



# CONVERGÊNCIA ASSIMPTÓTICA DAS QUANTIDADES FUNDAMENTAIS NA MODELAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM TORNO DE UM CILINDRO CIRCULAR

ERIC DIDIER<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> DEMI – Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial  
Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Monte de Caparica, 2829-516 Caparica, Portugal

<sup>2</sup> MARETEC – Marine and Environmental Technology Center  
Instituto Superior Técnico, Universidade técnica de Lisboa  
Av. Rovisco Pais, 1049-001, Lisboa, Portugal

<sup>3</sup> NPE – Núcleo de Portos e Estruturas Marítimas  
Laboratório Nacional de Engenharia Civil  
Av. do Brasil, 1700-066, Lisboa, Portugal

*(Recibido 3 de octubre de 2011, para publicación 25 de noviembre de 2011)*

**Resumo** – O escoamento em torno de um cilindro circular de comprimento infinito para números de Reynolds de 10 até 300 é investigado utilizando um método de resolução totalmente acoplado, resolvendo assim simultaneamente todas as equações discretas. O modelo numérico incorpora ainda um método de solução pouco convencional em que a equação da continuidade é resolvida na sua forma original (i.e. não há reconstrução de uma equação de pressão). O estudo cuidadoso dos esforços de arrasto e de sustentação, da pressão de base e do número de Strouhal é realizado em regime laminar e bidimensional em função da resolução e da extensão do domínio de cálculo. Resultados assintóticos são obtidos aumentando a dimensão do domínio computacional de 20 até 4800 diâmetros do cilindro. É assim verificado que em contraste ao número de Strouhal, os esforços e a pressão de base são muito mais dependentes da resolução da malha e ainda mais da dimensão do domínio computacional.

**Palavras-chaves** – Solução assintótica, método de resolução totalmente acoplado, cilíndrico circular, escoamento não estacionário bidimensional e laminar.

## 1. INTRODUÇÃO

O escoamento em torno de um cilindro de comprimento infinito e não confinado é um problema clássico da dinâmica dos fluidos. Apesar das suas características geométricas serem simples, o escoamento em torno de um cilindro é muito complexo e apresenta diferentes fenómenos que ocorrem num intervalo relativamente reduzido do número de Reynolds: separação do escoamento, primeira instabilidade com o desenvolvimento da "von Kármán vortex street", transição para o escoamento tridimensional, ocorrência de turbulência na esteira. O escoamento em torno de um cilindro é estudado há mais de um século, iniciando-se com o trabalho fundamental de Strouhal que demonstrou a dependência entre a frequência de desprendimento dos vórtices, a velocidade do escoamento uniforme e o diâmetro do cilindro. Outros estudos experimentais, como os de Roshko [1] e Tritton [2] detalharam o comportamento do escoamento para diferentes números de Reynolds.

No fim do último século, observa-se um novo interesse no estudo do escoamento em torno de um cilindro, motivado pelas novas técnicas experimentais e capacidades computacionais. Williamson [3, 4], Williamson *et al.* [5], Norberg [6] demonstram assim, a partir de estudos experimentais, a influência da relação entre o comprimento e o diâmetro do cilindro, da turbulência no escoamento, do bloqueamento, e dos efeitos tridimensionais. Os recursos informáticos insuficientes na época não permitiram um estudo detalhado da convergência com a resolução da malha e no tempo ou do efeito de bloqueamento induzido pela dimensão do domínio de cálculo. O principal interesse foi a validação e demonstração de novas técnicas

Tabela 1. Extensão do domínio computacional utilizados em diferentes estudos numéricos.

Autores	Extensão do domínio	Autores	Extensão do domínio
Franke <i>et al.</i> [10]	20D	Henderson [14]	28D
Rosenfeld [12]	30.5D	Lange [8]	30-250D
Yang <i>et al.</i> [13]	200D	Park <i>et al.</i> [11]	50D
Behr <i>et al.</i> [7]	4.5-16D	Kravchenko <i>et al.</i> [9]	10-60D
Baranyi <i>et al.</i> [15]	40D	Posdziech <i>et al.</i> [16]	20-4000D

numéricas e códigos computacionais. No entanto, alguns estudos de convergência com a dimensão do domínio de cálculo foram realizados para números de Reynolds baixos: Behr *et al.* [7], Lange [8] e Kravchenko *et al.* [9]. A dependência das quantidades fundamentais com o número de Reynolds foi também estudada por Franke *et al.* [10], Lange [8], Park *et al.* [11], Rosenfeld [12], Yang *et al.* [13], Henderson [14] e Baranyi *et al.* [15]. A Tabela 1 indica a extensão lateral do domínio computacional utilizado em alguns destes estudos numéricos.

Posdziech *et al.* [16] realizou recentemente um estudo numérico do efeito do bloqueamento, considerando uma extensão do domínio de cálculo de 20 até 4000 diâmetros de cilindro, utilizando um método espectral. Posdziech obtém valores assintóticos para grandezas fundamentais, como os coeficientes de arrasto e de pressão de base e o número de Strouhal. O autor verificou que o número de Strouhal é menos afectado pelo efeito de dimensão do domínio computacional que os coeficientes de sustentação, de arrasto e de pressão de base.

No presente artigo, o escoamento bidimensional e laminar em torno de um cilindro de comprimento infinito para número de Reynolds entre 10 e 300 é simulado usando um método numérico totalmente acoplado original em velocidade e pressão [17, 18, 19] e um método de volumes finitos que incorpora um método de solução pouco convencional em que a equação da continuidade é resolvida na sua forma original [20]. O método numérico foi validado no caso do escoamento numa cavidade, comparando os resultados com dois outros modelos numéricos [20]. A resolução e a extensão do domínio computacional permitem definir a independência das quantidades fundamentais com a malha, sendo procurada a solução assintótica usando grandes dimensões de domínio. Apresenta-se o efeito da extensão do domínio computacional nos valores dos coeficientes de arrasto, sustentação e pressão de base e do número de Strouhal. Os resultados são comparados aos de Posdziech e de outros autores. A consistência dos presentes resultados e os de Posdziech é também verificada.

## 2. MODELO NUMÉRICO

As equações bidimensionais de Navier-Stokes são discretizadas usando o método de volumes finitos. Para resolver numericamente as equações discretas, adopta-se um método de resolução totalmente acoplado em velocidade-pressão, que constitui uma alternativa interessante e original aos métodos clássicos segregados, e que incorpora um método de solução pouco convencional em que a equação da continuidade é resolvida na sua forma original.

### 2.1. Equações

O escoamento é considerado laminar e bidimensional. O fluido é incompressível e viscoso. O escoamento não estacionário é governado pelas equações de Navier-Stokes, aqui escritas nas suas formas integrais e não dimensionais, usando a velocidade no infinito  $U_{oo}$  e o diâmetro do cilindro  $D$  como valores de referência,

$$\int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} d\Omega + \int_S \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} p d\Omega + \int_S \frac{1}{Re} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (2)$$

onde  $u$  é a velocidade,  $p$  a pressão,  $t$  o tempo,  $\Omega$  o volume do sistema,  $S$  a superfície fechando o volume e  $n$  a normal unitária ortogonal e exterior a  $S$ . O número de Reynolds é definido como  $Re=U_{oo}D/\nu$ , onde  $\nu$  é a viscosidade do fluido.

As condições limites são uma condição de aderência no cilindro ( $u=v=0$ ) e de velocidade no infinito,  $U_{oo}$ , na fronteira externa.

## 2.2. Discretização das equações

Para resolver numericamente as equações (1) e (2), adoptou-se um método de resolução totalmente acoplado em velocidade-pressão, que constitui uma alternativa interessante e original aos métodos clássicos segregados de tipo SIMPLE [21] ou PISO [22]. A presente versão deste código, denominado *FullCReM*, incorpora um método de solução pouco convencional em que a equação da continuidade é resolvida na sua forma original [20].

A discretização das equações é realizada utilizando o método dos Volumes Finitos recorrendo a uma localização das incógnitas no centro dos elementos de tipo *cell-centered*.

A implementação do método totalmente acoplado implícito implica a resolução dum sistema linear complexo. Assim é necessário considerar esquemas de discretização implícitos compactos, envolvendo só os volumes de controlos adjacentes,  $nb$ , e o volume de controlo central,  $c$ , conservando ao mesmo tempo uma precisão de segunda ordem.

No presente modelo numérico, a integração no tempo é estimada usando um esquema implícito de segunda ordem a três níveis em tempo.

Usa-se o esquema CDS, *Central Differencing Scheme*, para estimar os gradientes de velocidade do termo difusivo nas interfaces dos volumes de controlo.

Uma interpolação linear implícita, envolvendo os dois elementos adjacentes à interface, permite determinar o valor da pressão na interface dos elementos da malha.

O termo convectivo é discretizado através do esquema *deferred correction* proposto por Khosla *et al.* [23]. Esta técnica permite obter soluções precisas usando esquemas de ordem elevada, sem introduzir dificuldades na resolução do sistema linear. A ideia consiste em dividir o termo convectivo numa parte implícita, escrita através dum esquema de primeira ordem  $L^1$ , e numa parte explícita, igual à diferença entre um esquema de ordem superior,  $L^2$ , e o esquema de primeira ordem,  $L^1$ .

$$\phi_{nb} = L^1(\phi)^{impl} + \omega_{DC}(L^2(\phi) - L^1(\phi))^{Expl} \quad (3)$$

onde  $\phi$  é a componente de velocidade  $u_i$ . O método totalmente acoplado não necessita de introdução de difusão numérica, e consequentemente  $\omega_{DC} = 1$ . No âmbito do método totalmente acoplado, usa-se o esquema de primeira ordem UDS, *Upwind Differencing Scheme*, para o operador de primeira ordem  $L^1$ . O esquema de terceira ordem WACEB (*Weighted-Average Coefficient Ensuring Boundedness*), Song *et al.* [24], é utilizado para o operador  $L^2$ .

Quando a malha é não ortogonal, são adicionadas correcções para definir um valor no centro da interface. Se a não ortogonalidade da malha for pequena estas contribuições explícitas são também pequenas em comparação com as outras.

## 2.3. Estratégia de resolução

As equações de quantidade de movimento e a equação de conservação da massa são discretizadas usando os esquemas numéricos detalhados anteriormente. As equações discretas são reagrupadas num único sistema linear.

$$\begin{bmatrix} I & C^U & GP^U \\ C^V & I & GP^V \\ D^U & D^V & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^U \\ S^V \\ S^P \end{pmatrix} \quad (4)$$

onde  $I$  é a matriz identidade,  $GP^U$  e  $GP^V$  são os operadores de gradiente de pressão,  $C^U$  e  $C^V$  reagrupam os coeficientes dos esquemas de convecção e difusão fora da diagonal,  $D^U$  e  $D^V$  são os operadores divergência e  $S^U$ ,  $S^V$  e  $S^p$  representam os termos fontes e a parte explícita dos esquemas de discretização. A matriz deste sistema linear é muito esparsa, não simétrica, com grande dimensão, o seu condicionamento é elevado e uma parte da diagonal contém valores nulos. É assim necessário usar um algoritmo iterativo de resolução específico para ultrapassar estas dificuldades.

O sistema linear é assim resolvido pelo algoritmo iterativo Bi-CGSTAB- $\omega$  [25] com um pré-condicionamento ILU. Esta técnica associada ao algoritmo Bi-CGSTAB- $\omega$  permite resolver as dificuldades de resolução induzidas pela distribuição dos coeficientes não nulos na matriz e pela presença de valores nulos na sua diagonal.

A utilização do algoritmo precedente permite obter um método de resolução totalmente acoplado robusto. Em oposição aos métodos segregados, como SIMPLER, Issa [21], ou PISO, Patankar [22], onde as equações discretas são resolvidas sequencialmente, o método totalmente acoplado resolve um único sistema linear, permitindo obter a solução do campo de velocidade e de pressão simultaneamente. Contrariamente aos métodos segregados, a técnica de acoplamento total entre velocidade e pressão não requer etapa de correcções, parâmetros de relaxação ou outros tipos de tratamentos específicos para garantir a convergência. O acoplamento entre a velocidade e a pressão permite ainda simular com eficiência os fenómenos não-lineares, particularmente importantes na simulação de escoamentos não estacionários.

A técnica de resolução totalmente acoplada induz igualmente uma aceleração da convergência dos resíduos não-lineares. Uma redução dos resíduos de 5 a 6 ordens de grandeza é obtida em 4 a 6 iterações não-lineares. Em comparação, os métodos segregados, no mesmo número de iterações, permitem uma redução de apenas duas ordens.

Detalhes do método numérico encontram-se em [17-20].

### 3. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA COM O PASSO DE TEMPO E A DISCRETIZAÇÃO

A simulação do escoamento é realizada usando uma malha de tipo "O", com uma condição limite de aderência no cilindro ( $u=v=0$ ) e de velocidade no infinito,  $U_{\infty}$ , na fronteira externa. O cilindro é situado no centro do domínio computacional circular, como indicado na Fig. 1. O efeito de bloqueamento é analisado através a extensão do domínio computacional, ou seja do raio da sua fronteira circular  $L_D$ , que varia de  $20D$  até  $4800D$ .

Dois estudos preliminares de convergência foram realizados para definir o nível de refinamento da malha e o passo de tempo adequados para as simulações, considerando um número de Reynolds  $Re=300$ .

O estudo de convergência das quantidades fundamentais para  $Re=300$  com a resolução da malha, Tabela 2, mostra que a malha 5 com uma resolução de 340 nós no cilindro ( $N_{ang}$ ) e 282 nós na direcção transversal ( $N_{rad}$ ), a distância do primeiro nó a parede  $e/D=0.001$  e um factor de crescimento de  $r=1.03$  é

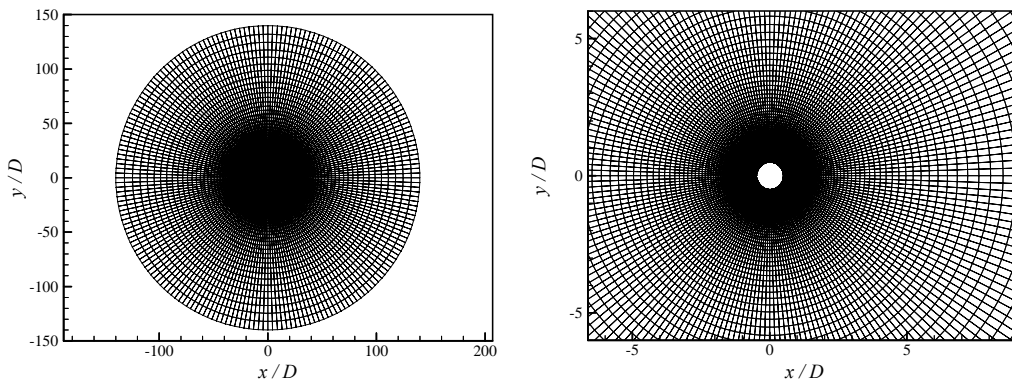
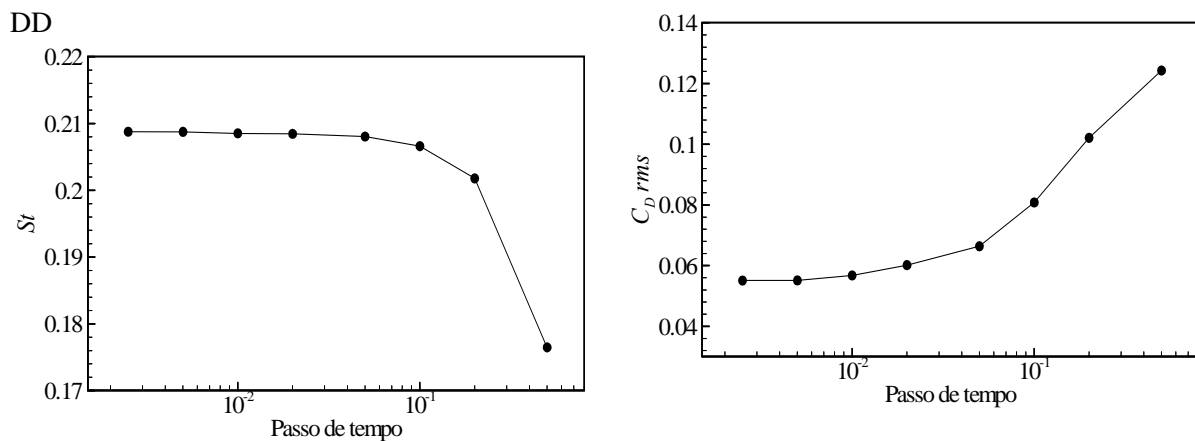


Fig. 1. Malha e extensão do domínio computacional,  $L_D=120D$ .

Tabela 2. Quantidades fundamentais com a resolução da malha,  $Re=300$ .

Malha	$e/D$	$N_{rad}$	$N_{ang}$	$r$	$St$	$C_D$ medio	$C_D$ rms	$C_L$ rms
1	0.001	155	200	1.06	0.2086	1.3396	0.0543	0.6282
2	0.0002	180	200	1.06	0.2086	1.3396	0.0542	0.6250
3	0.001	282	200	1.03	0.2092	1.3517	0.0553	0.6342
4	0.0002	340	200	1.03	0.2092	1.3518	0.0553	0.6345
5	0.001	282	340	1.03	0.2094	1.3536	0.0562	0.6387
6	0.001	282	400	1.03	0.2094	1.3536	0.0562	0.6387

Fig. 2. Convergência do  $St$  e do  $C_D$  rms com o passo de tempo,  $Re=300$ .

adequada. O passo de tempo não dimensional para as simulações foi de 0.01 e  $L_D=120D$ .

Para a convergência com o passo de tempo, utiliza-se uma malha com 200 e 155 nós nas direcções angular e radial respectivamente, com a distância do primeiro nó a parede  $e/D=0.001$ , um factor de crescimento de 1.06 e a extensão do domínio de cálculo de  $120D$ . A Fig. 2 apresenta os resultados e demonstra que um passo de tempo não dimensional de 0.005 é adaptado pela simulação numérica.

#### 4. ESCOAMENTO ESTACIONÁRIO E SOLUÇÃO ASSIMPTÓTICA

Em regime estacionário, para  $Re < 47$ , a convergência assintótica é analisada para  $Re=20$ . A extensão do domínio de cálculo  $L_D$  varia de  $20D$  até  $4800D$ . O passo de tempo e a resolução da malha são definidos conforme o estudo de convergência realizado na secção precedente. A influência do passo de tempo e da resolução da malha é assim muito reduzida o que permite analisar o erro resultante do efeito de bloqueamento.

Apresentam-se na Fig. 3 o coeficiente de arrasto médio e o coeficiente de pressão de base. A convergência é visualmente observada adoptando uma escala logarítmica. A convergência é muito similar à obtida por Posdziech *et al.* [16]. A diferença entre as soluções assintóticas para o  $C_D$  e o  $C_{p_b}$  é inferior a 0.05% e pode ser atribuída aos próprios métodos e modelos numéricos. Na Fig. 3, o coeficiente de arrasto obtido por vários autores, Fornberg, Henderson, Lange e Yang, é comparado aos presentes resultados. Observa-se um bom acordo relativamente à extensão do domínio de cálculo utilizado nestes diferentes estudos. Apenas o  $C_D$  definido por Park *et al.* [11] é mais pequeno que o esperado. A extensão reduzida do domínio na esteira do cilindro, apenas  $20D$ , pode ser responsável por este resultado.

A Tabela 3 apresenta os valores do coeficiente de arrasto, do coeficiente de pressão de base e do comprimento da zona de recirculação na esteira do cilindro,  $L$ , para diferentes extensões do domínio computacional. O erro em relação à solução assintótica,  $\phi_b$ , é também apresentado nesta tabela e é

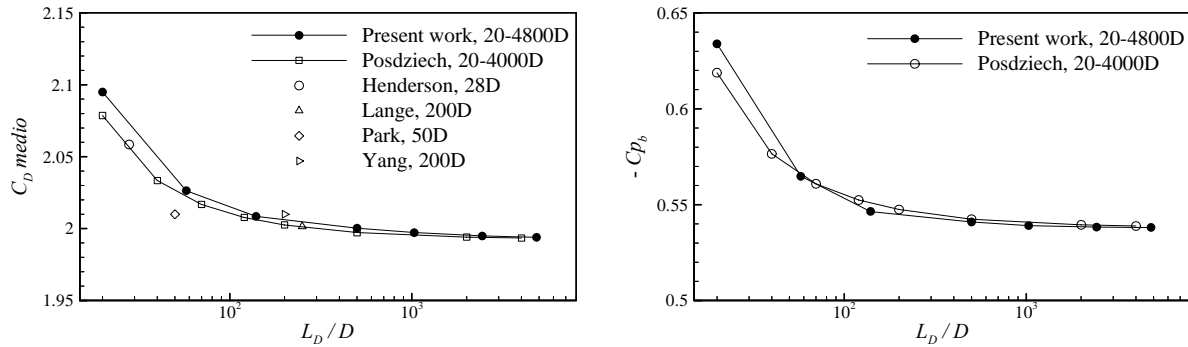


Fig. 3. Coeficiente de arrasto médio e coeficiente de pressão de base em função da extensão do domínio computacional,  $Re=20$ .

Tabela 3. Convergência das quantidades fundamentais com a extensão do domínio computacional,  $Re=20$ .

$L_D/D$	$C_D$	$-C_{p_b}$	$L/D$	E ( $C_D$ )	E ( $-C_{p_b}$ )	E ( $L/D$ )
20	2.09496	0.63388	0.91437	5.07	17.79	1.48
60	2.02636	0.56482	0.90955	1.63	4.96	0.94
140	2.00848	0.54646	0.90475	0.73	1.55	0.41
500	2.00031	0.54113	0.90194	0.32	0.56	0.10
1000	1.99717	0.53912	0.90146	0.16	0.18	0.04
2500	1.99487	0.53831	0.90115	0.05	0.03	0.01
4800	1.99394	0.53813	0.90107	0	0	0

definido em percentagem como:  $E(\phi)=100 |\phi - \phi_0| / \phi_0$ . O comprimento da zona de recirculação é o menos afectado pela extensão do domínio de cálculo: para  $L_D=20D$  o erro é de 1.48% e inferior a 1% a partir de  $L_D=60D$ . Ao contrário, o coeficiente de pressão de base é muito sensível à dimensão do domínio, pois o erro é de 17.8% para  $L_D=20D$ . Torna-se inferior a 1% para uma extensão do domínio superior a  $140D$ . O efeito de bloqueamento é assim claramente identificado o que se confirme pelo erro cometido no coeficiente de arrasto, o qual é de 5.07% para a extensão de  $20D$ .

Assim um bom compromisso entre tempo de cálculo e precisão dos resultados para  $Re=20$  é obtido considerando um erro da ordem de 1%, ou seja uma extensão do domínio computacional um pouco superior a  $140D$ .

## 5. ESCOAMENTO NÃO ESTACIONÁRIO E SOLUÇÃO ASSIMPTÓTICA

Quando  $Re > 47$ , o escoamento é não estacionário e um desprendimento periódico de vórtices é observado na esteira do cilindro. A simulação numérica torna-se mais dispendiosa que a estacionária. Os coeficientes de arrasto e de sustentação e o coeficiente de pressão de base variam no tempo. Assim, as grandezas integrais médias são calculadas. Para os esforços de arrasto e de sustentação, o desvio padrão é também calculado. A simulação é realizada para obter o regime estabelecido e as grandezas médias são estimadas considerando 10 a 15 ciclos neste regime, quer dizer 10 a 15 desprendimentos de vórtices. Quando o regime é estabelecido, e para uma resolução adaptada, os esforços mostram uma variação periódica quase sinusoidal (Fig. 4).

As extensões do domínio de cálculo são similares as utilizadas para o escoamento estacionário. O passo de tempo e a resolução da malha na proximidade do cilindro são aqueles definidos na secção 2. A convergência é representada nas figuras utilizando, como para  $Re=20$ , uma escala logarítmica que permite verificar a tendência das grandezas fundamentais.

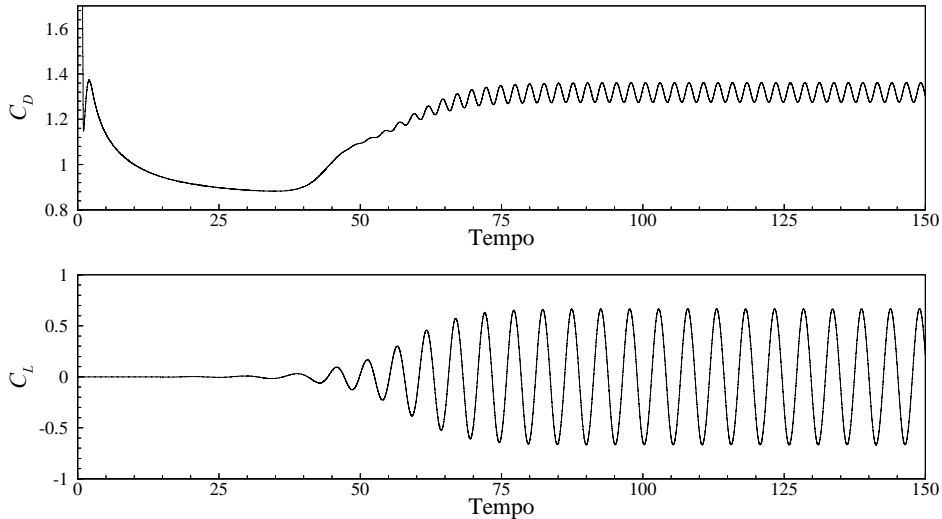


Fig. 4. Coeficiente de arrasto e de sustentação para  $Re=200$  e  $L_D=140D$ .

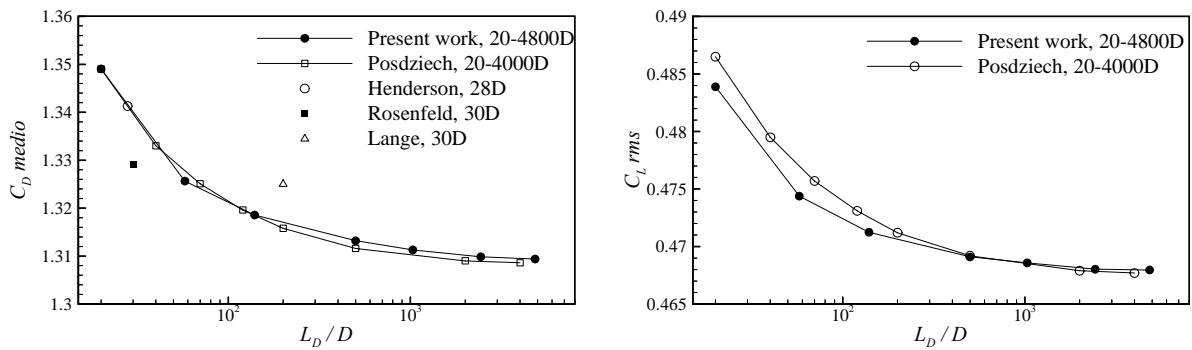


Fig. 5. Coeficiente médio de arrasto e *rms* de sustentação em função da extensão do domínio,  $Re=200$ .

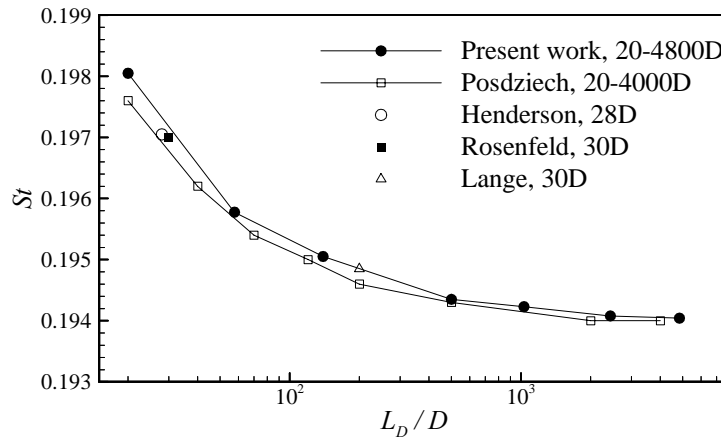


Fig. 6. Número de Strouhal em função da extensão do domínio computacional,  $Re=200$ .

A solução assintótica é procurada para  $Re=200$ . Os resultados são apresentados nas Figs. 5 e 6 e comparados aos obtidos por Podsziech *et al.* [16]. Os presentes resultados estão em excelente concordância com os de Podsziech. A convergência apresenta a mesma tendência. As diferenças entre as respectivas soluções assintóticas são da ordem de 0.05%. Esta diferença é ligada aos próprios modelos numéricos.

O coeficiente de arrasto médio e o número de Strouhal obtidos por Henderson [14], Lange [8] e Rosenfeld [12] são incluídos nas Figs. 5 e 6. Observa-se um muito bom acordo entre todos os resultados para o

Tabela 4. Convergência das quantidades fundamentais com a extensão do domínio computacional,  $Re=200$ .

$L_D/D$	$St$	$C_D$	$C_L rms$	$-Cp_b$	$L/D$	$E(St)$	$E(C_D)$	$E(Cp_b)$	$E(C_L rms)$	$E(L/D)$
20	0.19805	1.34905	0.48389	1.03451	0.84466	2.07	3.03	4.80	3.40	1.34
60	0.19577	1.32566	0.47438	1.00301	0.85185	0.89	1.24	1.61	1.37	0.5
140	0.19505	1.31857	0.47124	0.99380	0.85444	0.52	0.70	0.68	0.70	0.2
500	0.19435	1.31322	0.46910	0.99018	0.85561	0.16	0.29	0.31	0.24	0.06
1000	0.19423	1.31130	0.46858	0.98870	0.85587	0.10	0.15	0.16	0.13	0.03
2500	0.19407	1.30989	0.46803	0.98751	0.85609	0.02	0.04	0.04	0.01	0.00
4800	0.19404	1.30938	0.46796	0.98712	0.85613	0	0	0	0	0

$St$ . O  $C_D$  médio calculado por Henderson esta em acordo com os presentes resultados e de Posdzieh, considerando a extensão do domínio computacional utilizado (ver Tabela 1). No entanto, o  $C_D$  médio relativo as simulações de Lange e Rosenfeld apresentam diferenças significativas, possivelmente devidas à resolução insuficiente para este número de Reynolds e a um estiramento exagerado da malha respectivamente.

Na Tabela 4, apresentam-se os valores e os erros em relação a solução assintótica. A partir de uma extensão de  $140D$  o erro é inferior a 1%. Observa-se que para as extensões mais pequenas o erro do  $Cp_b$  é o maior. O erro ligado ao  $St$  diminui rapidamente pois o erro é apenas de 0.89% para a extensão de  $60D$  em vez que esta ainda de 1.6% para o  $Cp_b$ . Assim usar o número de Strouhal como parâmetro do controlo da convergência ou de validação é crítico e é preferível utilizar o coeficiente de arrasto ou de pressão de base. A convergência do comprimento médio da zona de recirculação na esteira do cilindro,  $L$ , é ainda mais rápida que a do número de Strouhal, e não pode ser considerado como um critério de validação dos modelos numéricos. Para a extensão do domínio computacional de  $60D$ , o erro relativo à solução assintótica é apenas de 0.5%.

## 6. DEPENDÊNCIA DAS GRANDEZAS FUNDAMENTAIS COM O NÚMERO DE REYNOLDS

A dependência das grandezas fundamentais com o número de Reynolds é estudada no intervalo  $10 \leq Re \leq 300$ . Os resultados numéricos obtidos por duas extensões de domínio computacional,  $L_D = 140D$  e  $L_D=4800D$  são analisados e comparados aos valores de outros autores, obtidos usando códigos numéricos ou através medições experimentais.

As grandezas fundamentais,  $St$ ,  $C_D$  médio,  $C_L rms$  e  $Cp_b$ , obtidas para duas extensões do domínio de cálculo,  $L_D=140D$  e  $L_D=4800D$ , a solução assintótica, são comparadas para alguns números de Reynolds na Tabela 5. As diferenças são da ordem de 1.5% até 0.5%. Assim a extensão do domínio computacional com  $L_D = 140D$  representa um bom compromisso entre tempo de cálculo e precisão dos resultados, considerando razoável um erro da ordem de 1%, para esta gama de número de Reynolds.

A Fig. 7 apresenta a dependência do  $C_D$  médio, do número de Strouhal, do  $C_L rms$  e do comprimento médio  $L$  da zona de recirculação na esteira do cilindro para números de Reynolds de 10 até 300. Observa-se um bom acordo geral entre os diversos resultados, tão numéricos que experimentais. No caso do número de Strouhal, as instabilidades tridimensionais que aparecem na proximidade de  $Re = 180$  nos resultados experimentais de Williamson [4] não são detectadas pelas presentes simulações bidimensionais, como é obviou. No entanto, para  $Re \leq 180$ , os presentes resultados numéricos e os experimentais de Williamson apresentam uma concordância quase perfeita. Nota-se apenas uma translação vertical entre os resultados da solução assintótica e os dados experimentais. Esta diferença é atribuída ao efeito de bloqueamento na montagem experimental de Williamson, inexistente nas presentes simulações quando a extensão do domínio computacional é máxima. No caso do  $C_L rms$  os diferentes resultados apresentam também um bom acordo. Os resultados de Park *et al.* [11] e Baranyi *et al.* [15], que utilizam uma extensão do domínio de computacional de  $50D$  e  $40D$  respectivamente, são ligeiramente em cima dos presentes valores obtidos por  $L_D= 140D$  e  $L_D= 4800D$ . Finalmente, o comprimento médio da zona de recirculação é comparado aos



Tabela 5. Comparação das grandezas fundamentais para o domínio de cálculo  $L_D=140D$  e  $L_D=4800D$  e para alguns números de Reynolds.

$Re$	$St$		$-C_{p_b}$		$C_{D\text{ medio}}$		$C_{L\text{ rms}}$	
	140D	4800D	140D	4800D	140D	4800D	140D	4800D
20	-	-	0.529967	0.536827	2.008558	1.995642	-	-
40	-	-	0.454553	0.466288	1.503835	1.497900	-	-
60	0.134914	0.134499	0.656389	0.661889	1.382600	1.376571	0.088577	0.087666
100	0.164093	0.163756	0.766314	0.768548	1.320831	1.315446	0.225498	0.223839
150	0.183011	0.182815	0.880744	0.890977	1.304805	1.301342	0.357488	0.355863
200	0.195256	0.194742	0.993797	1.002201	1.321050	1.313382	0.472559	0.468391
300	0.209342	0.209059	1.178905	1.203838	1.355467	1.349723	0.636721	0.632987

resultados de Park *et al.* [11], de Lima e Silva *et al.* [26] e a alguns dados experimentais [27, 28]. Os resultados de Lima e Silva sobre estimam o comprimento da zona de recirculação mesmo no regime estacionário. É provavelmente ligado ao método numérico utilizado de corpo imerso. Os presentes resultados e os de Park *et al.* [11] são em concordância com os experimentais, na parte do regime estacionário. No regime não estacionário as diferenças com as medições de Nishioka *et al.* [28] são significativas. A razão parece ligada as medições experimentais. É interessante ainda notar que neste regime os resultados de Park *et al.* [11] são muito similares à solução assintótica. A convergência do comprimento da zona de recirculação com a extensão do domínio computacional é rápida, como já foi indicado, o que explica esta similitude para este valor fundamental.

Para uma melhor análise, detalhes do  $C_D$  médio são indicados nas Figs. 8 e 9, relativa ao regime estacionário e não estacionário respectivamente. A escala vertical utilizada nestas duas figuras não é igual. No regime estacionário, o  $C_D$  médio apresenta uma variação ampla conforme o número de Reynolds: entre 1.4 e 2.8 para o número de Reynolds  $Re = 50$  e  $Re = 10$  respectivamente. No regime não estacionário, o  $C_D$  médio varia apenas entre 1.3 e 1.43, o que permite uma melhor visualização dos diversos resultados apresentados. Os resultados são também comparados aos valores numéricos obtidos por outros autores: Baranyi *et al.* [15], Lange [8], Park *et al.* [11] e Yang *et al.* [13]. Observa-se uma translação vertical dos presentes resultados para  $L_D = 140D$ , e dos resultados de Park e Baranyi, que usam uma extensão do domínio computacional de  $50D$  e  $40D$  respectivamente, em relação à solução assintótica. Lange [8] utiliza um domínio com  $L_D = 30D$  para as simulações não estacionárias: conseqüentemente, os seus resultados são mais diferentes que os de Baranyi e Park devida à resolução insuficiente. No regime estacionário, os resultados de Lange e Yang estão em muito boa concordância com a solução para  $L_D = 140D$  e a solução assintótica. Os resultados de Baranyi *et al.* [15] apresentam a mesma translação vertical à solução assintótica que no regime não estacionário.

O número de Strouhal está apresentado em detalhe na Fig. 10. Os resultados numéricos são comparados aos de Baranyi *et al.* [15] e Lange [8] e aos dados experimentais de Williamson [4]. Observa-se um excelente acordo entre os resultados numéricos e os experimentais até  $Re=180$ , onde aparecem as instabilidades tridimensionais. Nota-se apenas uma translação entre a solução assintótica e os dados experimentais. Esta diferença é atribuída ao efeito de bloqueamento na montagem experimental de Williamson [4], inexistente nas presentes simulações quando a extensão do domínio computacional é máxima. Os resultados de Baranyi *et al.* [15] apresentam um muito bom acordo com os presentes resultados assintóticos e os experimentais. A diferença observada é unicamente ligada à extensão do domínio computacional utilizado, de  $40D$ , e se traduz assim por uma translação global dos seus resultados comparando à solução assintótica e também aos dados experimentais. Os resultados de Lange [8] não são fiáveis pois o autor utiliza para as simulações não estacionárias uma extensão do domínio de cálculo de apenas  $30D$ , demasiada pequena.

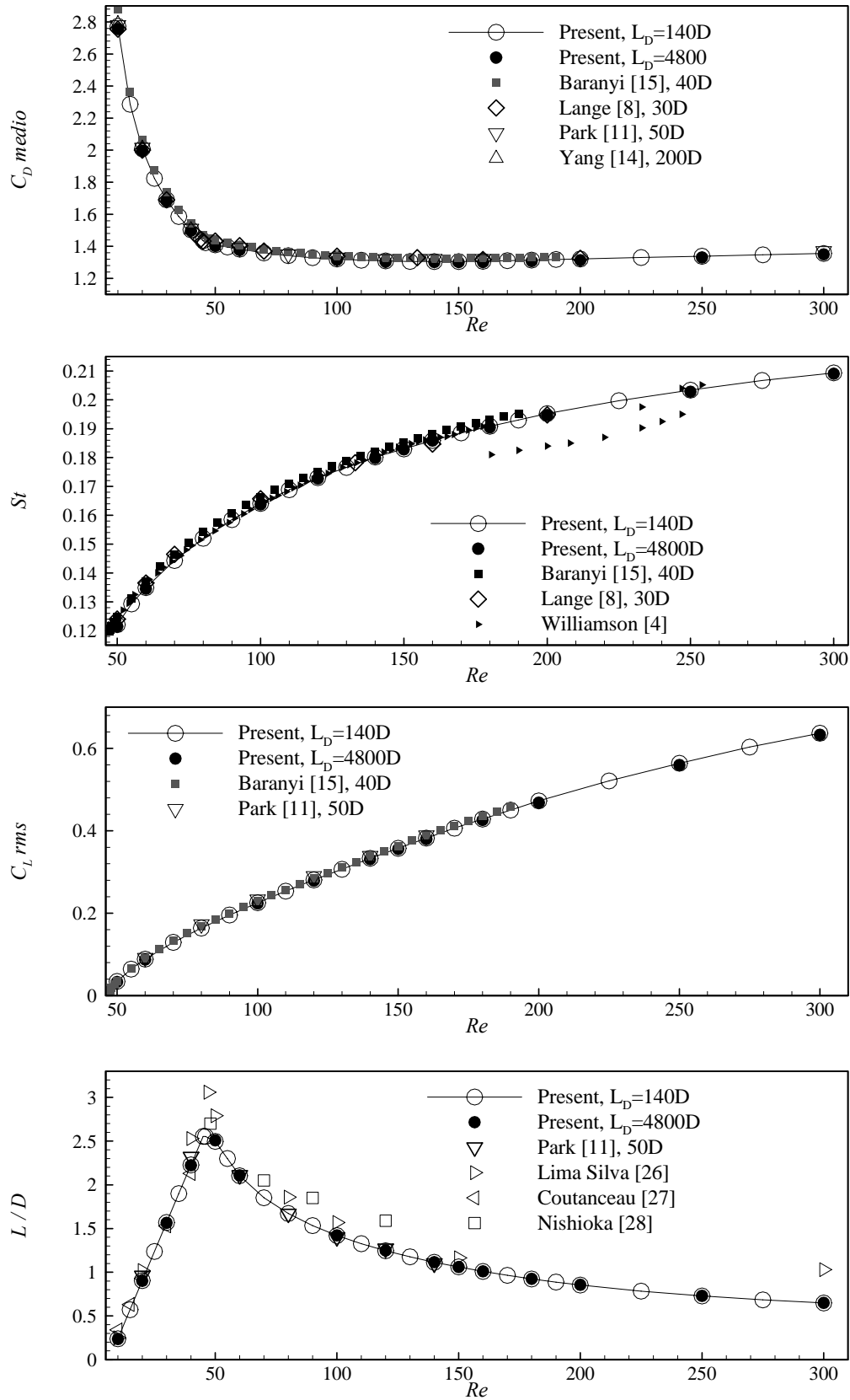


Fig. 7.  $C_D$  médio, número de Strouhal,  $C_L$  rms e comprimento médio da zona de recirculação em função do número de Reynolds.

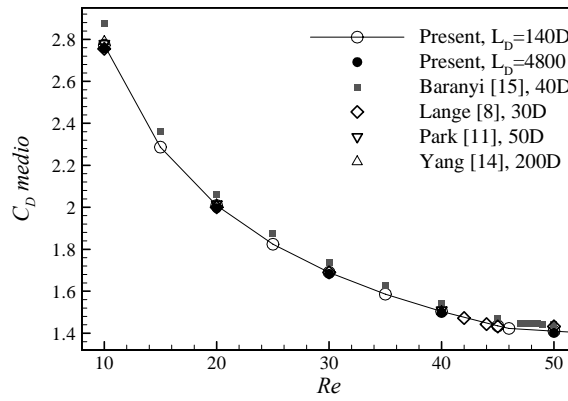


Fig. 8.  $C_D$  em função do número de Reynolds para  $5 \leq Re \leq 50$ , regime estacionário.

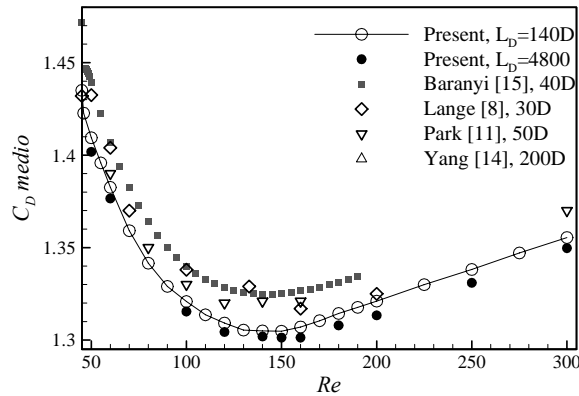


Fig. 9.  $C_D$  médio em função do número de Reynolds para  $50 \leq Re \leq 300$ , regime não estacionário.

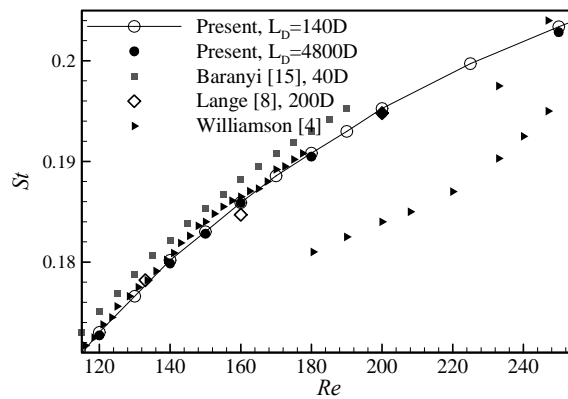


Fig. 10.  $St$  em função do número de Reynolds para  $120 \leq Re \leq 250$ .

## 7. CONCLUSÕES

No presente artigo foi simulado o escoamento em torno de um cilindro circular. O efeito do bloqueamento na convergência da solução foi estudado, considerando extensões do domínio computacional de 20 até 4800 diâmetro de cilindro. A convergência assintótica foi analisada no regime estacionário e não estacionário. A resolução da malha e do passo de tempo foram definidos para reduzir os erros ligados a estas aproximações.

Os resultados mostram que usar o número de Strouhal ou o comprimento da zona de recirculação como parâmetro do controlo da convergência ou de validação é crítico. O facto de o número de Strouhal apresentar um nível de erro não significa que as outras quantidades fundamentais estejam na mesma gama de erro. Ainda mais, uma resolução insuficiente pode diminuir o número de Strouhal em vez que um domínio computacional pequeno aumenta-lo. Os dois efeitos podem compensar-se um com o outro. Assim a comparação do número de Strouhal com dados da literatura não assegura a independência da solução com a malha. Os coeficientes de arrasto e de pressão de base são consideravelmente mais influenciados pelo efeito de bloqueamento e da resolução e devem estar preferidos para verificar a independência da solução numérica com o domínio computacional. Em todos os casos, a melhor opção consiste analisar e comparar diferentes grandezas fundamentais para definir a convergência da solução de qualquer problema.

Os presentes resultados numéricos e os de Podsziech, obtidos através métodos numéricos totalmente diferente, apresentam uma perfeita concordância, com um erro relativo da ordem de 0.05%. Os dois modelos numéricos são efectivamente baseados nas equações de Navier-Stokes, mas utilizam dois métodos de resolução diferentes: o presente código, *FullCReM*, é baseado num método de resolução totalmente acoplado das equações e um método de volumes finitos, resolvendo a equação de continuidade na sua forma original, em vez que um método espectral é utilizado por Podsziech. A excelente concordância entre as soluções assintóticas confirma a consistência dos dois métodos numéricos e a validação destes códigos.

## REFERÊNCIAS

- [1] Roshko, A., "On the development of turbulent wakes from vortex streets", *Naca report 1191* (1954)
- [2] Tritton, D.J., "Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers", *Journal of Fluid Mechanics*, **6**, 547-567 (1959)
- [3] Williamson, C.H.K., "Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low reynolds numbers", *Journal of Fluid Mechanics*, **206**, 579-627 (1989)
- [4] Williamson, C.H.K., "Vortex dynamics in the cylinder wake", *Annual Review of Fluid Mechanics*, **28**, 477-539 (1996)
- [5] Williamson, C.H.K., Roshko, A., "Measurements of base pressure in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers", *Zeitschrift Flugwissenschaften und Weltraumforschung*, **14**, 38-46 (1990)
- [6] Norberg, C., "An experimental investigation of the flow around a circular cylinder: influence of aspect ratio", *Journal of Fluid Mechanics*, **258**, 287-316 (1994)
- [7] Behr, M., Hastriter, D., Mittal, S., Tezduyar, T.E., "Incompressible flow past a circular cylinder: dependence of the computed flow field on the location of the lateral boundaries", *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, **123**, 309-316 (1995)
- [8] Lange, C., Numerical predictions of heat and momentum transfer from a cylinder in crossflow with implications to hot-wire anemometry, Phd Thesis, University Erlangen-Nürnberg (1997)
- [9] Kravchenko, A.G., Moin, P., Shariff, K., "B-spline method and zonal grids for simulations of complex turbulent flows", *Journal of Computational Physics*, **151**, 757-789 (1999)
- [10] Franke, R., Rodi, W., Schonung, B., "Numerical claculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **35**, 237-275 (1990)
- [11] Park, J., Kwon, K., Choi, H., "Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 160", *KSME international Journal*, **12**, 1200-1205 (1998)
- [12] Rosenfeld, M., "Grid refinement test of a time periodic flow over bluff bodies", *Computer and Fluids*, **23**, 693-709 (1994)
- [13] Yang, H.H., Seymour, B.R., Shizgal, B.D., "A Chebyshev pseudospectral multi-domain method for steady flow past a cylinder up to Re=50", *Computer and Fluids*, **23**, 829-851 (1994)
- [14] Henderson, R.D., "Details of the drag curve near the the onset of vortex shedding", *Physics of Fluids*, **7**, 2102-2114 (1995)
- [15] Baranyi, L., Lewis, R.I., "Comparison of a grid-based CFD method and vortex dynamics predictions of low Reynolds number cylinder flows", *Aeronautical Journal*, **110**, 63-71 (2006)

- [16] Posdziech, O., Grundmann, R., “A systematic approach to the numerical calculation of fundamental quantities of two-dimensional flow over a circular cylinder”, *Journal Fluids and Structures*, **23**, 479-499 (2007)
- [17] Didier, E., Borges, A.R.J., “Numerical predictions of low Reynolds number flow over an oscillating circular cylinder”, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, **11**(3), 3-18 (2007)
- [18] Didier, E., “Flow simulation over two circular cylinders in tandem”, *Comptes Rendus Mécanique*, **335**(11), 696-701 (2007)
- [19] Didier, E., “Simulação numérica de escoamentos com superfície livre”, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, **11**(3), 3-18 (2007)
- [20] Eça, L., Conde, J.P., Didier, E., “Verificação de três codigos numéricos no calculo do escoamento permanente e incompressível num cavidade”, *Proc. Métodos Numéricos e Computacional e Engenharia CMNE/CILAMCE*, Porto, 13-15 (2007)
- [21] Issa, R.I., “Solution of the implicit discretized fluid flow equations by operatorsplitting”, *Journal of Computational Physics*, **62**, 40-65 (1986)
- [22] Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw Hill (1980)
- [23] Khosla, P., Rubin, S., “A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme”, *Computers Fluids*, **2**, 207-209 (1974)
- [24] Song, B., Liu, G.R., Lam, K.Y., Amono, R.S., “On a higher-order bounded discretization scheme”, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **32**, 881-897 (2000)
- [25] Sleijpen, G.L.G., Van der Vorst, H.A., “Maintaining convergence properties of BiCGSTAB methods in finite precision arithmetic”, *Numer. Algorithms*, **10**, 203-223 (1995)
- [26] Lima e Silva, A.L.F., Siveira-Neto, A., Damasceno, J.J.R., “Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method”, *Journal of Computational Physics*, **189**, 351-370 (2003)
- [27] Coutanceau, M., Bouard, R., “Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, **79**(2), 231-256 (1977)
- [28] Nishioka, M., Sato, H., “Mechanism of determination of the shedding frequency of vortices behind a cylinder at low Reynolds numbers”, *Journal of Fluid Mechanics*, **89**(1), 49-60 (1978)

## ASYMPTOTIC CONVERGENCE OF FUNDAMENTAL QUANTITIES OF FLOW OVER A CIRCULAR CYLINDER

**Abstract** – Fluid flow past a circular cylinder for Reynolds number from 10 to 300 is investigated using a fully coupled resolution method, resolving simultaneously all discrete equations, without any transformation of the continuity equation (i.e. without reconstruction of a pressure equation). The study of drag and lift forces, base pressure and Strouhal number is performed in laminar regime and bi-dimensional flow depending the computational domain dimension. Asymptotic results are obtained increasing the computational domain dimensions from 20 to 4800 cylinder diameters. It is well established that in contrast to the Strouhal number, the base pressure and efforts are much more dependent on the resolution of the mesh and further the size of the computational domain.

**Keywords** – Asymptotic solution, Fully coupled resolution method, Circular cylinder, No stationary bi-dimensional laminar flow.