

Un modelo para el control de cambio de forma de alas multifuncionales basado en interpolación G^2 de Hermite para curvas 3D

Agostina C. Aichino¹, Santiago Ribero¹, Martín E. Pérez Segura^{1,2}, Emmanuel Beltramo^{1,2}, Bruno A. Rocca^{1,3} y Sergio Preidikman^{1,2}

¹ Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología

(IDIT) - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas CONICET, Argentina

² Departamento de Estructuras, F.C.E.F. y N., Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

³ Bergen Offshore Wind Centre (BOW), Geophysical Institute, University of Bergen, Norway

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo cinemático para el control de cambio de forma de alas multifuncionales (“multi-functional morphing wings”) inspiradas en la biología. El modelo consiste en un sistema de nervaduras flexibles: una nervadura principal en el sentido de la envergadura y un conjunto de nervaduras transversales en el sentido de la cuerda. Este sistema de nervaduras proporciona rigidez al ala y permite controlar dinámicamente su forma, lo que da lugar a un diseño comparativamente liviano para el ala *morphing*. La forma de la nervadura principal se obtiene mediante la interpolación de curvas 3D por medio de polinomios de Hermite sujetas a condiciones de continuidad G^2 en los extremos e inextensibilidad. Las nervaduras transversales constituyen, a su vez, líneas medias de perfiles alares con capacidad para deformarse. La efectividad del modelo propuesto para el control de movimiento y de cambio de forma se demuestra a través de una serie de simulaciones.

Palabras clave: continuidad geométrica G^2 ; interpolación de Hermite 3D; alas *morphing*.

Abstract

This article presents a kinematic model to address the shape control of biologically inspired multi-functional morphing wings. The model consists in a flexible venation system that provides structural support and a means for dynamically control the wing's configuration. As a comparatively light design, the morphing wing is formed by a main spanwise vein, and a set of transversal veins that in turn represent the mean lines of morphing airfoils. A Hermite interpolation problem for a 3D curve is solved to find the veins, subjected to G^2 continuity at the end points and inextensibility constrains. Throughout a series of simulations, the proposed approach has proven to be an effective tool for controlling and adapting the morphing wing.

Keywords: G^2 geometric continuity; 3D Hermite interpolation; morphing wings.

1. Introducción

En la actualidad, la industria aeroespacial se encuentra en la búsqueda continua de tecnologías que puedan satisfacer la creciente demanda de aeronaves más livianas, eficientes y amigables con el medio ambiente. El desarrollo de estructuras inteligentes (“smart structures”) tiene el potencial de superar los límites que presentan las aeronaves convencionales, ya que

cuentan con la capacidad de adaptarse activamente a diferentes condiciones de operación [1]. Dentro de las estructuras inteligentes, las alas multifuncionales que cambian de forma (“multi-functional morphing wings”) representan una solución viable para optimizar el desempeño de la aeronave a través de la incorporación de controles activos que permitan modificar la distribución de cargas aerodinámicas sobre el ala, dando lugar a diseños más livianos y

eficientes [2]. En este contexto, se adopta el vocablo *morphing* para referirse al cambio de forma controlado del ala de una aeronave.

El control activo de la distribución de sustentación a lo largo de la envergadura del ala presenta un enfoque novel que ha mostrado una gran versatilidad en numerosas aplicaciones [3]. En general, los sistemas de control se basan en dos aspectos que, en algunos casos, pueden combinarse: *i*) modificar las propiedades del ala a lo largo de la envergadura; y *ii*) alterar la geometría de los perfiles alares. En algunos casos, el control de la distribución de cargas aerodinámicas se realiza a partir de la disposición a lo largo de la envergadura de superficies sustentadoras móviles que actúan independientemente, con los objetivos de mejorar la respuesta ante ráfagas [4], proporcionar mayor controlabilidad [5], [6] y/o suavizar los esfuerzos sobre la estructura [7], entre otros.

Por su parte, el concepto de modificar la geometría o forma de una superficie alar no es moderna [8], sin embargo, hacerlo activamente para modificar la distribución de sustentación sin utilizar superficies articuladas representa un desafío. Una solución constructiva, presentada por Swei y Nguyen [9], consiste en un sistema de flaps de cuerda continua que incorpora un amortiguador de masa sintonizado para reducir vibraciones. Los materiales inteligentes, como las aleaciones con memoria de forma, también pueden ser utilizados como mecanismos para controlar la combadura de los perfiles aerodinámicos [10]. Woods et al. [11], por otro lado, proponen el uso de un material elástico que forma una transición suave entre las superficies deformables y las rígidas. Muchos investigadores han recurrido al biomimetismo para proponer alternativas, como por ejemplo el uso de aletas independientes distribuidas a lo largo de la envergadura que se accionan neumáticamente para simular el movimiento de las plumas de las alas de algunas especies de aves [12]. En esta línea, Stanford et al. [13] presentan un diseño optimizado para un ala plegable de un micro vehículo aéreo inspirada en los patrones de nervaduras de las alas de insectos.

En este trabajo se presenta un modelo para estudiar la cinemática asociada al cambio de forma continuo (sin discontinuidades) de alas, como parte de un concepto de ala multifuncional que incorpora el control activo de la distribución de sustentación a lo largo de la envergadura. Inspirado en la biología, el modelo está formado por un sistema de nervaduras flexibles que aporta rigidez a la estructura multifuncional del ala y permite, adicionalmente, controlar dinámicamente su forma. Este sistema de nervaduras está compuesto por: *i*) una nervadura principal (NP) en el sentido de la envergadura; *ii*) múltiples nervaduras secundarias (NS) transversales a la nervadura principal, orientadas en el sentido de la cuerda; y *iii*) un conjunto de vinculaciones entre ambos tipos de nervaduras.

En la Figura 1 se presenta un esquema conceptual del sistema de nervaduras flexibles para control y cambio

de forma aplicado a un HALE UAV (“High Altitude, Long Endurance Unmanned Aerial Vehicle”).

La NP se modela como una curva inextensible descrita por tramos mediante polinomios de Hermite 3D conectados entre sí. Las diferentes curvas que componen a la NP se unen satisfaciendo condiciones de continuidad G^2 . En los dos extremos libres se exigen condiciones de continuidad G^1 .

Las NS se representan por curvas inextensibles que se describen por medio de polinomios clásicos (2D) de Hermite, contenidos en planos normales a la NP. Las NS, a su vez, son consideradas como las líneas medias de perfiles alares no delgados con capacidad para deformarse dinámicamente.

Las vinculaciones entre nervaduras se modelan como conexiones rígidas en puntos definidos a priori denominados *nodos*. Según sus características, estos nodos pueden ser:

- *Nodos Maestros Libres* (NML): representan las conexiones entre la NP y las NS ubicadas en ambos extremos de la NP, donde se impone continuidad G^1 .
- *Nodos Maestros* (NM): representan las uniones entre las curvas que describen a la NP donde se impone continuidad G^2 .
- *Nodos Esclavos* (NE): conexiones entre la NP y las NS ubicadas entre dos nodos maestros.

Finalmente, la forma del ala será el resultado de la combinación de deformaciones en el sentido de la envergadura y alteraciones en la geometría de los perfiles alares, comandadas por el movimiento de las respectivas nervaduras. Según el conocimiento de los autores, esta es la primera vez que se combinan los polinomios de Hermite con una técnica de parametrización de longitud de arco constante para dar origen a un mecanismo finamente controlable para el cambio de forma de un ala *morphing*.

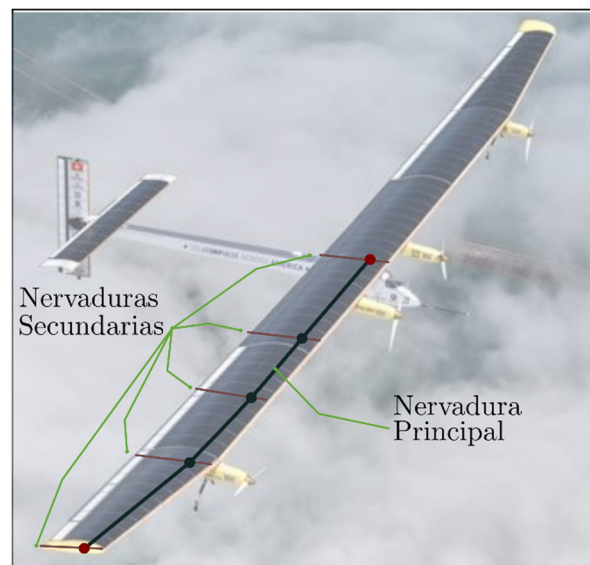


Figura 1: Modelo de la estructura del ala: Nervadura principal y nervaduras secundarias. Fuente: ©Solar Impulse.

El presente artículo se organiza como sigue: en la sección 2 se presentan conceptos preliminares junto con la formulación matemática del problema a resolver; en la sección 3 se detalla el modelo geométrico implementado; en la sección 4 se muestran resultados numéricos obtenidos con el modelo presentado; y, finalmente, en la sección 5 se presentan las conclusiones obtenidas.

2. Interpolación de curvas 3D

En esta sección se presentan los aspectos fundamentales asociados a la interpolación de curvas 3D por medio de polinomios de Hermite y sujeta a condiciones de continuidad G^1 en los extremos. De aquí en adelante se utilizará el acrónimo ICG para hacer referencia a problemas de Interpolación con Continuidad Geométrica. Si bien las ideas presentadas en este trabajo están inspiradas casi totalmente en [14], aquí se requiere, como restricción adicional en el proceso de interpolación, la conservación de la longitud de arco de las curvas que describen la NP.

2.1. Preliminares matemáticos

Para facilitar la lectura y comprensión de la formulación del problema de interpolación por medio de polinomios de Hermite en \mathbb{R}^3 se introducen algunos resultados clásicos de geometría diferencial.

Definición 2.1.1 – Curva. Una curva embebida en un espacio \mathbb{R}^n es la imagen de un mapa continuo $\mathbf{c}: [\eta_0, \eta_1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \eta_0 < \eta_1$. En lo que sigue se utilizará C_c para denotar la curva generada por \mathbf{c} ; es decir, $C_c = \text{Im}(\mathbf{c})$. Al mapa continuo \mathbf{c} se lo denomina *parametrización* o *representación paramétrica* de C_c .

Definición 2.1.2 – Congruencia. Dos objetos geométricos \mathcal{A} y \mathcal{B} en \mathbb{R}^n son congruentes si $\mathcal{A} = \mathbf{T}(\mathcal{B})$, donde $\mathbf{T}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa un movimiento rígido de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n (transformaciones afines). Es decir, \mathcal{A} y \mathcal{B} son congruentes si existe una isometría que los relaciona, tal como una traslación, rotación o reflexión o una composición de ellos.

Definición 2.1.3 – Continuidad G^n . Sean $\mathbf{c}_1(\eta)$ y $\mathbf{c}_2(\xi)$ dos parametrizaciones regulares con $\eta \in [\eta_0, \eta_1]$ y $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$ tal que $\mathbf{c}_1(\eta_1) = \mathbf{c}_2(\xi_0) = \mathbf{r}$, donde \mathbf{r} es un punto simple de $C_{c_1} \cup C_{c_2}$. Si las parametrizaciones naturales de \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 en \mathbf{r} tienen continuidad C^n , entonces tales curvas tienen continuidad geométrica G^n en \mathbf{r} [15].

Aunque la definición 2.1.3 es correcta, de acuerdo a [15] ésta no provee las restricciones de continuidad necesarias para construir curvas geoméricamente continuas. Sobre esta base, a continuación se presenta un resultado importante en forma de teorema (sin demostración) que permite establecer la maquinaria

analítica necesaria para generar las ecuaciones de restricción asociadas a un problema de ICG.

Teorema 2.1.1 – Continuidad G^n . Sean $\mathbf{c}_1(\eta)$ y $\mathbf{c}_2(\xi)$ dos parametrizaciones regulares C^n tal que $\mathbf{c}_1(\eta_1) = \mathbf{c}_2(\xi_0) = \mathbf{r}$, donde \mathbf{r} es un punto simple de $C_{c_1} \cup C_{c_2}$. Tales curvas tienen continuidad G^n en \mathbf{r} si y sólo si existen números reales $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \dots, \beta_n > 0$ tales que,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{c}_1}{d\eta} \right|_{\mathbf{r}} &= \beta_1 \left. \frac{d\mathbf{c}_2}{d\xi} \right|_{\mathbf{r}} \\ \left. \frac{d^2\mathbf{c}_1}{d\eta^2} \right|_{\mathbf{r}} &= \beta_1^2 \left. \frac{d^2\mathbf{c}_2}{d\xi^2} \right|_{\mathbf{r}} + \beta_2 \left. \frac{d\mathbf{c}_2}{d\xi} \right|_{\mathbf{r}} \\ &\vdots \\ \left. \frac{d^n\mathbf{c}_1}{d\eta^n} \right|_{\mathbf{r}} &= \beta_1^n \left. \frac{d^n\mathbf{c}_2}{d\xi^n} \right|_{\mathbf{r}} + \dots + \beta_n \left. \frac{d\mathbf{c}_2}{d\xi} \right|_{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (1)$$

2.2. Polinomios de Hermite 3D

Con el objetivo de describir el proceso de ICG por medio de polinomios de Hermite en el contexto de alas mutantes se introduce un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales (η, y, z) asociadas con el marco de referencia global $\mathcal{E} = \{o, \hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$. Considere que la envergadura del ala mutante (EAM) es representada en su configuración de referencia por medio de un elemento estructural sin curvatura (recta) C_q de longitud L alineada con el vector unitario $\hat{\mathbf{E}}_1$. El elemento C_q tiene la parametrización trivial $\mathbf{q}(\eta) = \eta \hat{\mathbf{E}}_1$ con $\eta \in [0, L]$. Cuando el mecanismo de *morphing* es activado, la envergadura del ala es deformada a una nueva configuración (configuración deformada), donde la EAM es representada matemáticamente por la curva C_q^d , parametrizada por $\mathbf{q}^d(\xi) = \xi \hat{\mathbf{E}}_1 + g^2(\xi) \hat{\mathbf{E}}_2 + g^3(\xi) \hat{\mathbf{E}}_3$, $\xi \in [0, \eta^m]$ con $\eta^m \leq L$, tal que su longitud de arco se mantiene constante e igual a L (Figura 2).

Las condiciones provistas por el mecanismo de *morphing* en conjunto con la restricción de longitud de arco constante se enuncian a continuación:

1. Desplazamiento a lo largo de $\hat{\mathbf{E}}_2$ en $\xi = 0$:

$$\mathbf{q}^d(0) \cdot \hat{\mathbf{E}}_2 = 0.$$

2. Desplazamiento a lo largo de $\hat{\mathbf{E}}_3$ en $\xi = 0$:

$$\mathbf{q}^d(0) \cdot \hat{\mathbf{E}}_3 = 0.$$

3. Vector tangente en $\xi = 0$:

$$\mathbf{q}^{d'}(0) / \|\mathbf{q}^{d'}(0)\| = \hat{\mathbf{T}}_0.$$

4. Desplazamiento a lo largo de $\hat{\mathbf{E}}_2$ en $\xi = \eta^m$:

$$\mathbf{q}^d(\eta^m) \cdot \hat{\mathbf{E}}_2 = y_1.$$

5. Desplazamiento a lo largo de $\hat{\mathbf{E}}_3$ en $\xi = \eta^m$:

$$\mathbf{q}^d(\eta^m) \cdot \hat{\mathbf{E}}_3 = z_1.$$

6. Vector tangente en $\xi = \eta^m$:

$$\mathbf{q}^{d'}(\eta^m) / \|\mathbf{q}^{d'}(\eta^m)\| = \hat{\mathbf{T}}_1.$$

7. Longitud de arco constante:

$$\int_0^{\eta^m} \|\mathbf{q}^{d'}(\xi)\| d\xi - L = 0.$$

donde $(\cdot)'$ denota derivada respecto a la variable ξ .

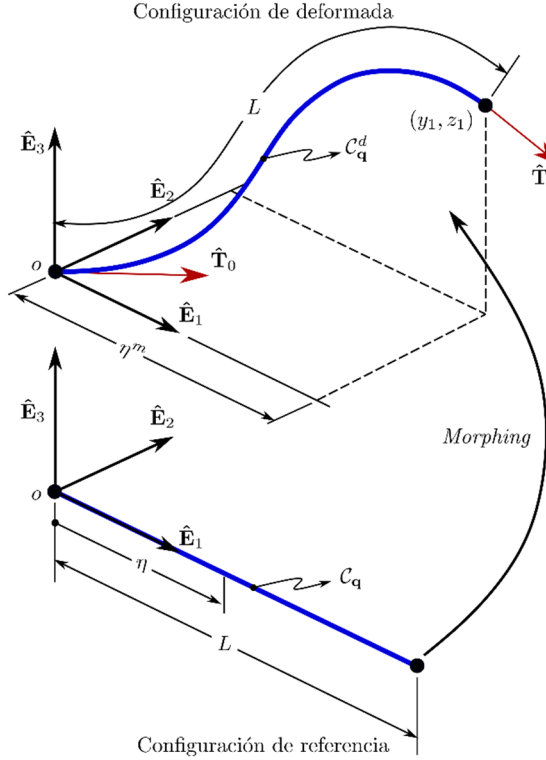


Figura 2: Representación de C_q (configuración de referencia) y C_q^d (configuración deformada).

De acuerdo a lo expuesto anteriormente se puede enunciar el problema de ICG como sigue:

Tabla 1: Problema ICG.

Interpolación 3D

Encontrar $\mathbf{q}^d(\xi): [0, \eta^m] \rightarrow \mathbb{R}^3$ por medio de una interpolación 3D de polinomios de Hermite sujeta a las condiciones 1 a 7.

Si bien las condiciones 3 y 6 son vectoriales y, por lo tanto, proveen tres ecuaciones escalares cada una de ellas, éstas no son independientes entre sí debido a la restricción implícita asociada a la longitud unitaria de $\hat{\mathbf{T}}_0$ y $\hat{\mathbf{T}}_1$. Es decir, $\|\hat{\mathbf{T}}_0\| = 1$ y $\|\hat{\mathbf{T}}_1\| = 1$ implican:

$$\mathbf{q}^d(0) \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 = 1 = \|\mathbf{q}^{d'}(0)\| T_{01},$$

$$\mathbf{q}^d(0) \cdot \hat{\mathbf{E}}_2 = g^{2'}(0) = \|\mathbf{q}^{d'}(0)\| T_{02},$$

$$\mathbf{q}^d(0) \cdot \hat{\mathbf{E}}_3 = g^{3'}(0) = \|\mathbf{q}^{d'}(0)\| T_{03}, \quad (2)$$

donde $\hat{\mathbf{T}}_0 = \sum_{k=1}^3 T_{0k} \hat{\mathbf{E}}_k$ y $\sqrt{T_{01}^2 + T_{02}^2 + T_{03}^2} = 1$. Sobre esta base, el problema de ICG enunciado previamente se puede reescribir como:

Tabla 2: Problema ICG Tipo I.

Problema Tipo I

Encontrar $g^2(\xi) = \sum_{k=0}^3 a_k \xi^k$ y $g^3(\xi) = \sum_{k=0}^3 b_k \xi^k$ con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ y $\eta^m \in [0, L]$ tal que,

1. $g^2(0) = 0,$
2. $g^3(0) = 0,$
3. $g^{2'}(0) = \|\mathbf{q}^{d'}(0)\| T_{02},$
4. $g^{3'}(0) = \|\mathbf{q}^{d'}(0)\| T_{03},$
5. $g^2(\eta^m) = y_1,$
6. $g^3(\eta^m) = z_1,$
7. $g^{2'}(\eta^m) = \|\mathbf{q}^{d'}(\eta^m)\| T_{12},$
8. $g^{3'}(\eta^m) = \|\mathbf{q}^{d'}(\eta^m)\| T_{13},$
9. $\int_0^{\eta^m} \|\mathbf{q}^{d'}(\xi)\| d\xi - L = 0.$

Como se mencionó en la definición del problema I (Tabla 2), el límite de la integral en la última condición es, también, una incógnita del problema, la cual en conjunto con las condiciones 3, 4, 7 y 8 transforman el problema de ICG en un problema de interpolación 3D que involucra, a su vez, la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas altamente no lineales.

2.3. ICG múltiple de curvas 3D

En esta subsección se generaliza el problema de interpolación expuesto en la subsección 2.2 para el caso en que la EAM esté compuesta por un número n_{el} de elementos *morphing*. Para ello, se considera que la EAM es representada en su configuración de referencia (inicialmente recta, de longitud L y alineada con $\hat{\mathbf{E}}_1$) por la curva C_q , cuya parametrización es $\mathbf{q}(\eta) = \eta \hat{\mathbf{E}}_1$ con $\eta \in [0, L]$. C_q es representada, a su vez, por la unión de un conjunto finito de curvas C_{q_k} tal que $C_q = \cup_{k=1}^{n_{el}} C_{q_k}$. Cada curva componente tiene la parametrización trivial,

$$\mathbf{q}_k = (l_k + \eta_k) \hat{\mathbf{E}}_1 \text{ con } \eta_k \in [0, L_k], \quad (4)$$

donde L_k es la longitud de cada C_{q_k} y $l_k = \sum_{i=1}^{k-1} L_i$. Sin pérdida de generalidad, se asume que las curvas componentes están numeradas en forma consecutiva y que los puntos de conexión entre ellas (NM) son *simples*. Adicionalmente se asume que las curvas C_{q_1} en $\mathbf{q}_1(0)$ (raíz de la EAM) y $C_{q_{n_{el}}}$ en $\mathbf{q}_{n_{el}}(L_{n_{el}})$ (puntera de la EAM) no poseen puntos de conexión y por lo tanto son considerados NML. En éstos se impondrán las llamadas *condiciones libres*. Localmente, los nodos ubicados en $\mathbf{q}_k(0)$ y en $\mathbf{q}_k(L_k)$ son llamados NM 1 y NM 2, respectivamente (ver Figura 3).

En la configuración deformada, la EAM es representada por la curva $C_q^d = \cup_{k=1}^{n_{el}} C_{q_k}^d$. Para facilitar la interpolación de cada tramo $C_{q_k}^d$ se sigue el siguiente procedimiento en orden:

1. \mathbf{q}_k , en su configuración de referencia, en conjunto con las condiciones de interpolación para sus nodos son mapeados vía una transformación congruente $\mathbf{T}_k \in SE(3)$ al marco de referencia local $\mathcal{E}^k = \{o_k, \hat{\mathbf{E}}_1^k, \hat{\mathbf{E}}_2^k, \hat{\mathbf{E}}_3^k\}$ de manera que (4) se reduce a,

$$\bar{\mathbf{q}}_k = \eta_k \hat{\mathbf{E}}_1 \text{ con } \eta_k \in [0, L_k] \quad (5)$$

2. Si el nodo 1 de C_{q_k} no es un NML, entonces se impone adicionalmente la condición de continuidad geométrica G^2 sobre dicho nodo.
3. Se encuentra $\bar{\mathbf{q}}_k^d(\xi_k) = \xi_k \hat{\mathbf{E}}_1 + g_k^2(\xi_k) \hat{\mathbf{E}}_2 + \xi_k \in [0, \eta_k^m]$ con $\eta_k^m \leq L_k$, tal que $\bar{\mathbf{q}}_k^d(\xi_k)$ cumple con las *condiciones libres*, de longitud de arco constante y continuidad geométrica G^1 o G^2 , según corresponda.
4. $\bar{\mathbf{q}}_k^d(\xi_k)$ es mapeada vía \mathbf{T}_k^{-1} al marco de referencia global \mathcal{E} , $\mathbf{q}_k^d(\xi_k) = \mathbf{T}_k^{-1} \bar{\mathbf{q}}_k^d(\xi_k)$.

Las condiciones de interpolación para C_q^d se especifican a continuación:

1. En cada NM se imponen condiciones de continuidad geométrica G^1 .
2. En cada NML se impone el valor del vector desplazamiento y el vector tangente. En general, se asume que $\mathbf{q}_1^d(0) = \mathbf{0}$.
3. En cada tramo de $C_{q_k}^d$ se impone continuidad geométrica G^2 sobre el NM 1. De acuerdo con esta regla, el único tramo sin continuidad G^2 es $C_{q_1}^d$.
4. En cada tramo $C_{q_k}^d$ se impone la restricción de longitud de arco constante, es decir

$$\int_0^{\eta_k^m} \|\mathbf{q}_k^{d'}(\xi_k)\| d\xi_k - L_k = 0.$$

Las condiciones introducidas arriba implican que el problema de ICG 3D debe resolverse en tándem

comenzando por la curva $C_{q_1}^d$. Esto es, una vez conocida $\mathbf{q}_1^d(\xi)$ se continúa con el tramo de curva siguiente, y así sucesivamente, hasta obtener la solución para la parametrización $\mathbf{q}_{n_{el}}^d(\xi)$.

Con el objetivo de simplificar la definición del problema de ICG múltiple se introducen $n_{el} - 1$ ternas de Frenet-Serret $\{C_{q_k}^d, \hat{\mathbf{T}}_k, \hat{\mathbf{N}}_k, \hat{\mathbf{B}}_k\}$ y $n_{el} - 1$ curvaturas κ_k definidas en cada NM como (ver Figura 4),

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} &= \frac{1}{\alpha} \mathbf{q}^{d'}(\xi), \quad \hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{\beta} \mathbf{q}^{d'}(\xi) \times \mathbf{q}^{d''}(\xi), \\ \hat{\mathbf{N}} &= \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}} \text{ y } \kappa(\xi) = \frac{\beta}{\alpha^3}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\alpha = \|\mathbf{q}^{d'}(\xi)\|$ y $\beta = \|\mathbf{q}^{d'}(\xi) \times \mathbf{q}^{d''}(\xi)\|$. Sobre esta base, el problema de ICG múltiple se enuncia en dos partes como sigue:

Tabla 3: Problema ICG Tipo II.

Problema Tipo II - Parte 1

Para el tramo $C_{q_1}^d$, dados $y_1, z_1, \hat{\mathbf{T}}_0, \hat{\mathbf{T}}_1$ y L_1 , encontrar $g_1^2(\xi_1) = \sum_{i=0}^3 a_i \xi_1^i$ y $g_1^3(\xi_1) = \sum_{i=0}^3 b_i \xi_1^i$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ y $\eta_1^m \in [0, L_1]$ tal que,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_1^d(0) &= \mathbf{0}, \\ g_1^2(\eta_1^m) &= y_1, \quad g_1^3(\eta_1^m) = z_1, \\ \bar{\mathbf{q}}_1^{d'}(0) &= \alpha_1(0) \hat{\mathbf{T}}_0, \\ \bar{\mathbf{q}}_1^{d'}(\eta_1^m) &= \alpha_1(\eta_1^m) \hat{\mathbf{T}}_1, \\ \int_0^{\eta_1^m} \|\bar{\mathbf{q}}_1^{d'}(\xi_1)\| d\xi_1 - L_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Las condiciones 1 a 4 especificadas en la ecuación (8) representan la continuidad geométrica G^1 , mientras que la condición 5 representa la continuidad geométrica G^2 . Para el caso $k = n_{el}$, es decir $C_{q_{n_{el}}}^d$, las condiciones 2 y 4 no representan condiciones de continuidad, sino restricciones de posición y tangencia.

Al igual que en la sección 2.2 el problema tipo II definido anteriormente (Tabla 3 y Tabla 4) involucra la solución de n_d problemas de interpolación 3D, esto implica resolver n_d sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales.

3. Modelo geométrico

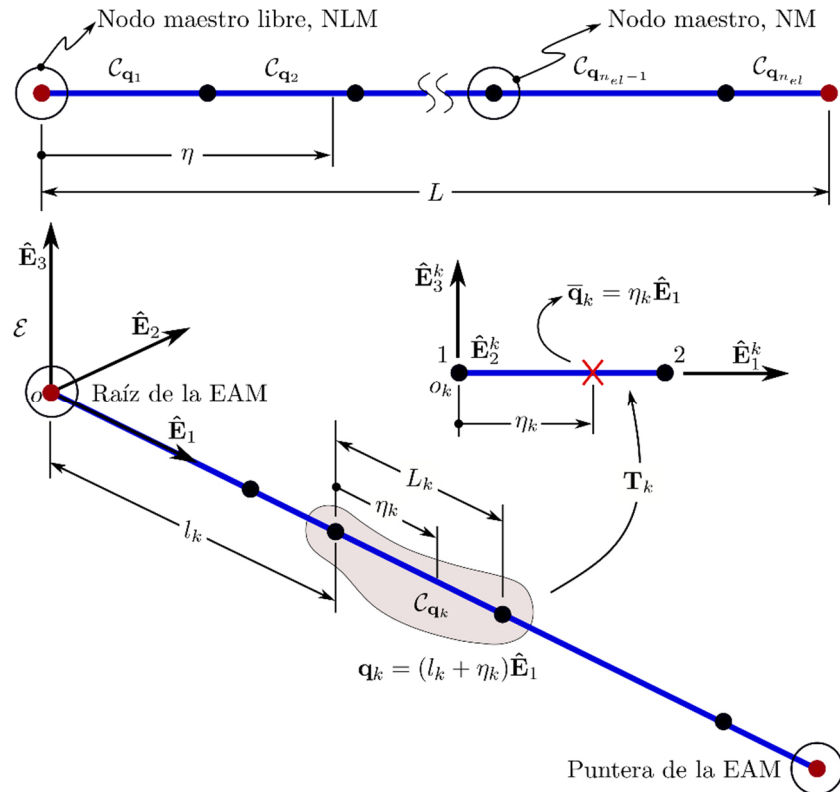
El modelo de ala multifuncional propuesto se basa en el patrón de nervaduras antes mencionado y se describe a partir de los preliminares matemáticos expuestos en la sección anterior.

Tabla 4: Problema ICG Tipo II.

Problema Tipo II - Parte 2	
Para cada tramo de curva $C_{q_k}^d$, con $k \neq 1$ y dados $y_k, y_{k-1}, z_k, z_{k-1}, \hat{\mathbf{T}}_k, \hat{\mathbf{T}}_{k-1}, \hat{\mathbf{N}}_{k-1}, \kappa_k(0)$ y L_k , encontrar $g_k^2(\xi_k) = \sum_{i=0}^p a_i \xi_k^i$ y $g_k^3(\xi_k) = \sum_{i=0}^p b_i \xi_k^i$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ y $\eta_k^m \in [0, L_k]$ tal que,	
<ol style="list-style-type: none"> 1. $g_k^2(0) = y_{k-1}, g_k^3(0) = z_{k-1}$, 2. $g_k^2(\eta_k^m) = y_k, g_k^3(\eta_k^m) = z_k$, 3. $\bar{\mathbf{q}}_k^{d'}(0) = \alpha_k(0) \hat{\mathbf{T}}_{k-1}$, 4. $\bar{\mathbf{q}}_k^{d'}(\eta_k^m) = \alpha_k(\eta_k^m) \hat{\mathbf{T}}_k$, 5. $\bar{\mathbf{q}}_k^{d''}(0) = \gamma_k(\eta_k^m) \hat{\mathbf{T}}_{k-1} + \alpha_k^2(0) \kappa_k(0) \hat{\mathbf{N}}_{k-1}$, 6. $\int_0^{\eta_k^m} \ \mathbf{q}_k^{d'}(\xi_k)\ d\xi_k - L_k = 0$, 	(8)
donde $\gamma_k = \bar{\mathbf{q}}_k^{d''}(\xi_k) \cdot \bar{\mathbf{q}}_k^{d'}(\xi_k) / \ \bar{\mathbf{q}}_k^{d'}(\xi_k)\ $ y p es el grado del polinomio interpolante.	

3.1. Nervadura principal

La NP se modela como una curva en el espacio, $\mathbf{q}(\eta)$, bajo la hipótesis de conservación de longitud de arco.

**Figura 3:** Representación de la EAM compuesta por múltiples curvas $C_q = \{C_{q_i}\}$ en su configuración de referencia.

Dicha nervadura puede estar conformada por uno o varios elementos de *morphing*. Por lo tanto, la configuración deformada se obtendrá de resolver un problema de ICG tipo I (ver ecuación (3)) si se utiliza un único elemento para representar la NP, o un problema de ICG tipo II (ver ecuación (8)) si se utilizan más de un elemento.

La parametrización de la curva en la configuración deformada queda descrita por:

$$\mathbf{q}^d(\xi) = \bigcup_{k=1}^{n_{el}} \mathbf{q}_k^d(\xi_k) \quad (9)$$

A partir de la ecuación (9), es posible determinar la posición de los NM y de los NML en la configuración deformada. Sin embargo, lo propio no ocurre con la posición de cada NE en dicha configuración. Para resolver este problema se debe considerar la hipótesis de conservación de la longitud de arco entre el NML localizado en la raíz de la EAM y cada uno de los NE. Esto es:

$$\int_0^{\xi_i} \|\mathbf{q}_k^{d'}(\zeta)\| d\zeta - s_i = 0 \quad (10)$$

donde ξ_i es el valor de la coordenada ξ en la configuración deformada y constituye la incógnita de la ecuación (10), y s_i es la longitud del arco medida desde el NML ubicado en la raíz de la EAM hasta el NE i en la configuración de referencia.

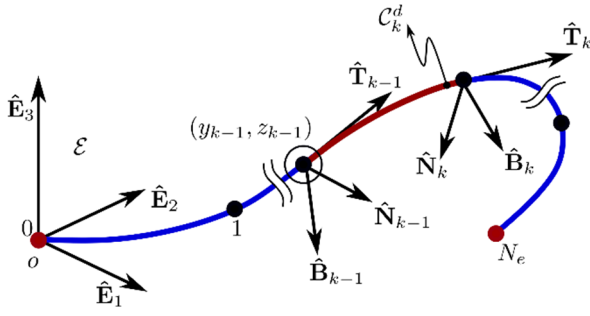


Figura 4: Representación de las ternas de Frenet-Serret para los NM asociados a la curva C_k^d .

3.2. Nervaduras secundarias

Las NS son modeladas como curvas inextensibles en el plano [16]. Cada NS posee un NML ubicado en el borde de ataque, A, y un NML ubicado en el borde de fuga, B. La geometría de cada NS se determina mediante interpolación utilizando polinomios cúbicos de Hermite, cuyos coeficientes dependen de los llamados *parámetros de morphing*: h_A , h_B , θ_A y θ_B . En la Figura 5 se muestra un modelo de NS, representado por la línea media de un perfil aerodinámico, en sus configuraciones de referencia y deformada, y los *parámetros de morphing*.

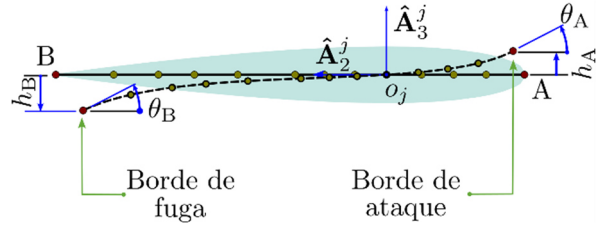


Figura 5: Nervadura secundaria en su configuración de referencia y deformada.

3.3. Marcos de referencia

Para describir el proceso de cambio de forma del patrón de nervaduras se utilizan los siguientes marcos de referencia:

1. El marco de referencia global $\mathcal{E} = \{o, \hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3\}$, introducido en la sección 2.2.
2. Un marco de referencia local por cada nodo, definido en la configuración de referencia, $\mathcal{A}^j = \{o_j, \hat{A}_1^j, \hat{A}_2^j, \hat{A}_3^j\}$, $j = 1, \dots, n_{np}$, donde n_{np} es la suma del número de NML, NM y NE y, además, $\mathcal{A}^1 = \mathcal{E}$ (ver Figura 6).

Una posibilidad para definir el cambio de orientación de los marcos de referencia locales en la configuración deformada es utilizando el triedro de Frenet-Serret (ecuación (6)), según se muestra en la Figura 7. Sin embargo, esta definición no resulta adecuada para describir la orientación de los perfiles aerodinámicos asociados a las NS.

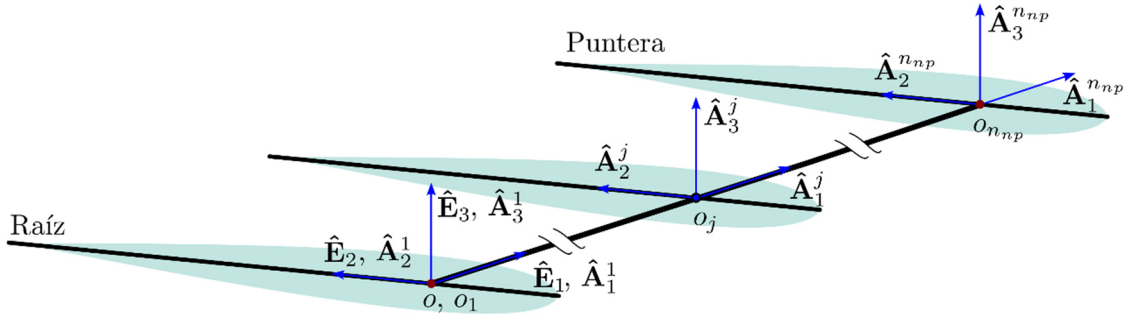


Figura 6: Marco de referencia global \mathcal{E} y marcos de referencia locales \mathcal{A}^j en la configuración de referencia.

Alternativamente, se propone una descripción ad hoc que permite mantener el vector \hat{A}_1^j tangente a la deformada de la NP y, además, definir un ángulo de ataque geométrico entre cada marco de referencia local y el marco de referencia global. De acuerdo a lo mostrado en la Figura 8, los vectores unitarios en cada marco de referencia \mathcal{A}^j se definen como sigue:

$$\hat{A}_1^j(\xi) = \frac{\mathbf{q}_k^{d'}(\xi)}{\|\mathbf{q}_k^{d'}(\xi)\|} = \hat{T}(\xi), \quad (11)$$

$$\hat{A}_2^j(\xi) = \frac{\hat{E}_3 \times \hat{A}_1^j(\xi)}{\|\hat{E}_3 \times \hat{A}_1^j(\xi)\|}, \quad (12)$$

$$\hat{A}_3^j(\xi) = \hat{A}_1^j(\xi) \times \hat{A}_2^j(\xi). \quad (13)$$

La conexión rígida utilizada entre las nervaduras hace que la cinemática de la NS esté ligada al cambio de posición y de orientación del marco de referencia local asociado con cada nodo. Luego, puede definirse una rotación de cuerpo rígido, $\mathbf{T}_{\mathcal{A}^j \mathcal{E}}$, que relacione la orientación de cada marco de referencia local respecto del marco de referencia global, a saber:

$$[\mathbf{T}_{A^j \varepsilon}]_{lm} = \hat{\mathbf{A}}_l^j \cdot \hat{\mathbf{E}}_m, \quad l, m = 1, 2, 3. \quad (14)$$

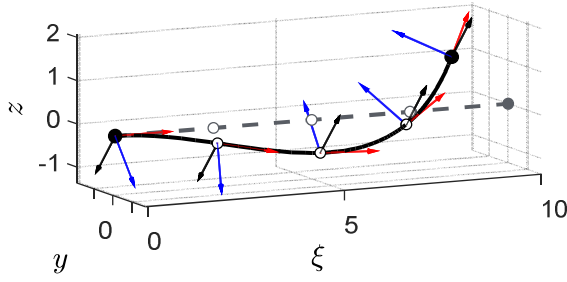


Figura 7: Marcos de referencia de Frenet-Serret sobre la NP en su configuración deformada. $\hat{\mathbf{T}}$ en rojo, $\hat{\mathbf{N}}$ en azul y, $\hat{\mathbf{B}}$ en negro.

3.4. Algoritmo para el cambio de forma

El proceso de *morphing* puede ser resumido de la siguiente manera:

1. Definir la configuración de referencia de la NP y de las NS. Es decir, identificar NML, NM, NE y secciones aerodinámicas del ala.
2. Definir los parámetros para el cambio de forma de cada nervadura.
3. Resolver el problema de ICG para el cambio de forma de la NP.
4. Resolver la ecuación (10) para el cálculo de la posición de los NE en la configuración deformada.
5. Ejecutar el algoritmo para el cambio de forma de las NS.
6. Aplicar la restricción de movimiento de las NS al movimiento de la NP.

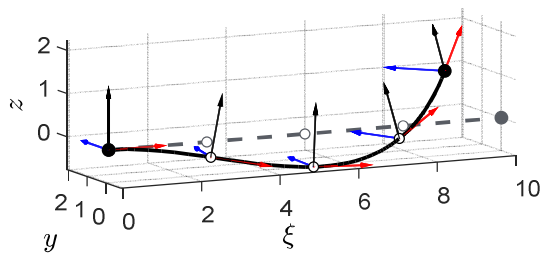


Figura 8: Marcos de referencia propuestos sobre la NP en su configuración deformada. $\hat{\mathbf{A}}_1^j$ en rojo, $\hat{\mathbf{A}}_2^j$ en azul y, $\hat{\mathbf{A}}_3^j$ en negro.

4. Resultados numéricos

Luego de exponer el problema a resolver y los detalles del modelo implementado, en esta sección se presentan algunos resultados numéricos obtenidos. El caso de estudio corresponde a un ala rectangular de 10 m de envergadura y 1.5 m de cuerda. La NP se posiciona a un cuarto de la cuerda del ala medida desde el borde de ataque y sobre ella se definen 5 NS distribuidas de

manera equidistante. Cada NS constituye, a su vez, la línea media de un perfil aerodinámico NACA0012.

En este caso, la NP está representada mediante un único elemento de *morphig* con las *condiciones libres* presentadas en la Tabla 5. En la Tabla 6 se muestran los *parámetros de morphing* usados en cada NS.

Tabla 5: Valores de las *condiciones libres*.

Nodo	y [m]	z [m]	$\hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \hat{\mathbf{T}}$	$\hat{\mathbf{E}}_2 \cdot \hat{\mathbf{T}}$	$\hat{\mathbf{E}}_3 \cdot \hat{\mathbf{T}}$
1 (raíz)	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
5 (puntera)	1.0	1.0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$

Tabla 6: Valores de los *parámetros de morphing*.

Estación	h_A [m]	θ_A [°]	h_B [m]	θ_B [°]
1 (raíz)	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.42	-40.00	0.30	-16.00
3	0.00	-44.00	0.00	-44.00
4	0.00	44.00	0.00	-44.00
5 (puntera)	0.00	-44.00	0.00	44.00

El problema de ICG resuelto es un problema Tipo I. La descripción paramétrica de la curva solución está dada por

$$\mathbf{q}^d(\xi) = \begin{cases} \xi \\ 0.0095163\xi^3 - 0.073879\xi^2 \\ 0.0095163\xi^3 - 0.073879\xi^2 \end{cases} \quad (15)$$

En la Tabla 7 se especifican las coordenadas de los NML (nodos 1 y 5) y de los NE (nodos 2, 3 y 4) luego del cambio de forma.

Tabla 7: Coordenadas de los nodos sobre la NP en su configuración deformada.

Nodo	ξ [m]	y [m]	z [m]
1 (raíz)	0.000	0.000	0.000
2	2.454	-0.304	-0.304
3	4.900	-0.654	-0.654
4	7.288	-0.240	-0.240
5 (puntera)	9.047	1.000	1.000

Finalmente, en la Figura 9 y la Figura 10 se muestra la evolución temporal del cambio de forma desde la configuración de referencia hasta la configuración deformada final de los 4 perfiles aerodinámicos que pueden deformarse y del patrón de nervaduras, respectivamente. En color gris se muestra la configuración de referencia, en color verde se muestra una etapa intermedia del proceso de cambio de forma, y en color negro se muestra la configuración deformada final.

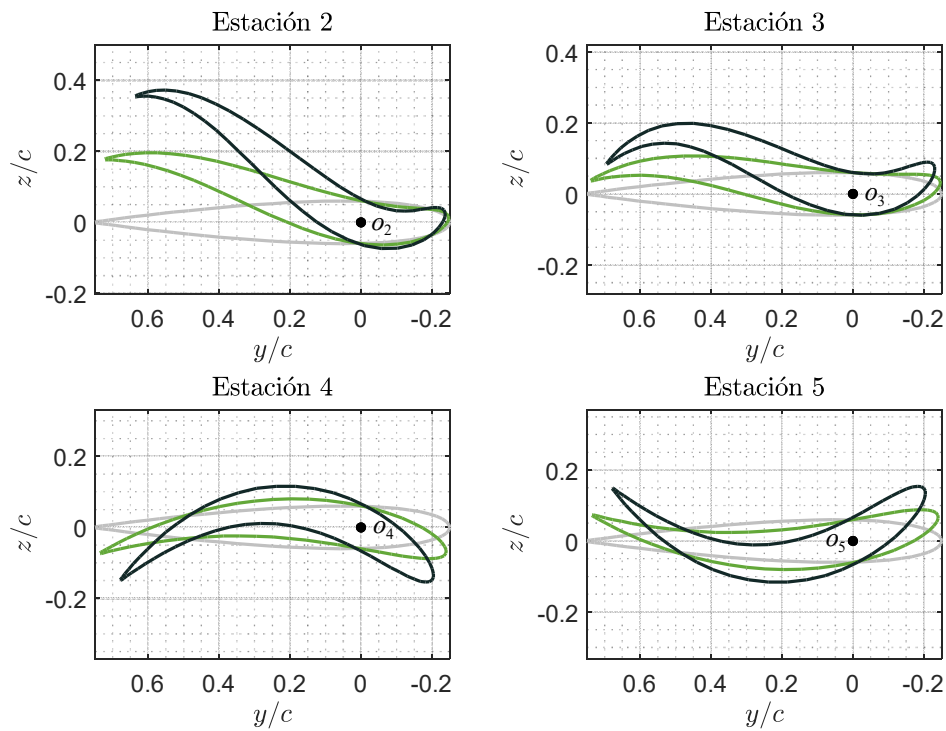


Figura 9: Cambio de forma en las secciones del ala en las estaciones 2, 3, 4 y 5.

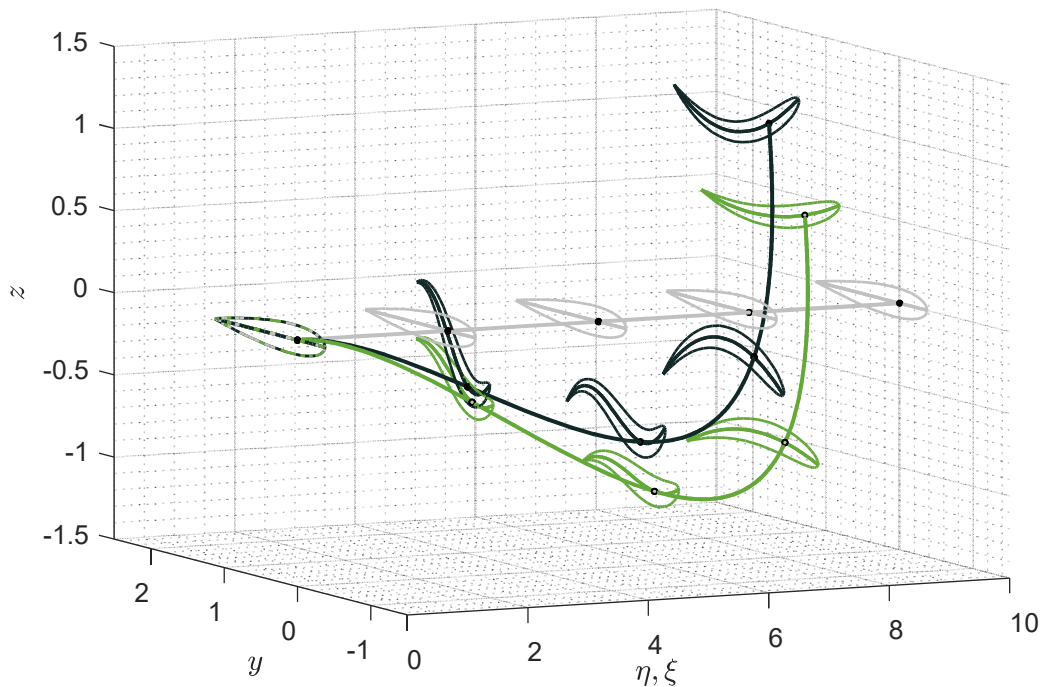


Figura 10: Cambio de forma del patrón de nervaduras y de los perfiles aerodinámicos.

5. Conclusiones

El presente trabajo tuvo como motivación abordar el problema de cambio de forma de alas de aeronaves sin discontinuidades geométricas. Se desarrolló un modelo

inspirado en la biología para estudiar la cinemática del *morphing*. En éste, el cambio de forma se logra mediante la modificación de la geometría de un patrón de nervaduras flexibles, conformado por una nervadura principal a la cual se vinculan rígidamente un conjunto

de nervaduras secundarias, emulando la anatomía de las alas de algunos insectos y aves pequeñas. Tanto la nervadura principal como las nervaduras secundarias se representan mediante curvas inextensibles, cuyas configuraciones deformadas son el resultado de un problema de interpolación con continuidad geométrica de grado 1 y/o 2.

Los resultados numéricos evidencian la capacidad del método para modelar adecuadamente cambios suaves en la configuración del patrón de nervaduras. Además, se verifica que cada tramo de curva conserva su longitud de arco luego del cambio de forma. Este método permite modelar una amplia variedad de cambios de geometría, combinando cambios de forma a lo largo de la línea de envergadura y cambios de forma en las estaciones de los perfiles aerodinámicos. En virtud de su potencialidad, se prevé a futuro utilizar las técnicas y herramientas numéricas desarrolladas en este esfuerzo para llevar a cabo investigaciones relacionadas al cambio de forma de plantas alares con diversos propósitos, tales como: control activo de sustentación a lo largo de la envergadura sin utilizar superficies móviles, reducción de la resistencia inducida y aumento de la efectividad del control de rolido en alas de gran envergadura mediante torsión aeroelástica adaptativa, incremento del rendimiento aerodinámico como consecuencia de la disminución de la intensidad y/o eliminación de los vórtices de puntera y de las estelas vorticosas inducidos por cambios geométricos dinámicos de la planta alar, entre otros.

6. Referencias

- [1] I. Chopra and J. Sirohi, *Smart Structures Theory*. Cambridge University Press, 2013. doi: 10.1017/CBO9781139025164.
- [2] A. Concilio, I. Dimino, and R. Pecora, *Morphing Wing Technologies*. Elsevier, 2018. doi: 10.1016/C2015-0-01317-X.
- [3] M. Quack, *Closed-Loop Control of Spanwise Lift Distribution for Morphing Wing Applications*. 2014. [Online]. Available: <http://e-collection.library.ethz.ch/view/eth:47495>
- [4] J. N. Dias and J. E. Hubbard, “Modal identification of aerodynamic models for spanwise lift distribution control,” *Journal of Aircraft*, vol. 57, no. 4, pp. 664–677, 2020, doi: 10.2514/1.C035710.
- [5] J. H. Diekmann, M. Pichler, M. Steen, and P. Hecker, “Controllability of an aircraft with active high-lift system using a segmentwise controllable flap system,” *CEAS Aeronautical Journal*, vol. 9, no. 3, pp. 461–474, 2018, doi: 10.1007/s13272-018-0304-5.
- [6] J. H. Diekmann, D. Keller, E. Faez, R. Rudnik, and V. Gollnick, “Flight mechanics model for spanwise lift and rolling moment distributions of a segmented active high-lift wing,” *CEAS Aeronautical Journal*, vol. 8, no. 4, pp. 625–635, 2017, doi: 10.1007/s13272-017-0261-4.
- [7] X. Wang, T. Mkhoyan, I. Mkhoyan, and R. de Breuker, “Seamless active morphing wing simultaneous gust and maneuver load alleviation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 44, no. 9, pp. 1649–1662, 2021, doi: 10.2514/1.G005870.
- [8] S. Barbarino, O. Bilgen, R. M. Ajaj, M. I. Friswell, and D. J. Inman, “A review of morphing aircraft,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 22, no. 9, pp. 823–877, 2011, doi: 10.1177/1045389X11414084.
- [9] S. S. M. Swei and N. Nguyen, “Aeroelastic wing shaping control subject to actuation constraints,” *55th AIAA/ASME/ASCE/AHS/SC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, no. January, pp. 1–15, 2014, doi: 10.2514/6.2014-1041.
- [10] D. Karagiannis *et al.*, “Airfoil morphing based on SMA actuation technology,” *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 86, no. 4, pp. 295–306, 2014, doi: 10.1108/AEAT-10-2012-0194.
- [11] B. K. S. Woods, L. Parsons, A. B. Coles, J. H. S. Fincham, and M. I. Friswell, “Morphing elastically lofted transition for active camber control surfaces,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 55, pp. 439–448, 2016, doi: 10.1016/j.ast.2016.06.017.
- [12] A. Court, K. Pammment, and C. Breucker, “Spanwise Lift and Gust Control via Arrays of Bio-inspired Individually Actuated Pneumatic Flaplets,” *56th 3AF International Conference on Applied Aerodynamics*, 2022, [Online]. Available: <https://openaccess.city.ac.uk/id/eprint/28141>
- [13] B. Stanford, P. Beran, and M. Kobayashi, “Aeroelastic optimization of flapping wing venation: A cellular division approach,” *AIAA Journal*, vol. 50, no. 4, pp. 938–951, 2012, doi: 10.2514/1.J051443.
- [14] R. Herzog and P. Blanc, “Optimal G2 Hermite interpolation for 3D curves,” *CAD Computer Aided Design*, vol. 117, 2019, doi: 10.1016/j.cad.2019.102752.
- [15] B. A. Barsky and T. D. DeRose, “Geometric Continuity of Parametric Curves,” 1984.
- [16] A. C. Aichino, S. Ribero, M. F. Valdez, and S. Preidikman, “Una Formulación Matemática Robusta para el Cambio de Forma de Perfiles Aerodinámicos,” *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI)*, vol. 8, pp. 581–584, 2021, [Online]. Available: <https://asamaci.org.ar/wp-content/uploads/2021/07/MACI-Vol-8-2021.pdf>