TRABAJO FIN DE GRADO.

MECÁNICA ESTADÍSTICA DEL DINERO: DISTRIBUCIÓN DE BOLTZMANN-GIBBS. CONSECUENCIAS TERMODINÁMICAS DE LA LIMITACIÓN EN LAS TRANSACCIONES ECONÓMICAS.

Autor: PEDRO VALVERDE CARAMÉS

Curso: 2013-2014

Tutor: J. C. ANTORANZ

Contenido

Agradecimientos.

Es de justicia nombrar aquí a *Rafael Frutos Vivar*, Subdirector General de Presupuestación en el Servicio de Estudios Tributarios y Estadísticas de la AEAT, colega y amigo, por su franca disposición a comentar conmigo variados pormenores surgidos a lo largo de de este trabajo, así como, por ayudarme a recordar viejas cuestiones de microeconomía que ya me resultaban, lejanas.

RESUMEN

El dinero siempre está ahí;
sólo cambian los bolsillos.
Gertrude Stein

La Econofísica recurre a métodos de Mecánica Estadística y a la Física de sistemas complejos para modelizar los sistemas económicos. Los modelos de tipo gas (KWEM) intentan explicar las propiedades más relevante de las transacciones económicas en una sociedad partiendo de la Teoría Cinética de los Gases, que describe las interacciones entre las partículas de un gas. Se definen así los llamados modelos basados en agentes. Si en estos modelos se introducen restricciones que limitan el intercambio económico, los sistemas convergen a estados de equilibrio estadístico caracterizados por una importante desigualdad en el reparto de la riqueza. Por otra parte, lo anterior permite dotar de un significado económico a un parámetro fundamental en toda esta teoría como es de *temperatura económica.*

1. Introducción

Analogías entre la Economía y la Mecánica Estadística. Econofísica. [1]
Un buen número de fenómenos económicos responden a lo que en Física se conoce bajo el nombre de dinámica no lineal o de sistemas complejos: sistemas cuyo comportamiento colectivo no se puede explicar a partir de la simple superposición de sus partes constituyentes. Por ejemplo, son de este tipo aquellos que describen situaciones muy alejadas del equilibrio o los que exhiben comportamientos caóticos. Cabe preguntarse, por tanto, si sería posible emplear métodos de Física Estadística para desarrollar modelos económicos realistas y eficientes.
En los últimos años, este novedoso enfoque interdisciplinar, al que se ha dado en llamar *Econofísica [2,3]*, ha mejorado de manera considerable nuestra comprensión de numerosos procesos económicos.

Propiedades termodinámicas del dinero: Modelos tipo gas (KWEM).
Este trabajo se centrará en los denominados modelos de tipo gas (conocidos en la literatura como *Kinetic Wealth Exchange Models* o KWEM). Estos modelos intentan describir las interacciones económicas a partir de su analogía con uno de los sistemas físicos más sencillos que se conocen: un gas de partículas.
La idea seminal proviene de los trabajos de Mandelbrot [4] y se fundamenta en que las leyes de la Mecánica Estadística gobiernan el comportamiento de una inmenso número de interacciones individuales, tales como las colisiones dentro de un gas contenido en un volumen cerrado. Desde esta perspectiva, la teoría clásica de gases homogéneos es fácilmente adaptable al esquema de un modelo económico: en este caso las moléculas y sus velocidades son reemplazadas por agentes (individuos y/o empresas) y su dinero, y en lugar de colisiones binarias se consideran intercambios entre dos agentes económicos. Al igual que los diferentes modelos de interacciones en un gas determinan sus propiedades macroscópicas (presión, temperatura, entalpía etc.), al considerarse diversos tipos de transacciones económicas se deberían de recuperar distribuciones de dinero distintas y parámetros macroscópicos diferentes. En el caso que nos ocupa, tanto la Mecánica Estadística como la Economía, estudian grandes conjuntos de elementos, átomos en un caso y agentes económicos en el otro, siendo por ello que el concepto de "*equilibrio estadístico*" jugará un papel determinante.

Tabla 1. Analogía entre modelo cinético y multi-agente.

	Modelo físico	Modelo económico
Cantidades intercambiadas	K=energía cinética	m=dinero
Unidades	N Partículas	N Agentes
Interacción	Colisiones	Transacciones

Diferencias entre dinero y riqueza. [5]

Es muy importante puntualizar que el dinero no se corresponde de una manera unívoca con la *riqueza*. El dinero es sólo una parte de misma, siendo la otra, *la riqueza material (o inmaterial, pero no monetaria, piénsese en los derechos de una patente a modo de ejemplo).* Los productos materiales no tienen porque verificar una ley de conservación ya que se pueden fabricar, destruir, ser consumidos, etc. Por otra parte, la política monetaria puede operar alterando el valor de los productos materiales (su expresión monetaria, esto es, su precio) y por ello hacer que éste no sea constante. La mismo se puede aplicar a acciones, bonos y a otros productos financieros y que los textos de economía de forma explícita excluyen de la definición formal de dinero. A efectos de lo que sigue siempre se entenderá que el dinero hace mención al papel moneda o en su caso a activos bancarios, o de otro tipo, pero de liquidez inmediata.

Modelos tipo Boltzmann-Gibbs: origen, campo de aplicación y limitaciones.

Considérese un sistema formado por muchos agentes económicos, N>>1, los cuales se pueden considerar como individuos o corporaciones. Se parte del supuesto de que N es un número constante. Cada agente *i* tiene una cantidad de dinero m_i que puede intercambiar con cualquier otro agente. Lo que subyace a dicha interacción es algún tipo de actividad económica, tal como la compra de algún bien o servicio, sin embargo este detalle no es importante en el ámbito de este trabajo. En lo que atañe a éste lo único relevante es el resultado de la interacción entre los agentes *i* y *j* en la cual alguna cantidad de dinero Δp cambia de manos:

$[m_i,m_j] \longrightarrow [m_i',m_j']= [m_i-\Delta p,m_j+\Delta p]$.

Como se deduce de la expresión anterior *la cantidad total de dinero se mantiene constante* en cada transacción $m_i+m_j= m_i'+m_j'$.

Esta regla de conservación local de la cantidad de dinero es análoga a la conservación de la energía entre átomos en colisión. Se asume que no existe ningún flujo externo de dinero que pueda alterar al sistema, ya que éste es por definición un *sistema aislado*, de tal manera que la cantidad total de dinero *M* permaneces constante.

Sea *P(m)* la función de distribución de la probabilidad del dinero, definida como que el número de agentes con dinero entre *m* y *m+dm* es igual a *NP(m)dm*. Estamos interesados en la distribución *P(m)* estacionaria correspondiente a un estado de equilibrio termodinámico. En esta situación la posición de cualquier agente puede fluctuar abruptamente en una interacción con otro agente pero la distribución de probabilidad no cambia $\frac{dP(m)}{dt} = 0$.

La distribución de equilibrio *P(m)* se puede derivar de la misma manera que se obtiene la distribución de equilibrio de la energía *P(ε)* en mecánica estadística. Considérese la división del sistema global en dos subsistemas 1 y 2. Como la cantidad total de dinero se mantiene constante se cumple que $m=m_1+m_2$, por tanto se tiene que $P=P_1*P_2$ con lo que se concluye que $P(m)=P(m_1+m_2)= P(m_1)+P(m_2)$.

La solución de esta ecuación es *P (m) = C*exp (-M / T)*, por lo que la probabilidad de equilibrio distribución del dinero tiene la forma de Boltzmann-Gibbs.

De las condiciones de normalización $\int_{-\infty}^{\infty} P(m)dm = 1$ y $\int_{-\infty}^{\infty} mP(m)dm = M/N$ se obtiene que *C=1/T* y que *T=M/N*. Por lo tanto, la *"temperatura monetaria" T* es el promedio de cantidad de dinero por cada agente.

La distribución de Boltzmann-Gibbs puede ser también deriva por la maximización de la entropía de la distribución de dinero S=$-\int_0^{\infty} P(m)lnP(m)dm$ bajo la restricción de la conservación de la cantidad de dinero. Siguiendo argumento original de Boltzmann, dividamos el dinero eje *0 ≤ m ≤ ∞* en pequeños intervalos de tamaño dm y a estos intervalos se los numero de manera consecutiva con el índice *b = 1 , 2 , . . .*

Denotemos el número de agentes en un contenedor de *b* como N_b, el número total es de *N* =$\sum_{b=1}^{\infty} N_b$. Los agentes en la intervalo b tienen la cantidad m_b de dinero, y el dinero total es M =$\sum_{b=1}^{\infty} m_b N_b$. La probabilidad de realización de un cierto conjunto de la ocupación números { N_b} es proporcional al número formas diferentes en que *N* agentes pueden ser distribuido entre los contenedores que preservan el conjunto {N_b}.Este número es *N! / N1 ! N2 ! . . .* El logaritmo de la probabilidad es la entropía *lnN*-$\sum_{b=1}^{\infty} lnN_b$! Cuando los números de N_b son grande y la fórmula de Stirling *lnN ! ≈ N lnN - N* se puede aplicar, la entropía por agente es *S = (N lnN* -$\sum_{b=1}^{\infty} N_b lnN_b)/N$=-$\sum_{b=1}^{\infty} P_b ln\, P_b$ es la probabilidad de que un agente tenga la cantidad de dinero m_b . Usando el método de los multiplicadores de Lagrange para maximizar la entropía S con respecto a la ocupación números { N_b} con las restricciones en el dinero total *M* y el número total de agentes *N* generan la distribución de Boltzmann–Gibbs para *P (m).*

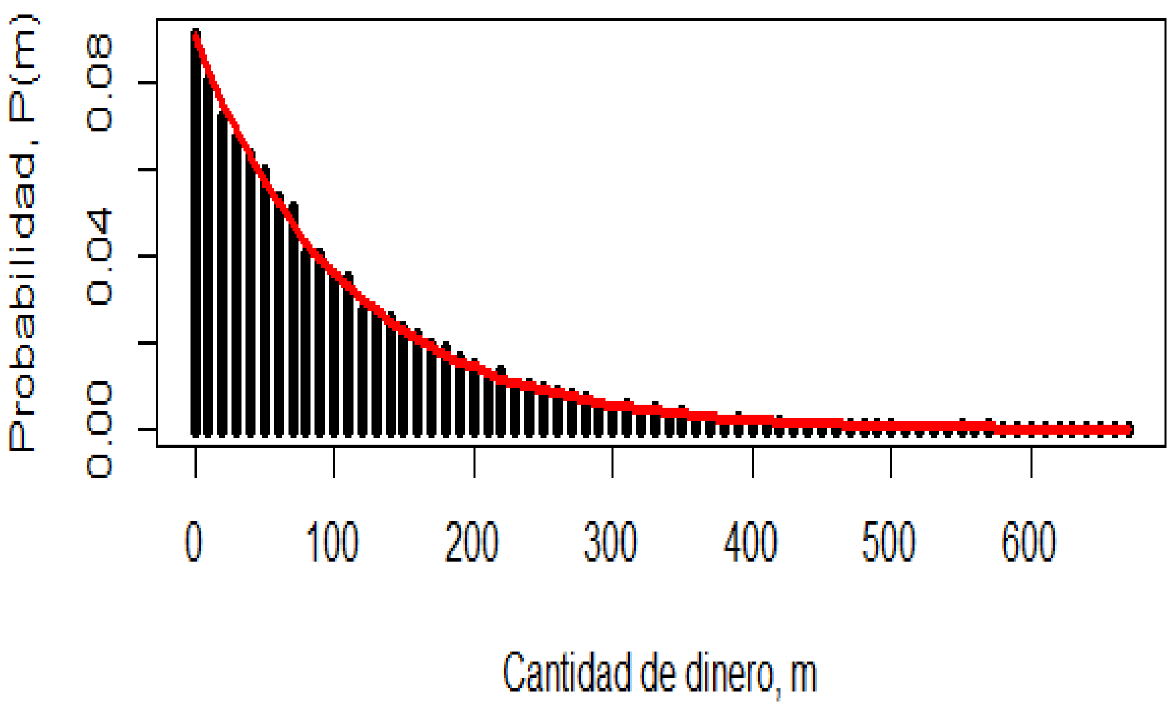
En la literatura sobre el tema se proponen múltiples reglas de interacción; el intercambio de una cantidad Δp constante, el de un fracción aleatoria $0 \leq v \leq 1$ de la media de dinero del par $\Delta p = v\,(\,mi + mj\,)\,/\,2$ o el de una fracción aleatoria α de la media de dinero en el sistema $\Delta p = \alpha(M\,/\,N)$. En este trabajo se partirá, como modelo inicial, de aquel en el que en cada interacción se determina una cantidad a intercambiar aleatoria: $\Delta p \sim Unif[1,100]/\ p \in Z$ *(~ significa "distribuido como")*.

Así, en cada iteración se elegirán, al azar, dos agentes y una cantidad Δp para intercambiar entre ellos, siempre y cuando el *donante* tenga dinero suficiente para realizar el intercambio. Sin pérdida de generalidad se toman precios enteros ($p \in Z$).

El vector de dinero inicial $V_{inicial}$ será uniforme, $m_i=100\ \ \forall\, i = 1, \ldots, N$ y donde N es el tamaño del colectivo simulado. En todas las simulaciones que se desarrollan en este trabajo, N=*10.000* y $M=10^6$ es la cantidad total de dinero del sistema. Por tanto, la distribución de probabilidad inicial viene dada por $P_{inicial}\,(m\,) = \delta\,(\,m - 100)$.

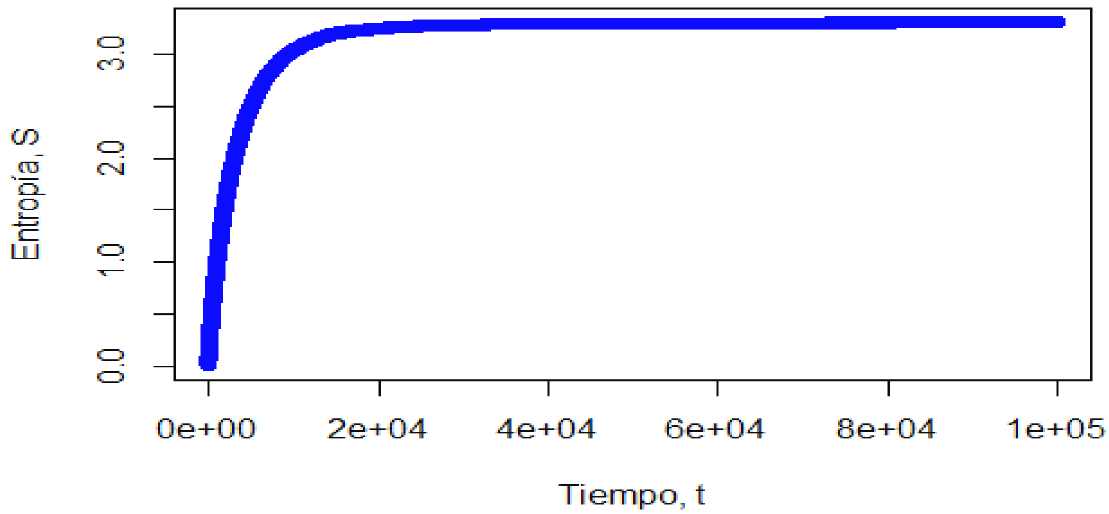
La figura 1., muestra la distribución equilibrio conseguida después de 10^6 iteraciones, lo que significa que, en promedio, cada agente ha participado en unas 100 transacciones ya fuese como *perdedor* o *ganador*.

Figura 1. Histograma: distribución estacionaria de probabilidad del dinero P(m). Curva sólida ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs.



Como se puede observar, figura 2., en el proceso la Entropía S del sistema aumenta en el tiempo hasta saturarse en el valor máximo para la distribución de Boltzmann-Gibbs.

Figura 2. Evolución temporal de la entropía para el modelo anterior. El tiempo se mide en ciclos de iteración.



El resultado anterior se obtiene partiendo de la distribución de dinero $V_{inicial}$, no obstante, la distribución estacionaria final se encontrará que es el misma si se parte de otra inicial distinta y/o se aplican otras reglas de intercambio diferentes, siempre que se respete la conservación del dinero y, como veremos, la simetría temporal, es decir que el modelo sea aditivo.

Como se afirma en [6] la distribución final es universal, dentro de los condiciones impuestas, aunque la distribución de partida (y/o las reglas de intercambio) propuestas sean diferentes.

Modelo con posibilidad de endeudamiento.

En este apartado se discutirá lo que sucede cuando se permite a los agentes endeudarse. La deuda puede ser vista como dinero negativo. Ahora, cuando un *donante* no tiene suficiente dinero para pagar la cantidad Δp, se le permite pedir prestada la cantidad necesaria de un depósito, y su equilibrio se convierte en negativo. La ley de conservación no se viola: *la suma de dinero positivo del ganador y de dinero negativo del perdedor permanece constante*. Cuando un agente con un saldo negativo recibe el dinero como *ganador*, utiliza este dinero para pagar la deuda hasta que el equilibrio se vuelva positivo.

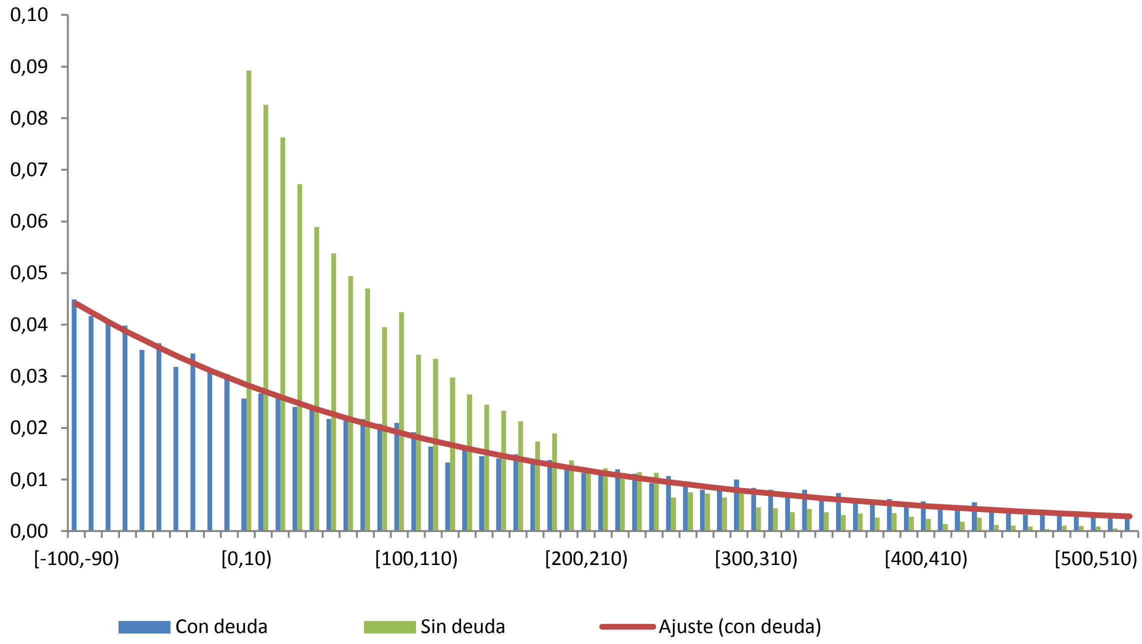
Suponemos, por simplicidad, que los cargos de depósito por el dinero prestado son sin intereses. Sin embargo, debido a que no es sensato permitir un endeudamiento ilimitado, se impone un límite, m_d, al máximo de la deuda de un agente, esto es, $m_i > -m_d$. Esta nueva condición de frontera $P(m < -m_d) = 0$ reemplaza la antigua $P(m < 0) = 0$.

El resultado de una simulación por ordenador con $m_d = 100$ se muestra en la figura 3. $P(m)$ viene de nuevo dada por la ley de Boltzmann-Gibbs, pero ahora con la temperatura más alta

$T = M / N + m_d$, debido a que las condiciones de normalización necesitan ser mantenidas incluyendo a aquella parte del colectivo que tienen dinero negativo (deudas) :$\int_{-md}^{\infty} P(m)dm = 1$ y $\int_{-md}^{\infty} mP(m)dm = M/N$.

La temperatura más alta hace la distribución de dinero esté más extendida lo que significa que el aumento de la deuda incrementa la desigualdad entre los agentes.

Figura 3. Histograma: distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero con y sin deuda. Curva sólida: ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs P(m)=$C * e^{-\frac{m}{T}}$ con T=200,26



En general, la temperatura queda completamente determinada por el promedio de dinero por agente <m>= M/N y por las condiciones límite impuestas en el modelo. Por ejemplo, si a los agentes se les impone que no pueden tener menos dinero que una cantidad m_1 ni más que una cantidad m_2: $m_1 \ll m \ll m_2$ En este caso la condición de normalización $\int_{m1}^{m2} P(m)dm = 1$ y $\int_{m1}^{m2} mP(m)dm =< m >$ con P(m)=$C * e^{-\frac{m}{T}}$ dan lugar a la siguiente ecuación para T:

$$coth\left(\frac{\Delta m}{T}\right) - \frac{T}{\Delta m} = \frac{\bar{m} - < m >}{\Delta m}$$

donde $\bar{m} = (m_1 + m_2)/2$ y $\Delta m = (m_1 - m_2)/2$. De la ecuación anterior se puede concluir que la temperatura será positiva cuando $\bar{m} > < m >$ negativa cuando $\bar{m} < < m >$ e infinita

($P(m)=const$) cuando $\bar{m}$=$< m >$ En particular si el dinero de los agentes está limitado por arriba pero no por abajo $-\infty \ll m \ll m_2$ la temperatura es negativa.

La imposición de un corte abrupto m_d puede ser no del todo realista. En la práctica, el punto de corte se puede extender sobre algún intervalo dependiente de las reglas exactas de quiebra [**7**]. Durante este intervalo, la distribución de Boltzmann-Gibbs podría verse difuminada. Por lo tanto se espera ver la ley de Boltzmann–Gibbs sólo lo suficientemente lejos de la región de corte. Además, en el extremo superior de las distribuciones, para valores altos de dinero el número de agentes presentes se vuelve pequeño y las estadísticas pobres, por lo que la ley de Boltzmann–Gibbs pierde aplicabilidad. Hay demasiados pocos elementos como para que sean estadísticamente significativos. Por ello, lo que se espera es que la ley de Boltzmann–Gibbs se manifieste sólo para rangos intermedios de dinero, no demasiado cerca ni del límite inferior ni del extremo superior. Sin embargo, este rango intermedio es el más relevante, estadísticamente hablando, ya que cubre a la gran mayoría de la población.

Los préstamos suponen la creación de una cantidad igual de dinero positivo (activo) y negativo (pasivo). Cuando los textos de economía financiera describen el proceso por el cual "los bancos crean dinero" o " la deuda crea dinero “, no consideran a los pasivos (negativos) como dinero, y por lo tanto éste no se conserva.

En la definición operativa de dinero que se ha manejado en este trabajo, se pueden considerar incluidos todos los instrumentos financieros con denominación fija, tales como moneda, pagarés y bonos, pero no el material, riqueza o acciones, y se contabilizan tanto los activos y pasivos. Con esta definición el dinero se conserva, y se espera ver una distribución de Boltzmann-Gibbs en equilibrio.

Desafortunadamente, ya que esta definición tan general del “dinero” difiere de las definiciones de los economistas sobre los agregados monetarios (M1, M2, M3,…), no es fácil encontrar el estadísticas adecuadas para cotejar los modelos teóricos.

Por supuesto, el dinero puede ser también emitido por un banco central o el gobierno. Esto es análogo a una afluencia externa de energía en un sistema físico. Sin embargo, si este proceso es lo suficientemente lento, el sistema económico puede ser capaz de mantenerse en un estado de cuasi-equilibrio que se caracterizaría por un cambio lento de la temperatura.

Modelo con parámetro de ahorro. Análisis de la equidad.

Como ya se ha indicado si la simetría de inversión temporal se rompe, el sistema puede tener una distribución estacionaria que no sea de Boltzmann-Gibbs o incluso no alcanzar una distribución estacionaria [véase 7].

Un ejemplo de esta clase es aquel en que los agentes presentes en el modelo ahorran una fracción λ de su dinero (la conocida en Economía como *Propensión marginal al ahorro*), de tal forma que en cada iteración el *donante* se reserva una parte λm y sólo pone en juego una fracción $(1-\lambda m)$ de su dinero total. De esta manera el agente i, que juega el papel de *donante*, efectuará la transacción si y sólo si $(1-\lambda_i m_i) \geq \Delta p$ en caso contrario los agentes no intercambian la cantidad Δp.

La introducción del parámetro de ahorro λ supone introducir la posibilidad de individualizar a los agentes. Si λ es igual para todos ellos, el modelo se dice que es *homogéneo*. Si los agentes asumen diferentes valores de λ (λ_i) estamos antes modelos llamados *heterogéneos*.

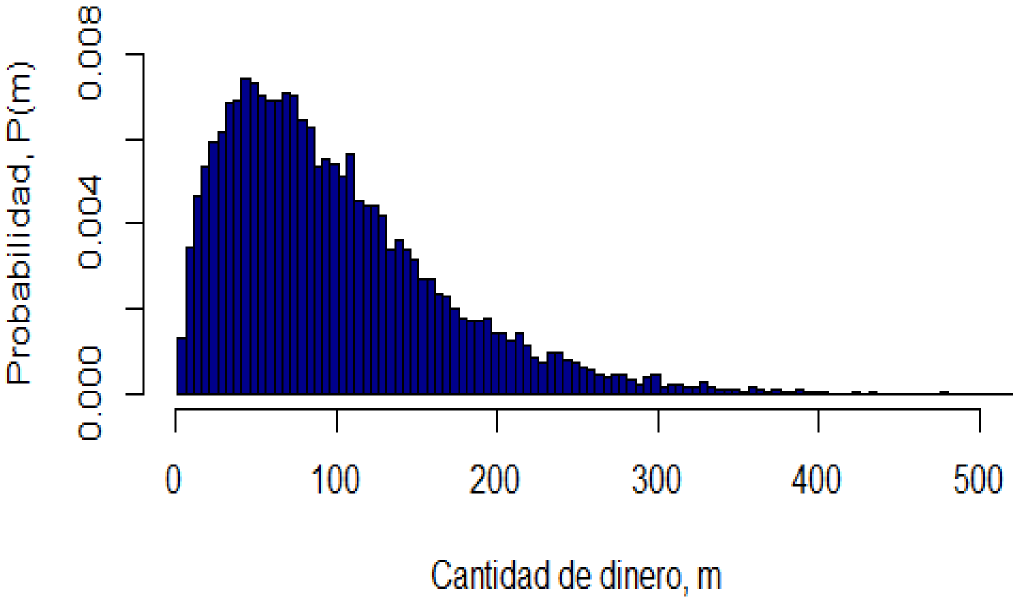
Para mayor generalidad supondremos que λ es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre 0 y 1, λ~*Unif[0,1]* que se determina *para cada intercambio* de manera que la regla de intercambio viene dada por:

$$m_i' = \begin{cases} m_i - \Delta p \; si \; (1-\;\lambda_i m_i) \geq \Delta p \\ \quad m_i \qquad si \; m_i < \Delta p \end{cases} \qquad m_j' = \begin{cases} m_j + \Delta p \; si \; (1-\;\lambda_i m_i) \geq \Delta p \\ \quad m_j \qquad si \; m_i < \Delta p \end{cases}$$

Este modelo, así simulado, con λ_i~*Unif[0,1]* determinado para cada agente en cada interacción, es una generalización de los modelos heterogéneos. Se asume que cada agente en cada transacción decide de manera independiente (e idénticamente distribuida) qué proporción del dinero del que dispone se reserva.

Con respecto al modelo inicial, el único cambio que se ha producido es plantear una condición previa para que se dé el intercambio más restrictiva, sin embargo, la introducción de este cambio provoca que una vez efectuada la transacción ésta no pueda, en general, deshacerse para recuperar la configuración original. (Hay ruptura de la simetría temporal).

Figura 5. Histograma: distribución estacionaria de probabilidad del dinero en un modelo multiplicativo

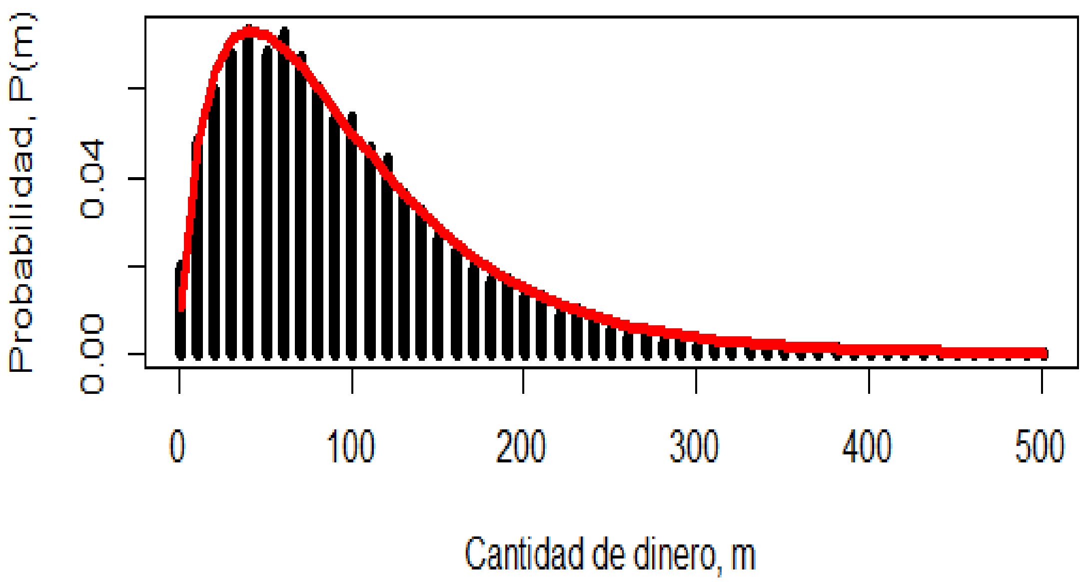


A la vista de la simulaciones realizadas, cabe destacar que la distribución de equilibrio tampoco depende en este caso ni de la inicial ni del número de agentes implicados (siempre que sea lo suficientemente grande N>100) Este modelo conduce a una distribución de equilibrio cualitativamente diferente a las que se han obtenido en los modelos aditivos.

En particular, tiene presenta una moda $x_m > 0$ y un límite cero para valores de m pequeños, es decir, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

En [1] se propone un modelo de ajuste a una función tipo Gamma dada por: *P(m)=C* $* m^{\beta} * e^{-\frac{m}{T}}$. Ésta última difiere de la de Boltzmann-Gibbs por el prefactor m^{β}. Si se ejecuta una simulación ajustando la distribución obtenida en este apartado se obtiene un ajuste casi perfecto. La figura 6., muestra el ajuste de los datos del modelo y el ajuste correspondiente.

Figura 6. Histograma: distribución estacionaria de probabilidad. Línea sólida, ajuste con distribución tipo Gamma *P(m)=C* $* m^{\beta} * e^{-\frac{m}{T}}$.



Este modelo representa un paso adelante en una definición más realista del modelo básico inicial. Parece una opción muy lógica la definición de un criterio de ahorro que esté presente en las transacciones entre agentes. De hecho, en una operación económica corriente, los agentes, en general, no suelen disponer de todo su dinero en una única interacción, arriesgándose así a la posibilidad de perderlo todo, por lo que se ahorra una cantidad determinada.

Dado que las distribuciones de ambos modelos son tan diferentes cabe preguntarse sobre los efectos económicos de que se pueden deducir de esa diferencia. Desde ese punto de vista se puede plantear una comparación entre este modelo con tasas de ahorro y el que no las tiene en función de la equidad en las distribuciones de equilibrio.

¿La introducción de un coeficiente de ahorro, en las condiciones del modelo aquí planteado, genera una distribución de dinero más equitativa o no? En general, ¿se podría decir a las distribuciones potenciales de dinero son más o menos equitativas que las exponenciales?

En Economía la aproximación más usual al nivel de desigualdad personal se obtiene mediante la curva de Lorenz que, partiendo de la distribución ordenada de ingresos, representa conjuntamente las proporciones acumuladas de perceptores de rentas (p, en el eje horizontal) y las correspondientes proporciones acumuladas de rentas percibidas (q, en el eje vertical).

Esta curva lleva además asociada una medida de la desigualdad, construida por comparación entre la situación observada en cada caso y la correspondiente a un reparto igualitario, que vendría representado por la recta de equidistribución. [8]

Más concretamente, denotando respectivamente por p y q las proporciones acumuladas de agentes y de dinero (una vez que éstas han sido dispuestas en orden creciente), el nivel de desigualdad puede ser aproximado a través del índice de Lorenz, que viene dado por la expresión:

$$I_L = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} p_i - q_i}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i}$$

cuyos valores se encuentran acotados entre 0 y 1.

A pesar de ser una herramienta muy habitual en los análisis distributivos, conviene tener presente que la curva de Lorenz adolece de algunas limitaciones, ya que únicamente permite comparar dos situaciones cuando existe una clara *dominación,* es decir, cuando el trazado de una curva se encuentra en todo el recorrido más cercano a la recta de equidistribución.

Si en cambio las curvas de Lorenz que comparamos se cortan en algún punto de su trayectoria, no es posible obtener ningún resultado concluyente en términos de dominación de Lorenz.

Dada una distribución de rentas que denotamos por Y_i con frecuencias relativas f_i, la expresión más habitualmente utilizada para medir la desigualdad es el índice de Gini [**9**], que puede ser aproximado a partir de distintas expresiones. Aquí se usa la siguiente expresión:

$$I_G = \sum_i \sum_j |Y_i - Y_j| f_i f_j$$

En el caso continuo I_G proporcionaría un resultado coincidente con el índice de Lorenz.

Las figura. muestra las curvas de Lorenz para ambos casos. El índice de Gini para el caso general alcanza un valor $I_G = 0{,}82$ mientras que si se introduce un coeficiente de ahorro *λ~Unif[0,1],* este valor pasa a ser $I_G = 0{,}77$. De aquí se deduce que la distribución de equilibrio con tasas de ahorro no nulas da lugar a un reparto más equitativo de la masa monetaria.

Figura 7. Distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero en un modelo aditivo (línea roja) vs un modelo multiplicativo (línea negra) con tasa de ahorro λ_i, λ_i~Unif[0,1])

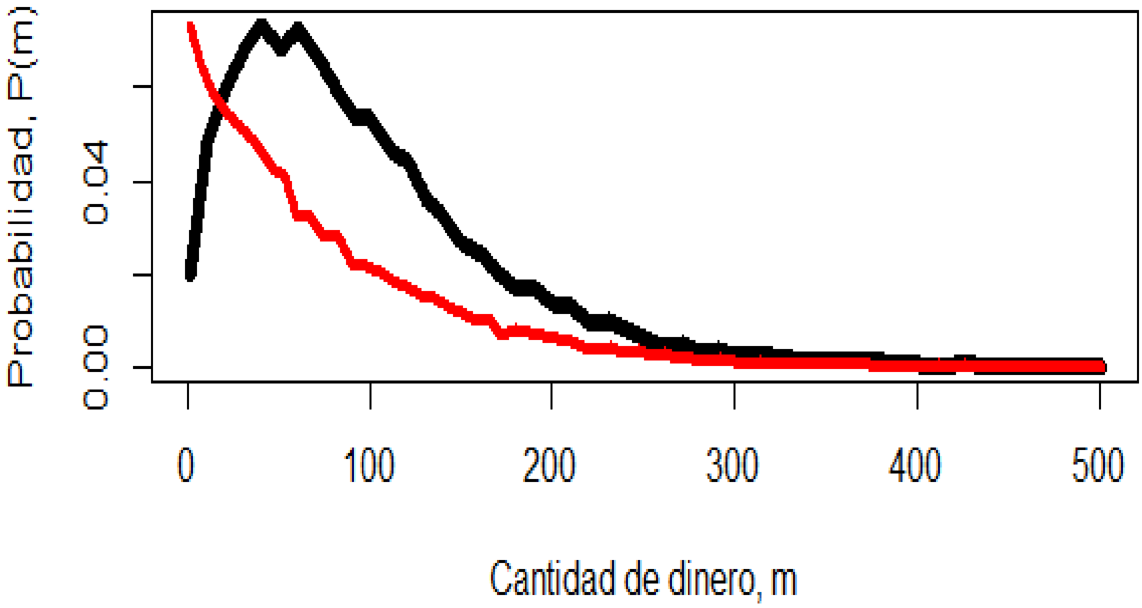
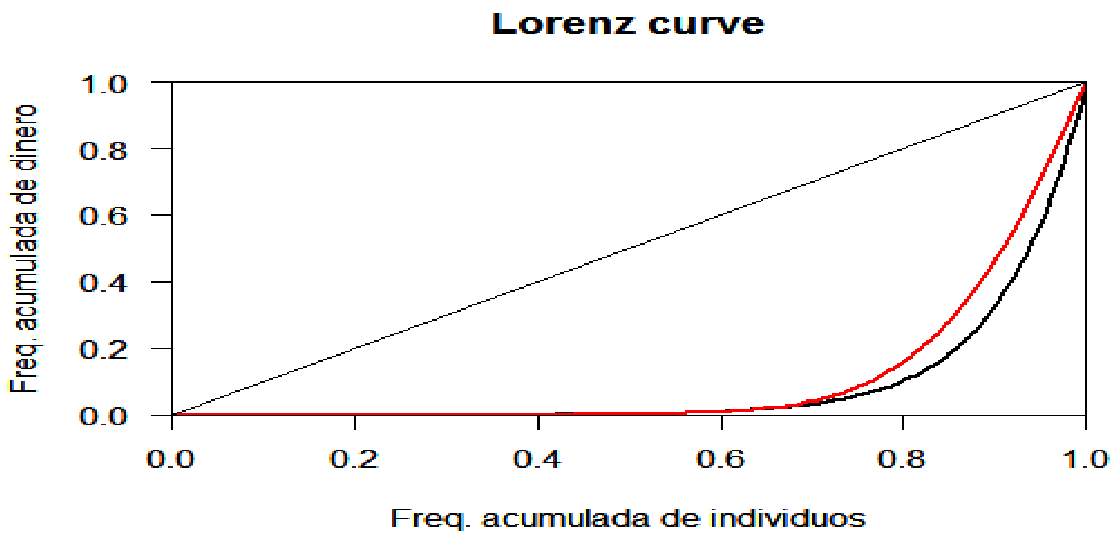


Figura 8. Curva de Lorenz para las dos distribuciones anteriores. Se mantiene el código de colores.



Modelos aditivos versus modelos multiplicativos.

La distribución de Boltzmann-Gibbs puede ser también ser derivada de la ecuación de Boltzmann [10] que describe la evolución en el tiempo de la función de distribución $P(m)$debido a las interacciones de pares:

$$\frac{dP(m)}{dt} = \iint \{-f_{[m,m']\to[m-\Delta p,m'+\Delta p]}\, P(m)P'(m) + f_{[m-\Delta p,m'+\Delta p]\to[m,m']} P(m-\Delta p)P'(m'+\Delta p)\} dm' d\Delta p$$

Donde el término $f_{[m,m']\to[m-\Delta p,m'+\Delta p]}$ es la probabilidad de transferencia de la cantidad Δp de un agente con dinero m a otro con dinero m' por unidad de tiempo. Esta probabilidad multiplicada por los números de ocupación de P (m) y P (m'), da la velocidad de las transiciones de estado [m, m'] para el estado [m -Δp , m'+Δp]. El primer término de la ecuación da la tasa de despoblación del estado m. El segundo describe el proceso inverso, donde el número de ocupación P (m) se incrementa. Cuando los dos términos son iguales, las transiciones directas e inversas se anulan entre sí estadísticamente y la distribución de probabilidad es estacionaria: $\frac{dP(m)}{dt}$= 0.

Este es el principio del balance detallado. En física las ecuaciones microscópicas fundamentales del movimiento obedecen a la simetría de la inversión temporal. Este significa que las probabilidades de los procesos directos e inversos son exactamente iguales:

$$f_{[m,m']\to[m-\Delta p,m'+\Delta p]} = f_{[m-\Delta p,m'+\Delta p]\to[m,m']}$$

Cuando la ecuación anterior se cumple, la condición de balance detallado se reduce a la $P(m)P'(m) = P(m-\Delta p)P'(m'+\Delta p)$ porque los factores f se cancelan.

La única solución de esta ecuación es la función exponencial P(m)=$C * e^{-\frac{m}{T}}$, por lo que la distribución de Boltzmann–Gibbs es la solución estacionaria de la ecuación cinética de Boltzmann.

Tenga en cuenta que las probabilidades de transición, $f_{[m,m']\to[m-\Delta p,m'+\Delta p]}$, están determinados por las reglas dinámicas que definen el modelo, pero el equilibrio de la distribución de Boltzmann-Gibbs no depende en modo alguno de las anteriores.

Este es el origen de la universalidad de la distribución de Boltzmann-Gibbs. Como vemos es posible encontrar el distribución estacionaria sin conocer los detalles de la interacciones a nivel microscópico (que son pocas veces son bien conocidas), mientras la condición de simetría sea satisfecha.

En los modelo considerados en las secciones precedentes el dinero intercambiado tiene las mismas probabilidades de transferencia desde un agente con el equilibrio *m* a un agente con el equilibrio *m′* y viceversa. Esto también es cierto aun cuando la cantidad intercambiada sea aleatoria siempre y cuando la distribución de probabilidad de Δp sea independiente de *m* y *m′* Por lo tanto la distribución estacionaria *P (m)* es siempre exponencial en estos modelos.

Sin embargo, no hay ninguna razón fundamental para esperar que la simetría de inversión temporal esté siempre presente en economía. En este caso, el sistema puede tener una distribución estacionaria no exponencial o no alcanzar una distribución estacionaria en absoluto.

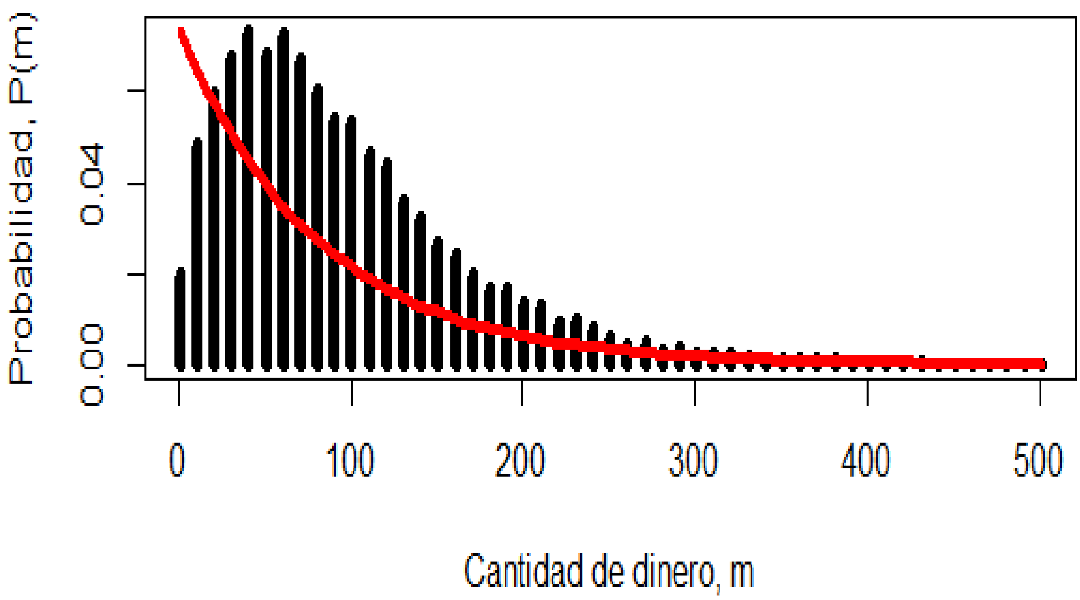
Veamos un ejemplo de esto tomando $\Delta p=(1/3)m_i$.

En este caso la cantidad transferida es una fracción del dinero del que dispone el *donante*. Como se comprueba, este modelo no se ajusta a la distribución de Boltzmann–Gibbs.

Aquí la simetría de la inversión del tiempo se rompe. De hecho cuando un agente *i* da una fracción fija γ de su dinero m_i a un agente con un balance monetario m_j, sus saldos se convierten en $(1-\gamma)m_i$ y $(m_j+\gamma\ m_j)$. Si tratamos de revertir este proceso y designar al agente *j* como el deudor para dar la fracción γ de su dinero, $\gamma(m_j + \gamma\ m_j)$ al agente *i*, el sistema no vuelve a la configuración original $(m_i\ ,\ m_i)$.

El deudor paga una fracción determinista de su dinero, pero el receptor recibe una cantidad aleatoria de un agente de azar, por lo que sus funciones no son intercambiables. Debido a que las reglas de proporcionalidad normalmente violan la simetría de inversión temporal, la distribución estacionaria *P(m)* en modelos multiplicativos típicamente no es exponencial.

Figura 9. Histograma: distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero con $\Delta p=(1/3)m_i$. Curva sólida: ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs.



Este ejemplo demuestra que la distribución de Boltzmann–Gibbs no necesariamente se sostiene para cualquier sistema conservativo. Sin embargo, dicha distribución *es universal en un sentido limitado* para una amplia clase de modelos que mantienen la simetría de inversión temporal, en tal caso la distribución estacionaria es exponencial y no depende de los detalles de un modelo [11,12]. A la inversa, cuando la simetría de inversión temporal se rompe, la distribución puede depender de los detalles de un modelo. La diferencia entre estas dos clases de modelos puede llegar a ser bastante sutil.

Pueden producirse desviaciones de la ley de Boltzmann–Gibbs sólo si las tasas de transición f dependen de forma explícita del dinero m o m' de los agentes en una manera asimétrica.

En ausencia de un conocimiento microscópico detallado de la dinámica de los intercambios económicos, *la semiuniversalidad* de la distribución de Boltzmann-Gibbs es un punto de partida natural.

Transacciones posibles frente a transacciones efectivas. Motivación para su estudio.

Cada vez que dos agentes se enfrentan a una *posible* transacción, el que ésta se lleve a cabo o no va a depender de que el *donante* tenga una cantidad de dinero (m_i *ó* $((1-\lambda_i)m_i)$) que por lo menos sea igual al precio marcado para la operación (Δp). De esto se infiere que lógicamente no todas las transacciones posibles se convertirán en transacciones efectivas, entendiéndose que estás últimas modifican la distribución previa del dinero (dos agentes han cambiado de posición). Parece por ello interesante diferenciar entre ambos tipos de situaciones.

Considérese un sistema en estado estacionario, en el que se han producido T transacciones (potenciales o posibles) de las cuales únicamente Φ han derivado en un acuerdo (efectivas). Tiene entonces sentido la siguiente probabilidad:

$$\Phi = T_e/\mathrm{T} \quad (1)$$

Dada una transacción escogida al azar, definida por los parámetros ($m_i, m_j, \Delta p$), Φ indicaría cual es la posibilidad de que alcance un acuerdo.

En términos computacionales, cada iteración que realiza en una simulación numérica se puede considerar como una transacción posible. En las efectuadas en el marco de este estudio, para sistemas de Boltzmann-Gibbs (sin deuda y sin ahorro), una vez alcanzado el equilibrio termodinámico, Φ es del orden del 63%.

Si en cambio se introduce un parámetro de ahorro en el modelo (λ_i~*Unif[0,1]*), una vez alcanzado el correspondiente equilibrio, Φ se reduce a un 43%.

La introducción de λ_i reduce la probabilidad de que se produzcan transacciones efectivas. Los agentes económicos no disponen de todo su dinero y ello se refleja, como cabría esperar, en una reducción de Φ.

Dado que el modelo (inicial) de Boltzmann-Gibbs plantea el mínimo posible de limitaciones a las transacciones entre agentes, de hecho que se produzca o no sólo va a depender de m_i y Δp, es de esperar que Φ sea máximo. Obsérvese que el receptor (con dinero m_j) no juega en estos modelos ningún papel, la transacción se dará, o no, independientemente de él.

Las consecuencias de todo lo anterior quedan reflejadas en la velocidad de convergencia al equilibrio de los sistemas. Aunque Φ únicamente cobre sentido en estado estacionario, se puede pensar que cuanto menor sea su valor mayor habrá sido el tiempo que al sistema le habrá llevado alcanzar el equilibrio. De hecho, los modelos con ahorro convergen al equilibrio más lentamente que el modelo sin ahorro.

2. Objetivos

Todos los modelos anteriores seleccionan a los agentes que intercambian dinero de manera aleatoria, resultando en distribuciones de Boltzmann-Gibss y en ciertos límites en distribuciones de tipo potencial. Estos modelos no consideran la posibilidad de que no se den todas las posibles transacciones, aun cuando no hubiese impedimento alguno desde un punto de vista estrictamente económico. En particular, no se considera la relación que pueda existir entre la cantidad de dinero que poseen los (dos) agentes y la probabilidad de que éstos interactúen entre sí. En términos económicos, los agentes son neutrales ante la cantidad de dinero que poseen en cada momento (sólo es relevante si se puede dar la transacción o no).

Una manera de introducir restricciones en el esquema de intercambio consiste en suponer que agentes con riquezas semejantes tienden a interactuar entre ellos con mayor probabilidad.

De esta manera se puede plantear un modelo de *relaciones económicas estratificadas*, donde los agentes económicos interactúen con más probabilidad en el caso de que formen parte del mismo estrato económico.

Dado que en realidad sólo se maneja una variable (la cantidad de dinero) únicamente se puede discriminar en función de ella, pero aun así el efecto puede ser equivalente a introducir una desagregación espacial (o de otro tipo). Por ejemplo, personas que viven en barrios de una clase determinada pueden rehuir el intercambio comercial, o tenerlo prohibido de alguna manera, con otras que habitan en barrios más (o menos) acomodados aun cuando se cumpla que $m_i > \Delta p$.

El objetivo de este trabajo es definir, simular y estudiar **un modelo de transacciones económicas estratificado**, esto es, cuál es el efecto que tiene sobre un modelo de tipo Boltzmann-Gibbs la introducción de restricciones adicionales al intercambio entre agentes

3. Métodos

Hipótesis de trabajo y supuestos previos.

El modelo de intercambio está conformado, como en los casos antes vistos, por *N* agentes, donde el agente *i-ésimo* posee una cantidad de dinero m_i. De nuevo se supone que la cantidad total de dinero, *M*, se conserva en todas las transacciones ya que es una economía aislada. No existe ningún flujo externo de dinero que pueda alterar al sistema.

En cada transacción dos agentes elegidos al azar intercambiarán una cantidad *Δp (aleatoria)* siempre y cuando además de que el *donante* cumpla que $m_i \geq \Delta p$ se verifique que la diferencia de riqueza entre ellos no sobrepase un límite $\mathcal{U}$ establecido previamente. Si los agentes escogidos no resultan ser de la misma *clase económica (definida por* $\mathcal{U}$*)*, entonces no se produce la transacción permaneciendo en su estado inicial. Así pues, el parámetro $\mathcal{U}$ medirá la "*anchura*" de la clase económica.

Modelo matemático.

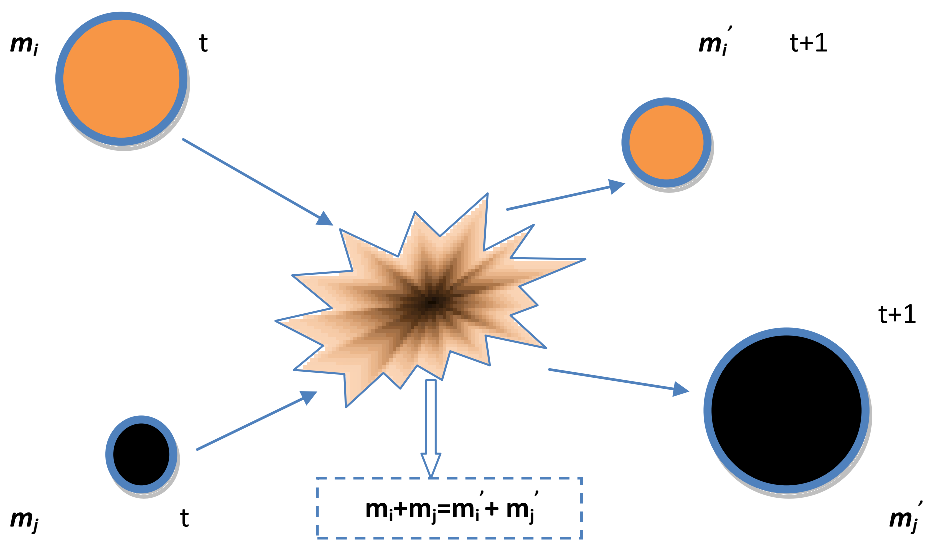
El modelo selecciona dos agentes al azar, *i y j*, ambos intercambian una cantidad *Δp* *(Δp ~Unif[0,1])/ p∈Z)* siempre y cuando además de que el *donante* cumpla que $m_i \geq \Delta p$ se verifique que $|m_i - m_j| \leq \mathcal{U}$

El modelo de transacciones económicas estratificado queda definido matemáticamente según las siguientes reglas de interacción:

$$m_i' = \begin{cases} (m_i - \Delta p) \quad si \begin{cases} m_i \leq \Delta \mathrm{p} \\ y \\ |m_i - m_j| \leq U \end{cases} \\ ---------------- \\ m_i \qquad\qquad si \begin{cases} m_i > \Delta p \\ o \\ |m_i - m_j| > U \end{cases} \end{cases} \qquad m_j' = \begin{cases} (m_j + \Delta p) \quad si \begin{cases} m_i \leq \Delta \mathrm{p} \\ y \\ |m_i - m_j| \leq U \end{cases} \\ ---------------- \\ m_j \qquad\qquad si \begin{cases} m_i > \Delta p \\ o \\ |m_i - m_j| > U \end{cases} \end{cases} \qquad (2)$$

A diferencia de los modelos anteriores, en este el agente receptor deja de ser neutral en cada transacción.

Diagrama 1. Proceso de interacción para un modelo basado en agentes. Dos individuos, con dinero (m_i, m_j), en el momento t, interactúan de alguna manera, para acabar con un reparto (m_i', m_j') en t+1. La cantidad total de dinero se conserva en el proceso.



Nótese que la interacción sólo se puede dar entre agentes que pertenezcan al mismo estrato económico. Parece evidente que la introducción del parámetro $\mathcal{U}$ supone que se pierdan potenciales intercambios entre agentes que sí se darían si no se hubiesen levantado barreras externas a la mera dinámica económica. Se pone así de manifiesto la importancia de diferenciar entre transacciones potenciales y efectivas.

En principio se puede argüir que cuanto mayor sea el parámetro $\mathcal{U}$ (y por tanto menor las restricciones al intercambio entre dos agentes cualquiera) tanto más deberá de parecerse al sistema sin restricción alguna.

En términos promedio, podemos suponer que una vez transcurridas las N primeras iteraciones $N/2$ agentes habrán ganado lo que la otra mitad habrá perdido. Se habrán formado dos estratos económicos con riquezas diferentes. En esas condiciones, la probabilidad de que un agente de uno de los dos grupos realice una transacción con uno perteneciente al otro estrato es del 50%. Dependiendo del tamaño asignado a $\mathcal{U}$, esta relación puede no llegar darse, con lo cual la mitad de las posible ocasiones de llegar a un acuerdo económico correrían el riesgo de no concretarse, independientemente de cuál fuese el valor efectivo de Δp. Eso forzará a los agentes a relacionarse preferentemente con los de su mismo estrato económico, lo que hace pensar en un empobrecimiento de los que están en el más desfavorecido y un aumento de la riqueza de aquellos que pertenecen al más elevado.

Necesidad de las simulaciones numéricas.

La investigación en ciencias sociales ha estado tradicionalmente dominada por los dos enfoques de investigación más comúnmente aceptados: el método de inducción y el de deducción. Del primero se derivan principios generales de casos particulares, con el segundo, en cambio, se define un conjunto de axiomas y se comprueban las consecuencias derivadas de estos supuestos.

La mayoría de las teorías económicas aplican los métodos de inducción y / o deducción de una manera estática. La teoría de juegos, por ejemplo, estudia equilibrios estáticos. Ahora bien, no siempre es posible extender estos métodos a todos los sistemas o a todos los problemas planteados. Este es el punto de partida de la llamada *Economía Computacional.* Esta nueva rama de la investigación económica está especialmente interesada en la dinámica de los sistemas y en los procesos que conducen a fenómenos los observados, mediante la realización de simulaciones [13].

Una de las razones para la aplicación de simulaciones es la complejidad de los modelos que se investigan. Los enfoques matemáticos y experimentales son factibles para el análisis de los modelos más o menos simples, sin embargo la adición de más detalles buscando refinarlos aumenta la complejidad de los mismos, y por lo tanto, la dificultad encontrar soluciones analíticas.

Aquí, es donde las técnicas computacionales pueden ayudar a los investigadores a encontrar mejores soluciones, y explicaciones, en el estudio de sistemas complejos. En ese sentido, *"la economía computacional puede ayudar a estudiar los efectos cualitativos, cuantitativamente*" [14].

En general, la simulación en Economía no se diferencia de la realizada en otros campos. Se entiende como una forma particular de modelar el mundo real. Los modelos simulados representan el sistema a estudio con menos detalles y menos complejidad, describiéndolo mediante ciertas variables y por determinados estados al sistema. Se genera así una historia artificial en el curso de la simulación. Ésta se utiliza para la observación y para sacar conclusiones relativas al objetivo del estudio. Las simulaciones se suele entender como un enfoque alternativo de hacer investigación en las ciencias sociales, como un tercer pilar metodológico, aparte de los deducción e inducción.

Los beneficios de la simulación

La ventaja de simulaciones en comparación con otros métodos de investigación es principalmente el hecho de que el diseñador de la simulación retiene el control de cualquier parámetro para adaptarlo a las circunstancias específicas de problemas.

Un sistema de simulación bien diseñado puede ayudar a comprender y a explicar los sistemas del mundo real y a describir ciertos fenómenos observados mediante la comparación de las diferentes configuraciones de la simulación. Además, permite realizar cambios de uno (o varios) parámetro en particular y el estudio de las consecuencias para el desarrollo del sistema.

Por otra parte, la velocidad de la simulación se puede variar (de hecho, esto permite comprimir / expandir el tiempo) lo que permite el estudio de las actividades de movimiento lento, así como el estudio de largos períodos de tiempo.

Desventajas de las simulaciones

La principal desventaja de este método es que en muchas ocasiones es difícil construir modelos apropiados que reflejen con fidelidad los sistemas reales. Por lo tanto, es esencial demostrar la exactitud del modelo de simulación. En algunos casos, también puede ser complicado identificar los errores en un modelo de simulación lo que conlleva que se deriven conclusiones erróneas del mismo. Por lo tanto, la calidad y la exactitud de los resultados de simulación es un tema delicado. También en ocasiones puede hacerse difícil interpretar los datos recogidos del modelo.

Uno de los problemas más difíciles en el desarrollo de modelos de simulación es decidir qué enfoque metodológico a seguir. Hay una variedad de métodos disponibles; como la dinámica de sistemas, modelos de colas, simulación basada en agentes, o modelos estocásticos, aunque sólo algunos de ellos producirán resultados adecuados aplicados a un problema específico.

La llamada *Economía Computacional basada en Agentes* es una rama específica dentro de la Economía Computacional, definida como " *el estudio computacional de las economías modeladas como sistemas en evolución formadas por agentes que interactúan autónomamente*" [15]. Este enfoque de investigación se basa en la comprensión de la Economía no desde la perspectiva de nivel macro de un sistema de demanda agregada y oferta, sino desde un nivel micro, como el resultado de la interacción de numerosos individuos independientes.

A su vez existen diversas formas prácticas de implantar un modelo basado en agentes, aquí sólo se comentará el método de Montecarlo.

En general, el término de Montecarlo (MC) [16] engloba aquellos métodos desarrollados para experimentación matemática usando números aleatorios. Los problemas estudiados por métodos MC se pueden clasificar en probabilísticos y deterministas. Problemas probabilísticos serían aquellos en los que se utilizan variables aleatorias para modelar procesos estocásticos reales, por ejemplo, en la teoría de colas. Se habla de MC deterministas si existen modelos teóricos formales que resultan imposibles o difíciles de resolver numéricamente. En estos casos, el método MC ayuda a encontrar soluciones que aplican al azar, por ejemplo, en el cálculo del número π.

En las ciencias sociales, el método MC se aplica a diferentes estructuras problemáticas. En la Investigación Operativa se utilizan distribuciones de probabilidad, por ejemplo, en la Teoría de Colas, en Finanzas, los procesos estocásticos se utilizan para simular los flujos de los mercados bursátiles.

En la mayor parte de la simulación basada en agentes se aplican MC probabilísticos, por ejemplo, para asignar valoraciones a agentes, o para simular ruido estocástico.

La versión determinista también se utiliza para abordar problemas que está más allá de la capacidad de los algoritmos actuales, como por ejemplo resolver los equilibrios de "Bayes-Nash". Como se explicó anteriormente, este es un enfoque adecuado para utilizar si el problema es difícil, o no es posible resolverlo numéricamente.

Esquema de programación

Para obtener el comportamiento del modelo estratificado se han ejecutado una serie de simulaciones de MC. El proceso de iteración planteado en este trabajo es conocido en la literatura como Simulación Directa de Montecarlo (DSMC, en sus siglas inglesas) o también como esquema de Bird. Se trata de seleccionar pares de agentes al azar, con repetición, para colisiones binarias e intercambio de dinero según una determinada regla de transacción, las ecuaciones (2) en este caso.

El proceso de iteración planteado en este trabajo sigue el siguiente algoritmo:

1. Se escoge aleatoriamente un agente i, $i \in (1,2,\ldots,N) \,/\, i \sim Unif[1,N]$. *Agente donante*
2. Idénticamente se escoge a otro agente j ($j \in (1,2,\ldots,N) \,/\, i \sim Unif[1,N]$). *Agente receptor.*
3. Sean (m_i,m_j) las cantidades de dinero puestas en juego por ambos agentes. Los valores iniciales antes de que se produzca la transacción entre ellos.
4. Se define el parámetro u. *Anchura de la clase económica*.
5. Se escoge aleatoriamente la cantidad Δp , $\Delta p \sim Unif[1,100] / p \in Z$. *Precio vigente en la iteración*.

6. Si $m_i < \Delta p$ el *donante* no tiene suficiente dinero para entregar al receptor. La transacción no se lleva a cabo en ningún caso. Los agentes se quedan tal y como estaban y se procede a elegir a otro par de ellos diferentes. El resultado de la iteración será por tanto (m_i, m_j). **Se vuelve a paso 1.**
7. Si $m_i > \Delta p$ y $|m_i - m_j| > \mathcal{U}$ el *donante* tiene suficiente dinero para entregar al receptor pero no se cumple la condición de pertenencia a la misma clase económica. La transacción no se lleva a cabo y los agentes no intercambian dinero entre ellos. El resultado de la iteración será (m_i, m_j). **Se vuelve a paso 1.**
8. Si $m_i > \Delta p$ y $|m_i - m_j| \leq \mathcal{U}$ el *donante* tiene suficiente dinero para entregar al receptor y se cumple la condición de pertenencia a la misma clase económica. La transacción se lleva a cabo y los agentes intercambian dinero entre ellos. El resultado de la iteración será $(m_i - \Delta p, m_j + \Delta p)$.
9. **Se vuelve a paso 1**.
10. En cualquier de los tres casos posibles el resultado de la iteración se guarda, y con dichos valores los agentes anteriores entrarán en juego si vuelven a ser seleccionados.

Cada uno de los recorridos de este esquema (empezando en el punto 1 y acabando donde le corresponda) es una iteración y por tanto una transacción posible, que será efectiva cuando el ciclo sea completo (1-9-1).

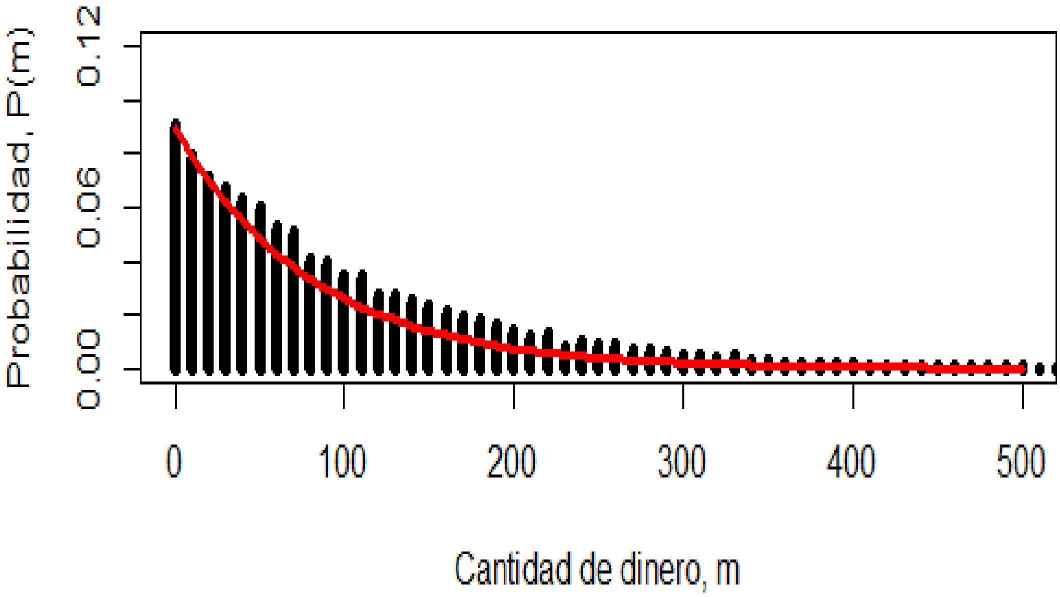
Como anteriormente, el vector de dinero inicial $V_{inicial}$ será uniforme, $m_i=100 \quad \forall\, i = 1, \dots, N$ y donde N es el tamaño del colectivo simulado. Se tomará para el análisis los siguientes valores del parámetro $\mathcal{U}$={1000, 100, 10}, es decir, diez, uno y un décimo del valor inicial asignado a cada uno de los agentes.

4. Resultados

Modelos sin y con parámetro de ahorro.

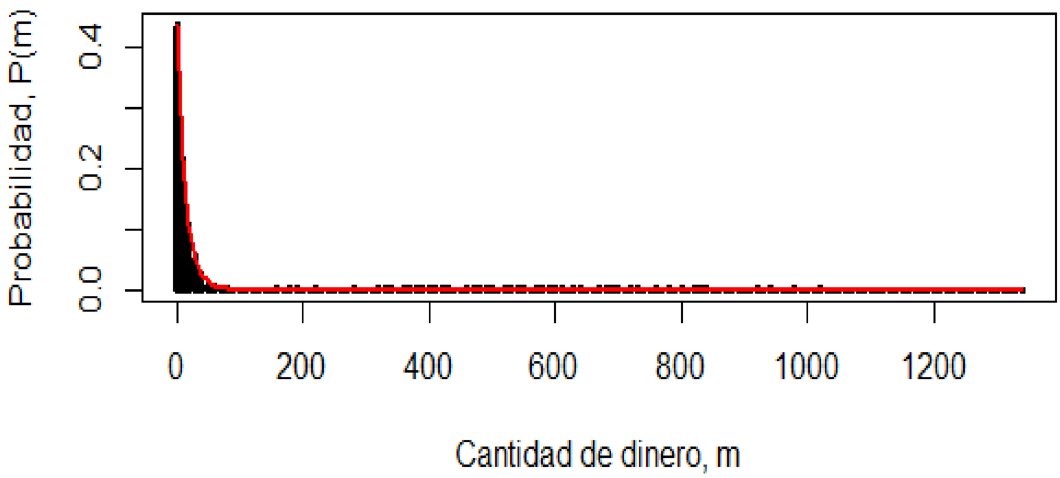
Si $\mathcal{U}$=*1000* el modelo se ajusta perfectamente a una distribuciones de Boltzmann-Gibss, como en el caso general, de hecho las distribuciones empíricas simuladas en ambos casos son casi idénticas.

Figura 10. Histograma: distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero $\mathcal{U}$=1000. Curva sólida: ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs P(m)=$C * e^{-\frac{m}{T}}$ con T=101,3



Para $\mathcal{U}$ =*100* una tentativa de ajuste a una distribución de Boltzmann-Gibss se da con parámetros de ajuste *C=0,3913 y T=15,51* que ajusta bien los niveles de ocupación de dinero muy bajos, pero mucho peor a los grupos de renta más altos.

Figura 11. Histograma: distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero $\mathcal{U}$=100. Curva sólida: ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs P(m)=$C * e^{-\frac{m}{T}}$ con T=16,77



Para un caso todavía más extremo $\mathcal{U}$=10 el ajuste de la distribución de Boltzmann-Gibss es *C=0,550 y T=4,02*.

Figura 12. Histograma: distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero $\mathcal{U}$=10. Curva sólida: ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs P(m)=$C * e^{-\frac{m}{T}}$ con T=4,0

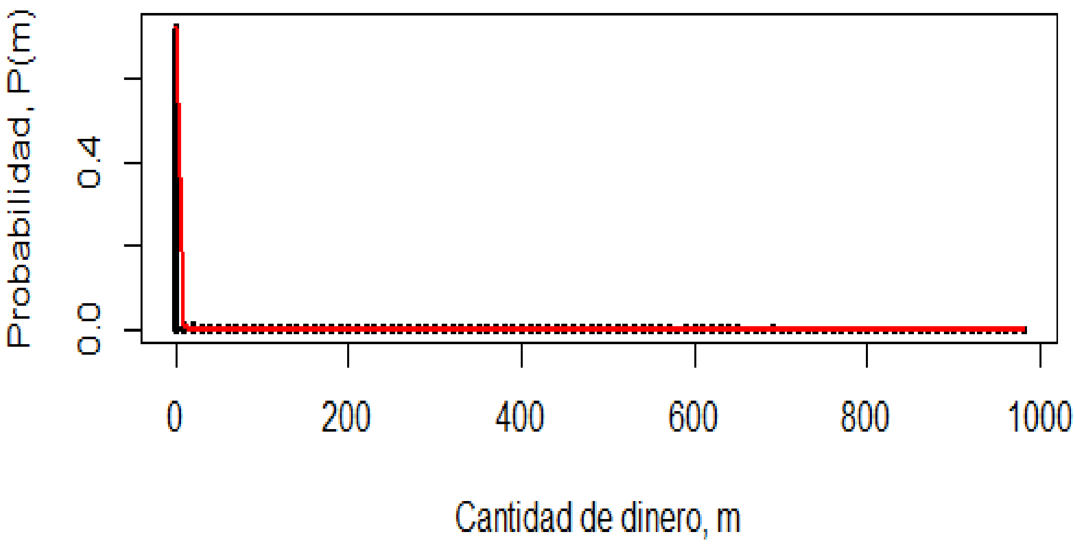
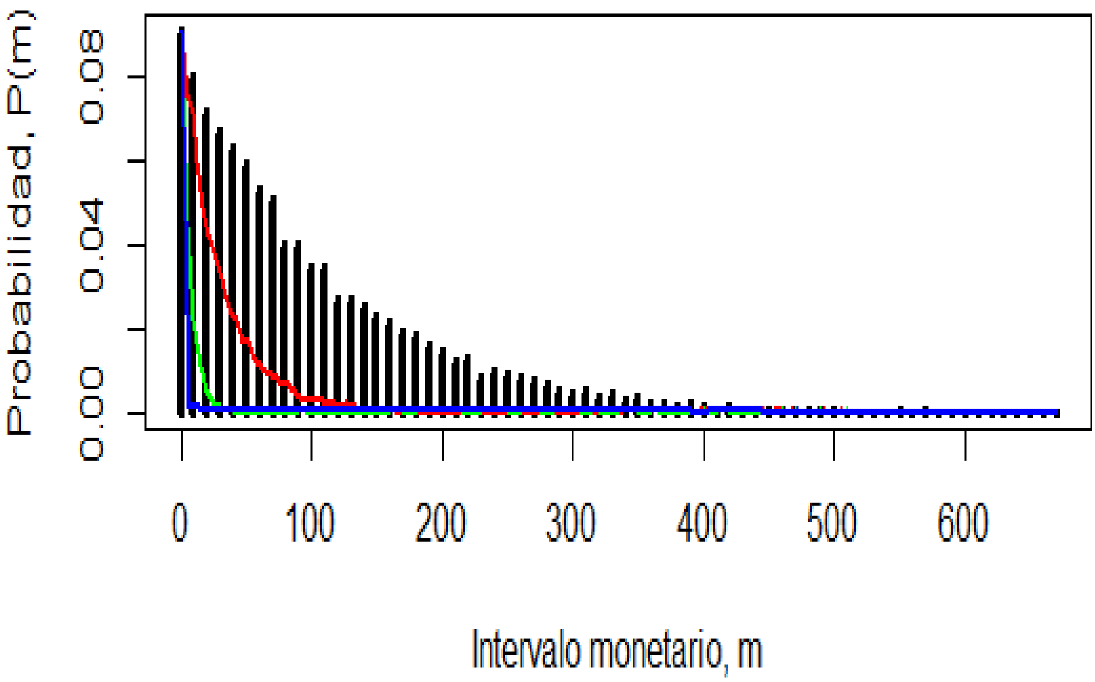


Figura 13. Histograma: distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero $\mathcal{U}$=1000. Curva sólida: para $\mathcal{U}$=500 (rojo), $\mathcal{U}$=100 (verde) y $\mathcal{U}$=10 (azul)



Cuadro 1. Resumen de algunas medidas de posición (cuantiles y primer intervalo) y parámetros de ajuste para los escalones estudiados. Se comparan con s/r modelo sin restricciones al intercambio.

Escalón	P. ajuste		*Medidas de posición*					
$\mathcal{U}$	**C**	**T**	**%[0,10)**	**q0=min**	**q25**	**q50=Mediana**	**q75**	**q100=Max**
s/r	0,0943	100,1	9,36%	0	29	69	139	1.221
1000	0,0946	100,3	10,00%	0	28	69	141	1.625
100	0,366	16,77	38,75%	0	5	14	37	1.123
10	0,55	4,02	54,80%	0	1	3	131	784

Se parte ahora del modelo con tasas de ahorro distribuidas, λ_i~*Unif[0,1].*

Figura 14. Histograma: distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero $\mathcal{U}$ =1000. Curva sólida: ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs (P(m)=$C * e^{-\frac{m}{T}} * m^{\beta}$ con T=55,84 $\beta > 0$)

.

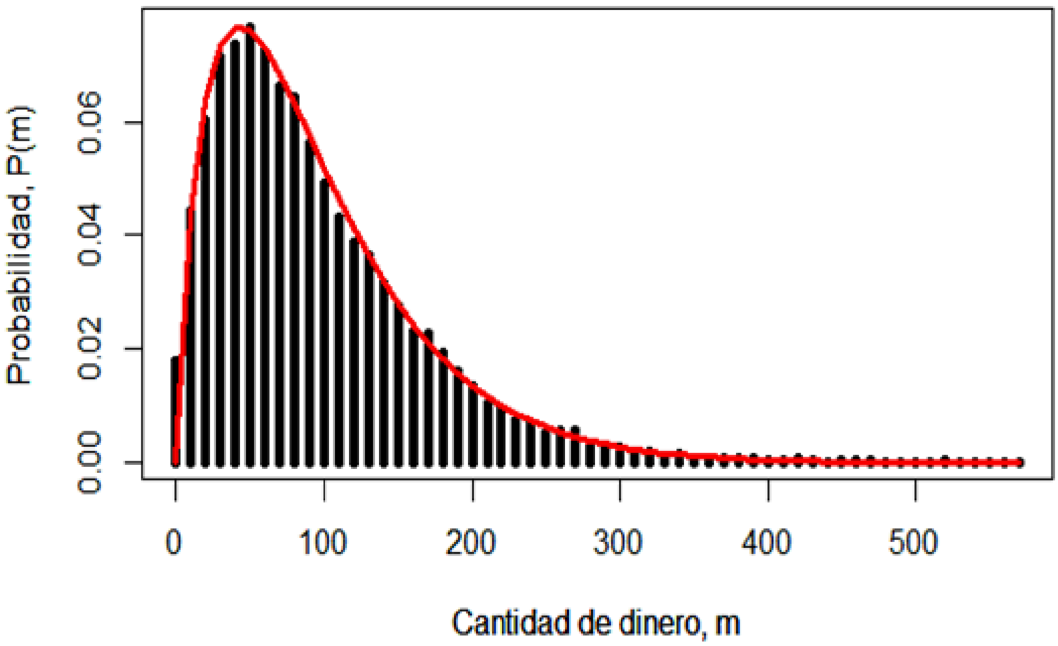


Figura 15. Histograma: distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero $\mathcal{U}$ =100. Curva sólida: ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs P(m)=$C * e^{-\frac{m}{T}} * m^{\beta}$ con T=19,64 $\beta > 0$)

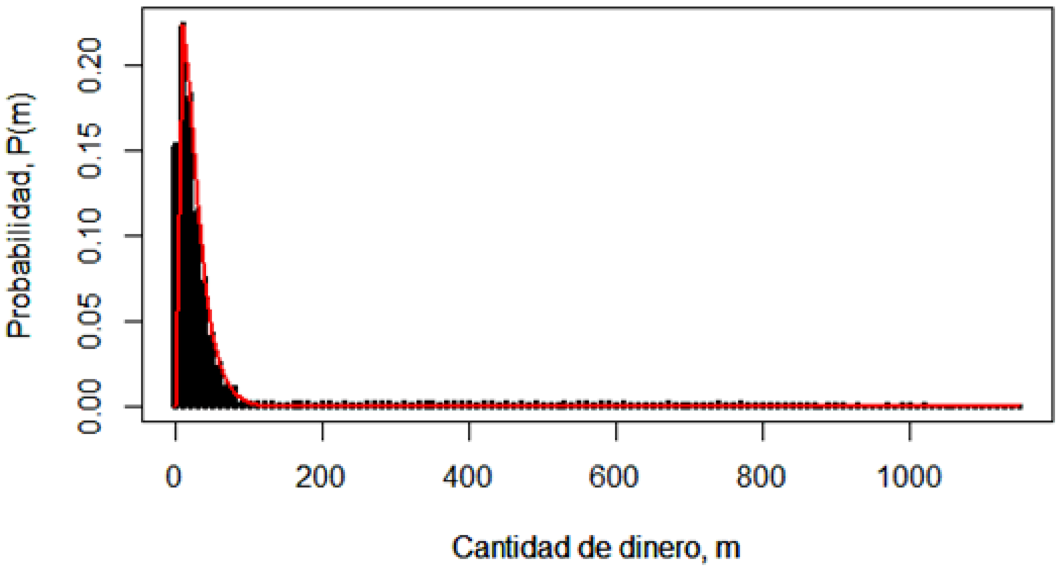
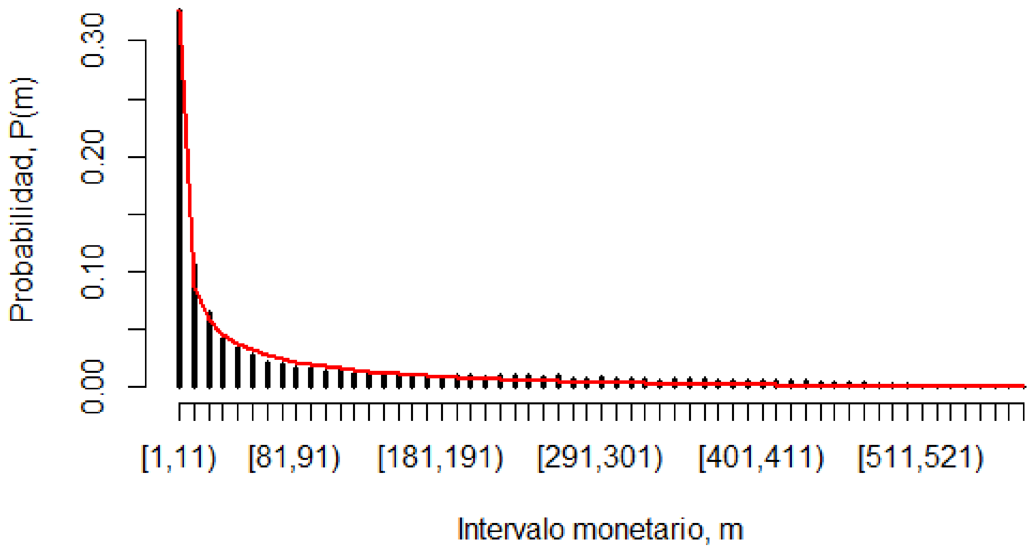


Figura 16. Histograma: distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero $\mathcal{U}$ =10. Curva sólida: ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs P(m)=$C * e^{-\frac{m}{T}} * m^{\beta}$ con T=291,57 ($\beta < 0$)



Obsérvese que en este caso cambia la estructura de la distribución, rompiendo con la forma de las anteriores. Ahora el parámetro $\boldsymbol{\beta}$ es negativo, mientras que en los casos anteriores tenía un valor positivo. **$\boldsymbol{\beta}$ es el parámetro que caracteriza la forma de la distribución.**

Cuadro 2. Resumen de algunas medidas de posición (cuantiles y primer intervalo) y parámetros de ajuste para los escalones estudiados. Se comparan con s/r modelo sin restricciones al intercambio.

Escalón	*Parámetros de ajuste*			*Medidas de posición*					
$\mathcal{U}$	**C**	**T**	β	**%[0,10)**	**q0=min**	**q25**	**q50=Mediana**	**q75**	**q100=Max**
s/r	*0,0102*	*57,52*	*0,7224*	*1,84%*	*1*	*47*	*84*	*135*	*553*
1000	0,0092	55,84	0,757	1,97%	1	48	84	136	614
100	0,146	19,65	0,3877	14,13%	1	16	29	58	999
10 (*)	*0,329*	*251,97*	*-0,5287*	32,58%	1	7	31	157	594

(*)Realmente estamos ante un caso patológico; el modelo ajustado diverge para m=0, lo que va contra las reglas de la simulación. Además, la temperatura sería más alta, lo que parece una incongruencia en el conjunto de los resultados obtenidos. Se puede concluir, por tanto, que es producto de un mal ajuste, al no haber incluido como restricción que P(m=0)=0.

5. Interpretación económica de los resultados

Consecuencias de la introducción de limitaciones a las transacciones entre agentes en un esquema de Boltzmann-Gibbs. Comparación entre un modelo sin limitaciones y otro con restricciones (estratificado), con o sin parámetro de ahorro.

A la vista de lo anterior se puede concluir que la distribución de Boltzmann-Gibbs ajusta correctamente los valores monetarios pequeños, que son los de la mayoría de los agentes, pero no los valores más altos de la renta monetaria. Para estos últimos se espera que sea una función de tipo potencial la que mejor dé cuenta de esto. La temperatura de equilibrio para estas distribuciones es menor que para el caso sin restricciones, tanto menor cuando más pequeños sea el valor de $\mathcal{U}$.

Si $\mathcal{U}$ *=1000* el modelo se ajusta perfectamente a una distribuciones de Boltzmann-Gibss, como en el caso general, de hecho las distribuciones empíricas simuladas en ambos casos son casi idénticas. La anchura $\mathcal{U}$, del orden de diez veces la media *per capita*, asegura que casi ninguna interacción deja de realizarse y en la práctica ambos modelos son equivalentes. En este caso el intervalo de dinero [0,10) acumula entorno al 10% del total de los agentes.

Para $\mathcal{U}$*=100* una tentativa de ajuste a una distribución de Boltzmann-Gibss se da con parámetros de ajuste *C=0,3913 y T=15,51* que ajusta correctamente los niveles de ocupación de dinero muy bajos, pero muy mal a los grupos de renta más altos. En este caso el 40% de los agentes tienen una cantidad de dinero que los sitúa en el intervalo [0,10), es decir que se ha multiplicado por cinco este número con respeto al caso anterior.

Para un caso todavía más extremo $\mathcal{U}$ *=10* el ajuste se dado distribución de Boltzmann-Gibss es *C=0,550 y T=4,02*. Aquí el número de agentes en el intervalo más bajo es de más de un 55%, siete veces más que en el caso $\mathcal{U}$ *=1000*.

Obsérvese que la existencia del parámetro de ahorro λ_i*~Unif[0,1]* mitiga los efectos de la introducción de la restricción a las transacciones entre agentes. Ninguno de ellos está condenado a una bancarrota absoluta y los niveles de pobreza son proporcionalmente mucho menores que los observados en el apartado anterior.

La introducción de una condición de estratificación en el colectivo supone que no todas aquellas interacciones en las que se cumpla la condición básica del modelo $m_i \geq \Delta p$ se van a hacer efectivas y con ello una pérdida de oportunidades de transacción que abocan a una gran parte de los agentes a niveles muy bajos de dinero.

Para aclarar esto veamos un ejemplo numérico para $\mathcal{U}$=100. Supóngase que $\Delta p=60$. En la primera transacción para el par m_i, m_j se tendría: $[m_i, m_j]=[100,100] \rightarrow [40,160]=[m_i^{\prime}, m_j^{\prime}]$

Imagínese que en la n-ésima interacción $m_i^{\prime}$ vuelve a intervenir pero esta vez como ganador con, por ejemplo, $\Delta p=80$. Sea un agente, $m_k \geq 200$ el perdedor. Puesto que $m_k > 140$ no se producirá la transacción y $m_i^{\prime}$ no podrá aprovecharse de su posición favorable en esa interacción, con lo cual seguirá siendo $m_i^{\prime\prime}$=40 cuando podría haber resultado ser $m_i^{\prime\prime}$=120. Ha perdido una oportunidad de mejorar su posición relativa al no poder efectuar libremente la transacción. Al estar ligada a un determinado ancho de banda de transacción sus posibilidades de interacción con el resto de los agentes disminuyen.

Por otra parte, para aquellas transacciones que sí se realicen no queda garantizado que la simetría de inversión temporal se mantenga, dependerá del valor de $\mathcal{U}$ y de cuales sean las posiciones relativas de los agentes después de ocurrida la transacción. Se puede suponer que cuanto menor sea $\mathcal{U}$ tanto mayor será la probabilidad de que se viole el principio de simetría con lo cual el modelo será en todo caso una mezcla de aditivo y multiplicativo, lo que explicaría su comportamiento.

Si partimos del ejemplo numérico anterior, con $\mathcal{U}$=100 y $\Delta p=60$, imagínense, a modo de ejemplo, los dos siguientes intercambios:

1. $[m_i, m_j]=[110,200] \rightarrow [50,260]=[m_i^{\prime}, m_j^{\prime}]$
2. $[m_c, m_d]=[100,30] \leftrightarrow [40,90]=[m_c^{\prime}, m_d^{\prime}]$

Queda claro que 1. es un intercambio irreversible, propio de un sistema multiplicativo, en tanto que 2. si es reversible y por tanto satisfaría el principio de inversión temporal.

Si U fuese más grande, por ejemplo $\mathcal{U}$ =500, ambos casos serían reversibles y si $\mathcal{U}$ fuese más pequeño, $\mathcal{U}$ =20, ambos irreversibles.

El significado de la "Temperatura del sistema" y su relación con la velocidad del dinero. Ecuación cuantitativa del dinero.

Llegados a este punto cabe preguntarse por el sentido económico que pueda tener el parámetro T de equilibrio que caracteriza a la distribución. Para ello, vamos a estudiar la relación empírica que puede establecerse entre el modelo anterior, de naturaleza estadística *($P(m, T_{eq})$),* y la llamada *Ecuación de cambio* desarrollada en el marco de la *Teoría Cuantitativa del Dinero*.

Según ésta, en cada momento, y en particular en situación de equilibrio termodinámico, se debe verificar que el valor total de las transacciones que se realizan en la economía, en un intervalo de tiempo fijado de antemano, ha de ser igual a la cantidad de dinero existente en esa economía multiplicado por el número de veces que el dinero cambia de manos.

La expresión más sencilla de esta igualdad (realmente una identidad) viene dada por:

$$\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{MV} \quad (3)$$

Dónde se tiene que:

P es nivel de precios (precio medio en el intervalo de tiempo considerado). En los modelos planteado se obtendrá a partir de que $\Delta p \sim Unif[1,100]/\ p \in Z$).

Q el nivel de producción (aquí el volumen de transacciones "efectivamente" realizadas)

M la cantidad de dinero en el sistema, que es constante. En nuestro caso $M=10^6$

V el número de veces que el dinero cambia de manos el período considerado, la velocidad de circulación del dinero (es una magnitud adimensional).

En el contexto del modelo que nos ocupa (en principio, sin ahorro ni posibilidad de endeudamiento), sea Ʈ el número de iteraciones realizadas y que tomaremos como el período de análisis al que se refiere la igualdad anterior.

Cada una de ellas, de esas Ʈ iteraciones, es una *posible* transacción económica entre dos agentes elegidos al azar. La probabilidad de que ocurra es conocida ya que es la tasa de transacciones efectivas, definida anteriormente, sobre el total de iteraciones, Φ.

De esa manera se puede plantear entonces que el número de transacciones efectivas realizadas, Q, en I iteraciones, se puede aproximar, por hipótesis, como:

Q=ƮΦ. (4)

Asúmase, como una primera aproximación, que P=$< p >$ es precio medio del período, y que dado $\Delta p \sim Unif[1,100]/\ p \in Z$ es conocido.

De esta manera la ecuación del dinero, en términos de la velocidad, vendría dada como: $V=\frac{<p>}{M} I\Phi$. (5)

Tomando, Ʈ =M=10^6, se tiene que:

$V=<p>\Phi$. (6)

Por tanto se estima una relación directa entre la velocidad del dinero en circulación y la tasa de transacciones efectivas.

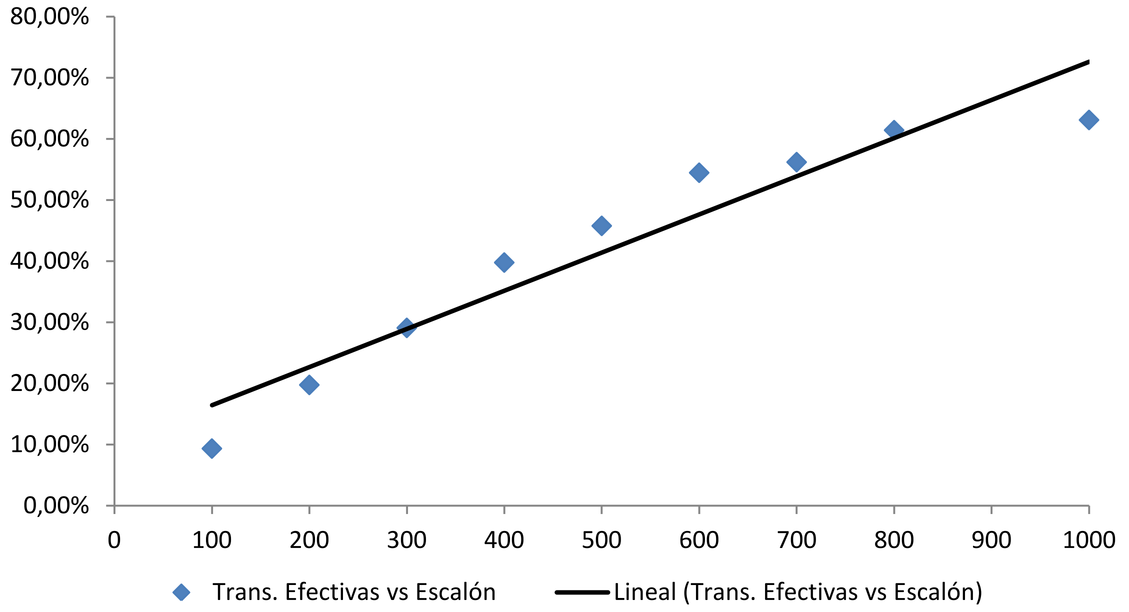
Como se desprende de los resultados obtenidos, a medida que se consideran escalones ($\mathcal{U}$) más pequeños, por tanto, condiciones más restrictivas, la proporción de iteraciones que devienen en una transacción efectiva disminuye. Así, por ejemplo, para $\mathcal{U}$ =1000, un escalón tan grande que el sistema es en la práctica equivalente a uno sin ningún tipo de restricción, el 63% de las iteraciones dan lugar a una transacción entre agentes, tal y como se desprende del

valor de t. Para $\mathcal{U}$=500, menos del 46% se transforma en una relación comercial de intercambio y para $\mathcal{U}$ =100 este valor es ya únicamente de un 9%.
Puesto que las transacciones disminuyen, el valor promedio de las mismas *(<p>Q)*, también lo hará y dada la constancia de la masa monetaria M, necesariamente V debe disminuir. Esto se puede entender directamente en términos de la *"Ecuación de cambio"*.

La figura 17., muestra claramente este efecto. El incremento de las restricciones al comercio genera una pérdida de oportunidades de transacción y con ellos el número de interacciones disminuye abruptamente. Si hay menos transacciones, con una masa monetaria fija M, esto implica necesariamente que el dinero se estanca, disminuye su movilidad de acuerdo con la ecuación (6). Obsérvese que el valor de Φ se obtiene directamente de la simulación contando el número de transacciones que derivan en acuerdo e intercambio; por tanto un recuento de las iteraciones que devienen en cambio de posición de los agentes implicados.

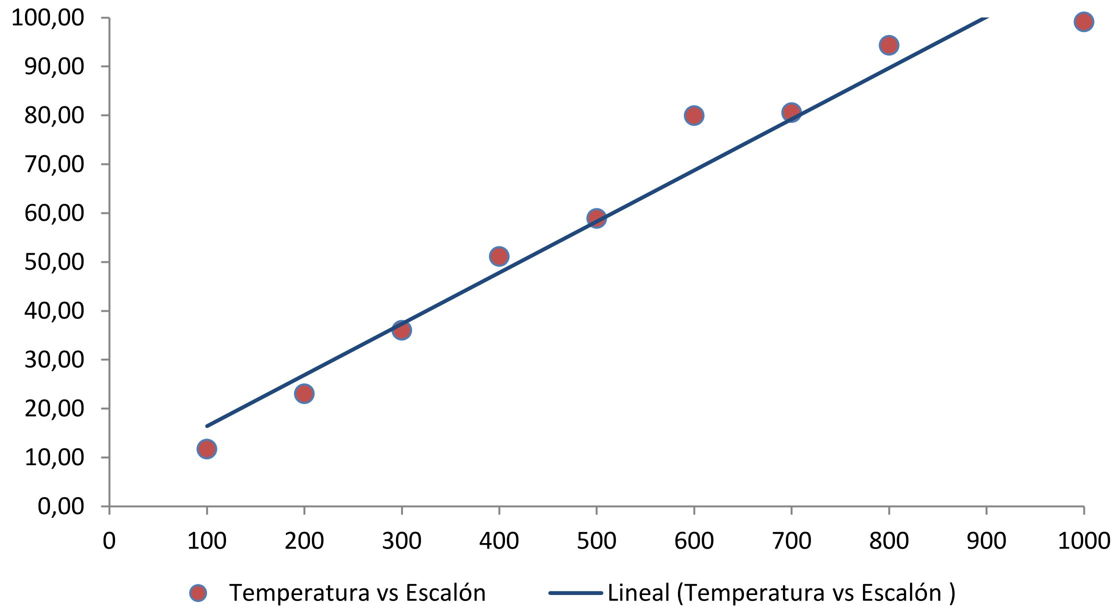
Este análisis lo es desde una perspectiva puramente económica; se simulan diversos escenarios para la relación entre los agentes, se contabilizan el número de relaciones efectivas que se ha dado entre ellos, y como se conoce el vector de precios que rige en los diversos modelos, se obtienen conclusiones aplicando *la Ecuación Cuantitativa del Dinero*.

Figura 17. Relación entre la amplitud del escalón $\mathcal{U}$ y la tasa de transacciones efectivas Φ.



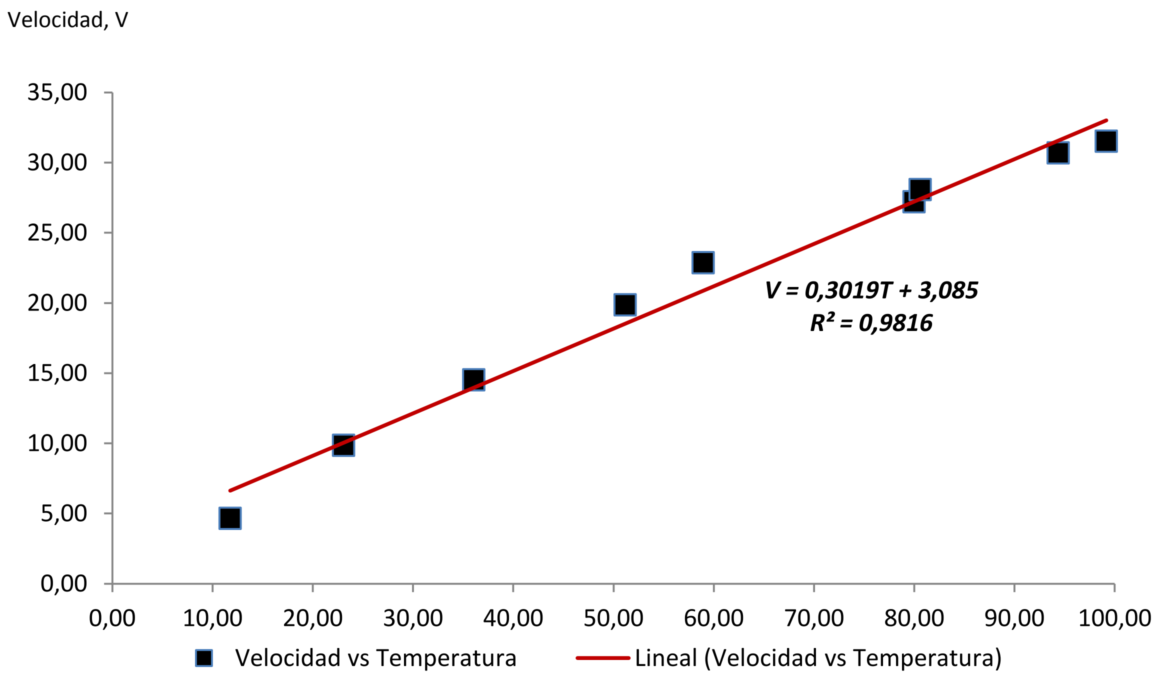
Si la distribución empírica del dinero, obtenida para cada escenario, se reemplaza por la aproximación dada por el ajuste de *P (m) = C(T)exp (-m / T)* se puede relacionar el parámetro T de equilibrio con $\mathcal{U}$. Como se puede observar, figura 18., a medida que se consideran escalones más pequeños la temperatura de equilibrio disminuye. Se evidencia, por tanto, una relación empírica entre, T y $\mathcal{U}$, por tanto, entre T y la probabilidad dada por Φ y por ello entre T y V.

Figura 18. Temperatura monetaria (T) en relación con el tamaño del escalón ($\mathcal{U}$)



A menor valor de T, menor probabilidad de intercambio y velocidad del dinero. A la inversa, si la probabilidad de intercambio se reduce, la velocidad del dinero también lo hará y con ello, el sistema *se enfría*.

Figura 19 .Relación entre la amplitud del escalón $\mathcal{U}$ y la tasa de transacciones efectivas Φ.



La figura 19., muestra la relación empírica existente entre el temperatura del sistema y la velocidad de intercambio del dinero.

En un gas, la temperatura es una medida macroscópica *de la actividad* de las partículas del sistema. Una mayor temperatura es la consecuencia de una frecuencia superior en las colisiones de las moléculas que lo forman y por ello de la transmisión de energía entre ellas. Como se observa la analogía de los modelos *tipo gas,* propios de la Mecánica Estadística, con un sistema económico es casi total, de hecho, incluso mucho más profunda de los que se podría imaginar una vez que se ha dotado de una interpretación económica al parámetro T. También aquí una baja *temperatura monetaria* es la consecuencia de una menor actividad, de un *enfriamiento* de la relaciones entre los agentes económicos.

6. Conclusiones

En este trabajo se elimina un supuesto que implícitamente está presente en la mayoría de la literatura sobre este tema como es el de la *libertad absoluta* en las transacciones de los agentes. En todo lo analizado hasta este momento se partía del supuesto, no explicitado formalmente, de que si dos agentes estaban en condiciones de abordar una transacción lo harían sin que nada se lo impidiese. Conque se verificasen las reglas de intercambio, en forma de cantidades y precios, la transacción se llevaría a cabo. Si este supuesto se elimina, con la introducción de una barrera o escalón económico que obligue a que sólo los agentes *próximos* puedan relacionarse entre sí, entonces se obtienen resultados muy diferentes a los previos.

Como se puede comprobar, la limitación en las transacciones económicas da lugar a una reducción de las probabilidades de intercambio y por tanto a una pérdida de posibilidades de "negocio". El nivel de actividad económica disminuye, tanto más cuanto mayores sean las restricciones impuestas. Si se ajustan estos modelos a la distribución de Boltzmann-Gibbs (valida en general para la mayor parte de la población) se comprueba que la T_{equ} es mucho más pequeña que cuando no hay restricciones, y tanto menor cuanto mayor es la dificultad impuesta a los agentes. La falta de actividad económica da lugar a un *enfriamiento* del estado de equilibrio. El resultado final es un conjunto poblacional caracterizado por una enorme masa de agentes casi sin dinero y una minoría que acumula la mayor parte de la masa monetaria existente.

Por otra parte este modelo permite deducir la relación que existe entre la *temperatura económica* y la velocidad del dinero, otorgándole así, al parámetro T_{equ}, un claro significado económico.

Apéndice.

Equilibrio de Boltzmann-Gibbs: Transacciones efectivas y precios. Curva de demanda agregada.

Supóngase que estamos ante un sistema que sigue la ley de Boltzmann-Gibbs, por tanto, un sistema de intercambios aditivo, en las condiciones ya vistas en este trabajo. En todo lo anteriormente expuesto se ha supuesto siempre de manera implícita que el vector de precios era constante ($\Delta p \sim Unif[1,100]/\ p \in Z$).

Supóngase ahora, *ceteris paribus*, que se altera este vector de precios de forma que el sistema se enfrente a $\Delta p \sim Unif[1,P]/\ p \in Z$, donde P tome diferentes valores. ¿Qué ocurre en este caso? ¿Cómo responde el sistema ante alteraciones en el nivel de precios?

Dado que éste se ajusta según la ley de Boltzmann-Gibbs de manera óptima y este ajuste es independiente del precio marcado, recuérdese que tan solo depende de M y N y ambos son constantes, se espera que, en equilibrio, T sea invariable, e igual a T_{equ}=100, para cada vector de precios.

La variación de los estos últimos no supone que el sistema se vea sometido a una influencia externa, como el caso, ya visto, de la imposición de un escalón $\mathcal{U}$. Únicamente implica que cambia la condición interna de intercambio, y por ello las interacciones elementales del sistema no dejan en ningún momento de ser reversibles en el tiempo.

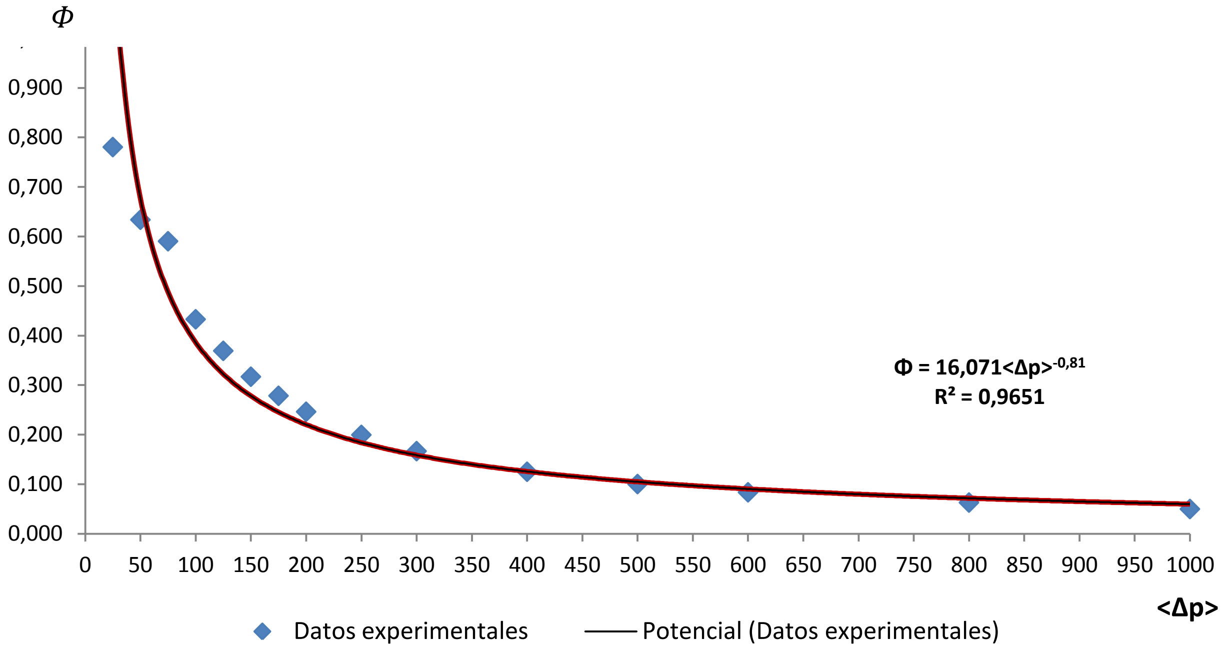
Por hipótesis, se puede suponer que variar el nivel de precios debe traer consigo un cambio en las probabilidades de que una interacción posible se transforme en una efectiva; es decir, cabe suponer, que si el precio cambia, Φ también lo hará.

Cuadro 3. Valores de Φ y de $\langle\Delta p\rangle$ para distintos equilibrios termodinámicos.

$\Delta p \sim Unif[1,P]$	$\langle\Delta p\rangle$	Φ	T_{eq}
50	25	0,780	98,35
100	50	0,634	101,18
150	75	0,590	98,91
200	100	0,433	101,18
250	125	0,369	101,63
300	150	0,317	99,71
350	175	0,278	100,66
400	200	0,246	101,82
500	250	0,199	100,47
600	300	0,167	100,67
800	400	0,125	102,40
1000	500	0,100	101,25
1200	600	0,083	102,1
1600	800	0,063	98,25
2000	1000	0,050	100,5

El cuadro anterior muestra los resultados obtenidos de una serie de simulaciones numéricas al variar el vector de precios *Δp*. En cada una de ellas se realizan las iteraciones necesarias para que el sistema alcance el equilibrio termodinámico, que supondremos, ad hoc, que alcanza cuando la T del mismo difiera menos, en valor absoluto, de un 3% del valor teórico (T_{equ}=100). Una vez en equilibrio se cuentan las transacciones efectivas existentes en 10^6 iteraciones (transacciones posibles).

Figura 20 .Relación entre <*Δp*> y *Φ*.

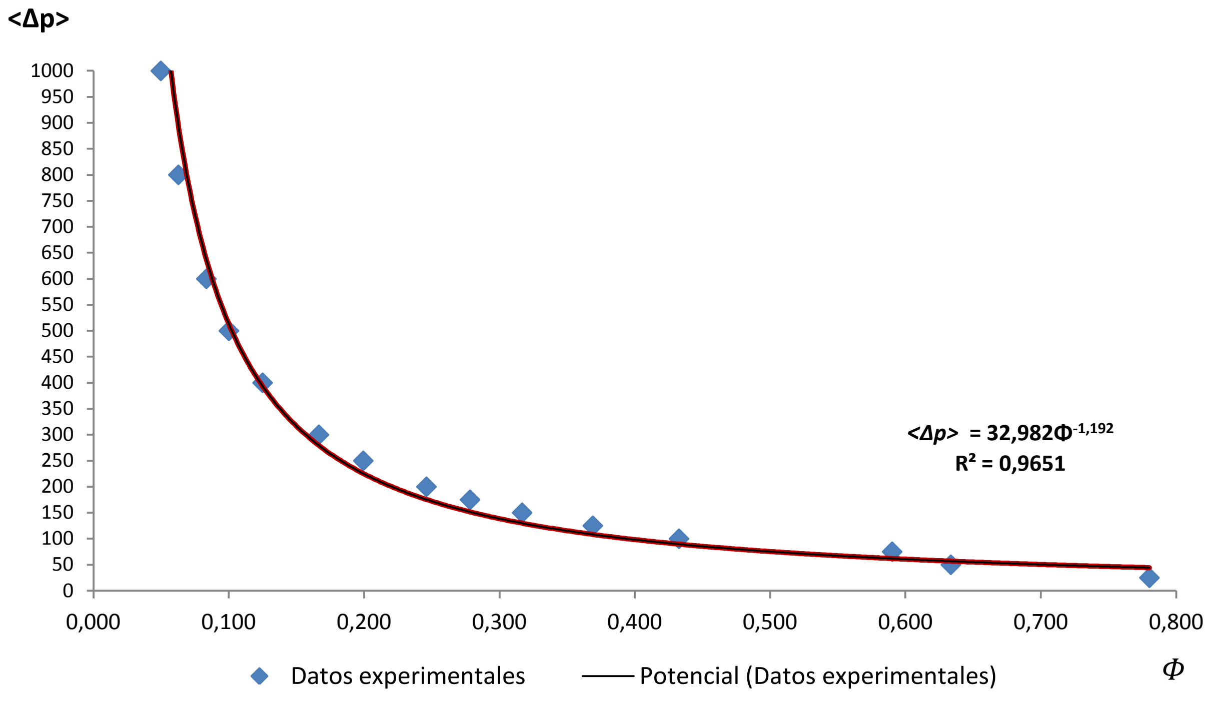


Como se desprende de los datos obtenidos, la probabilidad de alcanzar un acuerdo en una transacción dada depende del nivel de precios existente en el sistema. Precios muy altos dan lugar a probabilidades de intercambio muy bajas y viceversa. Por otra parte para valores extremos del vector de precios, con medias muy altas o muy bajos, se comprueba que el sistema necesita una cantidad de tiempo (medidos en ciclos de iteración) mucho grande para alcanzar el equilibrio que para valores intermedios.

El ajuste de los datos experimentales entre *Φ* y *<Δp>* sigue una curva de tipo potencial con función: $\Phi\ (\langle \Delta p \rangle) = 16{,}071 \langle \Delta p \rangle^{-0{,}81}$

Si estas mismos datos se presentan poniendo a *<Δp>* en función de *Φ* se obtiene la figura 21. De esta manera cabe interpretar que representan la curva de demanda agregada del sistema estudiado. En este caso las cantidades intercambiadas (Q) se ven sustituidas por la probabilidad de intercambio *Φ*.

Figura 21 . Curva de demanda agregada *<Δp>* y Φ.



Con la única imposición de que los intercambios microscópicos cumplan la condición:

$$m_i^{'} = \begin{cases} m_i - \Delta p \; si \; m_i \geq \Delta p \\ m_i \qquad\quad si \; m_i < \Delta p \end{cases} \qquad m_j^{'} = \begin{cases} m_j + \Delta p \; si \; m_i \geq \Delta p \\ m_j \qquad\quad si \; m_i < \Delta p \end{cases} \quad (7)$$

se llega a una curva que relaciona los niveles de precios con la probabilidad efectiva de intercambios para el conjunto del sistema. Dado que el valor de Φ está directamente relacionado con las cantidades intercambiadas, $Q=T\Phi$ con $T=10^6$, se obtiene así una la curva de demanda agregada para el sistema, además la esperada en el caso de *bienes normales*.

Obsérvese que se obtiene desde un punto de vista probabilístico y sin recurrir a ningún tipo de supuesto sobre el comportamiento de los agentes, más allá de la dada por la restricción financiera anterior y la conservación de la cantidad total de dinero.

En conclusión, se podría enunciar que*: los sistema económicos en equilibro de Boltzmann-Gibbs dan lugar a la curva de demanda agregada (probabilística) propia de bienes normales.*

Referencias bibliográficas.

[1] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Física Teórica. Física Estadística. Editorial Reverte. (1969)
[2] R. Mantegna, E Stanley, An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. Cambridge (2000).
[3] Anirban Chakraborti, Ioane Muni Toke, Marco Patriarca & Frédéric Abergel. http://digital.csic.es/bitstream/10261/47012/1/econoc.pdf
[4] Benoit Mandelbrot, The Variation of Certain Speculative Prices. http://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/341Fa09/econ/Mandelbroit_VariationCertainSpeculativePrices.pdf.
[5] G. Mankiw, Principios de economía. Mc Graw-Hill.
[6] A. Chatterjee, B. Chakrabarti, Kinetic exchange models for income and wealth distributions, Eur. Phys. J. B 60 (2007) 135.
[7] V. Yakovenko, J. J. Barkley Rosser, Statistical mechanics of money, wealth, and income, arXiv:0905.1518.URL www.arxiv.org
[8] Christian Kleiber, Samuel Kotz, Statistical Size Distribution in Economics and Actuarial Sciences, Wiley 2003.
[9] Carlos Gradín, Coral del río, La medición de la desigualdad. http://decon.edu.uy/~mito/nip/desigualdad.pdf
[10] P.M. Morse, Termofísica. Selecciones Científicas. Madrid, 1971.
[11] A. Chatterjee, S. Yarlagadda, B. K. Chakrabarti (Eds.), Econophysics of Wealth Distributions - Econophys- Kolkata I, Springer, 2005.
[12] A. Dragulescu, V. M. Yakovenko, Statistical mechanics of money, Eur. Phys. J. B 17 (2000) 723.
[13] Clemens Van Dinther , Agent-based Simulation for Research in Economics. In Handbook of Information Technology in Finance. Springer Verlag, 2008
[14] Kenneth L. Judd, Computational economics and economic theory: Substitutes or complements? Journal of Economics Dynamics and Control, 21 (6) 907-942-1997.
[15] L. Tesfatsion, Agent-based computational economics: Growing economies from the bottom-up. ISU Economics Work Paper Nº 1, February 2002.
[16] B. P. Demidovich , Métodos numéricos de análisis. Ediciones Paraninfo. 1980