



## INFLUÊNCIA DAS TENSÕES INTERLAMINARES NAS CARACTERÍSTICAS MODAIS DE VIBRAÇÃO DE UMA PLACA LAMINADA COMPÓSITA

J. PEDRO REINA, A. T. MARQUES, J. D. RODRIGUES, M. F. S. F. DE MOURA

DEMEGI - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal

*(Recibido 5 de abril de 2004, para publicación 2 de diciembre de 2004)*

**Resumo** – O recurso aos laminados compósitos na construção de estruturas como placas e cascas deve-se às suas propriedades mais atractivas como são a elevada rigidez e a extrema leveza. Porém, estes factores potenciam problemas de vibração pelo que se torna necessária a previsão das características de vibração destes laminados. As tensões na direcção transversa podem assumir primordial importância no comportamento dinâmico dos laminados compósitos, devido à heterogeneidade transversal típica das estruturas laminadas e à forte anisotropia ao nível da camada,  $E_L/G_{LT} = 30$ . Consequentemente é fundamental considerar um estado tridimensional de tensão pelo que foi desenvolvida uma ferramenta numérica que recorre a um elemento finito baseado numa teoria de camada discreta, a DLT (Discrete Layer Theory), que permite uma correcta descontinuidade das deformações transversas nas interfaces com camadas de diferentes características materiais. A validação dos valores das tensões transversas obtidas por este modelo é realizada por comparação com as obtidas por um modelo baseado no uso de elementos finitos de interface para problemas tridimensionais. Neste trabalho pretende-se estudar a influência das tensões interlaminares transversas nas características modais das vibrações das placas laminadas compósitas.

**Palavras chave** – Laminados compósitos, tensões interlaminares, elementos finitos, vibrações.

### 1. INTRODUÇÃO

Com o rápido avanço da ciência e da tecnologia, os materiais compósitos reforçados com fibras têm sido alvo da preferência de uma indústria tecnologicamente evoluída como são as indústrias automóvel, aeronáutica e a espacial, devido fundamentalmente às suas características de resistência e de elasticidade específicas. Os elevados custos associados a estas tecnologias, exige uma melhor previsão dos comportamentos dos materiais e estruturas a usar. Algumas das aplicações destes materiais nestas indústrias são constituídas por painéis laminados compósitos, cuja elevada rigidez e leveza enfatizam os problemas de vibração dos mesmos, [1]. As vibrações das placas laminadas compósitas têm sido estudadas ao longo dos tempos seguindo o percurso do desenvolvimento de novos modelos analíticos e numéricos com o objectivo de conseguir melhores aproximações ao comportamento macromecânico destes materiais.

Nos trabalhos iniciais sobre vibrações, Lekhnitskii [2], aplicou a laminados simétricos, uma teoria baseada nas hipóteses de Kirchhoff-Love, conhecida por CLT (Classical Laminate Theory), sendo a Reissner e Stavsky [3], que se deve a inclusão do acoplamento flexão-extensão na análise de placas laminadas assimétricas. Esta teoria, CLT, não considera os efeitos das tensões/deformações na direcção da espessura dos laminados. Para obstar a esta limitação foi necessário recorrer às chamadas teorias refinadas. Nestas, os deslocamentos são expandidos como combinações lineares da coordenada relativa à espessura e de funções de posição na superfície de referência. O estudo dos efeitos das tensões e deformações de corte transversal realizados por Reissner [4], na flexão de placas isotrópicas e Mindlin [5], nos movimentos de flexão de placas isotrópicas, levou ao desenvolvimento da mais conhecida teoria das designadas teorias refinadas, a teoria de Mindlin-Reissner. Yang e tal. [6], generalizaram a sua aplicação ao estudo da propagação de ondas em placas laminadas arbitrariamente anisotrópicas. A esta teoria, conhecida por FSDT

(First-Order Shear Deformation Theory), corresponde deformações de corte transversas constantes ao longo da espessura, o que obriga ao recurso de um factor que as corrija tendo em conta a real distribuição destas tensões ao longo da espessura. Whitney e Pagano [7], desenvolveram uma solução analítica para o problema das placas anisotrópicas compósitas e verificaram que o factor de correcção ao corte dependia da sequência de empilhamento, do número de camadas e das propriedades da camada. Também verificaram que a CLT, aplicada ao estudo do comportamento dinâmico, subestima os deslocamentos transversais das formas próprias e sobrestima as frequências próprias. Constataram que a importância dos efeitos das tensões e deformações de corte é acentuada pelo aumento da espessura e pela fraca rigidez dos laminados na direcção transversa. Na deformação de uma placa, a hipótese de normais não deformadas, aceitável para placas isotrópicas torna-se inaceitável para placas de camadas anisotrópicas com elevados coeficientes  $E_i / G_{iz}$ , mesmo que se trate de placas relativamente finas. Assim, uma teoria que inclua as deformações de corte transversas e tenha em conta o empenamento da normal será suficientemente precisa na previsão do comportamento linear elástico de placas laminadas anisotrópicas (deflexões, distribuição ao longo da espessura dos deslocamentos planos, frequências naturais, etc.), [8]. Daí que, procurando modelar a deformação realista e empenada da secção de uma placa, surgiram alguns modelos HSDT (Higher-Order Shear Deformation Theory), com um campo de deslocamentos expresso por séries de potências em termos da coordenada relativa à espessura. A cada novo termo da série corresponde uma nova incógnita. Whitney e Sun [9], e Nelson e Lorch [10], desenvolveram modelos que continham potências quadráticas da variável  $Z$ , o que para os autores não evitava o recurso aos factores de correcção ao corte. Reissner [11], desenvolveu um modelo que incluía termos de ordem cúbica mas que desprezava os efeitos dos deslocamentos  $u_0, v_0$  do plano de referência. Lo et al. [12], também incluíram estes deslocamentos no seu modelo analítico, aplicando-o ao estudo estático de placas laminadas. Apenas foram analisados os deslocamentos e as tensões planas ao longo da espessura. Cawley e Adams [13], Levinson [14], Murthy [15], Reddy [16] e mais recentemente Moita et al. [17] e Matsunaga [18], desenvolveram modelos que ao satisfazer as condições de tensão de corte nula nas superfícies superior e inferior da placa, resultaram numa distribuição parabólica das tensões de corte ao longo da espessura, o que evitou a necessidade do factor de correcção ao corte [19]. Assim, valores como a deflexão transversa, as frequências fundamentais de vibração, carga de empenamento crítico e esforços generalizados, são obtidos com precisão suficiente.

As teorias acima descritas, CLT, FSDT e HSDT, são também designadas por ESL (Equivalent single layer), já que substituem uma placa laminada compósita por uma camada anisotrópica única equivalente. O senão dos modelos ESL consiste no facto das deformações transversas serem contínuas nas interfaces de camadas de características mecânicas diferentes, o que leva a que as tensões transversas calculadas através das relações constitutivas, sejam descontínuas nas referidas interfaces. Esta deficiência pode ser ultrapassada calculando, de forma indirecta, as tensões transversas recorrendo às equações de equilíbrio dinâmico.

Na tentativa de desenvolver uma teoria apropriada para laminados compósitos que permita a satisfação simultânea das condições de contacto nas interfaces quer para deslocamentos quer para tensões de corte transversas, apareceram as teorias de camada discreta DLT (Discrete Layer Theory), com duas aproximações distintas. Uma, desenvolvida por Ambartsumyan [20], onde a distribuição das tensões de corte transversas em cada camada é previamente assumida, introduzindo parâmetros que são posteriormente incluídos no campo de deslocamentos. As condições de continuidade entre camadas adjacentes e a condição fronteira na superfície superior e inferior, permitem obter os parâmetros desconhecidos. A outra, desenvolvida por Sun e Whitney [21] e Srinivas [22], aplicada a placas multicamadas, onde para cada camada são assumidas as hipóteses cinemáticas da teoria de deformação de corte de 1ª ordem, permitindo-se a continuidade das tensões de corte transversas nas interfaces das camadas.

A primeira, deu origem a desenvolvimentos como os realizados por de Sciuva [23], que incluiu as deformações não lineares de Von Kármán, devidas à consideração de grandes deslocamentos na sua formulação. Os seus estudos abarcaram a análise de vibrações livres de placas laminadas compósitas. Toledano e Murakami [24] e Carrera [25], recorreram ao Princípio Variacional Misto de Reissner. No primeiro, foi assumida uma distribuição quadrática das tensões transversas, função de uma variável transversa local definida para cada camada. No segundo, mais recentemente, o modelo preenchia à priori os requisitos das

condições de continuidade  $C_z^0$  das interfaces de camadas diferentemente orientadas, isto é, continuidade  $C^0$  para deslocamentos e tensões transversas. Foram obtidas as equações relativas à formulação forte do problema e algumas soluções analíticas foram resolvidas. Desai et al. [26], num trabalho ainda mais recente, desenvolveram um elemento finito tridimensional de camada discreta, utilizando um campo de variáveis misto, formado pelas componentes do vector deslocamento e pelas tensões transversas. As relações elásticas fundamentais de um meio contínuo foram respeitadas porque foram usadas as relações elásticas entre as referidas tensões e os deslocamentos. Neste caso, as tensões transversas foram obtidas sem recorrer ao sistema de equações de equilíbrio.

A segunda levou Reddy et al. [27-29], a desenvolver variados modelos, onde a variação transversal do campo de deslocamentos é definida através de um elemento finito lagrangeano unidimensional, que de forma automática obriga a uma continuidade do tipo  $C^0$  dos deslocamentos ao longo da espessura, o que resulta em deformações de corte contínuas no interior da camada e descontínuas nas interfaces. Esta descontinuidade não impede que as respectivas tensões de corte nas fronteiras das camadas possam ser contínuas.

O modelo usado no trabalho actual baseia-se na DLT utilizada por Reddy et al. [28]. No modelo, o laminado é discretizado em camadas numéricas que podem ou não coincidir com as camadas físicas do laminado. Este processo permite refinar uma determinada camada física discretizando-a com várias camadas numéricas ou englobar várias camadas físicas numa só camada numérica, tornando este sublaminado numa camada ESL, sempre que se necessite de um modelo computacionalmente mais leve. Assim podemos ter no mesmo laminado, camadas modeladas como ESL e uma ou mais camadas com refinamento. Foram usados elementos unidimensionais de Lagrange na espessura de cada lâmina numérica, incluindo-se neste trabalho funções de interpolação quadrática e cúbica para além da habitual função linear. Também foi considerada a variação do deslocamento transversal ao longo da espessura do laminado,  $w(x, y, z)$ , incluindo a tensão normal transversa  $\sigma_z$  no tensor das tensões. Tendo em conta o estudo a ser realizado neste trabalho será necessário inferir da qualidade do modelo na obtenção da distribuição das tensões. Assim, este modelo foi testado comparando as tensões interlaminares de uma placa laminada compósita com as obtidas por um modelo que recorre aos elementos finitos de interface compatíveis com elementos tridimensionais [30, 31]. A importância dos efeitos das deformações de corte e das tensões interlaminares nas características modais de vibração das placas laminadas compósitas foi analisada variando o empilhamento dos laminados e a sua espessura. Foram usados modelos com diferente capacidade de obter o empenamento das secções da placa comparando-os em termos de eficácia.

## 2. TEORIA

### 2.1. Elemento de Interface

Os elementos finitos de interface permitem a obtenção das tensões nas interfaces entre camadas diferentemente orientadas, a partir do cálculo dos deslocamentos relativos entre pontos homólogos. Estes elementos finitos caracterizam-se por possuir espessura nula e promover a ligação entre dois elementos sólidos, representativos de camadas contíguas susceptíveis de delaminar. A fig. 1 apresenta um esquema de um elemento finito de interface para problemas tridimensionais [30, 31]. A sua formulação é baseada na teoria do contacto recorrendo ao método da função penalidade. As duas superfícies (inferior e superior) encontram-se artificialmente separadas na fig. 1 para melhor visualização. Os pontos homólogos (por exemplo 14 e 5) encontram-se inicialmente coincidentes, podendo-se no entanto deslocar devido às solicitações aplicadas. Assim, a formulação baseia-se no cálculo das tensões que se geram entre os pontos homólogos a partir dos deslocamentos relativos entre esses mesmos pontos,

$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta_s \\ \delta_t \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_s \\ u_t \\ u_n \end{Bmatrix}_{\text{sup}} - \begin{Bmatrix} u_s \\ u_t \\ u_n \end{Bmatrix}_{\text{inf}} \quad (1)$$

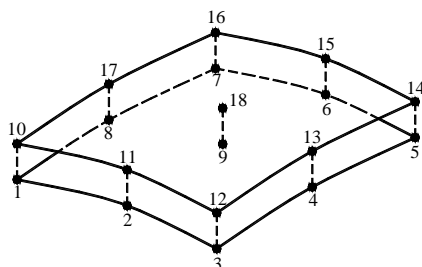


Fig. 1. Elemento finito de interface de 18 nós para problemas tridimensionais.

onde  $s$  e  $t$  representam as direcções tangenciais e  $n$  a direcção normal. As tensões interlaminares resultantes dos deslocamentos relativos são dadas por

$$\sigma = D\delta \quad (2)$$

onde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_s & 0 & 0 \\ 0 & d_t & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

sendo  $d_i$  os parâmetros de rigidez tangencial ( $d_s$ ,  $d_t$ ) e normal ( $d_n$ ). As suas unidades são  $\text{N/m}^3$  e a sua escolha é feita tendo em conta que valores muito altos originam problemas numéricos e valores muito baixos originam interpenetrações. Os valores óptimos são então os mais elevados, geralmente entre  $10^6$  e  $10^8 \text{ N/m}^3$ , que não provocam instabilidades numéricas resultantes da precisão do computador. O elemento de interface é compatível com os elementos sólidos de 27 nós do ABAQUS®, no qual é introduzido recorrendo à ferramenta específica denominada USER SUBROUTINES. Os elementos sólidos modelam cada conjunto de camadas igualmente orientadas e os de interface são colocados nas interfaces entre camadas diferentemente orientadas.

## 2.2. Modelo de placa baseado na teoria de camada discreta

O elemento finito baseado na DLT com variação do deslocamento transversal  $w(x, y, z)$  ao longo da espessura e inclusão da deformação/tensão normal transversa, será designado ao longo deste trabalho por GLPTZ.

O campo de deslocamentos  $(u, v, w)$  do modelo foi definido relativamente ao sistema de coordenadas XYZ da placa, como mostra a fig. 2, onde XY coincide com o plano médio da placa. Assim, os deslocamentos de um ponto genérico da placa definem-se da seguinte forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^N U^j(x, y, t) \phi^j(z) \\ v(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^N V^j(x, y, t) \phi^j(z) \\ w(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^N W^j(x, y, t) \phi^j(z) \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $(U^j, V^j, W^j)$  são deslocamentos nodais associados a nós distribuídos ao longo da espessura da placa e onde  $\phi^j(z)$  são funções unidimensionais de interpolação de Lagrange, definidas localmente em domínios segundo a espessura, designados por *camadas numéricas*, de acordo com a fig. 3. As funções  $\phi^j(z)$ , ditas de *suporte compacto*, são não nulas apenas no domínio local associado a uma ou duas sub-

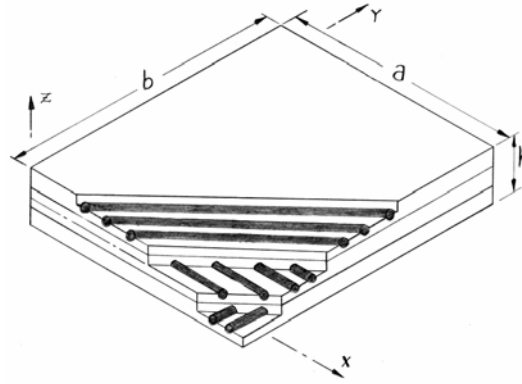


Fig. 2. Sistema de coordenadas e geometria da placa laminada.

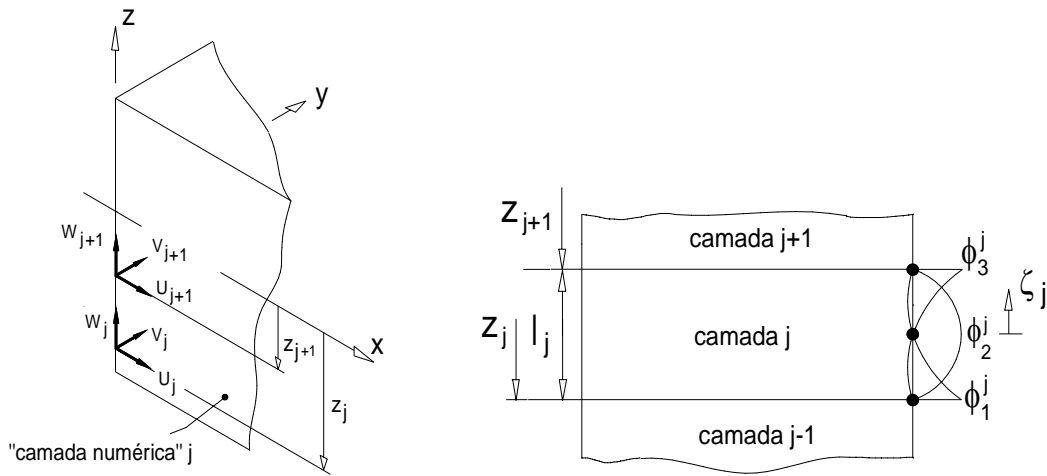


Fig. 3. Deslocamentos nodais e funções de interpolação de Lagrange quadráticas.

divisões, dependendo se o nó  $j$  é um nó interior ou um nó fronteira da subdivisão. Estas funções impõem, automaticamente, continuidade do tipo  $C^0$  dos deslocamentos ao longo da espessura do laminado, resultando em deformações transversas descontínuas na fronteira de duas camadas adjacentes. Deste modo abre-se a possibilidade da continuidade das tensões transversas na interface de duas camadas de diferentes características materiais, portanto de acordo com a realidade física. Devido à forma como o campo de deslocamentos foi definido, a discretização da placa no domínio bidimensional  $XY$  é feita na superfície média onde por cada nó da malha bidimensional ter-se-á um conjunto de graus de liberdade ao longo da espessura.

O número de nós de interpolação ao longo da espessura depende do grau  $p$  das funções de interpolação, de acordo com a expressão  $NNOSZ = p \times NCZ + 1$  onde  $NCZ$  representa o número de camadas numéricas. Se  $p=1$ , função de interpolação linear, as funções de interpolação globais  $\phi^j(z)$  são dadas pelas expressões

$$\phi^j(z) = \begin{cases} 0 & z < z_{j-1} \\ \phi_2^{j-1} = (z - z_{j-1}) / l_{j-1} & z_{j-1} < z < z_j \\ \phi_1^j = (z_{j+1} - z) / l_j & z_j < z < z_{j+1} \\ 0 & z > z_{j+1} \end{cases} \quad (5)$$

onde  $l_j$  e  $l_{j-1}$  são as espessuras das camadas numéricas  $j$  e  $j-1$ . Neste trabalho para além da função de interpolação linear recorreremos à função de interpolação quadrática,  $p=2$ , tendo 3 pontos de interpolação por camada numérica, sendo um deles interior,

$$\phi^j(z) = \begin{cases} \phi_3^j(z) = \frac{1}{2} \zeta_j (\zeta_j - 1) \\ \phi_2^j(z) = 1 - \zeta_j^2 \\ \phi_1^j(z) = \frac{1}{2} \zeta_j (\zeta_j + 1) \end{cases} \quad (6)$$

e à função de interpolação cúbica,  $p=3$ , tendo 4 pontos de interpolação por camada numérica, sendo dois deles interiores,

$$\phi^j(z) = \begin{cases} \phi_4^j(z) = +\frac{9}{16} (\zeta_j + 1/3) (\zeta_j - 1/3) (\zeta_j + 1) \\ \phi_3^j(z) = -\frac{27}{16} (\zeta_j + 1) (\zeta_j + 1/3) (\zeta_j - 1) \\ \phi_2^j(z) = +\frac{27}{16} (\zeta_j + 1) (\zeta_j - 1/3) (\zeta_j - 1) \\ \phi_1^j(z) = -\frac{9}{16} (\zeta_j + 1/3) (\zeta_j - 1/3) (\zeta_j - 1) \end{cases} \quad (7)$$

onde  $\zeta_j$  (ver fig. 3) é uma função de  $z$  dada por

$$\zeta_j(z) = \frac{2}{l_j} (z - z_j) - 1. \quad (8)$$

As deformações de um ponto genérico da placa laminada, usando apenas as relações lineares deformações/deslocamentos escrevem-se da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{j=1}^{NCZ} \phi^j \frac{\partial U^j}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \sum_{j=1}^{NCZ} \phi^j \left( \frac{\partial U^j}{\partial y} + \frac{\partial V^j}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y &= \sum_{j=1}^{NCZ} \phi^j \frac{\partial V^j}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \sum_{j=1}^{NCZ} \left( U^j \frac{\partial \phi^j}{\partial z} + \phi^j \frac{\partial W^j}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_z &= \sum_{j=1}^{NCZ} W^j \frac{\partial \phi^j}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \sum_{j=1}^{NCZ} \left( V^j \frac{\partial \phi^j}{\partial z} + \phi^j \frac{\partial W^j}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Considerando comportamento linear elástico, as relações constitutivas dos materiais compósitos, tendo em conta um estado tridimensional de tensões, são definidas pelas seguintes relações

$$\{\sigma\}_{XYZ} = [\bar{Q}_{ij}] \{\varepsilon\}_{XYZ} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Os coeficientes da matriz de rigidez  $[\bar{Q}_{ij}]$  são obtidos tendo em consideração o ângulo  $\theta$ , de orientação das fibras relativamente ao sistema de coordenadas da placa, através de expressões sobejamente conhecidas e que podem ser encontradas na bibliografia relativa a materiais compósitos [32].

O princípio variacional de Hamilton, para laminados compósitos, tendo em conta a teoria generalizada de placa laminada, é da forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \iint \sum_{j=1}^{NCZ} \left[ N_x^j \frac{\partial}{\partial x} (\delta U_j) + N_y^j \frac{\partial}{\partial y} (\delta V_j) + N_{xy}^j \left( \frac{\partial}{\partial x} (\delta V_j) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta U_j) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + Q_x^j \frac{\partial}{\partial x} (\delta W_j) + Q_y^j \frac{\partial}{\partial y} (\delta W_j) + \tilde{Q}_x^j \delta U_j + \tilde{Q}_y^j \delta V_j + \tilde{N}_z^j \delta W_j \right] dx dy \right. \\
& - \iint \sum_{j=1}^{NCZ} \sum_{l=1}^{NCZ} I^{jl} (\ddot{U}_j \delta U_l + \ddot{V}_j \delta V_l + \ddot{W}_j \delta W_l) dx dy \\
& \left. + \iint \{ \delta u \}^T \{ p \} dx dy + \sum_{j=1}^{NCZ} \int_{\Gamma} \{ \delta u_r \}_j^T \{ T \}_j d\Gamma \right\} dt = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

onde

$$\begin{aligned}
(N_x^j, N_y^j, N_{xy}^j, Q_x^j, Q_y^j) &= \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \phi^j dz \\
(\tilde{N}_z^j, \tilde{Q}_x^j, \tilde{Q}_y^j) &= \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{\partial \phi^j}{\partial z} dz
\end{aligned} \tag{13}$$

são os esforços generalizados e

$$I^{jl} = \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho \phi^j \phi^l dz \tag{14}$$

são as inércias do elemento de placa generalizada sendo  $nc$  o número de camadas com diferente orientação das fibras. Substituindo na equação (12), as relações constitutivas e tendo em conta as relações deformações/deslocamentos, os esforços generalizados podem ser reescritos da seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} N_x^j \\ N_y^j \\ N_{xy}^j \\ Q_x^j \\ Q_y^j \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^{NCZ} \begin{bmatrix} A_{11}^{jl} & A_{12}^{jl} & A_{16}^{jl} & 0 & 0 & B_{13}^{jl} & 0 & 0 \\ A_{21}^{jl} & A_{22}^{jl} & A_{26}^{jl} & 0 & 0 & B_{23}^{jl} & 0 & 0 \\ A_{61}^{jl} & A_{62}^{jl} & A_{66}^{jl} & 0 & 0 & B_{63}^{jl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}^{jl} & A_{45}^{jl} & 0 & B_{44}^{jl} & B_{45}^{jl} \\ 0 & 0 & 0 & A_{54}^{jl} & A_{55}^{jl} & 0 & B_{54}^{jl} & B_{55}^{jl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial U^l / \partial x \\ \partial V^l / \partial y \\ \partial V^l / \partial x + \partial U^l / \partial y \\ \partial W^l / \partial x \\ \partial W^l / \partial y \\ \hline W^l \\ U^l \\ V^l \end{Bmatrix} \tag{15}$$

com:

$$\begin{aligned}
A_{rs}^{jl} &= \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{rs})_k \phi^j \phi^l dz & \text{com } r, s = 1, 2, 4, 5, 6 \\
B_{rs}^{jl} &= \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{rs})_k \phi^j \frac{\partial \phi^l}{\partial z} dz & \text{com } r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{aligned} \tag{16}$$

e ainda:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N}_z^j \\ \tilde{Q}_x^j \\ \tilde{Q}_y^j \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^{NCZ} \begin{bmatrix} C_{31}^{jl} & C_{32}^{jl} & C_{36}^{jl} & 0 & 0 & D_{33}^{jl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{jl} & C_{45}^{jl} & 0 & D_{44}^{jl} & D_{45}^{jl} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54}^{jl} & C_{55}^{jl} & 0 & D_{54}^{jl} & D_{55}^{jl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial U^l / \partial x \\ \partial V^l / \partial y \\ \partial V^l / \partial x + \partial U^l / \partial y \\ \partial W^l / \partial x \\ \partial W^l / \partial y \\ \hline W^l \\ U^l \\ V^l \end{Bmatrix} \tag{17}$$

onde

$$\begin{aligned} C_{rs}^{jl} &= \sum_{K=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{rs})_k \frac{\partial \phi^j}{\partial z} \phi^l dz & \text{com } r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ D_{rs}^{jl} &= \sum_{K=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{rs})_k \frac{\partial \phi^j}{\partial z} \frac{\partial \phi^l}{\partial z} dz & \text{com } r, s = 3, 4, 5 \end{aligned} \quad (18)$$

Substituindo os esforços generalizados, equações (15) e (17), na equação (12), obtemos o princípio variacional de Hamilton em forma compacta:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \iint \sum_{j=1}^{NCZ} \sum_{l=1}^{NCZ} [\{\delta \varepsilon^j\}^T [A^{jl}] \{\varepsilon^l\} + \{\delta \varepsilon^j\}^T [B^{jl}] \{\tilde{\varepsilon}^l\} + \{\delta \varepsilon^j\}^T [B^{jl}] \{\varepsilon^l\} + \{\delta \tilde{\varepsilon}^j\}^T [D^{jl}] \{\tilde{\varepsilon}^l\}] dx dy \right. \\ \left. - \iint \sum_{j=1}^{NCZ} \sum_{l=1}^{NCZ} \{\delta u^j\}^T I^{jl} \{\ddot{u}^l\} dx dy + \iint \{\delta u\}^T \{p\} dx dy + \sum_{j=1}^{NCZ} \int_{\Gamma_j} \{\delta u^j\}^T \{T^j\} d\Gamma_j \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

onde

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^j\}^T &= \left\{ \frac{\partial U^j}{\partial x}, \frac{\partial V^j}{\partial y}, \frac{\partial V^j}{\partial x} + \frac{\partial U^j}{\partial y}, \frac{\partial W^j}{\partial x}, \frac{\partial W^j}{\partial y} \right\} \\ \{\tilde{\varepsilon}^j\}^T &= \{W^j, U^j, V^j\} \end{aligned} \quad (20)$$

Com o método dos elementos finitos, o domínio bidimensional de cada camada *numérica* é discretizado num número finito de sub-domínios. A solução aproximada do problema, pode ser agora encontrada através de uma combinação linear de funções de interpolação de suporte compacto. Assim, para o plano de cota  $Z = Z_j$ , no interior de cada elemento finito, os deslocamentos  $U^j, V^j, W^j$  são expressos como combinações lineares de funções de forma  $N_i$  e dos deslocamentos nodais  $U_i^j, V_i^j, W_i^j$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} U^j(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m U_i^j(t) N_i(x, y) \\ V^j(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m V_i^j(t) N_i(x, y) \\ W^j(x, y, t) &= \sum_{i=1}^m W_i^j(t) N_i(x, y) \end{aligned} \right\} \{u^j\}_e = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i^j(t) \\ V_i^j(t) \\ W_i^j(t) \end{Bmatrix} = [H^j] \{a^j\}_e \end{aligned} \quad (21)$$

onde  $m$  é o número de nós de cada elemento. Usando a equação (21) e tendo em conta as relações deformações/deslocamentos, equação (9), o princípio variacional de Hamilton é reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{N_e} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N [\{\delta a^j\}_e^T [M^{jl}]_e \{\ddot{a}^l\}_e + \{\delta a^j\}_e^T ([K_A^{jl}]_e + [K_B^{jl}]_e + [K_C^{jl}]_e + [K_D^{jl}]_e) \{a^l\}_e \right. \\ \left. - \{\delta a\}_e^T \{P\}_e - \sum_{j=1}^N \{\delta a^j\}_e^T \{T^j\}_e \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

onde  $N_e$  é o número de elementos e



$$\begin{aligned}
[M^{jl}]_e &= \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} [H]^T I^{jl} [H] \det|J| d\xi d\eta \\
[K_A^{jl}]_e &= \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} ([H]^T [L]^T) [A^{jl}]_e ([L][H]) \det|J| d\xi d\eta \\
[K_B^{jl}]_e &= \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} ([H]^T [\tilde{L}]^T) [B^{jl}]_e ([\tilde{L}][H]) \det|J| d\xi d\eta \\
[K_C^{jl}]_e &= \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} ([H]^T [\tilde{L}]^T) [C^{jl}]_e ([L][H]) \det|J| d\xi d\eta \\
[K_D^{jl}]_e &= \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} ([H]^T [\tilde{L}]^T) [D^{jl}]_e ([\tilde{L}][H]) \det|J| d\xi d\eta \\
\{P\}_e &= \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} [H]^T \{p\} \det|J| d\xi d\eta \\
\{T^j\}_e &= \int_{\Gamma_e} [H]^T \{T^j\} d\Gamma_e
\end{aligned} \tag{23}$$

com:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^j \\ \varepsilon_y^j \\ \gamma_{xy}^j \\ \gamma_{zx}^j \\ \gamma_{yz}^j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \end{Bmatrix} = [L] \{u^j\}; \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_z^j \\ \tilde{\gamma}_{zx}^j \\ \tilde{\gamma}_{yz}^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \end{Bmatrix} = [\tilde{L}] \{u^j\} \tag{24}
\end{aligned}$$

Relacionando as variáveis nodais do elemento com as variáveis nodais globais, através da *Matriz de Localização do Elemento* ou *Matriz de Compatibilidade*, onde  $N$  representa o número total de nós e  $m$  o número de nós de um elemento

$$\begin{aligned}
\{a\}_e &= [T_{GL}] \{a\} \\
\{a\}_e &= \{U_1^1, V_1^1, W_1^1, \dots, U_1^n, V_1^n, W_1^n, \dots, U_m^1, V_m^1, W_m^1, \dots, U_m^n, V_m^n, W_m^n\}^T \\
\{a\} &= \{U_1^1, V_1^1, W_1^1, \dots, U_1^n, V_1^n, W_1^n, \dots, U_N^1, V_N^1, W_N^1, \dots, U_N^n, V_N^n, W_N^n\}^T
\end{aligned} \tag{25}$$

obtemos as equações globais que regem o movimento do sistema

$$[M] \{\ddot{a}\} + [K] \{a\} = \{f\} \tag{26}$$

As características modais da vibração da placa laminada compósita foram obtidas do Problema Generalizado de Valores e Vectors Próprios, recorrendo ao Método da Iteração de Subespaços

$$([K] - \lambda_i [M]) \{A\}_i = \{0\} \tag{27}$$

onde  $\lambda_i = \omega_i^2$ .

### 3. MODELO DE INTERFACE VERSUS MODELO DLT

Na comparação das tensões interlaminares obtidas pelo modelo GLPTZ e pelo modelo de INTERFACE foi analisada uma placa laminada compósita espessa  $a/h = 5$ , cujas propriedades materiais ao nível da camada estão definidas na tabela 1. Devido à simetria, apenas foi usada um quarto de placa, fig. 4. Na

Tabela. 1. Propriedades do material ao nível da camada [33].

Carbon FRP – HMS/DX-210				
E1	E2=E3	G12= G13= G23	v12= v12= v12	$\rho$ [ kg m <sup>-3</sup> ]
172.7 GPa	7.2 GPa	3.76 GPa	0.3	1566

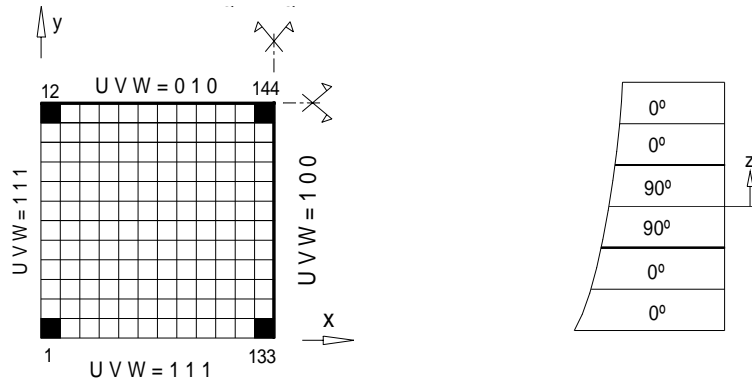


Fig. 4. Discretização de um quarto da placa no plano e ao longo da espessura.

discretização correspondente ao modelo de INTERFACE foram usados 144\*12 elementos finitos 3D de 27 nós e 144 elementos de interface em cada uma das duas interfaces. Na discretização associada ao modelo GLPTZ foram utilizados 144 elementos finitos 2D quadráticos de Lagrange de 9 nós e 6 camadas numéricas ao longo da espessura com funções de interpolação quadráticas. A placa encastrada em todos os bordos foi submetida a uma carga distribuída constante de 100 KPa aplicada na superfície superior da placa.

Conforme se pode observar nas figuras 5–9 os valores das tensões calculadas pelos dois modelos têm um bom ajustamento, pelo que se conclui do bom desempenho do elemento de placa GLPTZ no cálculo das tensões ao longo da espessura.

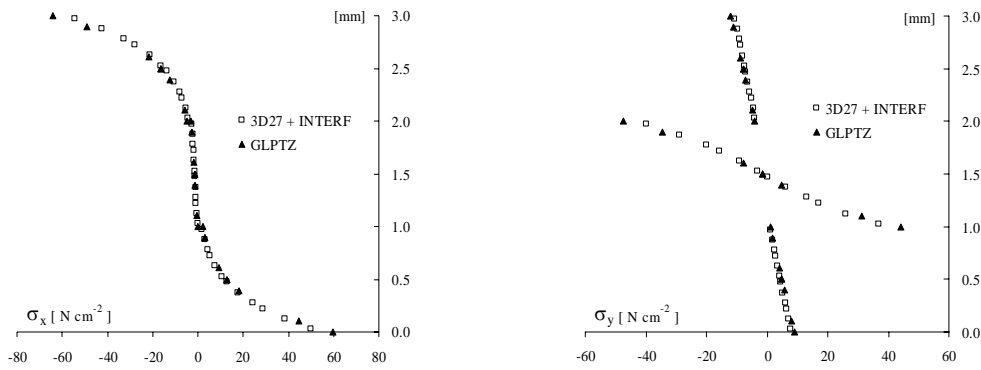


Fig. 5. Tensões  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  obtidas ao longo da espessura nos pontos de Gauss mais próximos do nó central da placa.

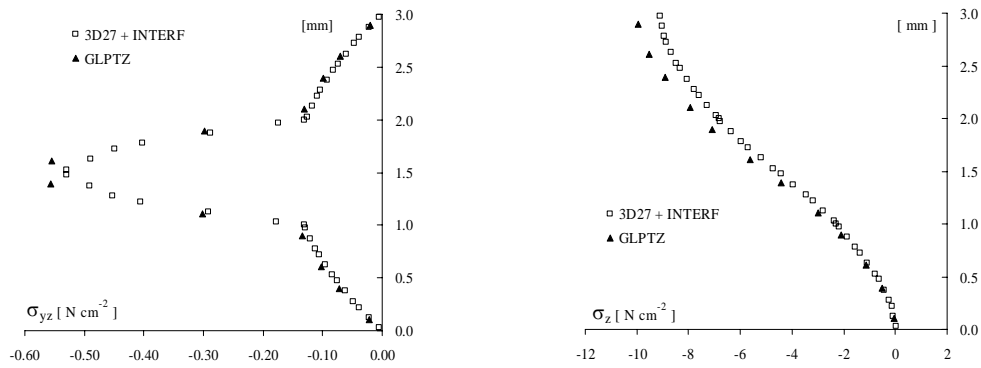


Fig. 6. Tensões  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_z$  obtidas ao longo da espessura nos pontos de Gauss mais próximos do nó central da placa.

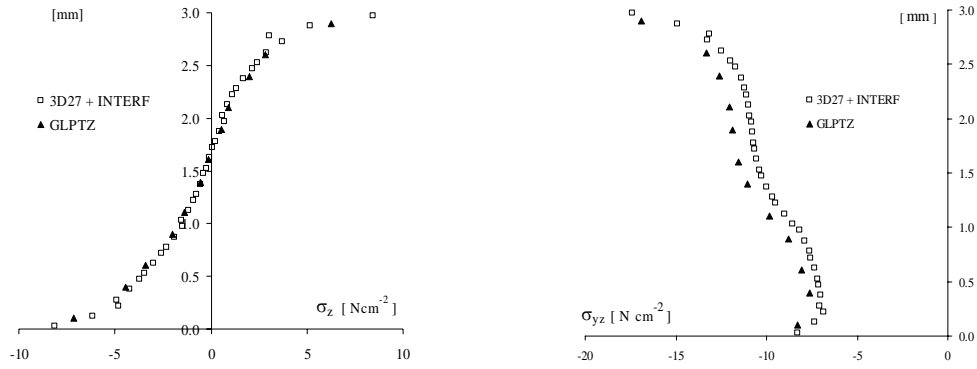


Fig. 7. Tensões  $\sigma_z$  e  $\sigma_{yz}$  obtidas ao longo da espessura nos pontos de Gauss ( $x = 5.94$  e  $y = 0.06$  mm) mais próximos do bordo  $y = 0$ .

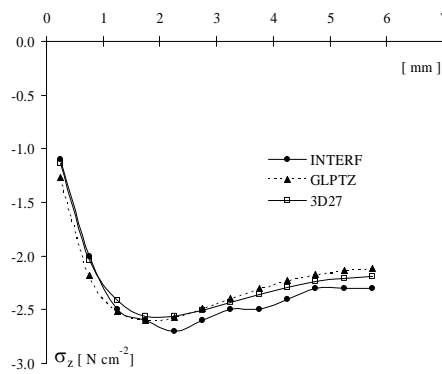


Fig. 8. Tensões  $\sigma_z$  obtidas para a interface inferior ( $z = 1.0$  mm), nos pontos de Gauss próximos da linha média ( $y = 5.75$  mm).

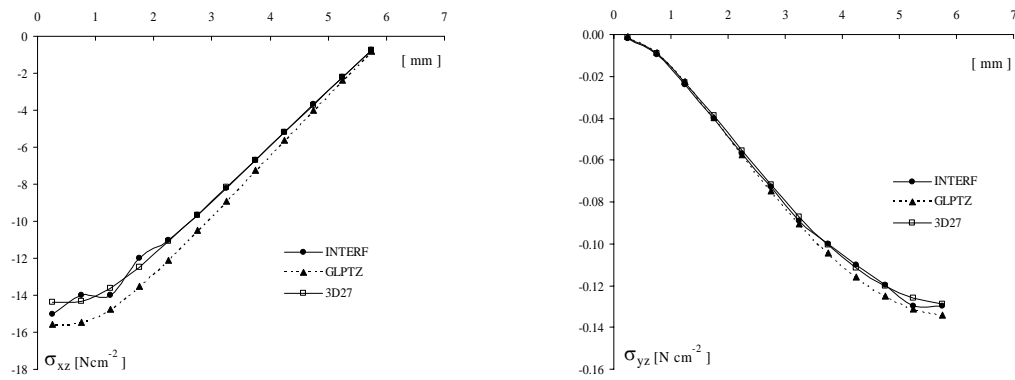
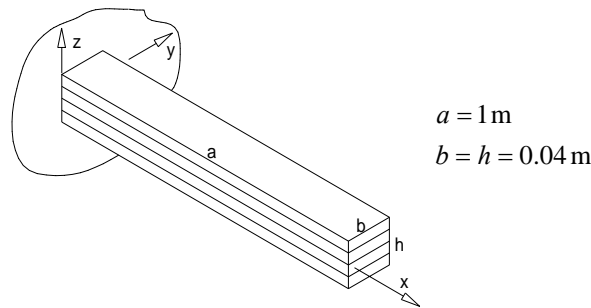


Fig. 9. Tensões  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  obtidas para a interface inferior ( $z = 1.0$  mm), nos pontos de Gauss próximos da linha média ( $y = 5.75$  mm).

#### 4. CARACTERÍSTICAS MODAIS DE VIBRAÇÃO

Para analisar a influência das tensões interlaminares sobre as características modais de vibração foi usada uma viga em balanço, Fig. 10, encastada no bordo  $X = 0$ . As propriedades materiais são as que

Fig. 10. Viga em balanço, encastrada no bordo  $X = 0$ .

estão indicadas na tabela 1. Foram usados três empilhamentos diferentes, dois de 16 camadas e um de 4 camadas, mantendo-se a espessura da placa,  $(0^\circ_{20}/90^\circ_{20})_{4S}$   $(20^\circ_{20}/-20^\circ_{20})_{4S}$   $(20^\circ_{80}/-20^\circ_{80})_S$ .

Na tabela 2, pode comparar-se os valores das frequências modais para a viga de 16 camadas com os empilhamentos do tipo  $(0^\circ/90^\circ)$  e  $(20^\circ/-20^\circ)$ , obtidos através de diferentes discretizações da espessura, desde o uso de apenas duas camadas numéricas até ao uso de 16 camadas numéricas, neste caso cada uma delas coincidente com cada uma das camadas físicas do laminado. Em ambas as discretizações, foram usadas, no plano, funções de interpolação bidimensionais de Lagrange quadráticas de 9 nós e ao longo da espessura funções de interpolação unidimensionais de Lagrange lineares.

Da tabela 2 pode constatar-se que as diferenças obtidas no cálculo das frequências entre as duas discretizações extremas, 2 e 16 camadas numéricas, são pouco significativas no caso do empilhamento  $(0^\circ/90^\circ)$ , 0.2% para o 1º modo e 2.9% para o 5º modo, e um pouco superiores para o empilhamento  $(20^\circ/-20^\circ)$ , 1% para o 1º modo e 4,2% para o 5º modo.

Na tabela 3, são apresentados os valores das frequências modais para a mesma viga, mantendo a mesma espessura, mas usando apenas 4 camadas empilhadas de forma simétrica,  $(20^\circ/-20^\circ)_S$ . Foram usadas diferentes discretizações da espessura, recorrendo a funções de interpolação unidimensionais de Lagrange

Tabela. 2. Frequências modais para viga de 16 camadas, em balanço.

	16 CAMADAS FÍSICAS							
	GLPTZ - 20*2XYQ9				GLPTZ - 20*2XYQ9			
	0°/90°				20°/-20°			
	2ZL	4ZL	8ZL	16ZL	2ZL	4ZL	8ZL	16ZL
1	53.9	53.8	53.7	53.7	52.8	52.8	52.5	52.3
2	320.9	319.0	318.5	318.2	314.6	310.7	308.8	308.2
3	836.8	828.0	825.2	824.3	822.0	806.4	799.8	797.7
4	1502.0	1479.3	1472.1	1469.7	1477.9	1440.3	1425.2	1420.9
5	2261.3	2218.9	2205.4	2200.9	2229.4	2161.7	2135.1	2127.7

Fig. 11. Formas modais de vibração de viga em balanço, encastrada no bordo  $X = 0$ .

Tabela 3. Frequências modais para viga de 4 camadas, em balanço.

4 CAMADAS FÍSICAS				
GLPTZ - 20*2XYQ9				
20°/-20°				
	2ZL	4ZL	4ZQ	4ZC
1	43.1	40.4	38.8	38.7
2	260.7	243.1	234.1	233.0
3	694.0	643.3	621.0	618.4
4	1270.0	1168.9	1131.4	1127.1
5	1953.9	1789.3	1736.3	1730.5

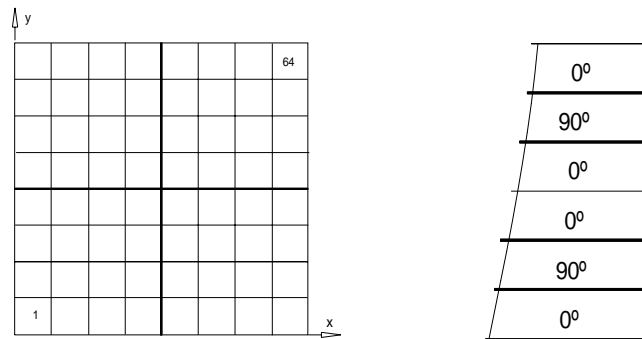


Fig. 12. Empilhamento das camadas de forma a ter-se 4 interfaces.

mais complexas: lineares, quadráticas a cúbicas. Constatou-se que as diferenças são mais elevadas, podendo obter-se 6.3% para o 1º modo e 8.4% para o 5º modo no caso de se comparar as frequências relativas a 2ZL e 4ZL e que se acentuam caso a comparação seja feita entre 2ZL e 4ZC, 10,3% para o 1º modo e 11,4% para o 5º modo.

Também se recorreu à placa utilizada no problema estático, usada agora de forma a que o empilhamento das camadas resulte num maior número de interfaces, conforme se representa na fig. 12. Foram comparadas as frequências modais obtidas por diferentes modelos: o modelo de Mindlin-Reissner e o modelo GLPTZ, neste caso recorrendo a funções de interpolação mais complexas que permitem modelar o empilhamento das secções de forma mais realista. Recorrendo a uma placa espessa,  $a/h = 5$ , na tabela 4 pode constatar-se que o modelo de Mindlin-Reissner ou FSDT (First Shear Deformation Theory) sobrestima o valor das frequências modais, obtendo-se valores inferiores para os modelos com maior refinamento.

Tabela. 4. Frequências modais normalizadas de placa quadrada espessa, CCCC.

PLACA QUADRADA, CCCC, ( 0° / 90° / 0° )s, a/h=5				
	$\omega \times \frac{ab}{h} \times \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$			
	FSDT 8*8XYQ9	GLPTZ 8*8XYQ9 - 6ZL	GLPTZ 8*8XYQ9 - 6ZQ	GLPTZ 8*8XYQ9 - 6ZC
Modo 1	14.16	13.22	13.05	13.04
Modo 2	22.16	19.90	19.64	19.62
Modo 3	23.09	22.26	21.99	21.97
Modo 4	28.78	26.89	26.56	26.54
Modo 5	32.76	28.89	28.49	28.46
Modo 6	34.12	33.22	32.82	32.78

## 5. CONCLUSÕES

A análise estática permitiu constatar da existência de boa concordância entre as tensões interlaminares obtidas pelo modelo de interface e pelo modelo baseado na teoria de camada discreta GLTPZ, apesar do modelo de camada discreta apenas garantir a descontinuidade das deformações transversas e não impedir que as respectivas tensões possam ser contínuas. No modelo GLTPZ foi considerada a variação do deslocamento transversal ao longo da espessura do laminado e incluída a tensão normal transversal  $\sigma_z$ . Foram usados diferentes refinamentos ao longo da espessura do laminado. Um processo inovador permite refinar uma determinada camada física discretizando-a com várias camadas numéricas ou englobar várias camadas físicas numa só camada numérica, tornando este grupo numa camada ESL, sempre que se necessite de um modelo mais leve computacionalmente. Assim podemos ter no mesmo laminado, camadas modeladas como ESL e camadas com refinamento. A utilização deste último modelo possibilitou o estudo da influência das tensões interlaminares no cálculo das frequências modais de vibração de uma placa laminada compósita. A comparação dos valores obtidos por este modelo, usando diferentes refinamentos, com os obtidos por um modelo de camada única (FSDT), leva a concluir que o recurso a modelos de camadas múltiplas no cálculo de frequências modais deve ser considerado quando em análise estiverem placas moderadamente espessas a espessas. Para estas placas constatou-se da necessidade de um cálculo correcto do empenamento das secções rectas e por consequência das deformações transversas nas interfaces das camadas diferentemente orientadas, já que influenciam as frequências modais de vibração das placas laminadas compósitas.

## REFERÊNCIAS

- [1] Swider, P., Jacquet-Richardet, G., e Pereira, J. C., Interactions between numerical and experimental approaches in composite structure dynamics, *Composite Structures*, **43**, 127-135 (1998).
- [2] Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic plates*, traduzido da 2ª edição Russa por Tsai, S. W., e Cheron, T., Gordon e Breach, 1968.
- [3] Reissner, E., e Stavsky, Y., Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **28**, No. 3, Trans. ASME, Vol. 83, Series E, 402-408 (1961).
- [4] Reissner, E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **12**, No. 2, Trans. ASME, Vol. 67, 402-408 (1961).
- [5] Mindlin, R. D., Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 31-38 (1951)
- [6] Yang, P. C., Norris, C. H. e Stavsky, Y., Elastic wave propagation in heterogeneous plates, *Int. J. of Solids and Structures*, **2**, 665-684 (1966).
- [7] J. M. Whitney e N. J. Pagano, Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **37**, Trans. ASME, 1031-1036 (1970).
- [8] Sciuba, M., An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates, *Journal of Applied Mechanics*, **54**, Trans. ASME, 589-596 (1987).
- [9] Whitney, J. M., e Sun, C. T., A refined theory for laminated anisotropic, cylindrical shells, *Journal of Applied Mechanics*, **41**, N.º 2, Trans. ASME, Vol. 96, Series E, pp. 471-476, 1974.
- [10] Nelson, R. B., e Lorch, D. R., A refined theory of laminated orthotropic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **41**, N.º 1, Trans. ASME, **96**, Series E, 177-183 (1974).
- [11] Reissner, E., On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. of Solids and Structures*, **11**, 569-573 (1975).
- [12] Lo, K. H., Christensen, R. M. e Wu, E. M., A high-order theory of plate deformation, Part 2: Laminated plates, *Journal of Applied Mechanics*, **44**, N.º 4, Trans. ASME, 669-676 (1977).
- [13] P. Cawley e R. D. Adams, The predicted an experimental natural modes of free-free CFRP plates, *J. of Composite Materials*, **12**, 336 (1978).
- [14] M. Levinson, An accurate simple theory of the static and dynamics of elastic plates, *Mech. Res. Commun.*, **7**, 343-350 (1980).

- [15] Murthy, M. V. V., An improved transverse shear deformation theory for anisotropic plates, *Nasa-TP-1903*, (1981).
- [16] J. N. Reddy, Dynamic (Transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **19**, 237-255, (1983).
- [17] Moita, J. S., Soares, C. M. M., e Soares, C. A. M., Buckling and dynamic behaviour of laminated composite structures using a discrete higher-order displacement model, *Computers and Structures*, **73**, 407-423 (1999).
- [18] Matsunaga, H., Vibration and stability of cross-ply composites plates according to a global higher-order plate theory, *Composite Structures*, **48**, 231-244 (2000).
- [19] Kumar, V. e Singh, A. V., Vibrations of fiber-reinforced laminated deep shells, *J. Pressure Vessel Techn.*, **118**, Trans. ASME, 407-414 (1996).
- [20] Ambartsumyan, S. A., *Theory of anisotropic plates*, Traduzido do Russo por Cheron e editado por Ashton, J. E., Technomic Publishing Co., 1969.
- [21] Sun, C. T., e Whitney, J. M., Theories for the dynamic response of laminated plates, *AIAA J.*, **14**, N° 9, 178-183 (1973).
- [22] Srinivas, S., A refined analysis of composite laminates, *J. Sound and Vibrations*, **30**, N° 4, 495-507 (1973).
- [23] Sciuva, M., Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: An evaluation of a new displacement model, *J. Sound Vibrations*, **105**(3), 425-442 (1986).
- [24] Toledano, A., e Murakami, H., A composite plate theory for arbitrary laminate configurations, *J. of Applied Mechanics*, **54**, 181-189 (1987).
- [25] Carrera, E., Mixed layer-wise models for multilayered plates analysis, *Composite Structures*, **43**, 57-70 (1998).
- [26] Desai, Y.M., Ramtekkar, G.S. e Shah, A.H., Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model, *Composite Structures*, **59**, 237-249 (2003).
- [27] Reddy, J. N., A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates, *Comm. in Applied numerical Methods*, **3**, 173-180 (1987).
- [28] Reddy, J. N., Barbero, J., e Teply, J. L., A plate bending element based on a generalized laminate plate theory, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 2275-2292 (1989).
- [29] Robbins, D. H., e Reddy, J. N., Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **36**, 665-677 (1993).
- [30] M.F.S.F. de Moura, J.P.M. Gonçalves, A.T. Marques, P.M.S.T. de Castro, Modelling Compression Failure After Low Velocity Impact on Laminated Composites Using Interface Elements, *Journal of Composite Materials*, **31**, 1462-1479 (1997).
- [31] J.P.M. Gonçalves, M.F.S.F. de Moura, P.M.S.T. de Castro, A.T. Marques, Interface Element Including Point-to-Surface Constraints for Three-Dimensional Problems With Damage Propagation, *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, **17**, 28-47 (2000).
- [32] J. R. Vinson e Chou, *Composite Materials and Their Use in Structures*, Appl. Sci. Publishers LTD, London, (1975).
- [33] X. D. Lin, R. G. Ni e R. D. Adams, Prediction and measurement of the vibrational damping parameters of carbon and glass fibre-reinforced plastic plates, *J. Composite Materials*, **18**, 132-152 (1984).

## INFLUENCE OF INTERLAMINAR STRESSES IN THE VIBRATIONS MODALS CHARACTERISTICS OF A COMPOSITE LAMINATE PLATE

**Abstract** – The use of composite laminates in the construction of structures as plates and shells is related to their most attractive properties such as high rigidity and extremely lightness. However, these factors increase vibration problems, which justify the prediction of vibration characteristics of these laminates. In the dynamic behaviour of composite laminates, the transversal stresses could assume primordial importance due to typical transverse heterogeneity of the laminated structures and to the high anisotropy at the layer level,  $E_L/G_{LT} = 30$ . Thus, a three-dimensional stress state will be considered on the FE model developed in this work, based in the Discrete Layer Theory (DLT). This theory allows transverse strains discontinuity at the interface between different oriented layers. Transverse stresses obtained from the constitutive relations with this model where vali-

dated by comparison with the ones obtained from an interface finite element compatible with three-dimensional problems. The objective of this work is to study the influence of the transverse interlaminar stresses on the vibrations modals characteristics of the composite laminates.

**Keywords** – Composite laminates, interlaminar stresses, finite elements, vibrations.