

## Evaluación de la precisión de una formulación Hertziana para la resolución del contacto entre ruedas dentadas interiores de una transmisión planetaria

Javier Sánchez Espiga<sup>1,2</sup>, Nuno Dourado<sup>2</sup>, Alfonso Fernández del Rincón<sup>1</sup>, Filipe Marques<sup>2</sup>, Fernando Viadero Rueda<sup>1\*</sup>, Paulo Flores<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Area de Ingeniería Mecánica, Departamento de Ingeniería Estructural y Mecánica, Universidad de Cantabria, España. Email: [viaderof@unican.es](mailto:viaderof@unican.es)

<sup>2</sup>CMEMS, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Minho, Portugal. Email: [pflores@dem.uminho.pt](mailto:pflores@dem.uminho.pt)

### Resumen

Este trabajo evalúa la precisión de la formulación de Weber-Banaschek, empleada en un modelo híbrido plano en la resolución de los contactos en transmisiones planetarias. Esta formulación considera el contacto Hertziano entre los flancos activos en las ruedas exteriores (sol-planeta) e interiores (planeta-anillo) de dichas transmisiones. El planteamiento Hertziano presenta limitaciones en cuanto a la resolución del contacto interior, el cual es conforme para superficies con radios de curvatura similares. Además, también se analiza la precisión del empleo de un planteamiento analítico en la resolución del contacto exterior.

Para evaluar la precisión de dicha formulación se presenta un nuevo modelo de elementos finitos con simplificaciones geométricas para reducir el coste computacional. Ambos modelos se emplean para la simulación de escenarios análogos en una transmisión con un solo planeta, para evitar la influencia de los contactos de otras ruedas. De los resultados obtenidos en ambos modelos, y dado el carácter plano del modelo híbrido, la magnitud seleccionada para el análisis de la precisión de la mencionada formulación es la longitud de la zona de contacto a lo largo del perfil de las ruedas en contacto interior y exterior. Esta magnitud ilustra la precisión de la formulación de Weber-Banaschek y, además, afecta también al resultado obtenido de las deformaciones generadas en el diente por el contacto local.

**Palabras clave:** Contacto interior, Contacto exterior, Contacto Hertziano, Contacto conforme, Elementos finitos.

### Abstract

The current work evaluates the accuracy of the Weber-Banaschek formulation, employed in a hybrid 2D model to solve the contacts in planetary transmissions. This formulation considers the Hertzian contact between the active flanks in external gears (sun-planet) and internal gears (planet-ring) in such transmissions. The Hertzian approach shows limitations in the internal contact solution. This is due to the fact that it is a conformal contact whenever the curvature radius is similar, as in the rail-wheel contact.

In order to evaluate the precision of such formulation a new finite-element model is presented. This model includes geometrical simplifications in order to reduce the computational cost. Both models are employed for the simulation of analogous scenarios of a planetary transmission with just one planet, thus avoiding the influence of adjacent contacts. From the results obtained in both models, and given the planar approach of the hybrid model, the magnitude that selected to assess the accuracy of the analytical formulation is the length of the contact area along the teeth profile, both for internal and external gears. This magnitude shows the accuracy of Weber-Banaschek's formulation. Besides, it affects the result obtained regarding the deformations in the teeth due to local contact.

**Keywords:** Internal contact, External contact, Hertzian contact, Conformal contact, Finite elements

### 1. Introducción

El modelado en transmisiones de engranajes, y más concretamente en transmisiones planetarias y epiciclicales, ha experimentado un crecimiento muy

significativo en las últimas décadas (Cooley & Parker, 2014). Los nuevos modelos de simulación para transmisiones planetarias se pueden clasificar según su formulación. En primer lugar, los modelos más clásicos se fundamentan en una formulación analítica

donde se desprecian algunos efectos o se tienen rigideces de engrane constantes en el tiempo (A. Kahraman, 1994; A. Kahraman, 1994; Ahmet Kahraman, 1994; P. Velez & Maatar, 1996; Ph. Velez & Flamand, 1996). Sin embargo, con el tiempo estas propuestas se han ido sofisticando y los efectos que se tienen en cuenta en la actualidad son más extensos (Bartelmus et al., 2010; Chaari et al., 2006; Gu & Velez, 2011; Pedrero et al., 2022; Sánchez et al., 2019; Singh, 2010). No obstante, el desarrollo del hardware ha llevado a la presentación de nuevas propuestas más complejas desde el punto de vista computacional, en primer lugar, los modelos de elementos finitos (Ambarisha & Parker, 2007; Brauer, 2004; Ericson & Parker, 2021; Radu et al., 2020). A su vez, a partir de la propuesta presentada por Vijayakar en (Vijayakar, 1991) un nuevo tipo de propuestas se ha desarrollado buscando combinar las ventajas de diferentes planteamientos de modelizado, la rapidez y bajo coste computacional de las formulaciones analíticas, con la precisión de los modelos de elementos finitos (Abousleiman & Velez, 2006; Fernandez del Rincon et al., 2013; Iglesias et al., 2015), pero también existen propuestas donde se combinan los modelos de elementos finitos con modelos multicuerpo para resolver la cinemática (Alessio et al., 2018; Helsen et al., 2011) o combinaciones con modelos multicuerpo y formulaciones analíticas (Viadero et al., 2014).

El desarrollo de todos estos modelos ha llevado a un gran avance en el estudio del comportamiento de las transmisiones planetarias desde el punto de vista estático y dinámico. Los trabajos previos se han centrado en el estudio del reparto de carga afectado por los errores de fabricación (Bodas & Kahraman, 2004; Fernández-Del-Rincón et al., 2016; Iglesias et al., 2017; Ahmet Kahraman, 1999; Sanchez-Espiga et al., 2019, 2020; Singh, 2005, 2010), el efecto de la gravedad (Hammami et al., 2015; Z. Liu et al., 2018; Qiu et al., 2015) o el efecto de la inclusión de los rodamientos o cojinetes que se emplean en las transmisiones (J. Liu et al., 2020; Zhang et al., 2020), entre otros.

En este trabajo el interés se sitúa sobre la precisión del empleo de una formulación analítica para resolver el problema, no lineal, de contacto local entre perfiles activos de dos ruedas exteriores o interiores, perteneciendo estas ruedas a la misma transmisión planetaria. Dicha formulación presentada en (Iglesias et al., 2015; Weber, C. Banaschek, 1951) permite calcular la longitud de la zona de contacto, en un planteamiento bidimensional. Para poder analizar la precisión de esta formulación en la resolución del mencionado contacto se escoge la comparación de la longitud de contacto que se obtiene como resultado en este modelo y en un nuevo modelo de elementos finitos análogo.

Así, el documento consta de una sección 2 donde se tratan los detalles de ambos modelos, centrándose en los aspectos más relevantes para este estudio. Más adelante, se presentan los detalles de la transmisión definida para el análisis, así como, los detalles de la geometría de los dientes y de las posiciones de estudio que se han seleccionado. A continuación, en la sección 4 se presentan y analizan los resultados obtenidos para este planteamiento. Finalmente, en la sección se extraen conclusiones a partir del análisis de los resultados.

## 2. Métodos

El procedimiento empleado en este trabajo consiste en la simulación de una misma transmisión empleando dos modelos análogos, pero con formulaciones diferentes. Así, en un primer lugar se emplea un modelo híbrido (Iglesias et al., 2015) que combina el empleo de modelos de elementos finitos con formulaciones analíticas, basadas en el trabajo de Weber-Banaschek (Weber, C. Banaschek, 1951), para la resolución del problema de contacto entre flancos activos de una transmisión planetaria. Los resultados sacados de este modelo se comparan con un nuevo modelo de elementos finitos desarrollado con ABAQUS. Por lo tanto, en esta sección los detalles de los modelos empleados se presentan, así como, las formulaciones empleadas.

### 2.1. Modelo híbrido

Con respecto al modelo híbrido detallado en anteriores publicaciones (Iglesias et al., 2017; Sanchez-Espiga et al., 2020, 2021, 2022) el interés en su formulación se centra en la resolución del problema de contacto.

Así, este modelo se basa en la combinación de modelos de elementos finitos planos con la formulación analítica de Weber Banashek para la resolución del problema de contacto local. Así, este modelo permite la definición de la geometría de las ruedas y de los elementos que componen la transmisión, considerando una serie de errores (posición, espesor, pitting, grietas...). Sin embargo, en este caso la transmisión que se ha definido es ideal, es decir, exenta de cualquier error. Una vez se tiene la geometría de la transmisión se crean los modelos de elementos finitos (EF), cuyo uso se basa en el trabajo presentado por Brauer (Brauer, 2004). De esta forma cada rueda tiene un par de modelos, uno global y otro local. El global incluye el cuerpo de la rueda y una serie de dientes. El local solo representa la geometría del perfil del diente hasta una profundidad  $h$ , que tendrá impacto en la resolución de Weber Banashek. Por lo tanto, empleando estos modelos de EF y el principio de superposición se determinan las deformaciones en las ruedas, sus dientes y el cuerpo de la rueda, debido a un determinado caso de contacto. Esto permite conocer la rigidez de

engrane, al menos la parte lineal del problema de contacto. Al mismo tiempo, la formulación de Weber Banashek se emplea para resolver iterativamente la parte no lineal del problema de contacto.

Por otra parte, se resuelve el problema geométrico para la geometría de las ruedas, permitiendo que los perfiles de las ruedas, supuestos infinitamente rígidos, se solapen. Este problema se considera también para una serie de dientes, determinado por (1). Además, se tienen en cuenta las posibilidades de contacto entre perfiles de evolvente o entre evolventes y redondeos en la punta de los dientes.

$$Z = 2 \cdot \text{ceil}(\varepsilon + 1) \quad (1)$$

Donde  $Z$  es el número de dientes,  $\text{ceil}$  es la función que redondea al siguiente número entero y  $\varepsilon$  es la relación de contacto entre los pares de ruedas.

Una vez conocidos los solapamientos, existirá una relación entre el solapamiento y las fuerzas de contacto entre dientes, de forma lineal y a esto se le añadirá la solución al problema no lineal del contacto local. Y solo existirá contacto siempre que el solapamiento sea positivo.

## 2.2. Modelo de elementos finitos

Con respecto a la elaboración de la malla de elementos finitos, se ha empezado por construir dos modelos sólidos simplificados de: (a) un par de dientes rectos pertenecientes a dos ruedas exteriores (sol-planeta); y (b) un par de dientes rectos formando dos ruedas interiores (planeta-anillo). Dichas construcciones se han generado a partir de la geometría de los perfiles que se obtiene empleando la formulación presentada en (Iglesias et al., 2015), siguiendo la información contenida en la Tabla 1. Dichos modelos, han sido desarrollados con el objetivo de extender la creación de sólidos mediante la repetición de la geometría inicial respecto de un eje de revolución, según el número de dientes fijado, el cual está detallado en la Tabla 2.

Tabla 1. Geometría de los perfiles de los dientes

Parámetros de la geometría de los perfiles	
Parámetro	Magnitud
Módulo (mm)	4,5
Ángulo de presión (°)	20
Adendum	1·m
Dedendum	1,25·m
Redondeo en la punta	0,05·m

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. Números de dientes

Numero de dientes en las ruedas		
$Z_r$	$Z_p$	$Z_s$
121	30	60
Distancia de montaje (mm)	Sol-planeta	Planeta-anillo
	203,6	203,6

Fuente: elaboración propia.

Estos sólidos iniciales, correspondientes a dientes pertenecientes a las parejas de ruedas en contacto, se han discretizado con elementos finitos cuadráticos isoparamétricos de 20 nodos, para permitir una mejor reproducción de contornos curvos, facilitar la convergencia de las simulaciones y reducir la probabilidad de ocurrencia del fenómeno de *shear locking*.

Así, en el modelo numérico final (Fig. 1a) se ha definido un total de 57552 elementos, siendo que se ha simulado el comportamiento del material (acero) como lineal elástico ( $E = 207$  GPa y  $\nu = 0.3$ ).

Con respecto a las condiciones de contorno, se han restringido los desplazamientos de los nodos localizados en la superficie superior del modelo que forma el anillo exterior. Además, se han definido dos pares cinemáticos independientes (de rigidez infinita) entre: (a) los nodos que componen la superficie del agujero inferior del portaplanetas y un nodo de referencia localizado en el punto medio del eje del dicho portaplanetas; y (b) los nodos que forman el interior del agujero del sol y otro nodo ubicado en el punto medio del eje del mismo sol. A cada uno de estos pares cinemáticos se le han bloqueado los desplazamientos en los ejes cartesianos  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Además, el modelo numérico incorpora un número de superficies de contacto, entre componentes y dientes, debidamente ajustado a las simulaciones que se plantean con el modelo (Fig. 1b). Esto implica que no solo los contactos entre dientes se han considerado, sino también las interacciones entre el portaplanetas y el sol y/o el planeta. Asimismo, las interacciones entre el eje del portaplanetas y el soporte del planeta.

Se han aplicado pares de 500 Nm al sol ( $T_s$ ) y de intensidad igual a  $-T_s(1+Z_r/Z_s)$ , en los ejes de los agujeros de aquellos componentes, a través de los pares cinemáticos previamente especificados, lográndose un equilibrio en el sistema.

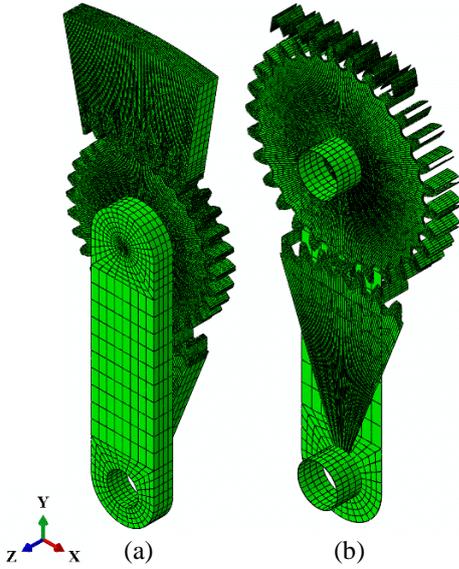


Fig. 1 Modelo numérico (a) y superficies de contacto (b).

La definición y posición de las superficies anteriormente mencionadas permite modelar el contacto entre los dientes, evitando así la penetración entre superficies en contacto a lo largo de las simulaciones. Esta restricción se ha fijado con el tipo superficie-superficie previsto dentro de la biblioteca de ABAQUS, que emplea el método de la penalidad.

### 2.3. Longitud de la zona de contacto

En primer lugar, la longitud de la zona de contacto en el modelo híbrido se obtiene empleando la formulación de Weber-Banaschek, ya mencionada anteriormente. La expresión (2) se aplica para los contactos entre ruedas exteriores y el contacto entre la evolvente del planeta y el redondeo de la punta del diente del anillo. Para superficies cóncavas, como el contacto entre evolventes de ruedas interiores o entre evolvente cóncava con redondeo de la rueda exterior, se emplea la expresión (3).

$$L_c = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \frac{\chi_1 \chi_2}{\chi_1 + \chi_2} \frac{F}{b}} \quad (2)$$

$$L_{cconc} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \frac{\chi_1 \chi_2}{abs(\chi_1 - \chi_2)} \frac{F}{b}} \quad (3)$$

En estas expresiones  $E_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\chi_i$  son el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y el radio de curvatura del cuerpo  $i$ . Los radios de curvatura se obtienen con la expresiones recogidas en (Iglesias et al., 2015). Igualmente,  $F$  se corresponde con la fuerza de contacto y  $b$  el ancho de la rueda.

En el caso del modelo de elementos finitos, uno de los parámetros de salida que se seleccionan en las simulaciones es el área de contacto entre las superficies que se han definido para los contactos, visto que se ha

elaborado un modelo tridimensional de la transmisión planetaria. Una vez se tiene el área de contacto y teniendo en cuenta que, los dientes son rectos, y que no se incluyen modificaciones del perfil a lo largo del ancho de la rueda como el *crowning*, para obtener la longitud de la zona de contacto se puede usar la expresión mostrada a continuación,

$$L_{cFEM} = \frac{A_{cont}}{b} \quad (4)$$

Así, la longitud de contacto en el modelo de elementos finitos ( $L_{cFEM}$ ) es el resultado de dividir el área de contacto  $A_{cont}$  obtenido en las simulaciones, entre el ancho de la rueda  $b$ .

### 3. Parámetros de trabajo

Como se mencionó anteriormente, en las simulaciones llevadas a cabo para este trabajo, los perfiles de los dientes que se han empleado tienen la geometría que se define por los parámetros recopilados en la Tabla 1. En cuanto a las ruedas y el montaje de las mismas en la transmisión, los detalles se recopilan en la Tabla 2.

Este número de dientes hace que el montaje solo sea posible con un planeta. Esta selección se debe al deseo de evitar los efectos de otros contactos aledaños en el contacto que se analiza en profundidad. Como se ha presentado con anterioridad, el modelo de elementos finitos (Fig. 1a) presenta simplificaciones geométricas que permiten reducir el número de elementos y, por lo tanto, el tiempo computacional, pero no permiten contar con efectos de otros contactos relacionados con más planetas.

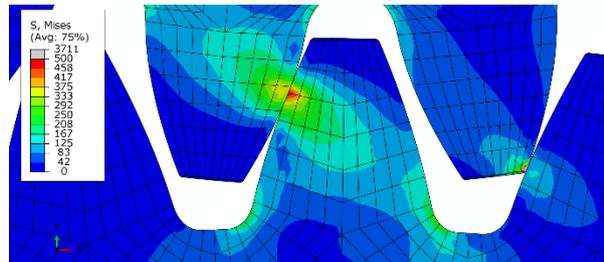
### 4. Resultados

En primer lugar, se establece una validación del funcionamiento de ambos modelos mediante la comparación de las fuerzas de contacto que se obtienen en ambos, en escenarios análogos. Dado el coste computacional de las simulaciones en el modelo de elemento finitos, se seleccionan unas posiciones de interés y de estas se extraerán los resultados. Igualmente, en el modelo híbrido se seleccionarán las mismas posiciones.

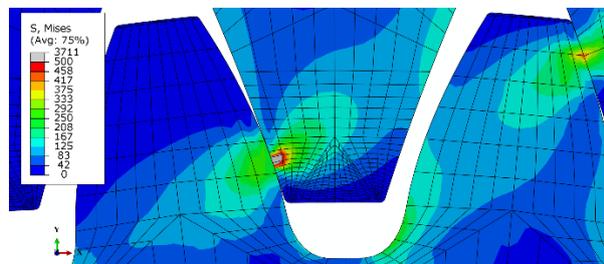
Por lo tanto, las posiciones seleccionadas se corresponden con situaciones en las cuales se tiene un contacto doble entre sol y planeta. En la interacción entre las mencionadas ruedas, hay contactos entre evolventes y entre evolvente y redondeo en la punta del diente.

Además, este estudio también se extiende a situaciones donde haya un contacto entre superficies cóncavas entre ruedas interiores.

Considerando el contacto entre ruedas exteriores, el primer escenario (Fig. 2a) se corresponde con un contacto entre redondeo y un doble contacto entre evolventes para el contacto entre ruedas interiores (Fig. 2b). El escenario 2, tanto en el contacto entre ruedas exteriores, como interiores está compuesto por un contacto doble entre perfiles de evolvente (Fig. 3 (a) y (b)).

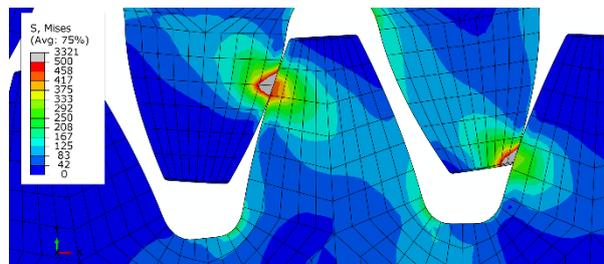


(a)

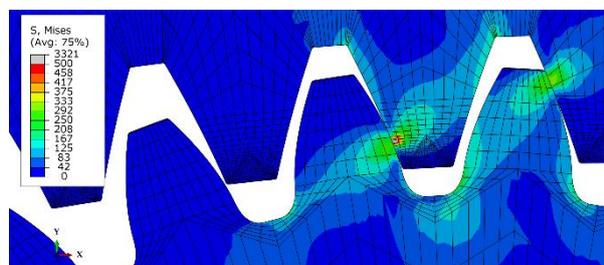


(b)

Fig. 2 Campo de tensiones (MPa) según von Mises del escenario 1: (a) sol-planeta y (b) planeta-anillo.



(a)



(b)

Fig. 3 Campo de tensiones (MPa) según von Mises del escenario 2: (a) sol-planeta y (b) planeta-anillo.

En estos escenarios que se han presentado, las fuerzas de contacto obtenidas por ambos modelos se recogen en la Tabla 3.

Como se puede ver en los resultados numéricos recogidos en la Tabla 3, las fuerzas de contacto que se obtienen en ambos modelos para escenarios análogos, muestran pequeñas diferencias. Esto demuestra que el funcionamiento de ambos modelos es comparable. Partiendo de esta base, el siguiente paso que se presenta en este trabajo se corresponde con el estudio de los resultados en estos escenarios de las longitudes de las zonas de contacto, empleando ambos enfoques.

Empleando el procedimiento detallado en los apartados 2 y 3 de este trabajo, las longitudes de contacto en los escenarios planteados se recogen en la Tabla 4.

Tabla 3. Componentes de las fuerzas de contacto en el plano xy para ambos modelos en ambos escenarios de estudio

Componentes de las fuerza de contacto en xy (N)					
Modelo de elementos finitos					
Escenario	Sol-planeta		Planeta-anillo		
1		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
	$F_x$	4080,1	1564,6	2795,6	2715,7
	$F_y$	1485,1	569,5	1017,5	988,4
2		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
	$F_x$	2330,4	3126,4	2963,8	2458,2
	$F_y$	848,2	1137,9	1078,7	894,7
Modelo híbrido					
Escenario	Sol-planeta		Planeta-anillo		
1		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
	$F_x$	4130,7	1387	2808,45	2756
	$F_y$	1573,4	549,6	973,1	954,9
2		Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
	$F_x$	2425,2	3099,7	2946,4	2639,8
	$F_y$	923,8	1180,7	1020,95	914,7

Tabla 4. Longitud de la zona de contacto obtenida para ambos modelos en ambos escenarios de estudio.

Longitud de la zona de contacto (mm)				
Modelo de elementos finitos				
Escenario	Sol-planeta		Planeta-anillo	
1	Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
	0,5444	0,0169	0,3475	0,5576
2	Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
	0,1555	0,2335	0,3428	0,3136
Modelo híbrido				
Escenario	Sol-planeta		Planeta-anillo	
1	Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
	0,1329	0,0104	0,1376	0,1925
2	Diente 1	Diente 2	Diente 1	Diente 2
	0,1161	0,1147	0,146	0,1925

Los resultados muestran que el cálculo de la longitud de la zona de contacto entre ruedas exteriores con el modelo híbrido es bastante más parejo a los resultados obtenidos en el modelo de elementos finitos, que en el caso del contacto entre ruedas interiores. Además, se puede destacar que en el escenario 1 en el segundo diente donde hay un contacto en el redondeo, la diferencia en los resultados para la longitud de la zona de contacto son muy pequeñas comparadas con los demás contactos estudiados en este trabajo.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se han comparado dos alternativas de simulación para una transmisión planetaria simplificada, con el objetivo de establecer la precisión de una formulación Hertziana, como es Weber-Banaschek, en el cálculo de la longitud de contacto entre ruedas dentadas exteriores e interiores. Las alternativas fueron el método de los elementos finitos y un modelo híbrido plano para resolución de los contactos. Así,

- En primer lugar se ha validado que el funcionamiento de ambos modelos, desde el punto de vista de las fuerzas de contacto, es comparable con una precisión notable.
- El error cometido para el cálculo de la longitud de contacto entre ruedas exteriores demuestra ser más pequeño que en el mismo escenario para ruedas interiores. Además, este error en el contacto entre redondeo y

evolvente de las ruedas exteriores se vuelve significativamente más pequeño.

- Las longitudes de contacto obtenidas mediante el uso del modelo de elementos finitos se corresponden con valores notablemente más elevados que los que se obtienen con la formulación Hertziana. Esto es consecuente con la concavidad de la evolvente del anillo y, por lo tanto, con la imprecisión de la formulación Hertziana para contactos entre superficies concavas con radios de curvatura similares, donde la zona de contacto no es plana.

## 5.1. Agradecimientos

Los autores agradecen al Ministerio de Ciencia e Innovación que financia el proyecto PID2020-116213RB-I00 en el cual se ha desarrollado esta actividad.

## 5.2. Referencias

- Abousleiman, V., & Velez, P. (2006). A hybrid 3D finite element/lumped parameter model for quasi-static and dynamic analyses of planetary/epicyclic gear sets. *Mechanism and Machine Theory*, 41(6), 725–748. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2005.09.005>
- Alessio, C., Park, D., Mundo, D., Tamarozzi, T., & Rezayat, A. (2018). Modal behavior and transient dynamic analysis of a planetary gear train with time-varying mesh stiffness using a multibody model. *Proceedings of ISMA 2018 - International Conference on Noise and Vibration Engineering and USD 2018 - International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*, 2577–2591.
- Ambarisha, V. K., & Parker, R. G. (2007). Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models. *Journal of Sound and Vibration*, 302(3), 577–595. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.11.028>
- Bartelmus, W., Chaari, F., Zimroz, R., & Haddar, M. (2010). Modelling of gearbox dynamics under time-varying nonstationary load for distributed fault detection and diagnosis. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 29(4), 637–646. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2010.03.002>
- Bodas, A., & Kahraman, A. (2004). Influence of Carrier and Gear Manufacturing Errors on the Static Load Sharing Behavior of Planetary Gear Sets. *JSME International Journal Series C*, 47(3), 908–915. <https://doi.org/10.1299/jsmec.47.908>
- Brauer, J. (2004). A general finite element model of involute gears. *Finite Elements in Analysis and*

- Design*, 40(13–14), 1857–1872.  
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2004.02.002>
- Chaari, F., Fakhfakh, T., Hbaieb, R., Louati, J., & Haddar, M. (2006). Influence of manufacturing errors on the dynamic behavior of planetary gears. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 27(7–8), 738–746.  
<https://doi.org/10.1007/s00170-004-2240-2>
- Cooley, C. G., & Parker, R. G. (2014). A Review of Planetary and Epicyclic Gear Dynamics and Vibrations Research. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4), 040804.  
<https://doi.org/10.1115/1.4027812>
- Ericson, T. M., & Parker, R. G. (2021). Experimental measurement and finite element simulation of elastic-body vibration in planetary gears. *Mechanism and Machine Theory*, 160, 104264.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104264>
- Fernández-Del-Rincón, A., Iglesias, M., De-Juan, A., Diez-Ibarbia, A., García, P., & Viadero, F. (2016). Gear transmission dynamics: Effects of index and run out errors. *Applied Acoustics*, 108, 63–83.  
<https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2015.11.012>
- Fernandez del Rincon, A., Viadero, F., Iglesias, M., García, P., & Sancibrian, R. (2013). A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions. *Mechanism and Machine Theory*, 61, 30–58.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.10.008>
- Gu, X., & Velex, P. (2011). A lumped parameter model to analyse the dynamic load sharing in planetary gears with planet errors. In *Applied Mechanics and Materials* (Vol. 86).  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.86.374>
- Hammami, A., Santamaria, M. I., Del Rincon, A. F., Chaari, F., Rueda, F. V., & Haddar, M. (2015). Load Sharing Behavior in Planetary Gear Set. In *Applied Condition Monitoring* (Vol. 2, pp. 459–468).  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-14532-7\\_47](https://doi.org/10.1007/978-3-319-14532-7_47)
- Helsen, J., Vanhollenbeke, F., Marrant, B., Vandepitte, D., & Desmet, W. (2011). Multibody modelling of varying complexity for modal behaviour analysis of wind turbine gearboxes. *Renewable Energy*, 36(11), 3098–3113.  
<https://doi.org/10.1016/j.renene.2011.03.023>
- Iglesias, M., Fernandez del Rincon, A., de-Juan, A., Diez-Ibarbia, A., Garcia, P., & Viadero, F. (2015). Advanced model for the calculation of meshing forces in spur gear planetary transmissions. *Meccanica*, 50(7), 1869–1894.  
<https://doi.org/10.1007/s11012-015-0130-3>
- Iglesias, M., Fernandez del Rincon, A., De-Juan, A., Garcia, P., Diez-Ibarbia, A., & Viadero, F. (2017). Planetary transmission load sharing: Manufacturing errors and system configuration study. *Mechanism and Machine Theory*, 111, 21–38.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.12.010>
- Kahraman, A. (1994). Natural Modes of Planetary Gear Trains. *Journal of Sound and Vibration*, 173(1), 125–130.  
<https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1222>
- Kahraman, A. (1994). Dynamic Analysis of a Multi-Mesh Helical Gear Train. *Journal of Mechanical Design*, 116(3), 706–712.  
<https://doi.org/10.1115/1.2919440>
- Kahraman, Ahmet. (1994). Load sharing characteristics of planetary transmissions. *Mechanism and Machine Theory*, 29(8), 1151–1165.  
[https://doi.org/10.1016/0094-114X\(94\)90006-X](https://doi.org/10.1016/0094-114X(94)90006-X)
- Kahraman, Ahmet. (1999). Static Load Sharing Characteristics of Transmission Planetary Gear Sets : Model and Experiment. *Transmission and Driveline Systems Symposium, 1*, 1–10.  
<https://doi.org/10.4271/1999-01-1050>
- Liu, J., Pang, R., Ding, S., & Li, X. (2020). Vibration analysis of a planetary gear with the flexible ring and planet bearing fault. *Measurement*, 165, 108100.  
<https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.108100>
- Liu, Z., Liu, Z., & Yu, X. (2018). Dynamic modeling and response of a spur planetary gear system with journal bearings under gravity effects. *Journal of Vibration and Control*, 24(16), 3569–3586.  
<https://doi.org/10.1177/1077546317707878>
- Pedrero, J. I., Pleguezuelos, M., & Sánchez, M. B. (2022). Influence of meshing stiffness on load distribution between planets of planetary gear drives. *Mechanism and Machine Theory*, 170(November 2021), 104718.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104718>
- Qiu, X., Han, Q., & Chu, F. (2015). Load-sharing characteristics of planetary gear transmission in horizontal axis wind turbines. *Mechanism and Machine Theory*, 92, 391–406.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2015.06.004>
- Radu, M. C., Dourado, N., Coltun, I. G., & Andrei, G. (2020). An elastic model for tooth contact analysis of spur gears using FEM simulation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 997(1), 899X/997/1/012089.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/997/1/012089>
- Sanchez-Espiga, J., Fernandez-del-Rincon, A., Iglesias, M., & Viadero, F. (2019). Influence of the phase in planetary gears load sharing and transmission error. In *Mechanisms and Machine*

- Science* (Vol. 73, pp. 1059–1067). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-20131-9\\_105](https://doi.org/10.1007/978-3-030-20131-9_105)
- Sanchez-Espiga, J., Fernandez-del-Rincon, A., Iglesias, M., & Viadero, F. (2020). Influence of errors in planetary transmissions load sharing under different mesh phasing. *Mechanism and Machine Theory*, 153, 104012. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.104012>
- Sanchez-Espiga, J., Fernandez-del-Rincon, A., Iglesias, M., & Viadero, F. (2021). Planetary gear transmissions load sharing measurement from tooth root strains: Numerical evaluation of mesh phasing influence. *Mechanism and Machine Theory*, 163, 104370. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104370>
- Sanchez-Espiga, J., Fernandez-del-Rincon, A., Iglesias, M., & Viadero, F. (2022). Numerical evaluation of the accuracy in the load sharing calculation using strain gauges: Sun and ring gear tooth root. *Mechanism and Machine Theory*, 175, 104923. <https://doi.org/10.1016/J.MECHMACHTHEORY.2022.104923>
- Sánchez, M. B., Pleguezuelos, M., & Pedrero, J. I. (2019). Influence of profile modifications on meshing stiffness, load sharing, and transmission error of involute spur gears. *Mechanism and Machine Theory*, 139, 506–525. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.05.014>
- Singh, A. (2005). Application of a System Level Model to Study the Planetary Load Sharing Behavior. *Journal of Mechanical Design*, 127(3), 469. <https://doi.org/10.1115/1.1864115>
- Singh, A. (2010). Load sharing behavior in epicyclic gears: Physical explanation and generalized formulation. *Mechanism and Machine Theory*, 45(3), 511–530. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.10.009>
- Velex, P., & Maatar, M. (1996). A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour. *Journal of Sound and Vibration*, 191(5), 629–660. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0148>
- Velex, Ph., & Flamand, L. (1996). Dynamic Response of Planetary Trains to Mesh Parametric Excitations. *Journal of Mechanical Design*, 118(1), 7. <https://doi.org/10.1115/1.2826860>
- Viadero, F., Fernández, A., Iglesias, M., De-Juan, A., Liaño, E., & Serna, M. A. (2014). Non-stationary dynamic analysis of a wind turbine power drivetrain: Offshore considerations. *Applied Acoustics*, 77, 204–211. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2013.10.006>
- Vijayakar, S. (1991). A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(3), 525–545. <https://doi.org/10.1002/nme.1620310308>
- Weber, C. Banaschek, K. (1951). *The deformation of loaded gears and the effect on their load carrying capacity* (D. of Scientific & and I. Research (eds.)).
- Zhang, C., Wei, J., Wang, F., Hou, S., Zhang, A., & Lim, T. C. (2020). Dynamic model and load sharing performance of planetary gear system with journal bearing. *Mechanism and Machine Theory*, 151, 103898. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.103898>