \pi. \\ &\int_0^{2\pi} \sin nx\cdot\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2nx\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2nx}{2n}\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}}$$

Por tanto, se obtiene: $\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_n\pi$ , de donde se deduce que (pues m = n): $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$ . [III]

Finalmente, multiplicando ambos miembros de [I] por ser mx y procediendo de modo análogo, se obtiene:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad [IV]$$

El conjunto de las fórmulas [II], [III] y [IV] recibe el nombre de *fórmulas de Euler*, que resuelven el problema de determinar los coeficientes de los armónicos que figuran en la serie [I]. Un desarrollo en serie de tal tipo se conoce con la denominación de “desarrollo en serie de Fourier”, que veremos en el siguiente apartado.

## 3. DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER

Muchas ecuaciones de las ciencias económicas y físicas se formulan con derivadas parciales, como queda ejemplificado en el presente curso, y se resuelven, en ocasiones, descomponiendo la incógnita en series (sumas infinitas). Las series más interesantes son las de potencias y por supuesto las de Fourier. Dado el carácter periódico de tales sumas, las series de Fourier se aplican, por ejemplo, donde surgen procesos oscilantes, como ocurre en las series temporales de naturaleza económica. Los problemas teóricos relacionados con la convergencia de las series de Fourier han impulsado avances fundamentales en distintos ámbitos de las matemáticas y siguen siendo considerados hoy como problemas muy difíciles de resolver. Tal vez una de las propiedades más importantes de las series de Fourier y, en particular, de las integrales de Fourier se presenta en la solución de ecuaciones diferenciales, ya que transforman operadores diferenciales con coeficientes constantes en multiplicación por polinomios, de más sencilla resolución.

Las series de Fourier resultan de gran importancia en el estudio de los ciclos económicos. La idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica de periodo $p$ puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo periodo $p$.

Entendemos por “variaciones cíclicas” las variaciones regulares que se producen en las series temporales con periodo superior a un año. De hecho una serie temporal puede estar originada por diversos ciclos: un ciclo de medio plazo, otro ciclo de largo plazo, etc. Un ciclo económico o físico tiene dos componentes básicos: la *amplitud* o la distancia que media entre el cero y el máximo valor que alcanza el ciclo, y el *periodo* o el tiempo que tarda en ocurrir un ciclo completo. En teoría, cabe entender una serie temporal como una suma de un número indeterminado de ciclos de amplitud y período diferentes, y puede demostrarse que la varianza que muestra en el tiempo una serie temporal se obtiene a partir de la suma de las amplitudes de los diferentes ciclos en que se descompone la serie temporal (relación de Parseval).

El problema del análisis armónico, que interesa al estudioso de las funciones económicas o que se presentan en la Ingeniería, consiste en que, dada *a priori* la función periódica f(x), se trata de hallar una serie de Fourier que la represente. En el apartado anterior se ha supuesto que la serie formada definía una función continua, o al menos integrable en $[0, 2\pi]$. El problema inverso será el siguiente: dada f(x), ¿qué condiciones debe cumplir tal función para que su desarrollo de Fourier, mediante las fórmulas de Euler, represente dicha función?

Este problema, de gran dificultad, fue resuelto por Dirichlet que demostró que toda función continua o con número finito de discontinuidades no evitables de primera especie en $[0, 2\pi]$ y con número finito de extremos relativos en dicho intervalo, admite desarrollo en serie de Fourier, tal que en todo punto x = a, donde la función sea continua, la suma de la serie es igual a f(a) y para todo punto x = b donde la función es discontinua, la suma de la serie es igual a la semisuma de los límites a derecha e izquierda del punto x = b.

A continuación, en las siguientes diapositivas, se desarrollan varios ejemplos para la mejor comprensión de la teoría expuesta. Aconsejamos al amable lector/a que desarrolle todos los cálculos, que intencionadamente no se han incluido, pues resultarán, sin duda, un provechoso repaso de cálculo integral.

Veamos, por último, que para evitar confusiones al aplicar las fórmulas anteriores cuando el período de la función no es 2, deberá tenerse en cuenta que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \ ,$$

donde $\omega = 2\pi/p$ , para un período *p* cualquiera.

## 4. EJEMPLOS

### Ejemplo 1º:

Desarrollar en serie de Fourier la función de señales radioeléctricas: $f(x) = x^2$, en:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}-\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}<x<2\pi \ .$$

*Solución*:

En primer lugar, habrá que resolver el extremo inferior del intervalo de definición de la función. Para ello, veamos que:

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\left[2\cdot\lim_{b\to\infty}\text{arc tg}\,x\right]_0^b=\pi$ , y también realizando sucesivos cambios de variable, se obtiene:

$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}=\int_{1/2}^{\infty}\frac{dy}{y\sqrt{2y-1}}=\int_0^{\infty}\frac{2dt}{1+t^2}=\left[2\cdot\text{arc tg}\,t\right]_0^{\infty}=\pi$ . De este modo, el intervalo de existencia de la variable independiente quedará definido así: $0 < x < 2\pi$. Aplicando las fórmulas de Euler, se tiene que:

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{8\pi^2}{3} \\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2x\cos nx}{n^2}+\frac{(n^2x^2-2)\sin nx}{n^3}\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2} \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2x\sin nx}{n^2}-\frac{(n^2x^2-2)\cos nx}{n^3}\right]_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n} \end{cases}$$

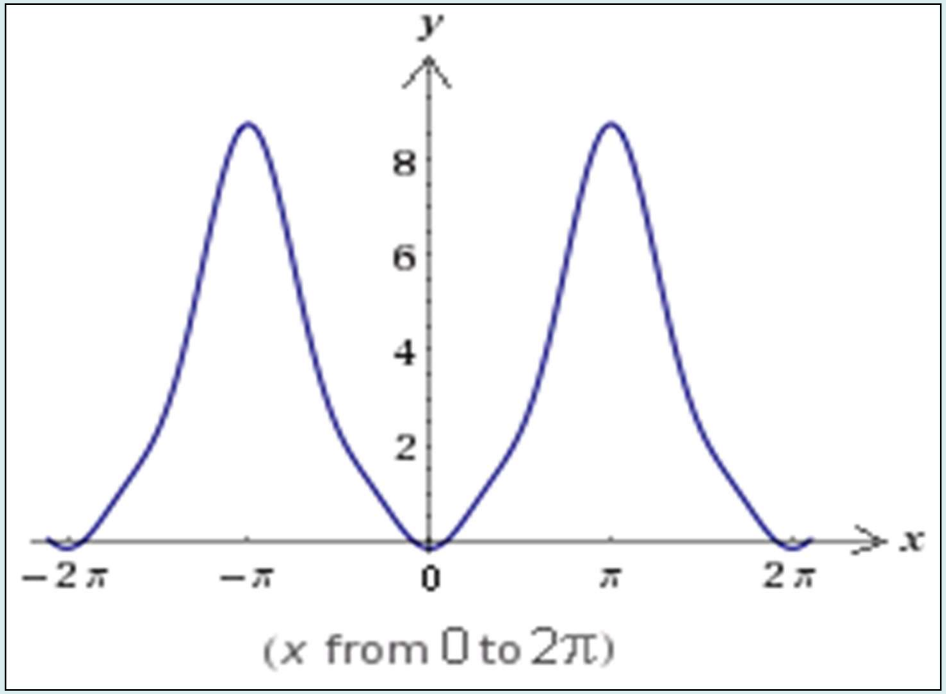
Por lo tanto, el desarrollo pedido será:

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{\pi^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right) ,$$

que hasta el orden 3 resulta ser:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x ,$$

con la siguiente representación gráfica:




Las sucesivas sumas parciales son: $y = \frac{\pi^2}{3}$, $y = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x$, $y = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x$,...

A veces, resulta conveniente, debido a las características de la función a desarrollar, tomar el intervalo [-π, π] en vez del [0, 2π]; las fórmulas no sufren variación, bastando entonces con cambiar los límites de integración.

## Ejemplo 2º:

Hallar la serie de Fourier de la función de señales definida por:

$$\begin{cases} f(x) = \iint_A (x - y)dx \cdot dy\,, & \text{para } -\pi \leq x < 0 \\ f(x) = \dfrac{2\pi + 1}{2} - \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx\,, & \text{para } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

siendo el dominio de integración:

$$A = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}\,.$$

(adaptado de Simmons. G.F., Madrid, 1998, p. 259).

*Solución*:

El valor de la función en el primer dominio de definición, será:

$$f(x) = \iint_A (x - y)dx \cdot dy = \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x - y)dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \left( xy - \frac{y^2}{2} \right) \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int_0^1 \left( x^{3/2} - \frac{x}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = 0\,.$$

El valor de la función en el segundo intervalo de definición, será:

$$\frac{2\pi + 1}{2} - \int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot dx = \frac{2\pi + 1}{2} - \left[ \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \pi\,.$$

Tenemos, entonces:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_0^{\pi} \pi dx\right] = \pi; \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi \cos nx dx = \left[\dfrac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0, \forall n \geq 1; \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi \sin nx dx = \left[-\dfrac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{n}(1-\cos n\pi) = \dfrac{1}{n}[1-(-1)^n]. \end{cases}$$

Como el n-ésimo número par es 2n y el n-ésimo número impar es 2n – 1, la última de esas fórmulas nos dice que:

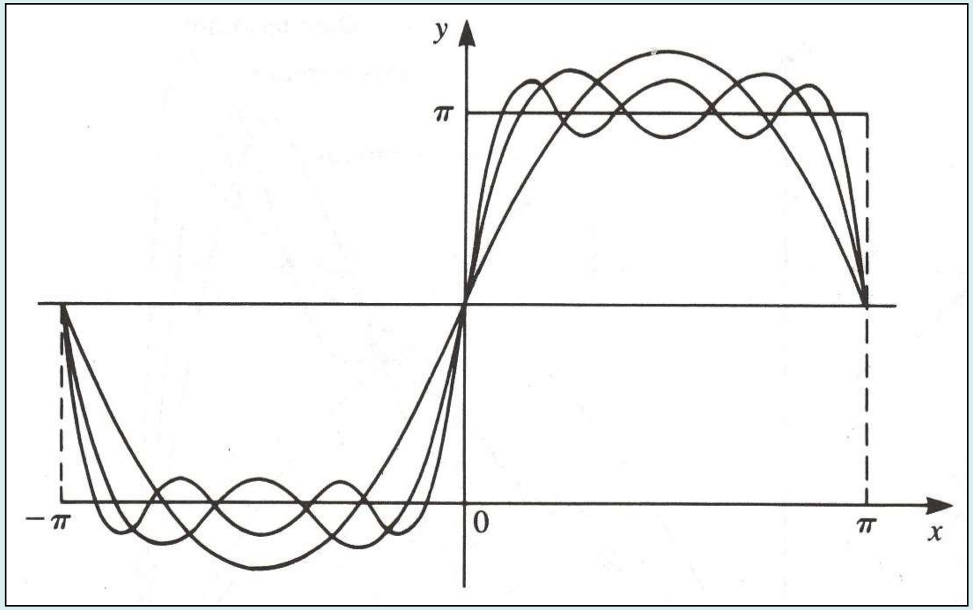
$$b_{2n} = 0, \quad b_{2n\text{-}1} = \frac{2}{2n-1}.$$

Substituyendo en la expresión: $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ,

obtenemos la requerida serie de Fourier, a saber: $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right)$ .

Las sucesivas sumas parciales son: $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2} + 2\sin x$, $y = \frac{\pi}{2} + 2\sin x + \frac{2}{3}\sin 3x, ...$

La correspondiente representación gráfica será:



## Ejemplo 3º:

Desarrollar en serie de Fourier la función económica siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} 2, & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2\int_0^1\int_x^1 (x+y)dx\cdot dy, & \text{para} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

*Solución*:

Habrá que comenzar resolviendo el valor de la función en el 2º intervalo de definición. Esto es:

$$2\int_0^1\int_x^1 (x+y)dx\cdot dy = 2\int_0^1\left[\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\right]_{y=x}^{y=1}\cdot dx = 2\int_0^1\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x^2+\frac{x^2}{2}\right)\right]\cdot dx = \frac{2}{2}=1 \quad .$$

Aplicando las fórmulas de Euler, resulta:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{1}{\pi}\left[\displaystyle\int_{-\pi}^{0} 2dx + \int_0^{\pi} 1dx\right] = 2+1=3 \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \dfrac{1}{\pi}\left[\displaystyle\int_{-\pi}^{0} 2\cos nx\,dx + \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = 0 \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\left[\displaystyle\int_{-\pi}^{0} 2\sin nx\,dx + \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \dfrac{(-1)^{\pi}-1}{n\pi} \end{cases}$$

o sea: $b_1 = -\dfrac{2}{\pi}$ ; $b_2 = 0$; $b_3 = \dfrac{-2}{3\pi}$ ; $b_4 = 0$… ;

de donde: $f(x)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{\sin 3x}{2}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)$. Las sucesivas sumas parciales son:

$$y=\frac{3}{2},\quad y=\frac{3}{2}-\frac{2\sin x}{\pi},\quad y=\frac{3}{2}-\frac{2\sin x}{\pi}-\frac{\sin 3x}{\pi},\ldots$$

En ciertas ocasiones, resulta que la misma forma de la función simplifica el desarrollo, como en el ejemplo anterior.

Así, por ejemplo, para las funciones impares, esto es, para las funciones tales que: $f(-x) = -f(x)$, todos los $a_i$ son nulos, quedando el desarrollo reducido a una serie de senos.

Ejemplo 4º:

Desarrollar en serie de Fourier, en: $-\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \le x \le \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ , la función económica f(x) = x.

*Solución*:

Los extremos del intervalo de definición vendrán dados por (aplicando el concepto de las funciones $\beta$ y $\Gamma$ de Euler-Legendre):

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{(1+x)}dx = \beta(1/2, 1/2) = \frac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \pi$$ , luego: $-\pi < x < \pi$ .

Nos bastará calcular únicamente los $b_i$, pues se trata de una función impar. Así:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = (-1)^{n-1}\frac{2}{n} \quad .$$

Luego la serie quedará establecida del siguiente modo:

$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right]$$ , que hasta el orden 3 resulta ser:

$$f(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x = 2\sin x(1-\cos x) + \frac{2\sin 3x}{3} \quad .$$

Las sucesivas sumas parciales son:

$$y = 2\sin x,\quad y = 2\sin x - \sin 2x,\quad y = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x, \ldots$$

Debe tenerse en cuenta que una función “par”, esto es, una función tal que f(-x) = f(x), carece de término en seno.

## Ejemplo 5º:

Hallar la serie de Fourier de la función económica definida por:

$$\begin{cases} f(x) = -\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot dx \ , & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \ ; \\ f(x) = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot dx \ , & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \ . \end{cases}$$

(adaptado de Simmons G.F., Madrid, 1998, p. 260).

*Solución*:

Los valores que adopta la función vienen determinados por la integral (que resolveremos mediante el cambio de variable: $x = \sin\theta$, de donde: $dx = \cos\theta\cdot d\theta$):

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\cdot d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Ésta es la función del ejemplo anterior a la que se ha restado la constante $\pi/2$; en consecuencia, su serie de Fourier se puede obtener restando simplemente $\pi/2$ de aquella serie, lo que lleva a:

$$f(x) = 2\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right).$$

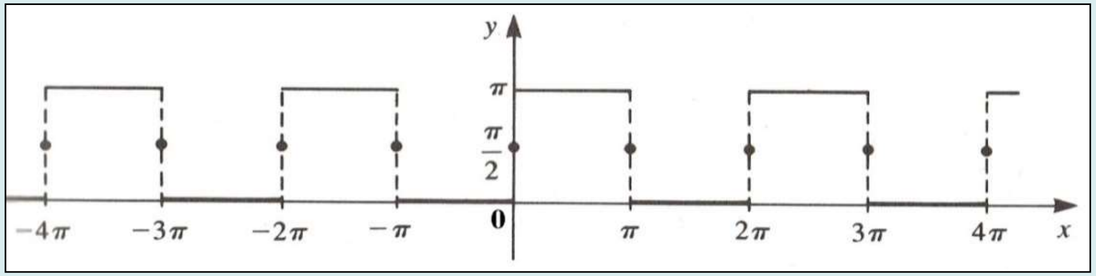
Las sucesivas sumas parciales son:

$$y = 2\sin x, \quad y = 2\sin x + \frac{2}{3}\sin 3x, \quad y = 2\sin x + \frac{2\sin 3x}{3} + \frac{2\sin 5x}{5}, \ldots$$

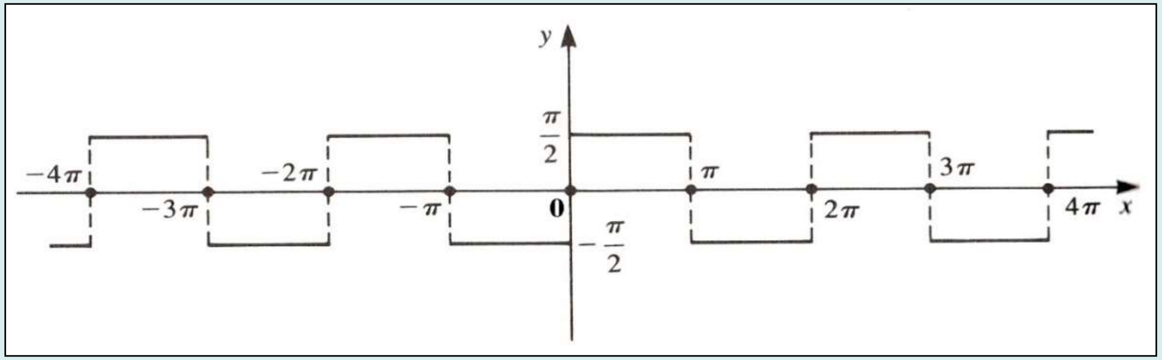
El gráfico de su suma es simplemente la onda cuadrada de la primera figura descendida hasta ser simétrica respecto del eje Ox, tal como muestra la segunda figura.

La correspondiente representación gráfica será:

Onda cuadrada.




Onda cuadrada descendida π/2.




## Ejemplo 6º:

Hallar la serie de Fourier de la función periódica definida por:

$$\begin{cases} f(x) = \iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy \ , \text{ si } \int_0^\infty \dfrac{e^{-x^2}}{x^2} dx \leq x < 0 \ ; \\ f(x) = x, \text{ si } \quad 0 \leq x < \pi \ . \end{cases}$$

donde el dominio de integración A está definido por la intersección de dos círculos, a saber:

$$A = \{(x,y) \ / \ [x^2 + y^2 \leq 1] \cap [(x - 1)^2 + y^2 \leq 1]\} \ .$$

(adaptado de Simmons G.F., Madrid, 1998, p. 268).

*Solución*:

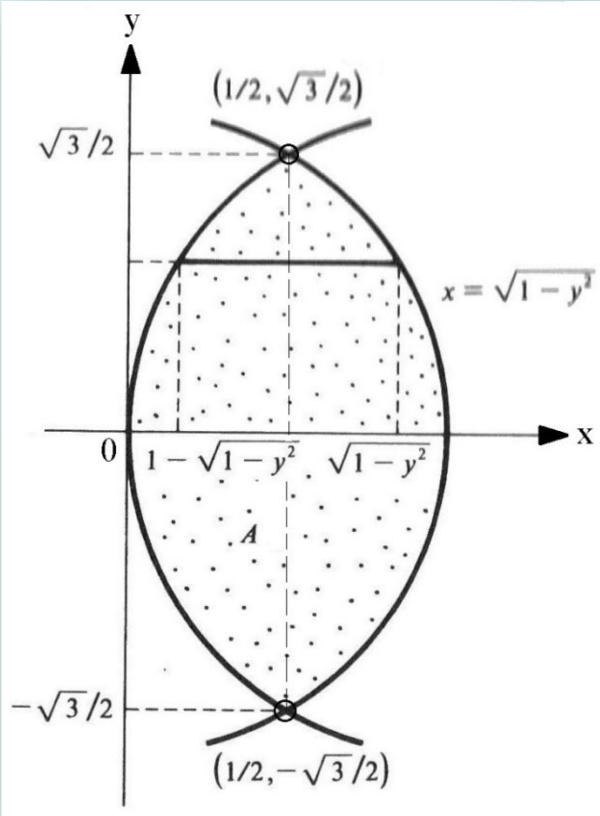
El extremo inferior del primer subintervalo dado, será:

$$\int_0^{\infty} x^{-2} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma(p) \text{ siendo p tal que } 2p-1=-2 \Rightarrow p=-\frac{1}{2} \text{; entonces:}$$

$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$. Por la fórmula: $\Gamma$ (S+1) = S·$\Gamma$ (S). Pero:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right); \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \text{ luego: } \int_0^{\infty} x^{-2} e^{-x^2} dx = -\left(\frac{1}{2}\right)2\sqrt{\pi} = -\pi \ .$$

Además, el dominio de integración A se puede representar en la figura siguiente:



Dominio de integración A.

Entonces, se tendrá que:

$$f(x) = \iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left( \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \cdot y \cdot dx \right) dy = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left[ y\left(\frac{x^2}{2}\right) \right]_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \cdot dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} y\left[(1-y^2) - (1-\sqrt{1-y^2})^2\right] dy = -\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2} + \frac{2}{3}(1-y^2)^{3/2}\right]_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} = 0.$$

En primer lugar, se tendrá que: $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \cdot dx = \left[\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}$.

Para $n \geq 1$, integrando por partes se obtiene: $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{x\sin x}{n} + \dfrac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n - 1],$$

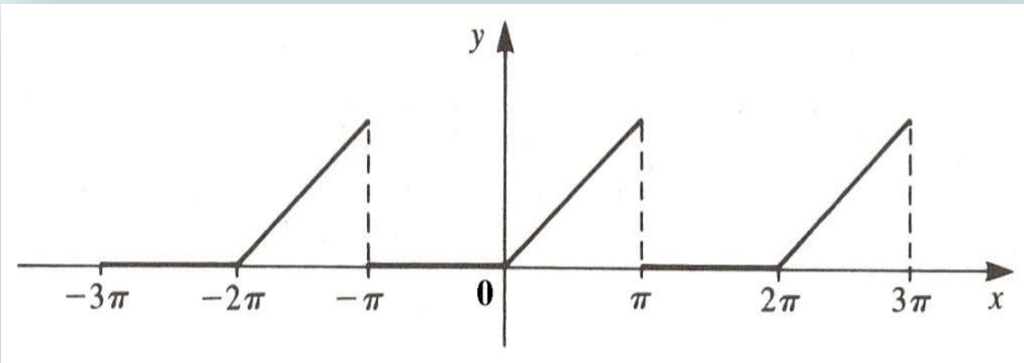
luego: $a_{2n} = 0$ y $a_{2n\text{-}1} = -\dfrac{2}{\pi(2n-1)}$. Análogamente: $b_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \dfrac{1}{\pi}\left[-\dfrac{x\cos nx}{n} + \dfrac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Por tanto, la serie de Fourier requerida es:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} .$$

La correspondiente representación gráfica será:




Onda triangular.

UNED TORTOSA

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 21

## FUNCIONES PERIÓDICAS Y ANÁLISIS ARMÓNICO (II)

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

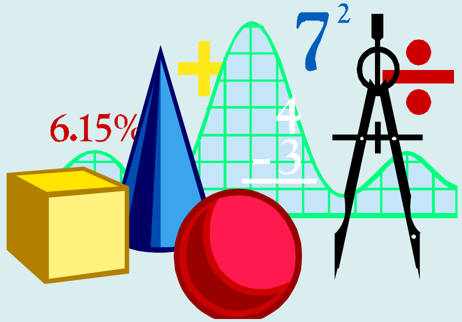
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





# 1. LA TRANSFORMADA DE FOURIER

## 1.1. Generalidades

La rama de la matemática que estudia la transformada de Fourier y sus generalizaciones se denomina “análisis armónico”, que es objeto de la lección anterior y de la presente. Aunque esta operación matemática debe su nombre al matemático Joseph Fourier, lo cierto es que muchos han contribuido a su invención, entre ellos Euler, Bernoulli, Lagrange y Gauss. Fourier tuvo un papel esencial, al inventar las series que hemos tratado en la lección anterior, donde una función periódica se podía descomponer en la suma de funciones trigonométricas. La transformada de Fourier generaliza este concepto. Lo que permite la transformada de Fourier es convertir cualquier función matemática a otro dominio, denominado el “dominio de la frecuencia”. Esto facilita tratar y analizar las funciones de una forma alternativa.

La transformada de Fourier, es una transformación matemática empleada para transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia, que tiene muchas aplicaciones en la economía y la ingeniería. Es reversible, siendo capaz de transformarse en cualquiera de los dominios al otro. El propio término se refiere tanto a la operación de transformación como a la función que produce.

En el caso de una función periódica en el tiempo (por ejemplo, un sonido musical continuo pero no necesariamente sinusoidal), la transformada de Fourier se puede simplificar para el cálculo de un conjunto discreto de amplitudes complejas, llamado “coeficientes de las series de Fourier”. Ellos representan el espectro de frecuencia de la señal del dominio-tiempo original.

La transformada Fourier de una señal unidimensional o función continua **f** es una transformación de dicha señal que nos permite calcular la contribución de cada valor de frecuencia a la formación de la señal. Se trata de una aplicación que hace corresponder a una función **f** con otra función **g** definida de la manera siguiente:

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

donde f es $L^1$, es decir, **f** tiene que ser una función integrable en el sentido de la integral de Lebesgue. El factor, que acompaña la integral en definición facilita el enunciado de algunos de los teoremas referentes a la transformada de Fourier. Aunque esta forma de normalizar la transformada de Fourier es la más comúnmente adoptada, no es universal. En la práctica las variables **x** y **ξ** suelen estar asociadas a dimensiones como por ejemplo el tiempo -en segundos- y la frecuencia -expresada en hertzs o ciclos/segundo- respectivamente. Si se utiliza la fórmula alternativa:

$$g(\xi) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\beta\xi x} dx$$

la constante **β** cancela las dimensiones asociadas a las variables obteniéndose un exponente adimensional.

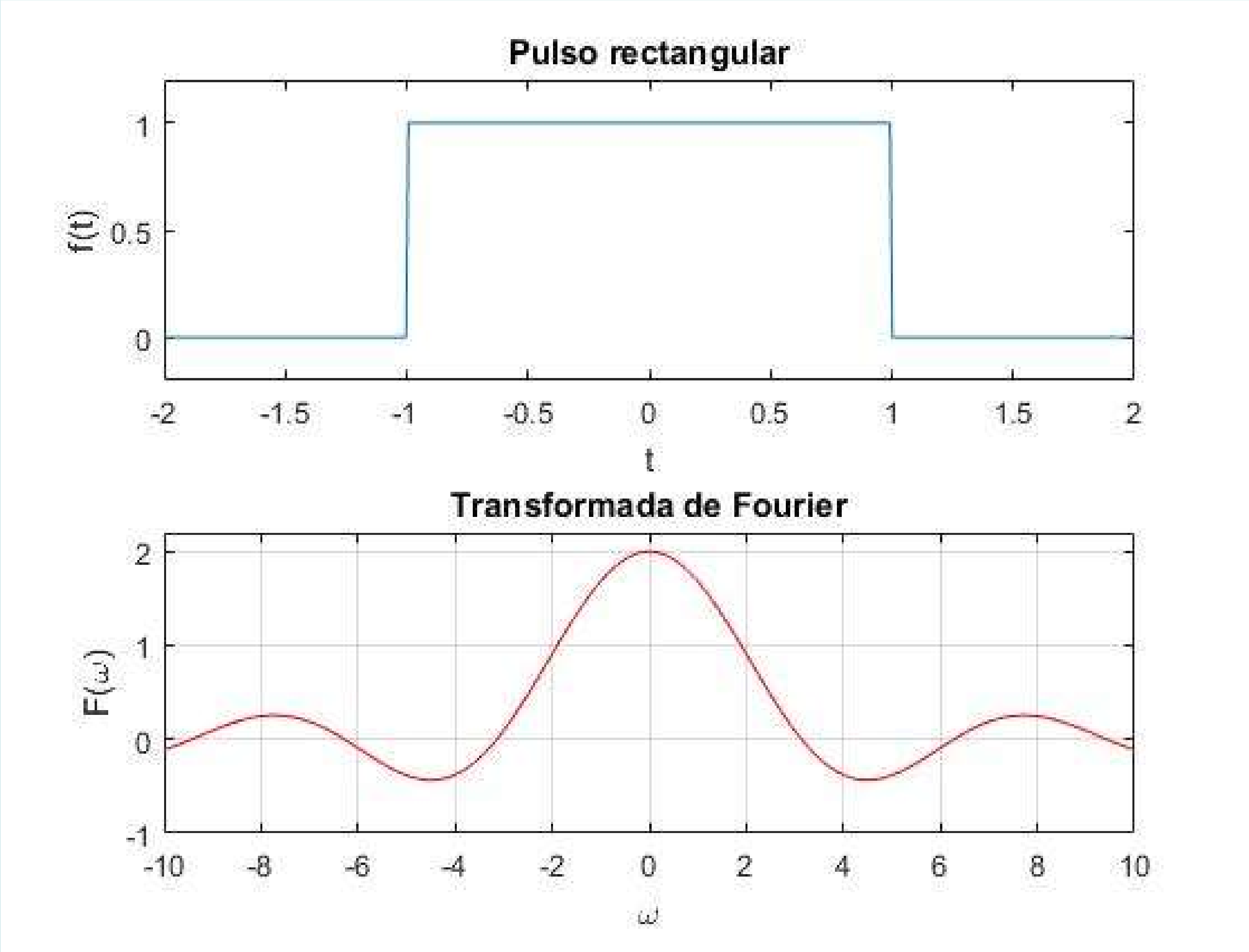
Estas dos funciones **f** y **g** se denominan un “par de transformadas Fourier”. En general, las funciones con las que trataremos en problemas reales verificarán las condiciones que es necesario imponer para que las expresiones anteriores puedan calcularse.

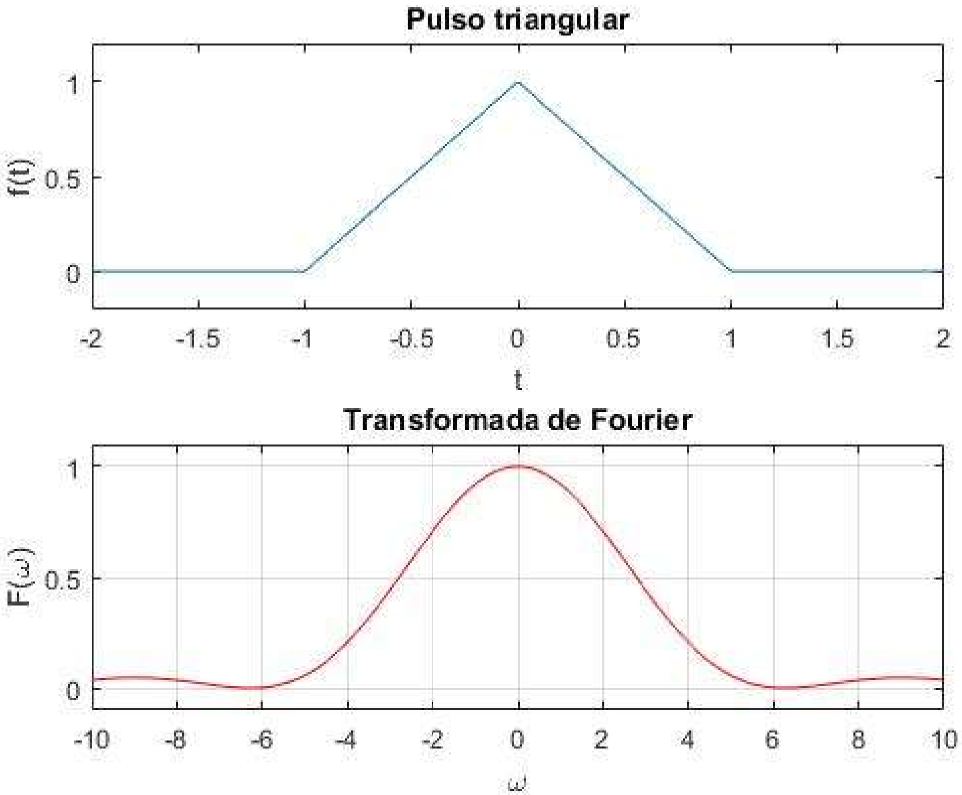
Es importante señalar que aunque las funciones que definen a las imágenes son funciones reales, sus transformadas Fourier son funciones complejas con parte real y parte imaginaria. La transformada de Fourier, así definida, goza de una serie de propiedades de continuidad que garantizan que puede extenderse a espacios de funciones mayores e incluso a espacios de funciones generalizadas.

Sus aplicaciones son muchas: en áreas de la ciencia e ingeniería como la física, la teoría de los números, la combinatoria, el procesamiento de señales (electrónica), la teoría de la probabilidad, la estadística, la economía (ciclos económicos), la óptica, la propagación de ondas y otras áreas. En el procesamiento de señales, la transformada de Fourier suele considerarse como la descomposición de una señal en componentes de frecuencias diferentes, es decir, **g** corresponde al espectro de frecuencias de la señal **f**.

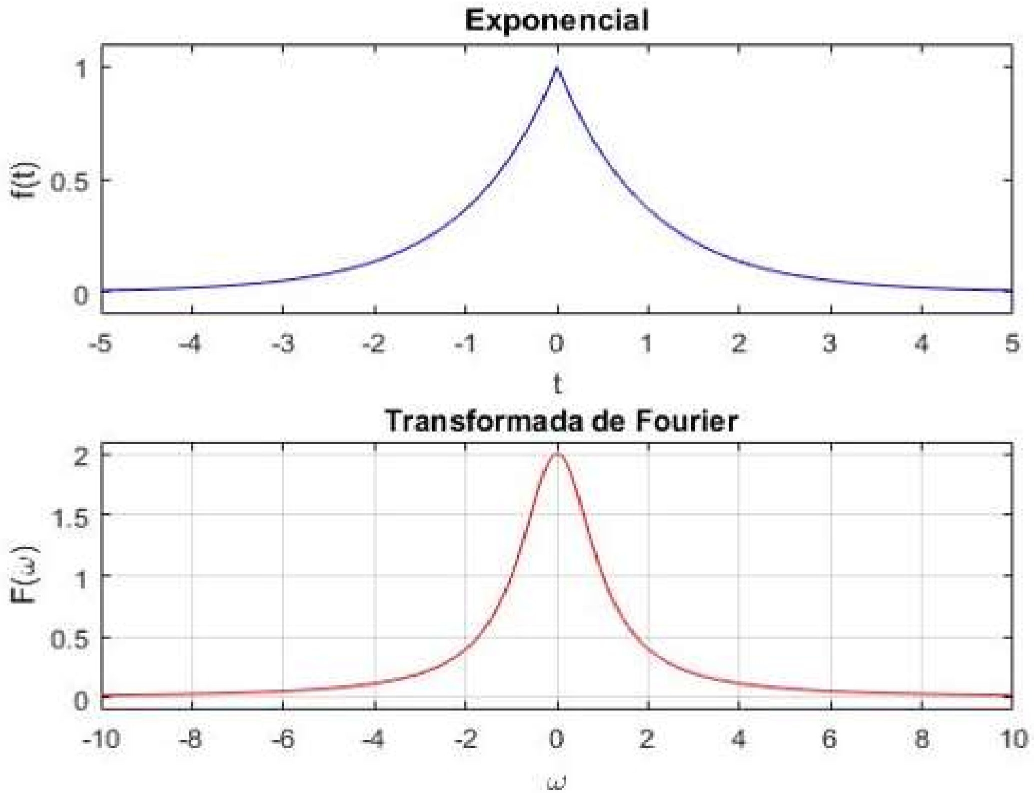
## 1.2. Transformadas de algunas funciones conocidas

A continuación, se muestran diversas gráficas representativas de algunas funciones conocidas cuya operatoria suele ser habitual:

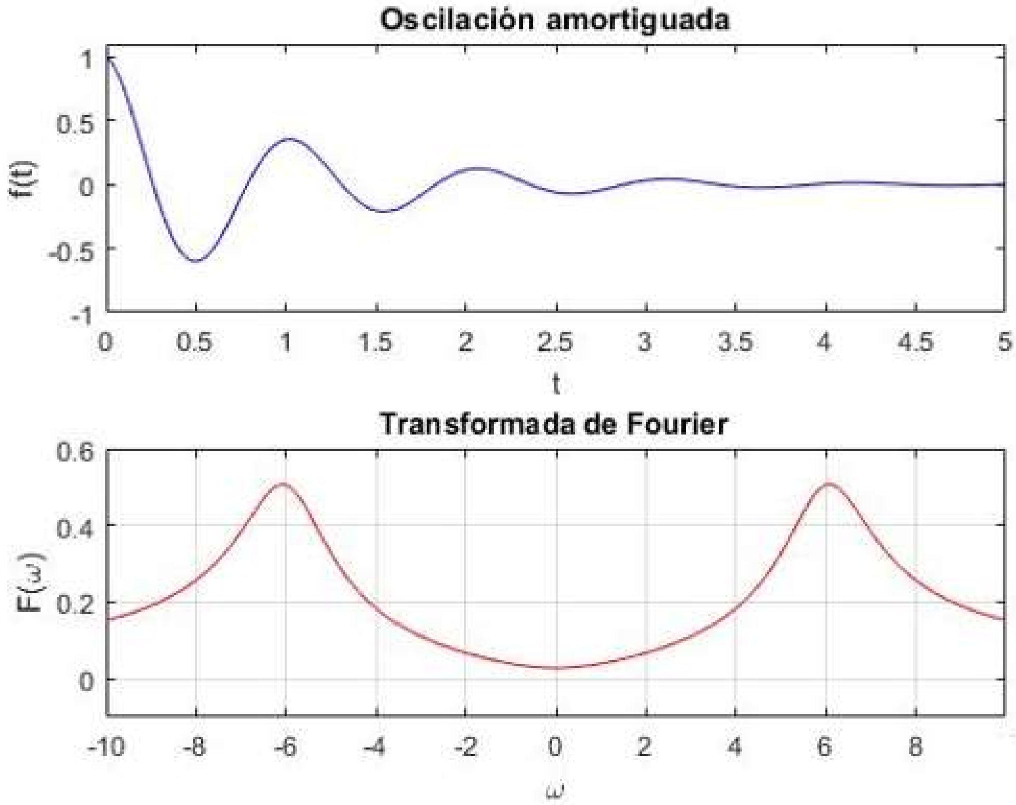


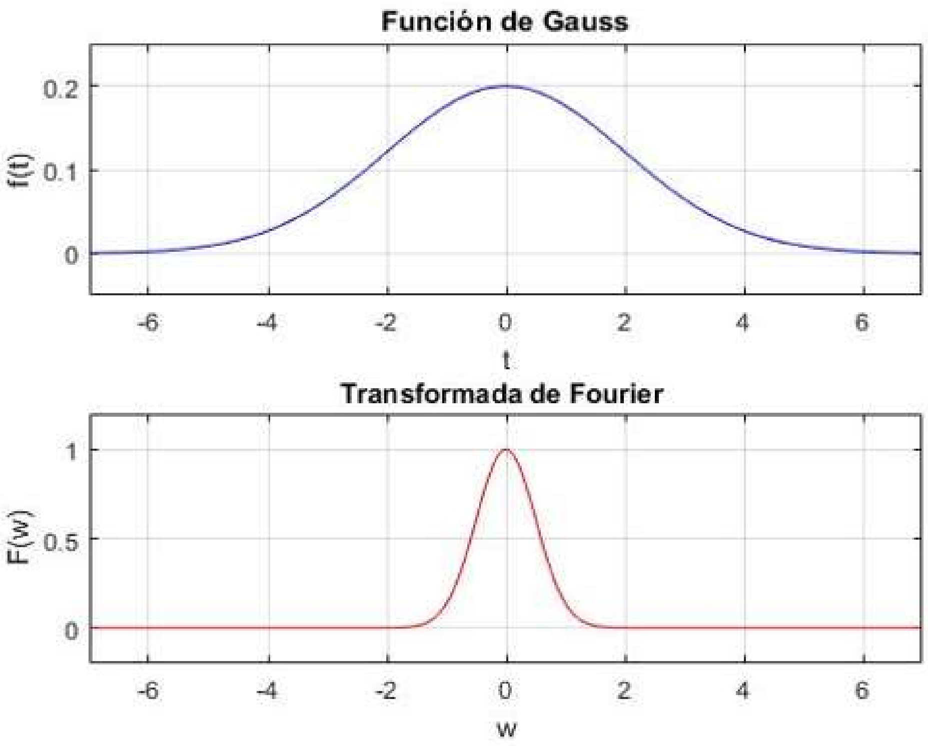


Pulso triangular
f(t)
t
Transformada de Fourier
F(ω)
ω

Exponencial
f(t)
t
Transformada de Fourier
F(ω)
ω


Oscilación amortiguada
f(t)
t
Transformada de Fourier
F(ω)
ω


Función de Gauss
f(t)
t
Transformada de Fourier
F(w)
w

## 1.3. Tabla de transformadas de Fourier

| Dominio de tiempo $x(t)$ | | Dominio de frecuencia $X(j\omega)$ |
|---|---|---|
| $\delta(t)$ | | $1$ |
| $u(t)$ | | $\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$ |
| $e^{at}u(t)$ | $a\in\mathbb{C}, \operatorname{Re}\{a\}<0$ | $\frac{1}{j\omega-a}$ |
| $-e^{at}u(-t)$ | $a\in\mathbb{C}, \operatorname{Re}\{a\}>0$ | $\frac{1}{j\omega-a}$ |
| $te^{at}u(t)$ | $a\in\mathbb{C}, \operatorname{Re}\{a\}<0$ | $\frac{1}{(j\omega-a)^2}$ |
| $e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)$ | $\alpha,\omega_0\in\mathbb{R},\ \alpha>0$ | $\frac{\omega_0}{(j\omega+\alpha)^2+\omega_0^2}$ |
| $e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t)$ | $\alpha,\omega_0\in\mathbb{R},\ \alpha>0$ | $\frac{j\omega+\alpha}{(j\omega+\alpha)^2+\omega_0^2}$ |
| $1$ | | $\delta(\omega)$ |
| $e^{j\omega_0 t}$ | $\omega_0\in\mathbb{R}$ | $\delta(\omega-\omega_0)$ |
| $\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$ | $T\in\mathbb{R},\ T>0$ | $\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$ |
| $\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<t_0\\ 0, & \lvert t\rvert>t_0\end{cases}$ | $t_0\in\mathbb{R},\ t_0>0$ | $2t_0\operatorname{sinc}(\frac{t_0}{\pi}\omega)$ |
| $\frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}t\right)=\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$ | $\omega_c\in\mathbb{R},\ \omega_c>0$ | $\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \lvert\omega\rvert>\omega_c\end{cases}$ |
| $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ (Fourier series) | $a_k\in\mathbb{C}$, $\omega_0\in\mathbb{R},\ \omega_0>0$ | $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$ |

**La transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\,dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega t)\,d\omega$$

**Teorema de Parseval:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y^*[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

## 2. ESTUDIO DEL GOLPE DE ARIETE HIDRÁULICO

### 2.1. Idea previa

El fenómeno en estudio del golpe de ariete hidráulico puede ser explicado, así mismo, no sólo a partir de los modelos matemáticos tradicionales basados en las ecuaciones en derivadas parciales (EDP), o bien en las ecuaciones en diferencias finitas (EDF) que aquí se propugnan y que hemos visto desarrollados en los epígrafes precedentes, sino también a partir de otros tipos de ecuaciones infinitesimales, como las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), las integrales (EI) o bien las integro-diferenciales (EID) o sus sistemas. En este sentido, se proponen los ejemplos ilustrativos de los apartados siguientes.

### 2.2. Como ecuación en diferencias finitas

***Ejemplo 1***

En una instalación determinada resulta el análisis ecuacional de la trayectoria temporal del golpe de ariete producido mediante la ecuación recurrente siguiente respecto al valor observado de las ondas de presión:

$$\frac{\Delta P_{t+3}}{4}\int_3^5 \frac{2t\cdot dt}{\sqrt{t^2-9}} + \Delta P_{t+2} = 0 \text{ , } \forall\ t \in \{\mathbf{N}\},$$

con la condición inicial: $\Delta P_4$ = 1'00 bar, significando la variable $\Delta P(t)$ las sobrepresiones (positivas y negativas) medidas sobre la presión estática o de equilibrio. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal de las ondas de presión.
b) La tendencia de la presión a largo plazo (equilibrio).
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

*Solución:*

Conviene resolver, en primer lugar, la integral definida del primer miembro de la EDF dada, teniendo en cuenta que la función subintegral no está definida para t = ± 3, con lo que haciendo el cambio de variable: $z = t^2 - 9 \Rightarrow dz = 2t \cdot dt$, se tiene que:

$$\int_3^5 \frac{2t \cdot dt}{\sqrt{t^2 - 9}} = \int_3^5 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \left[2\sqrt{z}\right]_3^5 = \left[2\sqrt{(t^2 - 9)}\right]_3^5 = 8 \ ,$$

quedando la expresión: $2\Delta P_{t+3} + \Delta P_{t+2} = 0$. Al ser una ecuación homogénea de primer orden, se calcula la solución general como en los ejercicios anteriores, pasando primero a la ecuación equivalente siguiente: $2\Delta P_{t+1} + \Delta P_t = 0$, de donde se deduce que:

$$\Delta P_{t+1} = -\frac{1}{2}\Delta P_t \text{ ; luego la solución general es: } \Delta P_t = C\left(-\frac{1}{2}\right)^t .$$

Para hallar la solución particular se procede así: $\Delta P_4 = C\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1$ ,

se despeja C, de donde C = 16 y, por tanto, la solución particular resulta ser: $\boxed{\Delta P_t = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^t = f(t)}$ ,

y se trata de una sucesión alternada convergente, con los picos de presión del transitorio (tanto positivos como negativos) tendentes a cero, con los siguientes valores:

| ***t (s)*** | ***$\Delta P_t$ (bar)*** |
|---|---|
| 0 | 16.00 |
| 1 | -8.00 |
| 2 | 4.00 |
| 3 | -2.00 |
| 4 | 1.00 |
| 5 | -0.50 |
| 6 | 0.25 |
| … | … |
| +∞ | 0.00 |

con lo que el golpe de ariete máximo (positivo) que tiene lugar es del orden de: ΔP = 16.00 bar, y la sucesión indefinida convergente de Cauchy de los "picos" de presión (números reales) originados sigue la ley de formación o término general alternativo: $\Delta P_t = (-1)^t \cdot 2^{4-t}$ .

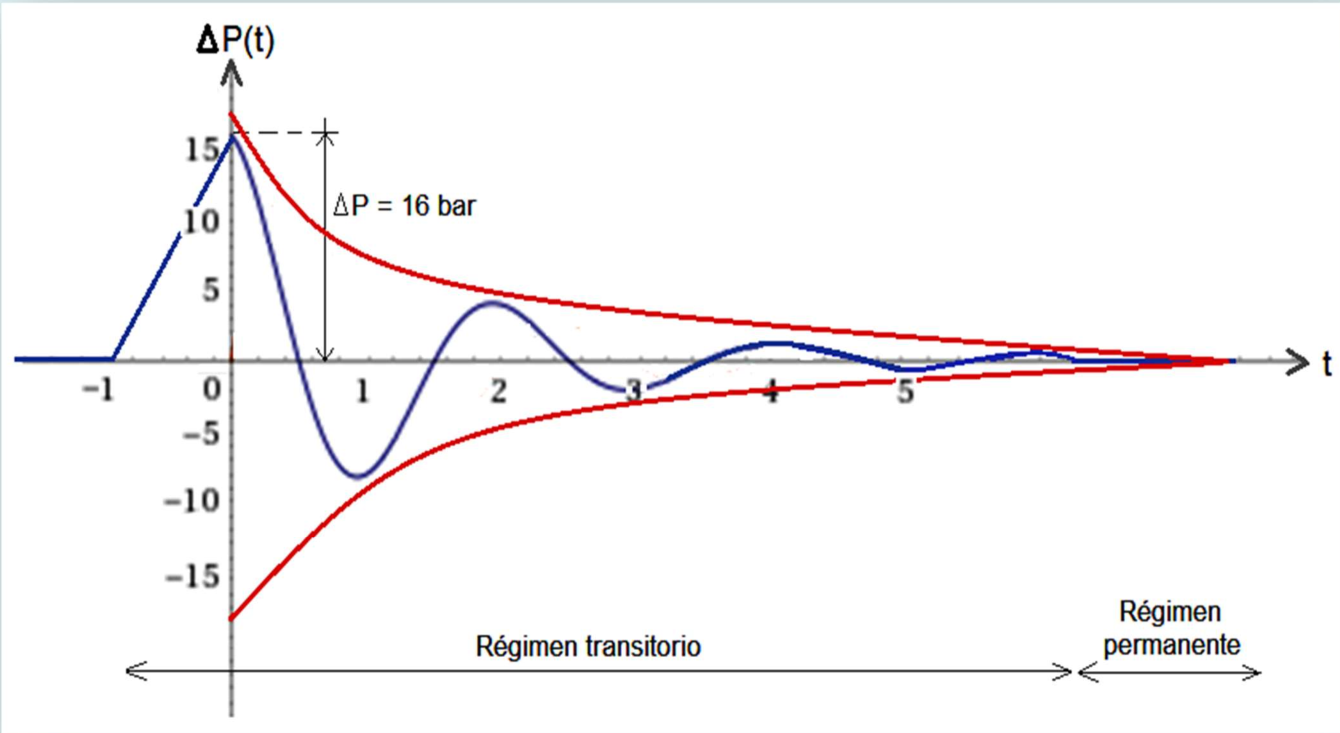
b) A largo plazo sucederá que:

$$\lim_{t\to+\infty} \Delta P_t = 16 \cdot \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^t = 0 \ ,$$

luego se trata también de una sucesión "convergente infinitesimal", puesto que su límite es cero. Por otra parte, cuando $\Delta P = 0$ no se notarían los efectos del golpe de ariete en la instalación estudiada, estado al que se tendería de modo oscilante y decreciente hasta el final de la perturbación transitoria, al ser:

$$|r| < 1 \text{ y } -1 < (r = -1/2) < 0.$$

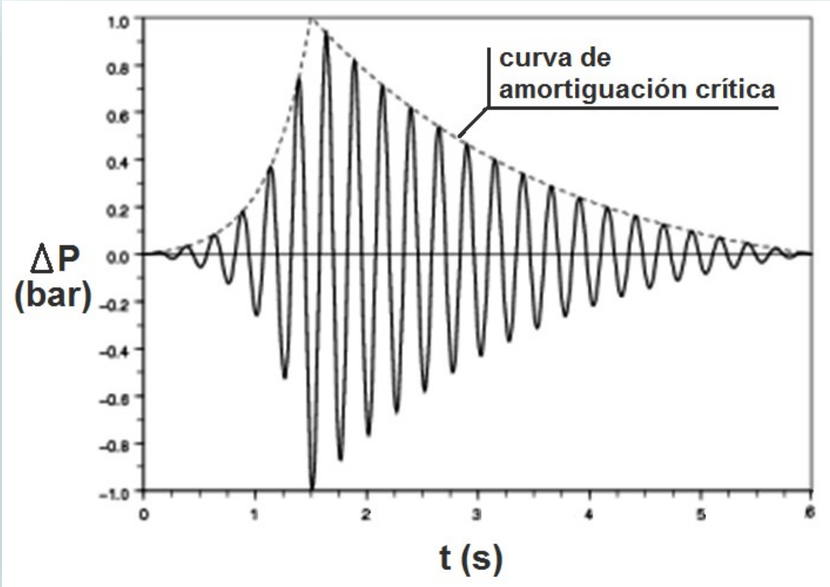
c) La representación gráfica continua correspondiente será:




Evolución temporal continua de las ondas de presión.

## *Ejemplo 2*

Normalmente, se realiza la simplificación de que el régimen transitorio originado por el golpe de ariete comienza, prácticamente, en el instante en que se produce la amplitud máxima de la oscilación, aunque también sería posible, en algunos casos, su inicio algo anterior, tal como aparece reflejado en la figura adjunta siguiente.




Trayectoria temporal de las ondas de presión con inicio del régimen transitorio anterior al golpe de ariete máximo.

En estas circunstancias tendrían lugar sendas trayectorias definitorias del fenómeno transitorio en estudio (o, si se quiere, una trayectoria mixta), que se encontrarían en el punto de máximo valor del golpe de ariete: una primera alternada creciente o divergente y una segunda amortiguada o convergente infinitesimal. Sería, por ejemplo, el caso de la siguiente tubería, en la que se dispone de una presión estática o de equilibrio de $P_e = 4.00$ bar:

$$\begin{cases} 1^a \text{ trayectoria} \Rightarrow 2\Delta P_{t+1} + 3\Delta P_t = 0, \text{ con la condición inicial: } \Delta P_2 = 2.00 \text{ bar} \\ 2^a \text{ trayectoria} \Rightarrow 2\Delta P_{t+3} + \Delta P_{t+2} = 0, \text{ con la condición inicial: } \Delta P_4 = 1.00 \text{ bar} \end{cases}$$

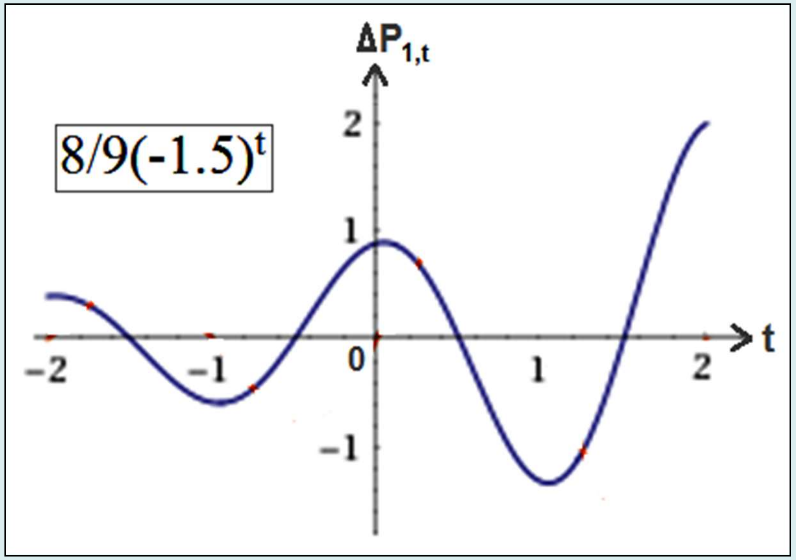
Resolviendo separadamente ambas situaciones, se tendrá:

a) **1ª trayectoria**:

Primero se calcula la solución general como en el ejercicios anterior. La ecuación característica es: 2r + 3 = 0; r = -(3/2), y la solución general es: $\Delta P_t = C\left(-\frac{3}{2}\right)^n$. Para hallar la solución particular se substituyen los valores de la condición dada en la ecuación general, de tal forma que:

$\Delta P_2 = C\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2$ ; se despeja C, de donde C = $\frac{8}{9}$ , y la solución particular buscada será, por tanto:

$$\Delta P_t = \frac{8}{9}\left(-\frac{3}{2}\right)^t = f(t)$$ , $\forall\ t\in\{\mathbf{N}\}$, con la siguiente representación gráfica continua:




A largo plazo sucederá que: $\lim\limits_{t\to+\infty} \Delta P_t = \frac{8}{9}\cdot\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^t = \pm\infty$ (divergente por la derecha) y también debe tenerse en cuenta que: $\lim\limits_{t\to-\infty} \Delta P_t = \frac{8}{9}\cdot\lim\limits_{t\to-\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^t = 0$ (convergente infinitesimal por la izquierda).

Se tiene que, $\forall t > 0$, $|r|$ = 3/2 = 1'5 > 1 y r < 0, con lo que las soluciones siempre divergen de forma oscilante mediante oscilaciones crecientes. Por otra parte, sería: $5\Delta P_e = 0$; o sea: $\Delta P_e = 0$ bar.

b) **2ª trayectoria**:

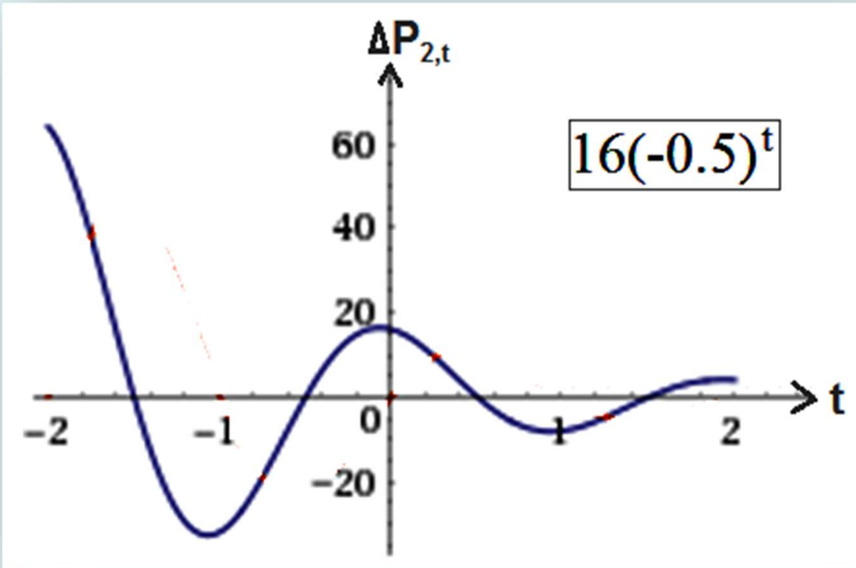
Al ser una ecuación de primer orden, se calcula la solución general como en los ejercicios anteriores, pasando primero a la ecuación equivalente siguiente: $2\Delta P_{t+1} + \Delta P_t = 0$, de donde:

$$\Delta P_{t+1} = -\frac{1}{2}\Delta P_t \text{ ; luego la solución general es: } \Delta P_t = C\left(-\frac{1}{2}\right)^t.$$

Para hallar la solución particular se procede de forma análoga, esto es: $\Delta P_4 = C\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1$

y se despeja C, de donde C = 16 y, por tanto, la solución particular resulta ser:

$\Delta P_t = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^t = f(t)$ , luego se trata de una sucesión alternada "convergente infinitesimal", con la siguiente representación gráfica:




A largo plazo sucederá que:

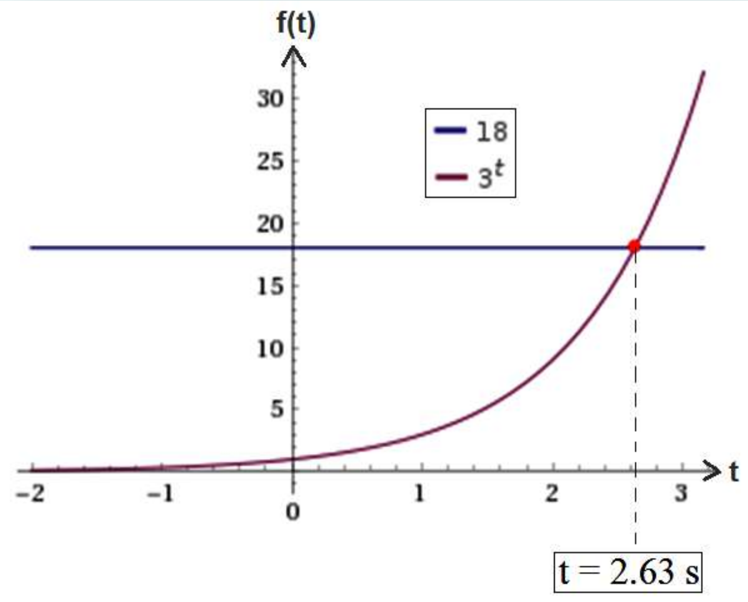
$$\lim_{t\to+\infty} \Delta P_t = 16 \cdot \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^t = 0$$

Por otra parte, sería: $3\Delta P_e = 0$; o sea: $\Delta P_e = 0$ bar, al que se tendería de modo oscilante, al ser: $|r| < 1$ y $-1 < (r = -1/2) < 0$.

El cruce de ambas trayectorias tendrá lugar cuando se cumpla que:

$8/9\cdot(-1.5)^t = 16\cdot(-0.5)^t$ , de lo que resulta: $3^t = 18$, o sea: $t = \frac{\log 18}{\log 3} = \frac{1.2552725}{0.4771212} \cong 2.63\ \text{s}$ ,

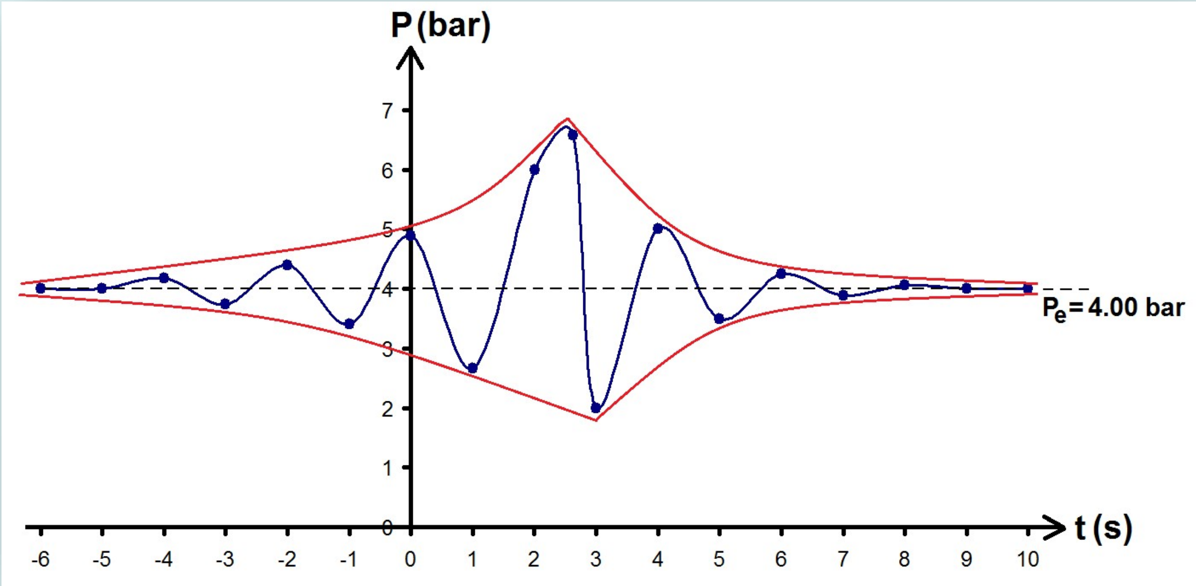
cuestión ésta que también queda de manifiesto desde el punto de vista gráfico así:




teniendo lugar, en dicho instante, un golpe de ariete máximo de 2.58 bar, según la siguiente tabla de valores de los "picos" de las ondas de presión:

| t (s) | $\Delta P_{1,t}$ $(8/9)(-1.5)^t$ (bar) | $\Delta P_{2,t}$ $16(-0.5)^t$ (bar) | $P_{1,t}$ (bar) | $P_{2,t}$ (bar) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 8/9 | 16 | 4.89 | 20.00 |
| 1 | -4/3 | -8 | 2.67 | -4.00 |
| 2 | 2 | 4 | 6.00 | 8.00 |
| **2.63** | **2.58** | **2.58** | **6.58** | **6.58** |
| 3 | -3 | -2 | 1.00 | 2.00 |
| 4 | 9/2 | 1 | 8.50 | 5.00 |
| 5 | -27/4 | -1/2 | -2.75 | 3.50 |
| 6 | 81/8 | 1/4 | 14.13 | 4.25 |
| 7 | … | -1/8 | … | 3.88 |
| 8 | … | 1/16 | … | 4.06 |
| … | … | … | … | … |
| +∞ | ±∞ | 0 | ±∞ | 4.00 |

Se tendría, entonces, la siguiente representación gráfica:




Trayectoria temporal mixta de las ondas de presión.

## 2.3. Como ecuación diferencial ordinaria

### *Ejemplo 3*

Sea un modelo hidráulico definitorio de un golpe de ariete en el que, previas las mediciones oportunas, se ha observado la existencia de las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} Q(t) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt{1-\sin t}} - P(t)\int_0^{\pi}\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right| \cdot dt + 2\frac{dP(t)}{dt} + \frac{d^2P(t)}{dt^2} \\ Q(t) = -\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt{1-\sin t}} + 3P(t) + [14\int_0^1\int_{t^2}^{\sqrt{t}}(t^2+4y^2)dy \cdot dt]\frac{dP(t)}{dt} + 2\frac{d^2P(t)}{dt^2} \end{cases}$$

siendo *y* una variable hidráulica del modelo, con P(0) = 2’00 bar y dP(0)/dt = 1. Obténgase P(t) y estúdiese la trayectoria temporal de las ondas de presión.

*Solución:*

Procede, en primer lugar, resolver la 1ª integral definida que aparece en el enunciado del problema. Se trata de una integral de 2ª especie y convergente, esto es:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\cdot dt}{\sqrt{1-\sin t}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{(\pi/2)-\varepsilon} \frac{\cos t\cdot dt}{\sqrt{1-\sin t}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-2\sqrt{1-\sin t}\right]_0^{(\pi/2)-\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\sqrt{1-\sin(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}-1\right] = 2.$$

Por lo que se refiere a la 2ª integral definida, se tiene que: $\int_0^{\pi}\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right|\cdot dt = \int_0^{\pi}|\cos t|\cdot dt = 2$ .

En tercer lugar, procede hallar el valor de la integral doble que aparece también en el enunciado, esto es:

$$y = 14\int_0^1\int_{t^2}^{\sqrt{t}}(t^2+4y^2)\cdot dy\cdot dt = 14\int_0^1\left[t^2y+\frac{4y^3}{3}\right]_{t^2}^{\sqrt{t}}\cdot dt = 6.$$

De este modo, los datos obtenidos del problema se sintetizan así:

$$\begin{cases} Q(t) = 2-2P(t)+2\dfrac{dP(t)}{dt}+\dfrac{d^2P(t)}{dt^2} \\ Q(t) = -2+3P(t)+6\dfrac{dP(t)}{dt}+2\dfrac{d^2P(t)}{dt^2} \end{cases}$$

De la igualación de las ecuaciones observadas, se tendrá que:

$$2 - 2P + 2P' + P'' = -2 + 3P + 6P' + 2P'' ;$$

de donde se obtiene la EDO no homogénea y de segundo orden siguiente: $P'' + 4P' + 5P = 4$.

La ecuación característica de la homogénea, será: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ ;

$$\lambda = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4\pm 2i}{2} = \begin{cases}\lambda_1 = -2+i \\ \lambda_2 = -2-i\end{cases}, \text{ (con } \alpha = -2 \text{ y } \beta = 1) ,$$

y la solución de la homogénea será: $P^*(t) = e^{-2t}(A\cdot\cos t + B\cdot\sin t)$.

Para hallar una solución de la completa o inhomogénea, ensayaremos la solución particular:

$$\begin{cases} P_p = a \\ P'_p = P''_p = 0 \end{cases}$$

con lo que substituyendo en la ecuación inicial resulta que: 5a = 4 $\rightarrow$ a = 4/5 , y entonces la I.G. será:

$$P(t) = P^*(t) + P_p = e^{-2t}(A\cdot\cos t + B\cdot\sin t) + \frac{4}{5}.$$

Para las condiciones dadas en el enunciado, correspondientes al valor del golpe de ariete máximo, se tendrá que:

$$P(0) = A + \frac{4}{5} = 2; \quad A = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5};$$

$$P'(t) = -2\cdot e^{-2t}(A\cdot\cos t + B\cdot\sin t) + e^{-2t}(B\cdot\cos t - A\cdot\sin t) =$$
$$= e^{-2t}(-2A\cdot\cos t - 2B\cdot\sin t + B\cdot\cos t - A\cdot\sin t)$$

$$P'(0) = -2A + B = 1; \quad B = 1 + \frac{12}{5} = \frac{17}{5};$$

y la I.P. resultante, que es la solución pedida del modelo, es la siguiente, que supondría una amortiguación de tipo exponencial (ver epígrafe 2.6. más adelante):

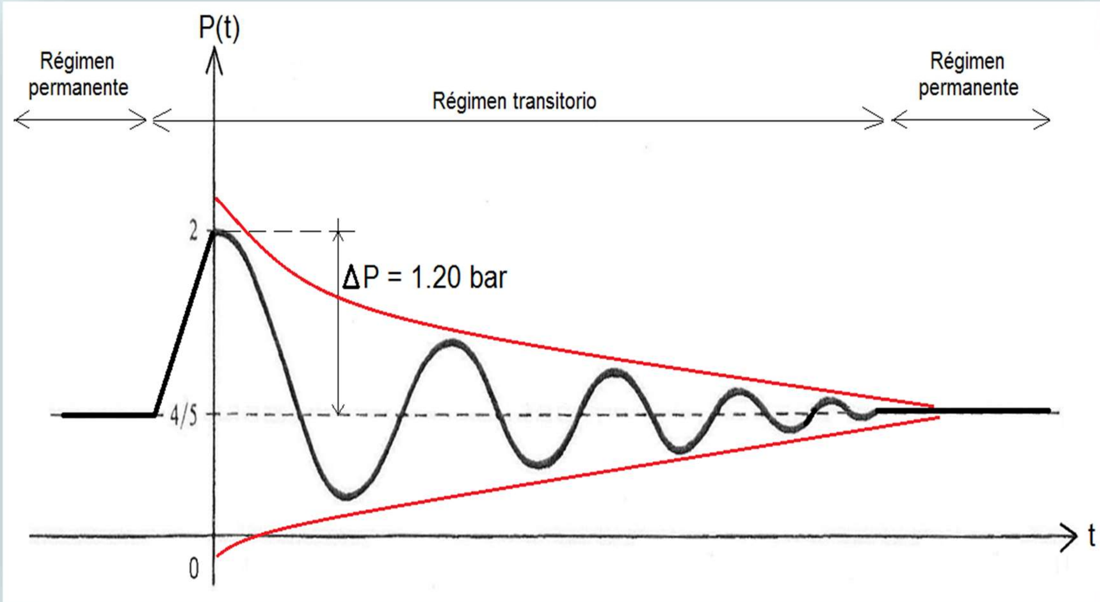
$$P(t) = e^{-2t}\left(\frac{6}{5}\cdot\cos t + \frac{17}{5}\cdot\sin t\right) + \frac{4}{5}$$ , esto es:

| ***t (s)*** | ***$P_t$ (bar)*** |
|---|---|
| 0 | 2.00 |
| 1 | 1.27 |
| 2 | 0.85 |
| … | … |
| $+\infty$ | 0.80 |

En este caso, se tendrá una presión de equilibrio, a largo plazo (régimen permanente), de:

$P_e = \lim_{t\to+\infty} P(t) = \frac{4}{5}$ = 0’80 bar, y los picos de las ondas de presión originadas oscilarán convergentemente alrededor de este valor.

La representación gráfica de la trayectoria temporal pedida es:




Evolución temporal continua de las ondas de presión.

con lo que el golpe de ariete máximo (positivo) que tiene lugar es del orden de:

$$\Delta P = P_0 - P_e = 2.00 - 0.80 = 1.20 \text{ bar.}$$

## 2.4. Como ecuación integro-diferencial

***Ejemplo 4***

Se trata de definir la trayectoria temporal de un golpe de ariete cuyo modelo matemático viene dado por la ecuación integro-diferencial, del tipo Volterra, siguiente: $P'(t) = -\int_0^1 \ln t \cdot dt - \sin t - \int_0^t P(\tau) d\tau$ ,

significando la variable P(t) las sobrepresiones (positivas y negativas) medidas sobre la presión estática o de equilibrio, tomando como final práctico de la perturbación transitoria el instante t = 0 y haciendo la representación gráfica correspondiente del fenómeno.

*Solución:*

Procede resolver, en primer lugar, la integral definida del 2º miembro de la ecuación dada, con lo que: $\int_0^1 \ln t \cdot dt = [t \cdot \ln t - t]_0^1 = -1$, y entonces, la ecuación ID dada quedará configurada así:

$$\frac{dP(t)}{dt} = 1 - \sin t - \int_0^t P(\tau) \cdot d\tau \ .$$

El final de la perturbación tendrá lugar cuando se cumpla la condición P(0) = 0. Aplicando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación dada, se tiene:

$$SP_s - P(0) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2+1} - \frac{P_s}{S}$$

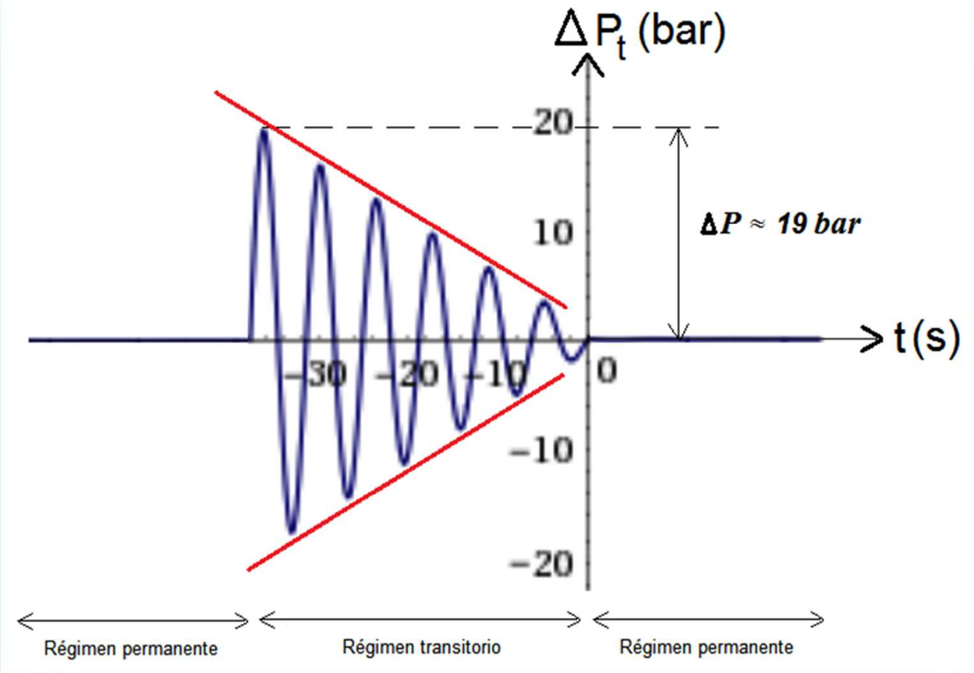
$$P_s\left(S + \frac{1}{S}\right) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2+1} \Rightarrow P_s = \frac{1}{S^2+1} - \frac{S}{(S^2+1)^2}$$

y la solución buscada o función generatriz será, utilizando las transformadas de la tabla básica (ver Apéndice III):

$P(t) = \sin t - \frac{1}{2} t \cdot \sin t = \sin t(1 - \frac{t}{2})$ . Esto es:

| ***t (s)*** | ***$\Delta P_t$ (bar)*** |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -10 | 3.26 |
| -20 | -10.04 |
| -30 | 15.81 |
| -36 | 18.84 |
| -38 | 5.93 |
| … | … |

La representación gráfica de esta solución de los picos de presión positivos y negativos, que siguen una sucesión convergente infinitesimal, se expone a continuación:




Evolución temporal continua de las ondas de presión.

Por otra parte, cuando $\Delta$P = 0 no se notarían los efectos del golpe de ariete en la instalación estudiada, estado al que se tendería de modo oscilante y decreciente hasta el final de la perturbación. El golpe de ariete máximo positivo $\Delta P \approx 19$ bar tiene lugar aproximadamente 36 segundos antes de la estabilización a régimen permanente, pudiéndose considerar unos 38 segundos (concretamente: $12 \cdot \pi = 37.7$ segundos) como el tiempo de duración de la perturbación transitoria analizada.

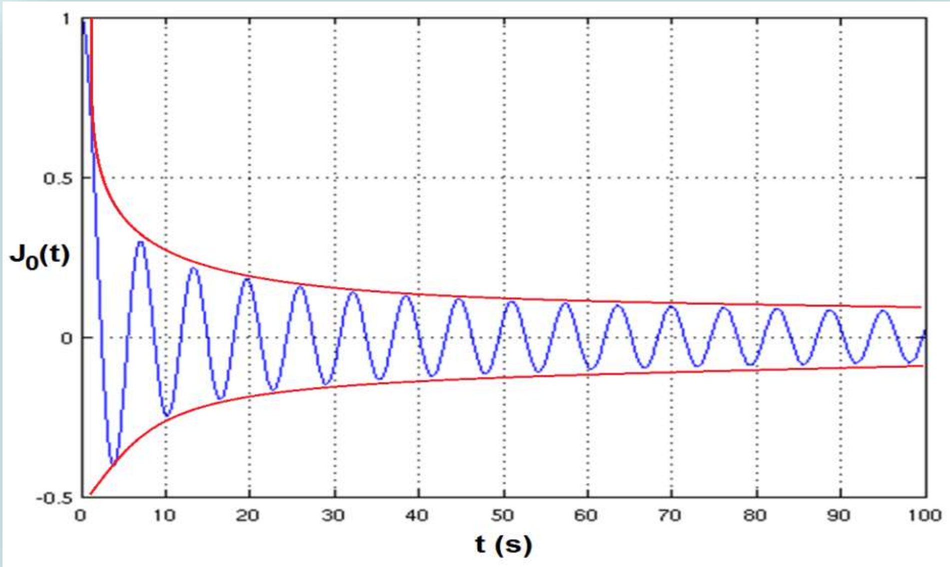
## 2.5. Como función de Bessel

La primera ecuación diferencial del tipo Bessel de que se tiene noticia en la historia de las matemáticas se presentó en 1732 a uno de los matemáticos de la famosa famila Bernouilli (Daniel), en el estudio de una cadena colgada por un extremo. Posteriormente, han sido múltiples las cuestiones tratadas por los físico-matemáticos (Euler, Lagrange, Fourier, Poisson, …) que han conducido a ecuaciones de este tipo o reducibles a él. Fue entre los años 1817 y 1824 cuando el astrónomo alemán Bessel realizó un estudio sistemático de tales ecuaciones, de gran importancia y aplicabilidad en la técnica, en relación con un problema de movimientos planetarios, lo que motivó el nombre con el que se bautizaron (Puig, 1962).

La solución de ciertas ecuaciones diferenciales de coeficientes variables puede venir por el desarrollo en serie de dicha solución. Para ello puede emplearse el método de los coeficientes indeterminados o el método de Frobenius, que resulta aplicable a la ecuación de Bessel, que se presenta en el estudio de fenómenos con simetría cilíndrica como el transitorio hidráulico que aquí nos ocupa. En este sentido, la función de Bessel de 1ª especie y orden cero viene dada por la expresión:

$$J_0(t) = 1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^6 + \ldots$$

cuya representación gráfica puede verse a continuación:




Función de Bessel $J_0(t)$.

Cabe tener en cuenta, también, según los casos, la aplicación de otras diferentes funciones de Bessel, como las $J_2(t)$, $J_3(t)$, …, $J_n(t)$, o sea, de 1ª especie y otros diversos órdenes o valores de *n*, que se ajustaran mejor a cada circunstancia, especialmente en aquellos casos de tipo o apariencia sinusoidal en que se produzca que $\Delta P_0 = 0$. También debe tenerse en cuenta el valor de la función derivada: $\frac{dJ_n(t)}{dt} = n\frac{J_n(t)}{t} - J_{n+1}(t)$ , y la condición necesaria o de primer grado de los extremos relativos o locales exige su anulación, o sea:

$$\frac{n \cdot J_n(t)}{t} = J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$$ , con lo que: $$J_n(t) = \frac{t \cdot J_{n-1}(t)}{n}$$

Si ahora consideramos el golpe de ariete máximo positivo de valor $\Delta P_0$ , se tendrá una expresión de la trayectoria temporal del fenómeno que será un múltiplo de la expresión anterior, dada por:

$$\Delta P_t = \Delta P_0 \cdot J_0(t) = \Delta P_0 [1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^6 + \ldots] =$$

$$= \Delta P_0 - \frac{\Delta P_0 \cdot t^2}{4} + \frac{\Delta P_0 \cdot t^4}{64} - \frac{\Delta P_0 \cdot t^6}{2304} + \ldots$$

Cuando **t** se hace grande ($t \to \infty$), la función $J_n(t)$ tiende hacia la siguiente aproximación asintótica (ver punto 2.7. al final de la presente lección):

$$J_n(t) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot t}} \cos\left(t - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$ , que para n = 0 ofrece: $$J_0(t) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot t}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

A continuación se presenta una tabla de la función $J_0(t)$ para los valores de *t* comprendidos entre 0 y 10 segundos, variando la variable tiempo de décima en décima de segundo.

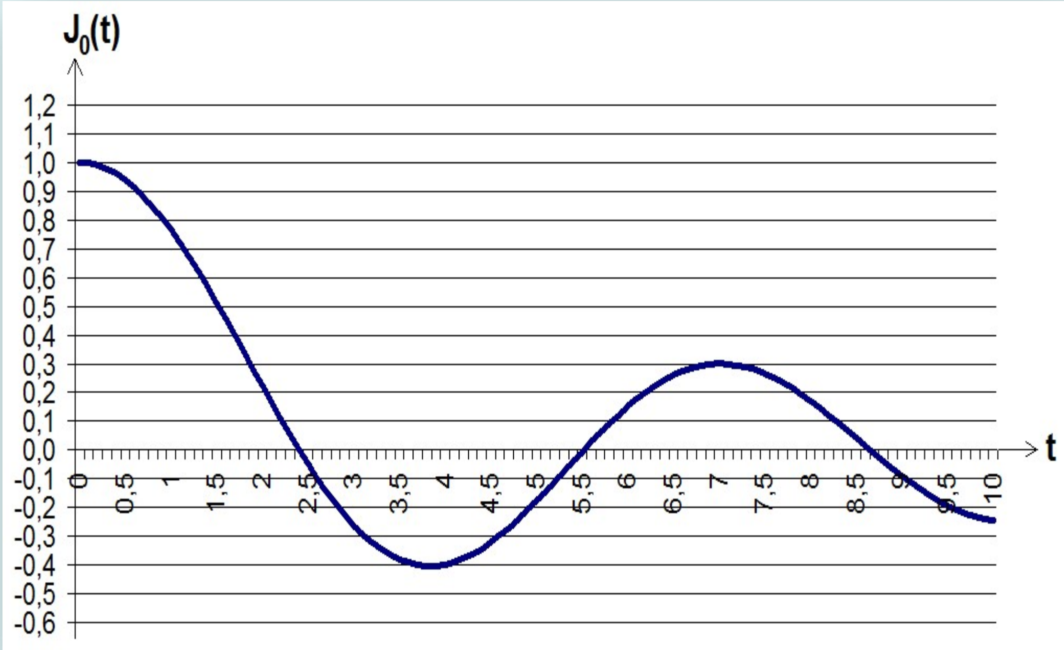
Valores de $J_0(t)$.

| t (s) | .0 | .1 | .2 | .3 | .4 | .5 | .6 | .7 | .8 | .9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 1.0000 | 0.9975 | 0.9900 | 0.9776 | 0.9604 | 0.9385 | 0.9120 | 0.8812 | 0.8463 | 0.8075 |
| **1** | 0.7652 | 0.7196 | 0.6711 | 0.6201 | 0.5669 | 0.5118 | 0.4554 | 0.3980 | 0.3400 | 0.2818 |
| **2** | 0.2239 | 0.1666 | 0.1104 | 0.0555 | 0.0025 | -0.0484 | -0.0968 | -0.1424 | -0.1850 | -0.2243 |
| **3** | -0.2601 | -0.2921 | -0.3202 | -0.3443 | -0.3643 | -0.3801 | -0.3918 | -0.3992 | -0.4026 | -0.4018 |
| **4** | -0.3971 | -0.3887 | -0.3766 | -0.3610 | -0.3423 | -0.3205 | -0.2961 | -0.2693 | -0.2404 | -0.2097 |
| **5** | -0.1776 | -0.1443 | -0.1103 | -0.0758 | -0.0412 | -0.0068 | 0.0270 | 0.0599 | 0.0917 | 0.1220 |
| **6** | 0.1506 | 0.1773 | 0.2017 | 0.2238 | 0.2433 | 0.2601 | 0.2740 | 0.2851 | 0.2931 | 0.2981 |
| **7** | 0.3001 | 0.2991 | 0.2951 | 0.2882 | 0.2786 | 0.2663 | 0.2516 | 0.2346 | 0.2154 | 0.1944 |
| **8** | 0.1717 | 0.1475 | 0.1222 | 0.0960 | 0.0692 | 0.0419 | 0.0146 | -0.0125 | -0.0392 | -0.0653 |
| **9** | -0.0903 | -0.1142 | -0.1367 | -0.1577 | -0.1768 | -0.1939 | -0.2090 | -0.2218 | -0.2323 | -0.2403 |
| **10** | -0.2460 | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- |

Y también su correspondiente gráfica:

***Ejemplo 5***

Si ahora desarrollamos un ejemplo cualquiera de este tipo de fenómenos transitorios, con una presión estática o de equilibrio, en régimen permanente, de valor $P_e$ = 4.00 bar, como el del anterior ejemplo 2, y un golpe de ariete máximo previamente calculado u observado de $\Delta P_0$ = 3.0 bar, resultaría la siguiente tabla, teniendo en cuenta, en su elaboración, que los valores que alcanzaría la presión, en cada instante, están sujetos a la expresión:



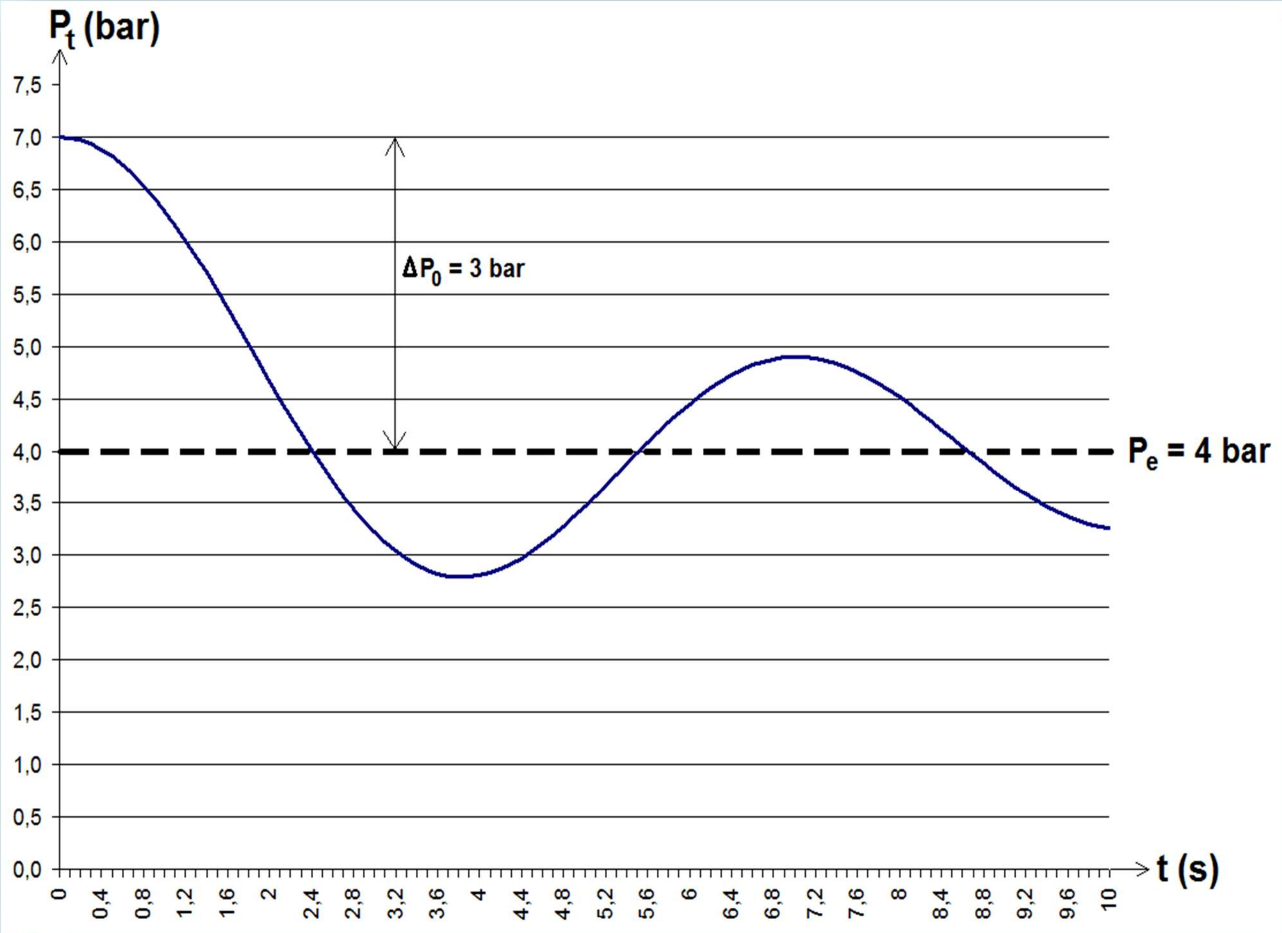

Trayectoria temporal de la función de Bessel $J_0(t)$.

$$P_t = P_e + \Delta P_t = P_e + \Delta P_0 \cdot J_0(t).$$

Valores de $P_t$.

| **t** | **.0** | **.1** | **.2** | **.3** | **.4** | **.5** | **.6** | **.7** | **.8** | **.9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 7.0000 | 6.9925 | 6.9700 | 6.9328 | 6.8812 | 6.8155 | 6.7360 | 6.6436 | 6.5389 | 6.4225 |
| **1** | 6.2956 | 6.1588 | 6.0133 | 5.8603 | 5.7007 | 5.5354 | 5.3662 | 5.1940 | 5.0200 | 4.8454 |
| **2** | 4.6717 | 4.4998 | 4.3312 | 4.1665 | 4.0075 | 3.8548 | 3.7096 | 3.5728 | 3.4450 | 3.3271 |
| **3** | 3.2197 | 3.1237 | 3.0394 | 2.9671 | 2.9071 | 2.8597 | 2.8246 | 2.8024 | 2.7922 | 2.7946 |
| **4** | 2.8087 | 2.8339 | 2.8702 | 2.9170 | 2.9731 | 3.0385 | 3.1117 | 3.1921 | 3.2788 | 3.3709 |
| **5** | 3.4672 | 3.5671 | 3.6691 | 3.7726 | 3.8764 | 3.9796 | 4.0810 | 4.1797 | 4.2751 | 4.3660 |
| **6** | 4.4518 | 4.5319 | 4.6051 | 4.6714 | 4.7299 | 4.7803 | 4.8220 | 4.8553 | 4.8793 | 4.8943 |
| **7** | 4.9003 | 4.8973 | 4.8853 | 4.8646 | 4.8358 | 4.7989 | 4.7548 | 4.7038 | 4.6462 | 4.5832 |
| **8** | 4.5151 | 4.4425 | 4.3666 | 4.2880 | 4.2076 | 4.1257 | 4.0438 | 3.9625 | 3.8824 | 3.8041 |
| **9** | 3.7291 | 3.6574 | 3.5899 | 3.5269 | 3.4696 | 3.4183 | 3.3730 | 3.3346 | 3.3031 | 3.2791 |
| **10** | 3.2620 | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- |

Y también le correspondería la siguiente representación gráfica de la trayectoria temporal de las ondas de presión generadas, en sucesión convergente, por el fenómeno transitorio hidráulico en estudio durante los primeros 10 segundos desde la aparición del expresado fenómeno:




Trayectoria temporal de $P_t$.

cuyos extremos (máximos y mínimos) se encuentran en la siguiente tabla:

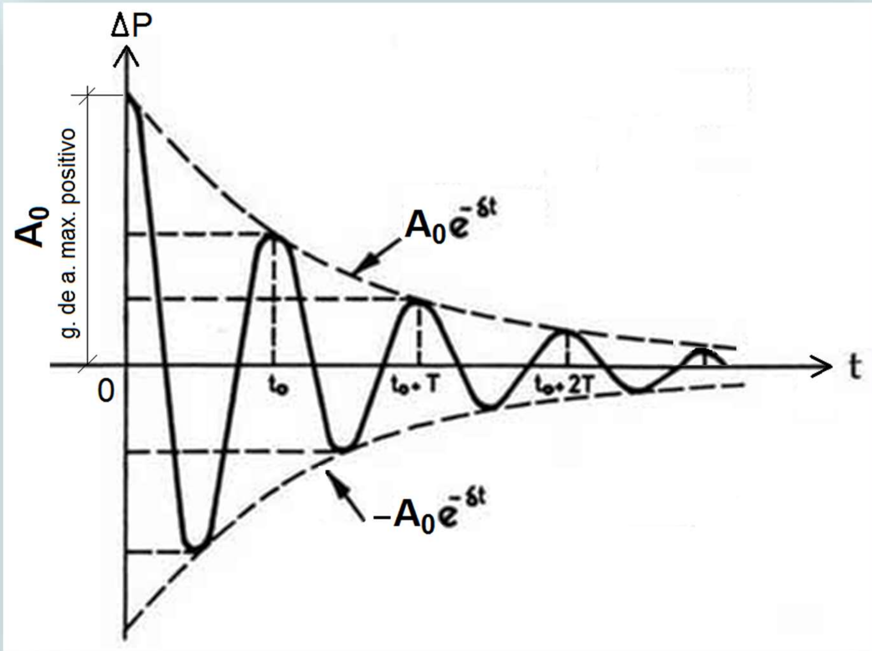
| *t (s)* | *$P_t$ (bar)* |
|---|---|
| 0 | 7.00 |
| 3.8 | 2.79 |
| 7.0 | 4.90 |
| … | … |
| +∞ | 4.00 |

## 2.6. Amortiguación exponencial

La característica esencial de las oscilaciones amortiguadas es que la amplitud de la oscilación disminuye exponencialmente con el tiempo, de tal modo que el sistema oscila con amplitud constantemente decreciente. La "amortiguación crítica" es aquella por encima de la cual ya no se produce oscilación alguna, puesto que la fuerza de amortiguación es superior a la energía acumulada en las partículas de fluido vibrantes.

Si en el caso de una oscilación libre nada perturbara al sistema en oscilación, éste seguiría vibrando indefinidamente. Como ya se ha explicado, en las conducciones hidráulicas existe lo que se conoce como fuerza de fricción (o rozamiento), que es el producto del choque de las partículas del fluido entre sí y con las paredes más o menos rugosas del tubo, lo que origina la pérdida de carga continua J así como la accidental que se origina en las piezas singulares de la conducción y la consecuente transformación de determinadas cantidades de energía en calor. Ello resta cada vez más energía al movimiento (el sistema oscilando), produciendo finalmente que el movimiento transitorio se detenga para volver al régimen permanente.

Se trata, en definitiva, de una oscilación subamortiguada como la que aparece representada en la figura siguiente.




Oscilación exponencial amortiguada del golpe de ariete.

En la oscilación amortiguada la amplitud de la misma A(t) varía en el tiempo (según una curva exponencial), haciéndose cada vez más pequeña hasta llegar a anularse. Es decir, el sistema hidráulico se detiene finalmente en su posición de reposo o estática. Cuando la resistencia del medio es pequeña comparada con las fuerzas elásticas y de inercia, tiene lugar una EDO de 2º orden que define movimientos cuya integral general es: $\Delta P = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cdot \cos\omega t + +C_2 \cdot \sin\omega t)$. Una representación matemática que pudiera ser válida, en ciertos casos, del presente fenómeno es la función sinusoidal: $\Delta P = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, con $\omega = 2\pi$, donde $\delta$ es el “coeficiente o constante de amortiguación o decaimiento”, mientras que su inverso $\tau = 1/\delta$ representa el tiempo que tarda en decaer la amplitud (en este modelo, la amplitud de la oscilación se reduce en un factor igual a **e** (o sea, a un 1/e = 36.79% de la que tuviera anteriormente). Dicha función se representa por una sinusoide deformada, de tal suerte que sus oscilaciones se hallan comprendidas entre la curva exponencial $\Delta P = A_0 \cdot e^{-\delta t}$ y su simétrica en relación al eje de abscisas. La rapidez de decrecimiento de estas oscilaciones depende del valor de $\delta$; si su valor es elevado, el amortiguamiento es muy rápido a causa de la rapidez de decrecimiento de la función exponencial antedicha. La “pulsación” $\omega$, cuando se produce amortiguamiento, es más pequeña que si no lo hubiera, por lo tanto, la resistencia hace disminuir la frecuencia ($\omega/2\pi$) y aumentar el periodo.

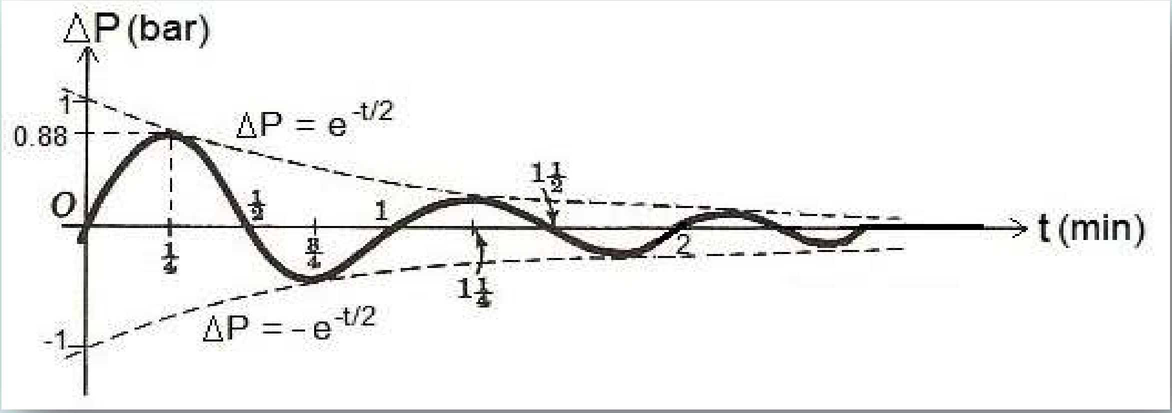
Notemos que la amplitud variable $A_0 \cdot e^{-\delta t}$ es también una función del tiempo (es decir, que varía con el tiempo, decayendo exponencialmente así: $A(t) = \pm A_0 \cdot e^{-\delta t}$, que es la ecuación de la curva de la “amortiguación crítica”, constituyéndose el eje de abscisas Ot en asíntota horizontal), mientras que $\mathbf{A_0}$ y $\boldsymbol{\varphi}$ son constantes que dependen de las condiciones de inicio del movimiento. En el ejemplo propuesto a continuación, toman los valores siguientes: $A_0 = 1$, con $\delta = ½$ y $\varphi = 0$. No obstante, la frecuencia de oscilación del sistema (que depende de propiedades intrínsecas del propio sistema, es decir, es característica del mismo) no varía, manteniéndose constante a lo largo de todo el proceso, salvo que se estuviera ante una amortiguación muy grande o sobreamortiguada, que podría tener lugar como consecuencia de la instalación de los adecuados mecanismos anti-ariete. Por otra parte, La energía de las partículas de agua que describen una oscilación amortiguada es la suma de la energía cinética de dichas partículas y de su energía potencial, y decrece exponencialmente con el tiempo. El “empaquetamiento” de las ondas de presión, en ocasiones, puede conllevar la conveniencia de la averiguación de la ecuación de la curva envolvente de las ondas de presión (aunque no de un haz de curvas planas diferentes) o de amortiguación crítica que las limita. La curva envolvente así obtenida tiene la propiedad de ser tangente a los extremos relativos (máximos y mínimos) de las ondas de presión a lo largo del tiempo.

### *Ejemplo 6*

| *t (m)* | *$\Delta P_t$ (bar)* |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1/4 | 0.88 |
| 1/2 | 0 |
| 3/4 | -0.69 |
| 1 | 0 |
| 5/4 | 0.54 |
| 3/2 | 0 |
| 7/4 | -0.42 |
| … | … |
| $+\infty$ | 0 |

Veamos, a continuación, un sencillo ejemplo al respecto. Sea un golpe de ariete cuyo modelo hidráulico definitorio de la trayectoria temporal de aquellas, una vez realizadas las observaciones oportunas, viene dado por la ecuación de la oscilación amortiguada siguiente: $\Delta P = e^{-t/2} \cdot \sin(2\pi t)$, siendo t = 0 minutos el instante en que comienza a manifestarse el fenómeno transitorio en cuestión. Se tendrán, entonces, los siguientes valores: →

puesto que: $\lim\limits_{t \to +\infty} \Delta P_t = \lim\limits_{t \to +\infty} [e^{-t/2} \cdot \sin(2\pi t)] = 0$, en que no se notarían los efectos del golpe de ariete en la instalación estudiada, estado al que se tendería de modo oscilante y decreciente hasta el final de la perturbación transitoria, con la siguiente representación gráfica sinusoidal:




Determinación de la envolvente de la trayectoria temporal.

teniendo lugar un golpe de ariete máximo (positivo) de $\Delta P$ = 0.88 bar a los 0.25 minutos (15 segundos) del inicio de la perturbación. Se cumple que:

- Cuando $\Delta P = 0 \Rightarrow \sin(2\pi t) = 0$ y t = 0, ½, 1, 3/2, 2, …
- Cuando t = ¼, 5/4, 9/4, 13/4, … $\Rightarrow \sin(2\pi t) = 1$ y $\Delta P = e^{-t/2}$
- Cuando t = ¾, 7/4, 11/4, 15/4, … $\Rightarrow \sin(2\pi t) = -1$ y $\Delta P = - e^{-t/2}$

La trayectoria temporal analizada oscila entre las dos curvas: $\Delta P = \pm e^{-t/2}$, que son las envolventes buscadas, que cuando t = 0 ofrecen $\Delta P = \pm 1$ bar, y sus primeras y segundas derivadas llevarían a determinar los diferentes puntos críticos (extremos absolutos o relativos y puntos de inflexión), así como los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad, esto es:

$$\begin{cases} \Delta P' = e^{-t/2}(2\pi\cdot\cos 2\pi t - \frac{1}{2}\sin 2\pi t) \\ \Delta P'' = e^{-t/2}\left[(\frac{1}{4} - 4\pi^2)\cdot\sin 2\pi t - 2\pi\cdot\cos 2\pi t\right] \end{cases}$$

• Cuando $\Delta P' = 0 \Rightarrow 2\pi\cdot\cos 2\pi t - \frac{1}{2}\sin 2\pi t = 0 \Rightarrow \text{tg } 2\pi t = 4\pi = 12.56637$.

• Cuando $\Delta P'' = 0 \Rightarrow \text{tg } 2\pi t = \frac{2\pi}{1/4 - 4\pi^2} = \frac{8\pi}{1 - 16\pi^2} = -0.16017$ .

Obsérvese, por último, que en el caso de comenzar analizando el transitorio hidráulico considerando el instante inicial P(0) como la magnitud del golpe de ariete máximo positivo observado o calculado, la curva descriptiva del fenómeno se ajustará a una cosinusoide, aunque, de hecho, las funciones trigonométricas seno y coseno son la misma sinusoide desfasada (desplazada) en ($\pi$/2) radianes, teniendo en cuenta la relación trigonométrica: $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, donde dicha función continua aparece como una función compuesta, a su vez, de sendas funciones continuas.

## 2.7. Aproximaciones asintóticas

Los ceros de las funciones de Bessel de 1ª especie $J_n(t)$ tienden a ser equidistantes a intervalos de amplitud $\pi$ al crecer **t**. La razón de esta circunstancia se comprende al estudiar las llamadas “expresiones asintóticas” de dichas funciones. Los desarrollos de las $J_n(t)$ en serie son rápidamente convergentes para valores pequeños de **t**, o sea, al principio de la aparición del fenómeno transitorio hidráulico. No obstante, para grandes valores de **t** su lenta convergencia los hace impropios para el cálculo numérico y pueden ser substituidos por expresiones asintóticas, es decir, otras funciones que se aproximan suficientemente a $J_n(t)$ al crecer **t,** a efectos prácticos, y que resultan más cómodas de calcular (Puig, 1962). Del mismo modo, se pueden expresar las funciones de Bessel de 1ª especie mediante integrales definidas, así:

$$J_n(t) = \frac{\int_0^{+\pi} \cos n\varphi \cdot \cos(t \cdot \sin\varphi) \cdot d\varphi - \int_0^{+\pi} \sin n\varphi \cdot \sin(t \cdot \sin n\varphi) \cdot d\varphi}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi + t \cdot \sin\varphi) \cdot d\varphi \quad .$$

Entonces, para n = 0, se tendrá la función de Bessel buscada:

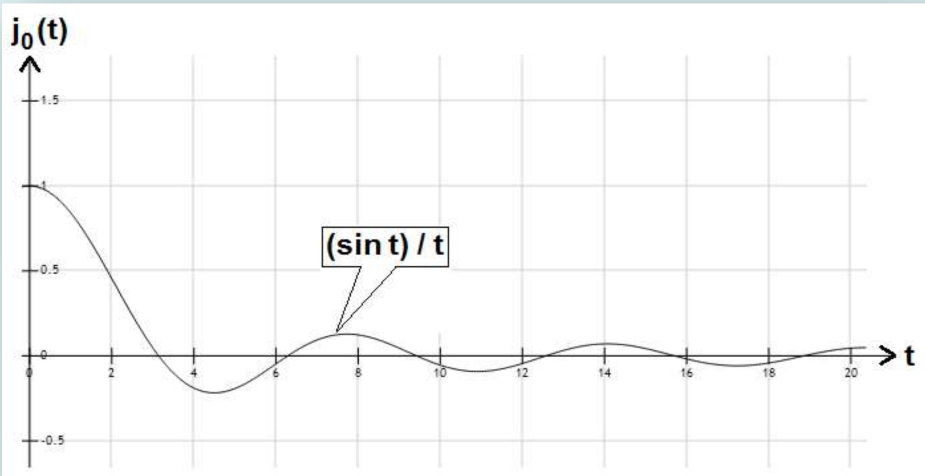
$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t \cdot \sin\varphi) \cdot d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t \cdot \sin\varphi) \cdot d\varphi \ , \ \forall\ t \in \{\Re\} \ ,$$

que enlaza con el concepto de “promedio integral”, “ordenada media” o “valor medio teórico”.

Las primeras y segundas derivadas de $J_0(t)$ nos permiten localizar los puntos críticos (extremos relativos o “picos de presión”, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad), mientras que la función de Bessel de 2ª especie $Y_0(t)$, también conocida como de Weber-Neumann, puede adaptarse aceptablemente al estudio del transitorio hidráulico inicialmente negativo originado por la apertura de una válvula.

Otra expresión analítica que pudiera resultar útil a los efectos pretendidos de representación del transitorio en estudio es la función esférica de Bessel de 1ª especie, que para n = 0 ofrece: $j_0(t) = (\sin t)/t$, puesto que:

$j_n(t) = (-t)^n \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{\sin t}{t}$ , con la siguiente representación gráfica que consideramos interesante por su sencillez, también tendente a 0 hasta retornar al régimen permanente, o sea:

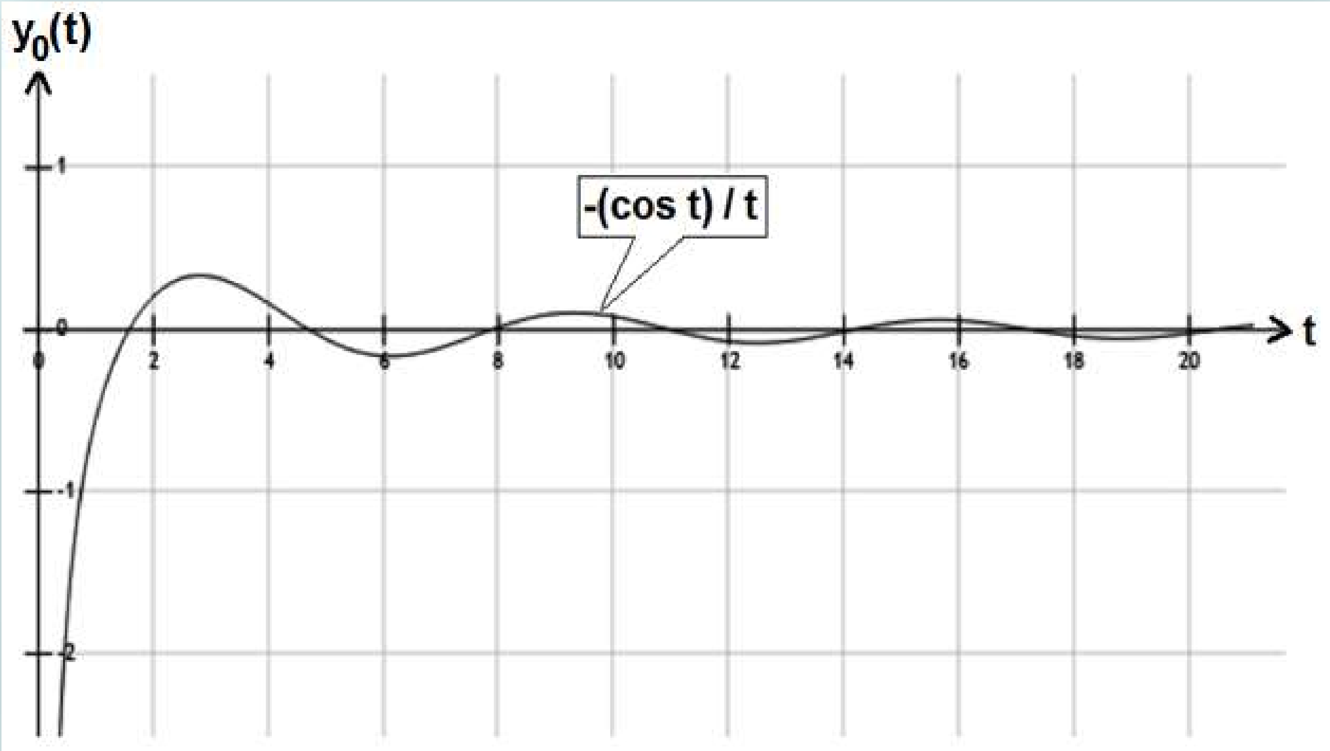





Trayectoria temporal de la función (sin t)/t, para transitorio inicialmente positivo.

Y lo mismo cabe afirmar de la función esférica de Bessel de 2ª especie y orden 0, que ofrece:

$y_0(t)$ = -(cos t)/t , puesto que: $y_n(t) = -(-t)^n \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{\cos t}{t}$ , que presenta el inconveniente teórico de la existencia de una rama infinita (asíntota vertical, t = 0) coincidente con el eje de ordenadas y que ofrece la representación gráfica siguiente:




Trayectoria temporal de la función -(cos t)/t, para transitorio inicialmente negativo.

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 22

## ECUACIONES INTEGRALES

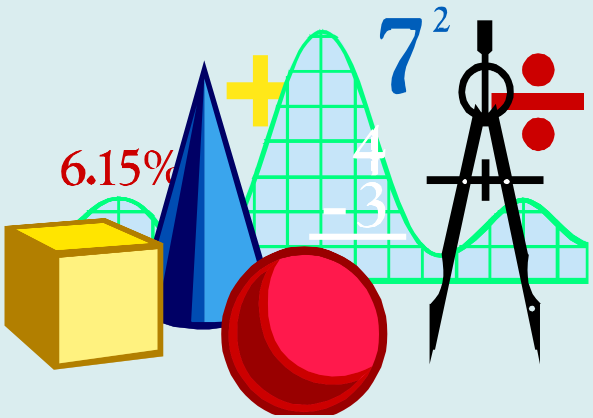
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. CONCEPTOS PREVIOS

Una *ecuación integral* es una ecuación en que la función incógnita aparece dentro de una integral sin que aparezcan derivadas involucradas en la ecuación. Es decir, la incógnita forma parte también del integrando o función subintegral. Para dar solución a este problema se hace uso del mismo procedimiento empleado para solventar una ecuación diferencial ordinaria, donde debe encontrarse primero la función en términos de *s* y luego, a través de la correspondiente transformada inversa, encontrar la función en *t* que es incógnita. Como nos hallamos frente a una integral, debemos hacer uso del teorema de la convolución al objeto de encontrar la transformada de Laplace de dicha integral. En efecto, así como las ecuaciones diferenciales ligan una función incógnita de una o varias variables con sus derivadas totales o parciales, las ecuaciones integrales que aquí presentaremos someramente relacionan la función incógnita con una integral en cuyo integrando aparece la susodicha función. Se presentan tales ecuaciones en un buen número de cuestiones técnicas o económicas, proporcionando métodos que, en ocasiones, resultan harto más ventajosos que los usuales empleados en la teoría de las ecuaciones diferenciales que acabamos de estudiar, especialmente en la resolución de ciertos tipos de problemas en cuyo planteamiento intervienen condiciones de contorno.

Los tipos de ecuaciones integrales más frecuentes son los lineales, es decir, aquellos en que la función incógnita aparece linealmente bajo el signo de integración y se llaman *ecuaciones de Freedholm o de Volterra* (en honor de estos eminentes matemáticos, aunque su auténtico descubridor fue Abel), según que los límites de la integral sean fijos o variables, y se clasifican en ecuaciones de *primera especie o clase* y de *segunda especie o clase* según que dicha función incógnita aparezca solamente en el integrando o también fuera de él. Valga, al respecto, el siguiente cuadro aclaratorio:

| AUTOR | ESPECIE | INHOMOGÉNEA | HOMOGÉNEA |
|---|---|---|---|
| FREEDHOLM | 1ª | $f(x)=\int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$ | $\int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt=0$ |
| | 2ª | $\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$ | $\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$ |
| VOLTERRA | 1ª | $f(x)=\int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$ | $\int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt=0$ |
| | 2ª | $\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$ | $\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$ |

Existe una conexión estrecha entre las ecuaciones integrales y las ecuaciones diferenciales, y de hecho algunos problemas pueden formularse como ecuación diferencial o equivalentemente como ecuación integral. Ver, por ejemplo, el modelo de Maxwell de viscoelasticidad.

El tipo de ecuación integral más sencillo es el de una *ecuación de Freedholm* de primera clase o especie y lineal, a saber:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Donde:

*φ(t)* es una función desconocida o incógnita,
*f(x)* es una función conocida y
*K(x,t)* es una función de dos variables también conocida, llamada "núcleo de la ecuación integral" ("kernel"), que se supone continua y, por tanto, acotada en el intervalo completo cerrado de integración [a,b], lo mismo de la variable *x* que de la variable *t*.

## 2. CLASIFICACIÓN

Las ecuaciones integrales que aquí tratamos se clasifican según tres criterios dicotómicos que, combinados entre sí, dan hasta ocho tipos de ecuaciones diferentes, a saber:

- *Límites de integración*:
  * Ambos fijos: Ecuación integral de Freedholm.
  * Uno de ellos variable: Ecuación integral de Volterra.

- *Lugar donde aparece la función incógnita*:
  * Únicamente dentro de la integral: ecuación integral de primera clase o especie.
  * Tanto dentro de la integral como fuera de la misma: ecuación integral de segunda clase o especie.

- *Homogeneidad, según que f sea o no nula*:
  * Si *f* es idénticamente nula: ecuación integral homogénea.
  * Si *f* no es nula: ecuación integral inhomogénea o completa.

## 3. ECUACIONES INTEGRALES DE VOLTERRA

*Ejemplo 1*

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, como es el caso del pescado y del marisco, se tienen las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \rightarrow y = 40 - 8x \\ O \rightarrow y = x + \int_0^x y(t)\cdot \sin(x-t)\cdot dt \end{cases}$$

siendo *y* el precio (p) expresado en euros/kg y *x* la cantidad (q) del bien expresada en toneladas/mes. Estudiar el equilibrio del mercado y el ingreso anual estimado del pescadero.

*Solución:*

La función de oferta viene expresada como una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie del tipo de convolución con $\lambda = 1$, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. Veamos que esta ecuación integral se puede escribir, teniendo en cuenta la definición de la convolución de las dos funciones *y(x)* y *sin x*, como: $y(x) = x + y(x) * \sin x$. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de esta ecuación y aplicando el teorema de Convolución (Apéndice III), se tendrá que:

$$L(y) = L(x) + L(y)\cdot L(\sin x) =$$

$$= \frac{1}{S^2} + \frac{L(y)}{S^2+1} = \frac{S^2+1}{S^2(S^2+1)} + \frac{S^2 \cdot L(y)}{S^2(S^2+1)} = \frac{S^2+1+S^2 \cdot L(y)}{S^4+S^2}$$ , de donde:

$$L(y)\cdot(S^4 + S^2) = S^2 + 1 + S^2\cdot L(y) = S^4\cdot L(y) + S^2\cdot L(y)$$, y entonces:

$$L(y) = \frac{S^2+1}{S^4} = \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S^4}$$ , de donde se tiene la función generatriz Laplace:

$$\boxed{y(x) = L^{-1}(\frac{1}{S^2}) + L^{-1}(\frac{1}{S^4}) = x + \frac{x^3}{3!} = x + \frac{x^3}{6}},$$

que es, por cierto, la solución buscada, tal como se puede verificar por substitución directa como sigue:

$$y(x) = x + \int_0^x (t + \frac{t^3}{6})\cdot \sin(x-t)\cdot dt = x + \left[\frac{t^2}{6}[3\cdot \sin(x-t) + t\cdot \cos(x-t)]\right]_0^x = x + \frac{x^3}{6},$$

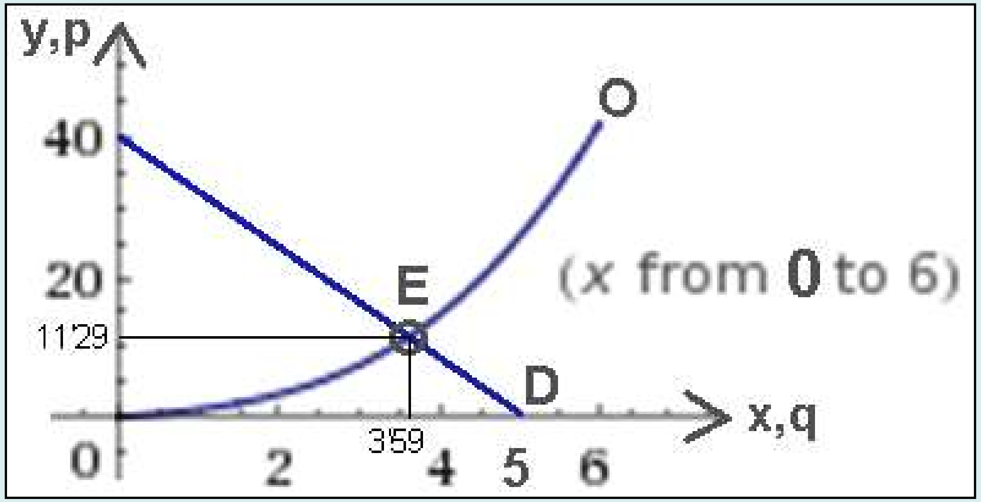
que puede comprobarse mediante la resolución de esta integral trigonométrica aplicando las fórmulas de integración por partes y de reducción pertinentes. Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \rightarrow y = 40 - 8x \\ O \rightarrow y = x + \dfrac{x^3}{6} \end{cases}$$

$40 - 8x = x + \frac{x^3}{6}$ ; $x^3 + 54x - 240 = 0$, cuya única solución real es:

$x = 3'5886 \approx 3'59$. En este caso: $y = 40 - 8\cdot 3'5886 = 11'29$, o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio medio de 11'29 €/kg y una cantidad de 3.589 kg/mes de producto diverso (pescado y marisco).

La representación gráfica de esta solución, que es evidentemente una parábola cúbica por lo que se refiere a la función de oferta, así como del punto E de equilibrio del mercado, se exponen a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas cartesianas rectangulares):




Por otra parte, en el caso de la función de oferta se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si:

$x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x^2}{6} = +\infty$ , luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Así mismo los ingresos brutos anuales del pescadero vendrán dados por:

$$I = p \times q = 11'29 \text{ €/kg} \times 3.589 \text{ kg/mes} \times 12 \text{ meses/año} = 486.237'72 \text{ €/año}.$$

*Ejemplo 2*

Sea la función de coste unitario de producción a corto plazo de una empresa dada por la expresión:

$$f(x) + 2\int_0^x f(\tau)d\tau \cdot \cos(x - \tau)d\tau = 4e^{-x} + \sin x.$$

Se desea conocer: a) la función algebraica de coste unitario de dicha empresa, así como b) dicho coste, para una producción de 3.000 ud., siendo *y* (euros/ud.) y *x* (miles de ud.).

*Solución:*

a) Se trata de una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie con $\lambda$ = -2. Tomando las transformadas de Laplace se tiene que:

$$\boxed{\begin{array}{l} F(S) + 2F(S)\left(\dfrac{S}{S^2+1}\right) = \dfrac{4}{S+1} + \dfrac{1}{S^2+1}, \\[2ex] F(S)\left(\dfrac{S^2+2S+1}{S^2+1}\right) = \dfrac{4}{S+1} + \dfrac{1}{S^2+1} \Rightarrow F(S)\left(\dfrac{(S+1)^2}{S^2+1}\right) = \dfrac{4}{S+1} + \dfrac{1}{S^2+1}, \\[2ex] F(S) = \dfrac{4(S^2+1)}{(S+1)(S+1)^2} + \dfrac{S^2+1}{(S^2+1)(S+1)^2} = \dfrac{4S^2+4}{(S+1)^3} + \dfrac{1}{(S+1)^2}. \end{array}}$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados a partir de las fracciones parciales, se tendrá:

$$\frac{A}{S+1} + \frac{B}{(S+1)^2} + \frac{C}{(S+1)^3} = \frac{4S^2+4}{(S+1)^3},$$

$$A(S+1)^2 + B(S+1) + C = 4S^2 + 4,$$

$$A = 4, B = -8,\ C = 8.$$

De donde se deduce que:

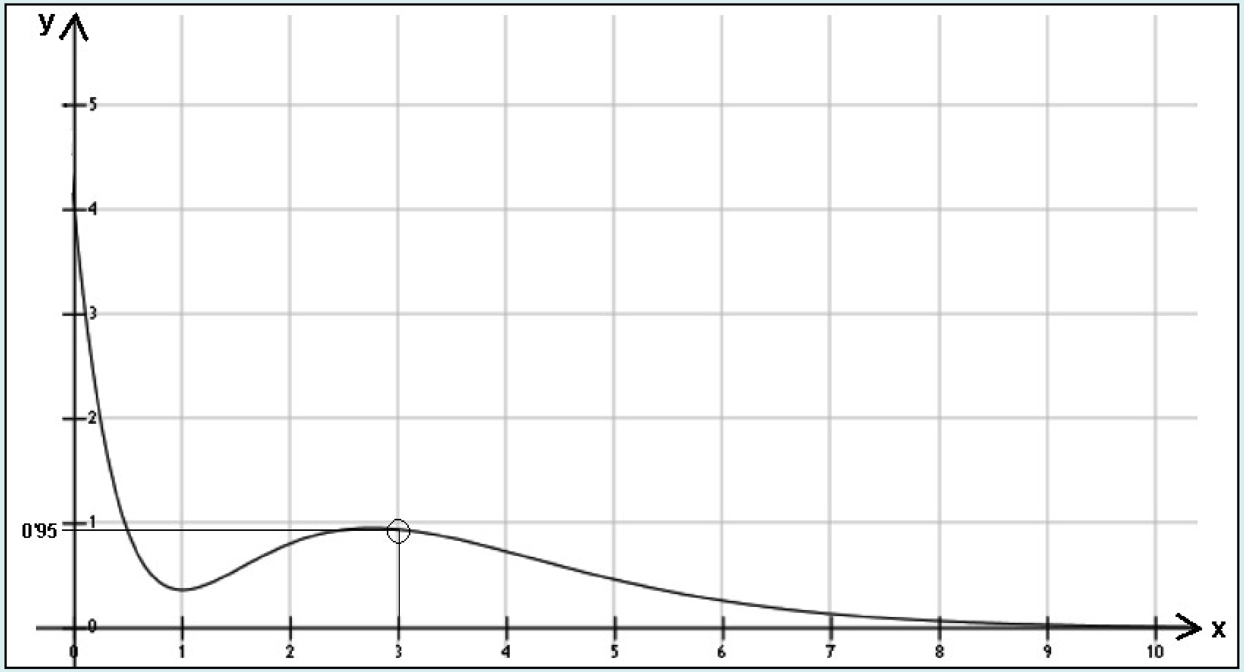
$$y(T) = L^{-1}\left\{\frac{4}{S+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{8}{(S+1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{8}{(S+1)^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+1)^2}\right\},$$

y la solución buscada será la función generatriz Laplace siguiente:

$$\boxed{y(x) = 4e^{-x} - 7x{\cdot}e^{-x} + 4x^2e^{-x} = e^{-x}(4x^2 - 7x + 4)}$$

b) En este caso, con x = 3, se tendrá que:

y = 19/20’085 ≈ 0’95 €/ud., con la siguiente representación gráfica:




Debe tenerse en cuenta que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 7x + 4}{e^x} = 0$, por lo que el eje OX constituye una asíntota horizontal de la curva.

*Ejemplo 3*

La ecuación de envejecimiento de una tubería de amianto-cemento de calibre 32" (DN = 800 mm) y 1.350 m de longitud, viene dada por la expresión (Franquet, 2019):

$$q_t = q(t) = e^{-t} + \int_t^{\infty} q(\tau) \cdot d\tau + \lim_{q \to 0} \frac{1 - \cos q}{q}$$ , con *t* expresado en siglos.

*Solución:*

En primer lugar, debería hallarse el valor del límite que aparece en la expresión del modelo hidráulico dado. Se trata, en principio, de un límite indeterminado de la forma simbólica [0/0] que se resolverá por aplicación sucesiva de infinitésimos equivalentes, con lo que:

$$\lim_{q \to 0} \frac{1 - \cos q}{q} = \lim_{q \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{q}{2}}{q} = \lim_{q \to 0} \frac{2\left(\frac{q}{2}\right)^2}{q} = \lim_{q \to 0} \frac{q}{2} = 0 \, ,$$

y la ecuación dada quedará expresada del siguiente modo: $q_t = q(t) = e^{-t} + \int_t^{\infty} q(\tau)\cdot d\tau$ .

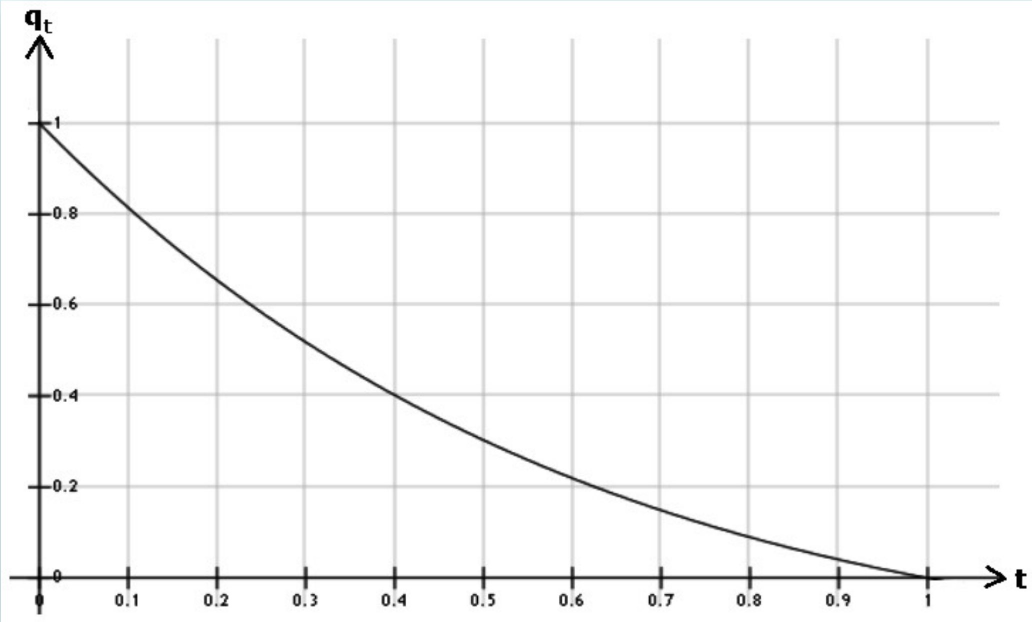
Esta función es, evidentemente, una ecuación integral inhomogénea del tipo Volterra de 2ª especie, con $\lambda = 1$, cuya resolución ofrece la función siguiente: $q(t) = e^{-t}(1 - t)$ y $q(0) = 1\ m^3/s$. En efecto, veamos que:

$$e^{-t}(1-t) = e^{-t} - t\cdot e^{-t} = e^{-t} + \int_t^{\infty} e^{-\tau}(1-\tau)\cdot d\tau \text{ , o sea:}$$

$$-t\cdot e^{-t} = \int_t^{\infty} e^{-\tau}(1-\tau)\cdot d\tau = \left[\tau\cdot e^{-\tau}\right]_t^{\infty} = -t\cdot e^{-t} \text{ , c.s.q.d.}$$

Como sucede que: $q_t'' = \frac{d^2 q_t}{dt^2} = -e^{-t}(t-3) > 0 \rightarrow$ función cóncava con respecto a las q+.

La representación gráfica correspondiente viene dada por:




Función de envejecimiento.

A esta tubería de fibrocemento DN = 800 mm le corresponde, para el caudal inicial antedicho, una velocidad media de circulación del agua de:

$$V = \frac{q_0}{S} = \frac{4 \times 1}{\pi \times 0.8^2} = 1.99\ m/s.$$

En base a la formulación que se propone (Franquet, 2019), la pérdida de carga continua unitaria de esta tubería en servicio será (con k = 2):

$$J = 0.000948 \cdot V^2 \cdot D^{-1.2691} = \frac{0.000948 \times 1.99^2}{0.8^{1.2691}} = 0.005 \;\; m/m$$

y la pérdida de carga total, incluyendo la que se estima originada por las piezas especiales, será del orden de:

$$H = J \times L = (0.005 \times 1350) \times 1.15 = 7.76 \text{ m.c.a.}$$

El caudal inicial de 1 m³/s, al cabo de 20 años de servicio, será de 0.65 m³/s, y al cabo de 60 años de 0.22 m³/s, y los resultados completos hasta los 100 años de vida útil en que se produce la anulación del caudal circulante pueden verse en la siguiente tabla, donde se incluye también la pérdida de caudal $\Delta q$, estando todos ellos expresados en m³/s:

Evolución de la pérdida del caudal.

| $t$ | $q_t$ | $\Delta q = q_0 - q_t$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.00 | 0 |
| 0.1 | 0.81 | 0.19 |
| 0.2 | 0.65 | 0.35 |
| 0.3 | 0.52 | 0.48 |
| 0.4 | 0.40 | 0.60 |
| 0.5 | 0.30 | 0.70 |
| 0.6 | 0.22 | 0.78 |
| 0.7 | 0.15 | 0.85 |
| 0.8 | 0.09 | 0.91 |
| 0.9 | 0.04 | 0.96 |
| 1.0 | 0.00 | 1.00 |

Se trata, en definitiva, de una instalación considerada de "desgaste normal" (19% < 20%).

## *Ejemplo 4*

El resultado observado de los incrementos de presión experimentados en una tubería determinada, con una presión estática o de equilibrio en régimen permanente de $P_e$ = 3.0 bar, ofrece la siguiente ecuación integral:

$$\Delta P(t) + 3\int_0^t \Delta P(\tau)\cdot \sin(t-\tau)\cdot dt = e^{-t} \ ,$$

, viniendo la presión *P* expresada en bar y el tiempo *t* en segundos. Se desea saber si pueden corresponder dichas perturbaciones a un transitorio hidráulico (golpe de ariete).

*Solución:*

Veamos que se trata de una ecuación de Volterra inhomogénea, de 2ª especie, con $\lambda$ = -3. Aplicando las transformadas de Laplace, obtendremos que (Franquet, 2019):

$Y(s) + 3Y(s)\dfrac{1}{s^2+1} = \dfrac{1}{s+1}$. Despejando Y(s) se tendrá que: $Y(s)\left[\dfrac{s^2+1+3}{s^2+1}\right] = \dfrac{1}{s+1}; Y(s) = \dfrac{s^2+1}{(s+1)(s^2+4)}$.

Antitransformando, se obtiene: $\Delta P(t)$ = R(-1) + R(2i) + R(-2i).

Respectivamente, se tendrá que:
$$\begin{cases} R(-1) = \dfrac{2}{5}e^{-t} \\ R(2i) = \dfrac{-4+1}{(2i+1)4i}e^{i2t} = \dfrac{-3(1-2i)}{4i\cdot 5}e^{i2t} \\ R(-2i) = \dfrac{-4+1}{(-2i+1)(-4i)}e^{-i2t} = \dfrac{3(1+2i)}{4i\cdot 5}e^{-i2t} \end{cases}$$

La función buscada será, pues:

$$\Delta P(t) = \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{20i}\left[e^{-i2t} + e^{-i2t} + 2i(e^{i2t} + e^{-i2t}\right] = \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{20i}(-2i\cdot\sin 2t + 4i\cdot\cos 2t) \ ,$$

resultando, en definitiva, la IP siguiente: $\boxed{\Delta P(t) = \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}\sin 2t}$

con lo que el presunto golpe de ariete será: $\Delta P(0) = + 1.00$ bar, y entonces:

$$P_0 = P_e + \Delta P_0 = 3.0 + 1.0 = 4.0 \text{ bar.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

$$\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}\sin 2t + 3\int_0^t \left(\frac{2e^{-\tau}}{5} + \frac{3\cos 2\tau}{5} - \frac{3}{10}\sin 2\tau\right)\cdot\sin(t-\tau)\cdot d\tau = e^{-t} \ .$$

Llamando ahora I a la integral definida del primer miembro de la expresión anterior, y resolviéndola, se tiene que:

$$I = \int_0^t \left(\frac{2e^{-\tau}}{5} + \frac{3\cos 2\tau}{5} - \frac{3}{10}\sin 2\tau\right)\cdot\sin(t-\tau)\cdot d\tau =$$

$$= \frac{1}{10}\Big[\cos(t-3\tau) + \frac{1}{2}\big(\sin(t-3\tau) - 4e^{-\tau}\cdot\sin(t-\tau) + 3\sin(t+\tau) +$$

$$+ 4e^{-\tau}\cdot\cos(t-\tau) - 6\cos(t+\tau)\big)\Big]_0^t =$$

$$= \frac{1}{10}\Big[\cos(-2t) + \frac{1}{2}\big(\sin(-2t) + 3\sin 2t + 4e^{-t} - 6\cos 2t\big) -$$

$$- \cos t - \frac{1}{2}\big(\sin t - 4\sin t + 3\sin t + 4\cos t - 6\cos t\big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{10}\Big[\cos 2t + \frac{1}{2}\big(2\sin 2t + 4e^{-t} - 6\cos 2t\big) - \cos t - \frac{1}{2}(-2\cos t)\Big] =$$

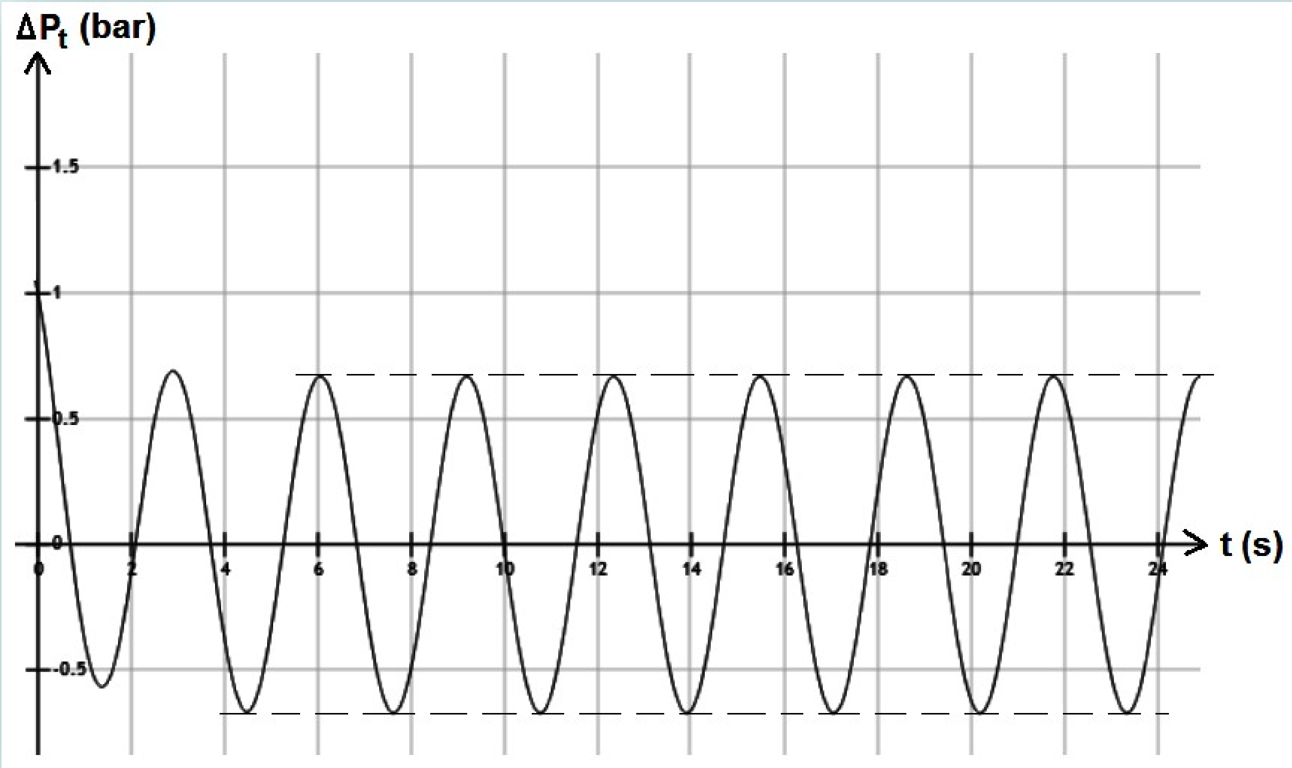
$$= \frac{1}{10}\big(\cos 2t + \sin 2t + 2e^{-t} - 3\cos 2t - \cos t + \cos t\big) =$$

$$= \frac{1}{10}\big(\sin 2t + 2e^{-t} - 2\cos 2t\big) = 1/5\big(e^{-t} - \cos 2t + \sin t\cdot\cos t\big)$$

con lo cual, el primer miembro de la ecuación anterior quedará así (simplificando términos):

$$\frac{2\cdot e^{-t}}{5}+\frac{3\cdot\cos 2t}{5}-\frac{3\cdot\sin 2t}{10}+\frac{3\cdot e^{-t}}{5}-\frac{3\cdot\cos 2t}{5}+\frac{3\cdot\sin t\cdot\cos t}{5}=e^{-t}\text{, c.s.q.d.}$$

Se tendrá, entonces, la siguiente representación gráfica:




Evolución temporal continua de la trayectoria supuesta de las ondas de presión.

De la contemplación de la representación gráfica anterior se deduce inmediatamente que no puede corresponder a un golpe de ariete hidráulico, habida cuenta de su no convergencia o amortiguación temporal hacia la presión de equilibrio o estática, mientras que sus picos de presión positivos o negativos determinan siempre los mismos valores (sucesión constante).

## *Ejemplo 5*

Este ejemplo se desarrolla teniendo en cuenta que nos hallamos en presencia de un régimen hidráulico laminar (0 < Re < 2.400), por lo que presumiblemente resultará $\nu \cong 1.0$, y el modelo hidráulico correspondiente viene dado también por una EDP, tratándose de establecer la formulación del caudal: Q = C·f(D,J). Obviamente, si estuviéramos trabajando en un régimen crítico o inestable (Franquet, 2019), con 2.400 < Re < 4.000, se tendría que $\nu \in [0.5,1.0]$.

Esta EDP viene dada por la ecuación en derivadas parciales y condición lateral siguientes:

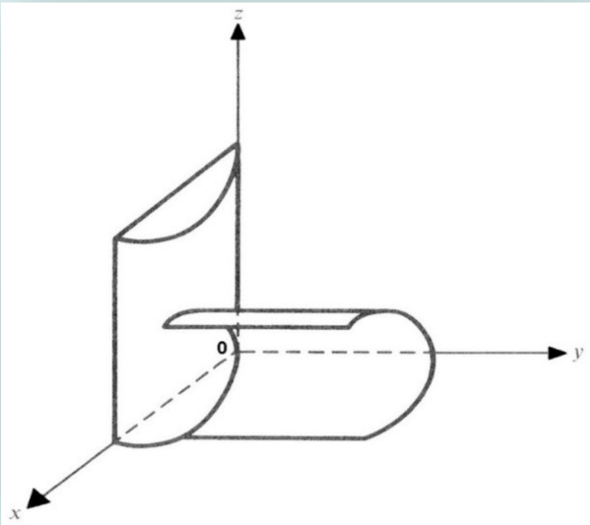
$$\begin{cases} u_x^2 + y^2 u_y - 5yu = \iiint_A x^2 y z^3 dxdydz \\ u(x,1) = f(x), \forall x > \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 7x + 4}{e^x} \end{cases}$$

donde el dominio A es el sólido limitado por el plano: y = 0 y las superficies o paredes de sendas conducciones: $y^2 = x - x^2$ , $z^2 = 4x$ . Además, f(x) es la solución de la ecuación integral:

$$f(x) = x^2 + x\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + 1 - x \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right) + \int_1^x \frac{f(s)}{x^2 + s^2} ds \ .$$

*Solución*:

En primer lugar, continuando con la misma simbología del ejercicio anterior, hay que determinar la expresión analítica de esta función hidráulica que viene expresada, inicialmente, como una EDP no lineal, de primer orden y coeficientes variables. Para resolver la integral triple del segundo miembro conviene tener en cuenta la correspondiente representación gráfica:




Dominio de integración.

Procede encontrar la proyección del sólido sobre cualquiera de los tres planos y, posteriormente, establecer los pertinentes límites de integración. En este caso, la proyección sobre el plano z = 0 es el semicírculo:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{1}{4}.$$

Los límites de integración del dominio, son:

$A\{(x,y,z)/0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq\sqrt{x-x^2}, -2\sqrt{x}\ \leq z\leq 2\sqrt{x}$ , con lo que:

$$\iiint_A x^2yz^3dxdydz=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{x-x^2}}\left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}x^2yz^3dz\right)dy\right]dx=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{x-x^2}}\left[x^2y\frac{z^4}{4}\right]_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy\right)dx=0\ ,$$

y la EDP planteada será, definitivamente: $u_x^2+y^2u_y-5yu=0$ , que es una ecuación no lineal, homogénea y de coeficientes variables.

Por otra parte, en la condición lateral se tiene que: $\lim\limits_{x\to+\infty}.\frac{4x^2-7x+4}{e^x}=0$ , mientras que:

$$f(x)=x^2+x\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+1-x\cdot\text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right)+\int_1^x\frac{f(s)}{x^2+s^2}ds\ ,$$

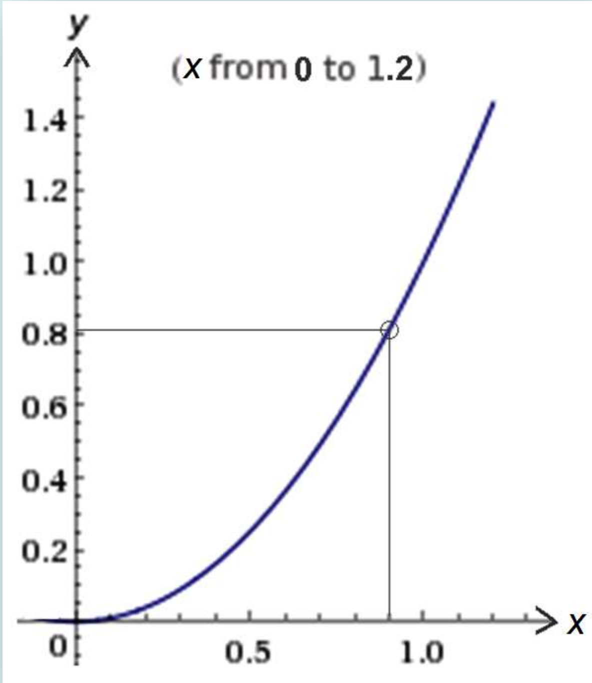
es una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie,

con $\lambda$ = 1. El núcleo es $k(x,s)=\frac{1}{x^2+s^2}$ , $x_0$ = 1 y

tomemos $\phi(x) = x^{-2}$, y todas las condiciones del teorema

correspondiente son satisfechas con $l^*=\frac{1}{2}$ , mientras

que la solución exacta de esta ecuación integral es la parábola cuadrática: $f(x) = x^2$, con la siguiente representación gráfica:



Por otra parte, se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ , luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Como comprobación, habrá que demostrar que se cumple que:

$$x - \frac{\pi \cdot x}{4} - 1 + x \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{f(s)}{x^2 + s^2} ds. \text{ En efecto:}$$

$$\int_1^x \frac{f(s)}{x^2+s^2} ds = \int_1^x \frac{s^2}{x^2+s^2} ds = \left[ s - x \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{s}{x}\right)\right]_1^x = (x - x \cdot \text{arc.tg}1) - (1 - x \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right)) =$$

$$= x - \frac{\pi}{4} x - 1 + x \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{1}{x}\right), \text{ c.s.q.d.}$$

De este modo, la condición lateral expresada en el enunciado quedará definitivamente planteada así: $u(x,1) = x^2$ , $\forall x > 0$. Entonces, puede escribirse la siguiente expresión:

$$F(x,y,z,p,q) = p^2 + y^2 q - 5yz, \text{ con } u_x = p \text{ ; } u_y = q, \ u = z \text{ ,}$$

y la curva inicial se parametriza del siguiente modo:

$$\gamma(s) \equiv (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) = (s, 1, s^2), \ \forall s \in \{\Re\}.$$

La condición de banda nos dice que: $p_0(s) = 2s$, con lo cual la condición de compatibilidad se reduce a: $q_0(s) = s^2$.

Dado que: $\det\begin{pmatrix} F_p & \alpha_1' \\ F_q & \alpha_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2p_0(s) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ ,

sabemos que el problema considerado tiene una única solución.

Para obtener su expresión debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x' = 2p, & x(0) = s, \\ y' = y^2, & y(0) = 1, \\ z' = 2p^2 + y^2 q, & z(0) = s^2, \\ p' = 5py, & p(0) = s^2, \\ q' = 5z + 5qy, & q(0) = 2s, \end{cases}$$

conjuntamente con la ecuación adicional:

$$5yz = p^2 + y^2 q \tag{1}$$

Es evidente que este sistema no lineal no puede ser reducido, con lo cual debemos resolverlo directamente. Comencemos por la segunda ecuación; en este caso, tenemos:

$$t = \int_0^t 1 ds = \int_0^t \frac{y'(s)}{y^2(s)} ds = \int_1^{y(t)} \frac{dr}{r^2} = 1 - \frac{1}{y(t)}$$ . Por lo tanto: $y(t,s) = \dfrac{1}{1-t}$ .

Dado que conocemos el valor de *y*, la cuarta igualdad del sistema se transforma en la siguiente ecuación lineal con coeficientes variables:

$\dfrac{p'}{p} = \dfrac{5}{1-t'}$ , de donde: $p = \dfrac{c}{(t-1)^5}$ , que con: p(0) = 2s, sin más que integrar directamente, obtenemos que su única solución resulta ser: $p(t,s) = \dfrac{2s}{(1-t)^5}$ .

Integrando ahora en la primera de las ecuaciones, llegamos a que: $x(t,s) = \dfrac{s}{(1-t)^4}$.

Finalmente, para calcular la expresión de z debemos resolver la tercera de las igualdades.

En este caso, usando la igualdad (1) conjuntamente con las expresiones de *y* y *p* obtenidas previamente, debemos resolver la ecuación:

$$z' = \frac{5}{1-t} z + \frac{4s^2}{(1-t)^{10}} \quad , \qquad z(0) = s^2.$$

Multiplicando en este caso por el factor integrante $(1 - t)^5$, obtenemos que la única solución viene dada por:

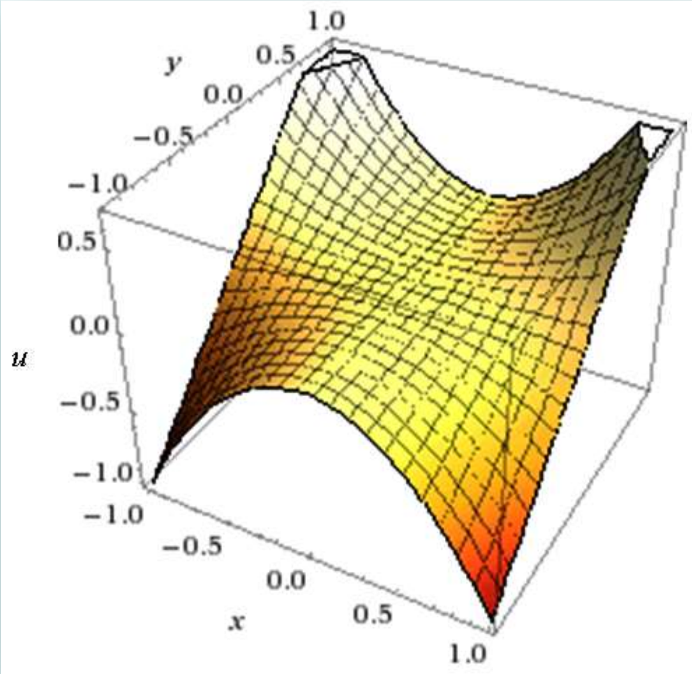
$z = \frac{c}{(t-1)^5} - \frac{s^2}{(t-1)^9}$, pero: $z(0) = -c + s^2 = s^2$, luego: $c = 0$, de donde: $z(t,s) = \frac{s^2}{(1-t)^9}$ .

La superficie parametrizada es igual a: $\Gamma(t,s) = \left( \frac{s}{(1-t)^4}, \frac{1}{1-t}, \frac{s^2}{(1-t)^9} \right)$ .

Es evidente que esta superficie se corresponde con la expresión que nos ofrece la solución del problema planteado, a saber:

$$u(x,y) = z(t(x,y),s(x,y)) = x^2y \ ,$$

y que se representa en la figura siguiente de dominio $\{\Re\}^2$ y rango el de todo el cuerpo de los números reales:




La función hidráulica dada es tal que: $f(D,J) = D^2 \cdot J$ , con lo que:

$$f(tD,tJ) = t^2 \cdot D^2 \cdot t \cdot J = t^3 \cdot D^2 \cdot J = t^3 \cdot f(D,J) \ ,$$

luego se trata de una función homogénea de grado m = 3 y homotética, que cumple necesariamente el teorema de Euler, como puede comprobarse. De este modo, resultaría que: Q $(m^3/s) = C \cdot D^2 \cdot J$.

Nótese que en el presente ejercicio no ha sido necesario calcular el valor de q(t,s). Este resultado, de hecho, también puede aprovecharse como una función del tipo de Cobb-Douglas, con los parámetros de las variables hidráulicas $\beta = 2$ y $\nu = 1$.

*Ejemplo 6* En este caso, la evolución o trayectoria temporal del caudal circulante por una tubería vendrá dada por la expresión:

$$q(t)+\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(t^4-5t^2+4)\cdot dt\cdot\int_0^t q(\tau)d\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau = 4e^{-t}+f(t)$$

donde, a su vez, f(t) = t - $\int_0^t (t-\nu)\cdot f(\nu)\cdot d\nu$ , con *t* expresado en siglos (Franquet, 2019).

*Solución:*

En el primer miembro de la expresión dada aparece como factor una integral definida cuya resolución ofrece:

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(t^4-5t^2+4)\cdot dt=\frac{1}{4}\left[\frac{t^5}{5}-\frac{5t^3}{3}+4t\right]_{-2}^{2}=2.$$

Por otra parte, puesto que en el 2º miembro de la expresión aparece también otra ecuación integral, procederemos a su resolución previa, que es una ecuación integral de Volterra (inhomogénea, de 2ª especie, con $\lambda$ = -1). Para ello, emplearemos siempre el método de las transformadas de Laplace. En este caso, tomando las transformadas y recordando la definición de "convolución de funciones" (véase Apéndice III), se obtiene que:

$$L[f(t)]+L[t*f(t)]=L[t]\text{, con lo que: } L[f(t)]+L[t]L[f(t)]=L[t]\ .$$

Entonces, si F(s) = L[f(t)] se tendrá que:

$$F(s)+\frac{1}{s^2}F(s)=\frac{1}{s^2}\ ;\quad F(s)\left(\frac{1+s^2}{s^2}\right)=\frac{1}{s^2}\ ;$$

de donde resultará:

$$F(s)=\frac{1}{1+s^2}\ ;\quad f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right]=\sin t\ .$$

De este modo, la expresión de la ecuación dada quedará configurada definitivamente así:

$$q(t)+2\int_0^t q(\tau)d\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau = 4e^{-t}+\sin t\ .$$

Se trata también de una ecuación integral del tipo Volterra, inhomogénea de segunda especie, con $\lambda$ = -2. Tomando las transformadas de Laplace se tiene que:

$$F(S)+2F(S)\left(\frac{S}{S^2+1}\right)=\frac{4}{S+1}+\frac{1}{S^2+1},$$

$$F(S)\left(\frac{S^2+2S+1}{S^2+1}\right)=\frac{4}{S+1}+\frac{1}{S^2+1}\Rightarrow F(S)\left(\frac{(S+1)^2}{S^2+1}\right)=\frac{4}{S+1}+\frac{1}{S^2+1},$$

$$F(S)=\frac{4(S^2+1)}{(S+1)(S+1)^2}+\frac{S^2+1}{(S^2+1)(S+1)^2}=\frac{4S^2+4}{(S+1)^3}+\frac{1}{(S+1)^2}.$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados a partir de las fracciones parciales, se tendrá:

$$\frac{A}{S+1}+\frac{B}{(S+1)^2}+\frac{C}{(S+1)^3}=\frac{4S^2+4}{(S+1)^3},\quad A(S+1)^2+B(S+1)+C=4S^2+4,$$

$$A=4, B=-8,\ C=8.$$

De donde se deduce que:

$$q(t) = y\ (t) = L^{-1}\left\{\frac{4}{S+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{8}{(S+1)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{8}{(S+1)^3}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+1)^2}\right\},$$

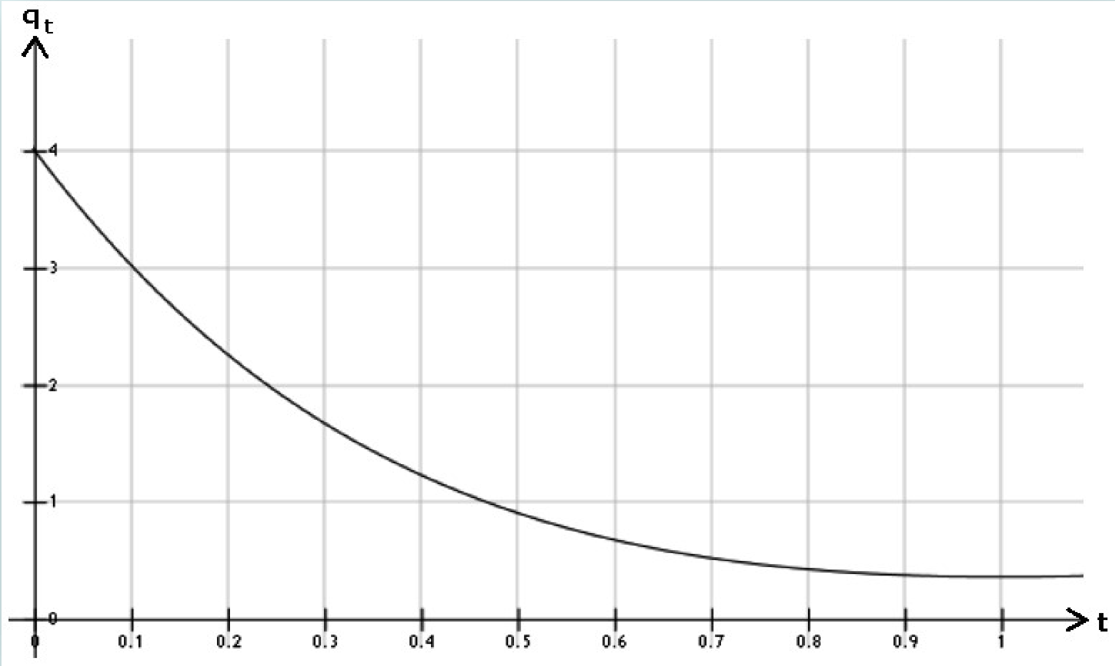
y la solución buscada será la función generatriz Laplace siguiente:

$$q_t = y(t) = 4e^{-t}-7t\cdot e^{-t}+4t^2e^{-t}=e^{-t}(4t^2-7t+4)\ .$$

De ahí resulta la expresión: $q_t=\dfrac{4t^2-7t+4}{e^t}$, y $q_0$ = 4 l/s, con la siguiente representación gráfica de esta función cóncava, puesto que:

$$q_t''=\frac{d^2q_t}{dt^2}=e^{-t}(4t^2-23t+26)$$ , y por ejemplo, para t = 0.5:

$$q_t''=9.40123>0$$ $\rightarrow$ función cóncava con respecto a las q+.




Función de envejecimiento.

A esta tubería de DN = 2½” de fundición (75 × 2.2 mm) y 78 m de longitud le corresponde, para el caudal inicial antedicho, una velocidad media de circulación del agua de:

$$V = \frac{q_0}{S} = \frac{4 \times 0.004}{\pi \times 0.0706^2} = 1.02\ \text{m/s}\ .$$

En base a la formulación que aquí se propone, la pérdida de carga continua unitaria de esta tubería en servicio será (con k = 4):

$$J = 0.001507 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3112} = \frac{0.001507 \times 1.02^2}{0.0706^{1.3112}} = 0.0507\ \text{m/m}\ ,$$

y la pérdida de carga total, incluyendo la que se estima originada por las piezas especiales, será del orden de:

$$H = J \times L = (0.0507 \times 78) \times 1.15 = 4.55\ \text{m.c.a.}$$

El caudal inicial de 4 l/s, al cabo de 20 años de servicio, será de 2.26 l/s, y al cabo de 60 años de 0.68 l/s, y los resultados completos hasta los 100 años pueden verse en la siguiente tabla, donde se incluye también la pérdida de caudal $\Delta q$, estando todos ellos expresados en l/s:

Evolución de la pérdida del caudal.

| $t$ | $q_t$ | $\Delta q = q_0 - q_t$ |
|---|---|---|
| 0 | 4.00 | 0 |
| 0.1 | 3.02 | 0.98 |
| 0.2 | 2.26 | 1.74 |
| 0.3 | 1.67 | 2.33 |
| 0.4 | 1.23 | 2.77 |
| 0.5 | 0.91 | 3.09 |
| 0.6 | 0.68 | 3.32 |
| 0.7 | 0.53 | 3.47 |
| 0.8 | 0.43 | 3.57 |
| 0.9 | 0.38 | 3.62 |
| 1.0 | 0.37 | 3.63 |

En este caso puede considerarse que existe "gran desgaste", dado que a los 10 años de servicio se produce una disminución estimada del caudal circulante del orden de: 0.98/4 = 0.245 = 24.5% > >20%.

## 4. ECUACIONES INTEGRALES DE FREEDHOLM

*Ejemplo 1*

Después del correspondiente estudio, se concluye que la función de oferta de una camisería masculina viene dada por la expresión:

$y(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 y(t)dt = e^x$, con $\lambda = 4$, mientras que la función de demanda es: $y(x) = \frac{240 - 80x}{3}$

con y expresado en €/ud. y x en miles de ud./mes. Estudiar y representar gráficamente el equilibrio del mercado, estimando los ingresos brutos anuales del comerciante vendedor.

*Solución*:

Se trata de una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie. Tenemos que:

$y(x) = C\lambda(5x^2 - 3) + e^x$, (1) ; donde, $C = \int_0^1 t^2 y(t)dt$ (2). Substituyendo (2) en (1), se obtiene que:

$$C = C\lambda\int_0^1 (5t^4 - 3t^2)dt + \int_0^1 t^2 e^t dt$$ , de donde C = e - 2.

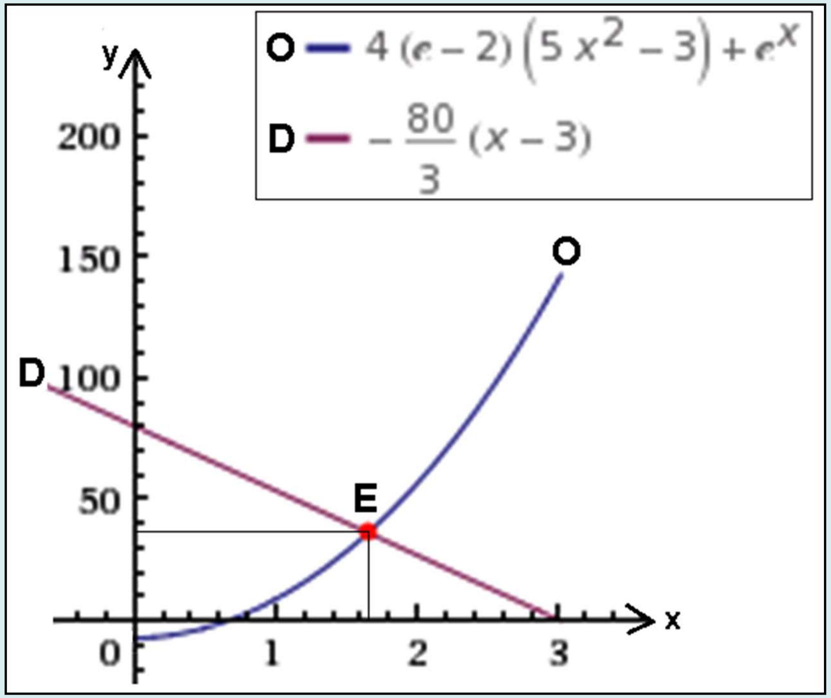
La ecuación integral dada de la oferta tiene la solución única: $y(x) = \lambda(e-2)(5x^2 - 3) + e^x$ ,

para $\lambda$ cualesquiera, y la ecuación homogénea correspondiente: $y(x) - \lambda\int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 y(t)dt = 0$

tiene solo la solución nula y(x) $\equiv$ 0. El equilibrio del mercado se producirá cuando: O = D, esto es, para $\lambda$ = 4:

$$4(e-2)(5x^2 - 3) + e^x = \frac{240 - 80x}{3}$$ , lo que tiene lugar para:

x = 1'65381 (1.654 ud./mes) $\Rightarrow$ y = 35'90 €/ud., con la representación gráfica siguiente:



Por otra parte, se presume también en el caso de la función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también sucede que $y \to \infty$. Esto es:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4(e-2)(5x^2-3)+e^x}{x} = +\infty$$ , luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del producto en cuestión vendrán dados por:

$$I = p \times q = 35'90\ €/ud. \times 1.654\ ud./mes \times 12\ meses/año = 712.543'20\ €/año.$$

## *Ejemplo 2*

Las funciones de oferta de cierto producto, por parte de sendos fabricantes (1 y 2), son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Productor 1} \to \int_0^x \cos(x-t)\cdot y(t)\cdot dt = x \\ \text{Productor 2} \to y(x) = x + \int_{-1}^{1} x\cdot t\cdot y(t)dt\,. \end{cases}$$

Se desea saber para qué precios, si es el caso, se ofertan las mismas cantidades de producto por parte de ambos fabricantes, representando gráficamente ambas funciones de oferta.

*Solución:*

Por lo que se refiere a la ecuación de oferta del productor 1, veamos que las funciones $f(x) = x$, y el núcleo integral $K(x, t) = \cos(x-t)$, satisfacen a las condiciones de continuidad y derivabilidad exigibles. Derivando ambos miembros de la ecuación integral dada con respecto a *x*, se obtiene que:

$$y(x)\cos 0-\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt=1, \text{ o bien: } y(x)=1+\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt .$$

La ecuación anterior es una ecuación integral de Volterra de segunda especie, del tipo de convolución. Aplicando la transformación de Laplace se halla su solución, esto es:

$$\phi(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2+1}\phi(p), \text{ de donde } \phi(p)=\frac{p^2+1}{p^3}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}.$$

De tal suerte, la función generatriz Laplace: $y_1(x)=L^{-1}[\phi(p)]=1+\dfrac{x^2}{2}$ será la solución de la ecuación anterior y, por lo tanto, también de la ecuación dada, lo cual puede comprobar con facilidad el amable lector/a por substitución directa en la ecuación integral inicial.

Por otra parte, en referencia a la ecuación integral dada de oferta del productor 2, que es de Freedholm de 2ª especie e inhomogénea, con $\lambda$ = 1, para su resolución emplearemos el método de Bubnov-Galiorkin. Para ello, tomemos como sistema completo de funciones en el intervalo [-1, 1] el sistema de polinomios de Legendre $P_n(x)$ ($\forall n$ = 0, 1, 2, …). La solución aproximada $y_n(x)$ de la ecuación planteada la buscaremos en la forma:

$$y_3(x)=a_1\cdot 1+a_2x+a_3\frac{3x^2-1}{2}.$$

Substituyendo $y_3(x)$ en lugar de $y(x)$ en la ecuación integral planteada, tendremos que:

$$a_1+a_2x+a_3\frac{3x^2-1}{2}=x+\int_{-1}^{1}xt\left(a_1+a_2t+a_3\frac{3t^2-1}{2}\right)dt ,$$

o bien: $$a_1+a_2x+a_3\frac{3x^2-1}{2}=x+x\frac{2}{3}a_2.$$

Multiplicando ambos miembros de esta última ecuación, sucesivamente, por 1, x, $\frac{3x^2-1}{2}$ e integrando respecto a x desde -1 hasta 1, se halla que:

$$2a_1 = 0, \qquad \frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a_2 , \qquad \frac{2}{5}a_3 = 0 .$$

De aquí se obtienen los valores: $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, por lo que $y_2(x) = 3x$. No es difícil comprobar que ésta es precisamente la solución exacta de la ecuación planteada de oferta del productor 2.

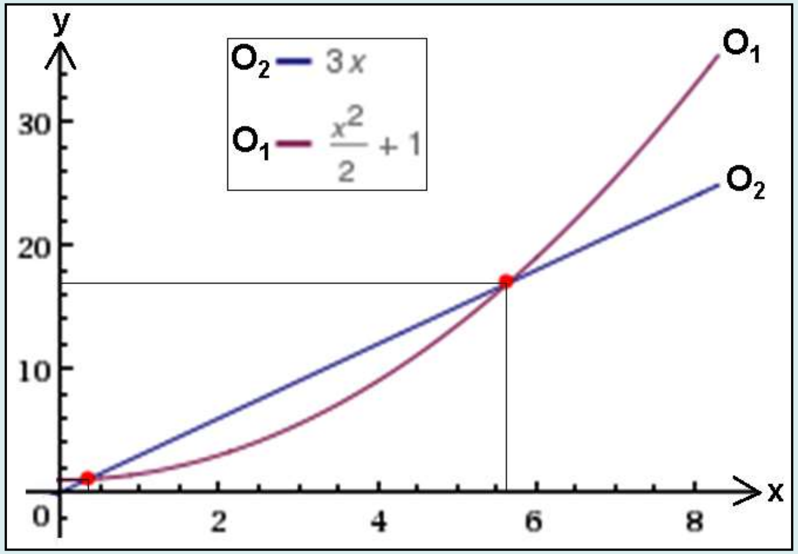
Así pues, la coincidencia de ofertas se producirá cuando: $O_1 = O_2$, o sea:

$$1 + \frac{x^2}{2} = 3x \text{ , esto es: } x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{7} = 5'646 \text{ (5.646 ud.) ; } x_2 = 3 - \sqrt{7} = 0'354 \text{ (354 ud.) ;}$$

$$y_1 = 16'94 \text{ €/ud. ; } y_2 = 1'06 \text{ €/ud.}$$

, lo cual puede verse gráficamente expresado en la siguiente figura:




Por otra parte, se presume también en el caso de la función de oferta $O_1$ la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ , luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba), mientras que la función de oferta $O_2$ es una recta creciente que pasa por el origen de las coordenadas cartesianas rectangulares.

*Ejemplo 3*

El beneficio bruto anual *u* de una empresa se expresa, en miles de €, por la siguiente ecuación, siendo *t* el tiempo en decenas de años y *x* el precio del "output" del proceso productivo expresado en €, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2t \cdot z(x)$$ , con las condiciones: $u(0,t) = t^2$ y $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t) = t$ ,

viniendo z(x) dada por la ecuación integral: $z(x) = h(x) + \int_0^1 (xy)^{-1/2} z(y)dy$ .

Se desea hallar el beneficio neto anual de la empresa al cabo de 5 años de funcionamiento, con un precio del "output" estimado en 20'00 €, considerando una fiscalidad aplicable del 24%.

*Solución:*

La función z(x) es una ecuación integral inhomogénea de Freedholm de 2ª especie, con $\lambda$ = 1, que habrá que resolver en primer lugar. En ese caso la integral:

$K_{11} = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = \ln \frac{1}{0} = +\infty$ , diverge y no podemos formar z(x) por el procedimiento normal. Ahora bien, esto no quiere decir que la ecuación integral propuesta no tenga solución. En efecto, una solución de la ecuación integral propuesta es: z(x) = x, tal como puede estudiarse en las lecciones siguientes, esto es:

$$z(y) = y \quad \text{para} \quad h(x) = x - x^{-1/2} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot dy \ .$$

Ello puede comprobarse substituyendo en la ecuación inicial del siguiente modo:

$z(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot dy + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot y \cdot dy = x - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \left( \sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{y}} \right) dy$ , por la propiedad aditiva del integrando. O sea, debe cumplirse que: $\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \left( \sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{y}} \right) dy = 0$. Veamos que, en efecto, se cumple que: $\int_0^1 \left( \sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{y}} \right) dy = 0$ . Así pues, la solución de esta ecuación es, efectivamente: z(x) = x.

Se trata, pues, por lo que se refiere al primer miembro, de una EDP de 2º orden, lineal, inhomogénea y de coeficientes constantes. Como a = 1, b = 0 y c = 0, con el discriminante: ($b^2$ – 4ac) = 0, es una ecuación del tipo parabólico.

Así pues, puesta la EDP dada en la forma $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2xt$, e integrando respecto a *x* dos veces, se obtiene:

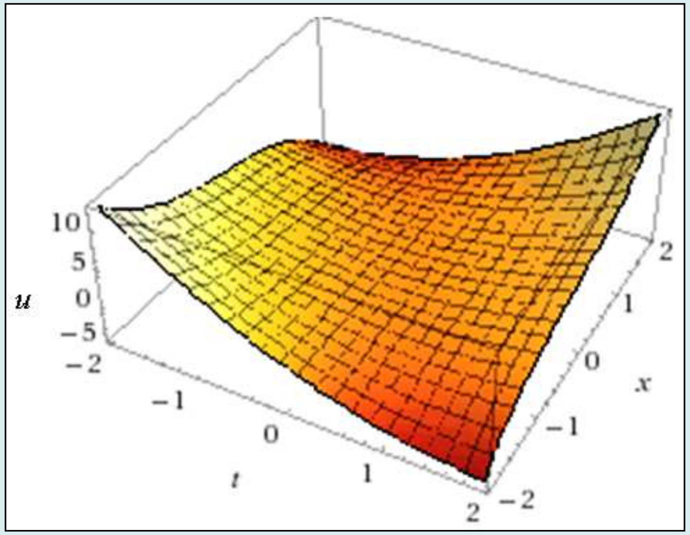
$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 t + f(t)$, $u(x,t) = \frac{x^3}{3}t + xf(t) + g(t)$, que es la solución general de la EDP planteada.

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas, se tiene:

• De $u(0,t) = t^2$ se deduce que: $g(t) = t^2$.

• De $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t) = t$, al ser $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 t + f(t)$, entonces $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(0,t) = f(t) = t$ .

Así pues, el beneficio bruto anual viene dado por la solución particular siguiente: $u(x,t) = \frac{x^3}{3}t + xt + t^2$, con la siguiente representación gráfica:




De este modo, el beneficio neto anual, descontando la fiscalidad, con los datos suministrados y al cabo de 5 años, será:

$$B = 0'76 \times u = 0'76 \times \left(\frac{tx^3}{3} + xt + t^2\right) = 0'76\left(\frac{0'5 \times 8.000}{3} + 20 \times 0'5 + 0'5^2\right) =$$

$$= 1.021'123 \equiv 1.021.123 \text{ €}.$$

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 23

## ECUACIONES INTEGRO-DIFERENCIALES

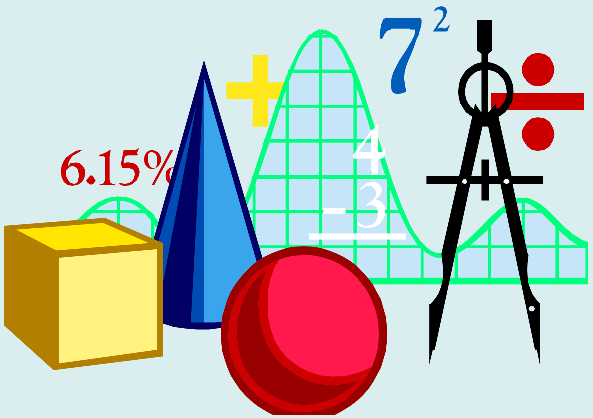
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. CONCEPTUALIZACIÓN

Hemos visto, en la lección anterior, la definición y el método de resolución ejemplificado de las ecuaciones integrales. Pues bien, las ecuaciones integro-diferenciales (EID) se denominan así porque constan de operaciones diferenciales e integrales de la función incógnita en su expresión.

Existen algunos métodos para su resolución, y entre los más empleados están: el de las transformadas de Laplace, los métodos numéricos (para computadora, las odes en *matlab*), los métodos lineales multipaso para ecuaciones de orden fraccionario en espacios de Banach, el método de Hartree-Fock-Roothaan (HFR) y los métodos analíticos de resolución manual.

Se denomina *ecuación integro-diferencial lineal* a la ecuación del tipo siguiente:

$$a_0(x)\cdot y^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot y(x)+\sum_{m=0}^{s}\int_0^x K_m(x,t)\cdot y^{(m)}(t)\cdot dt=f(x)\;. \tag{1}$$

Aquí $a_0(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)$, $K_m(x, t)$ ($\forall m = 0, 1, \ldots, s$) son funciones conocidas, e $y(x)$ es la función incógnita.

Al resolver las ecuaciones integro-diferenciales, a diferencia de lo que sucedía en el caso de las ecuaciones integrales, para la función incógnita $y(x)$ se plantean condiciones iniciales (PVI) del tipo:

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)} \tag{2}$$

Supongamos que en (1) los coeficientes $a_k(x)$ = cte. ($\forall$ k = 0, 1, …, n), y que el núcleo integral es: $K_m(x, t) = K_m(x - t)$ ($\forall$ m = 0, 1, …, s), es decir, que todas las $K_m$ dependen únicamente de la diferencia (x – t) de los argumentos. Sin detrimento de la generalidad, pues, se puede considerar que $a_0 = 1$. Entonces la ecuación anterior (1) toma la forma siguiente:

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_ny(x)+\sum_{m=0}^{s}\int_0^x K_m(x-t)\cdot y^{(m)}(t)\cdot dt=f(x)\,(a_1,\ldots,a_n-\text{cte.})\;. \tag{3}$$

Supongamos, además, que las funciones $f(x)$ y $K_m(x)$ son funciones-objeto y que:

$$f(x) = L^{-1}[F(p)], \qquad K_m(x) = L^{-1}[\tilde{K}_m(p)], \quad (\forall\ m = 0, 1, \ldots, s).$$

Entonces la función y(x) tendrá también su imagen según Laplace, así: $y(x) = L^{-1}[\phi(p)]$.

Apliquemos ahora a ambos miembros de la expresión (3) la transformación de Laplace. En virtud del teorema sobre la imagen de la derivada, se cumplirá que:

$$y^{(k)}(x) = L^{-1}[p^{(k)}\phi(p) - p^{k-1}y_0 - p^{k-2}y_0' - \ldots - y_0^{(k-1)}] \tag{4}$$

$$(\forall\ k = 0, 1, \ldots, n).$$

Según el teorema del producto, se tiene que:

$$\int_0^x K_m(x-t)\cdot y^{(m)}(t)\cdot dt = L^{-1}[\tilde{K}_m(p)\left[p^m\phi(p) - p^{m-1}y_0 - \ldots - y_0^{(m-1)}\right]] \tag{5}$$

$$(\forall\ m = 0, 1, \ldots, s).$$

Por esto, la ecuación (3) se transforma en la siguiente:

$$\phi(p)\left[p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n + \sum_{m=0}^{s}\tilde{K}(p)p^m\right] = A(p) \quad , \tag{6}$$

donde A(p) es una función conocida de p.

De la igualdad anterior (6) se halla $\phi(p)$ que es la solución operacional del problema (3)-(2). Por último, hallando la función-objeto para $\phi(p)$, se obtiene la solución o función generatriz Laplace y(x) de la ecuación integro-diferencial (3), que satisface a las condiciones iniciales del problema planteado (2).

A continuación se resolverán diversos ejercicios también aquí, en todos los casos, como hemos realizado con las ecuaciones integrales, por aplicación del método de las transformadas de Laplace (ver Apéndice III), y será necesario disponer del dato o datos de la condición inicial, según el orden de la derivada que en ella figure.

## 2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

*Ejemplo 1*

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de demanda y oferta:

$$\begin{cases} D \to 5y = 20 - 4x \\ O \to y' + 2y - 3\int_0^x y \cdot dx = 5 + 5x \end{cases} \quad , \forall\ y(0) = 2 \ ,$$

siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en miles de unidades diarias. Se trata: a) de estudiar el equilibrio del mercado, b) de calcular la elasticidad de ambas funciones económicas en el punto de equilibrio, y c) de estimar los ingresos brutos anuales del vendedor (considerando un calendario laboral de 240 días/año).

*Solución:*

a) Evidentemente, la función de demanda es una recta decreciente en el primer cuadrante del círculo desde el punto (0,4) al (5,0), mientras que la función de oferta viene dada por una ecuación integro-diferencial de Volterra, que resolveremos tomando transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación, con lo que:

$$L[y'] + 2L[y] - 3L\left[\int_0^x y \cdot dx\right] = L[5] + 5L[x].$$

Obsérvese que ahora *x* es variable independiente, razón por la cual: $L[x] = \frac{1}{s^2}$ , y la ecuación anterior, haciendo: L[y] = Y(s), se convierte en: $s \cdot Y(s) - 2 + 2 \cdot Y(s) - 3\frac{Y(s)}{s} = \frac{5}{s} + \frac{5}{s^2}$ , o también puede expresarse del siguiente modo:

$$Y(s)(s + 2 - 3/s) = \frac{5}{s} + \frac{5}{s^2} + 2 = \frac{2s^2 + 5s + 5}{s^2}\text{; } Y(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{s(s^2 + 2s - 3)}.$$

Las raíces del polinomio del denominador son todas ellas reales y simples, de valores: 0, 1 y – 3, puesto que de: $s^2 + 2s - 3 = 0$, se tiene que: $s = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = (1, -3)$ . Ello nos permite la aplicación del método de las fracciones parciales y coeficientes indeterminados del siguiente modo:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3} = \frac{2s^2 + 5s + 5}{s(s-1)(s+3)}\text{, esto es:}$$

$$A(s-1)(s+3) + B\cdot s(s+3) + C\cdot s(s-1) = 2s^2 + 5s + 5;$$
$$A(s^2 + 2s - 3) + B(s^2 + 3s) + C(s^2 - s) = 2s^2 + 5s + 5;$$

$(A + B + C)s^2 + (2A + 3B - C)s - 3A = 2s^2 + 5s + 5$; y resulta el sistema compatible y determinado siguiente:

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ 2A + 3B - C = 5 \\ -3A = 5 \end{cases}$$

, del que se obtienen los siguientes valores: A = -5/3, B = 3 y C = 2/3, con lo que la función generatriz Laplace será:

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{-5/3}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{3}{s-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2/3}{s+3}\right\} = -\frac{5}{3} + 3e^x + \frac{2}{3}e^{-3x},$$

que constituye la I.P. buscada. Ello puede comprobarse también teniendo en cuenta que:

$y' = \frac{dy}{dx} = 3e^x - 2\cdot e^{-3x}$, luego substituyendo en la EID dada deberá cumplirse que:

$$3e^{x}-2\cdot e^{-3x}-\frac{10}{3}+6e^{x}+\frac{4}{3}e^{-3x}-3\int_0^x\left(-\frac{5}{3}+3e^{x}+\frac{2}{3}e^{-3x}\right)dx=5+5x. \qquad (1)$$

Veamos que: $\int_0^x\left(-\frac{5}{3}+3\cdot e^{x}+\frac{2}{3}e^{-3x}\right)dx=\left[-\frac{5x}{3}-\frac{2e^{-3x}}{9}+3e^{x}\right]_0^x=-\frac{5}{9}(3x+5)-\frac{2e^{-3x}}{9}+3e^{x},$

con lo que substituyendo en la expresión anterior (1) se tendrá que:

$$9e^{x}-\frac{2}{3}e^{-3x}-\frac{10}{3}+\frac{15}{9}(3x+5)+\frac{6e^{-3x}}{9}-9e^{x}=5+5x$$ ; y entonces:

$$-\frac{10}{3}+\frac{5}{3}(3x+5)=-\frac{10}{3}+5x+\frac{25}{3}=\frac{15}{3}+5x=5+5x$$ , c. s. q. d.

Por otra parte, de la expresión dada de la EID deberá cumplirse que:

$\begin{cases} y'(0)=3-2=1 \\ y(0)=2 \end{cases}$, con lo que también: 1 + 4 = 5, c. s. q. d.

Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O): $\frac{20-4x}{5}=-\frac{5}{3}+3e^{x}+\frac{2}{3}e^{-3x}$

, de donde se deduce que la única raíz positiva es: x = 0’532.

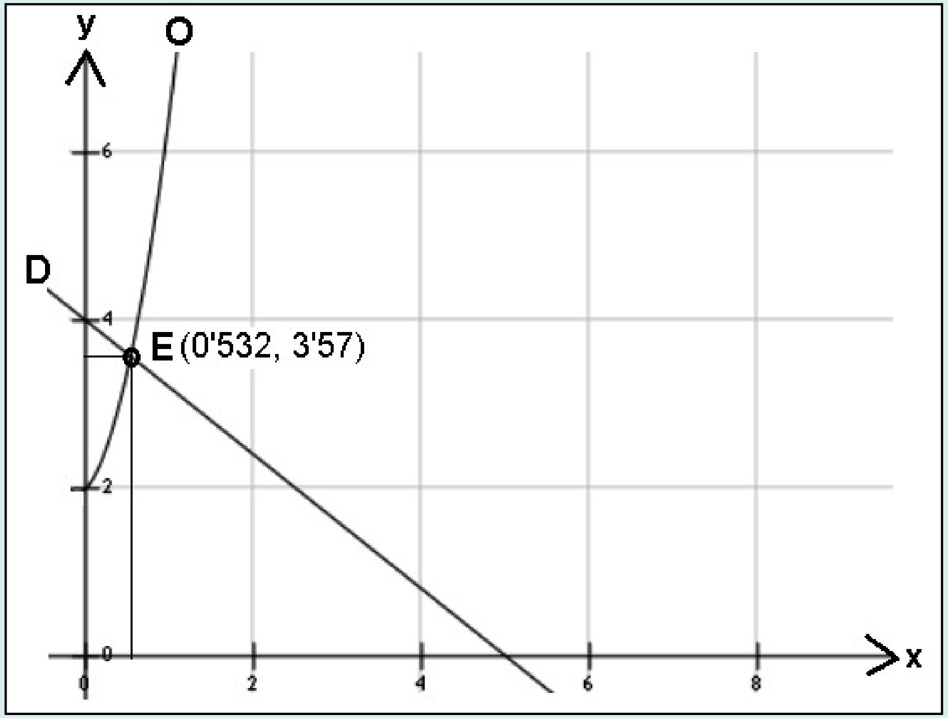
En este caso, y = $\frac{20-4\cdot 0'532}{5}=3'57$ , o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de

3’57 €/ud. y una cantidad aproximada de 532 ud./día de producto.

De otro modo, se presume también -en el caso de la función de oferta- la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también sucede que $y \to \infty$.

Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9e^x + 2e^{-3x} - 5}{3x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación (con detalle suficiente en las proximidades del origen de coordenadas):




b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado hallado anteriormente E(0'532, 3'57), se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

D $\Rightarrow$ y = (20 – 4x)/5; dy/dx = -4/5; $\frac{dx}{dy} = -\frac{5}{4}$. Y la elasticidad de la función de demanda será

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{5}{4} \times \frac{20-4x}{5x} = \frac{4x-20}{4x} = -8'40 < -1,$$

luego se trata de una *demanda relativamente elástica*. Del mismo modo:

O $\Rightarrow y = -\frac{5}{3} + 3e^x + \frac{2}{3}e^{-3x}$; dy/dx = $3e^x - 2e^{-3x}$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3e^x - 2e^{-3x}}$. Y entonces, la elasticidad buscada de la oferta será la siguiente:

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{3e^x - 2e^{-3x}} \times \frac{y}{x} = \frac{9e^x + 2e^{-3x} - 5}{9xe^x - 6xe^{-3x}} = 1'43 > 1.$$

En este caso, la función en estudio resulta también *relativamente elástica*, y ante una variación del precio la cantidad ofertada del bien en cuestión disminuye en una proporción mayor.

c) Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del producto en cuestión vendrán dados por:

$$I = p \times q = 3'57 \text{ €/ud.} \times 532 \text{ ud./día} \times 240 \text{ días/año} = 455.817'60 \text{ €/año}.$$

## Ejemplo 2

Después de efectuarse el correspondiente estudio, se concluye que las funciones de oferta y demanda de libros infantiles, en un país determinado, son las que se exponen a continuación. Con ello, se pide: a) Resolver la ecuación integro-diferencial de oferta de libro infantil siguiente:

$y''(x) + y(x) + \int_0^x e^{2(x-t)} y'(t) dt - \int_0^x (x-t) y(t) dt = e^{2x}$, con las condiciones iniciales: y(0) = y'(0) = 0.

b) Hallar su elasticidad para una cantidad de 2.000 ud./día del producto (*x* se expresa en miles de ud./día e *y* en €/ud.). c) Hallar el equilibrio del mercado para la siguiente función de demanda de dicho género: 4y = 60 – 15x, con la correspondiente representación gráfica. d) Estimar los ingresos brutos anuales de un editor-librero especializado en literatura infantil, considerando un calendario laboral de 240 días/año. e) Realizar la comprobación de la ecuación dada con el resultado obtenido en a).

*Solución*:

a) Se trata de una ecuación integro-diferencial de Volterra. Sea: $y(x) = L^{-1}[\phi(p)]$. En virtud de los datos del problema planteado, se tiene que:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(L^{-1}[\phi(p)]\right) \\ y''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(L^{-1}[\phi(p)]\right) \end{cases}$$

Por esto, luego de aplicar la transformación de Laplace, la ecuación integro-diferencial propuesta adopta la forma siguiente:

$$p^2\phi(p) + \frac{p}{p-2}\phi(p) = \frac{1}{p-2}\text{, o bien: } \phi(p)\frac{p(p-1)^2}{p-2} = \frac{1}{p-2}.$$

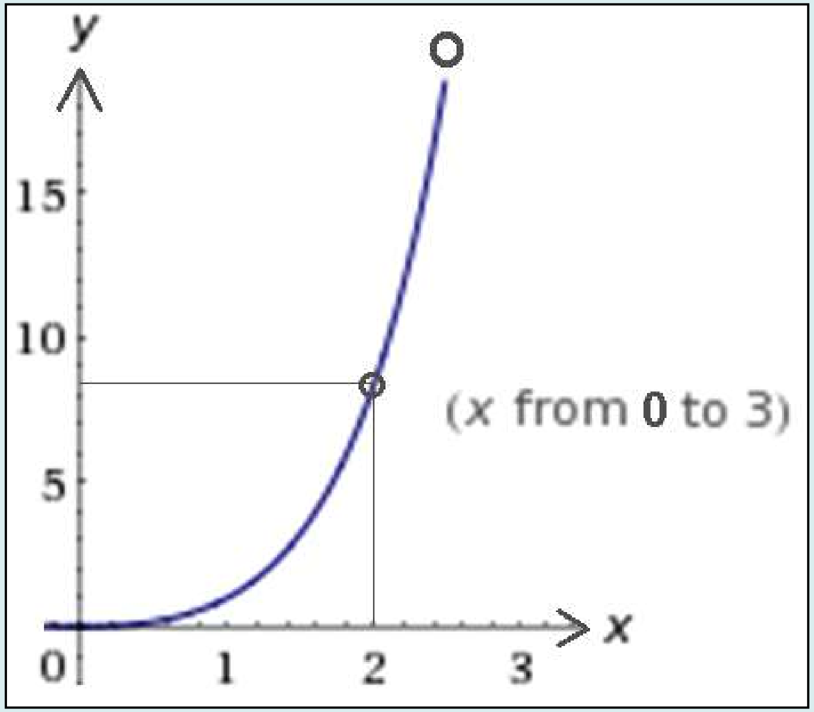
De aquí se halla que la función generatriz Laplace buscada es la siguiente:

$$y(x) = L^{-1}\ [\phi(p)] = L^{-1}[\frac{1}{p(p-1)^2}] = x\cdot e^x - e^x + 1.$$

Por consecuencia, la solución y(x) de la ecuación integro-diferencial propuesta, que satisface a las condiciones iniciales dadas, se determina por la igualdad:

$$y(x) = x\cdot e^x - e^x + 1 = e^x(x-1) + 1,$$

cuya representación gráfica viene dada por:




Por otra parte, se presume también en el caso de esta función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x $\rightarrow \infty$ también sucede que y $\rightarrow \infty$. Esto es:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(x-1)+1}{x} = +\infty$$

, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) Cuando x = 2.000 ud./día, se tendrá un precio medio de: $y = e^2(2-1) + 1 = 8'39$ €/ud., o sea, se trata del punto de coordenadas (2'00, 8'39). La elasticidad pedida será, pues:

$dy/dx = e^x(x-1) + e^x = x·e^x$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x·e^x}$; y la elasticidad buscada de esta función será:

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{x·e^x} \times \frac{y}{x} = \frac{y}{x^2·e^x} = \frac{8'39}{4·e^2} = 0'28 < 1$$

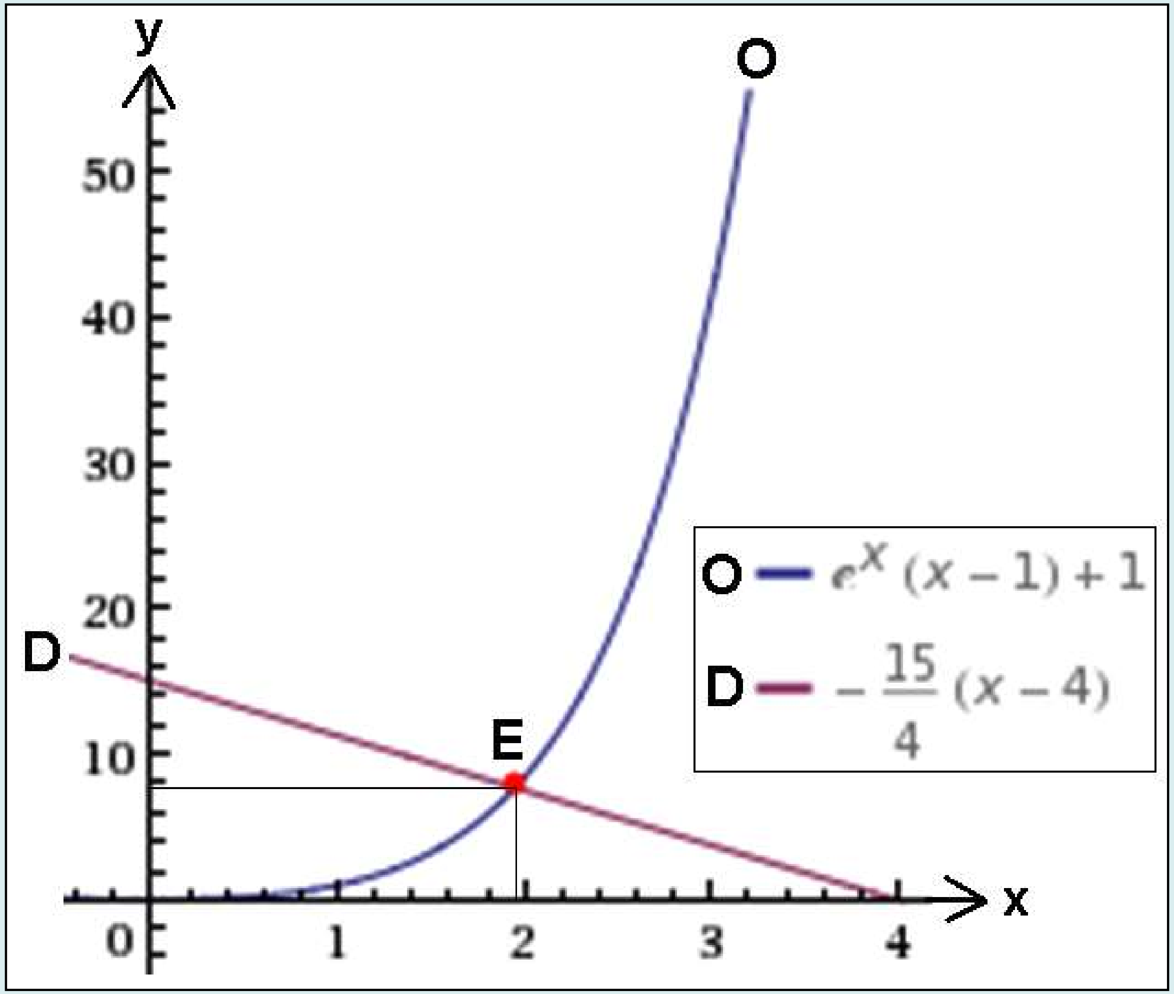
por lo que la oferta en este punto resulta *relativamente inelástica*, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción menor.

c) El equilibrio del mercado tendrá lugar cuando O = D, o sea:

$$e^x(x-1) + 1 = \frac{60-15x}{4}$$ , lo que sucede para los valores:

x = 1'95059 ≈ 1'95 (1.951 ud./día) e y (precio medio) ≈ 7'69 €/ud.,

con la siguiente representación gráfica:



d) Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del editor-librero vendrán dados por:

I = p × q = 7’69 €/ud. × 1.951 ud./día × 240 días/año = 3.600.765’60 €/año.

e) En la ecuación dada en el enunciado del problema, para x = 0 se tendrá que:

$$y''(0) + y(0) + \int_0^0 e^{-2t} \cdot y'(t) \cdot dt + \int_0^0 t \cdot y(t) \cdot dt = 1 \qquad ;$$

o sea:

$$y''(0) + 0 + 0 + 0 = y''(0) = 1.$$

Por otra parte, según la determinación efectuada, se tendrá:

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = x \cdot e^x - e^x + 1 = e^x(x-1) + 1 \\ y'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x \\ y''(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x) \end{array}}$$

y entonces también:

$$y''(0) = e^0(1) = 1 \text{ , c.s.q.d.}$$

## *Ejemplo 3*

Se trata de resolver la función económica y(x) a partir de la ecuación integro-diferencial siguiente, con validez $\forall\ x \in (0,2)$: $\frac{dy}{dx} = 1 - \sin x - \int_0^x y(\tau) \cdot d\tau$ ,

con la condición inicial: y(0) = 0. Se pide: a) ¿a qué valor de *y* corresponderá x = 1'5?, y también, b) hallar las elasticidades de la función y de la variable explicativa en este punto.

*Solución:*

a) Se trata de una ecuación integro-diferencial de Volterra. Tomando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación en cuestión, se tendrá que:

$$Sy_s - y(0) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2+1} - \frac{y_s}{S};$$

$$y_s\left(S + \frac{1}{S}\right) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2+1} \Rightarrow y_s = \frac{1}{S^2+1} - \frac{S}{\left(S^2+1\right)^2} = \frac{S^2 - S + 1}{(S^2+1)^2},$$

y la solución buscada, obtenida mediante la función generatriz Laplace, será:

$$\boxed{y(x) = L^{-1}[\frac{1}{S^2+1}] - L^{-1}[\frac{S}{(S^2+1)^2}] = \sin x - \frac{1}{2} x \cdot \sin x = \sin x \cdot (1 - \frac{x}{2})}$$

No resulta difícil comprobar este resultado teniendo en cuenta que: $y'(x) = \cos x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{\sin x}{2}$ , luego substituyendo en la EID dada, deberá cumplirse que:

$$\cos x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{\sin x}{2} = 1 - \sin x - \int_0^x \sin\tau \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) \cdot d\tau \qquad (1).$$

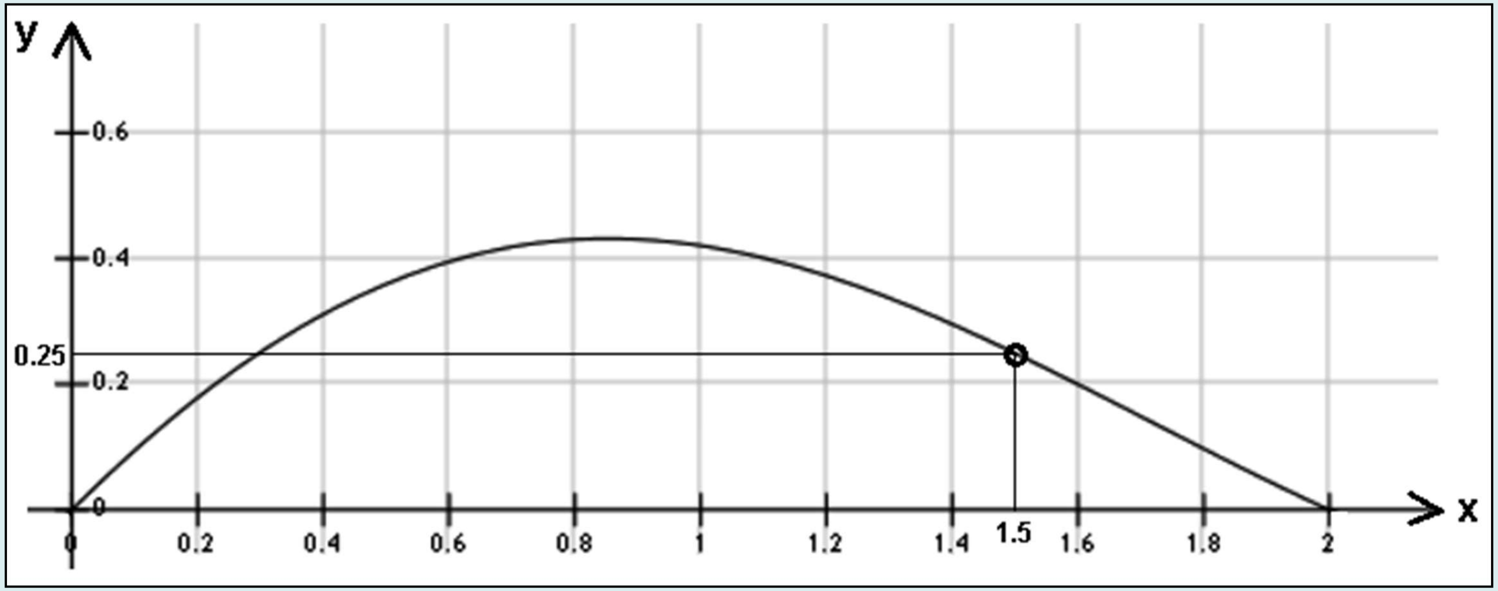
En efecto: $\int_0^x \sin\tau\left(1-\frac{\tau}{2}\right)\cdot d\tau = \left[\frac{t\cdot\cos t}{2} - \frac{\sin t}{2} - \cos t\right]_0^x = \frac{1}{2}[(x-2)\cos x - \sin x + 2]$

Con lo que substituyendo en la expresión anterior (1) se obtiene que:

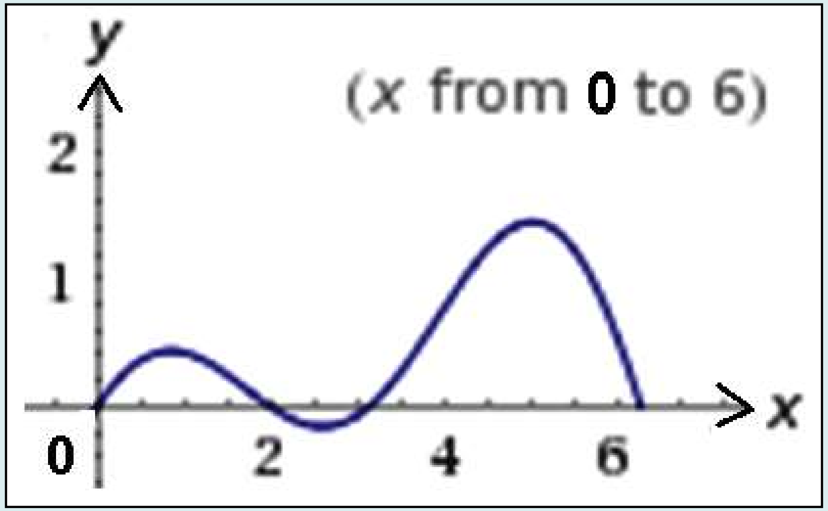
$$\cos x - \frac{x\cdot\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} = 1 - \sin x - \frac{(x-2)\cdot\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2} - 1 =$$

$$= -\sin x - \frac{x\cdot\cos x - 2\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2} = -\frac{\sin x}{2} - \frac{x\cdot\cos x}{2} + \cos x \text{ , c. s. q. d.}$$

La representación gráfica de esta solución en el primer cuadrante del círculo, se expone a continuación (con detalle suficiente en el intervalo de la recta real [0,2]):




Al valor de x = 1’5 corresponde y = 0’25 · sin 1’5 ≈ 0’25. A partir del valor x = 2 se pierde el significado económico, tal como indica el enunciado del problema, pues resultan valores negativos de la función, cuestión que puede constatarse también en el siguiente gráfico:




b) Por otra parte, se tendrá que: $\frac{dy}{dx} = \cos x\,(1-\frac{x}{2}) - \frac{\sin x}{2}$ ,

como ya se ha visto, y entonces:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x\,(1-\frac{x}{2}) - \frac{\sin x}{2}}$$

, o también puede expresarse así:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2}{\sin x + (x-2)\cos x}.$$

Se tendrán, en definitiva, los siguientes valores:

- Elasticidad puntual de la variable explicativa (independiente):

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{\sin x\,(1-\frac{x}{2})}{x\cdot\cos x\,(1-\frac{x}{2}) - \frac{x\cdot\sin x}{2}} = \frac{\sin 1'5\,(1-\frac{1'5}{2})}{1'5\cdot\cos 1'5\,(1-\frac{1'5}{2}) - \frac{1'5\cdot\sin 1'5}{2}} = \frac{0'25}{0'0265 - 0'75} = -0'35$$

$\in$ (-1,0), por lo que se trata probablemente de una función de demanda *relativamente inelástica*.

- Elasticidad puntual de la variable funcional (dependiente):

$$e_p = \frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y} = -\frac{1}{0'35} = -2'86.$$

*Ejemplo 4*

Se trata de definir la trayectoria temporal de un golpe de ariete cuyo modelo matemático viene dado por la ecuación integro-diferencial, del tipo Volterra, siguiente: $P'(t) = -\int_0^1 \ln t \cdot dt - \sin t - \int_0^t P(\tau) d\tau$ ,

significando la variable P(t) las sobrepresiones (positivas y negativas) medidas sobre la presión estática o de equilibrio, tomando como final práctico de la perturbación transitoria el instante t = 0 y haciendo la representación gráfica correspondiente de este fenómeno hidráulico (Franquet, 2019).

*Solución:*

Procede resolver, en primer lugar, la integral definida del 2º miembro de la ecuación dada, con lo que: $\int_0^1 \ln t \cdot dt = [t \cdot \ln t - t]_0^1 = -1$ , y entonces, la ecuación ID dada quedará configurada así:

$$\frac{dP(t)}{dt} = 1 - \sin t - \int_0^t P(\tau) d\tau \cdot$$

El final de la perturbación tendrá lugar cuando se cumpla la condición . Aplicando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación dada, se tiene:

$$SP_s - P(0) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2+1} - \frac{P_s}{S}$$

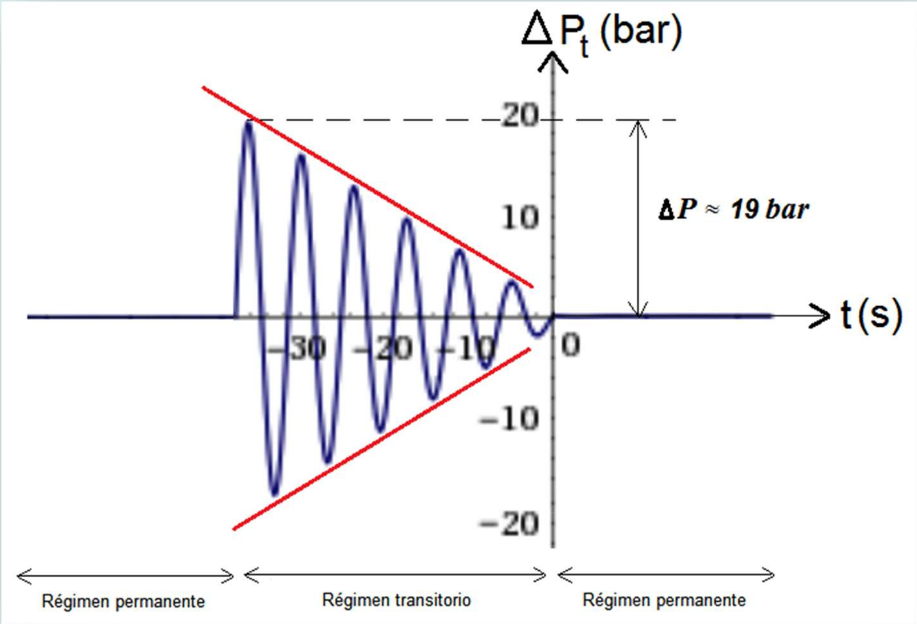
$$P_s\left(S + \frac{1}{S}\right) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2+1} \Rightarrow P_s = \frac{1}{S^2+1} - \frac{S}{(S^2+1)^2}$$

y la solución buscada o función generatriz será, utilizando las transformadas de la tabla básica (ver Apéndice III):

$$\boxed{P(t) = \sin t - \frac{1}{2} t \cdot \sin t = \sin t(1 - \frac{t}{2})}$$ . Esto es:

| t (s) | $\Delta P_t$ (bar) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -10 | 3.26 |
| -20 | -10.04 |
| -30 | 15.81 |
| -36 | 18.84 |
| -38 | 5.93 |
| … | … |

La representación gráfica de esta solución de los picos de presión positivos y negativos, que siguen una sucesión convergente infinitesimal, se expone a continuación:




Evolución temporal continua de las ondas de presión.

Por otra parte, cuando $\Delta P = 0$ no se notarían los efectos del golpe de ariete en la instalación estudiada, estado al que se tendería de modo oscilante y decreciente hasta el final de la perturbación. El golpe de ariete máximo positivo $\Delta P \approx 19$ bar tiene lugar aproximadamente 36 segundos antes de la estabilización a régimen permanente, pudiéndose considerar unos 38 segundos (concretamente: $12 \cdot \pi = 37.7$ segundos) como el tiempo de duración de la perturbación transitoria analizada.

## Ejemplo 5

Se trata de resolver:

a) la función económica de demanda y(x) a partir de la ecuación integro-diferencial siguiente: $\frac{dy}{dx} + 6y(x) + 9\int_0^x y(\tau) d\tau = 1$ , con la condición inicial: y(0) = 0, viniendo la variable *y* expresada en miles de euros/ud. y la *x* en miles de ud. de producto;
b) ¿para qué precio la demanda *x* será de 1.000, 2.000 y 3.000 ud. de producto?; y
c) ¿cuál será la elasticidad arco entre los tres puntos anteriores, así como la elasticidad puntual en el punto intermedio anterior?

*Solución:*

Respectivamente:

a) Se trata de una ecuación integro-diferencial de Volterra. Tomando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación infinitesimal en cuestión, se tendrá que:

$$Sy_s - y(0) + 6y_s + 9\frac{y_s}{S} = \frac{1}{S}; y_s\left(S + 6 + \frac{9}{S}\right) = \frac{1}{S} \Rightarrow y_s = \frac{1}{S^2 + 6S + 9} = \frac{1}{(S+3)^2} ,$$

y la solución buscada, obtenida mediante la función generatriz Laplace, será la siguiente:

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+3)^2}\right\} = x \cdot e^{-3x}$$

Ello puede comprobarse sin más que tener en cuenta que: $y' = \frac{dy}{dx} = e^{-3x} - 3x \cdot e^{-3x} = e^{-3x}(1-3x)$ ;

luego substituyendo en la EID dada, deberá cumplirse que:

$$e^{-3x}(1-3x) + 6x \cdot e^{-3x} + 9\int_0^x \left(\tau \cdot e^{-3\tau}\right) \cdot d\tau = 1 . \qquad (1)$$

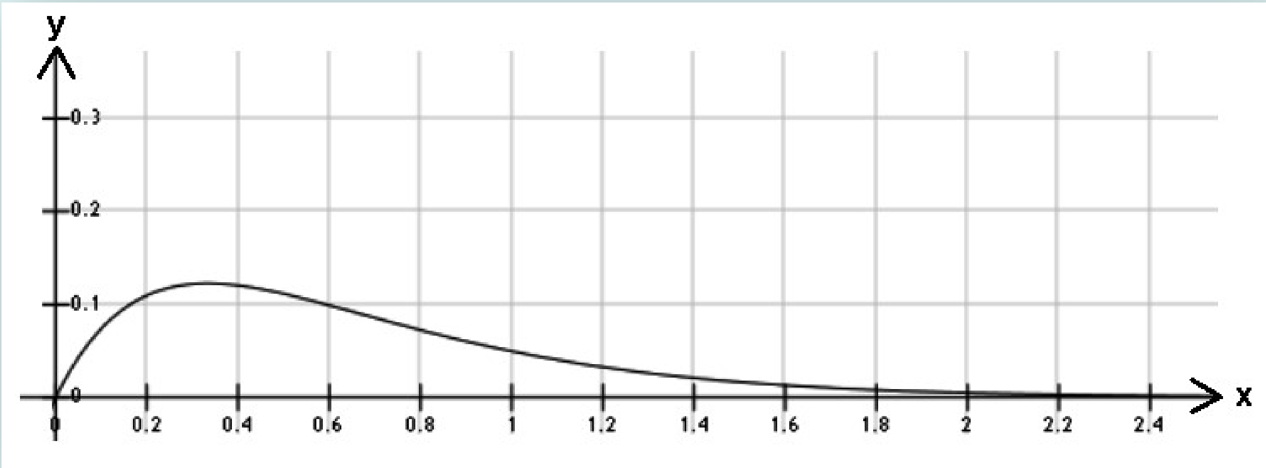
Veamos, al respecto, que:

$$\int_0^x \tau \cdot e^{-3\tau} \cdot d\tau = \left[ e^{-3\tau}\left( -\frac{\tau}{3} - \frac{1}{9} \right) \right]_0^x = \frac{1}{9} - \frac{e^{-3x}}{9}(3x+1)$$ Con lo que substituyendo en la anterior expresión (1) obtendremos:

$e^{-3x} - 3x \cdot e^{-3x} + 6x \cdot e^{-3x} + 1 - e^{-3x}(3x+1) = 1$; y, en definitiva, se obtiene:

$e^{-3x} + 3x \cdot e^{-3x} - 3x \cdot e^{-3x} - e^{-3x} = 0$, c.s.q.d.

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación (con detalle suficiente en el intervalo [0,2'4], a partir del cual se pierde el detalle visual):




Debe tenerse en cuenta que: $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{x}{e^{3x}} \right) =$ (criterio de Stolz del cociente) =

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - (x-1)}{e^{3x} - e^{3(x-1)}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{3x} - \frac{e^{3x}}{e^3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{3x}(1 - 1/e^3)} = 0$, por lo que el eje OX constituye una asíntota horizontal de esta función.

b) Respectivamente, al tratarse de un bien normal, la demanda evolucionará a la baja a partir del máximo global del siguiente modo:

- Para x = 1.000 ud. $\Rightarrow$ y = $1/e^3$ = 0'049787 $\approx$ 49'79 € .
- Para x = 2.000 ud. $\Rightarrow$ y = $2/e^6$ = 0'004958 $\approx$ 4'96 € .
- Para x = 3.000 ud. $\Rightarrow$ y = $3/e^9$ = 0'000370 $\approx$ 0'37 € .

En cualquier caso, dicho máximo de la curva se alcanzará en el punto en que:
$y' = dy/dx = e^{-3x} - 3x\cdot e^{-3x} = e^{-3x}(1-3x) = 0$, por lo que:

x = 1/3 (333 ud.) e y = 1/(3e) = 0'1226264 (122'63 €/ud.).

c) Se trata de calcular la elasticidad arco entre los puntos: (1.000, 49'79) y (3.000, 0'37), con lo que:

$$e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \times \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{3.000 - 1.000}{3.000 + 1.000} \times \frac{0'37 + 49'79}{0'37 - 49'79} =$$

$$= (0'5) \times \frac{50'16}{-49'42} = -0'51 \in (-1, 0),$$

por lo que se trata de una función de *demanda relativamente inelástica*.

Por otra parte, la elasticidad puntual en el punto intermedio (2.000, 4'96) será:

$y = x \cdot e^{-3x} = \dfrac{x}{e^{3x}}$ ; $\dfrac{dy}{dx} = e^{-3x}(1-3x)$, y también: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{e^{3x}}{1-3x}$ . Así pues:

$e_p = \dfrac{dx}{dy} \times \dfrac{y}{x} = \dfrac{e^6}{1-6} \times \dfrac{0'004958}{2} = -0'20$ $\in$ (-1,0), por lo que se trata de una *demanda relativamente inelástica*.

A la misma conclusión hubiéramos llegado considerando que:

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{e^{3x}}{1-3x} \times \frac{x \cdot e^{-3x}}{x} = \frac{1}{1-3x} = -\frac{1}{5} = -0'20 \text{ , c.s.q.d.}$$

## Ejemplo 6

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de demanda y oferta:

$$\begin{cases} D \rightarrow y(x) = e^{-x} + \displaystyle\int_x^{\infty} y(t) \cdot dt \\ O \rightarrow y''(x) + \displaystyle\int_0^x e^{2(x-t)} \cdot y'(t) \cdot dt = e^{2x} \quad , \forall\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades diarias. Se trata: a) de estudiar el equilibrio del mercado, b) de calcular la elasticidad de ambas funciones económicas en el punto de equilibrio, y c) de estimar los ingresos brutos anuales del productor (considerando un calendario laboral de 240 días/año).

*Solución:*

a) La función dada de demanda es, evidentemente, una ecuación integral inhomogénea de Volterra de 2ª especie, con $\lambda = 1$, cuya resolución ofrece la función: $y(x) = e^{-x}(1-x)$, mientras que la función de oferta constituye una ecuación integro-diferencial de Volterra resoluble por aplicación del método de las transformadas de Laplace, que ofrece, al cabo, como solución definitiva, la siguiente función generatriz: $y(x) = e^x - 1$, como puede comprobarse, en ambos casos, seguidamente.

En efecto, por lo que se refiere a la función de demanda, veamos que:

$$e^{-x}(1-x) = e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x} + \int_x^{\infty} e^{-t}(1-t)\cdot dt \text{ , o sea:}$$

$$-x\cdot e^{-x} = \int_x^{\infty} e^{-t}(1-t)\cdot dt = \left[t\cdot e^{-t}\right]_x^{\infty} = -x\cdot e^{-x} \text{ , c.s.q.d.}$$

Por lo que se refiere a la función de oferta, sucede que:

$y(x) = e^x - 1$; $y'(x) = e^x$; $y''(x) = e^x$. Con ello, substituyendo en la ecuación dada, se tendrá que: $e^x + \int_0^x e^{2(x-t)}\cdot e^t\cdot dt = e^{2x}$, por lo que debe demostrarse la siguiente igualdad: $\int_0^x e^{2x-2t}\cdot e^t\cdot dt = e^{2x} - e^x$ , o lo que es lo mismo, que se cumpla que: $\int_0^x e^{2x-t}\cdot dt = e^x(e^x - 1)$ . Veámoslo, puesto que, efectivamente:

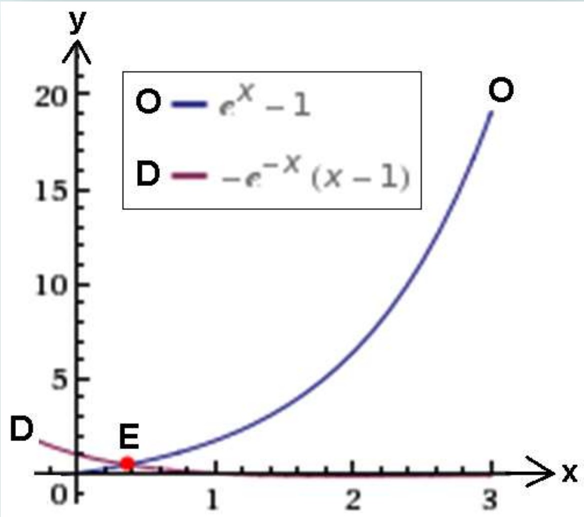
$$\int_0^x e^{2x-t}\cdot dt = \left[-e^{2x-t}\right]_0^x = e^x(e^x - 1) \text{ , c.s.q.d.}$$

Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O): $e^{-x}(1-x) = e^x - 1$ , de donde se deduce que la raíz es: x = 0'365117 (365 ud.). En este caso, $y = e^{0'365117} - 1 = 0'44$ € , o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 0'44 €/ud. y una cantidad aproximada de 365 ud./día de producto.

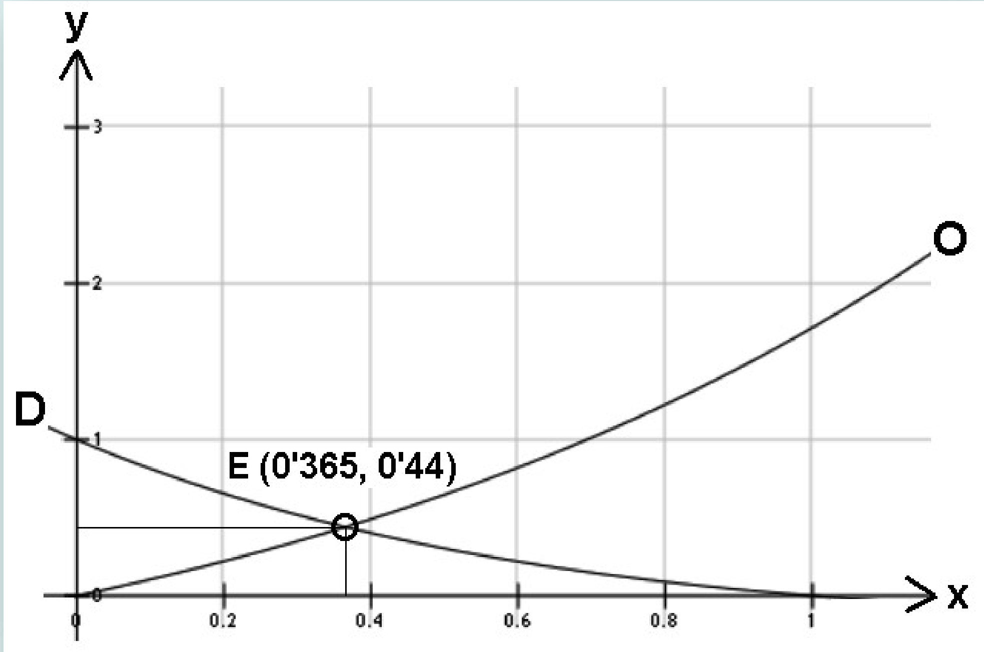
Por otra parte, se presume también en el caso de esta función de oferta la existencia de ramasparabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también sucede que $y \to \infty$.

Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$ , luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica de esta solución se expone a continuación:



, y aún con mayor detalle en las proximidades del origen de coordenadas se tendrá que:



Oferta, demanda y punto de equilibrio.

b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado hallado anteriormente E(0’365, 0’44), se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

D $\Rightarrow$ $y = e^{-x}(1-x)$; $dy/dx = e^{-x}(x-2)$ ; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^{-x}(x-2)}$ . Y la elasticidad de la función de demanda será:

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1-x}{x^2 - 2x} = \frac{1 - 0'365}{0'365^2 - 2 \cdot 0'365} = -1'06 < -1,$$

luego se trata de una *demanda relativamente elástica*. Del mismo modo, por lo que se refiere a la oferta, se tendrá que:

O $\Rightarrow$ $y = e^x - 1$; $dy/dx = e^x$ ; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x}$ . Y entonces, la elasticidad buscada de la oferta será la siguiente:

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{e^x} \times \frac{y}{x} = \frac{e^x - 1}{x \cdot e^x} = \frac{e^{0'365} - 1}{0'365 \cdot e^{0'365}} = 0'84 < 1.$$

En este caso, la función de oferta en estudio resulta *relativamente inelástica*, y ante una variación del precio la cantidad ofertada del bien en cuestión disminuye en una proporción menor.

c) Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del producto en cuestión vendrán dados por:

$$I = p \times q = 0'44 \text{ €/ud.} \times 365 \text{ ud./día} \times 240 \text{ días/año} = 38.544'00 \text{ €/año.}$$

## Ejemplo 7

Los resultados contables de una empresa, expresados en millones de euros, vienen dados en relación al tiempo (años) por la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} + x(t) - \int_0^t x(r)\sin(t-r)dr = -\sin t,\ \forall x(0) = 1 .$$

Se pide: a) Analizar la trayectoria temporal de dichos resultados en el primer quinquenio de su actividad económica, con la correspondiente representación gráfica. b) Si en el primer ejercicio económico se vendieron 357.000 ud. de producto a una media de 2'10 €/ud., averiguar los gastos del ejercicio y el beneficio neto, considerando una fiscalidad aplicable del 25%.

*Solución:*

a) La anterior ecuación integro-diferencial de Volterra también se puede resolver utilizando las propiedades de la transformada de Laplace. Como sucede en algún ejemplo anterior, reconocemos que la integral de nuestra ecuación representa una convolución, esta vez $(x*\sin)(t)$. Por tanto, si tomamos la transformada de Laplace de cada lado de la ecuación, obtenemos que:

$$L[dx/dt] + L[x(t)] - L[(x*\sin)(t)] = L[-\sin t],$$

o bien utilizando la fórmula correspondiente de la tabla del Apéndice III y el teorema de convolución, se tendrá que:

$$[s\cdot L[x(t)] - x(0)] + L[x(t)] - L[x(t)] \cdot L[\sin t] = -\frac{1}{s^2+1} \,,$$

que se convierte en: $[s\cdot L[x(t)] - 1] + L[x(t)] - L[x(t)] \cdot \frac{1}{s^2+1} = -\frac{1}{s^2+1}$ .

Tras simplificar, se obtiene que: $\left(\frac{s^3+s^2+s}{s^2+1}\right)\cdot L[x(t)] = \frac{s^2}{s^2+1}$ , y por tanto, concluimos con:

$L[x(t)] = \frac{s^2}{s^3+s^2+s} = \frac{s}{s^2+s+1}$ .

El uso ingenioso de algunas operaciones algebraicas nos mostrará, a su vez, que:

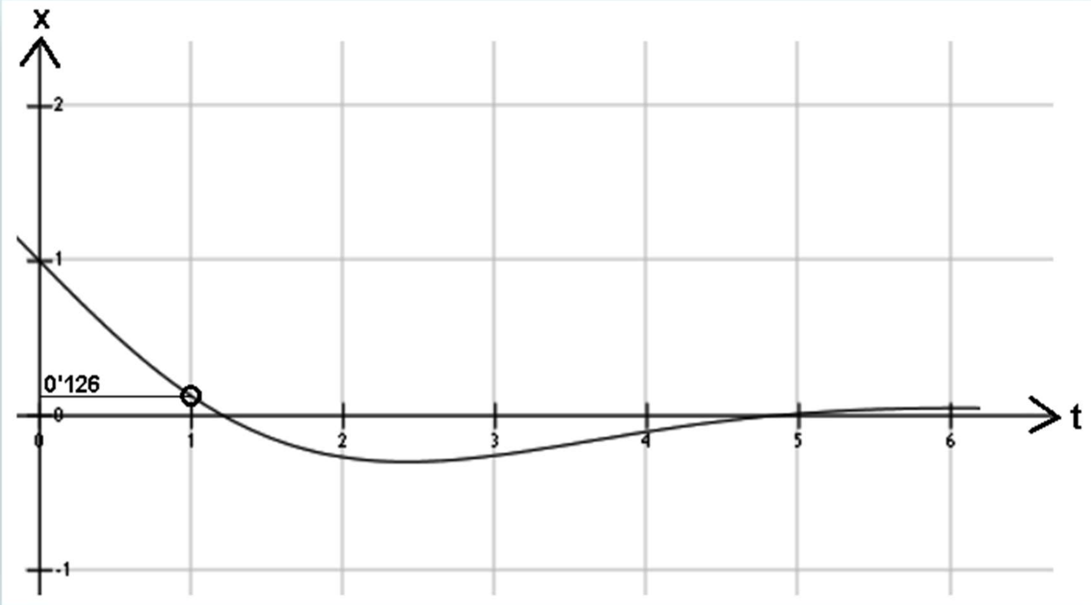
$$\frac{s}{s^2+s+1} = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{s-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(s-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2};$$

y si utilizamos las fórmulas correspondientes para invertir esta transformada, hallamos que la función generatriz Laplace, que representa la trayectoria temporal buscada, es la siguiente:

$$x(t) = e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) .$$

La representación gráfica de los resultados contables correspondientes al primer lustro de actividad económica de esta empresa puede verse a continuación:




Trayectoria temporal de los resultados contables.

La anulación de los resultados contables en el primer lustro o quinquenio tendrá lugar para x(t) = 0, lo que se corresponde con los puntos:

$$t = \frac{2\pi n}{\sqrt{3}} - \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \quad , \forall\ n \in \{Z^+\} = \{\mathbb{N}\}\ ,$$

o sea, para $t_1$ (n=1) = 1'2092 años y $t_2$ (n=2) = 4'8368 años, como puede apreciarse en la figura anterior, en cuyo intervalo temporal $[t_1,t_2]$ dichos resultados serán negativos.

Para comprobar el resultado en la propia ecuación integral dada, veamos que la derivada *dx/dt* es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)}{e^{t/2}} - \frac{\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}\ e^{t/2}}\right) = -\frac{1}{3}\, e^{-t/2}\left(\sqrt{3}\ \sin\left(\frac{\sqrt{3}\ t}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ t}{2}\right)\right)$$

y efectivamente, substituyendo los valores obtenidos para el instante en que t = 0 en dicha expresión del enunciado del problema planteado, como comprobación, se obtiene que:

$$-1 + 1 - 0 = -\sin 0 = 0, \text{ c.s.q.d.}$$

b) Los ingresos del ejercicio fueron de:

$$I = p \times q = 2'10 \text{ €/ud.} \times 357.000 \text{ ud.} = 749.700'00 \text{ €},$$

y, consecuentemente, los resultados contables brutos (antes de impuestos) serán de:

$$\pi = x(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3e}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 0'6065306 \times 0'6478593 - 0'3501806 \times 0'7617599 = 0'1261929 = 126.192'90 \text{ €}.$$

Con ello, los gastos totales serán:

$$G = I - \pi = 749.700'00 - 126.192'90 = 623.507'10 \text{ €},$$

y el beneficio neto (después de impuestos) obtenido será, al final del primer ejercicio, del orden de:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 126.192'90 = 94.644'68 \text{ €}.$$

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Lección 24

## SISTEMAS DE ECUACIONES INTEGRALES

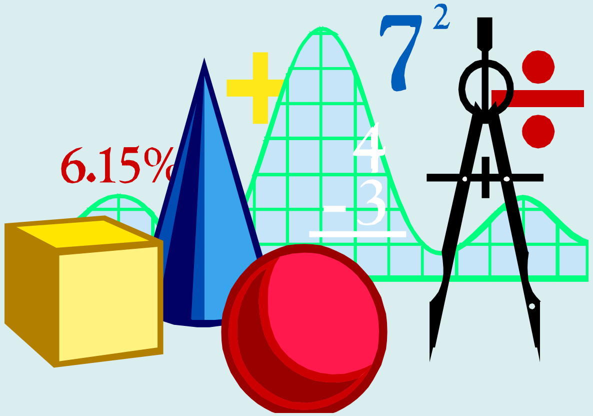
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





# 1. CONCEPTOS PREVIOS

## 1.1. SISTEMAS DE ECUACIONES INTEGRALES

La transformación de Laplace (véase el Apéndice III) también puede ser aplicada exitosamente a la resolución de sistemas de ecuaciones integrales de Volterra del tipo siguiente:

$$y_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{s} \int_0^x K_{ij}(x-t) y_j(t) dt \ , \ (\forall i = 1, 2, \ldots, s),$$

donde $K_{ij}(x)$ y $f_i(x)$ son funciones continuas conocidas que poseen imagen según Laplace.

Aplicando la expresada transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene que:

$$\phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{j=1}^{s} \widetilde{K}_{ij}(p) \phi_j(p), \quad (\forall i = 1, 2, \ldots, s).$$

Este es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con respecto a $\phi_j(p)$. Resolviéndolo se hallan $\phi_j(p)$, cuyas funciones-objeto serán, precisamente, la solución del sistema inicial de ecuaciones integrales planteado. Por extensión, la misma operatoria puede aplicarse a los sistemas de ecuaciones integro-diferenciales o bien mixtos (de ecuaciones diferenciales, integrales y/o integro-diferenciales).

## 1.2. ELASTICIDAD DEMANDA-PRECIO

Si se denomina *x* a la cantidad demandada de un bien o un servicio determinado X cuando es *p* el precio de venta en el mercado de este bien o servicio, x = f(p) es la *función de demanda* del bien o servicio X, dentro de ciertos supuestos restrictivos que exigen la independencia de la demanda respecto a los precios de otros bienes diferentes de X y de la renta o disponibilidades del sujeto comprador del bien o servicio en cuestión.

Como, en general, al crecer el precio *p* se demanda menos cantidad del bien -y recíprocamente- p y x son de signo contrario; si se desea que sea positiva la elasticidad correspondiente, ha de definirse afectada de un signo negativo, esto es, en la forma:

$$\frac{E(x)}{E(p)} = -\frac{p}{x} \times \frac{dx}{dp} \qquad ,$$

que representará, aproximadamente, el porcentaje en que varía la cantidad demandada de X cuando el precio del bien o servicio que nos ocupa sufre una variación del 1 por 100.

Como no resulta, con cierta frecuencia, fácil de obtener empíricamente funciones de demanda-precio se calcula, a veces, aquello que J. CASTAÑEDA (1968) denomina *elasticidad de arco*, correspondiendo a la elasticidad en el punto medio del segmento determinado por dos puntos, $P_1$ ($p_1$ ,$x_1$) y $P_2$ ($p_2$ ,$x_2$), que pertenecen a una curva o función teórica de demanda, y sus coordenadas son observaciones conseguidas mediante alguna investigación estadística previa.

Su cálculo se realiza empleando la fórmula aproximada siguiente:

$$\mu = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \div \frac{\Delta x}{x} \quad \text{, donde:}$$

$$\Delta f(x) = x_2 - x_1 \;;\; f(x) = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ y también: } \Delta x = p_2 - p_1 \;;\; x = \frac{p_1 + p_2}{2} \;,$$

ya que las semisumas que figuran en estas expresiones son los puntos medios de las proyecciones de $P_1P_2$ sobre los ejes coordenados rectangulares cartesianos Ox y Op, y el punto definido por las coordenadas:

$$\left(\frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \text{ es justamente el punto medio del segmento } \overline{P_1P_2}.$$

Por tanto, la elasticidad de arco pedida vendrá dada, en la práctica, por la expresión:

$$\frac{E_a(x)}{E_a(p)} = -\frac{x_2 - x_1}{\frac{x_1 + x_2}{2}} \div \frac{p_2 - p_1}{\frac{p_1 + p_2}{2}} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \div \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} = \frac{x_1 - x_2}{p_2 - p_1} \times \frac{p_1 + p_2}{x_1 + x_2}$$

Este método para calcular la elasticidad-precio se conoce también como "fórmula de los puntos medios", ya que el precio y la cantidad medios son las coordenadas del punto medio de la línea recta trazada entre los dos puntos dados; sin embargo, como esta fórmula asume implícitamente que la sección de la función de demanda entre esos puntos es lineal, mientras mayor sea su curvatura por encima de ese registro, peor será también la aproximación de esta elasticidad a su valor real.

Los conceptos desarrollados aquí pueden aplicarse también a la función de oferta por lo que a su elasticidad se refiere.

Son básicamente dos los factores que influyen sobre la elasticidad de la oferta, a saber:

*-La posibilidad de substituir recursos*: mientras más posibilidades tenga el productor de substituir recursos (por ejemplo substituir trabajo por capital), más elevada será también la elasticidad de la oferta.

*-El plazo u horizonte temporal*: A mayor plazo la función de oferta será más elástica, y a menor plazo será menos elástica. Por ejemplo, a muy corto plazo la función de oferta será perfectamente inelástica, pues el productor no puede variar sus planes de producción en un tiempo tan reducido (puede ser de un día para otro, o de una semana a otra, o tal vez plazos mayores dependiendo del tipo de producción).

Estas elasticidades E deben interpretarse del siguiente modo:

$$\begin{cases} E = 0 \text{ (función perfectamente inelástica)} \\ \left.\begin{array}{l} -1 < E < 0 \\ 0 < E < 1 \end{array}\right\} \text{(función relativamente inelástica)} \\ |E| = 1 \text{ (elasticidad unitaria)} \\ \left.\begin{array}{l} -\infty < E < -1 \\ 1 < E < \infty \end{array}\right\} \text{(función relativamente elástica)} \\ E = \pm\infty \text{ (función perfectamente elástica)} \end{cases}$$

Pues bien, a continuación se exponen algunos ejercicios representativos de este importante concepto profusamente utilizado en Economía.

## 2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

*Ejemplo 1*

Resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones integrales simultáneas o interrelacionadas:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - 2\int_0^x e^{2(x-t)} y_1(t)\,dt + \int_0^x y_2(t)\,dt, \\ y_2(x) &= 4x - \int_0^x y_1(t)\,dt + 4\int_0^x (x-t) y_2(t)\,dt. \end{aligned}\right\}$$

, con el precio *y* expresado en €/ud. y la cantidad *x* en millones de unidades del producto, sabiendo que una de ellas es una función de oferta y la otra es de demanda de un bien normal, hallando: a) el correspondiente equilibrio del mercado y los ingresos brutos del ofertante, y b) la elasticidad de la demanda en dicho punto.

*Solución*:

a) Se trata de sendas ecuaciones integrales de Volterra. Pasando a las imágenes y aplicando el teorema sobre la imagen de una convolución, se obtiene que:

$$\begin{cases} \phi_1(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p-2}\phi_1(p) + \dfrac{1}{p}\phi_2(p), \\ \phi_2(p) = \dfrac{4}{p^2} - \dfrac{1}{p}\phi_1(p) + \dfrac{4}{p^2}\phi_2(p). \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenido, con respecto a $\phi_1(p)$ y a $\phi_2(p)$, se halla que:

$$\phi_1(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2},$$

$$\phi_2(p) = \frac{3p+2}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

Las funciones-objeto o funciones generatriz Laplace para $\phi_1(p)$ y $\phi_2(p)$ son iguales, respectivamente, a:

$$\begin{cases} y_1(x) = L^{-1}[\frac{1}{p+1}] - L^{-1}[\frac{1}{(p+1)^2}] = e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x) \\ y_2(x) = L^{-1}[\frac{8}{9(p-2)}] + L^{-1}[\frac{1}{3(p+1)^2}] - L^{-1}[\frac{8}{9(p+1)}] = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}x\cdot e^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x} = \frac{8}{9}e^{2x} + e^{-x}(\frac{x}{3} - \frac{8}{9}) \end{cases}$$

Las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ son, pues, la solución del sistema inicial de ecuaciones integrales, resultando evidente que $y_1(x)$ es la función de demanda D (decreciente) e $y_2(x)$ es la de oferta O (creciente). En el punto de equilibrio tendrá lugar que D = O, con lo que:

$$e^{-x}(1-x) = \frac{8}{9}e^{2x} + e^{-x}(\frac{x}{3} - \frac{8}{9})$$ , lo que sucederá para los siguientes valores:

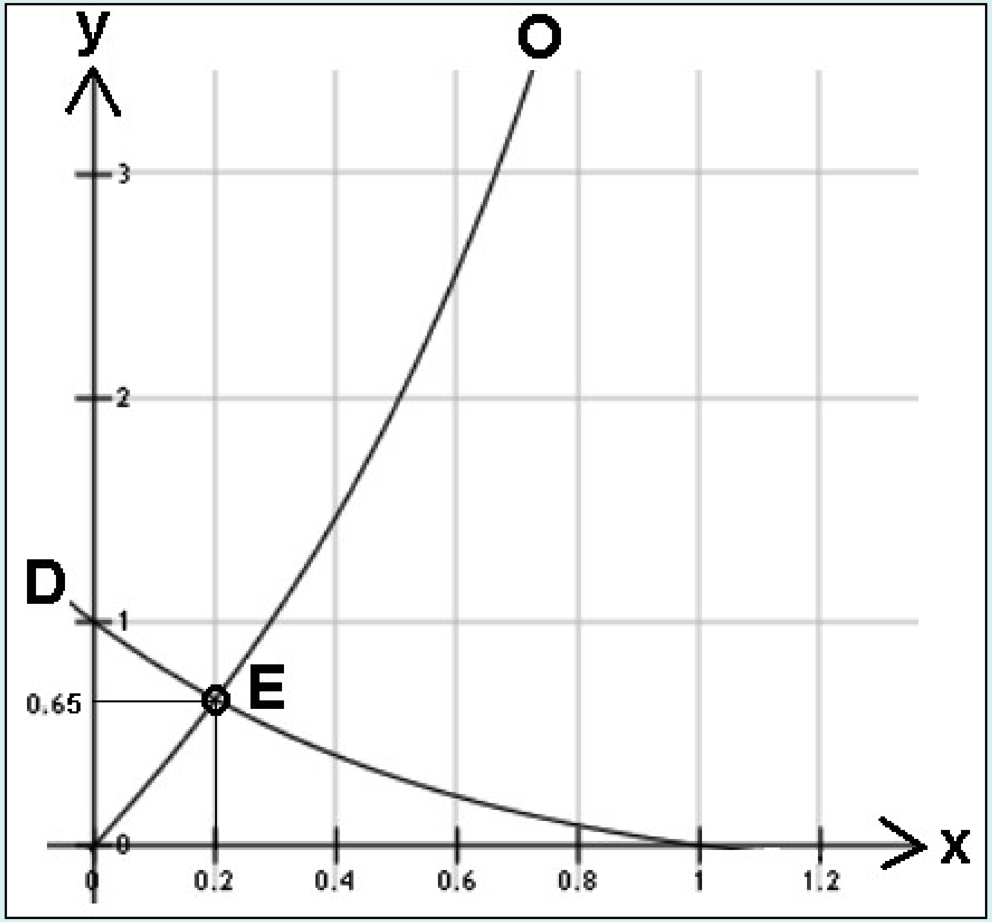
$x \approx$ 0'20 (200.000 ud.) ; $y \approx$ 0'65 €/ud. $\Rightarrow$ E(0'20, 0'65), de donde se deducen unos ingresos brutos del ofertante de:

$$I = p \times q = 0'65 \times 200.000 = 130.000'00 \text{ €},$$

con la representación gráfica que podemos ver en la diapositiva siguiente.

La función de demanda se anula en el punto en que x = 1. Y la función de oferta presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to +\infty$ también $y_2$ tiende a $+\infty$. Esto es:

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y_2}{x} = +\infty$ , luego existe en ella una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).




Funciones de oferta, demanda y punto de equilibrio.

b) La elasticidad puntual buscada de la función de demanda en el equilibrio deberá considerar que:

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2); \frac{dx}{dy} = \frac{e^{x}}{x-2};$$

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{e^{x}}{x-2} \times \frac{e^{-x}(1-x)}{x} = \frac{1-x}{x^2-2x} = \frac{0'8}{0'04-0'4} = -2'22 < -1,$$

luego se trata de una demanda “relativamente elástica” en los términos definidos.

## *Ejemplo 2*

Resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones integrales simultáneas o interrelacionadas:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= e^{2x} + \int_0^x y_2(t)\cdot dt \\ y_2(x) &= 1 - \int_0^x e^{2(x-t)}\cdot y_1(t)\cdot dt \end{aligned}\right\}$$

, con el precio *y* expresado en €/ud. y la cantidad *x* en miles de unidades del producto, sabiendo que una de ellas es una función de oferta y la otra es de demanda de un bien normal, hallando: a) el correspondiente equilibrio del mercado así como los ingresos brutos del ofertante, b) la elasticidad de la demanda en dicho punto, y c) realizar la comprobación del sistema integral dado en este enunciado con el resultado señalado en a).

*Solución*:

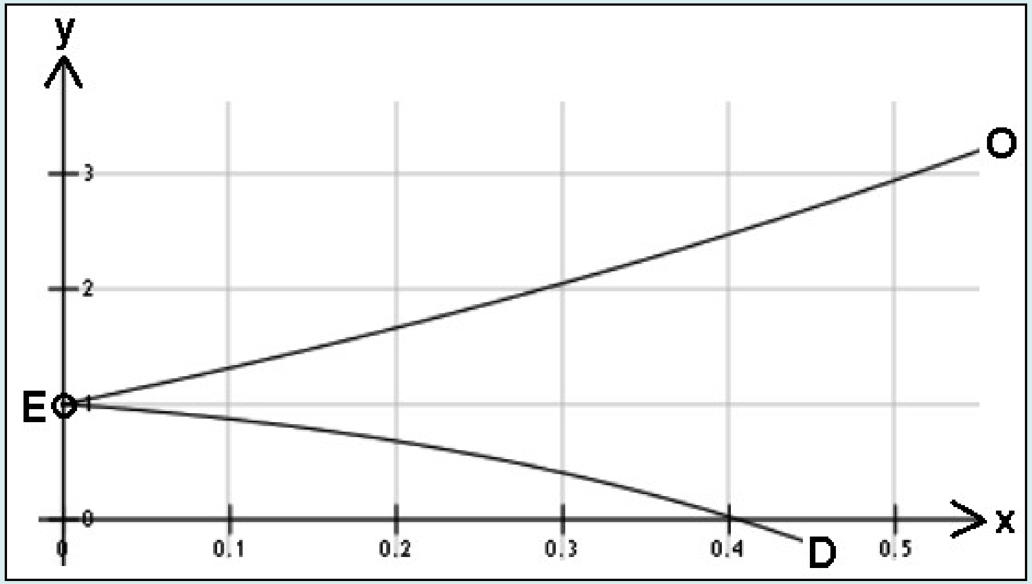
a) Se trata de sendas ecuaciones integrales de Volterra. La solución del sistema planteado, como puede comprobar el amable lector/a, una vez efectuados los cálculos pertinentes, es la siguiente:

$$y_1(x) = 3e^x - 2\ ;\ y_2(x) = 3e^x - 2e^{2x}\ .$$

Las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ son, pues, la solución del sistema inicial de ecuaciones integrales, resultando evidente que $y_2(x)$ es la función de demanda (decreciente) e $y_1(x)$ es la de oferta (creciente). En el punto de equilibrio tendrá lugar que: O = D, con lo que:

$3e^x - 2 = 3e^x - 2e^{2x}$, lo que sucederá para los valores:

$e^{2x} = 1;\ 2x = \ln 1 = 0;\ x = 0$ ud. ; y = 1'00 €/ud. $\Rightarrow$ E(0, 1), lo que obviamente conlleva unos ingresos brutos del ofertante, con la siguiente representación gráfica:




Funciones de oferta, demanda y punto de equilibrio.

Veamos que la demanda se anula (y = 0) en el punto en que:

$3 \cdot e^x = 2 \cdot e^{2x}$, esto es: $e^x = 3/2 = 1'5$; $x = \ln 1'5 \approx 0'405$ (405 ud.)

Por otra parte, en el caso de la función de oferta se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si:

$x \to +\infty$ también $y \to +\infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3 \cdot e^x - 2}{x} = +\infty$

luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba). Así mismo, en el caso de la función de demanda cabe presumir también la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: $x \to +\infty$ también $y \to -\infty$. Y además:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 \cdot e^x - 2 \cdot e^{2x}}{x} = -\infty$$

luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia abajo).

b) La elasticidad puntual buscada de la función de demanda en el equilibrio E(0, 1) deberá considerar que:

$\frac{dy}{dx} = 3e^x - 2e^{2x}$, con lo que: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3e^x - 2e^{2x}}$; y la elasticidad puntual buscada será:

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{dx}{dy} \times \frac{1}{0} = -\infty,$$

por lo que se trata de una demanda perfectamente elástica (con tangente horizontal).

c) Se tiene:

$$\left\{ \begin{aligned} y_1(x) &= e^{2x} + \int_0^x y_2(t) \cdot dt = 3e^x - 2 \\ y_2(x) &= 1 - \int_0^x e^{2(x-t)} \cdot y_1(t) \cdot dt = 3e^x - 2e^{2x} \end{aligned} \right\}$$

Comprobaremos cada ecuación del sistema dado por separado.

*Primera ecuación*:

$$y_2(t) = 3e^t - 2e^{2t} \text{ ; con lo que:}$$

$$y_1(x) = e^{2x} + \int_0^x (3e^t - 2e^{2t}) \cdot dt = 3e^x - e^{2x} - 2 + e^{2x} = 3e^x - 2 \text{ ; c.s.q.d.}$$

*Segunda ecuación*:

$$y_1(t) = 3e^t - 2 \text{ ; con lo que:}$$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x e^{2(x-t)} \cdot (3e^t - 2) \cdot dt = 1 - \left[ (e^{-2t} - 3e^{-t}) \cdot e^{2x} \right]_0^x =$$

$$= 1 + 3e^x - 2e^{2x} - 1 = 3e^x - 2e^{2x}, \text{ c.s.q.d.}$$

## Ejemplo 3

Los resultados contables antes de impuestos de tres empresas del mismo *holding*, $y_1$, $y_2$ e $y_3$, que se hallan interrelacionados, ofrecen el siguiente sistema de ecuaciones integrales simultáneas:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= t + \int_0^t y_2(u)\cdot du \\ y_2(t) &= 1 - \int_0^t y_1(u)\cdot du \\ y_3(t) &= \sin t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-u)\cdot y_1(u)\cdot du \end{aligned}\right\}$$

, viniendo la variable *y* expresada en millones de euros y *t* en años (ejercicios económicos). Se pide:

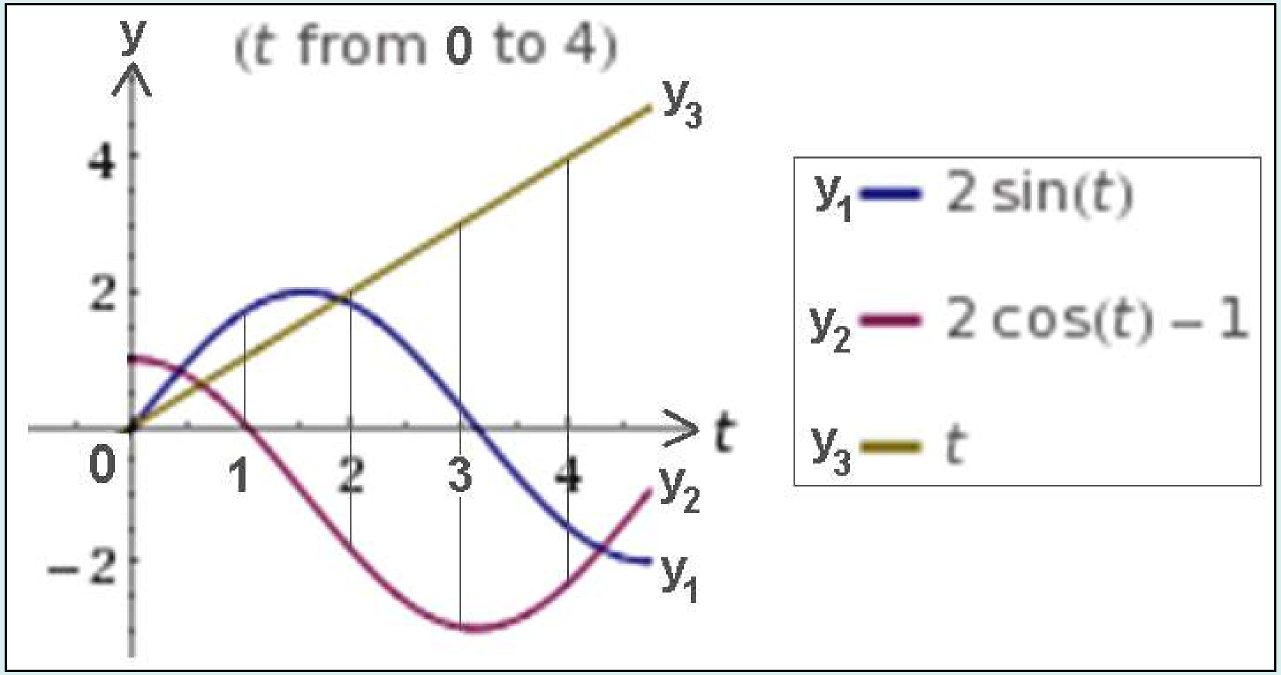
a) jerarquizar los resultados contables acumulados del primer cuatrienio de vida de estas empresas y de su conjunto, hallando el beneficio neto global considerando una fiscalidad del 25%. ¿Cuál de ellas ha resultado ser la más rentable?, b) extender el análisis a efectuar al primer decenio de la actividad del *holding* empresarial, aplicando la cláusula “ceteris paribus” y teniendo en cuenta que tienen lugar unos beneficios extraordinarios de 530.000 € y 850.620 €, respectivamente, en el 5º y 8º año de la actividad económica del grupo, por la venta de sendos inmuebles, y c) realizar la comprobación del sistema integral dado en este enunciado con el resultado señalado en a).

*Solución:*

a) La solución del sistema infinitesimal planteado, a base de ecuaciones integrales de Volterra como puede comprobar el amable lector/a, una vez efectuados los cálculos pertinentes, es la siguiente:

$$y_1(t) = 2\sin t;\quad y_2(t) = 2\cos t - 1;\quad y_3(t) = t\ ;$$

con la correspondiente representación gráfica:



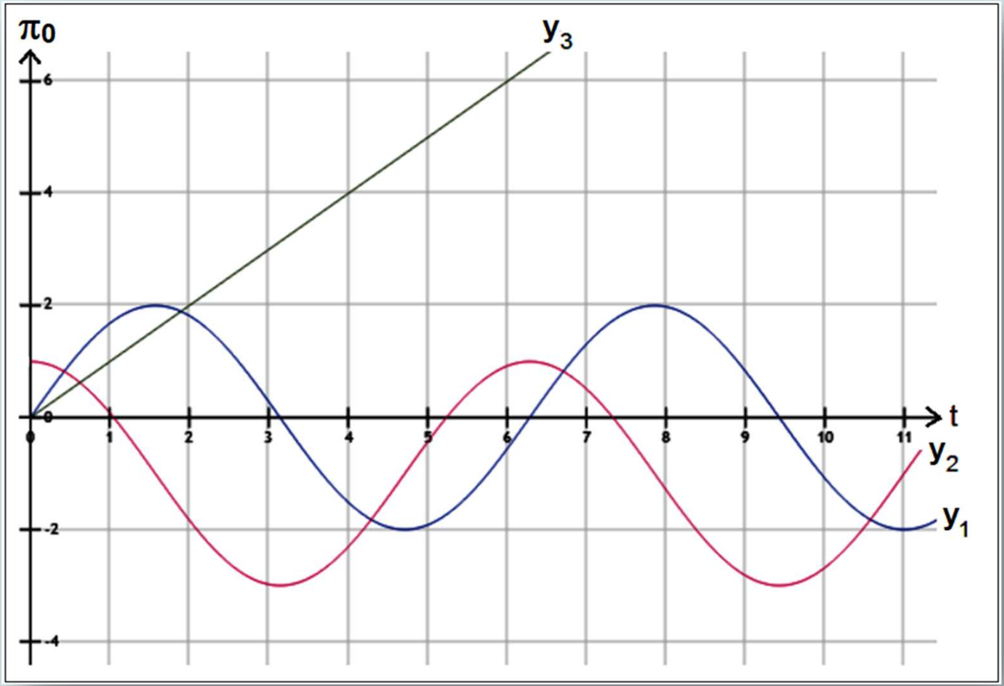

Los resultados contables del cuatrienio, anuales y acumulados para cada empresa y para el conjunto del *holding* empresarial analizado, pueden verse sintetizados en el cuadro siguiente, del que se concluye claramente la mayor rentabilidad de la empresa $y_3$, mientras que la $y_2$ experimenta notables pérdidas en el periodo pese a aportar, al comienzo de su actividad económica, unos beneficios ordinarios de 1.000.000 de euros. Esto es:

| | | t (años) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ (€) |
| **y** **($10^6$ €)** | $y_1$ | 0 | 1'682942 | 1'818595 | 0'28224 | -1'513605 | 2.270.172 |
| | $y_2$ | 1 | 0'080605 | -1'832294 | -2'979985 | -2'307287 | -6.038.961 |
| | $y_3$ | 0 | 1'000000 | 2'000000 | 3'000000 | 4'000000 | 10.000.000 |
| | Σ (€) | 1.000.000 | 2.763.547 | 1.986.301 | 302.255 | 179.108 | 6.231.211 |

De él se deduce, así mismo, que el conjunto del *holding* tendrá, en el cuatrienio analizado, un beneficio bruto global $\pi$ de 6.231.211 € y un beneficio neto global (descontando la fiscalidad) de:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 6.231.211 = 4.673.408'25 \text{ €}.$$

b) En el primer decenio de la actividad empresarial, se producirán los siguientes resultados, observándose un gráfico en el que aparecen comportamientos constantemente crecientes en la empresa $y_3$ y cíclicos no amortiguados en las otras dos restantes empresas $y_1$ e $y_2$, así:

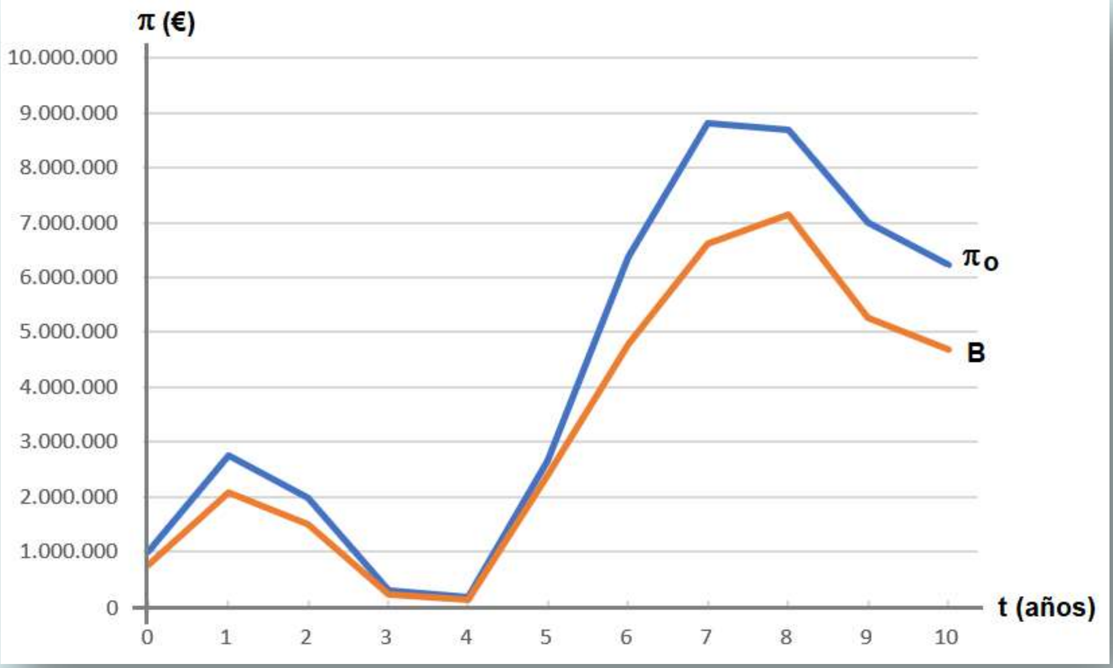



Evolución temporal continua de los beneficios ordinarios de las tres empresas.

Todo ello quedará especificado en la siguiente tabla que se refiere al conjunto del *holding*:

| t (años) | $\pi_o$ (ordin.) | $\pi_e$ (extr.) | B (€) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.000.000 | | 750.000 |
| 1 | 2.763.547 | | 2.072.660 |
| 2 | 1.986.301 | | 1.489.726 |
| 3 | 302.255 | | 226.691 |
| 4 | 179.108 | | 134.331 |
| 5 | 2.649.480 | 530.000 | 2.384.610 |
| 6 | 6.361.510 | | 4.771.132 |
| 7 | 8.821.780 | | 6.616.335 |
| 8 | 8.687.720 | 850.620 | 7.153.755 |
| 9 | 7.001.980 | | 5.251.485 |
| 10 | 6.233.810 | | 4.675.358 |
| **Σ (€)** | **45.987.491** | **1.380.620** | **35.526.083** |

A la que corresponde el siguiente gráfico:




Evolución temporal de los beneficios empresariales del holding.

Donde el beneficio neto vendrá dado por la expresión:

$$B=\frac{3(\pi_0+\pi_e)}{4}.$$

Si hubiéramos considerado el proceso de obtención de beneficios como continuo y no discreto (no computado al final del ejercicio económico), el beneficio ordinario del decenio, antes de impuestos, vendría dado por la expresión:

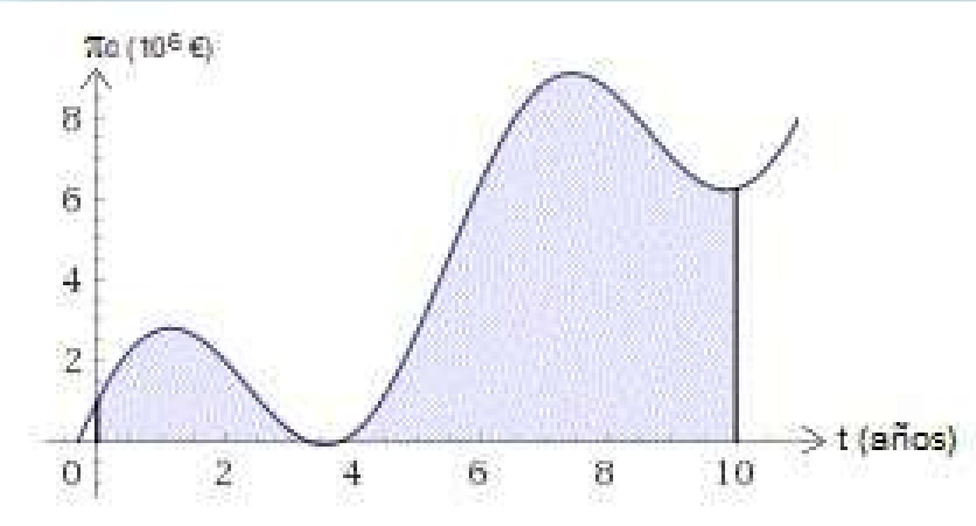
$$\pi_0 = \int_0^{10} [2(\sin t + \cos t) + t - 1] \cdot dt = \left[\frac{t^2}{2} - t + 2(\sin t - \cos t)\right]_0^{10} =$$

$$= 50 - 10 + 2 \sin 10 - 2 \cos 10 + 2 = 42 - 1'088 + 1'678 = 42'59,$$

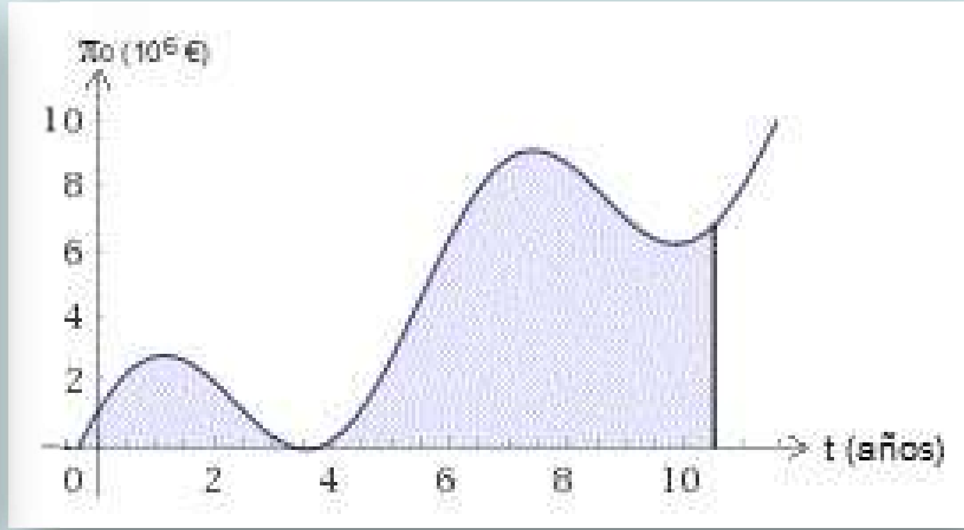
o sea, ≅ 42.590.000 €. Una mejor aproximación al resultado que ofrece la tabla anterior vendría dado al extender 1 año el intervalo de integración para así compensar el efecto distorsionante anterior, con lo que:

$$\pi_0 = \int_{-0'5}^{10'5} [2(\sin t + \cos t) + t - 1] \cdot dt \simeq 45'9057,$$

o sea 45.905.700 ≅ 45.987.491 €. Ello puede verse en los siguientes gráficos:




Intervalo $t \in [0, 10]$.




Intervalo $t \in [-0'5, 10'5]$.

De la condición necesaria o de primer grado para la determinación de los extremos relativos o locales, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}(2 \sin t + 2 \cos t + t - 1) = 2(\cos t - \sin t) + 1 = 0,$$

surgiendo, así, los diferentes puntos o instantes temporales críticos (máximos y mínimos).

En el intervalo temporal analizado, el mínimo resultado (beneficio o pérdida) tendrá lugar cuando:

$$t \cong -2{,}71756 + 6{,}28319 = 3{,}56563 \text{ años, y entonces: } \pi_0 = -80.128 \text{ € (pérdidas).}$$

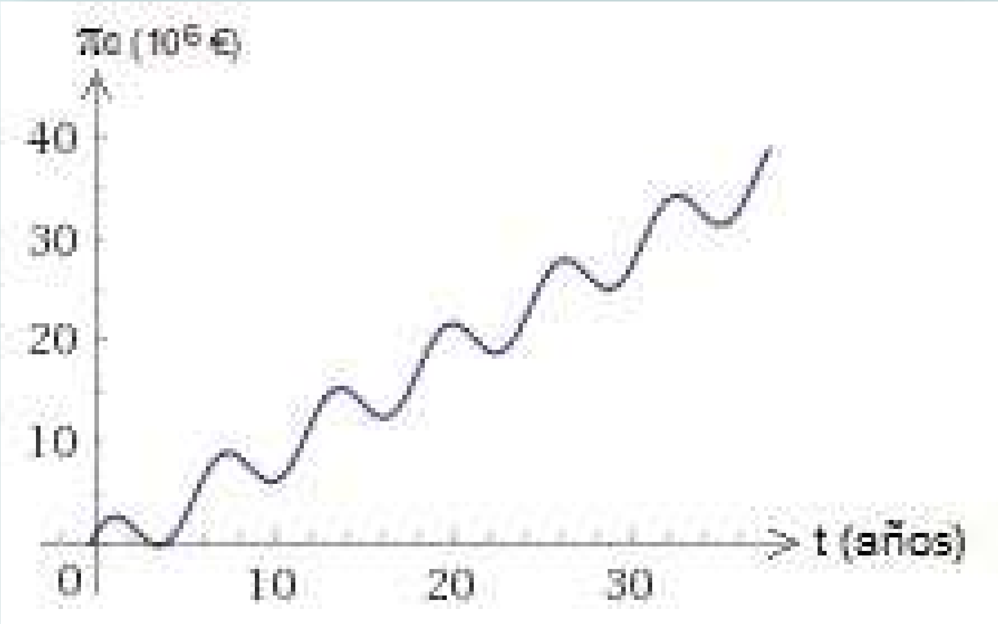
Del mismo modo, el máximo beneficio tendrá lugar cuando:

$$t \cong 1{,}14677 + 6{,}28319 = 7{,}42996 \text{ años, y entonces: } \pi_0 = 9.075.700 \text{ € (beneficios).}$$

Los diferentes puntos de inflexión quedarán determinados por la condición necesaria:

$\frac{d^2}{dt^2}(2 \sin t + 2 \cos t + t - 1) = -2 (\sin t + \cos t) = 0$ y sus raíces: $t = (\pi \cdot n - \pi/4)$, $\forall n \in \{Z+\} = \{\aleph\}$.

En cualquier caso, los beneficios ordinarios del *holding* empresarial en estudio siguen, en el tiempo, una función continua cíclica ascendente, como la siguiente:



c)

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(t) = t + \int_0^t y_2(u)\cdot du = 2\sin t \\ y_2(t) = 1 - \int_0^t y_1(u)\cdot du = 2\cos t - 1 \\ y_3(t) = \sin t + \dfrac{1}{2}\int_0^t (t-u)\cdot y_1(u)\cdot du = t \end{array}\right\}$$

Comprobaremos cada ecuación del sistema dado por separado.

*Primera ecuación*:

$y_2(u) = 2 \cos u – 1$, con lo que:

$$y_1(t) = t + \int_0^t (2\cos u - 1)\cdot du = t + [2\sin u - u]_0^t =$$

$$= t + 2\sin t - t = 2\sin t\text{, c.s.q.d.}$$

*Segunda ecuación*:

$y_1(u) = 2 \sin u$, con lo que:

$$y_2(t) = 1 - \int_0^t 2\sin u\cdot du = 1 - [-2\cos u]_0^t = 1 - (2 - 2\cos t) = 2\cos t - 1\text{, c.s.q.d.}$$

*Tercera ecuación*:

$y_1(u) = 2 \sin u$, con lo que:

$$y_3(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-u)\cdot 2\sin u\cdot du = \sin t + [u\cdot\cos u - t\cdot\cos u - \sin u]_0^t =$$

$$= \sin t + t - \sin t = t\text{, c.s.q.d.}$$

# APÉNDICES

I. SUPERFICIES CUÁDRICAS

II. EXTREMOS DE FUNCIONES MULTIVARIANTES

III. TRANSFORMADA DE LAPLACE

IV. TEORÍA MATRICIAL ELEMENTAL

V. TEORÍA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

UNED TORTOSA

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Apéndice I

## SUPERFICIES CUÁDRICAS

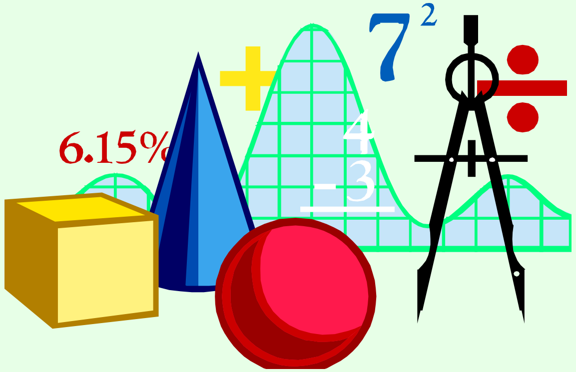
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS SUPERFICIES CUADRÁTICAS O CUÁDRICAS

Las secciones cónicas, elipse, parábola e hipérbola, que se estudian en el plano bidimensional $R^2$ tienen su generalización respectiva al espacio afín tridimensional euclídeo $R^3$ en elipsoide, paraboloide e hiperboloide, que son superficies de segundo orden. Obviamente, la generalización de la circunferencia (caso concreto de la elipse de semiejes iguales) es la esfera.

El ajuste minimocuadrático por regresión no lineal múltiple (triple, en nuestro caso), para efectuar la nivelación o explanación taquimétrica de ciertos terrenos, o el estudio de ciertas funciones microeconómicas o macroeconómicas, conducen al tratamiento o manejo de este tipo de formas geométricas amén de otras varias (superficies alabeadas, toroidales, esféricas, etc.). De ahí el interés de su consideración aquí, aunque sea elemental.

Se denomina *cuádrica* o *superficie cuadrática* al lugar geométrico de los puntos del espacio, reales o imaginarios, cuyas coordenadas homogéneas satisfacen la siguiente ecuación de segundo grado con tres variables (x, y, z):

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + D x + E y + F z + G = 0$$

Debe observarse que en la anterior ecuación de segundo grado deliberadamente no hemos incluido los términos mixtos o cuadráticos (rectangulares) **xy**, **xz** e **yz**, pues la presencia de éstos genera superficies con rotación. De hacerse ello, nos encontramos con que la ecuación general de una cuádrica también puede expresarse así, de modo completo:

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2B_1xy+2B_2xz+2B_3yz+A_2y^2+2C_1x+2C_2y+2C_3z+D=0$$

En términos matriciales, dicha expresión puede venir dada por la siguiente ecuación:

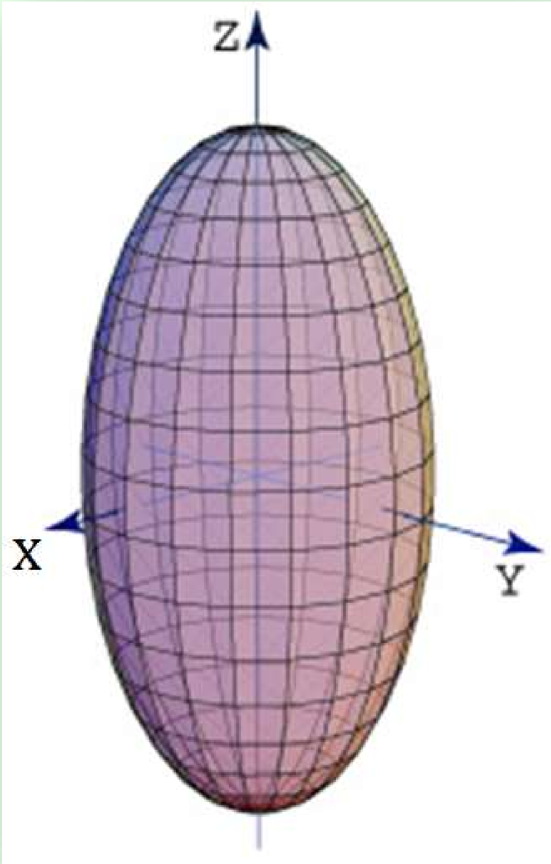
$$(x,y,z)\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 & B_3 \\ B_2 & B_3 & A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(C_1,C_2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + D = 0$$

Entre los diferentes tipos que podemos encontrar de cuádricas destacamos los paraboloides, elipsoides e hiperboloides, que veremos a continuación con mayor detenimiento. Éstas son cuádricas no degeneradas, a saber:

• **Elipsoide**

La gráfica de la ecuación: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

corresponde a un elipsoide. Es simétrico con respecto a cada uno de los tres planos coordenados y tiene intersección con los ejes coordenados en (±a,0,0), (0,±b,0) y (0,0,±c). Se ve, pues, que el elipsoide es una superficie finita contenida en el paralelepípedo determinado por los planos: x = ±a; y = ±b; z = ±c. La traza del elipsoide sobre cada uno de los planos coordenados es un único punto o una elipse. La siguiente figura espacial muestra su gráfica.




Elipsoide.

Como la ecuación anterior (1) no se altera por el cambio de x, y, z, en -x, -y, -z, al estar dichas variables elevadas al cuadrado, bien para una sola de las variables, o bien para dos o para las tres, se deduce que los planos coordenados, los ejes y el origen son respectivamente planos, ejes y centros de simetría de la superficie, y reciben los nombres de *planos principales, ejes* y *centro* de la misma. Los valores *a*, *b* y *c* se llaman *semiejes*, y *vértices* los puntos de intersección de los ejes con el elipsoide. Si dos semiejes son iguales, la superficie es un elipsoide de revolución con respecto al tercer eje.

Cuando a > b > c, el elipsoide en cuestión se denomina *escaleno*; cuando es a = b > c, el elipsoide es de revolución y se llama *alargado*, por engendrarse por la elipse $\varphi$ girando alrededor del eje mayor; cuando es a > b = c, es de revolución *achatado* y se engendra por la elipse $\psi$ girando en torno de su eje menor. Finalmente, cuando es a = b = c, la superficie obtenida es una esfera, puesto que la ecuación (1) se reduce a la: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , siendo *a* el radio de la misma. En este caso, el valor de la superficie esférica es de: $S = 4\cdot\pi\cdot a^2$, mientras que el volumen será:

$V = \frac{4}{3}\pi a^3$ , que en el caso del elipsoide se convierte en: $V = \frac{4}{3}\pi\cdot a\cdot b\cdot c$ .

Así mismo, una ecuación aproximada de la superficie del elipsoide, dada por el danés Knud Thomsen, es la siguiente:

$$S \cong 4\pi \cdot [(a^p b^p + a^p c^p + b^p c^p)/3]^{1/p} ,$$

donde p ≈ 1.6075. Con esta expresión se obtiene un error máximo de ±1.061%, en función de los valores de a, b y c. El valor *p* = 8/5 = 1.6 es óptimo para elipsoides cuasi esféricos, con un error relativo máximo de 1.178%.

Por lo que se refiere a las secciones planas, veamos que considerando un plano paralelo al XOY, de ecuación z = h, su intersección con el elipsoide, referida en su plano a las trazas de éste con los planos XOZ e YOZ, es la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \qquad (2)$$

que representa una elipse real, cuando $h^2 < c^2$, o sea, $-c < h < c$; y como los semiejes de esta elipse son:

$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ y $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ , a medida que $|h|$ crece la elipse va disminuyendo.

Cuando es $|h| = c$, la ecuación (2) se reduce a la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \text{ , o sea, } y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{-1},$$

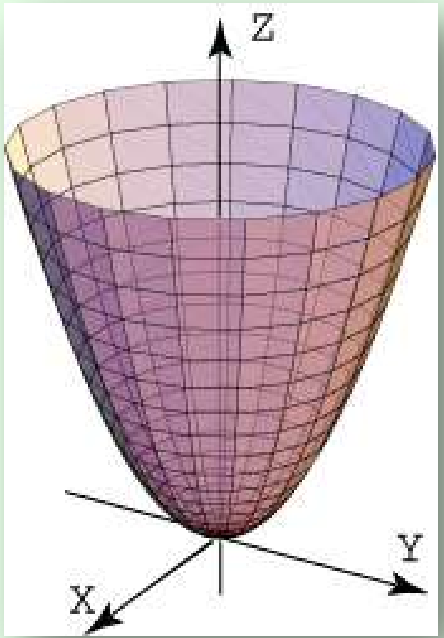
que representa dos rectas imaginarias con el punto real $(0,0,\pm c)$; y cuando $|h| > c$, la ecuación (2) representa una curva totalmente imaginaria.

- **Paraboloide elíptico**

La gráfica de la ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ ,

es un paraboloide elíptico. Sus trazas sobre planos horizontales: $z = k$, son elipses: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k}{c}$

Sus trazas sobre planos verticales, ya sean $x = k$ o bien $y = k$, son parábolas. Se deduce inmediatamente que los únicos planos de simetría son el XOZ y el YOZ; por tanto, sólo hay un eje de simetría, que es el OZ. Asimismo, se ve que las secciones determinadas por planos horizontales de ecuación $z = k$ son elipses.

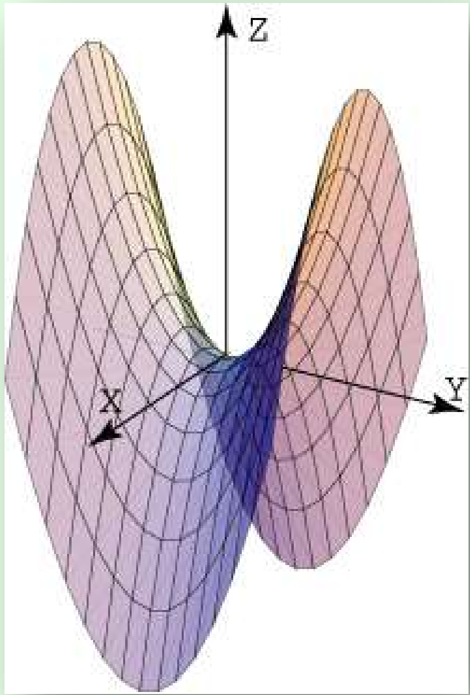



Paraboloide elíptico.

- **Paraboloide hiperbólico**

La gráfica de la ecuación: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$

es un paraboloide hiperbólico o superficie reglada. Sus trazas sobre planos horizontales z = k son hipérbolas o bien dos rectas (z = 0). Sus trazas sobre planos verticales paralelos al plano OXZ son parábolas que abren hacia abajo, mientras que las trazas sobre planos verticales paralelos al plano OYZ son parábolas que abren hacia arriba. Su gráfica tiene la forma de una silla de montar, como se observa en la figura siguiente.

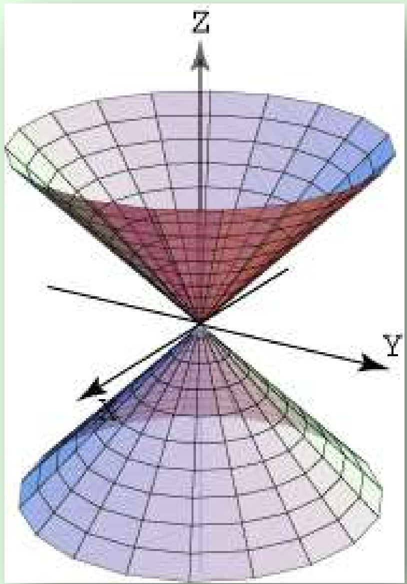



Paraboloide hiperbólico.

- **Cono elíptico**

La gráfica de la ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

es un cono elíptico. Sus trazas sobre planos horizontales de ecuación z = k son elipses. Sus trazas sobre planos verticales corresponden a hipérbolas o un par de rectas. Su gráfica en forma de diábolo se muestra en la siguiente figura.




Cono elíptico.

• **Hiperboloide de una hoja**

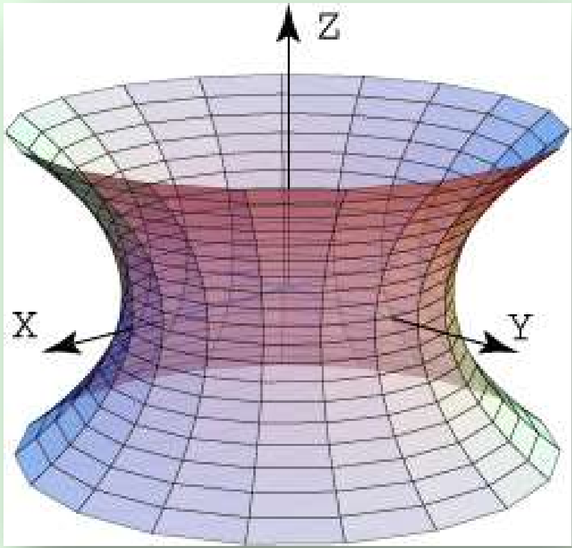
La gráfica de la ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

es un hiperboloide de una hoja. Sus trazas o secciones sobre planos horizontales z = k son siempre elipses reales.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

Por consiguiente, la elipse $\psi$ situada en el plano XOY es la menor de todas las generatrices y la superficie aparece engendrada por esta elipse, que va aumentando a medida que el plano se aleja del XOY.

En cambio, sus trazas sobre planos verticales son hipérbolas o bien un par de rectas que se intersectan. Su gráfica se muestra en la figura de la derecha.

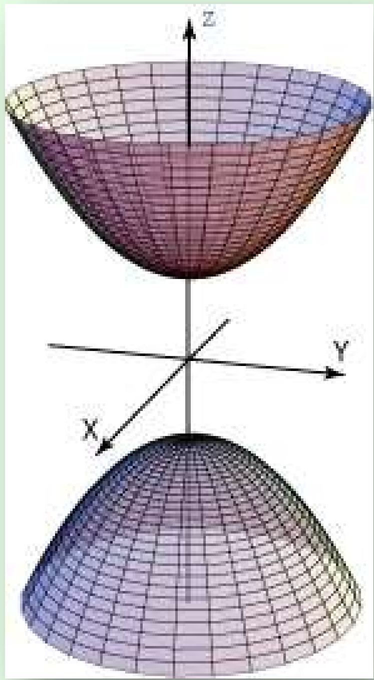



Hiperboloide de una hoja.

• **Hiperboloide de dos hojas**

La gráfica de la ecuación: $\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1$

es un hiperboloide de dos hojas. Su gráfica consta de dos hojas separadas. Sus trazas o secciones sobre planos horizontales de ecuación z = k son elipses y sobre planos verticales son hipérbolas, como puede verse en la siguiente figura.




Hiperboloide de dos hojas.

## 2. EJEMPLO 1

Identifíquense cada una de las siguiente superficies cuadráticas:

a) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$ ; b) $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

*Solución:*

a) Dividiendo por - 4 la primera ecuación obtenemos: $-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$

lo cual corresponde a un hiperboloide de dos hojas, con el eje OY como eje de simetría.

b) A continuación, completando el cuadrado en x, para la segunda superficie obtenemos:

$$y - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$$

que corresponde, como puede comprobarse, a un paraboloide elíptico con su eje paralelo al eje OY.

## 3. ECUACIÓN CON TÉRMINOS RECTANGULARES

Si ahora introducimos la ecuación completa que incluye los términos rectangulares, veamos que la cuádrica o superficie de segundo orden será el conjunto de puntos del espacio cuyas coordenadas homogéneas verifican la ecuación:

$$F(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}xt + \\ + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0 \,. \quad (3)$$

En función de las semiderivadas parciales respecto de las variables también se puede expresar así, de acuerdo con el conocido teorema de Euler:

$$F(x, y, z, t) = x \cdot f_x + y \cdot f_y + z \cdot f_z + t \cdot f_t = 0 \,.$$

En coordenadas cartesianas rectangulares, con t = 0, la ecuación de una cuádrica es:

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x +$$
$$+ 2a_{24}y + 2a_{34}z + 2a_{34}z + a_{44} = x \cdot f_x + y \cdot f_y + z \cdot f_z = 0 \qquad (4)$$

Matricialmente, la ecuación general de las cuádricas se puede expresar así:

$$(x \cdot y \cdot z \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

Abreviadamente, podemos expresar el producto matricial o vectorial anterior así: $\mathbf{X^t \cdot A \cdot X = 0}$ **.**

La matriz **A** es la matriz cuadrada simétrica de los coeficientes de las incógnitas. Su determinante se denomina "discriminante" de la cuádrica.

## 4. CENTRO DE LAS CUÁDRICAS

Por otra parte, el *centro* de las cuádricas es el punto o lugar geométrico del espacio $R^3$ cuyas coordenadas son las soluciones del sistema de ecuaciones formado por la igualación a cero de las formas asociadas o derivadas parciales:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.}$$

Por tanto, derivando en la ecuación general (4), nos queda un sistema heterogéneo, de tres ecuaciones y tres incógnitas, compatible y determinado, así:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por aplicación de la regla de Cramer tenemos que las coordenadas del centro y las soluciones de este sistema son las siguientes:

$$x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}} \quad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}} \quad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}} \;.$$

Siendo $A_{ij}$ el determinante adjunto o cofactor del elemento $a_{ij}$ en el determinante de la matriz de coeficientes A. Como podemos ver tiene que ser necesariamente $A_{44} \neq 0$ para evitar indeterminaciones.

Cuando el origen de coordenadas es también el centro de la cuádrica, debe cumplirse que: F (x, y, z) = F (-x, -y, -z). Para ello, la ecuación de la cuádrica sólo debe poseer términos de grado par.

La ecuación de la cuádrica, una vez trasladados los ejes al centro, es la siguiente:

$$\varphi\,(x, y, z) + F\,(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

habiendo representado mediante $\varphi$ (x, y, z) al conjunto de los términos de segundo grado de la ecuación de la cuádrica.

Por tanto, las cuádricas con centro propio (se pueden ver en el cuadro del epígrafe siguiente) son los elipsoides, hiperboloides y conos.

Los paraboloides, en cambio, poseen centro impropio, que es el punto del infinito.

## 5. CLASIFICACIÓN DE LAS CUÁDRICAS

A la característica o rango de la matriz A la llamaremos **k** y a la de $A_{44}$ la llamaremos **h**.

Con ello, según los valores de **k** y **h** podremos clasificar convenientemente las superficies cuádricas, tal como se puede ver en el siguiente cuadro.

**- CLASIFICACIÓN DE LAS CUÁDRICAS -**

| **k(A)** | **k' (centro)** | **h($A_{44}$)** | **CUÁDRICA** |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 (centro propio) | 3 | Elipsoide o hiperboloide |
| 4 | 3 (centro impropio) | 2 | Paraboloide |
| 3 | 3 (centro propio) | 3 | Conos |
| 3 | 2 (recta propia) | 2 | Cilindro elíptico o hiperbólico |
| 3 | 2 (recta impropia) | 1 | Cilindro parabólico |
| 2 | 2 (recta) | 2 | Dos planos secantes |
| 2 | 1 (plano) | 1 | Planos paralelos |
| 1 | 1 (plano) | 1 | Plano doble |

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $\frac{\|A\|}{A_{44}}$ | CUÁDRICA |
|---|---|---|---|---|---|
| **ELIPSOIDE E HIPERBOLOIDE** | + | + | + | + | Elipsoide hiperbólico |
| | + | + | + | - | Elipsoide real |
| | + | + | - | - | Hiperboloide de una hoja |
| | + | - | - | - | Hiperboloide de dos hojas |
| **CONOS** | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $\frac{\|A\|}{A_{44}}$ | CUÁDRICA |
| | + | + | + | 0 | Cono hiperbólico |
| | + | + | - | 0 | Cono real |
| | + | - | - | 0 | Cono real |

| PARABOLOIDES | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $\frac{\|A\|}{A_{44}}$ | CUÁDRICA |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | + | 0 | | Paraboloide elíptico |
| | - | - | 0 | | Paraboloide hiperbólico |
| **CILINDROS ELÍPTICOS E HIPERBÓLICOS** | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $\frac{\|A\|}{A_{44}}$ | CUÁDRICA |
| | + | + | | - | Cilindro elíptico real |
| | + | + | | + | Cilindro elíptico hiperbólico |
| | + | - | | | Cilindro hiperbólico |

Como la ecuación general de las cuádricas no resulta adecuada para el estudio, conviene frecuentemente reducirla a otra con menor número de términos que llamaremos *ecuación reducida de la cuádrica*. Para obtener la ecuación reducida de las cuádricas haremos una traslación y una rotación o giro (transformaciones geométricas) de los ejes de coordenadas cartesianas, y utilizaremos los denominados “invariantes de las cuádricas”.

## 6. ECUACIONES REDUCIDAS DEL ELIPSOIDE, HIPERBOLOIDE Y CONOS

Posee la siguiente configuración analítica: $S_1x^2 + S_2y^2 + S_3z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$ .

Los tres valores de S son las soluciones de la ecuación secular:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - S & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - S \end{vmatrix} = 0 \text{ ,}$$

que también se denomina “ecuación característica” y los tres valores de S obtenidos ($S_1$, $S_2$ y $S_3$) se denominan “autovalores o valores característicos”. Siendo:

$$\begin{cases} I_3 = A_{44} = -R, \text{ es el invariante cúbico} \\ I_4 = |A|, \text{ es el invariante bicuadrático} \end{cases}$$

El determinante de la matriz anterior, una vez desarrollado, ofrece la ecuación de tercer grado:

$$S^3 + P \cdot S^2 + Q \cdot S + R = 0, \text{ siendo:}$$

$$\begin{cases} I_1 = -P = a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ I_2 = Q = a_{11} \cdot a_{22} + a_{11} \cdot a_{33} + a_{22} \cdot a_{33} - a^2_{12} - a^2_{13} - a^2_{23} \end{cases}$$

## 7. ECUACIÓN REDUCIDA DE LOS PARABOLOIDES

Posee la siguiente configuración analítica:

$$S_2 y^2 + S_3 z^2 \pm 2x\sqrt{\frac{-I_4}{I_2}} = 0 \ , \qquad I_4 = |A| \quad \text{o invariante bicuadrático, e}$$

$I_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$ , que es el invariante cuadrático, siendo $\alpha_{11}$, $\alpha_{22}$, $\alpha_{33}$ los determinantes adjuntos o cofactores de los elementos $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$ calculados en $A_{44}$.

## 8. ECUACIÓN REDUCIDA DE LOS CILINDROS ELÍPTICOS O HIPERBÓLICOS

Posee dicha ecuación la siguiente configuración analítica:

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + \frac{I'_3}{I_2} = 0 \ ,$$

siendo: $I'_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ , que es el invariante especial de los cilindros, e $I_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$ , que es el invariante cuadrático.

## 9. ECUACIÓN REDUCIDA DE LOS CILINDROS PARABÓLICOS

Posee dicha ecuación la siguiente configuración analítica:

$$S_2 y^2 \pm 2x\sqrt{\frac{-I'_3}{I_1}} = 0 \, ,$$

teniendo en cuenta que:

$$\begin{cases} I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \text{, que es el invariante lineal} \\ I'_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33} \text{, que es el invariante especial de los cilindros} \end{cases}$$

## 10. RESUMEN DE LOS INVARIANTES DE LAS CUÁDRICAS

Dada la ecuación general de una cuádrica, existen ciertas expresiones formadas con sus coeficientes que toman el mismo valor cuando se efectúa una transformación de coordenadas cartesianas rectangulares cualesquiera (no varían en un giro de los ejes donde el origen de coordenadas queda fijo o bien en una traslación de los ejes), por cuya razón reciben el nombre de *invariantes*.

Como hemos visto en los epígrafes anteriores, dichos invariantes son los siguientes:

Invariante lineal o métrico: $I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$
Invariante cuadrático o afín: $I_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$
Invariante cúbico o proyectivo: $I_3 = A_{44}$
Invariante bicuadrático: $I_4 = |A|$
Invariante especial de los cilindros: $I'_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33}$

## 11. EJEMPLO 2

Dada la cuádrica de ecuación:

$$4y^2 + 4z^2 + 4yz - 2x - 14y - 22z + 33 = 0$$

a) Clasificarla.
b) Hallar la ecuación reducida.
c) Determinar el plano que corta a la cuádrica según una cónica de centro en el punto de coordenadas (8, -1, 4).

*Solución:*

a) Formaremos la matriz A para hallar su rango o característica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -11 \\ -1 & -7 & -11 & 33 \end{pmatrix} ; \quad |A| = -12 \neq 0 ; \qquad k(A) = 4 .$$

Al ser $|A| < 0$, se tratará de un paraboloide elíptico, como también tendremos ocasión de corroborar.

La característica o rango de la matriz **h** de $A_{44}$ será: $A_{44} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \qquad h(A_{44}) = 2 .$

Tiene centro impropio, pues $A_{44}$ = 0. Luego por los valores de k y h sabemos que es un paraboloide.

Ahora formaremos la ecuación en S, o ecuación característica o secular, para ver los signos de los autovalores:

$$\begin{vmatrix} -S & 0 & 0 \\ 0 & 4-S & 2 \\ 0 & 2 & 4-S \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

-S·(4 – S)·(4 – S) + 4S = 0; Luego $S_3 = 0$

$S^2 - 8S + 12 = 0$ ; $S_1 = 2$ ; $S_2 = 6$

Luego como los dos autovalores son positivos se trata de un **paraboloide elíptico**.

b) La ecuación reducida de los paraboloides es, como ya se ha visto:

$$S_2 y^2 + S_3 z^2 \pm 2x\sqrt{\frac{-I_4}{I_2}} = 0$$ . En nuestro caso es:

$I_4 = |A| = -12$ , $I_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 12 + 0 + 0 = 12$ .

Luego la ecuación reducida de la superficie cuádrica que nos ocupa será la siguiente:

$$\mathbf{2y^2 + 6z^2 \pm 2x = 0} \ .$$

c) La ecuación de los planos que pasan por el punto (8, -1, 4) es: A(x-8) + B(y+1) + (z-4) = 0, puesto que se puede dividir por un parámetro. Luego la cónica de centro (8, -1, 4) vendrá dada por la intersección:

$$\begin{cases} Ax + By + z - 8A + B - 4 = 0 \\ 4y^2 + 4z^2 + 4yz - 2x - 14y - 22z + 33 = 0 \end{cases}$$

Despejando ahora la variable **x** en la segunda ecuación y substituyéndola en la primera, nos dará la cónica intersección resultado de su proyección ortogonal sobre el plano YOZ:

$$2Ay^2 + 2Az^2 + 2Ayz + (B-7A)y + (1-11A)z + (17/2)A + B - 4 = 0 .$$

El centro de esta cónica, que es el punto o lugar geométrico del espacio de coordenadas cartesianas rectangulares (8, -1, 4), vendrá dado por la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f'_y = 4Ay + 2Az + B - 7A = 0 \\ f'_z = 4Az + 2Ay + 1 - 11A = 0 \end{cases} \quad \text{en donde:} \quad \begin{matrix} y = -1 \\ z = 4 \end{matrix}$$

luego $\begin{cases} -3A + B = 0 \\ 3A + 1 = 0 \end{cases}$ de donde: $A = -1/3$ ; $B = -1$

El plano buscado será, por tanto, aquel de ecuación ordinaria o no paramétrica:

$$\boxed{x + 3y - 3z + 7 = 0}$$

Substituyendo ahora los valores obtenidos de A y B, se tendrá una cónica de ecuación:

$-\frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{3}z^2 - \frac{2}{3}yz + \frac{4}{3}y + \frac{14}{3}z - \frac{47}{6} = 0$ , esto es: $-4y^2 - 4z^2 - 4yz + 8y + 28z - 47 = 0$ .

De haber despejado alternativamente la variable **z** en el sistema de ecuaciones anterior (lo que supone, sin duda, un proceso más largo) hubiéramos obtenido la proyección ortogonal sobre el plano XOY, lo cual nos permitiría clasificar dicha cónica y hallar su correspondiente ecuación reducida previo el cálculo de sus invariantes.

En cualquier caso, dicha determinación se propone como ejercicio complementario a nuestros/as amables lectores/as.

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Apéndice II

## EXTREMOS DE FUNCIONES MULTIVARIANTES

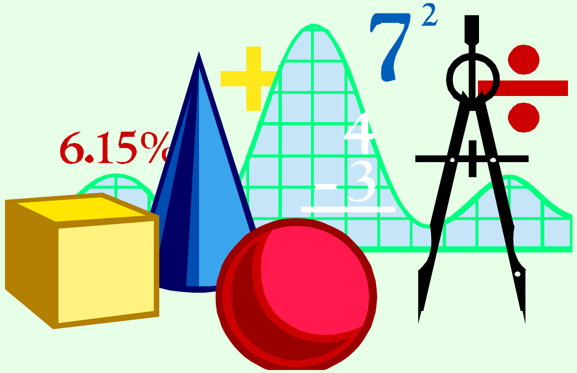
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. MÁXIMOS Y MÍNIMOS CONDICIONADOS POR RELACIONES DE IGUALDAD

En este caso, se trata de hallar los extremos relativos de la función económica dada por la ecuación:

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{, con la condición: } x^2 + y^2 = 18.$$

Formada la función de Lagrange o lagrangiana: $L(x, y, \lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(x^2 + y^2 - 18)$ ,

se obtienen las derivadas parciales (condición necesaria o de primer grado):

$$L'_x(x, y, \lambda) = -\frac{1}{x^2} + 2\lambda x = 0 \; ; \; L'_y(x, y, \lambda) = -\frac{1}{y^2} + 2\lambda y = 0$$

de donde se deduce que: $2\lambda = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{y^3}$ , o sea y = x; como $x^2 + y^2 = 18, \Rightarrow x = y = \pm 3$.

Para el punto crítico (3,3), $2\lambda = \frac{1}{27}, \; \lambda = \frac{1}{54}$ ,

y para el punto crítico (-3,-3), $2\lambda = -\frac{1}{27}, \; \lambda = -\frac{1}{54}$ .

Formando, a continuación, el determinante funcional hessiano orlado relevante (que nos determina la condición suficiente o de segundo grado), se tiene:

$$H(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{x^3} + 2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{y^3} + 2\lambda \end{vmatrix}$$

Para el punto (3,3), resultará:

$$H(3,3,\frac{1}{54}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{27}+\frac{1}{27} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{27}+\frac{1}{27} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & \frac{1}{9} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{9} \end{vmatrix} = -\frac{8}{9} < 0$$

Luego en (3,3) existe un mínimo relativo que vale 2/3.

Análogamente, en (-3,-3) existe un máximo relativo que vale –2/3.

## 2. MÁXIMOS Y MÍNIMOS NO CONDICIONADOS

### 2.1. DEFINICIÓN

Una función de dos variables, como las que aquí nos ocupan, z = f(x,y) se dice que tiene un *máximo* (*mínimo*) en un punto $P(x_0, y_0)$ si el valor de la función en este punto es mayor (menor) que su valor en cualquier otro punto X(x,y) de algún entorno del punto P.

### 2.2. CONDICIONES NECESARIAS DE EXTREMO

Si una función diferenciable z = f(x,y) alcanza un extremo en el punto $P(x_0, y_0)$ entonces sus derivadas parciales de primer orden en este punto son iguales a cero, o sea:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)=0$$

Los puntos en los que las derivadas parciales son iguales a cero se llaman puntos “críticos” o “estacionarios”. Ahora bien, no todo punto crítico es un punto extremo (Franquet, 2014).

## 2.3. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS EN EL CASO DE DOS VARIABLES

Sea $P(x_0, y_0)$ un punto crítico de una función $z = f(x,y)$ con las derivadas parciales de segundo orden continuas en P, y sea $H(x_0, y_0)$ el determinante de su matriz hessiana; entonces tiene lugar la siguiente clasificación:

$$H(x_0,y_0)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \rightarrow$$

| $H(x_0,y_0)$ | $f_{xx}(x_0,y_0)$ | tipo |
|---|---|---|
| *positivo* | *positivo* | *Mínimo* |
| *positivo* | *negativo* | *Máximo* |
| *negativo* | ? | *Punto silla* |
| *cero* | ? | *Duda* |

Es decir, si el determinante funcional hessiano es positivo hay extremo (el tipo nos lo da $f_{xx}(x_0, y_0)$, si es negativa máximo y si es positiva mínimo). Por el contrario, si el hessiano es negativo no hay extremo. Y, por último, si el hessiano es cero hay duda (con lo que habrá de resolverse por otro método).

Como ejemplo, se trata simplemente de hallar los extremos relativos de la función económica dada por la ecuación:

$$z = x^3y^2(6 - x - y), \quad \forall x > 0, \quad \forall y > 0$$

Las primeras derivadas parciales (condición necesaria o de primer grado) son las siguientes:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2y^2(6 - x - y) - x^3y^2 = x^2y^2(18 - 3x - 3y - x) = \\ \qquad = x^2y^2(18 - 4x - 3y) = 0 \\ z'_y = 2x^3y(6 - x - y) - x^3y^2 = x^3y(12 - 2x - 2y - y) = \\ \qquad = x^3y(12 - 2x - 3y) = 0 \end{cases}$$

Los únicos valores que verifiquen x > 0, y > 0, se obtendrán de:

$$18 - 4x - 3y = 0 \;\; \text{y} \;\; 12 - 2x - 3y = 0$$

o sea, serán las soluciones del sencillo sistema de ecuaciones lineales, compatible y determinado:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

de donde x = 3, y = 2.

A continuación, se obtienen las derivadas segundas (condición suficiente o de segundo grado), para formar el determinante funcional hessiano, esto es:

$$\begin{cases} z''_{x^2} = 2xy^2(18 - 4x - 3y) - 4x^2y^2 = 2xy^2(18 - 4x - 3y - 2x) = \\ \qquad = 2xy^2(18 - 6x - 3y) \\ z''_{xy} = 2x^2y(18 - 4x - 3y) - 3x^2y^2 = x^2y(36 - 8x - 6y - 3y) = \\ \qquad = x^2y(12 - 2x - 6y) \\ z''_{y^2} = x^3(123 - 2x - 3y) - 3x^3y = x^3(12 - 2x - 3y - 3y) = \\ \qquad = x^3(12 - 2x - 6y) \end{cases}$$

que substituyendo los valores: x = 3, y = 2, toman los valores respectivos de -144, -108 y -162.

Por lo tanto, se tendrá:

$$H(3,2) = \begin{vmatrix} -144 & -108 \\ -108 & -162 \end{vmatrix} = 11.664 > 0, \;\; \text{y como } -144 < 0 \,,$$

podremos afirmar que en el punto (3,2) existe un máximo relativo de valor: $z = 27 \times 4 \times 1 = 108$.

## 3. MÉTODOS EN LA BÚSQUEDA DE EXTREMOS CONDICIONADOS

### 3.1. INTRODUCCIÓN

Un problema que se presenta con frecuencia en el Análisis Matemático estriba en determinar los extremos relativos o locales (máximos y/o mínimos) de una función real cuyas variables reales no son independientes sino que se encuentran ligadas por una o más ecuaciones condicionantes. Decimos, entonces, que se trata de un problema de "extremos ligados o condicionados".

Suelen presentarse en algunos problemas de la Física, la Economía o la Ingeniería. Entonces, el método tradicional de los multiplicadores u operadores de Lagrange, o el de los determinantes jacobianos, son sólo necesarios en presencia de puntos de silla (o de "ensilladura") o bien cuando la forma implícita de la restricción impide despejar la o las variables que interese substituir en la función objetivo a optimizar. Puede suceder, también, que los expresados métodos no ofrezcan soluciones definitivas y haya que recurrir, justamente, a la técnica referida para solventar eficazmente el problema planteado, como tendremos ocasión de comprobar.

En efecto, supongamos que la ecuación condicionante permita despejar una de las variables en función de las otras, por ejemplo, en la forma: $z = \Phi(x,y)$, y substituyéndola en la función objetivo a optimizar se obtiene:

$$u = f[x,y,\Phi(x,y)] = F(x,y),$$

y el problema consistirá en buscar los valores extremos de $F(x,y)$ cuyas variables ya son independientes, para lo cual se pueden aplicar los criterios clásicos establecidos. Pues bien, por tratarse de una cuestión que, generalmente, no se halla contemplada expresamente en los tratados de análisis matemático al uso, hemos creído conveniente su desarrollo con la apoyatura de algunos ejemplos generales y casos prácticos de teoría microeconómica o hidráulica que juzgamos suficientemente representativos al respecto (Franquet, 2014).

### 3.2.1. Método de los operadores de Lagrange

Sea la función z = f(x,y) sujeta a la condición g(x,y) = 0. Para obtener los máximos o mínimos condicionados, se forma la función de Lagrange:

$$\phi(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y).$$

- *Condición necesaria o de primer grado*:

Los extremos buscados resultan del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} = f'_x(x,y) + \lambda \cdot g'_x(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y) + \lambda \cdot g'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

- *Condición suficiente o de segundo grado*:

Formando ahora la diferencial segunda:

$$d^2\phi(x,y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy^2 \text{ , con la condición: } \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0 \text{ .}$$

Entonces, la función tiene un máximo si $d^2\phi < 0$ y un mínimo si $d^2\phi > 0$ (García y Rodríguez, 1986). Si $d^2\phi = 0$ es un caso dudoso y hay que seguir investigando.

Esta condición de segundo grado u orden puede discriminarse, frecuentemente, mediante la formación del denominado “hessiano orlado relevante”, que ofrece los siguientes valores:

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} \Phi''_{x^2} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{x\lambda} \\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{y^2} & \Phi''_{y\lambda} \\ \Phi''_{x\lambda} & \Phi''_{y\lambda} & \Phi''_{\lambda^2} \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{MÁXIMO (2 variables)} \\ < 0 \rightarrow \text{MÍNIMO} \end{cases}$$

donde siempre $\Phi''_{\lambda^2} = 0$. Este proceso se generaliza *n* variables, así:

MÍNIMO $\rightarrow$ siempre H < 0.

MÁXIMO $\rightarrow$ 3 variables $\rightarrow$ H < 0 $\rightarrow$ u = f (x, y, z)
4 variables $\rightarrow$ H > 0 $\rightarrow$ u = f (x, y, z, t)
5 variables $\rightarrow$ H < 0 $\rightarrow$ u = f (x, y, z, t, s)
… (y así alternativa y sucesivamente). Con H = 0 es un caso dudoso y hay que seguir investigando.

En la mayoría de los problemas prácticos no resulta necesario efectuar esta distinción, pues a simple vista se conoce la naturaleza del punto extremo o crítico en cuestión.

### 3.2.2. Método de los determinantes jacobianos

Sea, en el caso de 2 variables, la función objetivo: z = f(x,y) y la ecuación de condición: g(x,y) = 0. El sistema:

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad [I]$$

representará, en general, una curva en el espacio afín tridimensional euclídeo y los valores que toma *z* serán los de la función *f* a lo largo de la curva *g*. Por lo tanto, razonando como se hace normalmente para la obtención de los extremos ordinarios, la condición necesaria para la existencia de extremo condicionado en un punto será la anulación, en dicho punto, de $z'_g$.

Luego, para la obtención de los posibles puntos extremos, formaremos el sistema:

$$\begin{cases} z'_s = \dfrac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

O bien, como $\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}$ es siempre positivo (obsérvese que ambas derivadas, si el sistema [I] representa una curva, no son idénticamente nulas, simultáneamente) el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = J(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

siendo J(x,y) el determinante funcional jacobiano.

Para deducir las condiciones suficientes o de segundo grado, bastará con estudiar el signo de $z''_{g^2}$ .

Recordando que: $$z'_g = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot g'_y - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot g'_x}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}} = \frac{J}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}}$$ , se tendrá que: $$z''_{g^2} = \frac{\dfrac{\partial z'_g}{\partial x} \cdot g'_y - \dfrac{\partial z'_g}{\partial y} \cdot g'_x}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}} ,$$

que, en los puntos en que se anula J(x, y), se convierte en:

$$z''_{g^2} = \frac{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y} \cdot J'_x \, g'_y - \sqrt{g'^2_x + g'^2_y} \cdot J'_x \, g'_y}{(g'^2_x + g'^2_y)^{3/2}} = \frac{\dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)}}{g'^2_x + g'^2_y} .$$

Por tanto, si en un punto de los hallados:

$$\begin{cases} z'' > 0 \rightarrow \dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} > 0, \text{ existe un mínimo relativo} \\ z'' < 0 \rightarrow \dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} < 0, \text{ existe un máximo relativo} \end{cases}$$

NOTA: El método expuesto resulta generalizable a *n* variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; si se trata de obtener los extremos de $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con las (n-1) restricciones:

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \; ; \; g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \; ; \ldots ; \; g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \; ;$$

se resuelve el sistema formado por las *n* ecuaciones siguientes:

$$J = \frac{\partial(f, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0 \quad ; \; g_1 = 0 \; ; \; g_2 = 0 \; ; \ldots ; \; g_{n-1} = 0 \; ;$$

y para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo, se calcula en cada uno de los puntos hallados el signo de:

$$J_1 = \frac{\partial(J, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \quad ,$$

resultando un máximo local si $J_1 < 0$ y un mínimo local si $J_1 > 0$ (García y Rodríguez, 1986).

### 3.2.3. Método de substitución, eliminación o reducción de variables

El problema de los extremos condicionados, generalizado a *n* variables, consiste en hallar los extremos de la función $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfacen la ecuación condicionante: $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Si es posible resolver esta última ecuación para una de las variables, como por ejemplo: $x_1 = h(x_2, \ldots, x_n)$, la solución de $x_1$ puede substituirse en z resultando: $f[h(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n]$, que es una función de (n-1) variables. Llamemos a esta función $F(x_2, \ldots, x_n)$; la obtención de los extremos de z, sujeta a la condición g anteriormente expresada, resulta equivalente a la obtención de los extremos no condicionados de la función $F(x_2, \ldots, x_n)$ con respecto a las variables $x_2, \ldots, x_n$. El problema de extremos condicionados se reduce, de este modo, al de uno no condicionado y con las mismas variables o bien una variable menos, que podemos resolver en la forma acostumbrada. Esto es, que nos permite pasar de un programa de optimización restringida con restricciones de igualdad a una optimización clásica libre sin ningún tipo de restricciones y con el mismo o inferior número de variables, lo que simplifica notablemente el proceso de resolución.

Por el contrario, a este procedimiento se le puede achacar que envuelve una pérdida de simetría debido a que ofrece preferencia a una de las variables de la condición (que, normalmente, será la más sencilla de despejar en función de las otras). En todo caso, para poder efectuar la substitución antedicha en un problema general de este tipo, han de poderse explicitar *m* variables de decisión en función de las (n – m) restantes, que es el números de grados de libertad del problema planteado. Y ello no es siempre posible aunque sí lo es en una gran mayoría de problemas prácticos, razón por la cual se presenta aquí mediante algunos ejemplos aclaratorios que veremos a continuación.

Se supone siempre que el número de variables *n* y el número de restricciones *m* son finitos, y además $n > m$. Si sucediese que $n < m$ puede resultar que el conjunto de soluciones factibles fuese el vacío o infinito, con lo cual no existe solución, o resulta trivial el problema de optimización. Por otra parte, las restricciones de igualdad en un problema de optimización "reducen" su dimensión. En general, por cada restricción que se añada se pierde un grado de libertad a la hora de obtener los valores que hacen que la función objetivo o económica alcance su valor óptimo (Guzmán *et alt*., 1999).

## 3.2.4. Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange

### *3.2.4.1. Introducción*

En epígrafes anteriores se ha visto que los puntos obtenidos al resolver un programa con restricciones de igualdad llevan asociados los denominados multiplicadores de Lagrange (uno por cada restricción o ecuación condicionante). Nos referiremos, a continuación, al significado de dichos multiplicadores, de especial importancia en sus aplicaciones a la Economía (Balbás y Gil, 2004).

Para ello, formulemos un programa con restricciones de igualdad, como el siguiente:

$$\text{Optimizar: } f(x_1,\dots,x_n) \quad \text{sujeto a: } \left.\begin{array}{l} g_1(x_1,\dots,x_n) = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,\dots,x_n) = b_m \end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

donde f: $A \to R$ y $g = (g_1,\dots,g_m)$: $A \to R^m$ ($n > m$) son dos funciones de clase $C^2$ en el abierto $A \subset R^n$.

Si suponemos que $b_1,\dots,b_m$, pueden variar, es claro que el conjunto factible M dependerá de $b = (b_1,\dots,b_m)$, y escribiremos simbólicamente:

$$M(b) = \{x \in A \,/\, g(x) = b\}\ .$$

Intuitivamente, es claro que los puntos óptimos del programa (I) dependerán del valor de $b = (b_1,\dots,b_m)$. Así si dado $\bar{b} = (\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_m)$ el programa (I) posee un óptimo en el punto: $(\bar{a},\bar{\lambda})\left(\bar{a} = (\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n), \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_m)\right)$, y podemos establecer una función F: $B \to R$ (B es un entorno de b), tal que $F(b) = f(a)$, $\forall b \in B$, y *a* es el óptimo del programa para $b \in B$.

Pues bien, dado un programa como el (I), si para la función *f* posee un extremo relativo sobre el conjunto M(b) en el punto en el que el determinante funcional jacobiano de la función *g* posee rango *m* y el determinante hessiano orlado es no nulo, entonces se cumple que:

$$-\lambda_i = \frac{\partial F(b)}{\partial b_i} \ .$$

Así pues, este multiplicador asociado a la i-ésima restricción, nos mide la tasa de variación del valor de la función objetivo *f* en el punto óptimo con respecto a su correspondiente $b_i$, por lo que se le suele denominar “precio sombra”.

El opuesto del k-ésimo multiplicador de Lagrange mide el cambio marginal en el valor óptimo de la función objetivo con respecto a la variación del término independiente de la k-ésima restricción $b_k$. Es decir:

$$\frac{\partial f\left(z^*\right)}{\partial b_k} = -\lambda_k^* \ .$$

Pero los multiplicadores de Lagrange $\lambda_i$ ($\forall$ i = 1, 2, …, m) pueden tener sentido económico, como ya hemos enunciado. Hemos demostrado que los multiplicadores de Lagrange equivalen a derivadas parciales; y en Economía estas derivadas son sinónimo del término “marginal”. Por ello, los multiplicadores $\lambda_i$ pueden interpretarse como cambios marginales (Sánchez, 2014). Veámoslo seguidamente en algunas aplicaciones microeconómicas.

### *3.2.4.2. En la planificación de la producción*

Así, si tenemos un problema de planificación de producción en donde la función objetivo sea el beneficio a obtener, y las ecuaciones de restricción señalen las disponibilidades de recursos (es decir, las restricciones impuestas por las cantidades limitadas de los factores disponibles $b_i$), veamos qué medirán entonces los multiplicadores de Lagrange.

El opuesto del k-ésimo multiplicador de Lagrange, simbolizado por: $-\lambda_k^*$, nos señala el aumento del beneficio máximo provocado por la disponibilidad de una unidad más del k-ésimo recurso $b_k$. O dicho de otra manera, nos medirá la *rentabilidad marginal* del recurso o factor $b_k$.

Por tanto, $-\lambda_k^*$ representa el precio máximo que el empresario está dispuesto a pagar por una unidad adicional del k-ésimo recurso. Y por eso, al multiplicador $-\lambda_k^*$ -opuesto del operador de Lagrange- se le llama en Economía, *precio sombra* del factor productivo $b_k$. La justificación del apelativo “precio sombra” del factor estriba en considerar el precio del expresado factor como si estuviese a la “sombra”, en el sentido de que su precio puede diferir del precio real de mercado de ese factor.

Resulta obvio colegir que si el precio real de mercado es superior a su “precio sombra” no será rentable incrementar la utilización de dicho factor. Por el contrario, si el precio de mercado es inferior a su “precio sombra”, sí será rentable aumentar la utilización de dicho factor.

### *3.2.4.3. En la maximización de la utilidad*

Así, si suponemos que el consumidor trata de maximizar su función de utilidad $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sujeta a la ecuación de restricción presupuestaria o “ecuación de balance” $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$, donde *b* nos señala la renta disponible, ¿qué nos señalaría el multiplicador $-\lambda^*$ en este caso?

El valor opuesto del multiplicador de Lagrange: $-\lambda^*$, nos medirá la utilidad marginal de la renta en el punto óptimo.

### *3.2.4.4. En la minimización de costes*

Si una empresa desea minimizar su función de costes, estando éstos sujetos a una correcta restricción de producción (donde nos indica el nivel de producto), ¿qué nos señala, entonces, el multiplicador $-\lambda^*$?

El valor opuesto del multiplicador de Lagrange: $-\lambda^*$, nos medirá el coste marginal de producir una unidad de producto más, a partir del punto óptimo (Sánchez, 2014).

## 4. CASOS PRÁCTICOS

A continuación se desarrollan algunos ejemplos que se suelen presentar en la práctica por lo que se refiere, especialmente, a la aplicación de la Teoría Microeconómica.

### Caso 1.

Supongamos una empresa dedicada a la producción de un bien. Su función de producción, que relaciona la cantidad (q) producida de dicho bien con la de los factores productivos ($x_1$ y $x_2$) empleados para la misma es:

$$q = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 .$$

Los precios unitarios de dichos factores son: $p_1$ = 2 u. m. y $p_2$ = 4 u. m., respectivamente. Determínese la cantidad de factores productivos que maximizan la producción con un coste de 68 u. m., a) por el método de los operadores de Lagrange y b) por reducción de variables (Balbás y Gil, 2004).

*Solución:*

a) El problema es de programación con restricciones de igualdad y vamos a resolverlo, inicialmente, por el método de los operadores de Lagrange. Tenemos que el coste de utilizar los factores productivos será: $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = 2x_1 + 4x_2$, que constituye la ecuación condicionante. Así pues, tendremos el siguiente programa:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & q = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + 4x_2 = 68. \end{array}$$

La función lagrangiana es: $L(x_1, x_2, \lambda) = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + \lambda(2x_1 + 4x_2 - 68)$ .

Las derivadas parciales primeras de la misma igualadas a cero junto con la restricción, conforman el siguiente sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{r} 60-4x_1+2\lambda=0 \\ 90-6x_2+4\lambda=0 \\ 2x_1+4x_2=68 \end{array}\right\}$$

que posee una solución ($x_1$ = 12, $x_2$ = 11 y $\lambda$ = -6) que es el máximo global del programa, ya que la función objetivo es cóncava en el conjunto factible, que es convexo. Veámoslo.

-El conjunto factible es M = $\{(x_1, x_2) \in \Re^2 / 2x_1 + 4x_2 = 68\}$. Es una recta de $\Re^2$, que, como sabemos, es un conjunto convexo.

-Las derivadas parciales segundas de la función de producción son:

$$D_{11}q=-4$$
$$D_{12}q=D_{21}q=0 \quad \text{(lema de Schwartz)}$$
$$D_{22}q=-6.$$

La matriz hessiana de q en todo punto de $\Re^2$ es:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

y, ya que $H_1$ = -4 < 0 y $H_2$ = 24 > 0, resulta que q es cóncava (estrictamente) en $\Re^2$ y, por tanto, en M.

Así, utilizando 12 unidades del primer factor y 11 del segundo, se maximiza la producción para un coste de 68 u. m. Sustituyendo en la función de producción, tenemos que:

$$q=60x_1+90x_2-2x_1^2-3x_2^2 = 60\cdot 12 + 90\cdot 11 - 2\cdot 12^2 - 3\cdot 11^2 = 1059$$

(unidades físicas o monetarias).

Veamos, por otra parte, que el valor del operador $\lambda$ asociado a la solución óptima es -6. Ésta será la tasa de variación de la producción óptima respecto al coste, de acuerdo con la significación económica de este operador de Lagrange que hemos explicado en este mismo Apéndice. Por ejemplo, si estuviésemos dispuestos a utilizar factores productivos por valor de 69 u. m., una más que antes, la producción que obtendríamos utilizando óptimamente los recursos será aproximadamente de 1065, seis más que antes, ya que se tiene $-\lambda = 6$ (la aproximación realizada es lineal y será mejor cuanto menor sea la variación del coste respecto al inicial de 68). Puede comprobar el amable lector/a que, resolviendo el programa para un coste de 69, el resultado es ahora:

$x_1 = 12.137$, $x_2 = 11.182$ y $\lambda = -5.727$, siendo el valor resultante de $q = 1064.875$.

b) El mismo problema resuelto por eliminación o reducción de variables, implica que: $x_1 = 34 - 2x_2$; y entonces:

$$q(x_2) = 60(34 - 2x_2) + 90x_2 - 2(34 - 2x_2)^2 - 3x_2^2 = 242x_2 - 272 - 11x_2^2 ,$$

que ya es una función real de una sola variable real.

-Condición necesaria o de primer grado:

$$q' = 242 - 22x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 11 \text{ y } x_1 = 34 - 22 = 12.$$

-Condición suficiente o de segundo grado:

$q'' = -22$, luego, efectivamente, hay un MÁXIMO en el punto (12, 11), y el problema queda resuelto de modo más inmediato que por el procedimiento anterior a).

**Caso 2.**

Una determinada empresa elabora un producto utilizando dos factores productivos. La función de producción que relaciona la cantidad de bien producido (Q) con los factores productivos utilizados (x,y) es:

Q (x,y) = 12x + y. La función de costes de la empresa es la siguiente:
C (x,y) = $3x^2 + y^2$. Se pide:

1. ¿Cuáles son las cantidades de factores productivos que consiguen minimizar el coste de producir 49 unidades de producto?.
2. ¿Será rentable producir una unidad más de producto, si el precio unitario de venta de éste fuese de 3 unidades monetarias?.

*Solución:*

1) El problema se plantea así:

con la restricción: $\left.\begin{array}{l} \min .3x^2 + y^2 \\ 12x + y = 49 \end{array}\right\}$

a) Para la técnica de los operadores de Lagrange, construyamos la función lagrangiana siguiente:

$$L(x, y) = 3x^2 + y^2 + \lambda\,(12x + y - 49).$$

*Condición necesaria de óptimo o de primer grado*: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 6x + 12\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ g: 12x + y = 49 \end{array}\right\}$

De la segunda ecuación se obtiene directamente que: $\lambda$ = -2y. Substituyendo en la primera ecuación resulta: 6x – 24y = 0. Si resolvemos esta ecuación con la ecuación de restricción, obtenemos: $x^* = 4$, $y^* = 1$. Y asimismo $\lambda^* = -2y = -2$.

Veamos si el punto crítico es realmente un máximo o mínimo:

*Condición suficiente o de segundo grado*:

Construyamos el Hessiano orlado relevante. Sabemos que:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{vmatrix} \Rightarrow \overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 12 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -294 < 0 .$$

En nuestro caso, el número de variables es 2 (n = 2), y el número de ecuaciones de restricción es 1 (m = 1). Debemos estudiar -como ya sabemos- el signo de los (n – m) últimos menores principales orlados. En nuestro caso sucede que: n – m = 2 – 1 = 1 menor principal orlado.

El menor principal orlado, cuyo signo se ha de analizar, es $\overline{H}_{m+n} = \overline{H}_3 = \overline{H}$ , siendo $\overline{H}$ el Hessiano orlado anterior, cuyo signo es negativo.

Al ser m = 1 (impar) y $\overline{H} < 0$ , tendremos que en $P_0$ (4,1) hay un mínimo relativo o local.

Así pues, han de utilizarse cuatro unidades del primer factor productivo, y una unidad del segundo factor, si es que deseamos minimizar el coste de producir 49 unidades del producto. Esto implicará un coste mínimo de:

$$C = 3x^2 + y^2 = 48 + 1 = 49 \text{ u.m.}$$

b) De emplear para su resolución el método de reducción de variables, más simple, despejando en la ecuación condicionante se tendría que: $y = 49 - 12x$, y substituyendo en la función objetivo o económica, que ya es una función de una sola variable:

$$L(x) = 3x^2 + (49 - 12x)^2 = 147\,x^2 - 1176x + 2401.$$

- *Condición necesaria o de primer grado*:

$$L'_x = 294x - 1176 = 0 \rightarrow x = 4\ ;\ y = 49 - 48 = 1\ ;$$

- *Condición suficiente o de segundo grado*:

$$L''_{x2} = 294 > 0 \rightarrow \text{luego hay un mínimo en el punto } P_0(4,1,49).$$

2) A continuación, debe averiguarse cuál sería el coste adicional de producir esta nueva unidad de producto.

Si el precio unitario de venta del producto es de 3 unidades monetarias, ello significa que aumentar la producción en una unidad más, supondrá para la empresa un ingreso adicional de 3 u. m.

Este coste marginal, de producir una unidad adicional más de producto a partir del punto óptimo, coincidirá con el valor opuesto del multiplicador de Lagrange $\lambda^*$. Hemos obtenido que $\lambda^* = -2$, luego el coste marginal de producir una unidad más –a partir del óptimo- será de 2 u. m. ($-\lambda = 2$). Luego al ser el ingreso marginal (3 u. m.) superior al coste marginal (2 u. m.), resultará rentable producir una unidad adicional del producto en cuestión.

**Caso 3.**

Se fabrican dos productos A y B en cantidades *x* e *y* respectivamente. Por la venta de cada unidad A se obtienen 3 euros y por cada unidad de B se obtienen 4 euros. La producción de la empresa ha de adaptarse a la restricción dada por la ecuación: $9x^2 + 4y^2 = 18000$. Calcúlense las unidades que se han de producir de cada producto para maximizar los ingresos (Sánchez, 2014).

*Solución:*

a) Se trata de maximizar la función de ingreso: $I(x) = 3x + 4y$ bajo la restricción:
$9x^2 + 4y^2 = 18000$, por el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello, en primer lugar, construimos la función lagrangiana:

$$L(x, y) = 3x + 4y + \lambda(9x^2 + 4y^2 - 18000).$$

- *Condición necesaria o de primer grado*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 3 + 18\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4 + 8\lambda y = 0 \\ g(x, y) = 9x^2 + 4y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{3}{18x} \\ \lambda = -\dfrac{4}{8y} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{6x} = \frac{1}{2y} \Rightarrow y = 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 9x^2 + 4y^2 = 18000 \end{cases} \Rightarrow x = 20, \quad y = 60, \quad \lambda = -\frac{1}{120}.$$

- *Condición suficiente o de segundo grado*:

A partir del Hessiano orlado relevante, y de sus menores principales podremos saber si existe realmente un máximo. Tenemos que hallar el signo de sus *n-m* últimos menores, siendo *n* el número de incógnitas de la función de ingreso y *m* el número de restricciones.

En este caso, n - m = 2 – 1 = 1, de modo que calculamos el signo del último menor:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 18x & 8y \\ 18x & 18\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 8\lambda \end{vmatrix}$$ , que en el punto crítico condicionado $\left(20, 60, -\frac{1}{120}\right)$ será:

$$\begin{vmatrix} 0 & 360 & 480 \\ 360 & -\frac{3}{20} & 0 \\ 480 & 0 & -\frac{1}{15} \end{vmatrix} = (480)^2 \frac{3}{20} + (360)^2 \frac{1}{15} = 43200 > 0 \quad .$$

Como $(-1)^{m+1} = (-1)^2 = 1 > 0$ entonces hay un máximo relativo en el punto crítico en cuestión, y las unidades que ha de producir de A y B para maximizar los ingresos son x = 20, y = 60.

b) Resolviendo ahora el mismo problema por la técnica propugnada de eliminación de variables, se tiene que: $3x = \sqrt{18000 - 4y^2}$ , con lo que: $L(y) = \sqrt{18000 - 4y^2} + 4y$ , que es una función real de una sola variable real, y la condición de extremo necesaria o de primer grado exige que:

$$L'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{18000 - 4y^2}} + 4 = 0 \Rightarrow -\frac{4y}{\sqrt{18000 - 4y^2}} = -4$$ , de donde:

$$y = \sqrt{18000 - 4y^2} \Rightarrow y^2 = 18000 - 4y^2;\ 5y^2 = 18000\ ;\ y = \sqrt{3600} = 60 \Rightarrow x = \frac{y}{3} = \frac{60}{3} = 20 ,$$

luego (20, 60) es un punto crítico.

-Condición suficiente o de segundo grado:

Tenemos que: $L'_y = 4 - \frac{4y}{\sqrt{18000 - 4y^2}}$ , entonces: $L''_{y^2} = -\frac{9000}{(4500 - y^2)^{3/2}} = -\frac{9000}{\sqrt{(4500 - y^2)^3}}$ , y para y = 60, se tiene que: $L''_{y^2} = -\frac{9000}{\sqrt{900^3}} = -\frac{1}{3} < 0$ , luego, efectivamente, se trata de un MÁXIMO.

## Caso 4.

La función de utilidad hipotética de un consumidor, con un horizonte de dos períodos, es la siguiente: $U = (c_1 + 1000)\cdot(c_2 + 2000)$, donde $c_1$ y $c_2$ representan los gastos de cada período. Las rentas del consumidor son: $y_1 = 10000$, $y_2 = 9000$ unidades monetarias. El tipo de interés es del 10%. Determinar el plan de gastos del consumidor en los dos ejercicios económicos, empleando diversos procedimientos.

*Solución:*

a) Resolviéndolo inicialmente por el método de los multiplicadores de Lagrange, se tiene la función lagrangiana a optimizar:

$$V = (c_1 + 1000)\cdot(c_2 + 2000) + \lambda\,[(10000 - c_1) + (9000 - c_2)\,1.1^{-1}].$$

Así pues, maximizaremos la función de utilidad con la restricción determinada por la "ecuación de balance", que nos indica que la cantidad que el consumidor gasta en el primer período más la que gasta en el 2º período es igual a su renta.

De tal suerte, el consumidor debe encontrar la combinación de gastos que maximice la utilidad (Henderson y Quandt, 1968).

- *Condición necesaria o de primer grado*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial c_1} = c_2 + 2000 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial c_2} = c_1 + 1000 - \lambda \cdot 1.1^{-1} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} = (10000 - c_1) + (9000 - c_2)1.1^{-1} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo resulta: $\lambda = 11550$; $c_1 = 9500$ u. m. y $c_2 = 9550$ u. m. Con ello:

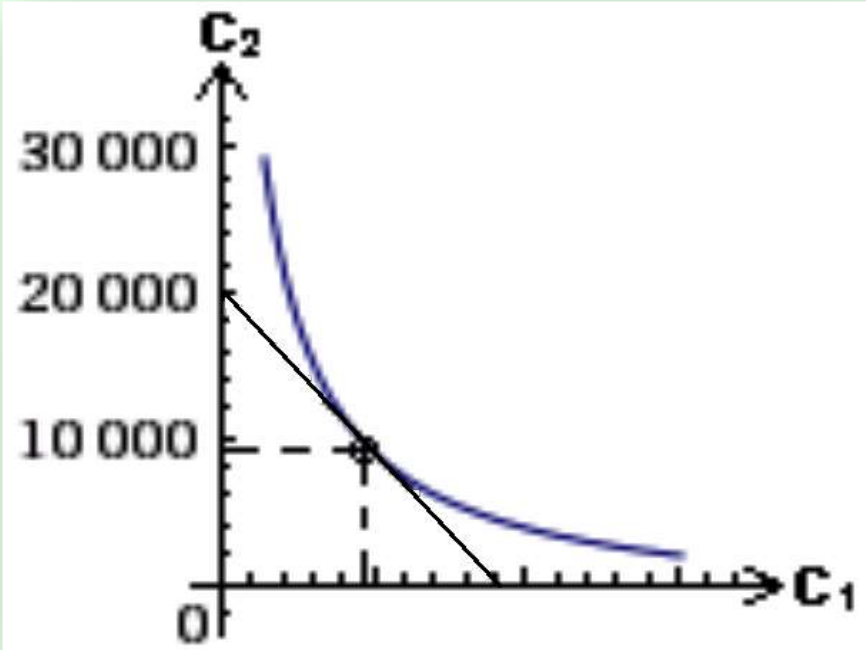
$$U = (10550) \times (11550) = 121\,275\,000 \text{ u. m.}$$

- *Condición suficiente o de segundo grado*:

$V''_{c_1^2} = 0$ ; $V''_{c_2^2} = 0$ ; $V''_{c_1 c_2} = 1$ ; $V''_{c_2\lambda} = -1'1^{-1}$; $V''_{c_1\lambda} = -1$ ; formando el hessiano orlado relevante, resulta:

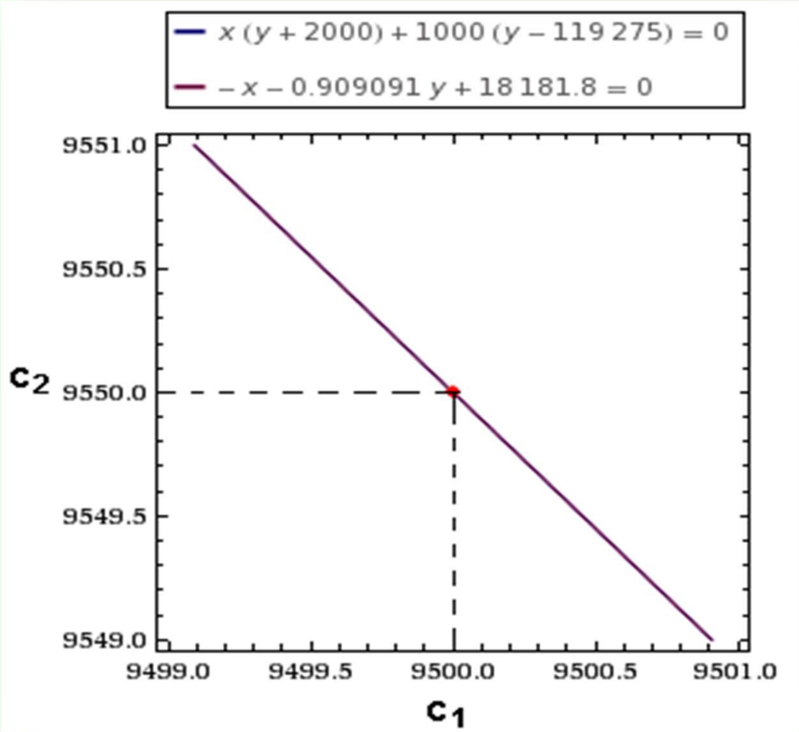
$$H(c_1, c_2, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1.1^{-1} \\ -1 & -1.1^{-1} & 0 \end{vmatrix} = 1.1^{-1} + 1.1^{-1} = \frac{2}{1.1} = 1.82 > 0$$ , luego se trata de un MÁXIMO.

Veamos la representación gráfica correspondiente:




Curva de indiferencia y ecuación de balance.

En la siguiente figura puede verse, con mayor detalle, el punto de intersección entre la curva de indiferencia y la ecuación de balance, que nos determina los valores óptimos buscados, esto es:




Detalle de gastos de cada período.

b) Empleando ahora la técnica más simple de reducción o eliminación de variables, resultará que:

$10000 - c_1 = (c_2 - 9000)/1.1$; $11000 - 1.1c_1 + 9000 =$
$= c_2 = 20000 - 1.1c_1$.

La función de utilidad, entonces, quedará expresada así:

$$U = (c_1 + 1000) \times (22000 - 1.1 \cdot c_1) = 22000c_1 - 1.1c_1^2 + 22\,000\,000 - 1100\,c_1 =$$
$$= 20900\,c_1 - 1.1c_1^2 + 22\,000\,000.$$

-*Condición necesaria o de primer grado*:

$U' = 20900 - 2.2c_1 = 0$ ; $c_1 = \dfrac{20900}{2.2} = 9500$ u. m. ; $c_2 = 20000 - 1.1 \times 9500 = 9550$ u. m.

-*Condición suficiente o de segundo grado*:

U” = - 2.2 < 0, luego se trata de un MÁXIMO, c.s.q.d.

**Caso 5.**

Llegados a este punto, veamos que idénticas formulaciones a las propuestas por este autor en sus estudios para el caso de las conducciones libres (véase Cap. I, epígrafes 4.3. y siguientes del libro “Cinco temas de Hidrología e Hidráulica”, Universitat Internacional de Catalunya, Tortosa, 2003, citado en la bibliografía) se pueden aplicar, con las correcciones correspondientes, en el cálculo y diseño de las conducciones forzadas o a presión. Para ello, se ha partido de las fórmulas correspondientes a las 6 primeras categorías de rugosidad de la pared interior, y que se expresan a continuación en la siguiente tabla, en función del material del tubo y para conducciones usadas o en servicio.

Dichas fórmulas adoptarán la configuración general: $V = K \cdot R^{\beta} \cdot J^{0'5}$, en la que se da la velocidad (m/s) en función del radio hidráulico (m), de la pérdida de carga unitaria (m/m.l.) y de coeficientes según las diversas categorías de rugosidad. A saber:

Coeficientes de la formulación propuesta por Franquet según las diferentes categorías de rugosidad.

| Grado de rugosidad (k) | Material | K | β |
|---|---|---|---|
| 1 | Plásticos, vidrio, latón, cobre estirado | 86.85 | 0.62150 |
| 2 | Fibrocemento, aluminio | 78.29 | 0.63455 |
| 3 | Acero, otros metales | 70.02 | 0.64760 |
| 4 | Fundición no revestida | 63.92 | 0.65560 |
| 5 | Hormigón no revestido | 56.24 | 0.66540 |
| 6 | Cerámica no revestida | 49.51 | 0.67725 |

La formulación anterior, sin embargo, resulta más práctica de aplicar en función del diámetro interior (m) de la conducción y del caudal o gasto ($m^3/s$) circulante por la misma, con lo que, para el caso básico estudiado (tubería en servicio o usada), se tendrían, correlativamente, las siguientes expresiones, en las que también se ha despejado la pérdida unitaria de carga (m/m) y se han incluido las categorías intermedias obtenidas por interpolación lineal:

Expresiones propuestas de la velocidad, caudal y pérdida unitaria de carga para tuberías en servicio.

| Rugosidad (k) | V (m/s) | Q ($m^3/s$) | J (m/m) |
|---|---|---|---|
| **1.0** | $\mathbf{36.69 \cdot D^{0.6215} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{28.82 \cdot D^{2.6215} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{0.000743 \cdot V^2 \cdot D^{-1.243}}$ |
| 1.5 | $34.59 \cdot D^{0.62802} \cdot J^{0.5}$ | $27.16 \cdot D^{2.62802} \cdot J^{0.5}$ | $0.000845 \cdot V^2 \cdot D^{-1.256}$ |
| **2.0** | $\mathbf{32.48 \cdot D^{0.63455} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{25.51 \cdot D^{2.63455} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{0.000948 \cdot V^2 \cdot D^{-1.2691}}$ |
| 2.5 | $30.51 \cdot D^{0.6411} \cdot J^{0.5}$ | $23.96 \cdot D^{2.6411} \cdot J^{0.5}$ | $0.001088 \cdot V^2 \cdot D^{-1.2821}$ |
| **3.0** | $\mathbf{28.53 \cdot D^{0.6476} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{22.41 \cdot D^{2.6476} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{0.001229 \cdot V^2 \cdot D^{-1.2952}}$ |
| 3.5 | $27.14 \cdot D^{0.6516} \cdot J^{0.5}$ | $21.32 \cdot D^{2.6516} \cdot J^{0.5}$ | $0.001368 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3032}$ |
| **4.0** | $\mathbf{25.76 \cdot D^{0.6556} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{20.23 \cdot D^{2.6556} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{0.001507 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3112}}$ |
| 4.5 | $24.06 \cdot D^{0.6605} \cdot J^{0.5}$ | $18.89 \cdot D^{2.6605} \cdot J^{0.5}$ | $0.001753 \cdot V^2 \cdot D^{-1.321}$ |
| **5.0** | $\mathbf{22.36 \cdot D^{0.6654} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{17.56 \cdot D^{2.6654} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{0.002 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3308}}$ |
| 5.5 | $20.86 \cdot D^{0.6713} \cdot J^{0.5}$ | $16.38 \cdot D^{2.6713} \cdot J^{0.5}$ | $0.002334 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3426}$ |
| **6.0** | $\mathbf{19.36 \cdot D^{0.67725} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{15.21 \cdot D^{2.67725} \cdot J^{0.5}}$ | $\mathbf{0.002668 \cdot V^2 \cdot D^{-1.3545}}$ |

Una visión más completa y justificada de la minimización de las pérdidas de carga unitarias para cada una de las seis (u once) categorías de rugosidad anteriormente definidas, puede llevarse a cabo a partir de la ecuación condicionante: $V = 1.4466 \times D + 0.638$, también deducida por quien suscribe, que representa la velocidad máxima admisible de circulación del agua por la conducción en función del diámetro interior de la misma (Franquet, 2005).

Si consideramos, v. gr., la categoría de rugosidad de una tubería de hormigón armado (k = 5), se tendrá la expresión correspondiente propuesta de la pérdida de carga unitaria que intentaremos minimizar por el método de los operadores de Lagrange aplicando la condición necesaria o de primer grado, así:

$$V = K \cdot R^{\beta} \cdot J^{0'5} = 56.24 \times \left(\frac{D}{4}\right)^{0.6654} \times J^{0.5} = 22.36 \times D^{0.6654} \times J^{0.5},$$

y también a la vista de la tabla anterior:

$$\begin{cases} J = 0.002 \times V^2 \times D^{-1.3308} \\ J'_V = 0.004 \times V \times D^{-1.3308} = 0 \\ J'_D = 0.002 \times V^2 \times (-1.3308) \times D^{-2.3308} = 0 \end{cases}$$

Siendo necesariamente V y D positivos, los extremos condicionados de la función J coincidirán con los de la función logarítmica ln J. Ello se realiza para mayor facilidad de cálculo, pues de esta forma el producto se convierte en una suma o adición. Por tanto, formamos la función lagrangiana o auxiliar siguiente:

$$\Phi\,(V, D) = \ln 0.002 + 2 \times \ln V - 1.3308 \times \ln D + \lambda\,(V - 1.4466 \cdot D - 0.638).$$

La *condición necesaria o de primer grado* exige que:

$$\left.\begin{aligned} \Phi'_V &= \frac{2}{V} + \lambda = 0 \\ \Phi'_D &= -\frac{1.3308}{D} - 1.4466\lambda = 0 \\ \Phi'_\lambda &= V - 1.4466 D - 0.638 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ de donde se deduce: } \lambda = -\frac{2}{V} = -\frac{1.3308}{1.4466 \cdot D}\ ;$$

$$\frac{2}{1.4466 \cdot D + 0.638} = \frac{1.3308}{1.4466 \cdot D}\ ;\ 2.8932 \cdot D = 1.9251 \cdot D + 0.849;$$

$0.9681 \times D = 0.849 \Rightarrow D = 0.877$ m, lo que limita la velocidad máxima aconsejable, según hemos visto, a:

$$V = 1.4466 \times 0.877 + 0.638 = 1.91 \text{ m/s} \text{ ; y entonces:}$$

$\lambda = -\dfrac{2}{V} = -\dfrac{2}{1.91} = -1.049$ ; con un caudal de: $Q = 0.7854 \times V \times D^2 = 0.7854 \times 1.91 \times 0.877^2 = 1.15 \text{ m}^3/\text{s}$,

y una pérdida unitaria de carga de: $J = \dfrac{0.002 \times 1.91^2}{0.877^{1.3308}} = 0.00866 \text{ m/m}.$

*Condición de segundo grado o suficiente*:

Para ello formaremos el determinante funcional hessiano orlado relevante, con lo que:

$$H(V,D,\lambda) = \begin{vmatrix} \Phi''_{V^2} & \Phi''_{VD} & \Phi''_{V\lambda} \\ \Phi''_{VD} & \Phi''_{D^2} & \Phi''_{D\lambda} \\ \Phi''_{V\lambda} & \Phi''_{D\lambda} & \Phi''_{\lambda^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{2}{V^2} & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1.3308}{D^2} & -1.4466 \\ 1 & -1.4466 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1.3308}{D^2} + \frac{4.1853}{V^2} =$$

$= -\dfrac{1.3308}{0.877^2} + \dfrac{4.1853}{1.91^2} = 1.147 - 1.730 = -0.58 < 0 \rightarrow$ luego se trata de un MÍNIMO relativo o local en el punto crítico $P_0(1.91, 0.877, 0.00866)$.

*Comprobación por tanteo*:

- Si suponemos: D = 1.000 m $\Rightarrow$ V = 1.4466 $\times$ 1 + 0.638 = 2.08 m/s.

  Entonces: $J = \dfrac{0.002 \times 2.08^2}{1^{1.3308}} = 0.00869 \text{ m/m}.$

- Si suponemos: D = 0.500 m $\Rightarrow$ V= 1.4466 $\times$ 0.5 + 0.638 = 1.36 m/s.

  Entonces: $J = \dfrac{0.002 \times 1.36^2}{0.5^{1.3308}} = 0.00931 \text{ m/m}.$

- Si suponemos: D = 2.000 m ⇒ V = 1.4466 × 2 + 0.638 = 3.53 m/s.

$$\text{Entonces: } J = \frac{0.002 \times 3.53^2}{2^{1.3308}} = 0.00991 \text{ m/m.}$$

-Si suponemos: D = 0.100 m ⇒ V = 1.4466 × 0.1 + 0.638 = 0.78 m/s.

$$\text{Entonces: } J = \frac{0.002 \times 0.78^2}{0.1^{1.3308}} = 0.02624 \text{ m/m.}$$

En el cuadro siguiente se pone de manifiesto -como resumen de la anterior determinación- la presencia del mínimo de la función objetivo en un entorno suficientemente representativo de la misma. Así:

| D (m) | J (m/m) |
|---|---|
| 0.100 | 0.02624 |
| 0.500 | 0.00931 |
| **0.877** | **0.00866** |
| 1.000 | 0.00869 |
| 2.000 | 0.00991 |

Se deduce, de este modo, que cumpliendo con la ley de velocidad media en función del diámetro interior que aquí proponemos, y concretamente para la categoría de rugosidad k = 5, el valor mínimo de la pérdida de carga unitaria es J = 0.00866 m/m, que tiene lugar para:
V = 1.91 m/s, D = 877 mm y Q = 1.15 $m^3$/s.

Estas mismas determinaciones pueden efectuarse para las restantes cinco categorías de rugosidad, resultando, en definitiva, la siguiente tabla:

Valor mínimo de J para las diferentes categorías de rugosidad.

| Rugosidad (k) | J (m/m) | D (m) | V (m/s) | Q ($m^3$/s) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00315 | 0.724 | 1.69 | 0.70 |
| 2 | 0.00405 | 0.766 | 1.75 | 0.80 |
| 3 | 0.00529 | 0.810 | 1.81 | 0.93 |
| 4 | 0.00650 | 0.840 | 1.85 | 1.03 |
| 5 | 0.00866 | 0.877 | 1.91 | 1.15 |
| 6 | 0.01159 | 0.925 | 1.98 | 1.33 |

Así mismo, para cada una de las diferentes categorías de rugosidad puede verse, en los gráficos siguientes, el mayor detalle de los mínimos absolutos de la función J(D). A saber:

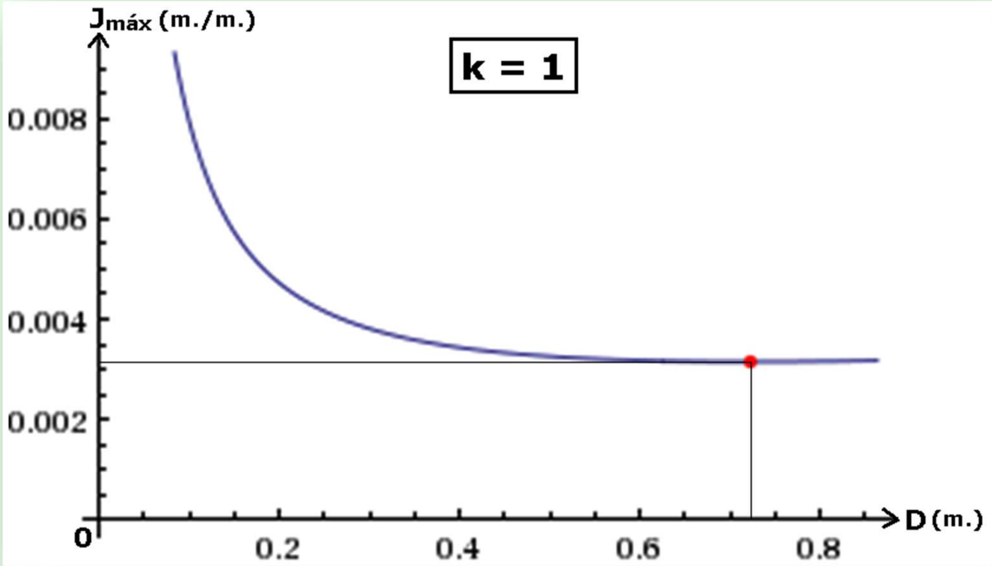



Fig. 1. Mínimo absoluto de J(D) para k = 1.

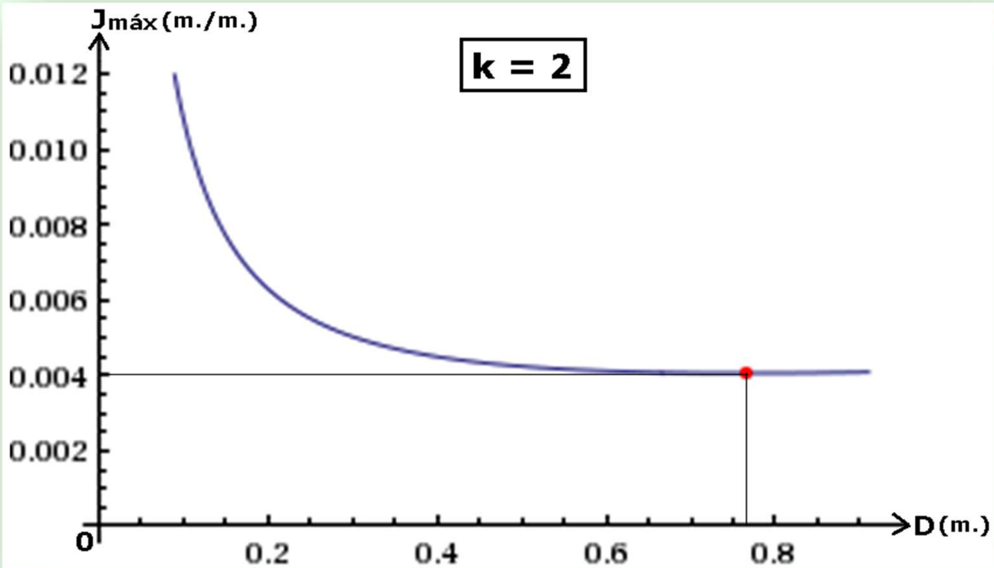



Fig. 2. Mínimo absoluto de J(D) para k = 2.

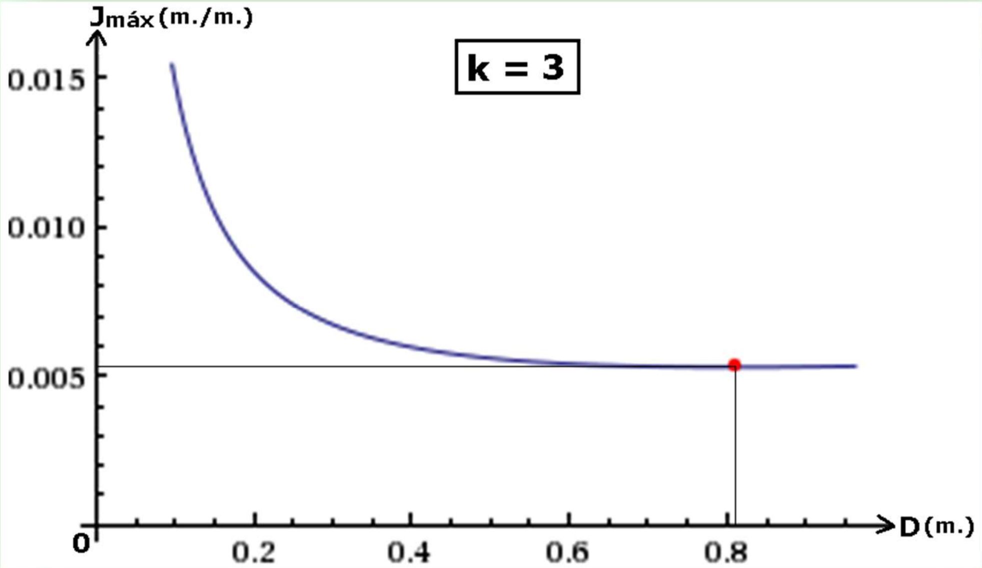



Fig. 3. Mínimo absoluto de J(D) para k = 3.

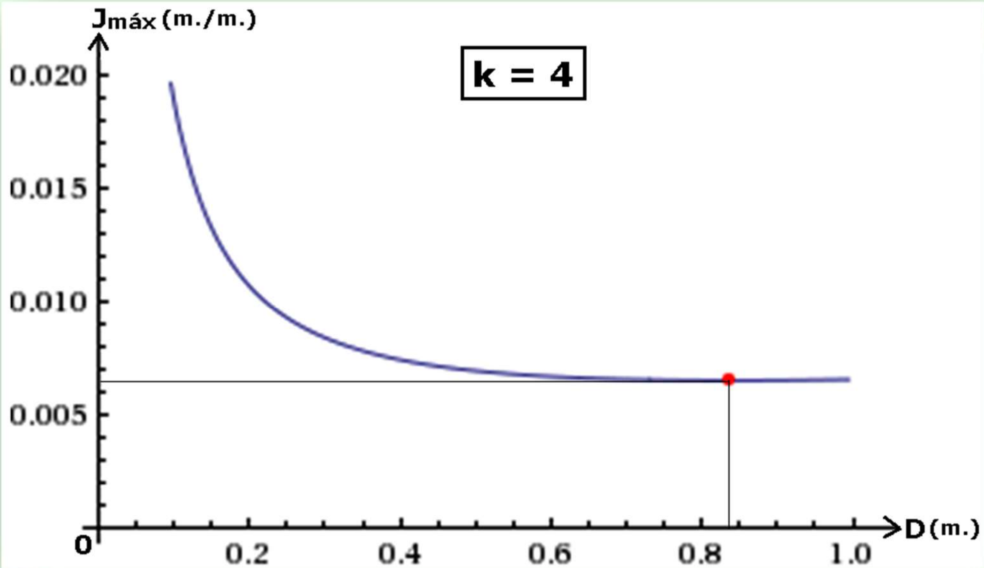



Fig. 4. Mínimo absoluto de J(D) para k = 4.

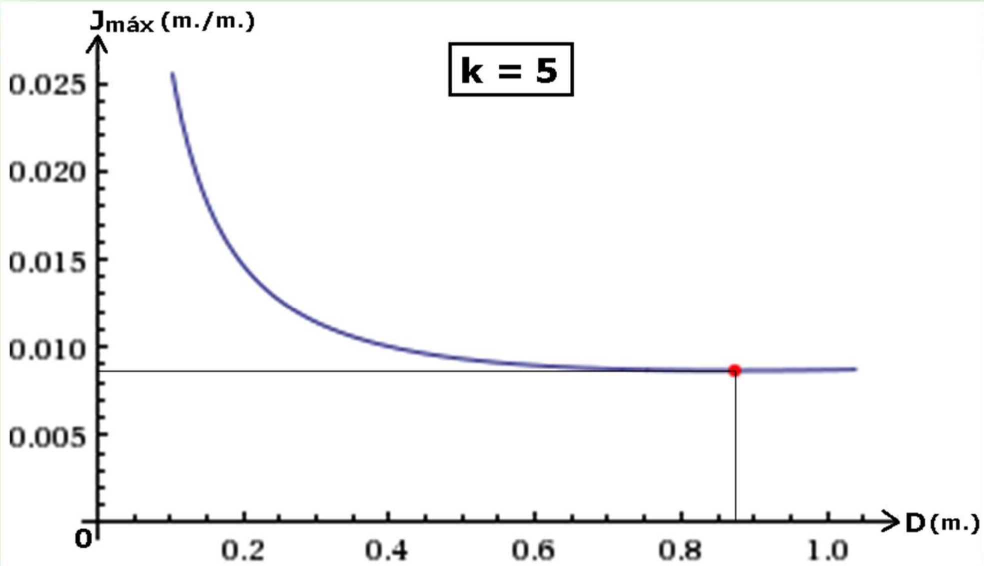



Fig. 5. Mínimo absoluto de J(D) para k = 5.

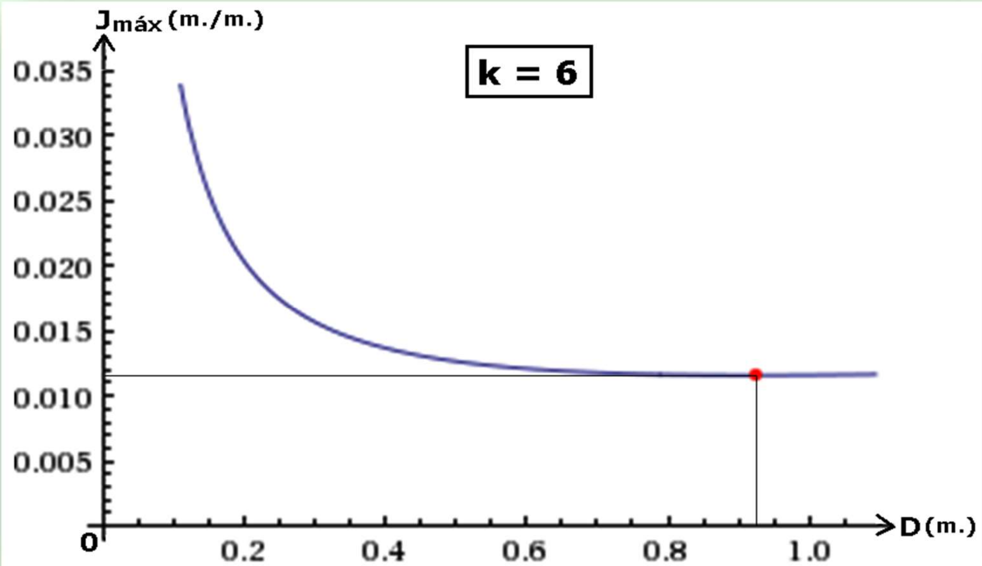



Fig. 6. Mínimo absoluto de J(D) para k = 6.

*Comprobación por reducción de variables*:

La nueva función objetivo a optimizar, de una sola variable, vendrá dada al substituir en ella la ecuación condicionante, esto es:

$$J = 0.002 \times (1.446 \times D + 0.638)^2 \times D^{-1.3308}\text{; y desarrollando:}$$

$$J = 0.002\ (2.0927 \times D^2 + 0.407 + 1.8459 \times D) \times D^{-1.3308}$$

$$= 0.002\ (2.0927 \times D^{0.6692} + 0.407 \times D^{-1.3308} + 1.8459 \times D^{-0.3308});$$

y la condición necesaria o de primer grado exigirá que:

$$J'_D = 0.002\left(1.4004 \times D^{-0.3308} - 0.5416 \times D^{-2.3308} - 0.6106 \times D^{-1.3308}\right) = 0\ ,$$

y operando adecuadamente: $\dfrac{1.4004}{D^{0.3308}} - \dfrac{0.5416}{D^{2.3308}} - \dfrac{0.6106}{D^{1.3308}} = 0$ ; de donde:

$$1.4004 \times D^2 - 0.5416 - 0.6106 \times D = 0\text{; entonces, la única raíz positiva será:}$$

$$D = \frac{0.6106 + \sqrt{0.3729 + 3.0338}}{2.8008} = \frac{0.6106 + 1.8457}{2.8008} = 0.877\ \text{m}\ \text{, c.s.q.d.,}$$

aunque con un proceso resolutivo más corto y sencillo.

La condición suficiente o de segundo grado corrobora la presencia de un mínimo relativo, como puede comprobarse a partir de la 2ª derivada:

$$J''_D = 0.002\left(-0.4633 \times D^{-1.3308} + 1.2624 \times D^{-3.3308} + 0.8126 \times D^{-2.3308}\right) =$$
$$= 0.00252473 \times D^{-3.3308} + 0.00162517 \times D^{-2.3308} - 0.000926505 \times D^{-1.3308},$$

que para D = 0.877 m resulta $J''_D > 0$.

## 5. CONCLUSIONES

Los problemas de extremos condicionados de funciones de varias variables, resueltos mediante la sustitución pertinente empleando la técnica que denominaremos de “reducción de variables” (en alguna ocasión ha recibido también el apelativo de “substitución” o “eliminación”), se reducen a otros con las mismas variables o una variable menos y sin condición restrictiva alguna, lo que simplifica notablemente su resolución.

En el presente Apéndice se han expuesto diversos ejemplos de la Teoría Microeconómica y al final un caso práctico de Hidráulica que ponen de manifiesto, una vez más, la utilidad del procedimiento propuesto de “reducción de variables” en una gran cantidad de casos reales que se presentan en la práctica económica e ingenieril.

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Apéndice III

## TRANSFORMADA DE LAPLACE

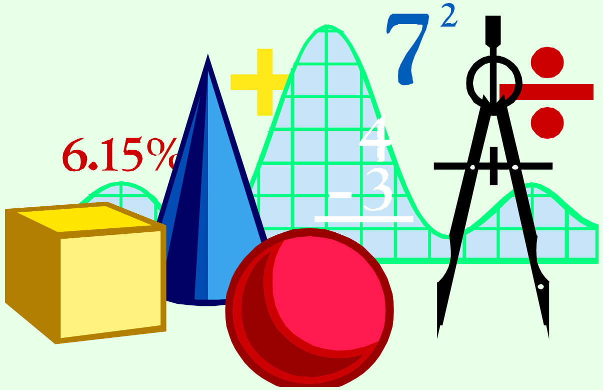
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. INTRODUCCIÓN

La transformada de Laplace (1780), que es un operador lineal como tendremos ocasión de comprobar seguidamente, toma su nombre en honor de aquel gran matemático francés. Constituye una herramienta útil para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que aparecen de forma natural en diversos campos de la ciencia, la técnica y la economía. También resulta particularmente útil para la resolución de las EDP como las que se tratan en el presente , por lo que, a continuación, se incluye un extensa tabla con las funciones generatrices Laplace más usuales y sus correspondientes transformadas.

Para una información más extensa acerca de esta herramienta matemática, puede consultarse el capítulo 7 de nuestra monografía titulada “Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes”, citada en la bibliografía.

Conviene observar que en muchos manuales se utiliza la notación *S* (mayúscula) o *s* (minúscula) por la *p*. Aquí las podremos utilizar indistintamente, especialmente en la resolución de problemas y ejercicios de aplicación, como se puede comprobar en el texto, aunque emplearemos mayoritariamente la *p* en la resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales.

Pues bien, la función $\eta$ del parámetro *p* (que es una variable real arbitraria) que esta integral define en tal campo:

$$\eta(p) = L[y(x)] = \int_0^{\infty} e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx\ ,\ \forall\, x / 0 \leq x < \infty\ ,$$

se denomina *transformada Laplace* de y(x), siendo **L** el llamado *operador de la transformada de Laplace* y siempre y cuando la integral esté definida, mientras que la función **y** se llamará "función generatriz Laplace de $\eta$", y escribiremos: $\eta(p) = L[y(x)]$; o recíprocamente, la transformada inversa: $y(x) = L^{-1}[\eta(p)]$.

A veces, especialmente en el estudio de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales, así como sus sistemas, se utiliza la notación: $\eta = \phi$.

La técnica más simple para identificar las transformadas inversas de Laplace consiste en reconocerlas, ya sea de memoria o bien mediante una tabla más o menos extensa como la que se adjunta posteriormente. Si no se halla en una forma reconocible, entonces ocasionalmente se puede convertir en tal forma mediante una manipulación algebraica, de tal modo que, como sea que casi todas las transformadas de Laplace son cocientes, el procedimiento más adecuado consiste en convertir primero el denominador a una forma que aparezca en la tabla correspondiente y luego el numerador de la fracción en cuestión.

Ello sucede, en fin, para todos los valores de *p* para los cuales la integral impropia converja. La convergencia ocurre cuando existe el límite:

$\lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx$ . Las tablas son:

## 2. TABLAS

| Función generatriz y(x) | Transformada L[y(x)] | Función generatriz y(x) | Transformada L[y(x)] |
|---|---|---|---|
| $K$ | $\frac{K}{p}\quad (p>0)$ | $\mathrm{Sh}\,\omega x$ | $\frac{\omega}{p^2-\omega^2}\quad (p>\lvert\omega\rvert)$ |
| $x^n (n>-1)$, $(p>0)$ | $\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$ | $\mathrm{Ch}\,\omega x$ | $\frac{p}{p^2-\omega^2}\quad (p>\lvert\omega\rvert)$ |
| $x$ | $\frac{1}{p^2}\quad (p>0)$ | $x\cdot\sin\omega x$ | $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}\quad (p>0)$ |
| $K\cdot e^{ax}\quad (p>-a)$ | $\frac{K}{p-a}$ | $\sin\omega x\cdot\mathrm{Sh}\,\omega x$ | $\frac{2\omega^2 p}{p^4+4\omega^4}$ |
| $\sin Kx$ | $\frac{K}{p^2+K^2}\quad (p>0)$ | $\cos\omega x\cdot\mathrm{Ch}\,\omega x$ | $\frac{p^3}{p^4+4\omega^4}$ |
| $\cos Kx$ | $\frac{p}{p^2+K^2}\quad (p>0)$ | $x^n e^{ax}$ | $\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}\quad (n>-1)\ (p>a)$ |
| $\frac{1}{2}(e^{Kx}-e^{-Kx})$ | $\frac{K}{p^2-K^2}$ | $\frac{1-e^{-x}}{x}$ | $l\left(1+\frac{1}{p}\right)$ |
| $\frac{1}{2}(e^{Kx}+e^{-Kx})$ | $\frac{p}{p^2-K^2}$ | $lx$ | $\frac{\Gamma'(1)}{p}-\frac{lp}{p}$ |
| $x^n e^{ax}\ (n>-1)$ | $\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$ | $\frac{\cos\alpha\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$ |
| $e^{ax}\sin Kx$ | $\frac{K}{(p-a)^2+K^2}\quad (p>a)$ | $\frac{\sin\alpha\sqrt{x}}{\pi}$ | $\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}p^{3/2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$ |
| $e^{ax}\cos Kx$ | $\frac{p-a}{(p-a)^2+K^2}\quad (p>a)$ | $\frac{\mathrm{Ch}\,\alpha\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi p}}e^{\frac{\alpha^2}{4p}}$ |
| $\cos(\omega x+K)$ | $\frac{p\cdot\cos K-\omega\cdot\sin K}{p^2+\omega^2}$ | $\frac{\mathrm{Sh}\,\alpha\sqrt{x}}{\pi}$ | $\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}p^{3/2}}e^{\frac{\alpha^2}{4p}}$ |
| Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$ | Función $\eta(p)$ | Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$ | Función $\eta(p)$ |

| Función generatriz y(x) | Transformada L[y(x)] | Función generatriz y(x) | Transformada L[y(x)] |
|---|---|---|---|
| $\sin(\omega x + K)$ | $\frac{p \cdot \sin K + \omega \cdot \cos K}{p^2 + \omega^2}$ | $\sqrt[n]{x} \quad (p > 0)$ | $p^{-(n+1)/n} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ |
| $\frac{x^n}{n!}$ | $\frac{1}{p^{n+1}} \quad (p > 0)$ | $\frac{x^q}{\Gamma(q+1)}$ | $\frac{1}{p^{q+1}} \quad (p > 0)$ |
| $\frac{x^n}{n!} \cdot e^{-\alpha x}$ | $\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}} \quad (p > -\alpha)$ | $e^{-\alpha x}$ | $\frac{1}{p+\alpha} \quad (p > -\alpha)$ |
| $1 - e^{-\alpha x}$ | $\frac{\alpha}{p(p+\alpha)} \quad (p > 0)$ | $\frac{1}{b-a}(e^{-ax} - e^{-bx})$ | $\frac{1}{(p+a)(p+b)} \quad \begin{matrix}(p>-a) \\ (p>-b)\end{matrix}$ |
| $\ln \frac{x}{x_0} \quad (p > 0)$ | $-\frac{x_0}{p}\left[\ln(x_0 \cdot p) + \gamma\right]$ | $\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cdot \cos at)$ | $\frac{1}{(p^2 + a^2)^2}$ |
| $x^{n-1}$ (n = 1, 2, …) | $\frac{(n-1)!}{p^n} \quad (p > 0)$ | $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, p^{-3/2} \quad (p > 0)$ |
| $1\sqrt{x}$ | $\sqrt{\pi}\, p^{-1/2} \ (p > 0)$ | $x^{n-1/2}$ (n = 1, 2, …) | $\frac{(1)(3)(5)\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} p^{-n-1/2}$ $(p > 0)$ |
| $x \cdot \cos ax$ | $\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2} \quad (p > 0)$ | $x^{n-1}e^{ax}$ (n = 1, 2, …) | $\frac{(n-1)!}{(p-a)^n} \quad (p > a)$ |
| $\sin ax - ax \cdot \cos ax$ | $\frac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2} \quad (p > 0)$ | $\frac{1}{a} e^{-x/a}$ | $\frac{1}{1 + ap}$ |
| $\frac{1}{a}(e^{ax} - 1)$ | $\frac{1}{p(p-a)}$ | $1 - e^{-x/a}$ | $\frac{1}{p(1 + ap)}$ |
| $\frac{1}{a^2} x\, 3\, e^{-x/a}$ | $\frac{1}{(1 + ap)^2}$ | $\frac{e^{ax} - e^{bx}}{a - b}$ | $\frac{1}{(p-a)(p-b)}$ |
| $\frac{e^{-x/a} - e^{-x/b}}{a - b}$ | $\frac{1}{(1 + ap)(1 + bp)}$ | $(1 + ax)e^{ax}$ | $\frac{p}{(p-a)^2}$ |
| $\frac{1}{a^3}(a - x)e^{-x/a}$ | $\frac{p}{(1 + ap)^2}$ | $\frac{ae^{ax} - be^{bx}}{a - b}$ | $\frac{p}{(p-a)(p-b)}$ |
| $\frac{ae^{-x/b} - be^{-x/a}}{ab(a-b)}$ | $\frac{p}{(1 + ap)(1 + bp)}$ | $\frac{1}{a^2}(e^{ax} - 1 - ax)$ | $\frac{1}{p^2(p-a)}$ |
| Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$ | Función $\eta(p)$ | Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$ | Función $\eta(p)$ |

| Función generatriz y(x) | Transformada L[y(x)] | Función generatriz y(x) | Transformada L[y(x)] |
|---|---|---|---|
| $\sin^2 ax$ | $\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$ | $\sinh^2 ax$ | $\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$ |
| $\sin\frac{ax}{\sqrt{2}} \sinh\frac{ax}{\sqrt{2}}$ | $\frac{a^2 p}{p^4 + a^4}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\frac{ax}{\sqrt{2}}\sin\frac{ax}{\sqrt{2}} - \sinh\frac{ax}{\sqrt{2}}\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{a^3}{p^4 + a^4}$ |
| $\cos\frac{ax}{\sqrt{2}} \cosh\frac{ax}{\sqrt{2}}$ | $\frac{p^3}{p^4 + a^4}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\sinh\frac{ax}{\sqrt{2}} + \sin\frac{ax}{\sqrt{2}}\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{ap^2}{p^4 + a^4}$ |
| $\frac{1}{2}(\sinh ax - \sin ax)$ | $\frac{a^3}{p^4 - a^4}$ | $\frac{1}{2}(\cosh ax - \cos ax)$ | $\frac{a^2 p}{p^4 - a^4}$ |
| $\frac{1}{2}(\sinh ax + \sin ax)$ | $\frac{as^2}{p^4 - a^4}$ | $\frac{1}{2}(\cosh ax + \cos ax)$ | $\frac{p^3}{p^4 - a^4}$ |
| $\cos ax \cdot \sinh ax$ | $\frac{a(p^2 - 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$ | $\sin ax \cdot \cosh ax$ | $\frac{a(p^2 + 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$ |
| $\frac{1}{2}(\sin ax + ax \cos ax)$ | $\frac{ap^2}{(p^2 + a^2)^2}$ | $\cos ax - \frac{ax}{2}\sin ax$ | $\frac{p^3}{(p^2 + a^2)^2}$ |
| $\frac{1}{2}(ax \cdot \cosh ax - \sinh ax)$ | $\frac{a^3}{(p^2 - a^2)^2}$ | $\frac{x}{2}\sinh ax$ | $\frac{ap}{(p^2 - a^2)^2}$ |
| $\frac{1}{2}(\sinh ax + ax \cosh ax)$ | $\frac{ap^2}{(p^2 - a^2)^2}$ | $\cosh ax + \frac{ax}{2}\sin ax$ | $\frac{p^3}{(p^2 - a^2)^2}$ |
| $\frac{a \cdot \sin bx - b \cdot \sin ax}{a^2 - b^2}$ | $\frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$ | $\frac{\cos bx - \cos ax}{a^2 - b^2}$ | $\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$ |
| $\frac{a \cdot \sin ax - b \cdot \sin bx}{a^2 - b^2}$ | $\frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$ | $\frac{a^2 \cdot \cos ax - b^2 \cdot \cos bx}{a^2 - b^2}$ | $\frac{p^3}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$ |
| $\frac{b \cdot \sinh ax - a \cdot \sinh bx}{a^2 - b^2}$ | $\frac{ab}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$ | $\frac{\cos ax - \cosh bx}{a^2 - b^2}$ | $\frac{p}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$ |
| $\frac{a \cdot \sinh ax - b \cdot \sin bx}{a^2 - b^2}$ | $\frac{p^2}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$ | $\frac{a^2 \cos ax - b^2 \cosh bx}{a^2 - b^2}$ | $\frac{p^3}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$ |
| Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$ | Función $\eta(p)$ | Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$ | Función $\eta(p)$ |

| Función generatriz y(x) | Transformada L[y(x)] | Función generatriz y(x) | Transformada L[y(x)] |
|---|---|---|---|
| $x - \frac{1}{2}\sin ax$ | $\frac{a^2}{p^2(p^2+a^2)}$ | $\frac{1}{a}\sinh ax - x$ | $\frac{a^2}{p^2(p^2-a^2)}$ |
| $1 - \cos ax - \frac{ax}{2}\sin ax$ | $\frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$ | $1 - \cosh ax + \frac{ax}{2}\sinh ax$ | $\frac{a^4}{p(p^2-a^2)^2}$ |
| $1 + \frac{b^2\cos ax - a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$ | $\frac{a^2b^2}{p(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$ | $1 + \frac{b^2\cos ax - a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$ | $\frac{a^2b^2}{p(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$ |
| $\frac{x}{8}[\sin ax - ax\cdot\cos ax]$ | $\frac{a^3p}{(p^2+a^2)^3}$ | $\frac{1}{8}[(3-a^2x^2)\sin ax - 3ax\cdot\cos ax]$ | $\frac{a^5}{(p^2+a^2)^3}$ |
| $\frac{x}{8}(ax\cdot\cosh ax - \sinh ax)$ | $\frac{a^3p}{(p^2-a^2)^3}$ | $\frac{1}{8}[(1+a^2x^2)\sin ax - ax\cos ax]$ | $\frac{a^3p^2}{(p^2+a^2)^3}$ |
| $\frac{1}{n!}(1-e^{-x/a})^n$ | $\frac{1}{p(ap+1)(ap+2)\ldots(ap+n)}$ | $\frac{1}{8}[(3+a^2x^2)\sinh ax - 3ax\cosh ax]$ | $\frac{a^5}{(p^2-a^2)^3}$ |
| $\sin(ax+b)$ | $\frac{p\cdot\sin b + a\cdot\cos b}{p^2+a^2}$ | $\frac{1}{8}[ax\cosh ax - (1-a^2x^2)\sinh ax]$ | $\frac{a^3p^2}{(p^2-a^2)^3}$ |
| $\cos(ax+b)$ | $\frac{p\cdot\cos b - a\cdot\sin b}{p^2+a^2}$ | $e^{-ax} - e^{ax/2}\left[\cos\frac{ax\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{ax\sqrt{3}}{2}\right]$ | $\frac{3a^2}{p^3+a^3}$ |
| $\frac{1+2ax}{\sqrt{\pi x}}$ | $\frac{p+a}{p\sqrt{p}}$ | $e^{-ax}/\sqrt{\pi x}$ | $\frac{1}{\sqrt{p+a}}$ |
| $\frac{1}{2x\sqrt{\pi x}}(e^{bx}-e^{ax})$ | $\sqrt{p-a} - \sqrt{p-b}$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cos 2\sqrt{ax}$ | $\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-a/p}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cosh 2\sqrt{ax}$ | $\frac{1}{\sqrt{p}}e^{a/p}$ | $\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\sin 2\sqrt{ax}$ | $p^{-3/2}e^{-a/p}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\sinh 2\sqrt{ax}$ | $p^{-3/2}e^{a/p}$ | $J_0(2\sqrt{ax})$ | $\frac{1}{p}e^{-a/p}$ |
| $\sqrt{x/a}\cdot J_1(2\sqrt{ax})$ | $\frac{1}{p^2}e^{-a/p}$ | $(x/a)^{(s-1)/2}\cdot J_{s-1}(2\sqrt{ax})$ $(s>0)$ | $p^{-s}e^{-a/p}$ |
| Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$ | Función $\eta(p)$ | Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$ | Función $\eta(p)$ |

| Función generatriz y(x) | Transformada L[y(x)] | Función generatriz y(x) | Transformada L[y(x)] |
|---|---|---|---|
| $J_0(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ | $J_1(x)$ | $\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$ |
| $J_s(x)$ $(s > -1)$ | $\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^s}{\sqrt{p^2+1}}$ | $x^s J_s(ax)$ $\left(s > -\frac{1}{2}\right)$ | $\frac{(2a)^s\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(p^2+a^2)^{s+(1/2)}}$ |
| $\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}$ $(s>0)$ | $\frac{1}{p^s}$ | $\frac{4^n n!}{(2n)!\sqrt{\pi}}\cdot x^{n-(1/2)}$ | $\frac{1}{p^n\sqrt{s}}$ |
| $\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}e^{-ax}$ $(s>0)$ | $\frac{1}{(p+a)^s}$ | $\frac{1-e^{ax}}{x}$ | $\ln\frac{p-a}{p}$ |
| $\frac{e^{bx}-e^{ax}}{x}$ | $\ln\frac{p-a}{p-b}$ | $\frac{2}{x}\sinh ax$ | $\ln\frac{p+a}{p-a}$ |
| $\frac{2}{x}(1-\cos ax)$ | $\ln\frac{p^2+a^2}{p^2}$ | $\frac{2}{x}(\cos bx - \cos ax)$ | $\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$ |
| $\frac{\sin ax}{x}$ | $\arctan\frac{a}{p}$ | $\frac{2}{x}\sin ax\cdot\cos bx$ | $\arctan\frac{2ap}{p^2-a^2+b^2}$ |
| $\sin\|ax\|$ | $\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)\left(\frac{1+e^{-(\pi/a)p}}{1-e^{-(\pi/a)p}}\right)$ | --- | --- |
| Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$ | Función $\eta(p)$ | Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$ | Función $\eta(p)$ |

## 3. NOTAS EXPLICATIVAS DE LAS TABLAS PRECEDENTES

1. $\gamma$ es la constante de Euler-Mascheroni. La **constante de Euler-Mascheroni**, (también conocida *como constante de Euler*), a la que ya nos hemos referido con anterioridad, es una constante matemática que aparece principalmente en la teoría de números, y se denota con la letra griega minúscula γ (gamma). Se define como el límite de la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural o neperiano, a saber:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right] = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{\lfloor x\rfloor} - \frac{1}{x}\right)dx$$

Su valor aproximado es: $\gamma \approx 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,\ldots$

Esta constante apareció por primera vez en el año 1734, en un artículo escrito por Leonhard Euler, denominado *De Progressionibus harmonicis observationes*, calculando los 6 primeros dígitos para la constante y llamándola *C*. En 1781 calcularía otros 10 decimales más. En 1790, Lorenzo Mascheroni calcularía los primeros 19 decimales y la denotaría como *A*. Ya más tarde se denotaría de la forma moderna como γ, debido a su conexión con la función gamma, a la que nos referiremos inmediatamente.

El número γ no se ha probado que sea algebraico o transcendente; de hecho, ni siquiera se conoce si γ es irracional o no. El análisis de fracciones continuas revela que, de ser racional, su denominador debe ser muy elevado (actualmente del orden de $10^{242.080}$). Debido a que está presente en un gran número de ecuaciones y relaciones, la racionalidad o irracionalidad de γ se halla, sin duda, entre los problemas abiertos más importantes de las matemáticas.

2. $\Gamma(q)$ representa función gamma o integral euleriana de segunda especie. Integrando por partes en dicha función, se obtiene: $\Gamma(q) = \int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{q-1}\cdot dx$ ; $u = x^{q-1}$; $dv = e^{-x}\cdot dx$; $du = (q-1)\cdot x^{q-2}\cdot dx$; $v = -e^{-x}$; con lo que:

$$\Gamma(q) = \left[-e^{-x}\cdot x^{q-1}\right]_0^{\infty} + (q-1)\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{q-2}\cdot dx = (q-1)\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^{q-2}\cdot dx = (q-1)\cdot\Gamma(q-1).$$

Reiterando el procedimiento, se tendrá que: $\Gamma(q) = (q-1)(q-2) \ldots (q-k)\cdot\Gamma(q-k)$.

En el caso particular de que *q* sea un número natural (o sea, entero positivo), la aplicación de la expresión anterior conduce a la siguiente:

$$\Gamma(q) = (q-1)! \quad (\forall q \in \{\mathbf{N}\})$$

puesto que: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\cdot dx = 1$ . Una expresión que se presenta con frecuencia, es la que se obtiene mediante el cambio de variable: $x = t^2$. En efecto:

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{q-1}\cdot dx = \int_0^\infty e^{-t^2}\cdot t^{2q-2}\cdot 2t = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\cdot t^{2p-1}\cdot dt \ .$$

Así mismo, el cambio $x = mt$, conduce análogamente a:

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{q-1}\cdot dx = \int_0^\infty e^{-mt}\cdot(mt)^{q-1}\cdot m\cdot dt = m^q\int_0^\infty e^{-mt}\cdot t^{q-1}\cdot dt \ .$$

3. Las funciones de Bessel de primera especie y orden $\alpha$ que aparecen en la tabla anterior son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen ($x = 0$) para enteros no negativos $\alpha$ y divergen en el límite $x \to 0$ para $\alpha$ negativo no entero. El tipo de solución y la normalización de $J_\alpha(x)$ están definidos por sus propiedades. Es posible definir la función $J_\alpha(x)$ por su expansión en serie de Taylor en torno a $x = 0$. Las **funciones de Bessel**, primero definidas por el matemático Daniel Bernouilli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas *y(x)* de la ecuación diferencial de Bessel, a saber:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

, donde $\alpha$ es un número real o complejo. El caso más común es cuando $\alpha$ es un número entero *n*, aunque la solución para $\alpha$ no entero es similar. El número $\alpha$ se denomina *orden* de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación. Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y coeficientes variables, tiene dos soluciones linealmente independientes. Aunque $\alpha$ y $-\alpha$ dan como resultado la misma función, es conveniente definir diferentes funciones de Bessel para estos dos parámetros, pues las funciones de Bessel en función del parámetro $\alpha$ son funciones suaves casi doquiera. Las funciones de Bessel se denominan también *funciones cilíndricas*, o bien *armónicos cilíndricos* porque son solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas (Franquet, 2019).

Para su aplicación a la resolución de las ecuaciones diferenciales, resulta fundamental la obtención de L[y’(x)] expresada en función de L[y(x)], o sea:

$$L[y'(x)] = \int_0^\infty e^{-px} y'(x)dx = y(x)\cdot e^{-px}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px} y(x)dx =$$
$$= -y(0) + p\cdot L[y(x)] = -y(0) + p\cdot\eta(p)$$

, después de integrar por partes.

Análogamente se obtiene que: $L\left[\int_0^x y(x)dx\right] = \int_0^\infty e^{-px}dx \int_0^x y(x)dx = \frac{\int_0^\infty e^{-px} y(x)dx}{p} = \frac{L[y(x)]}{p}$

, que resulta de gran utilidad en la resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales que se estudian en el presente curso .

Un teorema de la máxima importancia es el correspondiente al producto de transformadas o de “convolución”.

Sean, en efecto, dos funciones $y_1(x)$, $y_2(x')$, tales que:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1(p) &= L[y_1(x)] = \int_0^\infty e^{-px}\cdot y_1(x)\cdot dx \\ \eta_2(p) &= L[y_2(x')] = \int_0^\infty e^{-px'}\cdot y_2(x')\cdot dx' \end{aligned}\right\}$$

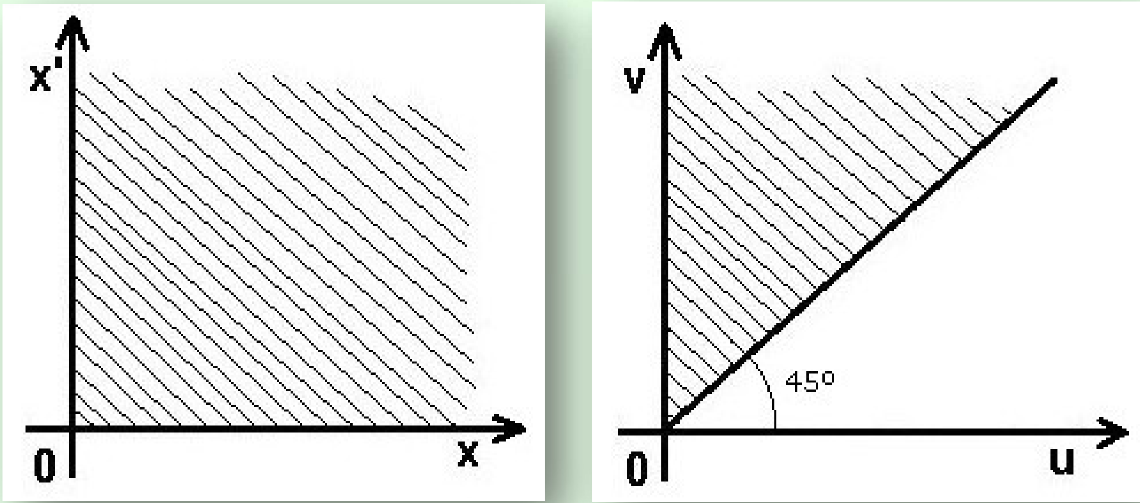
El producto de las transformadas será: $\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(x+x')} y_1(x)\cdot y_2(x')\cdot dx\cdot dx'$ .

Mediante el cambio de variable: u = x, v = x + x’, es decir, que resulta: x = u; x’ = v – u; cuyo determinante funcional jacobiano de la transformación es la unidad, puesto que:

$$J = \frac{\partial\,(x\cdot x')}{\partial\,(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

En cuanto al recinto o dominio de integración (cuadrante positivo del círculo, x>0, x'>0) se transforma en el u>0, v>u (véanse a continuación los recintos de las figuras anexas), que es el ángulo de 45º sexagesimales = $50^g$ centesimales = $\pi/4$ radianes, rayado en la figura correspondiente. A saber:

Dominios de integración:




Por lo tanto, se obtiene que: $\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = \int_0^\infty e^{-pv}\left[\int_0^v y_1(u)\cdot y_2(v-u)\cdot du\right]\cdot dv$

A la integral combinada entre ambas funciones, $\int_0^v y_1(x)\cdot y_2(v-x)\cdot dx$ , se le llama "producto de convolución" (plegamiento o *faltung* en idioma alemán), "convolución" o bien "producto compuesto" de las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ y se representa por $y_1(x)*y_2(x)$, esto es:

$\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = L[y_1(x) * y_2(x)]$ , de donde: $y_1(x) * y_2(x) = L^{-1}[\eta_1(p)\cdot\eta_2(p)] = y_2(x) * y_1(x)$.

Si una de las dos convoluciones en la ecuación anterior es más simple de calcular, entonces se elige esa convolución cuando se determina la transformada inversa de Laplace de un producto. En definitiva, veamos que el "producto de convolución" de sendas funciones es el producto ordinario de sus transformadas. Por lo tanto, la generatriz del producto ordinario de dos funciones es el producto de convolución de sus generatrices (Franquet, 2013).

## 4. EJEMPLOS

### Ejemplo 1

Resolver la EDO: $y^{(4)} - y = 0$; con: $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = -1$; $y'''(0) = 0$ .

*Solución*:

$S^4 y_S - S^3 y(0) - S^2 y'(0) - S y''(0) - y'''(0) - y_S = 0$; $S^4 y_S - S^3 + S - y_S = 0$;

$y_S(S^4 - 1) = S^3 - S$; $y_s = \dfrac{S(S^2-1)}{(S^4-1)} = \dfrac{S(S^2-1)}{(S^2+1)(S^2-1)} = \dfrac{S}{S^2+1}$ ; y, en definitiva,

resulta la I.P. buscada: $y(x) = L^{-1}\left\{\dfrac{S}{S^2+1}\right\} = \cos x$ .

Por aplicación alternativa del método clásico, se tendrá la siguiente ecuación característica de la homogénea: $\lambda^4 - 1 = 0$ ; que tiene las 4 raíces: $\lambda_1 = 1$ ; $\lambda_2 = -1$ ; $\lambda_3 = i$ ; $\lambda_4 = -i$ , con lo que la I.G. será:

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + A \cdot \cos x + B \cdot \sin x,$$

y aplicando las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + A = 1; \\ y'(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} - A \cdot \sin x + B \cdot \cos x \\ y'(0) = c_1 - c_2 + B = 0; \\ y''(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} - A \cdot \cos x - B \cdot \sin x \\ y''(0) = c_1 + c_2 - A = -1; \\ y'''(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} + A \cdot \sin x - B \cdot \cos x \\ y'''(0) = c_1 - c_2 - B = 0; \end{cases}$$

con lo que tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + A = 1 \\ c_1 - c_2 + B = 0 \\ c_1 + c_2 - A = -1 \\ c_1 - c_2 - B = 0 \end{cases}$$ , del que se deduce que:

$c_1 = c_2 = B = 0$; $A = 1$, con lo que la solución particular buscada será, efectivamente:

$$\boxed{y(x) = \cos x}$$ c. s. q. d.

Obsérvese la mayor prolijidad del sistema de resolución empleado en segundo lugar, lo que pone de manifiesto la utilidad del empleo de la Transformada de Laplace (en la mayoría de los casos) para la resolución de este tipo de problemas.

## Ejemplo 2

Calcular: $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{S^3+4S}\right\}$

*Solución:*

Observamos que: $\dfrac{1}{S^3+4S} = \dfrac{1}{S(S^2+4)} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{S^2+4}\right)}{S} = \dfrac{F(S)}{S}$

Por lo tanto: $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{S^3+4S}\right\} = \int_0^t f(u)\cdot du$ , donde:

$F(S) = \dfrac{1}{S^2+4}$ y $f(t) = L^{-1}\{F(S)\} = \dfrac{1}{2}L^{-1}\left\{\dfrac{2}{S^2+4}\right\} = \dfrac{1}{2}\sin 2t = \sin t \cdot \cos t.$

De esta manera se tendrá que:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{S^3+4S}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2u\cdot du = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cos 2u\Big|_0^t \boxed{=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)} \ .$$

## Ejemplo 3

Resolver la ecuación integral: $f(t) + \int_0^t f(u)\cdot du = 1$ .

*Solución:*

Aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(t) + \int_0^t f(u)\cdot du\right\} = L\{1\} \Rightarrow L\{f(t)\} + L\left\{\int_0^t f(u)\cdot du\right\} = L\{1\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{1}{S} ,$$

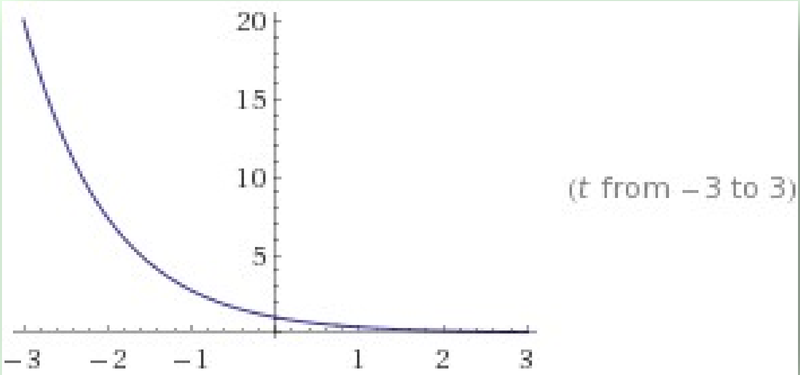
donde: $f(t) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

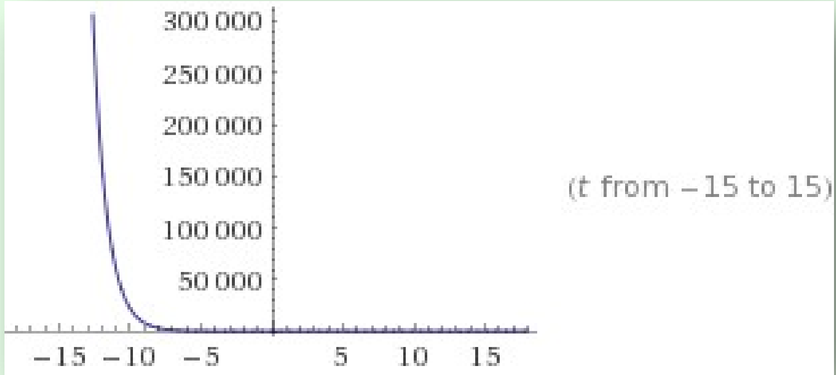
$$SF(S) + F(S) = 1 \Rightarrow F(S)(S+1) = 1 \Rightarrow F(S) = \frac{1}{S+1} .$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado, a saber:

$$\boxed{f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{S+1}\right\} = e^{-t}} \to \text{I.G.}$$

La representación gráfica de esta solución particular de la ecuación integral de Volterra propuesta (ver lección 22), de 2ª especie o clase, que es evidentemente una función exponencial inversa, se expone a continuación con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas:




## 5. TRANSFORMADA DE UNA INTEGRAL Y OTROS EJEMPLOS

Esta propiedad, de gran utilidad en el cálculo y resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales (que ha sido empleada para la resolución del ejemplo anterior), establece que:

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(S), \text{ entonces } \int_0^t f(u)\cdot du \leftrightarrow \frac{F(S)}{S}$$

Si definimos la función: $g(t) = \int_0^t f(u)\cdot du$, entonces, por el teorema fundamental del Cálculo Integral, se tendrá que:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(u)\cdot du = f(t) \quad \text{y} \quad g(0) = \int_0^0 f(u)\cdot du = 0$$

Por lo tanto: $F(S) = L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = SG(S) - g(0)$.

De donde también: F(S) = SG(S), y de aquí:

$$G(S) = L\{g(t)\} = L\left\{ \int_0^t f(u)\cdot du \right\} = \frac{F(S)}{S} \ .$$

Así pues, resulta que la transformada de la integral indefinida de una función (supuesta existente) es el cociente de la transformada de la función por su variable S.

A continuación, pueden verse los siguientes ejemplos de aplicación a sendos sistemas de EDO lineales y un último referente a circuitos eléctricos:

**Ejemplo 1**

Sea resolver el siguiente sistema de EDO: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dT} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dT} = 5x - y \end{cases}$, con las condiciones iniciales siguientes: $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$. *Solución*:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - 2y \\ y' &= 5x - y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} Sx_s - x(0) &= x_s - 2y_s \\ Sy_s - y(0) &= 5x_s - y_s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} Sx_s + 1 &= x_s - 2y_s \\ Sy_s - 2 &= 5x_s - y_s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} Sx_s - x_s + 2y_s &= -1 \\ Sy_s + y_s - 5x_s &= 2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &[x_s(S-1) + 2y_s = -1](5) \\ &[-5x_s + y_s(S+1) = 2](S-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &5x_s(S-1) + 10y_s = -5 \\ &\underline{-5x_s(S-1) + y_s(S+1)(S-1) = 2(S-1)} \\ &10y_s + y_s(S+1)(S-1) = -5 + 2S - 2 \\ &y_s(10 + S^2 - 1) = 2S - 7 \\ &y_s(S^2 + 9) = 2S - 7 \\ &y_s = \frac{2S}{S^2+9} - \frac{7}{S^2+9} \Rightarrow y(T) = 2\cos 3T - \frac{7}{3}\sin 3T \end{aligned}$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$10x_s - 2y_s(S+1) = -4$$

$$\left.\begin{array}{l}[x_s(S-1)+2y_s = -1](S+1)\\ [-5x_s + y_s(S+1) = 2](-2)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_s(S-1)(S+1)+2y_s(S+1) = -1(S+1) \\ \hline x_s(S-1)(S+1)+10x_s = -1(S+1)-4 \\ x_s(S^2-1+10) = -S-5 \end{array}$$

$$x_s = \frac{-S}{S^2+9} - \frac{5}{S^2+9} \Rightarrow x(T) = -\cos 3T - \frac{5}{3}\sin 3T$$

y la solución buscada será la siguiente:

$$\boxed{y(T) = 2\cos 3T - \frac{7}{3}\sin 3T} \qquad \boxed{x(T) = -\cos 3T - \frac{5}{3}\sin 3T}$$

, y entonces también se cumple que: x(T) + y(T) = cos 3T – 4·sin 3T.

En cualquier caso, la solución general del sistema planteado viene dada por:

$$\begin{cases} x(T) = \dfrac{c_1}{3}(\sin 3T + 3\cos 3T) - \dfrac{2c_2}{3}\sin 3T \\[2ex] y(T) = \dfrac{5c_1}{3}\sin 3T + \dfrac{c_2}{3}(3\cos 3T - \sin 3T) \end{cases}$$

que con las condiciones de contorno dadas exige:

$x(0) = c_1 = -1$; $y(0) = c_2 = 2$; consecuentemente, se tendrá que:

$$\begin{cases} x(T) = -\dfrac{\sin 3T}{3} - \cos 3T - \dfrac{4}{3}\sin 3T = -\cos 3T - \dfrac{5}{3}\sin 3T \quad \text{, y también:} \\[2ex] y(T) = -\dfrac{5\sin 3T}{3} + 2\cos 3T - \dfrac{2}{3}\sin 3T = 2\cos 3T - \dfrac{7}{3}\sin 3T \quad \text{, c.s.q.d.} \end{cases}$$

## Ejemplo 2

Resuelva el siguiente sistema de EDO para las funciones desconocidas u(x) y v(x):

$$\begin{cases} u' + u - v = 0 \\ v' - u + v = 2, \text{ con las condiciones iniciales: } u(0) = 1,\ v(0) = 2. \end{cases}$$

*Solución:*

Indicaremos L{u(x)} y L{v(x)} por U(s) y V(s), respectivamente. Tomando las transformadas de Laplace en ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos:

$$\begin{cases} [sU(s) - 1] + U(s) - V(s) = 0\ ;\ \ [sV(s) - 2] - U(s) + V(s) = 2/s \\ (s + 1)U(s) - V(s) = 1, \text{ o bien: } -U(s) + (s + 1)V(s) = \dfrac{2(s+1)}{s} \end{cases}$$

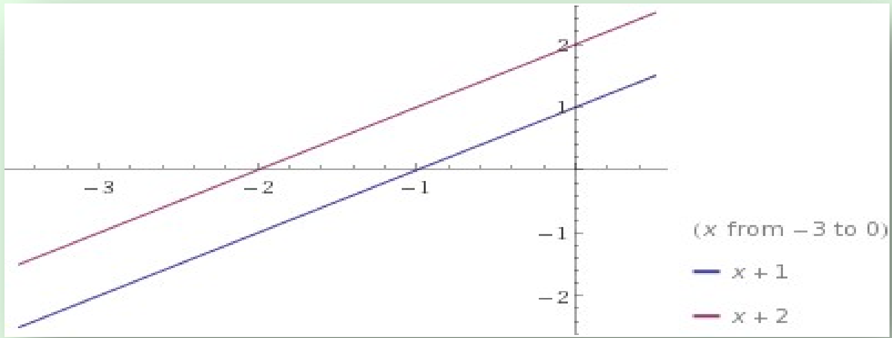
La solución de este último conjunto de ecuaciones lineales simultáneas es:

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2} \text{ , y } \quad V(s) = \frac{2s+1}{s^2}$$

Tomando ahora las transformadas inversas, obtenemos:

$$\begin{cases} u(x) = L^{-1}\{U(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2}\right\} = 1 + x \\ v(x) = L^{-1}\{V(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{2s+1}{s^2}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s^2}\right\} = 2 + x \end{cases}$$

La representación gráfica de las dos funciones anteriores en el entorno del origen de coordenadas es la siguiente:



## Ejemplo 3

Aplicar la transformada de Laplace para hallar la carga q(T) en el capacitor (condensador) de un circuito ¨RC¨ en serie cuando: q(0) = 0, la resistencia R = 50 Ω, la capacidad c = 0'01 faradios y la función:

E(T) = 50u(T-1)-50u(T-3).

*Solución:*

Como siempre, se tendrá que la ecuación diferencial de la carga en este circuito es:

$R\dfrac{dq}{dT}+\dfrac{q}{c}=E(T)$ , y substituyendo los valores dados en la función se obtiene que:

$$50\frac{dq}{dT}+\frac{1}{0'01}q=50u(T-1)-50u(T-3)$$

$$50(Sq_s-q(0))+100q_s=\frac{50e^{-S}}{S}-\frac{50e^{-3S}}{S};q_s=\frac{e^{-S}}{S(S+2)}-\frac{e^{-3S}}{S(S+2)}$$

$\dfrac{A}{S}+\dfrac{B}{S+2}=\dfrac{1}{S(S+2)}$, e identificando coeficientes indeterminados se obtendrá : $AS+2A+BS=1;A+B=0\Rightarrow A=\tfrac{1}{2}\Rightarrow B=-\tfrac{1}{2}$, con lo que :

$$q(T)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{S}\right\}e^{-S}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{S+2}\right\}e^{-S}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{S}\right\}e^{-3S}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{S+2}\right\}e^{-3S}$$

, y la solución o integral particular buscada será:

$$\boxed{q(T)=\frac{1}{2}u(T-1)-\frac{1}{2}e^{-2(T-1)}u(T-1)-\frac{1}{2}u(T-3)+\frac{1}{2}e^{-2(T-3)}u(T-3)}\ .$$

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Apéndice IV

## TEORÍA MATRICIAL ELEMENTAL

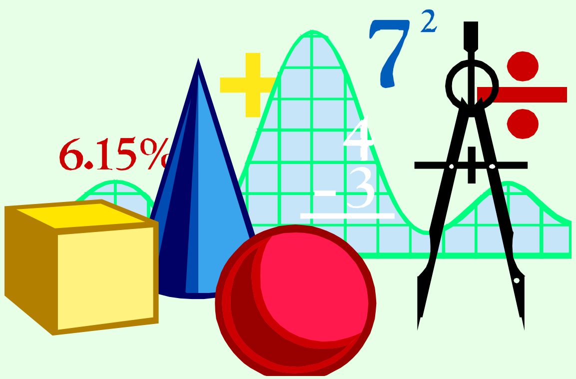
PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE





## 1. CONCEPTOS GENERALES SOBRE MATRICES

El concepto de “matriz” se fraguó a lo largo de los siglos XVIII y XIX con el objetivo de sistematizar los métodos de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales con numerosas incógnitas. En la actualidad, la teoría de matrices se ha convertido en una poderosa herramienta al servicio de muchas disciplinas científicas, desde la física y las ciencias naturales hasta la economía, como podemos comprobar por lo que se refiere a su utilidad en la resolución de los problemas de ecuaciones diferenciales y recurrentes, así como en sus sistemas.

Las matrices surgen del estudio de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. Sea el sistema de ecuaciones lineales genérico siguiente, de *m* ecuaciones con *n* incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Los coeficientes de las incógnitas de este sistema se pueden escribir, por convenio, de esta forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se trata, pues, de un conjunto de N números dispuestos en m filas y n columnas, tales que m × n = N.

Una matriz se suele representar por una letra mayúscula y los elementos de dicha matriz se representan por la correspondiente letra minúscula con dos subíndices que indican la fila y columna que denotan la posición del elemento. Por ejemplo la matriz A y el elemento $a_{12}$ (elemento de la fila 1, columna 2).

En esencia, una ***matriz*** se define como un conjunto de números o expresiones numéricas que se ordenan como una tabla de líneas denominadas ***filas*** y ***columnas***. Cada una de las intersecciones de filas o columnas se denomina ***elemento*** de la matriz, y contiene un número o una expresión funcional.

En sentido genérico, los elementos de la matriz se simbolizan por $a_{ij}$, siendo *i* el número de fila y *j* el número de columna que ocupan. Las matrices también se representan por la notación A = ($a_{ij}$), con i = 1, 2, 3, ..., m, y j = 1, 2, 3, ..., n. También como [A] .

Una matriz formada por m filas y n columnas se dice que tiene ***orden*** o ***dimensión*** (m $\times$ n). Dos matrices del mismo orden se consideran iguales cuando son iguales, dos a dos, los elementos que ocupan el mismo lugar.

Así pues, se denomina ***matriz*** a todo conjunto de números o expresiones dispuestos en forma rectangular, formando filas y columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Así pues, cada uno de los números de que consta la **matriz** se denomina ***elemento***. Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, por la **fila** y la **columna** a las que pertenece.

## 2. CLASES DE MATRICES

En términos generales, una matriz tiene **m** filas y **n** columnas, siendo ($m \times n$). En tal caso, la matriz se llama ***rectangular***. Ahora bien, cuando el número de filas y el de columnas coinciden, la matriz es ***cuadrada***, con dimensión ($n \times n$); en este caso, los elementos de la matriz de subíndices $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, ..., $a_{nn}$ ocupan la llamada ***diagonal principal*** de la matriz y sus elementos se denominan *principales*. Esta diagonal adquiere importancia en la resolución de los ***determinantes*** que contemplaremos con posterioridad. Los elementos que conforman la diagonal perpendicular a la anterior son los *secundarios* y forman la *diagonal secundaria*. Los elementos $a_{ij}$ y $a_{ji}$ son "conjugados o simétricos" respecto de la diagonal principal.

La ***matriz rectangular*** tiene, pues, distinto número de filas que de columnas, siendo su ***dimensión m x n***. Ejemplo ($2 \times 3$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La ***matriz cuadrada*** tiene el mismo número de filas que de columnas. Los elementos de la forma $\mathbf{a_{ii}}$ constituyen la ***diagonal principal*** (la que va desde el ángulo superior izquierdo al ángulo inferior derecho). La ***diagonal secundaria*** (la que va del ángulo superior derecho al ángulo inferior izquierdo) la forman los elementos con **i + j = n + 1**. Puede verse, al respecto, el siguiente ejemplo en una matriz de dimensiones ($3 \times 3$), o sea, de tercer orden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada se denomina ***triangular*** cuando todos los elementos situados por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.

Una matriz se denomina ***diagonal*** cuando todos los elementos, excepto los de la diagonal principal, son cero. Así tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \text{ (Matriz diagonal)}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \text{ (Matriz triangular)}$$

Otro concepto importante en la teoría de matrices es el de matriz ***traspuesta*** o bien ***transpuesta***. Dada una matriz **A** de orden m x n, su traspuesta, denotada por $\mathbf{A}^t$, es otra matriz de dimensiones n × m, donde se han intercambiado las filas de la primera matriz por columnas y las columnas por filas. Así pues, dada una matriz cualquiera **A**, se llama ***matriz traspuesta*** de **A** a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas, como por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

, con las siguientes propiedades de la transposición de matrices:

$$\begin{cases} (A^t)^t = A \\ (A + B)^t = A^t + B^t \\ (\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t \\ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \end{cases}$$

En la teoría de homomorfismos, es de notar que si **A** describe una aplicación lineal respecto a dos bases, entonces la matriz $\mathbf{A}^t$ describe la transpuesta de una aplicación lineal respecto a las bases del espacio dual.

Otros conceptos relevantes en la teoría de matrices son los siguientes:

a) Matriz fila (vector fila)

Una ***matriz fila*** está constituida por una sola fila. Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) Matriz columna (vector columna)

La ***matriz columna*** tiene una sola columna. Ejemplo: $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Las matrices fila y columna se denominan habitualmente *vectores fila o columna, respectivamente*.

c) Matriz nula

En una ***matriz nula*** **0** todos los elementos son ceros. Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) Matriz triangular superior

En una ***matriz triangular superior*** los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e) Matriz triangular inferior

En una ***matriz triangular inferior*** los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

f) Matriz escalar

Una ***matriz escalar*** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son todos iguales. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

g) Matriz identidad o unidad

Una ***matriz identidad*** **I** es una matriz diagonal y escalar en la que los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

h) Matriz regular

Una ***matriz regular*** es una matriz cuadrada que tiene inversa, puesto que su determinante es diferente de 0.

i) Matriz singular o no regular

Una ***matriz singular*** no tiene matriz inversa. Constituye el caso contrario de la anterior, con su determinante nulo.

j) Matriz idempotente

Una matriz, A, es ***idempotente*** si es simétrica y cumple que su cuadrado es la propia matriz, con lo que:

$$\left.\begin{array}{l} A^t = A \\ A^2 = A \end{array}\right\} A^t = A^2$$

k) Matriz involutiva

Una matriz, A, es ***involutiva*** si: $\mathbf{A^2 = I}$.

l) Matriz simétrica

Una **matriz *simétrica*** es una matriz cuadrada que, al ser igual a su traspuesta, verifica: $\mathbf{A = A^t}$.

m) Matriz antisimétrica, hemisimétrica o alternada

Una **matriz *antisimétrica, hemisimétrica*** *o* ***alternada*** es una matriz cuadrada que verifica: $\mathbf{A = -A^t}$.

n) Matriz ortogonal

Una matriz es ***ortogona*l** si verifica que: $\mathbf{A \cdot A^t = I}$.

o) Matriz adjunta

Es la matriz que se obtiene al substituir cada elemento por su adjunto correspondiente.
O sea:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

p) Matriz nilpotente

Es la matriz de orden **n** tal que: $A^n = 0$.

q) Matriz de permutación

Es aquella que en cada fila y columna tiene un elemento igual a 1, y los demás son iguales a 0. Un ejemplo sería la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 3. DIMENSIÓN DE UNA MATRIZ

El número de filas y columnas de una matriz se denomina ***dimensión*** de una matriz. Así, una matriz será de dimensión: $(2\times4)$, $(3\times2)$, $(2\times5)$,... Si la matriz tiene el mismo número de filas que de columnas (matriz cuadrada), se dice que es de orden: 2, 3, ... n.

El conjunto de matrices de **m** filas y **n** columnas se denota por $\mathbf{A_{mxn}}$ o bien $\mathbf{(a_{ij})}$, y un elemento cualquiera de la misma, que se encuentra en la fila **i** y en la columna **j**, se representa por $\mathbf{a_{ij}}$.

## 4. MATRICES IGUALES

Dos matrices son *iguales* cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas (homólogos), son iguales.

## 5. OPERACIONES CON MATRICES

### 5.1. Suma algebraica de matrices

Dadas dos matrices de la misma dimensión o equidimensionales, $\mathbf{A = (a_{ij})}$ y $\mathbf{B = (b_{ij})}$, se define la matriz suma como: $\mathbf{A + B = (a_{ij} + b_{ij})}$.

La matriz suma se obtiene, pues, sumando algebraicamente los elementos de las dos (o más) matrices que ocupan la misma posición (elementos homólogos). Así, por ejemplo, se desea obtener la suma y la diferencia de las matrices A y B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo podría ser el siguiente: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

## 5.2. Propiedades de la suma de matrices

a) Ley de composición interna, propiedad uniforme o conjunto cerrado:
La suma de dos matrices de orden ($m \times n$) es otra matriz dimensión ($m \times n$).

b) Asociativa:
**A + (B + C) = (A + B) + C**

c) Elemento neutro:
**A + 0 = A**
Donde **0** es la matriz nula de la misma dimensión que la matriz A.

d) Elemento opuesto o simétrico:
**A + (−A) = 0**
La matriz opuesta es aquella en que todos los elementos están cambiados de signo. Sumada algebraicamente a la matriz inicial nos ofrece el elemento neutro.

e) Conmutativa:
**A + B = B + A**

Este conjunto de propiedades hacen que, respecto de la operación adición, el conjunto de las matrices equidimensionales constituye un GRUPO CONMUTATIVO O ABELIANO.

Todo ello puede resumirse en el siguiente cuadro:

| PROPIEDADES DE LAS MATRICES | |
|---|---|
| **Propiedad** | Expresión y significado. |
| **Conmutativa** | A + B = B + A. |
| **Asociativa** | A + (B + C) = (A + B) + C. |
| **Elemento neutro** | A + 0 = 0 + A = A, siendo 0 la matriz nula, aquella que, con el mismo orden que A, tiene todos sus elementos iguales a cero. |
| **Elemento opuesto o simétrico** | A + (-A) = (-A) + A = 0, donde la matriz (-A) se llama "opuesta" de la matriz A, y 0 corresponde a la matriz nula para la dimensión de A. |

### 5.3. Producto de un escalar por una matriz

Dada una matriz A = $(a_{ij})$ y un número real k $\in$ {**R**}, se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz del mismo orden que A, en la que cada elemento está multiplicado por k.
Así: $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$, o sea:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Con las siguientes propiedades:

-Asociativa: $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$, $\forall$ A $M_{mxn}$, y: a, b $^2$

-Distributiva respecto a la adición de matrices: $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$, $\forall$ A,B $M_{mxn}$ , y: a

-Distributiva respecto a la adición de parámetros: $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$, $\forall$ A $M_{mxn}$ , y: a, b $^2$

-Elemento neutro: $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$, $\forall$ A $M_{mxn}$

-Compatibilidad: Si $A = B \Rightarrow a \cdot A = a \cdot B$

Luego el sistema lineal $\{M_{mxn}\}$ tiene estructura algebraica de espacio vectorial (EV).

## 5.4. Producto de matrices

Dos matrices A y B son "multiplicables" o "conformes" si el número de columnas de A ($m \times n$) coincide con el número de filas de B (nxp). El resultado es otra matriz producto C ($m \times p$) que tiene el mismo número de filas que la matriz multiplicando A y el mismo número de columnas de la matriz multiplicador B. Así:

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

El elemento $c_{ij}$ de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila **i** de la matriz A por cada elemento de la columna **j** de la matriz B y sumándolos, siguiendo la denominada REGLA DE BINET-CAUCHY.

En definitiva, la matriz resultante $C = (c_{ij})$ se calcula de forma que cada uno de sus términos $c_{ij}$ es igual a la suma ordenada de los productos de los elementos de la fila **i** de A por los de la columna **j** de B: primer elemento de la fila **i** de A por primer elemento de la columna **j** de B; más el segundo de la fila **i** por el segundo de la columna **j**, y así sucesivamente.

Ejemplo:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Con las siguientes propiedades:

-Ley de composición interna, propiedad uniforme o conjunto cerrado: el producto de matrices es otra matriz.

-Asociativa:

$\mathbf{A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C}$

-Elemento neutro:

$\mathbf{I_n \cdot A = A \cdot I_m = A}$

, donde $\mathbf{I_n}$ **e** $\mathbf{I_m}$ son las matrices identidad o unidad cuadradas con su orden respectivo.

-No es Conmutativa necesariamente:

$\mathbf{A \cdot B \neq B \cdot A}$, por lo que hay que distinguir entre la "premultiplicación" (producto por la izquierda) y la "postmultiplicación" (producto por la derecha).

-Distributiva del producto respecto de la suma, por la derecha y por la izquierda:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C} \\ \mathbf{(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C} \end{array}\right\}$$

De todo ello se deduce que el conjunto de las matrices cuadradas tiene estructura de ANILLO UNITARIO NO CONMUTATIVO con respecto a las dos operaciones internas "+" y "·".

-Otra propiedad, que resulta como consecuencia inmediata de las anteriores, es que:

$$\mathbf{0 \cdot A = A \cdot 0 = 0}$$

## 5.5. Potencia de una matriz

Como ampliación del concepto de producto, puede definirse la *potencia enésima de una matriz* como el producto de ésta por sí misma *n* veces. Para que una matriz pueda multiplicarse por sí misma tiene que ser cuadrada. Es decir:

$$A^n = A \cdot A \cdot A \cdot \overset{n)}{\ldots\ldots} \cdot A.$$

## 6. DETERMINANTES

### 6.1. Definición

A toda matriz cuadrada le corresponde, mediante una aplicación inyectiva (a dos elementos distintos del primer conjunto corresponden dos elementos distintos del segundo conjunto) un número real; a esta aplicación la denominamos "determinante".

El determinante de la matriz cuadrada de segundo orden A se designa por |A|, o sea: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

El valor del determinante de esta matriz, que tiene dos términos (uno positivo y otro negativo) es: $a_{11}\times a_{22} - a_{12}\times a_{21}$, por aplicación de la denominada *Regla de Sarrus*. Así mismo, en el caso de una matriz cuadrada de tercer orden, se tiene:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

En este caso, el valor del determinante de esta matriz, que tiene seis términos en su desarrollo (tres positivos y tres negativos) es:

$$a_{11}\times a_{22}\times a_{33} + a_{21}\times a_{32}\times a_{13} + a_{31}\times a_{12}\times a_{23} - a_{13}\times a_{22}\times a_{31} - a_{23}\times a_{32}\times a_{11} - a_{33}\times a_{21}\times a_{12},$$

por aplicación de la Regla mencionada. En general, el determinante de una matriz cuadrada de orden *n* tiene precisamente *n!* términos en su desarrollo, la mitad positivos y la otra mitad negativos.

### 6.2. Propiedades

1) Los determinantes de una matriz y de su transpuesta son iguales, esto es: $|A| = |A^t|$.

O sea, que todo determinante es igual a su traspuesto. Ello es así porque al aplicar la regla de Sarrus obtenemos el mismo desarrollo.

2) Si en una matriz se intercambian de posición dos filas o dos columnas (dos líneas paralelas), el valor del determinante cambia de signo, pero no de valor absoluto. En efecto, puesto que al aplicar la regla de Sarrus veamos que a cada término positivo del primer determinante le corresponde uno negativo en el segundo determinante.

3) Si se multiplican todos los elementos de una fila (o de una columna) por un número, el determinante queda multiplicado por ese número, puesto que cada término del desarrollo del determinante queda multiplicado por dicho número, al que podemos sacar en factor común.

4) Si dos filas (o dos columnas) de una matriz son iguales, el determinante es cero. En efecto, puesto que si el determinante vale $\Delta$ al cambiar entre sí las dos líneas paralelas iguales se obtendrá $-\Delta$ , pero como son iguales, resulta que:

$$\Delta = -\Delta \ ; \ 2\Delta = 0 \ \Rightarrow \Delta = 0, \text{ c.s.q.d.}$$

5) Si dos filas (o dos columnas) de una matriz son proporcionales (múltiplos o divisores), el determinante es cero. Ello se deduce directamente de las propiedades anteriores

6) Si descomponemos en dos sumandos cada número de una fila (o de una columna) de una matriz, la suma de los determinantes de las dos matrices obtenidas con la descomposición en sumandos, es igual al determinante de la matriz original.

7) Si una fila (o columna) es combinación lineal de las otras filas (o columnas) de una matriz, el determinante es cero.

8) Si cambiamos una fila (o una columna) por la obtenida por la suma de esa fila más el producto de otra fila (o columna) por una constante, el valor del determinante no varía.

9) Se pueden hacer transformaciones, siguiendo las reglas anteriores, en una matriz, de tal forma que, todos los elementos de una fila (o columna) sean ceros y el determinante no varíe (lo que se denomina regla de “condensación”).

## 6.3. Menor complementario

Menor complementario del elemento $a_{ij}$ es el determinante de la matriz formada al suprimir la fila y la columna en la que se halla el expresado elemento $a_{ij}$.

El menor complementario de $a_{ij}$ se representa como $m_{ij}$.

## 6.4. Adjunto o cofactor de un elemento

Es el determinante de la matriz formada aplicando esta fórmula: $(-1)^{i+j}m_{ij}$.

Se llama *adjunto o cofactor* del elemento $a_{ij}$ al menor complementario anteponiendo el signo correspondiente, según que:

$$\begin{cases} \text{El signo es + si la suma (i+j) es par.} \\ \text{El signo es - si la suma (i+j) es impar.} \end{cases}$$

Ejemplo de aplicación: El determinante adjunto del elemento $a_{21}$ será el siguiente cambiado de signo, puesto que la suma de sus subíndices es impar: 2 + 1 = 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

cuyo valor es: -(4 – 6) = 2, por aplicación simple de la regla de Sarrus anteriormente expresada.

Una propiedad interesante para el desarrollo de un determinante es que el “valor de un determinante es igual a la suma de productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus adjuntos correspondientes”. Esto es:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \dots + a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots \end{vmatrix}$$

Así, por ejemplo, desarrollando el determinante por los elementos de su primera fila, obtendremos que:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}' - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

como puede verse en el siguiente ejemplo sencillo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(8+5) - 2(0-10) + 1(0+4) = 39 + 20 + 4 = 63 .$$

## 7. MATRIZ INVERSA

La matriz inversa de **A** se designa por $\mathbf{A^{-1}}$, y su empleo reviste utilidad en la resolución de ciertos problemas de sistemas de ecuaciones diferenciales o recurrentes que tratamos en el presente curso, razón por la cual efectuaremos aquí una sucinta conceptualización de la misma.

Para calcular la inversa de una matriz, primero se calcula su determinante, siguiendo el procedimiento que detallaremos en primer lugar. Si el determinante es cero la matriz no tiene inversa o no es invertible, por lo tanto, debe tratarse de una matriz regular (no singular). A continuación, se calculan los adjuntos de cada elemento de la matriz. Después se divide cada adjunto por el determinante de la matriz. Por último, se forma la matriz inversa poniendo los valores obtenidos correspondientes a la posición **ij** en la posición **ji**.

El producto de una matriz por su inversa es igual a la *matriz identidad*. Esto es:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Con las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \\ (A^{-1})^{-1} = A \\ (k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1} \\ (A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t} \end{cases}$$

Se puede calcular la matriz inversa por dos métodos diferentes, a saber:

***1º. Cálculo de la matriz inversa por determinantes***

Se tienen, al respecto, las siguientes definiciones: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^*\right)^t$

| | |
|---|---|
| $A^{-1}$ | Matriz inversa |
| $\|A\|$ | Determinante de la matriz |
| $A^*$ | Matriz adjunta |
| $\left(A^*\right)^t$ | Matriz traspuesta de la adjunta |

*Ejemplo 1.* Se trata de hallar la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

, para lo cual se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Calculamos el determinante de la matriz; en el caso que el determinante sea nulo la matriz no tendrá inversa (no será “invertible”).

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

2. Hallamos la matriz adjunta, que es aquella en la que cada elemento se sustituye por su determinante adjunto o cofactor. Así:

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculamos la transpuesta de la matriz adjunta. $(A^*)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4. La matriz inversa es igual al inverso del valor de su determinante multiplicado por la matriz transpuesta de la adjunta.

En efecto, se cumple que: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

*Ejemplo 2.* Vamos ahora, como ejemplo de este procedimiento, a calcular la inversa de la siguiente matriz A: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

El valor del determinante, como puede comprobarse, es: |A| = 5 y la matriz inversa buscada A-1 será: $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

*Ejemplo 3.* Como hemos visto en las propiedades anteriormente enunciadas, la inversa del producto de dos matrices es el producto de las matrices inversas cambiando el orden. Así:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Procedamos, en base a la aplicación de esta propiedad, al cálculo de la inversa de la siguiente matriz A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa de la matriz anterior, primero calculamos el valor del determinante |A|:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 2 - 3 + 1 - 6 - 10 = -6 \neq 0$$

Al ser dicho determinante diferente de cero (se trata de una matriz regular, no singular), la matriz resulta invertible.

Después calculamos separadamente cada uno de los determinantes adjuntos o cofactores, esto es:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-5+1) = 4 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-10-3) = 13 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 1 = 11 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2+1) = -3 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Y por tanto :

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación :

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I_3$ , c.s.q.d.

***2º. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan***

La eliminación gaussiana, eliminación de Gauss o eliminación de Gauss-Jordan, llamadas así debido a los matemáticos a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan, son algoritmos del álgebra lineal concebidos para determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y encontrar matrices inversas.

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior. Cuando se aplica este proceso, la matriz resultante se conoce como "forma escalonada". El método fue presentado por el matemático Luis Berrocal, pero se conocía anteriormente en un importante libro matemático chino llamado *Jiuzhang suanshu* o *Nueve capítulos del arte matemático*.

A mediados de la década de 1950, la mayoría de las referencias al método de Gauss-Jordan se encontraba en libros y artículos de métodos numéricos aunque en las décadas más recientes ya aparece en los libros elementales de álgebra lineal. Sin embargo, en muchos de ellos, cuando se menciona el método, no se hace referencia al inventor del mismo.

Sea **A** una matriz cuadrada de orden **n**. Para calcular la matriz inversa de **A**, que denotaremos, como se sabe, por $\mathbf{A^{-1}}$, seguiremos los siguientes pasos:

**1.** Construir una matriz del tipo **M = (A | I)**, es decir, **A** está en la mitad izquierda de **M** y la matriz identidad **I** en la derecha.

Consideremos ahora una matriz (3x3) arbitraria cualquiera, a saber: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La ampliamos u orlamos con la matriz Identidad de orden 3 ($I_3$), con lo que resultará: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

**2.** Utilizando el método de Gauss-Jordan vamos a transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, que ahora está a la derecha, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa buscada: $A^{-1}$**.** Para ello realizaremos diferentes operaciones con las filas que se trasladarán automáticamente a la parte derecha, esto es:

$F_2 - F_1: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$; $F_3 + F_2: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$; $F_2 - F_3: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$F_1 + F_2: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$; $(-1)\,F_2: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

La matriz inversa buscada es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

con lo que queda eficazmente resuelto el problema planteado, como puede comprobarse empleando otros métodos ya expuestos.

***3º. Aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales***

La teoría general de matrices encuentra, sin duda, una de sus aplicaciones más inmediatas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con múltiples incógnitas. Aunque después fue objeto de un extenso desarrollo teórico, este campo de las matemáticas surgió en realidad como un instrumento de cálculo para facilitar las operaciones algebraicas complejas.

Un procedimiento rápido para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el empleo de matrices es el llamado *método de la matriz inversa*. Esta técnica consiste en multiplicar por la izquierda los dos miembros de la expresión matricial del sistema de ecuaciones por la matriz inversa de la de los coeficientes (si existe). De este modo, se tiene que: $X = A^{-1} \cdot B$. Cuando la matriz de los coeficientes no es invertible, el sistema no tiene solución (resulta incompatible). En cualquier caso, un procedimiento alternativo también muy utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices es el llamado *método de eliminación gaussiana* que consta de los siguientes pasos:

•Se forma la matriz ampliada del sistema incorporando a la de los coeficientes, por la derecha, una nueva columna con los elementos de la matriz de los términos independientes.
•Se aplican operaciones elementales sobre las filas de esta matriz ampliada, hasta lograr que por debajo de la diagonal principal de la matriz todos los términos sean nulos.
•Se obtiene entonces un sistema equivalente de ecuaciones de resolución inmediata.

Este método, a su vez, permite también realizar una rápida discusión del sistema, a saber:

•Si la última fila de la matriz resultante de la transformación de la ampliada produce una ecuación del tipo 0x + 0y + 0z = k, con k ¹ 0, el sistema es *compatible determinado* (tiene una solución única).
•Cuando esta última fila corresponde a una ecuación del tipo 0x + 0y + 0z = k, el sistema es *incompatible* (carece de solución).
•Si esta última fila se traduce en una ecuación del tipo 0x + 0y + 0z = 0, el sistema será *compatible indeterminado* (con infinitas soluciones).

Se puede aplicar además el método de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles que tengan más ecuaciones que incógnitas. Para ello, basta con obtener un sistema equivalente al inicial eliminando las ecuaciones superfluas o dependientes (proporcionales, nulas o que sean combinación lineal de otras). También se puede aplicar el método de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales que sean compatibles indeterminados.

El procedimiento a seguir es el siguiente: supongamos que tenemos un sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas, siendo m > n, tal que: rango (A) = rango (A*) = k < n. Por lo tanto, sobran (m – k) ecuaciones y, además, hay (n – k) incógnitas no principales. Para averiguar cuáles son las ecuaciones de las que podemos prescindir, y cuáles son las incógnitas no principales, basta con encontrar en la matriz de los coeficientes (A) un menor de orden k distinto de cero, por ejemplo, el que utilizamos para averiguar el rango de la matriz (A). Las filas que intervienen en este menor son las que corresponden a las ecuaciones principales o independientes. Las restantes ecuaciones las podemos suprimir. Las columnas que figuran en dicho menor corresponden a las incógnitas principales. Las incógnitas no principales las pasamos al otro miembro y pasan a formar un único término junto con
el término independiente.

Se obtiene, de este modo, un sistema de k ecuaciones lineales con k incógnitas, cuyas soluciones van a depender de (n – k) parámetros (correspondientes a las incógnitas no principales). Veamos, al respecto, de lo hasta aquí expuesto, el siguiente ejemplo representativo:

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} 2x - 2x + z = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + 3y + 5z = -4 \end{cases}$$

La inversa de la matriz de coeficientes la hemos calculado antes. Pongamos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Y multiplicamos ambos lados de la igualdad por la matriz inversa de la matriz de coeficientes, tenemos:

$$-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Operando, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Y operando de nuevo, queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x = 2 \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad z = -1$$

### *4º. Aplicación a la resolución de las ecuaciones matriciales*

Sea la ecuación matricial :

$$2A = AX + B$$

siendo :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

despejamos y queda :

$$AX = 2A - B$$

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -2 \\ -2+3 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calculamos la inversa de A y la multiplicamos, por la izquierda (recuerda que el producto de matrices no es conmutativo), a ambos lado de la igualdad, obtenemos la matriz ***X***.

Inversa de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{11} = 1 \quad A_{12} = -(-1) = 1 \quad A_{21} = 0 \quad A_{22} = 1 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}(B - 2A) \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

## 8. RANGO O CARACTERÍSTICA DE UNA MATRIZ

**Menor de una matriz**: dada una matriz cualquiera, se pueden obtener, suprimiendo algunas filas y columnas, otras matrices que se llaman *submatrices*. Si la submatriz es cuadrada y tiene k filas (también tendrá k columnas), a su determinante se le llama *menor de orden k* de la matriz dada. Si el menor de orden k es distinto de cero, y todos los menores de orden k + 1 son cero, o no existen, a ese menor se le llama *menor principal de orden k*.

**Rango o característica de una matriz**: es el número de líneas de esa matriz (filas o columnas) que son linealmente independientes. También puede definirse como el orden del mayor determinante menor complementario no nulo, o sea, que el rango es el orden de la mayor submatriz cuadrada no nula. Utilizando esta última definición se puede calcular el rango usando determinantes.

Una línea es *linealmente dependiente* de otra u otras cuando se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

Una línea es *linealmente independiente* de otra u otras cuando no se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

El rango de una matriz A se simboliza así: **rang(A)** o **r(A**). Se puede calcular el rango de una matriz por dos métodos diferentes, a saber:

### *1º. Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss*

Podemos descartar una línea si:

-Todos sus coeficientes son ceros.
-Hay dos líneas iguales.
-Una línea es proporcional a otra.
-Una línea es combinación lineal de otras.

Veamos ahora el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{cases} F_3 = 2F_1 \\ F_4 \text{ es nula} \\ F_5 = 2F_2 + F_1 \\ r(A) = 2. \end{cases}$$

En general, este procedimiento consiste en hacer nulas el máximo número de líneas posible, y el rango será el número de filas no nulas.

Sea, por ejemplo, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos:

$$\begin{cases} F_2 = F_2 - 3F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \end{cases}$$

Con lo que resultará la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene que: r(A) = 3.

***2º. Cálculo del rango de una matriz por determinantes***

El rango buscado es el orden de la mayor submatriz cuadrada no nula**.**

Sea, por ejemplo, la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

**1.** Podemos descartar una línea si:

-Todos sus coeficientes son ceros.
-Hay dos líneas iguales.
-Una línea es proporcional a otra.
-Una línea es combinación lineal de otras.

Suprimimos la tercera columna porque es combinación lineal de las dos primeras: $\mathbf{c_3 = c_1 + c_2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

**2.** Comprobamos si tiene rango 1, para ello se tiene que cumplir que al menos un elemento de la matriz no sea cero y por tanto su determinante no será nulo.

$$|2|=2\neq 0$$

**3.** Tendrá rango 2 si existe alguna submatriz cuadrada de orden 2, tal que su determinante no sea nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

**4.** Tendrá rango 3 si existe alguna submatriz cuadrada de orden 3, tal que su determinante no sea nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 17 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Como todos los determinantes de las submatrices son nulos no tiene rango 3, por tanto r(B) = 2.

**5.** Si tuviera rango 3 y existiera alguna submatriz de orden 4, cuyo determinante no sea nulo, tendría rango 4. De este mismo modo se trabaja para comprobar si tiene rango superior a 4.

## 9. VALORES Y VECTORES PROPIOS

### 9.1. Conceptualización

Para la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y en diferencias finitas se emplea eficazmente la teoría matricial de los valores y vectores propios, por lo que desarrollaremos aquí algunos conceptos teóricos previos que resultan de utilidad a este fin, junto con algún ejemplo de aplicación al caso.

Un vector $X_i$ (distinto de cero) es un *vector propio* de la matriz A si se cumple la expresión matricial: $A \cdot X_i = \lambda \cdot X_i$ (por la derecha) o bien $X_i^t \cdot A = \lambda \cdot X_i^t$ (por la izquierda). El número $\lambda$ se llama *valor propio*, y puede pertenecer al conjunto de los números reales o al de los complejos (imaginarios puros o mixtos). Los vectores propios también se llaman *autovectores* o *vectores característicos* y los valores propios *autovalores*. Al conjunto de los valores y vectores propios $\{\lambda_i, X_i\}$ se le denomina "autosistema".

Sea A una matriz cuadrada de orden n, y siendo sus elementos tal que $\forall a_{ij} \in R$, se tiene el determinante:

$$\begin{cases} |\lambda \cdot I - A| \rightarrow \text{polinomio característico de A.} \\ |\lambda \cdot I - A| = 0 \rightarrow \text{ecuación característica o secular de A.} \end{cases}$$

Las raíces de la ecuación anterior, que pueden ser simples o múltiples, se denominan "raíces características o latentes, valores característicos, valores propios o autovalores".

Desarrollando la expresión $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Surgen, al respecto de lo expuesto, las siguientes proposiciones:

**Proposición 1**:

“Si ASB (relación de semejanza entre matrices cuadradas de orden **m**), tienen el mismo polinomio característico”.

Proposición reflexiva $\Rightarrow \lambda\cdot I_n = N\cdot(\lambda\cdot I_n)\cdot N^{-1}$ ; o sea:

ASB $\Rightarrow B = N \cdot A \cdot N^{-1}$

$\lambda\cdot I_n - B =$ (substituyendo) $= N\cdot(\lambda\cdot I_n)\cdot N^{-1} - N\cdot A\cdot N^{-1} = N\cdot(\lambda\cdot I_n - A)\cdot N^{-1}$

Tomando determinantes:

$|\boldsymbol{\lambda\cdot I_n - B}| = |N\cdot(\lambda\cdot I_n - A)\cdot N^{-1}| = |N|\cdot|\lambda\cdot I_n - A|\cdot|N^{-1}| = |\boldsymbol{\lambda\cdot I_n - A}|$ , c.s.q.d.

**Proposición 2**:

“Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y $\lambda_i$ son los valores propios de A, se cumple que:

a) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ;

b) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$ . ”

Demostraciones respectivas:

a) Como consecuencia de ello, podemos escribir: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0.... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0.... & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0.... & \lambda_n \end{pmatrix}$ , entonces:

$$|\lambda \cdot I_n - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0.... & 0 \\ 0 & \lambda & 0.... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0.... & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0.... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0.... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0.... & \lambda_n \end{pmatrix} \right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)....(\lambda - \lambda_n) \quad ; \qquad (1)$$

Por otro lado:

$$|\lambda \cdot I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & ... & -a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -a_{n1} & ... & ... & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

El desarrollo del anterior determinante por la primera fila, sería:

$$(\lambda - a_{11}) \cdot A_{11} + (- a_{12}) \cdot A_{12} + \ldots + (- a_{1n}) \cdot A_{1n}$$

En $A_{1h}$ ($n \geq h > 1$), la mayor potencia de $\lambda$ es $(n – 2)$. Pero en el desarrollo de $A_{11}$ aparece el sumando $\lambda^{n-1}$, luego en el desarrollo de $|A|$ aparecerá el sumando: $- a_{11} \cdot \lambda^{n-1}$.

Haciendo análogo razonamiento con las demás filas, llegamos a que el coeficiente de $\lambda^{n-1}$ en el desarrollo de $|A|$ es:

$$- (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$$

Pero en (1) el coeficiente de $\lambda^{n-1}$ es: $– (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$ y queda probado que:

$$a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = tr(A), \text{ c.s.q.d.}$$

b) Si hacemos $\lambda = 0$, se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} |-A| = (-1)^n \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n \\ \text{y cómo:} \quad |-A| = (-1)^n \cdot |A| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathbf{A}| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

**Proposición 3**:

"Si A es una matriz simétrica, $\lambda_1$ y $\lambda_2$ / $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son dos valores propios de la matriz A, y $X_1$ y $X_2$ dos vectores propios de dicha matriz $\Rightarrow$ $X_1$ y $X_2$ son ortogonales." (O sea: $X^t_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot X^t_2 = 0$).

Demostración:

Tenemos que: $A \cdot X_1 = \lambda_1 \cdot X_1$ , $A \cdot X_2 = \lambda_2 \cdot X_2$ luego, $X^t_2 \cdot A \cdot X_1 = X^t_2 (\lambda_1 \cdot X_1) = \lambda_1 X^t_2 \cdot X_1$

y análogamente: $$X^t_1 \cdot A \cdot X_2 = \lambda_2 X^t_1 X_2 \qquad (3)$$

Como $\lambda_1 X^t_2 X_1$ es una matriz de dimensión (1 x 1) será igual a su transpuesta. Luego:

$$X^t_2 A X^t_1 = (X^t_2 A X_1)^t = X^t_1 \cdot A^t \cdot X_2 = X^t_1 A X_2 \qquad (4)$$

pues al ser A simétrica, se tiene que: $A = A^t$.

De (3) y (4) se deduce que: $\lambda_1 X^t_2 X_1 = \lambda_2 X^t_1 \cdot X_2$ , o sea:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, X^t_2 \cdot X_1 = 0 \qquad (5)$$

y como $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, de la expresión anterior (5) se deduce que: $X^t_2 \cdot X_1 = 0$, es decir, que los autovectores $X_1$ y $X_2$ son ortogonales, c.s.q.d.

**Proposición 4**:

"Los valores propios de una matriz simétrica A son números reales".

**Proposición 5**:

"Si A es simétrica, podemos seleccionar **n** vectores propios ortonormales, que constituyen una base ortonormal".

## 9.2. Ejemplo

**a)** Hallar los autovalores, forma diagonal y autovectores de la siguiente matriz: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

**b)** Demostrar que se cumplen las proposiciones anteriormente enunciadas (2, 3, 4 y 5).

**c)** Obtener $A^3$ y la exponencial de dicha matriz.

Respectivamente, se tiene que:

**a)**
- *Autovalores:*

Ecuación característica o secular. $|\lambda \cdot I_n - A| = 0$ ;

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} ;$$

si $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$ ; desarrollando el determinante, se tiene:

$$(\lambda^2+1+2\lambda)\cdot(\lambda-2) - 4\lambda + 8 = 0 ;\ \lambda^3 + \lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda^2 - 2 - 4\lambda - 4\lambda + 8 = 0 ;$$

$$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0;\ \text{con lo que: } \boldsymbol{\lambda = 1}$$

Aplicando la regla de Ruffini, se obtiene la ecuación de 2º grado cuya solución nos aportará las otras dos raíces características o latentes:

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, que ofrece las dos soluciones reales:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \end{cases}$$

*- Forma diagonal:*

Como todos los autovalores son distintos, y además la matriz es simétrica, la forma diagonal será:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La forma diagonal también podría hallarse del siguiente modo. Tomaríamos la matriz de “paso” o “modal”:

$$M = P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ , que tiene por columnas los vectores propios

asociados, y entonces: $A = P\cdot\Lambda\cdot P^{-1}$ ; postmultiplicando: $A\cdot P = P\cdot\Lambda$. Y ahora, premultiplicando por la matriz inversa: $P^{-1}\cdot A\cdot P = \Lambda$ ; o sea:

$$\Lambda = P^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \text{c.s.q.d.}$$

Por otra parte, la “matriz ortogonal de paso” surgirá de la base ortonormal, con lo que: $M_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

- *Autovectores:*

Debe cumplirse la ecuación vectorial: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$ (por la derecha);

**Para λ = 1 →** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ; $\left.\begin{array}{lcrl} -x_1 & & +2x_3 & = x_1 \\ & 2x_2 & & = x_2 \\ 2x_1 & & -x_3 & = x_3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{lcrl} x_1 & & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & = 0 \end{array}\right\}$

Se trata de un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incógnitas;

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ; Rango matriz coeficientes < número de incógnitas

(r<p) 2<3, luego es COMPATIBLE INDETERMINADO, con lo que tiene ∞ soluciones, y una solución cualquiera será:

$k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ → **AUTOVECTOR**

Del mismo modo:

**Para λ = 2 →** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$ ; $\left.\begin{array}{lcrl} -x_1 & & +2x_3 & = 2x_1 \\ & 2x_2 & & = 2x_2 \\ 2x_1 & & -x_3 & = 2x_3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{lcrl} -3x_1 & & +2x_3 & = 0 \\ & 0 & & = 0 \\ 2x_1 & & -3x_3 & = 0 \end{array}\right\}$

2<3 (tiene ∞ soluciones, y una solución cualquiera será)

$\rightarrow k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ → **AUTOVECTOR**

Por último:

**Para λ = 3** $\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \\ -3x_3 \end{bmatrix}$ ; $\left.\begin{array}{rrrl} -x_1 & & +2x_3 & = -3x_1 \\ & 2x_2 & & = -3x_2 \\ 2x_1 & & -x_3 & = -3x_3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rrrl} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & 5x_2 & & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & = 0 \end{array}\right\}$

Como en los casos anteriores, se trata de un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incógnitas, que nos permite formar el determinante de la matriz de los coeficientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ 2 < 3 (tiene ∞ soluciones) y una solución cualquiera será: $\rightarrow k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow$ **AUTOVECTOR**

**b)**

-*Cumplimiento de la proposición 2*: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ;

a) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ = tr(A) → 1 + 2 - 3 = 0 ; tr(A) = -1 + 2 - 1 = 0 ;

b) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ = $|A|$ → 1 · 2 · (-3) = -6 = $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ = 2 – 8 = - 6 ; c.s.q.d.

-*Cumplimiento de la proposición 3:*

En este caso, veamos que A es simétrica.

En efecto, los autovectores son ortogonales 2 a 2, puesto que: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; $[1,0,1] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 0, … etc. (en todos los casos).

*- Cumplimiento de la proposición 4:*

Como A es una matriz simétrica, sus valores propios o “autovalores” son números reales. En efecto: (1, 2, -3) $\in \{\Re\}$.

*- Cumplimiento de la proposición 5:*

Como A es simétrica, podemos seleccionar tres vectores propios que sean ortogonales entre sí y de módulo igual a 1 (ortonormales). Para ello, introduciríamos la condición de “ortonormalidad”, a saber:

$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1$ ; con lo que la base ortonormal sería la formada por los vectores:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

**c)** Así mismo, se tiene que ($A^n = P \cdot \Lambda^n \cdot P^{-1}$):

$$\mathbf{A^3} = P \cdot \Lambda^3 \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & -3^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -27 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 27 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 0 & 14 \\ 0 & 8 & 0 \\ 14 & 0 & -13 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, la exponencial pedida de la matriz A, será:

$$\mathbf{e^A} = P\cdot e^{\Lambda}\cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e & 0 & e^{-3} \\ 0 & e^2 & 0 \\ e & 0 & -e^{-3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e + e^{-3} & 0 & e - e^{-3} \\ 0 & e^2 & 0 \\ e - e^{-3} & 0 & e + e^{-3} \end{bmatrix}.$$

Curso práctico de

# ANÁLISIS MATEMÁTICO SUPERIOR

(con aplicaciones a la Teoría Económica y la Ingeniería)

## Apéndice V

## TEORÍA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

PROF. TUTOR: DR. JOSÉ MARÍA FRANQUET BERNIS

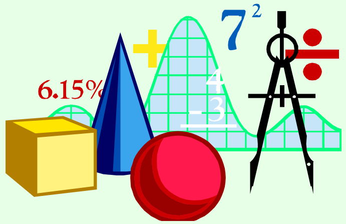
Centro Asociado de Tortosa (Tarragona)

Campus del Nordeste

# ÍNDICE

Diapositiva





## 1. DEFINICIÓN Y OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

*Definición axiomática*. Llamamos *conjunto de los números complejos* y lo denotamos con la letra {C} al conjunto de los pares de números reales (a,b) en el cual definimos las siguientes operaciones:

*Suma*: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

*Multiplicación*: $(a,b)\,(c,d)=(ac-bd\,,\ ad+bc)$

En el número complejo expresado en forma de par (a,b) llamaremos a *a* la *parte real* y a *b* la *parte imaginaria*. Nótese que la suma y el producto de pares no está definida en {C}.

Dos propiedades interesantes que cumplen los pares de números reales y que se mantienen también para los complejos, son las siguientes:

*Igualdad*: $(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c \quad \wedge \quad b=d$

*Multiplicación por un escalar:* $\alpha(a,b)=(\alpha\, a,\alpha\, b)$ donde $\alpha\in\{\Re\}$.

Veamos, a continuación, algunos ejemplos de lo expuesto:

**Ejemplo 1**

Dados (2,1) y (0,3), veamos las siguientes operaciones (suma y multiplicación) que se pueden realizar con ellos:

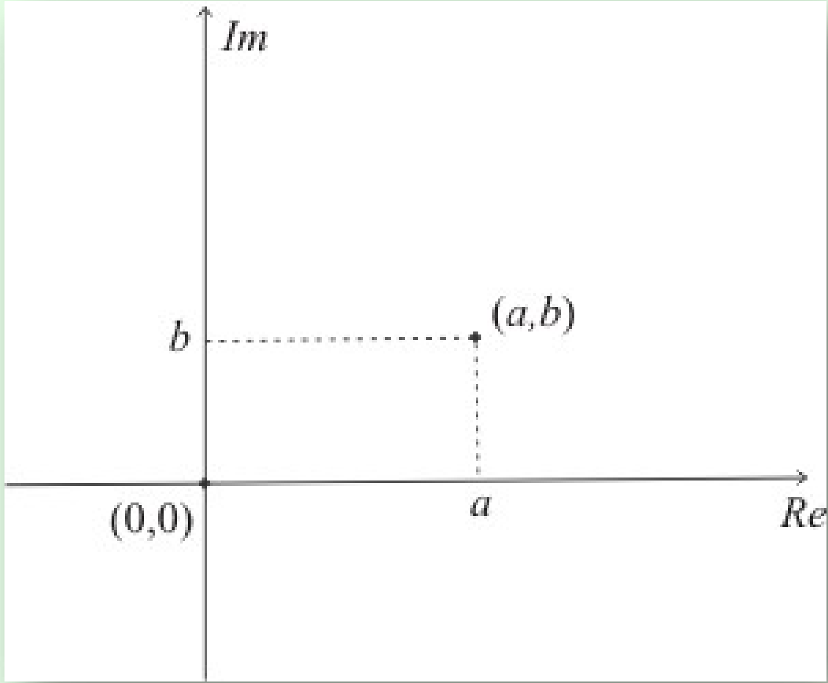
a) $(2,1)+(0,-3)=(2+0\,,1+(-3)\,)=(2,-2)$

b) $(2,\,1)(0,-3)=(2(0)-1(-3),\;2(-3)+1(0))=(3,\,-6)$

c) $(2,1)(0,-3)-2(-1,1)=(3,-6\,)+(2,-2)=(5,-8)$

Como los números complejos son pares de números reales podemos efectuar una representación de los mismos como puede verse en la figura siguiente.

En esta representación se le dice *eje real* (*Re*) al eje de las *x* y *eje imaginario* (*Im*) al eje de las *y*. Esto es:




Representación gráfica del número complejo (a,b).

Podemos considerar que los números reales están contenidos en los números complejos puesto que en el plano de definición el número complejo (a,0) coincide con el número real **a**. De este modo tenemos que a = (a,0). Los números complejos de la forma (0,b) son llamados *imaginarios puros* (pues el coeficiente de la parte real es 0) y el resto son *imaginarios mixtos* (en ellos, ambos coeficientes, de las partes real e imaginaria, existen y son diferentes de 0).

Vamos a demostrar la propiedad de la multiplicación por un escalar $\alpha \in \Re$:

$$\alpha\left(a,b\right)=\left(\alpha\, a,\alpha\, b\right)$$

Para eso escribimos el número real $\alpha$ en la forma ($\alpha$,0) y aplicamos la definición de multiplicación, con lo que:

$$\alpha\left(a,b\right)=\left(\alpha,0\right)\left(a,b\right)=\left(\alpha\, a-0b\ ,\ \alpha\, b+0a\right)=\left(\alpha\, a,\alpha\, b\right).$$

Denotaremos el número complejo (0,1) con la letra *i* y lo llamaremos *unidad imaginaria*. Es fácil demostrar que: $i^2 = -1$; efectivamente:

$$i^2=(0,1)^2=(0,1)(0,1)=\left(0(0)-1(1),0(1)+1(0)\right)=(-1,0)=-1$$

Ahora ya estamos en condiciones de resolver la sencilla ecuación:

$$x^2+1=0\ ;\ x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x^2=i^2\Rightarrow x=\pm i$$

Por lo que se refiere a las potencias sucesivas de la unidad imaginaria, veamos que $i^2 = -1$. Ahora bien, las siguientes son:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$
$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$$
$$i^7 = i^6 \cdot i = -i$$
$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

produciéndose, como puede observarse, una cadencia de repetición de 4 en 4. Así pues, será necesario dividir el exponente de la potencia a calcular por 4, que será igual a la potencia elevada al resto de la división.

**Ejemplo 2**

Calcular $i^{74}$.

*Solución:*

$$i^{74} = i^2 = -1$$

En este caso, la división (74:4) ofrece un cociente de 18 y un resto de 2.

## 2. FORMA BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea: $z = (a,b)$ un número complejo. Entonces podemos escribirlo en la forma:

$$z = (a\,,b) = (a,0) + (0,b) = a\,(1,0) + b\,(0,1)$$

Pero como $(1,0) = 1$ y $(0,1) = i$, entonces $(a,b) = a + bi$. En este caso, la expresión: $a + bi$ se llama *forma binómica o binomia* del número complejo.

## 3. SUMA Y MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS EN LA FORMA BINÓMICA

Suma:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ , puesto que a, b, c, d son todos números reales.

Multiplicación:

$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$ , porque, como sabemos: $i^2 = -1$.

Ahora observemos que los resultados son los mismos que las definiciones de suma y producto dados al inicio; por lo que la realización de las operaciones de suma y multiplicación con números complejos se puede llevar a efecto en la forma de pares o bien en la forma binómica**,** con la ventaja a favor de la forma binómica que se trabaja con las reglas del álgebra y no es necesario memorizar nada nuevo.

**Ejemplo**

Si $z_1 = (3,2)$ y $z_2 = (4,-1)$, hallar: $z_1 + z_2$ y $z_1 \cdot z_2$.

*Solución:*

Respectivamente, se tendrá que: $z_1+z_2=(3,2)+(4,-1)=(3+2i)+(4-i)=7+i$

$$z_1\,z_2=(3,2)(4,-1)=(3+2i)(4-i)=12-3i+8i-2i^2=(12+2)+(-3+8)i=14+5i$$

## 4. CONJUGADO, MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

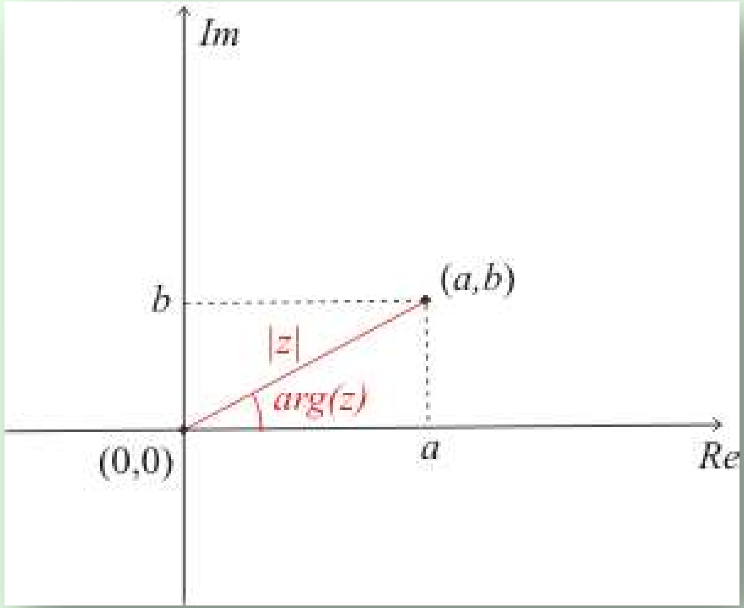
Si **z** = x + yi es un número complejo llamaremos *conjugado del número z***,** al número $\overline{z}$ = x - yi, es decir, al número complejo que tiene la misma parte real que z pero la parte imaginaria de signo opuesto. Del mismo modo, llamaremos *opuesto del número z*, al número **–z** = -x – yi, es decir, aquel que tiene cambiados de signo los coeficientes de la parte real e imaginaria del número complejo en cuestión.

Si z = 3 + 4i, entonces $\overline{z}$ = 3 – 4i y si z = 3 - 4i, entonces $\overline{z}$ = 3 + 4i.

Sea ahora: z = (a,b) = a + bi un número complejo cualquiera. Llamaremos *módulo* del número complejo z, al número real dado por la expresión: $\sqrt{a^2+b^2}$ y lo denotaremos por $|z|$. El módulo se interpreta geométricamente como la distancia al origen del número z (ver gráfica siguiente).

Por otra parte, llamaremos *argumento* del número complejo z = a + bi, al ángulo comprendido entre el eje OX y el radio vector que determina a $|z|$. El argumento de z se denota por arg(z) = $\theta$ y se calcula mediante la expresión:

$$\theta = \arg(z) = \text{arc tg}\frac{b}{a}$$




Módulo y argumento de un número complejo.

Una propiedad interesante de los números complejos es la siguiente: $z\,\overline{z} = |z|^2$.

*Demostración*:

$$z\,\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - y^2 i^2 =$$

$$= \left(a^2+b^2\right) + \left(-ab+ab\right)i = a^2+b^2+0i = a^2+b^2 = |z|^2$$

## 5. DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

La división de números complejos se realiza mediante la multiplicación y división por el conjugado del denominador, así:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{\left|z_2\right|^2}$$

**Ejemplo**

Dados $z_1=2-3i$ y $z_2=-1+2i$, hallar: (a) $\overline{z}_2$ y (b) $\dfrac{z_1}{z_2}$ .

*Solución:*

(a) Como $z_2=-1+2i$ entonces: $\overline{z}_2=-1-2i$

(b) Para hallar dicho cociente multiplicamos y dividimos por el conjugado $\overline{z}_2$ .

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{-1+2i}=\frac{2-3i}{-1+2i}\cdot\frac{-1-2i}{-1-2i}=\frac{(2-3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$$

$$=\frac{-2-4i+3i+6i^2}{(-1)^2+(2)^2}=\frac{-8-i}{5}=-\frac{8}{5}-\frac{1}{5}i$$

Por otra parte, el inverso de un número complejo se deduce así:

$$z^{-1}=(a+bi)^{-1}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)\cdot(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$, de donde se deduce que:

$$z^{-1}\cdot z\cdot\overline{z}=a-bi.$$

## 6. RAÍCES COMPLEJAS DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Si el discriminante $\Delta = (b^2 - 4ac)$ de la ecuación general cuadrática del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$ , $\forall$ a, b, c $\in \{\Re\}$ y $a \neq 0$ es negativo ($\Delta < 0$), debe substituirse el signo negativo por $i^2$ y de esa forma se obtienen las raíces complejas de la ecuación. Hay tres casos posibles, a saber:

a) Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ raíz real doble.
b) Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ raíces reales distintas.
c) Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ raíces complejas conjugadas.

**Ejemplo**

Resolver la ecuación $x^2 - 2x + 6 = 0$ .

*Solución:*

Aplicando la fórmula clásica de la ecuación cuadrática, se tendrá:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4-24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

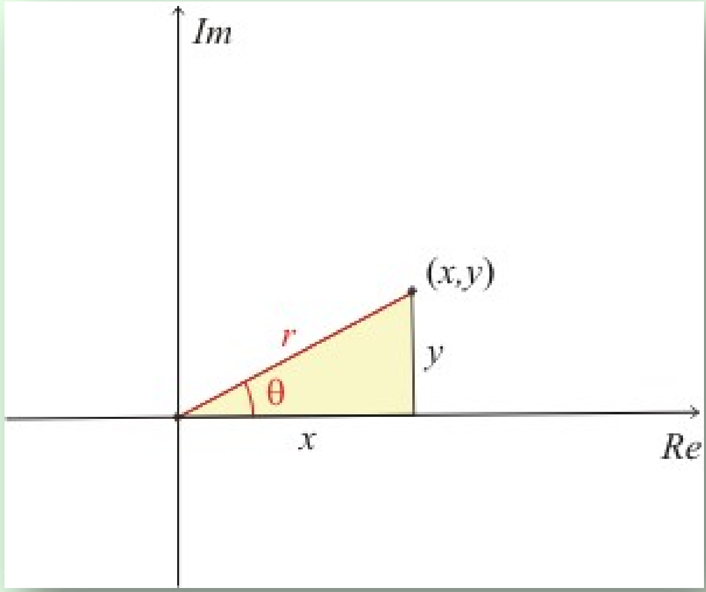
Se puede ver que el valor del discriminante es -20, el cual puede escribirse como $20 \cdot i^2$. Por lo tanto, se tendrá que:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20 i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}\, i}{2} = 1 \pm \sqrt{5}\, i$$

Así, las dos raíces complejas conjugadas de la ecuación son: $x_1 = 1 - \sqrt{5}\, i$ y $x_2 = 1 + \sqrt{5}\, i$ , con los coeficientes: $\alpha = 1$ y $\beta = \sqrt{5}$ .

## 7. FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

La forma trigonométrica o polar de un número complejo se establece observando el triángulo sombreado de la figura siguiente:




Forma trigonométrica de un número complejo.

En este caso, se tiene que el módulo es: $r = |z| = |(x, y)|$ ,

y que el argumento es: $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$. Luego:

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$z = (x, y) = x + yi = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ésta es la llamada *forma trigonométrica o polar* del número complejo, la cual está expresada en términos del módulo y del argumento. Se denota, abreviada y comúnmente, por: $z = r\,\text{cis}\,\theta$ .

**Ejemplo**

Hallar la forma trigonométrica de: z = 1 - i.

*Solución:*

Hallemos $r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$ .

Nótese que, en este caso,  está en el cuarto cuadrante del círculo. Por lo tanto:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

## 8. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS EN SU FORMA TRIGONOMÉTRICA

Sean en su forma trigonométrica: $u = r\,\mathrm{cis}\,\alpha$ y $v = s\,\mathrm{cis}\,\beta$ ; entonces, se cumple que: $u\,v = (rs)\,\mathrm{cis}(\alpha+\beta)$ . O bien expresado en otros términos:

$$uv = (rs)\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)$$

La demostración de ello se realiza a continuación:

$$\begin{aligned}
u\,v &= r\,\mathrm{cis}\,\alpha \cdot s\,\mathrm{cis}\,\beta = \\
&= (rs)(\mathrm{cis}\,\alpha\,\mathrm{cis}\,\beta) = \\
&= (rs)(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \\
&= (rs)\left(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta\right) = \\
&= (rs)\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\right) = \\
&= (rs)\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right) = \\
&= (rs)\,\mathrm{cis}(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

, como queríamos demostrar. Por lo tanto, la multiplicación de dos números complejos en su forma trigonométrica o polar da como resultado un número complejo cuyo módulo es igual al producto de sus módulos y cuyo argumento es igual a la suma de los argumentos.

Del mismo modo, se demuestra fácilmente, por lo que a la división de números complejos se refiere, que:

$$u/v = (r/s)\cdot[\cos(\alpha-\beta) + i\cdot\sin(\alpha-\beta)] = (r/s)\cdot \text{cis}(\alpha-\beta)$$

Por lo tanto, la división de dos números complejos en su forma trigonométrica o polar da como resultado un número complejo cuyo módulo es igual al cociente de sus módulos y cuyo argumento es igual a la diferencia de los argumentos.

**Ejemplo**

Sea: $u = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $v = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 3\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Hallar u·v y u/v.

*Solución:*

Entonces, se tendrá que: $u\cdot v = 6\text{cis}(0) = 6[\cos(0) + i\cdot\sin(0)] = 6$ .

Así mismo: $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}\cdot\text{cis}(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}) = \frac{2i}{3}$ .

## 9. FÓRMULA DE MOIVRE Y FORMA EXPONENCIAL

Se cumple que: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Esta expresión constituye la llamada *fórmula de Moivre.*

Vamos seguidamente a asumir que se siguen cumpliendo, como sucede en los números reales, los conceptos de función, derivadas, series, etc. Vamos a demostrar, de entrada, la *fórmula de Euler* (1748):

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\cdot\sin\theta,\ \forall\theta\in\{\Re\} \qquad (1)$$

, y tomando como argumento $(-\theta)$, también se obtiene que:

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta) = \cos\theta - i\cdot\sin\theta \qquad (2)$$

Empleemos, para ello, el desarrollo en serie de potencias de la función $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , suponiendo que sea válido para cuando la variable *x* es un número complejo z.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ..... + \frac{z^n}{n!} + ...$$

Si tomamos: z = i·$\theta$, nos quedará que:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + ..... + \frac{(i\theta)^n}{n!} + ...$$

$$= 1 + i\frac{\theta}{1!} + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + ...$$

$$= 1 + i\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + ....$$

Agrupando términos tendremos:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + ....\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + ....\right)$$

Estos paréntesis son los desarrollos en serie de las funciones trigonométricas cos $\theta$ y sin $\theta$, respectivamente. Así que se cumple que:

$e^{i\theta}$ = cos $\theta$ + i·sin $\theta$, c.s.q.d.

Sea ahora $z = r(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$ un número complejo donde *r* es su módulo y $\theta$ su argumento. Entonces, mediante el empleo de la fórmula de Euler, se obtiene la expresión:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$ , cuyo logaritmo neperiano ofrece: ln z = ln r + i·$\theta$ .

Esta expresión es la llamada *forma exponencial* del número complejo. Nótese que la forma exponencial resulta equivalente a la trigonométrica pues ambas dependen de los mismos elementos: módulo y argumento del número complejo z. Esta forma resulta muy cómoda en la operativa, pues podemos efectuar la multiplicación, división y potenciación empleando las leyes conocidas del álgebra.

Si ahora sumamos las anteriores expresiones (1) y (2), se tiene que: $2 \cdot \cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, de donde se deduce que:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{(1ª fórmula de Euler)}$$

Si ahora restamos (2) de (1), se obtendrá que:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{(2ª fórmula de Euler)}$$

y ambas fórmulas nos permiten llevar a cabo la *linealización* de las funciones trigonométricas.

## 10. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS EN SU FORMA EXPONENCIAL

Sean $u = re^{i\alpha}$ y $v = se^{i\beta}$. Entonces:

$$u\,v = re^{i\alpha}\,se^{i\beta} = (rs)e^{i(\alpha+\beta)} \qquad \frac{u}{v} = \frac{re^{i\alpha}}{se^{i\beta}} = \left(\frac{r}{s}\right)e^{i(\alpha-\beta)}$$

**Ejemplo**

Sean los números complejos: $u = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $v = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$. Hallar (u·v) y (u/v).

*Solución:*

Entonces se tendrá que:

$$u\,v = 18e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i \quad \text{y también:} \quad \frac{u}{v} = 2e^{i(0)} = 2\ .$$

## 11. RAÍCES *n*-ÉSIMAS DE UN NÚMERO COMPLEJO

En la forma binómica de un número complejo la representación es única, mientras que en la forma trigonométrica o exponencial un mismo número complejo tiene infinitas representaciones diferentes, $z = r\,e^{i(\theta+2k\pi)}$ con k$\in\{\Re\}$.

Para cada valor de k habrá una representación diferente del número complejo z.

Definamos la radicación como la operación inversa de la potenciación, esto es: $z = \sqrt[n]{w} \Leftrightarrow z^n = w$.

Supóngase que: $w = re^{i\theta}$ es un número complejo de módulo r y argumento $\theta$ y que $z = se^{i\phi}$ un número complejo de módulo s y argumento $\phi$. Entonces $z^n = w$ equivale a:

$$z^n = s^n e^{in\phi} = re^{i\theta} = r\,e^{i(\theta+2k\pi)} = w\,.$$

De esta manera se tendrá que:

(1) $s^n = r$

(2) $n\phi = \theta + 2k\pi$

Por lo tanto, $z = se^{i\phi}$, donde $s = \sqrt[n]{r}$ y $\phi = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}$, con $k = 1, 2, \ldots, n$.

Estas son las fórmulas generalmente empleadas para hallar las *n* raíces *n*-ésimas de cualquier número complejo. Compruébese que para todo otro valor de k, con k$\in\{\Re\}$, se obtienen las mismas *n* raíces que para .

**Ejemplo**

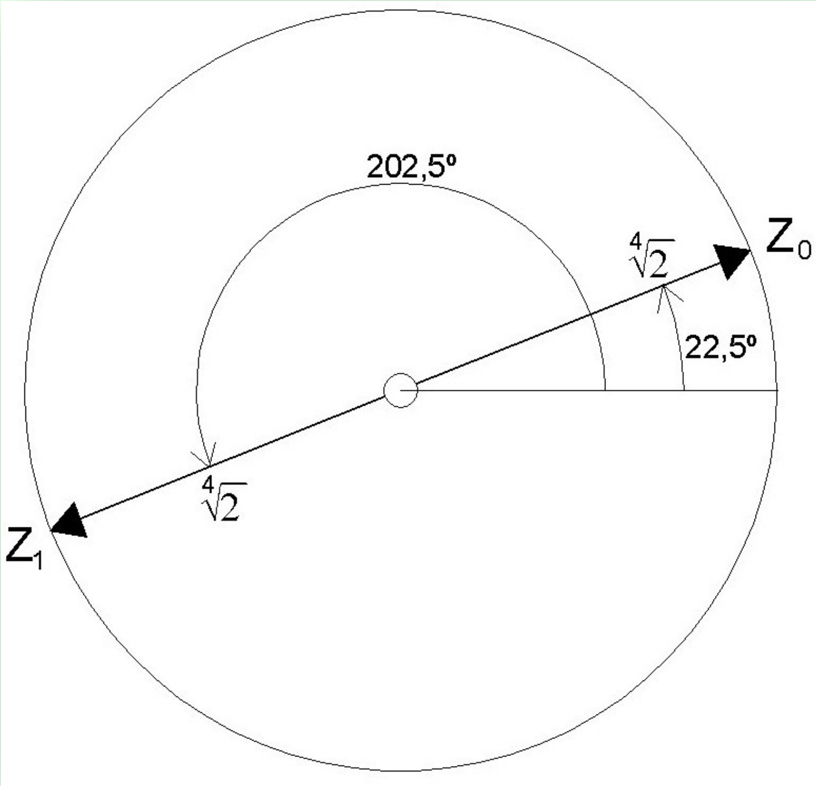
Hallar: a) $\sqrt{1+i}$ , b) $\sqrt[3]{1+i}$ .

*Solución:*

a) El radicando se puede expresar así: $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. Por lo tanto, el módulo será $s=\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$ y el argumento: $\phi=\dfrac{\pi/4+2k\pi}{2}$, con k $\in$ (0,1). Entonces, en su forma exponencial, las dos raíces obtenidas son:

$$\begin{cases} \text{Para } k = 0\text{, tenemos: } z_0=\sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{8}}. \\ \text{Para } k = 1\text{, tenemos: } z_1=\sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{9\pi}{8}}. \end{cases}$$

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:




Representación gráfica de las dos raíces.

b) Se trata ahora de resolver la ecuación: $z^3 = (1, 1)$

Se tiene: $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\theta=\text{arctg } 1=\left\langle \begin{matrix} 45º \\ 225º \end{matrix}\right.$

Por estar en el primer cuadrante del círculo, seleccionamos el caso: $\theta$ **= 45º**, con lo que:

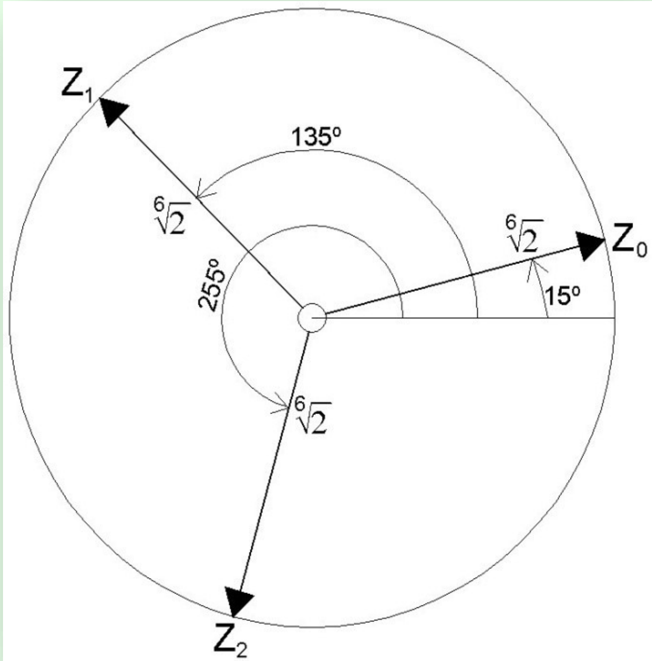
$$s=\sqrt[n]{r}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2}\,;\quad \phi=\frac{\theta}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}=\frac{45º}{3}+k\cdot 120º=15º+120º\cdot k\,;$$

[siendo s(cos $\phi$ + i sin $\phi$) la raíz n-ésima de r(cos $\theta$ + i sin $\theta$), o sea:

$\sqrt[n]{r(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)} = s(\cos\phi + i\cdot\sin\phi)$ ]; dando ahora valores k$\in$(0,1,2), se tiene que:

| RAÍCES | FORMA FACTORIAL | FORMA EXPONENCIAL | FORMA POLAR |
|---|---|---|---|
| $z_0$ (k=0) | $\sqrt[6]{2}(\cos 15^o + i\cdot\sin 15^o)$ | $\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}$ | $(\sqrt[6]{2})_{15^o}$ |
| $z_1$ (k=1) | $\sqrt[6]{2}(\cos 135^o + i\cdot\sin 135^o)$ | $\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$ | $(\sqrt[6]{2})_{135^o}$ |
| $z_2$ (k=2) | $\sqrt[6]{2}(\cos 255^o + i\cdot\sin 255^o)$ | $\sqrt[6]{2}\cdot e^{i\cdot\frac{17\pi}{12}}$ | $(\sqrt[6]{2})_{255^o}$ |

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:




Representación gráfica de las tres raíces.

En forma binómica o algebraica, dichas raíces son las siguientes:

$$z_0 \begin{cases} a = s\cdot\cos\phi = \sqrt[6]{2}\cdot\cos 15^o = 1'084215 \\ b = s\cdot\sin\phi = \sqrt[6]{2}\cdot\sin 15^o = 0'2905145 \end{cases} \Rightarrow \textit{1'084215 + 0'2905145i}$$

$$z_1 \begin{cases} a = s\cdot\cos\phi = \sqrt[6]{2}\cdot\cos 135^o = -0'7937004 \\ b = s\cdot\sin\phi = \sqrt[6]{2}\cdot\sin 135^o = 0'7937004 \end{cases} \Rightarrow \textit{-0'7937004 + 0'7937004i}$$

$$z_2 \begin{cases} a = s\cdot\cos\phi = \sqrt[6]{2}\cdot\cos 255^o = -0'2905145 \\ b = s\cdot\sin\phi = \sqrt[6]{2}\cdot\sin 255^o = -1'084215 \end{cases} \Rightarrow \textit{-0'2905145 - 1'084215i}$$

## 12. LOGARITMO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Al igual que sucede para los números reales, vamos a definir el logaritmo de un número complejo como la operación inversa de la exponencial, esto es:

$$z = \ln w \leftrightarrow e^z = w$$

Supóngase que $w = re^{i\theta}$ es un número complejo de módulo r y argumento $\theta$, entonces se tiene que:

$$e^z = r\, e^{i(\theta+2k\pi)} = w \Leftrightarrow z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad .$$

**Ejemplo**

Sea $1 = 1 \cdot e^{i(0)}$. Por tanto: $\ln(1) = \ln(1) + i(2k\pi) = 2k\pi i = 0$.

## 13. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON COEFICIENTES COMPLEJOS

Sea: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, / $\alpha, \beta, \gamma \in \{C\}$, $\forall\ \alpha \neq 0$ ;

Primero se calcula el "discriminante" complejo:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \ ,$$

después sus dos raíces cuadradas (que serán complejas opuestas) $\begin{cases} \delta \\ -\delta \end{cases}$

Las dos raíces buscadas de la ecuación son: $x_1 = \dfrac{-\beta+\delta}{2\alpha}; \quad x_2 = \dfrac{-\beta-\delta}{2\alpha};$

Si $\Delta = 0 \Rightarrow \delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ (raíz doble) $= -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ .

La descomposición factorial es la siguiente:

Si un polinomio es: $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_0$, $\forall\ \alpha_i \in \{C\}$ ; que admite las raíces complejas: $\gamma_i$, $\forall$ i $\in \{1, \ldots, n\}$ , se puede descomponer así:

$$\boxed{P(x) = \alpha_n(x - \gamma_1)\cdot(x - \gamma_2)\ldots(x - \gamma_n)}$$

## 14. SUCESIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS

La sucesión de complejos $(Z_n)$, con $Z_n = u_n + i\cdot v_n$ converge al número complejo a + bi si las sucesiones de reales $(u_n)$ y $(v_n)$ convergen a los coeficientes **a** y **b**, respectivamente. O sea:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty}(u_n + i\cdot v_n) = a + bi$$

## 15. DERIVACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

### 15.1. Introducción

La existencia de la derivada de una función compleja de variable compleja, tiene consecuencias muy importantes en lo que se refiere a las propiedades estructurales de la función. Precisamente, la investigación de esas consecuencias constituye el tema central o nuclear de la teoría de funciones de variable compleja.

### 15.2. Propiedad

*“Si w = f(z) es derivable en $z_0$, entonces f(z) es continua en $z_0$”*

Demostración:

Sea: f(z) derivable en $z_0$. Entonces se cumple que: $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\Delta z$

Luego: $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left[f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)\right] = f'(z_0)\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta z = 0$ , es decir, $\lim\limits_{\Delta z\to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$ .

Luego **f** es continua en , c.s.q.d.

Hay que tener en cuenta, al respecto, que el recíproco de esta propiedad no es cierto, en general. Así: $f(z) = |z|^2$ es continua en ***C*** y sin embargo, solo es derivable en: z = 0.

### 15.3. Operaciones con funciones analíticas

- Si f(z) y g(z) son funciones derivables en $z_0$, lo son también las siguientes funciones:

$$\begin{cases} f(z)+g(z) \\ \lambda f(z) \\ f(z)g(z) \\ \dfrac{f(z)}{g(z)} \quad \text{si} \quad g(z_0) \neq 0 \end{cases}$$

y sus derivadas vienen dadas por las mismas reglas de derivación que las funciones reales de variable real.

- Análogamente si f(z) y g(z) son analíticas en un dominio D lo son f + g, $\lambda \cdot f$, f·g en D y también f/g, si g(z) ≠ 0, $\forall z \in D$.

- Si w = f(z) es analítica en un dominio D y g(w) lo es un dominio que contiene la imagen de D por f, entonces la *función compuesta* $h(z) = g[f(z)]$ es analítica en D y $h'(z) = g'[f(z)].f'(z), \forall z \in D$.

- Si w = f(z) es analítica en un dominio D y f establece una biyección entre D y otro dominio D' en el plano w, existe entonces la *función inversa* y es analítica en D'. Además su derivada es: $\dfrac{1}{f'(z)}$.

- Las demostraciones de los apartados anteriores son formalmente idénticas al caso de funciones reales de variable real, dado que la definición formal de límite y de derivada resultan idénticas en ambos casos.

### 15.4. Condiciones de Cauchy-Riemann

Sea w = f(z) definida en un cierto dominio D. Se supondrá escrita en la forma f(z) = u(x,y) + iv(x,y). Se trata de saber las condiciones que deben cumplir u(x,y), v(x,y) para que f sea derivable en un punto $z_0 \in D$.

a) *Condiciones necesarias de derivabilidad*

- Teorema 1:

*Condición necesaria para que* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *sea derivable en el punto:* $z = x + iy \in D$ *es que existan las cuatro derivadas parciales* ***ux, uy, vx, vy*** *en (x,y) y cumplan en dicho punto las condiciones de Cauchy-Riemann* $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$*.*

Si es derivable, se verifica, además, que: $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$

Demostración:

Supongamos que existe f'(z). Entonces, por la propia definición de derivada:

$f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ . Este límite habrá de ser necesariamente el mismo cualquiera que sea el camino por el que $\Delta z \to 0$ . Hagamos tender a cero el $\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$ de dos formas distintas concretas. Los resultados, pues, habrán de coincidir.

- Hacemos tender a cero $\Delta z$ por valores reales, o sea $\Delta z = \Delta x$. Entonces resultará que:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}$$

Y tomando, ahora, límites cuando $\Delta x \to 0$, resulta que: $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$

- Hacemos ahora tender a cero $\Delta z$ por valores imaginarios: $\Delta z = i \cdot \Delta y$
  Entonces análogamente, se cumple que:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i\frac{v(x, y + \Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y}$$

Y tomando límites cuando: $\Delta z = i\cdot\Delta y \to 0, \Rightarrow f'(z) = v_y(x,y) - i\cdot u_y(x,y)$. Por tanto, se han obtenido dos expresiones diferentes para la derivada f'(z). Esto es:

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$$

Igualándolas resultará que: $\begin{cases} u_x(x,y) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \end{cases}$, c.s.q.d.

b) *Ejemplo*

- La función $f(z) = \bar{z} = x - i\cdot y$ no es derivable en ningún punto. Ahora comprobamos que, en efecto: $u_x = 1$ y $v_y = -1$ son distintas $\forall(x,y) \in$ ***C.***

- Se sabe que: $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ solo es derivable en z = 0. Ahora vemos que: $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = v_y = 0$. Y solo se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en (0,0), único punto donde dicha función podrá ser derivable. De hecho, el cumplimiento de las condiciones de Cauchy-Riemann en un z, no resulta suficiente para la derivabilidad de f(z) en z. Existen funciones que verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en un punto y no son derivables en él. Pero pueden añadirse condiciones adicionales a las condiciones de Cauchy-Riemann de tal forma que se obtengan condiciones suficientes de derivabilidad.

c) *Condiciones suficientes de derivabilidad*

Sea: $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ una función definida en un cierto dominio ***D***. Admitiremos, sin demostración, que una condición suficiente para que f(z) sea derivable en el punto: $z = x + i\cdot y \in D$, es que existan las derivadas parciales: $u_x$, $u_y$, $v_x$, $v_y$, en (x,y), que sean continuas en (x,y) y que cumplan, en dicho punto, las expresadas condiciones de Cauchy - Riemann.

## 15.5. Lemas importantes

Considérese ahora el operador: $L[y] = ay'' + by' + cy$ , donde *a*, *b* y *c* son constantes reales.

a) Lema 1. Se cumple que: $L[ue^{(\alpha+i\beta)x}] = [au''+p'(\alpha+i\beta)u'+p(\alpha+i\beta)u]\cdot e^{(\alpha+i\beta)x}$ ,

donde u = u(x) es una función dos veces derivable y p(r) es el polinomio característico: $p(r) = ar^2 + br + c$, y $p'(r) = 2ar + b$ su derivada.

En efecto se tiene que, llamando por: $\sigma = \alpha + i\beta$ :

$$\begin{cases} y = u\cdot e^{\sigma x} \\ y' = u'e^{\sigma x} + \sigma u e^{\sigma x} = (u'+\sigma u)e^{\sigma x} \\ y'' = u''e^{\sigma x} + u'\sigma e^{\sigma x} + \sigma u' e^{\sigma x} + \sigma^2 u e^{\sigma x} = (u''+2\sigma u'+\sigma^2 u)e^{\sigma x} \end{cases}$$

Luego también: $L[ue^{\sigma x}] = a(ue^{\sigma x})''+b(ue^{\sigma x})'+c(ue^{\sigma x}) =$

$$= (au''+2a\sigma u'+a\sigma^2 u + bu'+b\sigma u + cu)e^{\sigma x} = (au''+(2a\sigma + b)u'+(a\sigma^2 + b\sigma + c)u)e^{\sigma x}$$

b) Lema 2. Sea $z(x) = u(x) + i\cdot v(x)$ una solución compleja de:
$L[y] = ay'' + by' + cy = f(x) + i\cdot g(x)$ . Entonces $L[u] = f(x)$ y $L[v] = g(x)$ .

Veamos que: $\begin{cases} z'(x) = u'(x) + i\cdot v'(x) \\ z''(x) = u''(x) + i\cdot v''(x) \end{cases}$

$$az''(x) + bz'(x) + cz(x) = a(u''(x) + iv''(x) + b(u'(x) + iv'(x)) + c(u(x) + iv(x)) =$$
$$= (au''(x) + bu'(x) + cu(x)) + i(av''(x) + bv'(x) + cv(x))$$

Se sigue que: $L[z] = L[u(x) + i\cdot v(x)] = L[u(x)] + i\cdot L[v(x)]$

, de donde: $L[u(x)] + i\cdot Lv[(x)] = f(x) + i\cdot g(x) \Leftrightarrow L[u(x)] = f(x)\;\&\; L[v(x)] = g(x)$ .

# 16. INTEGRACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

## 16.1. Introducción

El desarrollo de la teoría de funciones de una variable compleja sigue un camino muy distinto al usado en la teoría de funciones de variable real. En esta última teoría, tras estudiar las funciones derivables, se estudian las funciones que admiten derivadas de órdenes superiores, luego las indefinidamente derivables y, por último, las que admiten un desarrollo de Taylor en serie de potencias.

En la teoría de funciones de variable compleja se comienza estudiando las funciones analíticas. Forman éstas una clase tan restringida que automáticamente admiten derivadas de cualquier orden en cada punto en que sean analíticas. Más aún, admiten desarrollo en serie de Taylor en un entorno de cada punto de analiticidad. Pero supuesta f(z) analítica en un dominio, no ha sido posible demostrar la existencia de derivadas de órdenes superiores, sin recurrir a la integración compleja. En el desarrollo de Cauchy de la teoría de funciones de variable compleja, todo se hace depender del cálculo integral complejo, incluso en cuestiones que aparentemente solo se refieren al cálculo diferencial. Por tanto, constituye una parte muy importante de la teoría de funciones de variable compleja, la teoría de las integrales curvilíneas, junto con la de las series de potencias. Se caracterizan ambas por su elegancia y por su gran utilidad en la matemática, tanto la pura como la aplicada, siendo esta última la que constituye, por cierto, el objeto del presente curso.

## 16.2. Integral definida de una función compleja de variable real

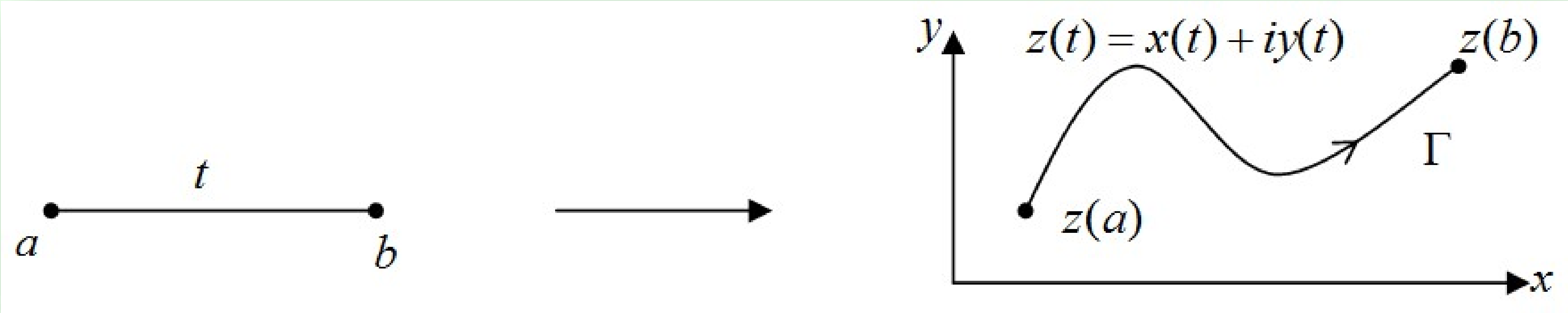
Se trata de una generalización inmediata de la integral simple real.

a) *Definiciones previas*

- Una *función compleja de variable real* es una función de la forma:

$$f(t) = u(t) + i \cdot v(t) \text{ ó } z(t) = x(t) + i \cdot y(t), \text{ con } t \in I = [a,b]$$

- Dicha función se dice *continua* en I, si lo son x(t) e y(t). Obsérvese que una *tal función define una curva* $\Gamma$ *en el plano complejo*, recorrida en un sentido determinado.




Función compleja de variable real.

- La función anterior se dice *continua a trozos* en I, si x(t) e y(t) son continuas a trozos en I (esto es, acotadas y continuas en I excepto en un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie).

- Se dice que: z(t) = x(t) + i·y(t) es *derivable a trozos* en I si lo son x(t) e y(t). Se define entonces la *función derivada* como:

$$z'(t) = x'(t) + i \cdot y'(t)$$

- Se dice que: z(t) = x(t) + i·y(t) es *regular* en I, o que lo es la correspondiente curva , si existen x´(t) e y´(t) y son continuas y no nulas ambas en I.

- Se dice que: z(t) = x(t) + i·y(t) es *regular a trozos* en I, o que lo es la correspondiente curva , si x(t) e y(t) son continuas en I, existiendo y siendo continuas, x´(t) e y´(t) en I, excepto a lo sumo en un número finito de puntos en los que deben existir y ser continuas las derivadas laterales.

- *Un contorno* es una curva regular a trozos y simple o de Jordan.

b) *Definición*

Dada la función compleja de variable real: z(t) = x(t) + i·y(t), continua a trozos en [a,b], se define la integral definida de z(t) sobre [a,b] como:

$$\int_a^b z(t)\cdot dt = \int_a^b x(t)\cdot dt + i\int_a^b y(t)\cdot dt$$

c) *Propiedades*

De la definición y de las propiedades de la integral definida de funciones reales de variable real, se deduce de forma inmediata, siendo z(t), $z_1$(t), $z_2$(t), continuas a intervalos en I = [a,b], que:

- $\int_a^b z(t)\cdot dt = -\int_b^a z(t)\cdot dt$ (inversión de los límites de integración)
- $\int_a^b [z_1(t) + z_2(t)]\cdot dt = \int_a^b z_1(t)\cdot dt + \int_a^b z_2(t)\cdot dt$ (descomposición)
- $\int_a^b z(t)\cdot dt = \int_a^c z(t)\cdot dt + \int_c^b z(t)\cdot dt$ , si a < c < b (aditiva del intervalo de integración)

También se cumple que:

- $\mathrm{Re}\int_a^b z(t)\cdot dt = \int_a^b \mathrm{Re}[z(t)]\cdot dt$ .
- $\int_a^b \alpha\cdot z(t)\cdot dt = \alpha\cdot\int_a^b z(t)\cdot dt$ , para todo α∈C
- Si la función compleja de variable real Z(t) verifica que: Z´(t) = z(t), entonces se cumple también la regla de Barrow:

$$\int_a^b z(t)\cdot dt = Z(b) - Z(a)$$

Se verifica también que: $\left|\int_a^b z(t)\cdot dt\right| \le \int_a^b |z(t)|\cdot dt$

Demostración: Sea: $\int_a^b z(t)\cdot dt = R.e^{i\theta}$ . Entonces: $\left|\int_a^b z(t)\cdot dt\right| = R = e^{-i\theta}\int_a^b z(t)\cdot dt = \int_a^b e^{-i\theta} z(t)\cdot dt$

Si: $f(t) = u(t) + i\cdot v(t)$ verifica que: $\int_a^b f(t)\cdot dt$ es real, entonces:

$\int_a^b f(t)\cdot dt = \int_a^b \mathrm{Re}[f(t)]\cdot dt$ . La integral: $\int_a^b e^{-i\theta} z(t)\cdot dt$ es real por ser igual a R. Luego:

$$\left|\int_a^b z(t)\cdot dt\right| = \int_a^b e^{-i\theta} z(t)\cdot dt = \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta} z(t)\right]\cdot dt$$

Ahora, el integrando o función subintegral es una función real de variable real y además se tiene que:

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\theta} z(t)\right] \le \left|e^{-i\theta} z(t)\right| = |z(t)|$$

Luego, aplicando la correspondiente propiedad del caso real, se tiene que:

$$\left|\int_a^b z(t)\cdot dt\right| = \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta} z(t)\right] dt \le \int_a^b |z(t)|\cdot dt$$

# OTRAS PUBLICACIONES DE UNED-TORTOSA

## (Colección CADUP-Estudios)

## *Otras publicaciones del Centro Asociado de Tortosa-UNED*

1. **La educación en la crítica: unas consideraciones pedagógicas**
   Miguel Ángel García Bordas. 20 pág., 1975
2. **La internacionalización del sistema tributario**
   Antonio Barrera de Irimo. 28 pág., 1976
3. **Proteccionismo y política de precios**
   Tomás Allende y García Baxter. 24 pág., 1976
4. **Los jesuitas españoles y la cultura hispano-italiana del s. XVIII**
   Guido Ettore Mazzeo. 20 pág., 1977
5. **Costums de Tortosa**
   A. A. V. V. 408 pág., 1978
6. **Tortosa: Cuatro estudios Histórico-Educativos**
   A. A. V. V. 184 pág., 1983
7. **CADUP - ESTUDIOS 1987**
   A. A. V. V. 190 pág., 1987
8. **CADUP - ESTUDIOS 1988**
   A. A. V. V. 256 pág., 1989
9. **CADUP - ESTUDIOS 1989**
   A. A. V. V. 346 pág., 1990
10. **CADUP - ESTUDIOS 1990/91 “Análisis Territorial”**
    Josep Maria Franquet Bernis. 574 pág., 1991
11. **CADUP - ESTUDIOS 1992/95 “Revolución y Restauración Católica en la Diócesis de Tortosa (1862/1879)”**
    Carmen Ibáñez Gisbert. 504 pág., 1995
12. **CADUP - ESTUDIOS 1996**
    A. A. V. V. 190 pág., 1996
13. **Cinco años después de la firma del Tratado de la U.E.**
    Jordi Sardà Pons. 20 pág., 1997
14. **Els efectes de l’experiència primerenca en l’emotivitat i les capacitats cognitives**
    Pilar Ferré Romeu. 24 pág., 1997
15. **CADUP ESTUDIOS 1997-98 “Psicología hoy”**
    A. A. V. V. 128 pág., 1998
16. **Reflexiones sobre la responsabilidad de los ciudadanos ante la Europa post-euro**
    José Sánchez Asiaín. 31 pág., 1999
17. **La Generación de 1898, según las memorias de D. Pío Baroja**
    Javier Martínez Palacio. 88 pág., 1999
18. **La màgia dels números parlants**
    Eugeni Perea Simón. 32 pág., 2000
19. **El vent i la pluja a les comarques meridionals de l’Ebre**
    Josep Maria Franquet Bernis. 104 pág., 2001
20. **Les limitacions dels conreus per les temperatures extremes**
    Josep Maria Franquet Bernis. 80 pág., 2002
21. **La seducción de las palabras**
    Natalia Català Torres. 32 pág., 2002
22. **Classificació climàtica de la Regió Catalana de l’Ebre**
    Josep Maria Franquet Bernis. 96 pág., 2004
23. **L’escriptor tortosí Jaume Tió i Noé segons les seves obres**
    Juan Antonio González Gutiérrez. 50 pág., 2005
24. **El estudio operativo de la psicología. Una aproximación matemática**
    Josep Maria Franquet Bernis. 372 pág., 2008
25. **Las perífrasis verbales de la lengua catalana en los siglos XVI-XX. (hasta la normativización de la lengua)**
    Juan Antonio González Gutiérrez. 304 pág., 2008
26. **El caudal mínimo medioambiental del tramo inferior del río Ebro**
    Josep Maria Franquet Bernis. 344 pág., 2009
27. **Delitos sexuales. Anteproyecto de reforma del código penal de 2008. Defensa en procesos con víctimas menores. Castración química**
    Javier Ignacio Prieto Rodríguez. 88 pág., 2009

28. **La ley española ante el *“Mobbing”***
Javier Ignacio Prieto Rodríguez. 80 pág., 2010

29. **Nivelación de terrenos por regresión tridimensional**
Josep Maria Franquet Bernis / Antonio Querol Gómez. 488 pág., 2010

30. **Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas. Curso práctico**
Josep Maria Franquet Bernis. 750 pág., 2013

31. **Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes**
Josep Maria Franquet Bernis. 916 pág., 2014

32. **Quaranta anys del Centre Associat a la UNED de Tortosa. *Cuarenta años del Centro Associado a la UNED de Tortosa***
Juan Antonio González Gutiérrez. 156 pág., 2014

33. **Tortosa: Dinamització funcional del Casc Antic**
Antonio Querol Gómez. 244 pág., 2015

34. **El caudal mínimo medioambiental del tramo inferior del río Ebro (segona edició)**
Josep Maria Franquet Bernis. 354 pág., 2016

35. **Episcopologi Dertosense. Introducció a la història de la societat i de l’Església de Tortosa**
Ramon Miravall Dolç. 1.016 pág., 2016

36. **Ecuaciones diferenciales microeconómicas en derivadas parciales**
Josep Maria Franquet Bernis. 508 pág., 2016

37. **Aproximació al marc teòric del Programa d’Intervenció Socioeducativa 6-16**
Inés Solé Vericat. 172 pág., 2017

38. **Problemática del Río Ebro en su tramo final**
Josep Maria Franquet Bernis, Miquel Angel Albacar Damian, Felipe Tallada de Esteve. 352 pág., 2017

39. **El Vino ¿arte o alimento natural?**
Jaime Gelabert Orench. 772 pág., 2018

40. **La comarca del Montsià**
Antonio Querol Gómez. 318 pág., 2018

41. **Hemingway. *Prosas de Manuel Pérez Bonfill***
Manuel Pérez Bonfill. 128 pág., 2018

42. **Francesc Mestre i Noè. *El estímulo asociativo del Bajo Ebro (1886-1936)***
Núria Menasanch i Martí. 124 pág., 2019

43. **La comarca del Baix Ebre**
Antonio Querol Gómez. 308 pág., 2019

44. **Dimensionamiento y distribución de las conducciones hidráulicas**
Josep Maria Franquet Bernis. 972 pág., 2019

45. **Modelo estadístico de distribución espacial de las acequias en una zona regable**
Josep Maria Franquet Bernis. 152 pág., 2019

46. **La comarca de la Ribera d’Ebre. *Una economia basada en el sector energètic***
Antonio Querol Gómez. 262 pág., 2019

47. **Octogenaris que he conegut *(Altres Homenots catalans)***
Xavier Garcia Pujades. 200 pág., 2020

48. **El Col·legi Sant Josep de Tortosa *(Aproximació a la seva història)***
Juan A. González Gutiérrez - Roc Salvadó Poy.
140 pág., 2020

49. **La comarca de la Terra Alta. *Una base econòmica agrícola. Celler de les Terres de l’Ebre***
Antonio Querol Gómez. 252 pág., 2020

50. **Curso Práctico de Análisis Matemático Superior. *Con aplicaciones a la teoría económica y la ingeniería***
Josep Maria Franquet Bernis. mini CD. 728 pág., 2020

51. **Antonio Saura Primitivo**
Maria Teresa Borràs Pàmies. 512 pág., 2020