

# Estudio del efecto de la esbeltez en el comportamiento dinámico de una viga rotatoria fisurada

Belén Muñoz-Abella<sup>1</sup>, Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre<sup>2</sup>, Patricia Rubio Herrero<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Grupo SiOMec, Dpto. de Ing. Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid, España. Email: [mmunoz@ing.uc3m.es](mailto:mmunoz@ing.uc3m.es)

<sup>2</sup>Grupo SiOMec, Dpto. de Ing. Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid, España. Email: [lrubio@ing.uc3m.es](mailto:lrubio@ing.uc3m.es)

<sup>3</sup>Grupo SiOMec, Dpto. de Ing. Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid, España. Email: [prubio@ing.uc3m.es](mailto:prubio@ing.uc3m.es)

## Resumen

En este trabajo se presenta un estudio del efecto de algunos de los parámetros característicos de una viga rotatoria fisurada en las dos primeras frecuencias de vibración. Se ha partido de un modelo matemático de una viga rotatoria fisurada. El problema dinámico se resuelve mediante el método de integración de Frobenius. Los parámetros que se incluyen en el modelo son: el radio del buje, la esbeltez de la viga, la profundidad y posición de la fisura y la velocidad de giro. De estos parámetros, se han estudiado en detalle: la esbeltez y la velocidad de giro. Se concluye que un incremento en la velocidad de giro produce incrementos en las frecuencias y que aumentos de la esbeltez producen una disminución la frecuencia. Se han presentado, además, las frecuencias adimensionalizadas. Por un lado, se adimensionalizan con la frecuencia de la viga intacta no rotatoria y por otro, con la de la viga intacta rotatoria. Se ha visto cómo a diferencia de lo que ocurre con las frecuencias dimensionales, las adimensionales sufren un incremento con la esbeltez que se debe exclusivamente al efecto combinado del incremento (mayor) de la esbeltez con el decremento (menor) de la frecuencia. Si la adimensionalización se hace con la viga no rotatoria, las frecuencias adimensionales tienen un valor superior a la unidad, como consecuencia de la rigidización por la fuerza centrífuga y que es tanto mayor cuanto mayor es la velocidad. En el caso de la adimensionalización con la frecuencia de la viga intacta rotatoria, los valores siempre están por debajo de la unidad al eliminar con la adimensionalización el efecto rigidizador de la fuerza centrífuga.

**Palabras clave:** frecuencias naturales; vigas rotatorias fisuradas; vigas Euler-Bernoulli, palas rotatorias fisuradas

## Abstract

This paper presents a study of the effect of some of the characteristic parameters of a cracked rotating beam on the first two vibration frequencies. A mathematical model of a cracked rotating beam has been used as a starting point. The dynamic problem is solved using the Frobenius integration method. The parameters included in the model are: the radius of the hub, the slenderness of the beam, the relative depth and position of the crack and the rotational speed. Two of them have been analysed in this work: the slenderness and the rotational speed. It is concluded that the increase of the rotational speed produces increases in the frequencies and that the increase of the slenderness produces a decrease in the frequency. The dimensionless frequencies have also been presented. On the one hand, they have been nondimensionalized with the frequency of the non-rotating intact beam and, on the other hand, with that of the rotating intact beam. It has been shown that, unlike the dimensional frequencies, the dimensionless frequencies undergo an increase with slenderness due to the combined effect of the (higher) increase in slenderness with the (lower) decrease in frequency. The dimensionless frequencies, with that of the non-rotating beam, have a value greater than unity, as a consequence of the stiffness due to the centrifugal force, which is greater the higher the velocity. The dimensionless frequencies, with the intact beam in rotation are always less than unity, since the stiffness effect of the centrifugal force is eliminated in the nondimensioning.

**Keywords:** cracked rotating beams; natural frequencies; Euler-Bernoulli beams; cracked rotating blades

## 1. Introducción

Existen numerosos componentes mecánicos, con geometrías básicamente longitudinales, ampliamente

utilizados en campos estratégicos como la energía y los transportes. Es el caso de palas de aerogeneradores, palas de helicópteros y rotores abiertos. Estos elementos mecánicos complejos pueden ser

modelizados con simplificaciones en forma de vigas rotatorias.

Los defectos de fabricación o a las condiciones de trabajo en muchas ocasiones agresivas, pueden provocar, en los componentes, la aparición y propagación de grietas, que afectan gravemente a su integridad estructural. Si la fisura se detecta cuando es incipiente, el elemento dañado se puede sustituir o reparar sin mayores consecuencias. Sin embargo, esto no es una tarea sencilla, ya que una vez que éstas han aparecido, su velocidad de propagación crece exponencialmente y en pocos días se puede producir la rotura catastrófica. Por lo tanto, con el fin de reparar o sustituir el elemento antes de que se produzca el fallo irreversible, es muy importante disponer de técnicas que permitan tanto la detección de las fisuras como la estimación de su posición y tamaño. Y para ello, es imprescindible el estudio del comportamiento de palas rotatorias fisuradas. En conocimiento de las autoras de este trabajo, el número de trabajos en los que se estudia sobre el comportamiento de palas rotatorias fisuradas es muy reducido [1-3].

La presencia de la fisura modifica el comportamiento

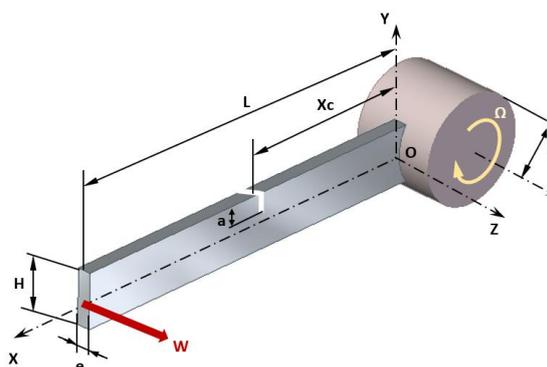


Figura 1. Esquema de la viga rotatoria fisurada.

dinámico de la viga y, entre otros, modifica los valores de las frecuencias naturales, por lo que su variación es habitualmente utilizada para determinar la aparición de un defecto. En el caso de las vigas rotatorias, el comportamiento dinámico, tanto en el plano de giro (“chordwise”) como fuera de él (“flapwise”), depende de la fuerza centrífuga que aparece debida a la rotación, y que es variable con la distancia al centro de giro. La aparición de esta fuerza introduce un aumento de la frecuencia natural en ambos planos [1,4]. Por otra parte, si la viga giratoria contiene una fisura, se produce un aumento de la flexibilidad que se traduce en la disminución de las frecuencias naturales. La compensación de ambos efectos puede dificultar la detección del daño [1]. A estos efectos hay que añadir otro parámetro que afecta fuertemente al comportamiento dinámico de las vigas rotatorias que es el grado de esbeltez de la viga. Algunos autores indican que las frecuencias se incrementan con la esbeltez de la viga [5,6].

En este trabajo se realiza un estudio amplio del efecto que la esbeltez tiene en el comportamiento dinámico de una viga rotatoria fisurada teniendo en cuenta otros parámetros mencionados como la velocidad de giro y tamaño de fisura. Los datos utilizados para el estudio se han obtenido a partir de un modelo analítico del comportamiento dinámico de la viga rotatoria fisurada desarrollado por las autoras [7], con el que se pueden calcular los valores de las frecuencias naturales en función de la velocidad de giro, la esbeltez de la viga, el radio del buje que separa el extremo de la viga del eje de giro y las características de la fisura (posición y tamaño).

## 2. Planteamiento del problema

### 2.1. Formulación del problema

El problema que se plantea es el de una viga fisurada de Euler-Bernoulli, de longitud  $L$  y de sección constante de forma rectangular de canto  $H$  y espesor  $b$ , tal y como se muestra en la Figura 1. La viga gira con velocidad angular constante  $\Omega$  alrededor del eje de revolución  $Z'$ . El sistema de referencia tomado para el planteamiento del problema es el que tiene su origen en la unión entre el cubo y la propia viga,  $OXYZ$ . La fisura, tiene una profundidad  $a$  y está situada a una distancia  $X_c$  del origen del sistema de referencia.  $R$  es el radio del buje unido a la viga.

En este trabajo sólo se estudia la vibración en el plano perpendicular al de giro (“flapwise”), indicado en la Figura 1 con el desplazamiento  $W$ .

Con el fin de determinar el comportamiento indicado, se plantea la ecuación diferencial del movimiento de una viga rotatoria sin fisura (1). Se trata de una ecuación de cuarto orden que se plantea a partir de la segunda ley de Newton [8]

$$\rho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( P(x) \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right) = 0 \quad (1)$$

donde  $t$  es el tiempo,  $\rho$  es la densidad del material,  $E$  es el módulo de Young,  $A$  es el área de la sección rectangular e  $I$  es el momento de inercia de la misma.  $P(x)$  es la fuerza centrífuga que aparece en dirección axial como consecuencia del giro, que se puede calcular mediante la expresión (2).

$$P(x) = \int_x^L \rho A \Omega^2 (x+R) dx \quad (2)$$

Esta ecuación, (1), adquiere la forma (3) cuando se consideran las variables adimensionalizadas (4).

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} - M^2 \frac{d}{d\xi} \left( \left( r(1-\xi) + \frac{1}{2}(1-\xi^2) \right) \frac{dw}{d\xi} \right) - \mu^2 w = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{x}{L} \\
 r &= \frac{R}{L} \\
 \alpha &= \frac{a}{H} \\
 \mu &= \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI}} \omega \\
 M &= \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI}} \Omega
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

La solución de la ecuación que gobierna el movimiento de la viga se puede formular según la expresión (5), donde  $\omega$  es la frecuencia natural del sistema.

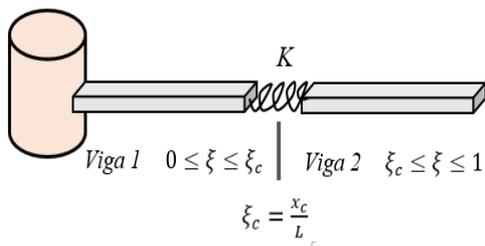
$$W(x, t) = Lw(x)e^{i\omega t} \tag{5}$$

En el caso de la viga fisurada, esta se puede modelar mediante la unión de 2 vigas intactas conectadas entre sí mediante un muelle sin masa cuya rigidez  $K$  es igual a la que introduce la fisura (ver Figura 2). De acuerdo con [9],  $K$  se calcula mediante (6):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{K} &= \frac{6\pi(1-\nu^2)h\phi(\alpha)}{EI} \\
 \phi(\alpha) &= 0.6272\alpha^2 - 0.04533\alpha^3 + \\
 & 4.5948\alpha^4 - 9.9736\alpha^5 + \\
 & 20.2948\alpha^6 - 33.031\alpha^7 \\
 & + 47.1063\alpha^8 - 40.7556\alpha^9 \\
 & + 19.6\alpha^{10}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson del material. La ecuación de movimiento de una viga intacta (4) se convierte en (7) para una viga fisurada.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4 w_1}{d\xi^4} - M^2 \frac{d}{d\xi} \left( \left( r(1-\xi) + \frac{1}{2}(1-\xi^2) \right) \frac{dw_1}{d\xi} \right) \\
 - \mu^2 w_1 = 0 \quad 0 \leq \xi \leq \xi_c
 \end{aligned}$$



**Figura 2.** Esquema del modelo de la viga fisurada mediante la unión de 2 vigas intactas.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4 w_2}{d\xi^4} - M^2 \frac{d}{d\xi} \left( \left( r(1-\xi) + \frac{1}{2}(1-\xi^2) \right) \frac{dw_2}{d\xi} \right) - \\
 \mu^2 w_2 = 0 \quad \xi_c \leq \xi \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Para completar el planteamiento del problema es necesario definir las condiciones de contorno (8):

$$\begin{aligned}
 w_1(0) = 0 \quad \frac{dw_1(0)}{d\xi} = 0 \\
 \frac{d^2 w_2(1)}{d\xi^2} = 0 \quad \frac{d^3 w_2(1)}{d\xi^3} = 0 \\
 w_1(\xi_c) = w_2(\xi_c) \\
 \frac{dw_2(\xi_c)}{d\xi} - \frac{dw_1(\xi_c)}{d\xi} = \frac{1}{k_c} \frac{d^2 w_2(\xi_c)}{d\xi^2} \\
 \frac{d^2 w_1(\xi_c)}{d\xi^2} = \frac{d^2 w_2(\xi_c)}{d\xi^2} \\
 \frac{d^3 w_1(\xi_c)}{d\xi^3} = \frac{d^3 w_2(\xi_c)}{d\xi^3}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Siendo  $k_c$ :

$$k_c = \frac{K}{EI} \tag{9}$$

## 2.2. Resolución de la ecuación de movimiento

La resolución de la ecuación de movimiento de la viga fisurada se aborda utilizando el método de Frobenius [1,8,10], de forma que la solución de la ecuación diferencial se expresa en forma de series de potencias (10):

$$f(\xi, j) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(j) \cdot \xi^{j+n} \tag{10}$$

donde  $a_{n+1}(j)$  son los coeficientes de la serie y  $j$  es un exponente indeterminado.

La función  $f(\xi, j)$  representa tanto a  $w_1$  como a  $w_2$ , ya que ambas expresiones son idénticas antes de aplicar las condiciones de contorno.

Sustituyendo (10) en (8) se obtienen la ecuación indicial (11) y la relación de recurrencia (12):

$$j(j-1)(j-2)(j-3) = 0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 a_{n+5}(j) &= \frac{M^2 \left( \frac{1}{2} + r \right)}{(j+n+3)(j+n+4)} a_{n+3}(j) - \\
 & \frac{M^2 r (k+n+1)}{(j+n+2)(j+n+3)(j+n+4)} a_{n+2}(j) - \\
 & \frac{\frac{1}{2} M^2 (j+n)(j+n+1) - \mu^2}{(j+n+1)(j+n+2)(j+n+3)(j+n+4)} a_{n+1}(j)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 a_1(j) &= 1 \\
 a_2(j) &= 0 \\
 a_3(j) &= \frac{M^2 \left( \frac{1}{2} + r \right)}{(j+1)(j+2)} \\
 a_4(j) &= \frac{-M^2 r j}{(j+1)(j+2)(j+3)}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Las 4 raíces de la ecuación indicial (11) son  $j=0,1,2$  y 3. A partir de estas raíces se obtienen 4 soluciones linealmente independientes (14):

$$\begin{aligned}
 f(\xi, 0) &= 1 + \frac{M^2\left(\frac{1}{2}+r\right)}{2}\xi^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+5}(0) \cdot \xi^{n+4} \\
 f(\xi, 1) &= \xi + \frac{M^2\left(\frac{1}{2}+r\right)}{6}\xi^3 - \frac{M^2r}{24}\xi^4 \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+5}(1) \cdot \xi^{n+5} \\
 f(\xi, 2) &= \xi^2 + \frac{M^2\left(\frac{1}{2}+r\right)}{12}\xi^4 - \frac{M^2r}{30}\xi^5 \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+5}(2) \cdot \xi^{n+6} \\
 f(\xi, 3) &= \xi^3 + \frac{M^2\left(\frac{1}{2}+r\right)}{20}\xi^5 - \frac{M^2r}{40}\xi^6 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+5}(3) \cdot \xi^{n+7}
 \end{aligned} \tag{14}$$

La solución de las ecuaciones diferenciales de movimiento de cada una de las 2 partes de la viga fisurada,  $F_1(\xi)$  y  $F_2(\xi)$ , se pueden escribir como combinación de las expresiones (14), teniendo en cuenta que a función  $f(\xi, j)$  representa tanto a  $w_1$  como a  $w_2$ .

$$\begin{aligned}
 F_1(\xi) &= C_1w_1(\xi, 0) + C_2w_1(\xi, 1) + C_3w_1(\xi, 2) \\
 &\quad + C_4w_1(\xi, 3) \quad 0 \leq \xi \leq \xi_c
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(\xi) &= C_5w_2(\xi, 0) + C_6w_2(\xi, 1) + C_7w_2(\xi, 2) + \\
 &\quad C_8w_2(\xi, 3) \quad \xi_c \leq \xi \leq 1
 \end{aligned}$$

$C_1 - C_8$  son constantes que se calculan aplicando las condiciones en (8).

### 3. Análisis de resultados.

El estudio de las frecuencias y del efecto de las variables indicadas, se ha realizado sobre una viga fisurada de longitud  $L = 0.7 \text{ m}$  y espesor  $b = 10 \text{ mm}$ , módulo de elasticidad  $E = 210 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.33$  y densidad  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ . En este estudio se ha decidido dejar fijo el radio adimensional del buje  $r_c = 0.1$  por ser este valor el más representativo de los casos reales. A partir del modelo analítico desarrollado se han calculado las 2 primeras frecuencias naturales de la viga fisurada  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , así como sus valores adimensionales,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , en función de diferentes valores de otros parámetros del sistema.

Se han considerado los siguientes valores de los parámetros que se indican:

- Esbeltez de la viga, calculada mediante la expresión (16),  $S_L = 70, 120, 170, 220$ .

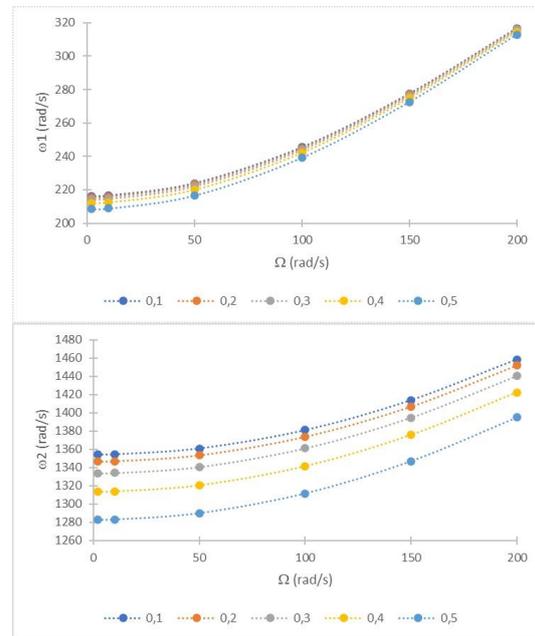
$$S_L = \sqrt{\frac{AL^2}{I}} \tag{16}$$

- Posición de la fisura:  $\xi_c = 0.1, 0.4, 0.7$  y  $0.9$ .
- Profundidad de la fisura:  $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  y  $0.5$ .
- Velocidad de giro:  $\Omega = 0, 2, 10, 50, 100, 150$  y  $200$  rad/s. (entre 0 y 1909 rpm)

La combinación de estos parámetros ha permitido calcular 420 casos cuyas frecuencias son objetivo de estudio en este trabajo, tal y como se explica en apartados posteriores.

#### 3.1. Estudio del efecto de la velocidad de giro

En primer lugar se ha estudiado el efecto independiente de la velocidad de giro en la frecuencia de la viga fisurada. En la Figura 3 se recogen los resultados obtenidos de las dos primeras frecuencias para un caso intermedio con valores  $\xi_c = 0.4$  y  $S_L = 120$ . Se observa que, como es natural, las frecuencias disminuyen con el tamaño de la fisura, como consecuencia del incremento de flexibilidad local debido a la misma. Por otro lado, se observa como a medida que aumenta la velocidad de giro aumenta el valor de la frecuencia, tanto para la primera frecuencia natural como para la segunda. Este hecho, es asimismo esperable, ya que



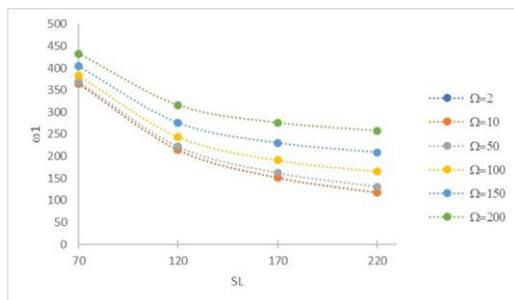
**Figura 3.** Evolución de las frecuencias con la velocidad de giro y el tamaño de la fisura.  $\xi_c = 0.4$  y  $S_L = 120$ .

con el giro se produce un aumento de la fuerza centrífuga en la pala que tiene el efecto de rigidizarla, y por lo tanto de incrementar la frecuencia. Por esta razón, en una viga giratoria fisurada, la presencia de una fisura, claramente identificable por la reducción de la frecuencia, se enmascara con el aumento de la frecuencia debido a la fuerza centrífuga. Estos efectos, analizados aquí para un caso concreto de posición de fisura y esbeltez, se producen igualmente para otras posiciones de la fisura y otros valores del parámetro de esbeltez.

### 3.2. Estudio del efecto de la esbeltez

Para llevar a cabo este estudio, se proponen 4 valores del parámetro de esbeltez,  $SL$ , previamente definido en (16). Los valores escogidos son  $SL=70, 120, 170$  y  $220$ , que se corresponden, dada la geometría de la viga indicada, a relaciones luz-canto de entre 20.2 y 63.5 todas ellas dentro de las condiciones de una viga de Euler-Bernoulli.

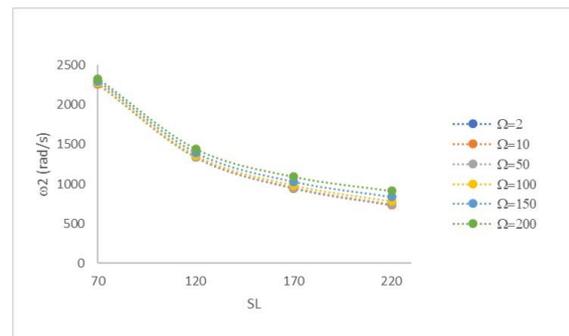
En la Figura 4 se muestran los resultados de la primera frecuencia para el caso de  $\zeta_c=0.4$ ,  $\alpha=0.3$  y distintos valores de la velocidad de giro. Se observa que a medida que aumenta la esbeltez (valores de  $SL$  mayores) la frecuencia disminuye. Esto entra dentro de la lógica, porque al aumentar la esbeltez, aumenta la flexibilidad de la viga y, como consecuencia, se reduce la frecuencia de la misma.



**Figura 4.** Evolución de la primera frecuencia con la esbeltez y la velocidad de giro.  $\alpha=0.3$ ,  $\zeta_c=0.4$ ,  $rc=0.1$ . ( $\Omega$  en rad/s)

Este mismo comportamiento se observa para la segunda frecuencia como queda reflejado en la Figura 5. En ambos casos (primera y segunda frecuencia) se puede ver, por otro lado, que la reducción es menor cuanto mayor es la velocidad de giro debido al efecto rigidizador de la fuerza centrífuga. De igual manera, a medida que la esbeltez crece, para una misma velocidad de giro, las diferencias en de frecuencias se van reduciendo. Para valores grandes de la esbeltez (por encima de 220) la frecuencia prácticamente no se reduciría (las curvas se harían tangentes con la horizontal).

Los resultados mostrados hasta el momento son resultados de frecuencias dimensionales, sin embargo,

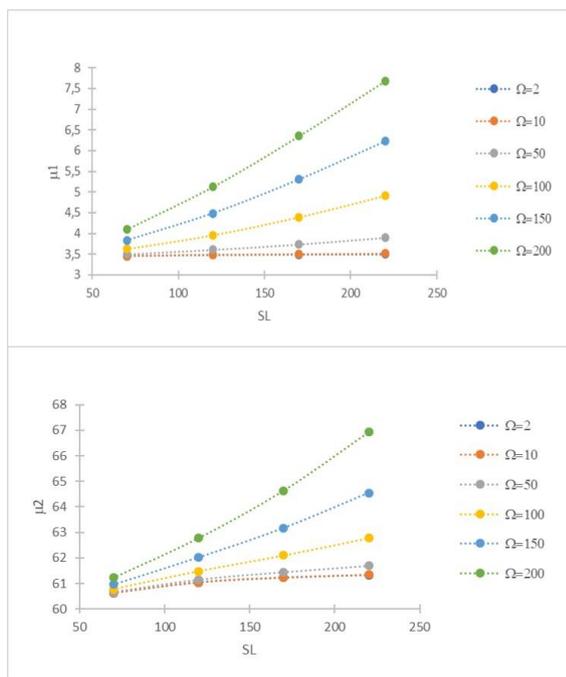


**Figura 5.** Evolución de la segunda frecuencia con la esbeltez y la velocidad de giro.  $\alpha=0.3$ ,  $\zeta_c=0.4$ . ( $\Omega$  en rad/s)

la mayoría de los autores presentan los resultados adimensionalizados con el fin de poder establecer comparaciones de comportamiento entre vigas intactas y vigas fisuradas, y con el fin de usar este parámetro como medio para identificar fisuras y otros defectos.

En general, las vigas fisuradas no rotatorias presentan frecuencias adimensionales que son siempre inferiores a la unidad por utilizarse como factor de adimensionalización la frecuencia de la viga intacta que es superior a la de la viga fisurada. En el caso de las vigas fisuradas rotatorias, la frecuencia adimensional, puede ser inferior o superior a la unidad dependiendo de la rigidez adicional aportada por el giro. Para velocidades de giro bajas, la frecuencia adimensional se puede mantener inferior a la unidad si el efecto flexibilizador de la fisura es mayor que el efecto rigidizador de la fuerza centrífuga, pero para velocidades de giro elevadas, el segundo de los efectos es mucho mayor que el primero, resultando valores superiores (e incluso muy superiores) a la unidad. En la literatura se encuentran distintas posibilidades de adimensionalización de las frecuencias en vigas rotatorias que se van a analizar a continuación.

Una de las más utilizadas es la que se indica en apartados previos, en concreto en la expresión (4), denominada en este trabajo  $\mu$ . Considerando esta adimensionalización los resultados para el mismo caso en estudio,  $\alpha=0.3$ ,  $\zeta_s=0.4$ ,  $rc=0.1$ , son las que se muestran en la Figura 6. El análisis del efecto de la velocidad coincide con el análisis realizado para las frecuencias dimensionales. A mayor velocidad, mayor frecuencia. Sin embargo, tal y como se ha indicado en la introducción de este trabajo, el comportamiento cambia cuando se analiza la esbeltez. Con la adimensionalización, la frecuencia aumenta con la esbeltez. Este comportamiento, ya ha sido indicado por otros autores [5,6] aunque sin mayores explicaciones, y puede llevar a confusión. Para explicar este cambio de tendencia de las frecuencias dimensionales y

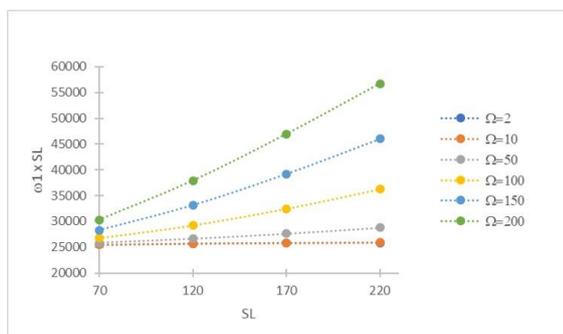


**Figura 6.** Frecuencias adimensionalizadas con (4). Caso  $\alpha=0.3$ ,  $\xi_c=0.4$ ,  $r_c=0.1$ . ( $\Omega$  en rad/s)

adimensionales, es preciso analizar la expresión de la frecuencia adimensionalizada y sustituir (16) en (4):

$$\mu = L \sqrt{\frac{\rho}{E}} SL \omega \quad (17)$$

En la frecuencia adimensionalizada así expresada, se presentan dos términos: la esbeltez,  $SL$ , y la frecuencia,  $\omega$ , que tienen efectos contrarios pero que actúan a la vez. Al aumentar la esbeltez, se reduce la frecuencia, pero aumenta en mayor proporción la primera que la segunda. El efecto combinado puede verse en la gráfica de la Figura 7. El saldo, como consecuencia es que la frecuencia adimensional,  $\mu$ , aumenta cuando en

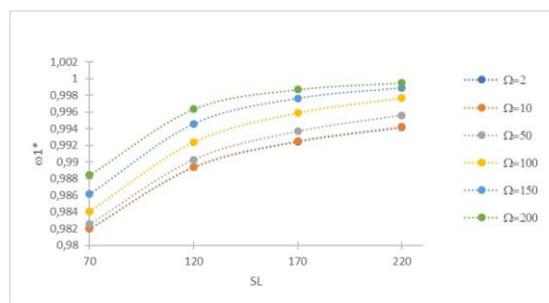


**Figura 7.** Efecto combinado del aumento de la esbeltez y la reducción de la frecuencia. ( $\Omega$  en rad/s)

realidad la frecuencia disminuye. Así es posible explicar el cambio de tendencia observado en la Figura 6 respecto de las Figuras 4 y 5.

Este efecto se produce para las dos frecuencias y en todos los casos del estudio. Es decir, se produce para las dos frecuencias estudiadas y para todas las posiciones de la fisura y todos los tamaños.

Existe otra posible adimensionalización distinta de la presentada y que se analiza a continuación. Es el caso que se muestra en la Figura 8. Aquí las frecuencias se adimensionalizan con la frecuencia de la viga intacta rotatoria, dando lugar a la frecuencia  $\omega_l^*$ . Es decir, se utiliza la frecuencia de la viga intacta en cada velocidad de rotación. Es preciso notar que con esta adimensionalización lo que se intenta es eliminar el efecto de la rigidización por la velocidad de giro y dejar exclusivamente los efectos de la esbeltez y del tamaño de la fisura. Así, todas las frecuencias son menores a la unidad ya que la frecuencia correspondiente a una velocidad de giro se compara con la frecuencia de la viga intacta girando a esa misma velocidad de giro. La ventaja de esta adimensionalización es que permite determinar la presencia de la fisura al ser la frecuencia de la viga fisurada inferior a la unidad. No obstante, esta adimensionalización presenta una desventaja frente a la primera y es que, mientras que en la primera solo es necesario conocer la frecuencia de la viga intacta no giratoria (siempre la misma), en la segunda, es necesario tener conocimiento de la frecuencia de la viga intacta en cada velocidad de giro (tantas como velocidades de giro se están analizando). Por otro lado, como se puede observar en la gráfica, con esta otra adimensionalización se mantiene el hecho de que las frecuencias adimensionalizadas se incrementan con la esbeltez. Estos mismos resultados se alcanzan con otros tamaños de fisuras y otras posiciones.



**Figura 8.** Primera frecuencia natural adimensionalizada con la frecuencia de la viga rotatoria. Caso  $\alpha=0.3$ ,  $\xi_c=0.4$ ,  $r_c=0.1$ . ( $\Omega$  en rad/s)

#### 4. Conclusiones

En este trabajo se presenta un estudio del efecto de algunos de los parámetros característicos de una viga

rotatoria fisurada en el comportamiento dinámico, más concretamente en las dos primeras frecuencias de vibración. Para llevar a cabo este estudio se ha partido de un modelo matemático de una viga rotatoria fisurada en la que la fisura se ha introducido, como es habitual, con un resorte cuya rigidez es equivalente a la de la sección que contiene a la fisura. Se plantean las ecuaciones del movimiento de la viga fisurada y se resuelven mediante el método de integración de Frobenius. Los parámetros que se incluyen en el modelo son: el radio del buje, la esbeltez de la viga, la profundidad y posición de la fisura y la velocidad de giro. De estos parámetros, se han estudiado en detalle en este trabajo dos de ellos: la esbeltez y la velocidad de giro. De los resultados obtenidos, se concluye que un incremento en la velocidad de giro produce incrementos en las frecuencias y que aumentos de la esbeltez producen una disminución la frecuencia. Aunque los resultados se muestran solo para una posición y tamaño de la fisura, son extrapolables a todos los casos estudiados. Se han presentado, además, las frecuencias adimensionalizadas, de dos maneras diferentes, por ser estos los parámetros mayoritariamente, y tradicionalmente, utilizados para la detección e identificación de fisuras. Por un lado, se adimensionalizan con la frecuencia de la viga intacta no rotatoria y por otro, con la de la viga intacta rotatoria. Se ha visto cómo a diferencia de lo que ocurre con las frecuencias dimensionales, las adimensionales sufren un incremento con la esbeltez. Se ha explicado la razón de este aumento, que se debe exclusivamente al efecto combinado del incremento (mayor) de la esbeltez con el decremento (menor) de la frecuencia y no obedece al comportamiento dinámico real del componente. Del estudio de las frecuencias adimensionalizadas, en el caso de hacerlo con la viga no rotatoria, por lo general, las frecuencias adimensionales tienen un valor superior a la unidad, como consecuencia de la rigidización por la fuerza centrífuga y que es tanto mayor cuanto mayor es la velocidad. En el caso de la adimensionalización con la frecuencia de la viga intacta rotatoria, los valores siempre están por debajo de la unidad al eliminar con la adimensionalización el efecto rigidizador de la fuerza centrífuga.

## 5. Agradecimientos

Las autoras desean agradecer la financiación recibida para realizar este trabajo a la Agencia Estatal de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación a través del proyecto PID2019-104799GB-I00 y a la Comunidad de Madrid a través de Acción financiada por la Comunidad de Madrid a través de la línea de "Excelencia del Profesorado Universitario" del Convenio Plurianual con la UC3M (EPUC3M20), en el marco del V PRICIT (V Plan Regional de Investigación Científica e Innovación Tecnológica).

## 6. Referencias

- [1] Lee, J.W. et al., In-plane bending vibration analysis of a rotating beam with multiple edge cracks by using the transfer matrix method. *Meccanica*, 52, 1143–1157 (2017).
- [2] Wauer, J., Dynamics of cracked rotating blades. *Applied Mechanics Reviews*, 44, 273-278 (1991).
- [3] Valverde-Marcos, B. et al. Influence of the rotation speed on the dynamic behaviour of a cracked rotating beam. *Theoretical and applied fracture mechanics*, 117, 103209 (2022).
- [4] Bhat, R.B. Transverse vibrations of a rotating uniform cantilever beam with tip mass as predicted by using beam characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz Method. *Journal of Sound and Vibration* 105(2), 199-210 (1986).
- [5] Ebrahimi, F. et al. On vibration behavior of rotating functionally graded double-tapered beam with the effect of porosities. *Wind Engineering* 42(1), 66–84 (2018).
- [6] Chen Y.F. et al. Flapwise Bending Vibration Analysis of Rotating Tapered Rayleigh Beams for the Application of Offshore Wind Turbine Blades. *China Ocean Engineering* 35, 4, 544–553 (2021).
- [7] Muñoz-Abella, B. et al.: Modelo de comportamiento vibratorio de una viga rotatoria fisurada. Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Jaén, España 2021.
- [8] Banerjee, J.R.: Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration* 233(5), 857-875 (2000).
- [9] Chondros, T.G. et al.: A continuous cracked beam vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 215, 17-34 (1998).
- [10] Lee, J.W. et al.: Free vibration analysis of a rotating double-tapered beam using the transfer matrix method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 34(7), 2731-2744 (2020).