



Física de Fluidos Fisiológicos

---

## **TRABAJO FIN DE MASTER**

**Modelos 1D de la circulación en el árbol arterial y su  
simulación numérica**

**September 2016**

**ALUMNO:** RAMÓN YEPES SEGOVIA

**PROFESOR SUPERVISOR:** DON MANUEL ARIAS ZUGASTI

## Contenido

Resumen.....	5
Abstract .....	7
1 Introducción .....	8
2 Fisiología Cardiovascular .....	9
2.1 El corazón .....	11
2.2 El árbol arterial.....	14
2.3 La microcirculación.....	19
2.4 El sistema venoso .....	20
2.5 La sangre .....	20
3 Modelos de Presión y Flujo en el árbol arterial. ....	22
3.1 Modelos 0D (Windkessel) .....	23
3.1.1 Modelo WK2.....	25
3.1.2 Modelo WK3.....	28
3.2 Flujo pulsante en tubos rígidos, solución de Womersley .....	32
3.3 Comportamiento en función de la frecuencia .....	36
3.4 Limitaciones del modelo de Womersley .....	37
4 Modelos 1D del flujo en grandes arterias .....	39
4.1 La ecuación de continuidad.....	40
4.2 La Ecuación de Conservación del Momento .....	41
4.3 Ecuación de estado .....	43
4.4 Sistema de ecuaciones hiperbólicas de primer orden .....	46
4.5 Ecuaciones adimensionales de continuidad y momento.....	49
5 Resolución Numérica por el método de las características .....	50
5.1 Definición de la malla.....	52
5.2 Condición de contorno en bifurcaciones .....	52
5.3 Cálculo de puntos interiores .....	53
5.4 Condición de contorno de flujo de entrada .....	54
5.5 Condiciones de contorno de entrada y salida.....	55
6 Cálculo del modelo 1D por el método de Lax-Wendroff .....	56
6.1 Formulación del modelo y notación.....	56
6.2 Primera etapa del esquema Lax-Wendroff .....	58
6.3 Segunda etapa del esquema Lax-Wendroff .....	58

7	Resultados .....	59
7.1	Ejemplos de flujos calculados con el algoritmo de curvas características .....	61
7.1.1	CASO 1 .....	61
7.1.2	CASO 2 .....	63
7.1.3	CASO 3 .....	65
7.1.4	CASO 4 .....	67
7.2	Ejemplos de flujos calculados con el algoritmo de diferencias explícitas de Lax-Wendroffs .....	69
7.2.1	CASO 1 .....	69
7.2.2	CASO 2 .....	72
7.2.3	Flujo de entrada 2 .....	74
7.2.4	CASO 3 .....	75
7.2.5	Caso 4 .....	78
7.2.6	CASO 5 .....	81
7.2.7	CASO 6 .....	84
7.2.8	CASO 7 .....	86
7.2.9	Caso 8 .....	89
7.2.10	CASO 9 .....	91
7.2.11	CASO 10 .....	93
8	Implementación en Matlab .....	95
8.1	Función getmesh .....	95
8.2	Función getq (Cálculo del flujo de entrada) .....	96
8.3	Función gammam .....	96
8.4	Función gammap .....	96
8.5	Función qQAQ .....	96
8.6	Función C123 .....	97
8.7	Función getEh .....	97
8.8	Función eleva .....	97
9	Conclusiones .....	97
10	Posibles ampliaciones del presente trabajo .....	99
11	Bibliografía .....	99
12	ANEXO Código Matlab .....	102
12.1	Modelo Windkessel con 2 elementos .....	102
12.2	Modelo Windkessel con 3 elementos resuelto por Kirchoff .....	103

12.3	Windkessel de 3 elementos implementado con RK-4 .....	104
12.4	Modelo de Wormesley .....	105
12.5	Pseudocódigo del algoritmo de curvas características .....	106
12.6	Pseudocódigo del algoritmo Lax-Wendroff .....	107
12.7	Código Matlab del Algoritmo de curvas características del modelo 1D .....	108
12.7.1	Función getmesh (Definición de la malla).....	111
12.7.2	Función gammam ( Curva característica negativa ) .....	112
12.7.3	Función getq (Cálculo del flujo de entrada inicial).....	113
12.7.4	Función pfromA (Calcula la presión correspondiente a un área A) .....	113
12.7.5	Función gammam – (Curva característica negativa) .....	114
12.7.6	Función gammamap – (Curva característica positiva) .....	115
12.7.7	Función qQAQ – (Cálculo de flujos y áreas en puntos interiores).....	116
12.7.8	Función C123 (Ecuación de estado de la pared arterial).....	118
12.7.9	Función Windk3 ( Windkessel 3 como condición del flujo de salida .....	118
12.8	Código Matlab del algoritmo de Lax-Wendroff del modelo 1D .....	119
12.8.1	Programa principal del método de Lax-Wendroff .....	119
12.8.2	Función eleva ( Aplica las ecuaciones 6.2-1 y 6.3-1 ) .....	121
12.8.3	Función FR2 (Calcula el término flujo de la EDP para la variable q).....	121
12.8.4	Función FS2 (Calcula el término fuente de la EDP para la variable q) .....	121
12.8.5	función getmeshLax (especifica malla inicial y el flujo de entada en forma adimensional).....	122
12.8.6	Función dibufluj ( Dibujo de flujos en distintos instantes en toda la arteria) ..	123
12.8.7	Función dibuwav ( Dibujo de flujos en distintos puntos a lo largo del tiempo) 124	

## Resumen

El objetivo de este trabajo es la descripción e implementación de modelos 0D y 1D para el modelado de las ondas de flujo y presión en las arterias. Debe subrayarse como se indica en [31] que las longitudes de onda del pulso arterial son lo suficientemente largas como para justificar matemáticamente el uso de modelos 1D en lugar de modelos 3D cuando se requiere una evaluación global del flujo sanguíneo, de hecho, estudios como [11, 32] han demostrado la capacidad de los modelos 1D para capturar las principales características de las ondas de presión y de flujo en las grandes arterias. En [31] se confía en la aplicación de los modelos 1D a problemas clínicamente relevantes y también como instrumentos para proporcionar condiciones de contorno para modelos 3D. La relevancia clínica de los modelos 1D requiere la disponibilidad de datos sobre la geometría de las arterias, la velocidad de la onda de pulso local, y las condiciones de contorno de la red arterial del paciente específico que se desea simular, y ahora la tomografía por ordenador, la resonancia magnética y la ecografía son capaces de proporcionar esta información sobre la geometría de las arterias de un paciente específico, así como información más limitada de la velocidad local de las ondas, lo que facilita el uso de modelos 1D de redes arteriales de pacientes específicos.

En el trabajo, se consideran los aspectos fundamentales de la pulsatilidad del flujo sanguíneo causada por el latido del corazón y la deformabilidad de las paredes arteriales por las fuerzas viscosas del flujo, pero no se trata en absoluto ni el carácter activo de las paredes arteriales que provoca respuestas biológicas más complejas que las meras respuestas mecánicas pasivas ni la remodelación biológica que, a más largo plazo, pueden provocar las tensiones viscosas y que están bien correlacionadas con ciertas patologías como la arterioesclerosis [26].

En el trabajo se describen en primer lugar, y muy brevemente los elementos del sistema cardiovascular, subrayando los aspectos más significativos relacionados con la mecánica de fluidos. A continuación, se presenta un par de ejemplos de modelos tipo Windkessel 0D (WK), con dos y tres elementos, que relacionan el flujo y las presiones en el árbol arterial. Estos modelos WK no son aplicables para el análisis de las ondas de presión y flujo causadas en el árbol arterial por la presión pulsante del corazón. En este trabajo se utiliza posteriormente un modelo WK3 (3 elementos), como condición de contorno de salida, para modelar la microcirculación al final de cada arteria. A continuación, se describe e implementa en MATLAB el modelo de Womersley (1959), que analiza la distribución de velocidades axiales en función del radio, en tubos de paredes rígidas y simetría axial, y que supone una extensión sencilla del modelo de Poiseuille, capaz de analizar el comportamiento de los flujos pulsantes en régimen laminar. La teoría de Womersley se basa en la aplicación del principio de superposición de las respuestas a los diferentes armónicos del gradiente de presión, lo cual es posible por el comportamiento lineal de la ecuación de NS en una geometría con simetría axial en la que se anula el término advectivo no lineal de la ecuación. El modelo de Womersley se puede extender a flujos en paredes flexibles, siempre manteniendo simetría axial, como se ha hecho en algunas investigaciones recientes [27].

Finalmente se describe e implementa en MATLAB, ver Anexo, un modelo 1D de las ecuaciones de Navier Stokes (NS), extensible a un modelo completo del árbol arterial. Este modelo se ha implementado sin utilizar ningún software de terceros utilizando únicamente el lenguaje de programación Matlab. Este modelo resuelve la versión 1D de las ecuaciones de NS y de la

ecuación de continuidad en las variables flujo medio y presión, consideradas como valores medios constantes en cada sección del tubo. El modelo presentado coincide esencialmente con los modelos 1D presentados en las referencias [1,2,6,7,8 y 11]. El modelo describe cada arteria como un cilindro con radio decreciente cuyas paredes se comportan desde el punto de vista elástico con un módulo de Young creciente, es decir mayor rigidez, a medida que se reduce el radio del tubo.

Debido a la limitación de tiempo para la realización del trabajo, el código MATLAB desarrollado contempla sólo un segmento de arteria acoplado a la entrada con un flujo pulsante que modela el corazón y acoplado a la salida con un modelo 0D WK", que representa el comportamiento flujo/presión a la salida del segmento de arteria.

En este modelo, el flujo pulsante de entrada en la aorta aparece como una condición de contorno de entrada y el modelo permite modelar bifurcaciones arteriales hasta un determinado nivel. Más allá de ese nivel el modelo 1D se acopla con un modelo simplificado de la microcirculación implementado con un modelo WK3 ajustado en función de las características de la microcirculación existente al final de la arteria. El comportamiento de estos modelos WK3, que simulan la microcirculación al final de cada arteria representan la condición de contorno de salida para las ecuaciones de NS.

Se han implementado en este trabajo dos algoritmos para resolver el modelo 1D:

- El primero presenta una convergencia de primer orden y está basado en el cálculo de las curvas características del sistema hiperbólico constituido por la ecuación de NS y de continuidad complementadas con la ecuación de estado que define las propiedades elásticas de la pared arterial. A lo largo de cada curva característica el sistema EDP se convierte en un sistema EDO más fácil de integrar. Para calcular el flujo y presión en un punto  $(x, t)$  determinado, se utilizan las curvas características que llegan al punto en cuestión, procedentes de su derecha y procedentes de su izquierda. Los valores de flujo y presión compatibles para ambas curvas características determinan el valor de flujo y presión en el punto  $(x, t)$ .
- El segundo, que posee convergencia de segundo orden, utiliza el método de Lax-Wendroff de diferencias finitas explícitas [35], y se basa en calcular los valores de las variables en cada paso de tiempo en dos etapas. Es decir, se calculan los valores de las variables en el instante  $t_n$ , a partir de los valores calculados en un paso intermedio anterior para  $t_{n-1/2}$  y  $t_{n-1}$ , de modo que el esquema global presenta propiedades de convergencia de segundo orden.

Ambos métodos numéricos utilizan una malla cartesiana regular con celdas de tamaño constante  $(\Delta x, \Delta t)$  suficientemente pequeñas para reducir los errores de discretización de las ecuaciones y para cumplir la condición de convergencia CFL (Courant-Friedrichs-Levy).

## Abstract

The aim of this work is the description and implementation of 0D and 1D models for modeling of flow and pressure waves in the arteries. It should be stressed as described in [31] that the wavelengths of the arterial pulse are long enough to mathematically justify the use of 1D models instead of 3D models when an overall assessment of blood flow is required, in fact, studies as [11, 32] have demonstrated the ability of 1D models to capture the main characteristics of the pressure waves and flow in large arteries. In [31] it is proposed the applicability of 1D models to clinically relevant problems as well as instruments to provide boundary conditions for 3D models. However, the clinical relevance of the 1D models requires the availability of data on the geometry of the arteries, the wave velocity of local pulse, and the boundary conditions of the arterial network for the specific patient to be simulated and now the computer tomography, MRI and ultrasound are becoming able to provide this information on the geometry of the arteries of a specific patient as well as more limited information on local velocity of the waves, which facilitates the use of 1D models for arterial networks of specific patients.

In this paper, the fundamental aspects of the pulsatility of blood flow caused by the heartbeat and the deformability of the arterial walls by viscous forces caused by the flow, are considered, but are not considered, the active character of the arterial walls causing responses much more complex than the mere passive mechanical ones, nor the longer term biological remodelling processes of the arterial wall, caused by the viscous stress which are well correlated with certain diseases such as arteriosclerosis [26].

In the work it is described first, and very briefly the elements of the cardiovascular system, highlighting the most significant aspects of fluid mechanics. Then a couple of examples of Windkessel type 0D (WK) models, with two and three elements, linking the flow and pressure in the arterial tree are presented. These WK models are not applicable for the analysis of flow and pressure waves caused in the arterial tree by the pulsating pressure of the heart. This paper then uses a WK3 (3 elements) model, to model the microcirculation at the end of each artery. Next, it is described and implemented in MATLAB the Womersley model (1959), which analyses the distribution of longitudinal velocities as a function of radius, in tubes with rigid walls and axial symmetry, which is a simple extension of the model Poiseuille capable to analyse the behaviour of pulsating flows in laminar regime. The theory of Womersley is based on the principle of superposition of the responses to the various harmonics of the pressure gradient, which is possible by the linear behaviour of the equation NS in a geometry with axial symmetry which cancels the nonlinear advective term of the equation. Womersley model can be extended to flows on tubes with flexible walls, while maintaining axial symmetry, as has been done in recent research [27].

Finally, it is described and implemented, see Annex, in MATLAB one 1D model of the Navier Stokes equations (NS), applicable to modelling the complete arterial tree. This model has been implemented from scratch, without using any third party tool, just the Matlab programming system. This model solves the 1D version of NS equations and continuity equation in the variables average flow and pressure, regarded as constants for each tube section. The model essentially follows the simplifications presented in references [1,2,6,7,8 and 11]. The model

describes each artery as a cylinder of elastic walls with decreasing radius and with an increasing modulus of Young as the radius of the tube shrinks.

Due to the limitation of time for the completion of this work, the MATLAB code developed includes only a model for one segment of artery coupled at the entrance with a pulsating inflow modelling the heart and coupled to the output with a 0D WK 3 model representing the outflow behaviour of the microcirculation at the end of the artery segment.

In this model, the input pulsating inflow in the aorta appears as a boundary condition. The model supports modelling arterial bifurcations up to a certain level. At the end of the last level, the 1D model is coupled with a simplified 0D model of the microcirculation represented as a WK3 subsystem. The behaviour of these WK3 models of the microcirculation at the end of each artery represent the outflow boundary condition for the NS equations for the arterial tree.

I have implemented in this paper two algorithms to solve the 1D model:

- The first algorithm presents a first order convergence and is based on the calculation of characteristic curves of the hyperbolic system of equations consisting of NS and continuity complemented by the state equation which defines the elastic properties of the arterial wall. Along each characteristic curve the PDE system becomes an ODE system easier to integrate. To calculate the flow and pressure at a certain point  $(x, t)$ , the characteristic curves reaching the point in question are used, from their right and from their left. Values for flow and pressure compatible with both characteristics curves determine the value of flow and pressure at point  $(x, t)$ .
- The second, which has convergence of second order, uses the Lax-Wendroff explicit method [35] of finite differences, and is based on calculating the values of the variables at each time step in two stages. That is, the values of the variables at time  $t_n$  are calculated from the values calculated in previous intermediate steps for times  $t_{n-1/2}$  and  $t_{n-1}$ . The two steps together provide a scheme which globally has second order convergence properties [35].

Both numerical methods use a regular Cartesian mesh with constant size cells  $(\Delta x, \Delta t)$ , and with small enough cell dimensions  $(\Delta x, \Delta t)$  to reduce the discretization errors of the equations and to meet the convergence CFL (Courant -Friedrichs-Levy) condition.

## 1 Introducción

En este trabajo se proporciona una descripción matemática y física detallada de un modelo 1D de la circulación arterial. Los modelos 1D estudian el comportamiento de la presión, del flujo, sanguíneo y de las tensiones viscosas a lo largo del árbol arterial, pero lo hacen analizando sus valores medios, sin entrar en la distribución de velocidades presiones y tensiones en cada punto de cada sección transversal del vaso **Fig. 2.1-1**.

Los modelos 1D son los más adecuados para el estudio de las ondas de presión y flujo en el árbol arterial que son fenómenos con especial importancia en el desarrollo de trastornos cardiovasculares [26]. En algunas enfermedades cardiovasculares, como por ejemplo las

relativas las válvulas cardíacas, las características locales del flujo sanguíneo juegan un papel determinante en su desarrollo y progresión y por lo tanto el flujo debe ser estudiado con todo detalle usando complejos modelos 3D que resuelven el conjunto completo de ecuaciones de interacción fluido–estructura (FSI) en 3D, constituidas por la ecuación de continuidad, las ecuaciones NS y las ecuaciones que definen el comportamiento elástico del sistema circulatorio. Sin embargo, hay situaciones fisiológicas y patologías de interés clínico para las cuales no son importantes los detalles locales del flujo en 3D, sino que lo importante es la distribución de la presión y las ondas de flujo en el árbol arterial [7]. El ejemplo más famoso es la hipertensión sistólica, que resulta de la interacción entre el bombeo cardíaco y el sistema arterial (carga) y en la que son determinantes importantes las ondas de presión reflejadas causadas por el aumento de la rigidez arterial con la edad, por lo que es importante comprender y ser capaz de analizar las ondas de presión y flujo en el árbol arterial.

El conocimiento de la presión y las velocidades de flujo en el árbol arterial también es indispensable en el diagnóstico y la planificación de tratamientos [26]. La modelización del sistema cardiovascular es una forma de adquirir este conocimiento [7] y los modelos 1D son adecuados para este fin ya que representan un buen equilibrio entre complejidad, rapidez y realismo y tienen la capacidad de ser utilizados como herramientas versátiles para la simulación de una gran variedad de fenómenos fisiológicos y patológicos, y pueden utilizarse para apoyar la toma de decisiones clínicas y la planificación quirúrgica [7].

Un objetivo principal de los modelos 1D es el estudio de la propagación de la onda de presión y flujo sanguíneo arterial cuya comprensión pueden ayudar a los investigadores y clínicos a obtener una visión más profunda del funcionamiento del sistema cardiovascular y finalmente a desarrollar mejores herramientas de diagnóstico y posiblemente nuevos tratamientos más eficaces.

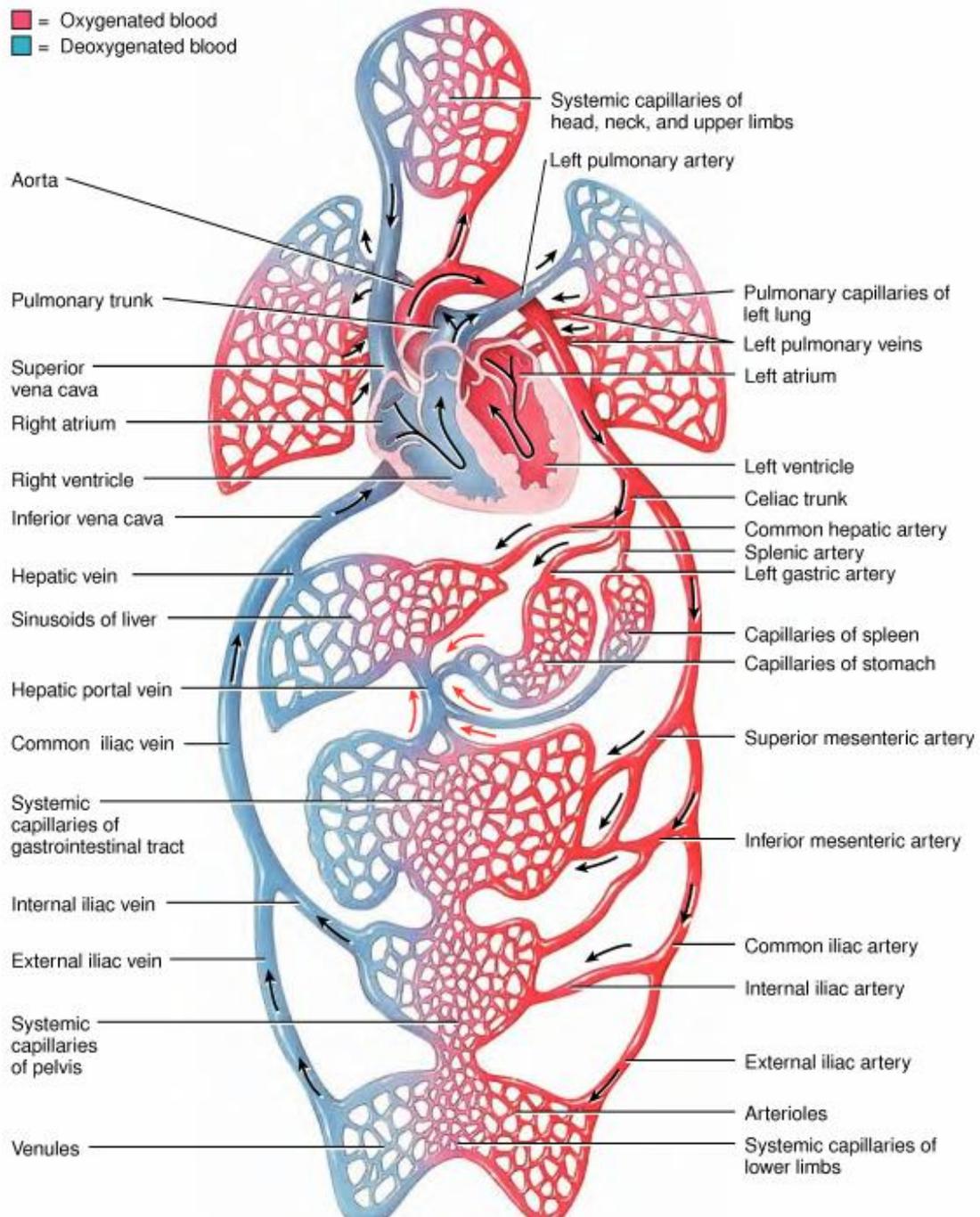
El modelo que se presenta en este trabajo, sigue las simplificaciones de los modelos presentados en [1,2, 5, 6 y 11], y se basa en la formulación de las ecuaciones de NS, de continuidad y la ecuación de estado de la pared arterial, para variables que representan los valores medios del flujo y la presión en cada sección de la arteria, de esta manera se llega a un modelo 1D, cuyos parámetros se podrían llegar a ajustar para reproducir el flujo del pulso arterial en condiciones fisiológicas.

## 2 Fisiología Cardiovascular

En este apartado se describen brevemente los elementos del sistema cardiovascular subrayando los aspectos más significativos relacionados con la mecánica de fluidos. El sistema cardiovascular proporciona transporte convectivo del calor y de la sangre junto con los gases, células, hormonas y otras partículas que contiene. La **Fig. 2.1-1** [30] muestra la estructura global del sistema circulatorio.

El transporte de la sangre requiere una presión de perfusión bastante elevada debido a que la microcirculación presenta una alta resistencia al flujo (en el modelo de Poiseuille, la resistencia es inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio). Alcanzar niveles adecuados de perfusión sin dañar al corazón sólo es posible debido a la elasticidad del árbol arterial, que transforma el flujo de entrada en la aorta, discontinuo (abierto/cerrado), en un flujo también

pulsante en el árbol arterial, pero más suave a medida que disminuye la sección de las arterias, y en un flujo prácticamente continuo a nivel capilar. La aorta y algunos de los vasos proximales grandes, almacenan alrededor del 50% del volumen de eyección del ventrículo izquierdo durante la sístole. En la diástole, las fuerzas elásticas de la pared aórtica transmiten el 50% del volumen de la circulación periférica, creando así un flujo de sangre periférica casi continuo. Esta interacción sistólica-diastólica representa la función Windkessel (WK) [15,22]. El efecto WK nos enseña [15] que los principales parámetros del sistema arterial son: la resistencia periférica, la compliancia aórtica total y la resistencia aórtica.



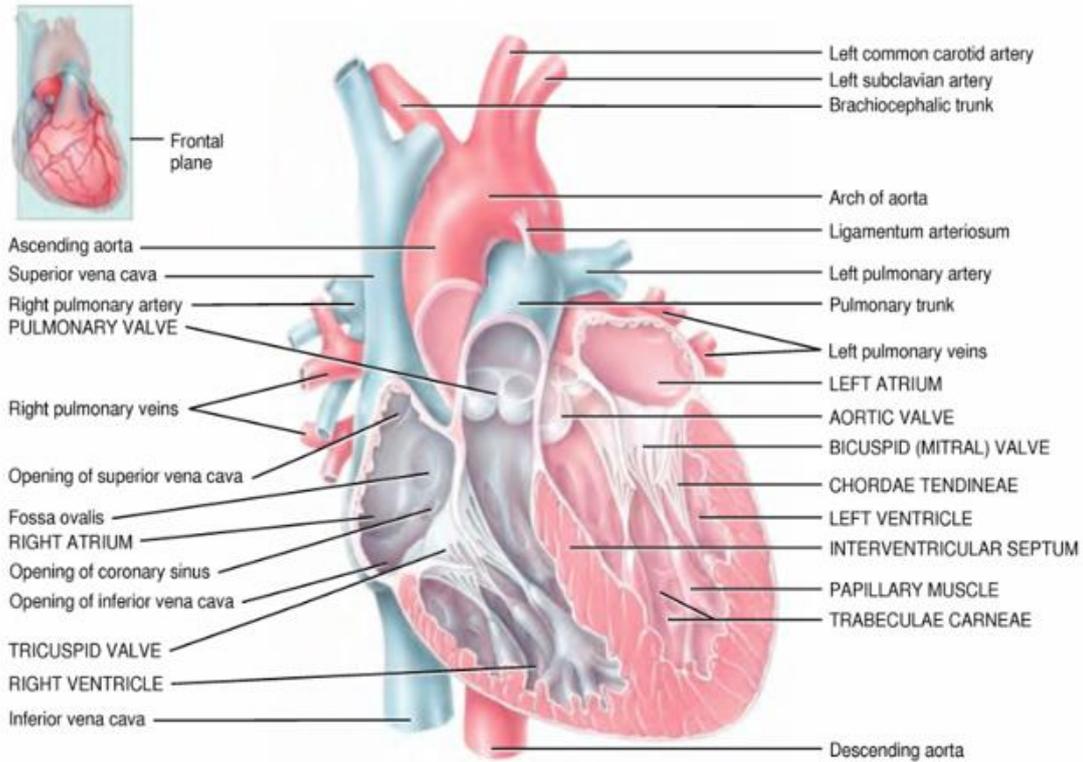
**Fig. 2.1-1. Estructura del sistema circulatorio que muestra el corazón como una bomba que impulsa la sangre a través de la circulación pulmonar, la circulación sistémica, el árbol de arterias que se bifurcan, la micro circulación en los tejidos y el sistema de retorno venoso. Tomada de [30].**

## 2.1 El corazón

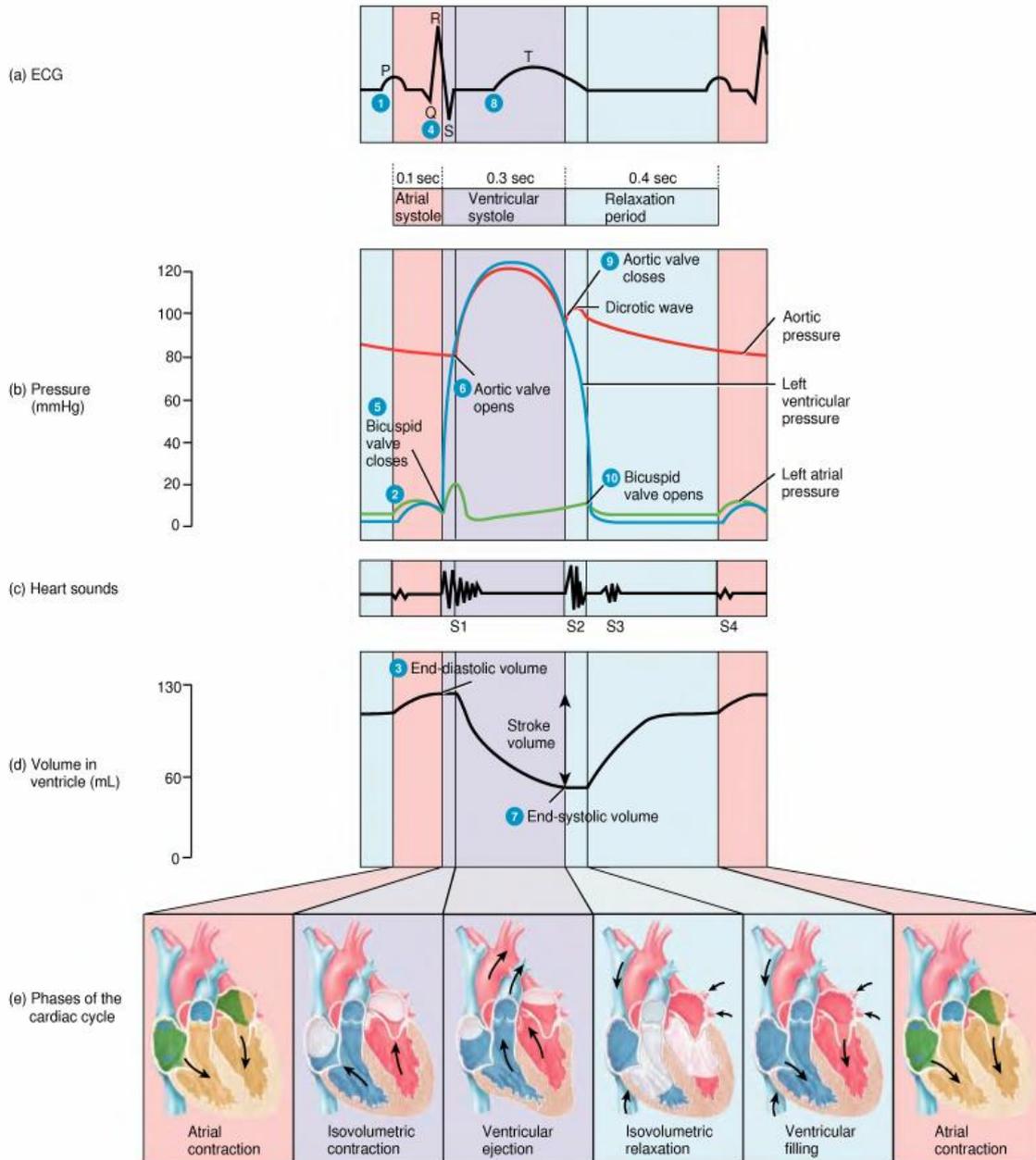
El corazón (Fig. 2.1-1 [30]) es esencialmente una bomba formada por 4 cámaras que impulsa la sangre a través del sistema circulatorio. Las Fig. 2.1-2 [30] y Fig. 2.1-3 [7] muestran la presión y

el flujo en la aorta y en el ventrículo izquierdo en función del tiempo en condiciones fisiológicas.

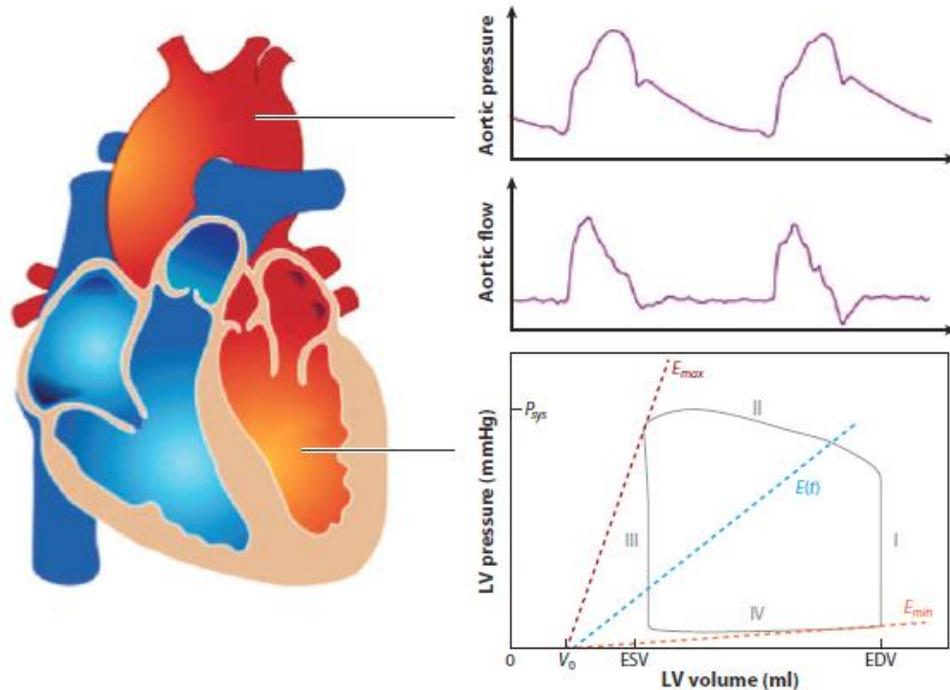
Debido a que la velocidad típica de la sangre en el corazón es del orden de  $U \cong 1 \text{ ms}^{-1}$  y sus dimensiones características bastante pequeñas del orden de  $L \cong 0.01 \text{ m}$ , y siendo la viscosidad cinemática de la sangre ( $\nu = \mu/\rho$ ) del orden de  $\nu = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , el número de Reynolds será del orden de  $UL\rho/\mu \cong 3800$ , lo que indica que el flujo en el corazón estará totalmente dominado por las fuerzas inerciales, siendo las fuerzas viscosas despreciables excepto en la capa límite que es del orden de  $\delta = L/\sqrt{Re} = 0,16\text{mm}$ .



**2.1-1. Vista anterior de la sección frontal del corazón que muestra su anatomía interna. Tomada de [30]**



**2.1-2. Presiones y flujos en las distintas fases del ciclo cardíaco, con indicación de sonidos cardíacos y señales ECG.**  
 Tomada de [30]



**Fig. 2.1-3. Ondas de presión y de flujo en la aorta y diagrama P-V del ventrículo izquierdo. Tomada de [7].**

## 2.2 El árbol arterial

El árbol arterial es el responsable del transporte de la sangre a los tejidos, la presión se mantiene elevada en todo el árbol porque el extremo distal del sistema arterial tiene una elevada resistencia al bifurcarse en muchos vasos de pequeño diámetro (arteriolas).

Los pulsos de presión se suavizan por la elasticidad de las arterias y en este proceso se producen ondas de presión con velocidad de propagación del orden de  $5 \text{ m/s}$ .

En los procesos de vasoconstricción y vasodilatación las células de los músculos blandos de las paredes arteriales se distienden y contraen alterando el diámetro arterial y la resistencia hemodinámica, para así distribuir óptimamente el caudal sanguíneo a los diferentes órganos en función de su estado metabólico local. La **Fig. 2.2-1** [4], muestra una microfotografía de la pared arterial, la **Fig. 2.2-2** [13] un diagrama de la estructura de las paredes arteriales dividida en túnica interna, túnica media y túnica externa; la **Fig. 2.2-3** [13] y la **Fig. 2.2-4**[29] muestran las dimensiones y las presiones típicas, que van de unos  $80 \text{ kPa}$  en la aorta a  $13 \text{ kPa}$  en los capilares, y la composición de los diferentes vasos sanguíneos, se puede apreciar el alto contenido de elastina en las arterias elásticas y el alto contenido de músculos lisos en las arterias musculares necesarios para regular el flujo arterial mediante procesos de vasoconstricción y vasodilatación.

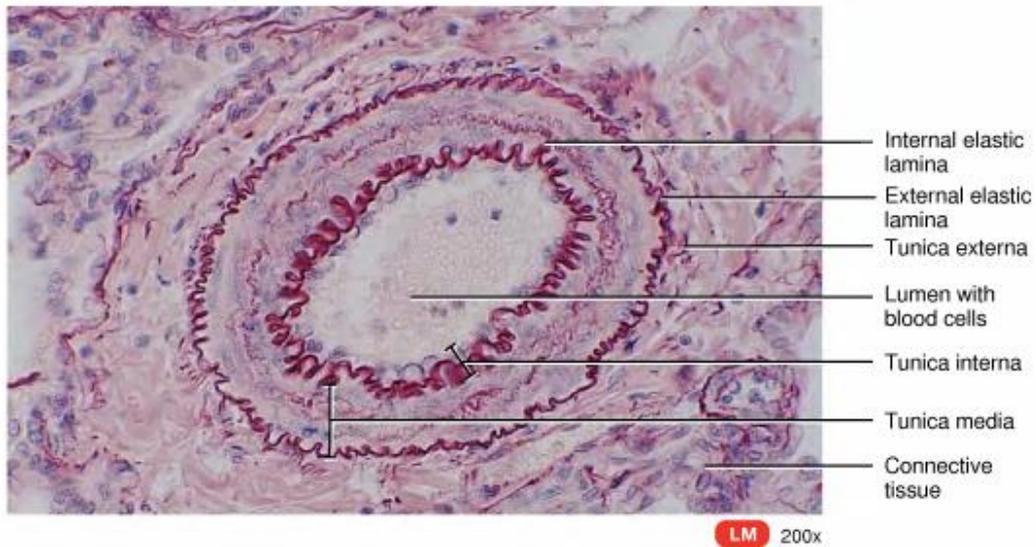


Fig. 2.2-1. Microfotografía de una sección transversal de una arteria, mostrando la túnica íntima, la túnica media y la túnica adventicia. Tomada de [30].

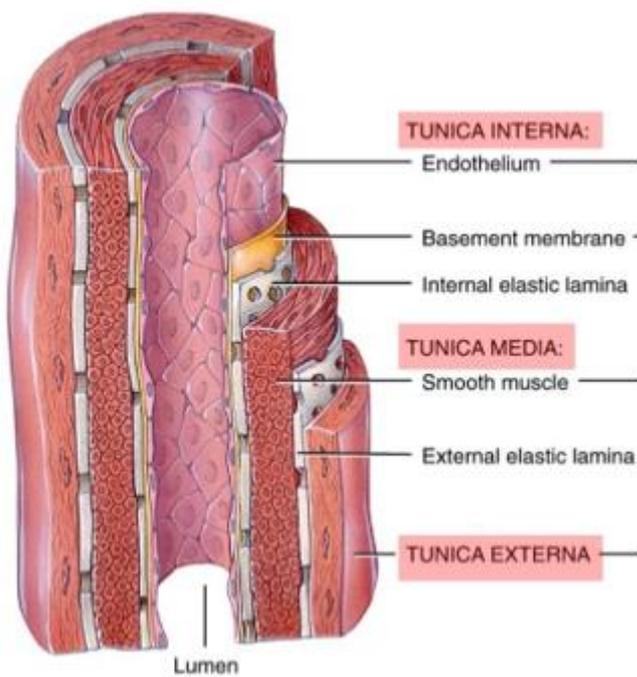
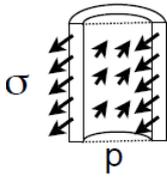


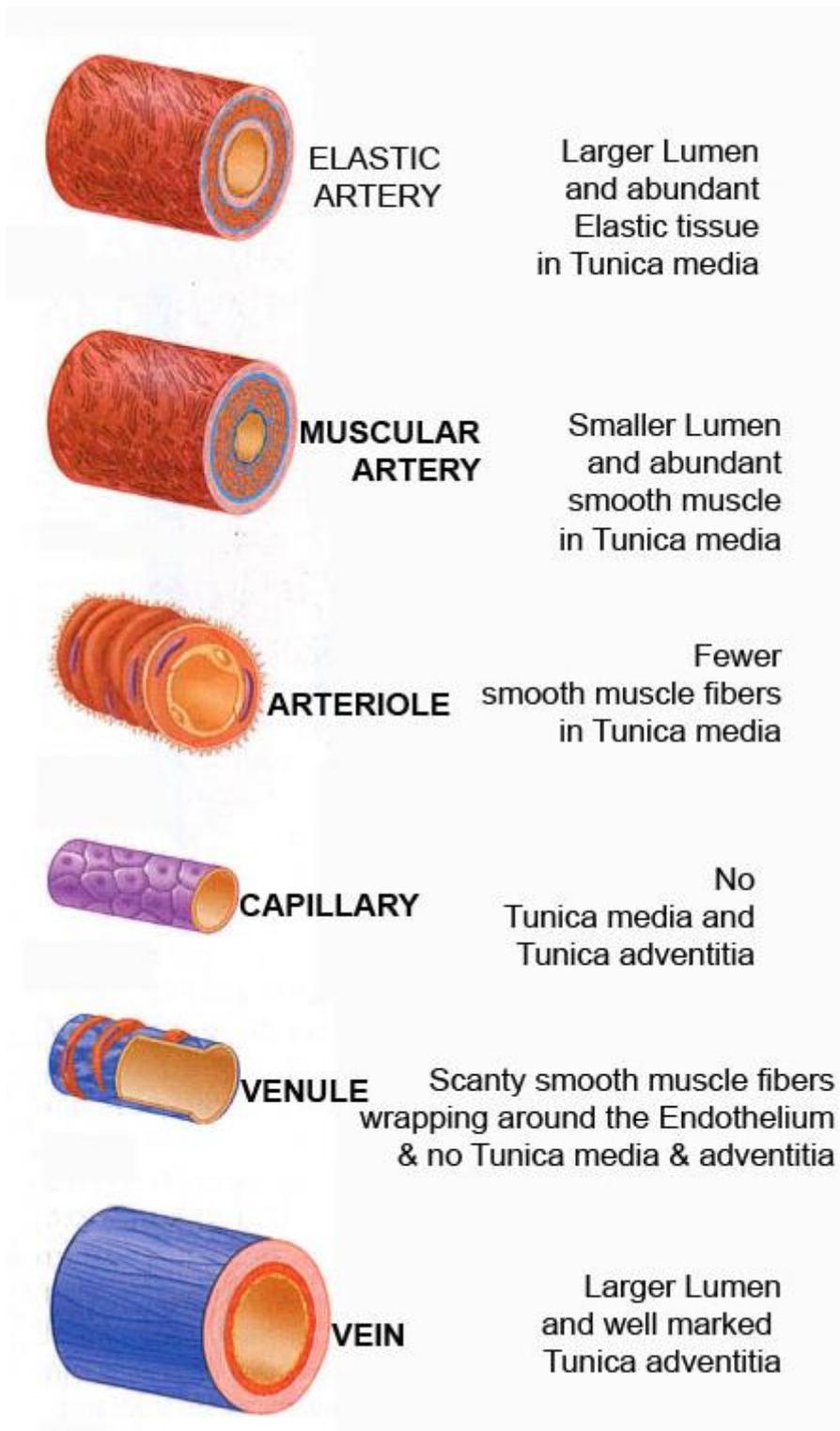
Fig. 2.2-2. Estructura de la pared arterial, donde se aprecia la estructura de la túnica íntima alrededor del endotelio, la túnica media con su capa de músculos lisos y túnica externa. Tomada de [13]

$$\sigma \text{ (kPa)} = 80 \quad 30 \quad 15 \quad 13 \quad 30 \quad 50 \quad 15$$



	 Aorta	 Arteria	 Arteriola	 Capilar	 Vénula	 Vena	 Vena Cava
Diámetro	20mm	4mm	50 $\mu$ m	8 $\mu$ m	40 $\mu$ m	1.5mm	30mm
Espesor	2mm	1mm	20 $\mu$ m	1 $\mu$ m	2 $\mu$ m	5 $\mu$ m	1.5mm
Espesor Radio Interior	1/5	1/2	>1	1/4	1/10	1/5	1/10
Elastina							
Músculo Liso							
Colágeno							

**Fig. 2.2-3. Tensiones, tamaños y composición típica de los vasos sanguíneos. Se aprecian los mayores espesores de las paredes arteriales, debido a que soportan mayores presiones (hasta 80 kPa) y el alto contenido de elastina de las paredes de las grandes arterias, lo que les confiere su alta compliancia. El contenido de elastina disminuye con el radio, por lo que las arterias y venas se tornan más rígidas al disminuir el radio interior. También se puede subrayar la importancia del musculo liso en las arterias, como responsable de su dilatación/constricción. Tomada de [13]**



**Fig. 2.2-4 Principales diferencias entre la estructura de los distintos tipos de vasos sanguíneos. Tomada de [29]**

El sistema arterial, cubre rangos de valores del número de Reynolds que van típicamente de 1000 a 2000 y que van disminuyendo al reducirse el radio de los vasos y la velocidad media de la sangre como muestra la **Fig. 2.2-5** [25], para algunas arterias significativas. Por este motivo,

Vaso	Diámetro interno (cm)	Espesor de pared (cm)	Longitud (cm)	Módulo de Young $\frac{N}{m^2} 10^5$
Aorta Ascendente	1,0-2,4	0,05-0,08	5	3 - 6
Aorta Descendente	0,8-1,8	0,05-0,08	20	3 - 6
Aorta Abdominal	0,5-1,2	0,04-0,06	15	9 - 11
Arteria Femoral	0,2-0,8	0,02-0,06	10	9 - 12
Arteria Carótida	0,2-0,8	0,02-0,04	10 - 20	7 - 11
Arteriola	0,5-1	0,002	0,1-0,2	
Capilar	0,02-0,17	0,0001	0,02-0,1	
Vena cava inferior	0,6-1,5	0,01-0,02	20-40	0,4 - 1

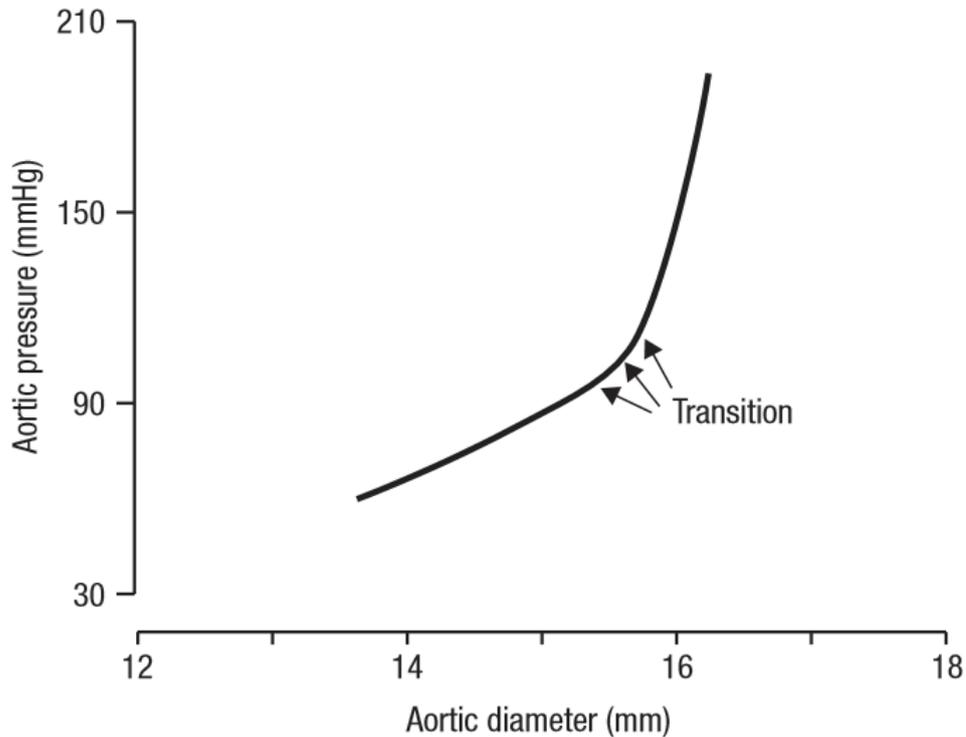
Vaso	Velocidad máxima cm/s	Velocidad Media cm/s	Número de Reynolds máximo	Velocidad de propagación del pulso cm/s
Aorta Ascendente	20-290	10-40	4500	400 - 600
Aorta Descendente	25-250	10-40	3400	400 - 600
Aorta Abdominal	50-60	8-20	1250	600 - 700
Arteria Femoral	100-120	10-15	1000	800 - 1030
Arteria Carótida	50-150	20-30		600 - 1100
Arteriola	0,5-1,0		0,09	
Capilar	0,02-0,17		0,001	
Vena cava inferior	15-40		700	100 - 700

**Fig. 2.2-5 Dimensiones, módulo de Young, velocidad y número de Reynolds en arterias y venas. Tomados de [25]**

las fuerzas inerciales predominan en los grandes vasos mientras que las fuerzas viscosas son más significativas en los vasos pequeños y en la microcirculación. La tabla de la **Fig. 2.2-5** [25], muestra también las longitudes, los radios interiores de algunos segmentos de arteria, las velocidades medias y máximas del flujo sanguíneo y la velocidad de propagación de la onda de flujo.

La presión en distintos puntos de la aorta presenta una diferencia de fase característica como consecuencia de que la presión se propaga como una onda, lo que es debido a la extensibilidad de la pared arterial, que hace que la superficie de la sección arterial ( $A$ ), sea dependiente de la presión transmural  $p_r$  (diferencia de presión a ambos lados de la pared arterial). Como

muestra la **Fig. 2.2-6** [33], al aumentar la presión, la arteria se hace más rígida siendo el motivo de este aumento de rigidez, el que la presión empieza a ser contrarrestada por fibras de colágeno en lugar de por fibras de elastina a partir de unos 100 mm Hg. Este fenómeno es pues, responsable de la relación no lineal típica entre el área de la sección de una aorta humana ( $A$ ) y la presión transmural  $p_r$ , que es muy dependiente de  $p_r$ , y hace a la aorta prácticamente inelástica a presiones elevadas. Es preciso modelar esta relación no lineal, que define el comportamiento elástico de la pared arterial para conseguir modelos realistas del flujo sanguíneo.



**Fig. 2.2-6. Variación de la sección de la aorta con la presión. A bajas presiones la pared soporta la tensión con fibras de elastina mientras que a presiones altas la tensión es soportada por fibras de colágeno, la transición ocurre a presiones entre 110 y 125 mm Hg. Tomada de [33].**

### 2.3 La microcirculación

En la microcirculación, la sangre fluye por las arteriolas hasta el sistema capilar, cuyas paredes constan de una única capa de células endoteliales que yacen sobre la membrana basal donde tiene lugar el intercambio de gases y nutrientes con el líquido intersticial de los tejidos **Fig. 2.2-4** [29]. El flujo de la sangre en la microcirculación no puede ser considerado como homogéneo por ser el diámetro de los capilares **Fig. 2.2-3** [25] comparable con el tamaño de los eritrocitos. En la microcirculación el plasma actúa como una capa lubricante y las fuerzas viscosas predominan sobre las fuerzas de inercia ( $Re < 1$ ).

El flujo en los capilares presenta un carácter continuo no pulsante por lo que se puede modelizar por una resistencia al flujo que es lineal e igual al cociente de la presión de perfusión (diferencia entre la presión arterial y la presión venosa) y el flujo sanguíneo a través del capilar. La resistencia capilar está controlada por el tono de los músculos blandos de las arteriolas que controlan su diámetro y por tanto su resistencia.

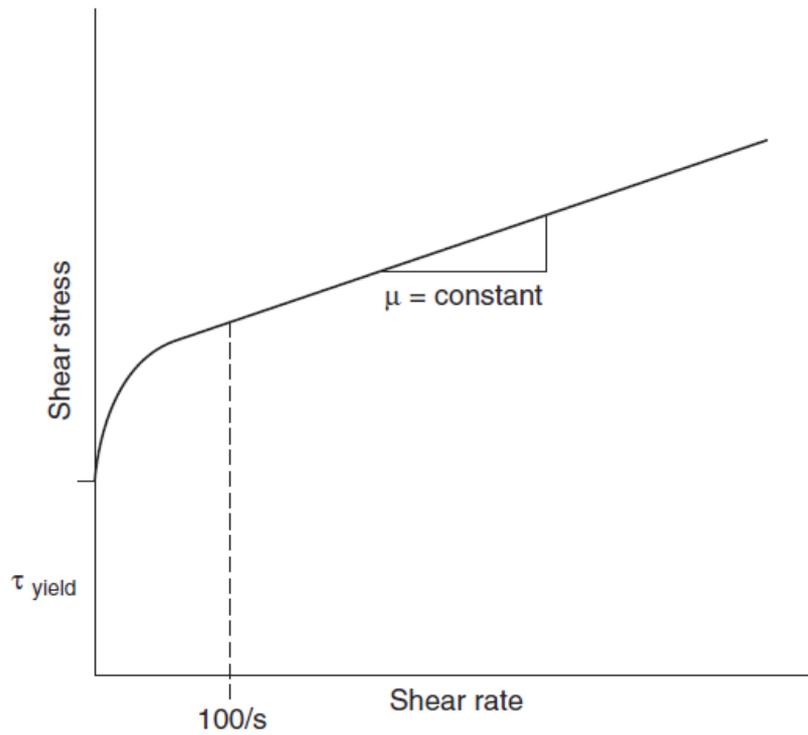
## 2.4 El sistema venoso

La sangre que pasa por los sistemas capilares es recogida por las vénulas y venas que confluyen en vasos cada vez más grandes y finalmente llegan a las venas cava y a su través a la aurícula derecha. Al aumentar el diámetro de las venas aumenta el número de Reynolds, llega a unos 700 en la vena cava inferior y las fuerzas inerciales vuelven a ser significativas, aunque las velocidades y las presiones son bastante inferiores a las del sistema arterial **Fig. 2.2-3** [25]. Estas bajas presiones son responsables de que la sección de las venas ya no sea circular sino elíptica y en algunas circunstancias se pueda llegar a producir un colapso de la vena. Las bajas presiones hacen que las diferencias de presión debidas a la gravedad lleguen a ser significativas, por lo que, para evitar el retroceso de la sangre debido a la gravedad, las venas disponen de válvulas que impiden el retroceso de la sangre y aseguran su movimiento unidireccional hacia el corazón.

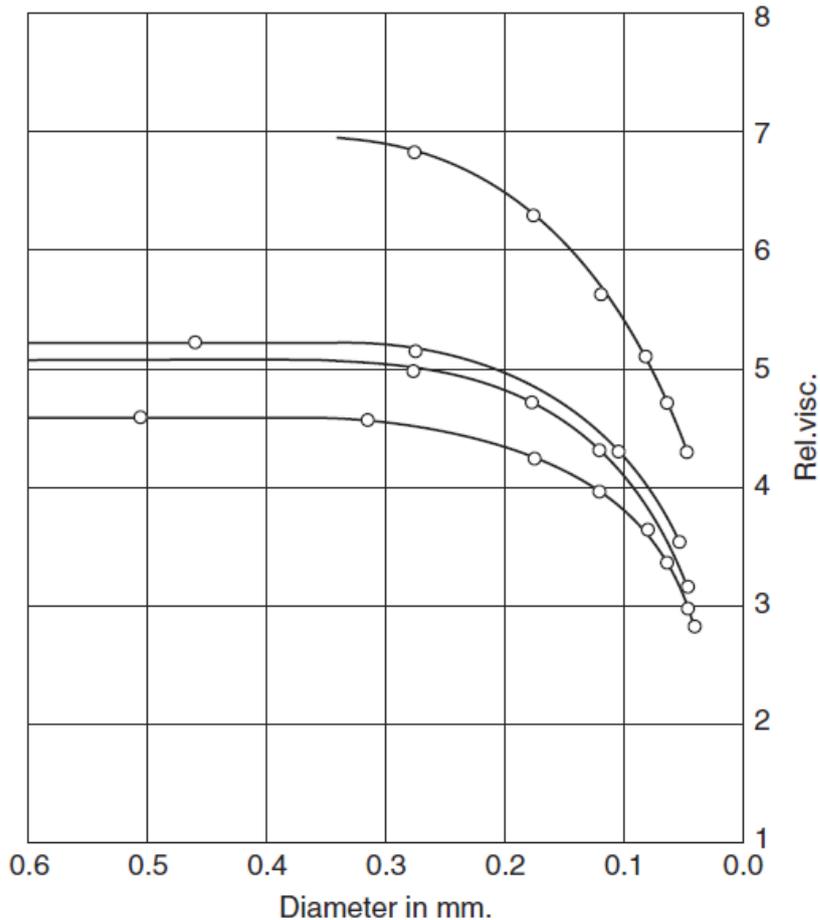
## 2.5 La sangre

La sangre contiene entre un 40% y un 45% en volumen de elementos celulares. Esas células son principalmente glóbulos rojos o eritrocitos, pero también hay glóbulos blancos o leucocitos, y plaquetas o trombocitos. Los eritrocitos son las células involucradas principalmente en el transporte de oxígeno y dióxido de carbono. Los leucocitos son células implicadas principalmente en la fagocitosis y en las respuestas inmunes y los trombocitos son responsables de la coagulación de la sangre. Entre el 55% y el 60% de la sangre en volumen se compone de plasma. El plasma es transparente de color ámbar líquido y en él están suspendidos los componentes celulares de la sangre. El plasma contiene también proteínas, electrolitos, hormonas y nutrientes. El suero es plasma sanguíneo del que se han eliminado los factores de coagulación.

Desde el punto de vista reológico la sangre no es un fluido Newtoniano, pero se puede aproximar razonablemente en condiciones fisiológicas en las grandes arterias a un fluido Newtoniano. La viscosidad es fuertemente dependiente de la temperatura, pero esto no es significativo porque en condiciones fisiológicas la temperatura se mantiene constante a 37º C., por otro lado, la viscosidad de la sangre varía con parámetros tales como el hematocrito, la velocidad de deformación, y el diámetro del vaso. La **Fig. 2.5-1** [3], muestra el esfuerzo cortante de la sangre frente al gradiente de velocidad para temperatura y hematocrito constantes. Se puede apreciar que a partir de gradientes de velocidad superiores a  $100 \text{ s}^{-1}$ , la sangre se comporta como un fluido Newtoniano. La **Fig. 2.5-2** [4] ilustra el efecto Fahraeus que consiste en la disminución de la viscosidad aparente con el diámetro del vaso a partir de diámetros inferiores a 0.3 mm.



**Fig. 2.5-1. Relación tensión, gradiente de velocidad para la sangre a 37°C, para gradientes de velocidad mayores de  $100 \text{ s}^{-1}$ , la sangre se comporta como un fluido Newtoniano. Tomada de [3].**



**Fig. 2.5-2.** Gráfico de Fahaereus (1931), que muestra cuatro ensayos en los que se observa la disminución de la viscosidad aparente de la sangre cuando el diámetro del vaso es inferior a 0,3 mm. Tomada de [4].

### 3 Modelos de Presión y Flujo en el árbol arterial.

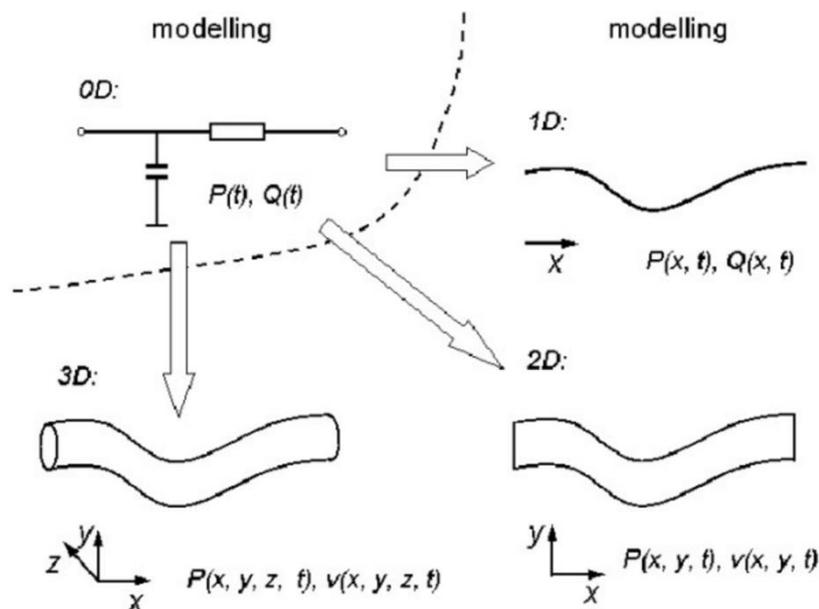
La modelización del flujo arterial es muy difícil debido a los siguientes motivos:

- Naturaleza de las ecuaciones de NS, que son un sistema EDP 3D, no lineales y no estacionarias que además deben cumplir la ecuación de estado de los distintos vasos,
- Complejidad de la geometría del árbol arterial que incluye radios variables de los vasos y bifurcaciones.
- Comportamiento viscoelástico no lineal de la pared arterial.
- Propiedades reológicas no Newtonianas de la sangre.
- Condiciones de contorno complejas a la entrada del árbol arterial (válvula aórtica) que requiere una modelización precisa del bombeo del corazón y de su interacción con la aorta.
- Condiciones de contorno complejas a la salida del árbol arterial a la microcirculación.

- Por todas estas razones se recurre en la práctica al uso de modelos simplificados del flujo arterial que incluyen un bajo número de parámetros y pueden ser útiles para determinados estudios.
- Los modelos de flujo arterial se clasifican en tres categorías: 0D, 1D y 2D (**Fig. 3.1-1** [7]) según el nivel de detalle con el que se modela la geometría del subsistema cardiovascular a estudiar.

### 3.1 Modelos 0D (Windkessel)

Los modelos WK de un sistema circulatorio, tienen como objetivo representar las relaciones fisiológicas entre flujo y presión en el sistema circulatorio sin considerar ninguna variable espacial, estos modelos se basan en la analogía con circuitos eléctricos, en los que la relación entre tensiones e intensidades eléctricas responden a las mismas ecuaciones que las presiones y los flujos en el sistema circulatorio analizado.



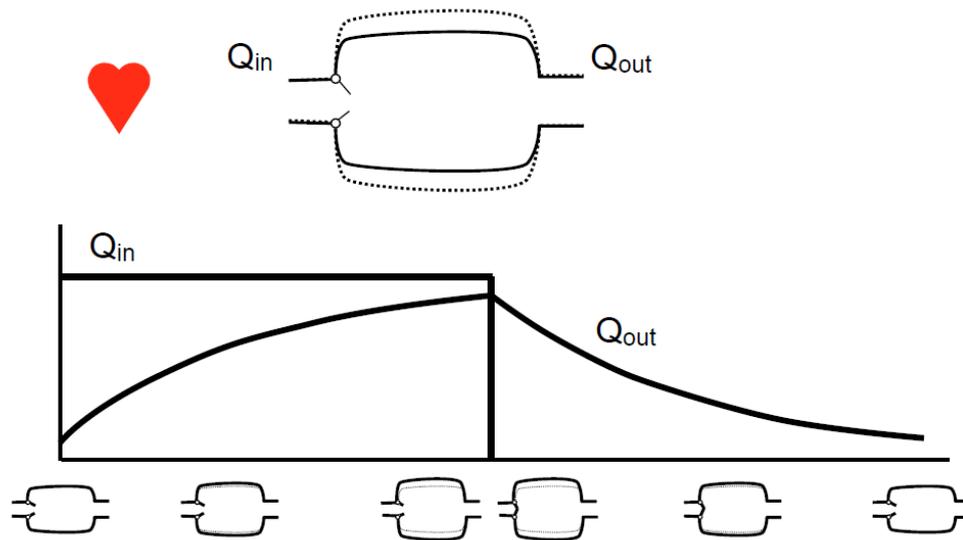
**Fig. 3.1-1. Diferentes tipos de modelos del flujo arterial. Tomada de [7].**

Los modelos WK se han utilizado en la elaboración del índice de rigidez arterial (“Ambulatory Arterial Stiffness Index”) propuesto por Westerhof, que se basa en la determinación de la constante de tiempo (RC) de caída de la presión durante la diástole y que proporciona información sobre el acoplo del ventrículo izquierdo con el sistema arterial y es un predictor de la tasa de morbilidad / mortalidad. Los modelos WK se han aplicado, no sólo en la circulación periférica, sino también en el corazón. Distintos estudios [28,29] sobre el acoplamiento ventrículo-sistema arterial han utilizado modelos WK de carga por su aplicabilidad y por la dificultad de trabajar con modelos más complejos, estos estudios revelan la importancia de la compliancia de la aorta e identifican la disminución de la elasticidad de la aorta como un factor patofisiológico de primer orden en algunas patologías, como la hipertensión sistólica.

La **Fig. 3.1-2** [13], muestra el flujo de salida de la aorta ( $Q_{out}$ ) correspondiente al flujo de entrada discontinuo y constante ( $Q_{in}$ ) según un modelo 0D idealizado basado en un solo parámetro, la compliancia ( $C = dV/dP$ ).

## Efecto Windkessel

Otto Frank 1899



**Fig. 3.1-2. Modelo simplificado 0D (Otto Frank 1899), que muestra la suavización del flujo de salida de la aorta con respecto al caudal de entrada. La suavización del flujo está producida por la elasticidad de la aorta. Tomada de [13].**

Los modelos WK, son modelos agregados (“lumped”) que permiten obtener una relación global entre la presión y el flujo en un punto concreto del árbol, pero no permiten estudiar la propagación de ondas de presión en el árbol arterial.

El modelo de la **Fig. 3.1-2** es el más sencillo de los modelos 0D. Frank describió la presión en la aorta proximal durante la diástole como una exponencial decreciente con constante de tiempo RC, siendo los parámetros R y C:

- R es la Resistencia hidráulica al flujo definida como el cociente entre la diferencia de presión en los extremos del tubo y el flujo a través del tubo:

$$R = \frac{\Delta P}{Q_{out}} \quad (3.1-1)$$

Según el modelo de Poiseuille, que supone flujo incompresible, laminar y totalmente desarrollado en un tubo rígido en régimen estacionario, la resistencia R se expresa como:

$$R_{Poiseuille} = \frac{8\mu L}{\pi a^4} \quad (3.1-2)$$

Siendo  $a$  el radio del tubo y  $L$  su longitud. Se puede apreciar la gran sensibilidad de la resistencia al radio del tubo, que es inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio, de aquí los efectos tan significativos de los fenómenos de vasoconstricción y vasodilatación en el flujo sanguíneo.

- C es la compliancia, definida como la variación del volumen del sistema modelado, con la presión:

$$C = \frac{dV}{dP} \quad (3.1-3)$$

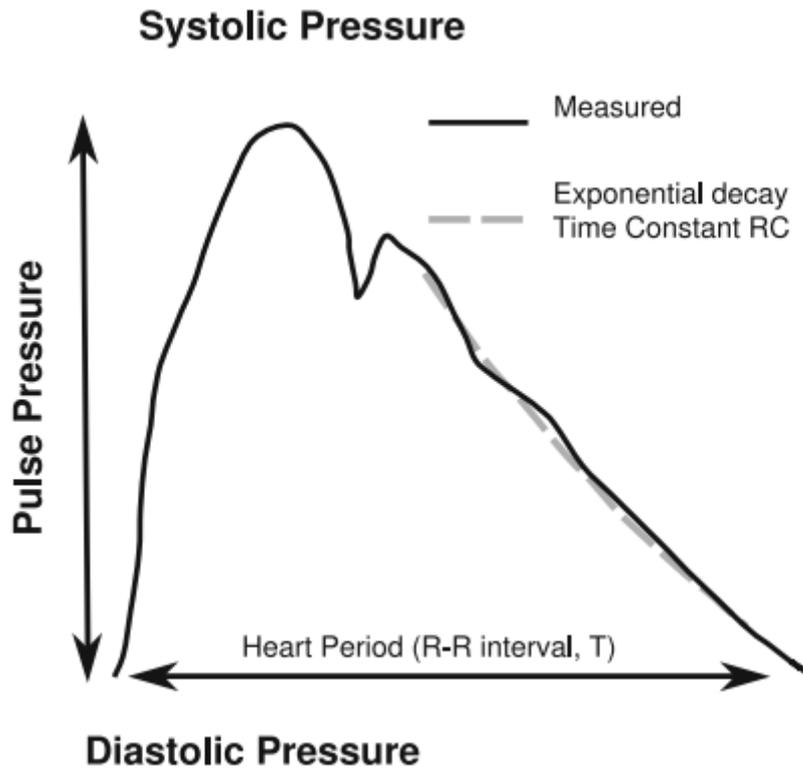


Fig. 3.1-3. Presión arterial ajustada con un WK 2 vs presión real observada. Se comprueba, que el ajuste de la presión medida durante la diástole con la respuesta de un WK2 es bastante bueno, aunque no ocurre así durante la sístole.

### 3.1.1 Modelo WK2

El comportamiento del WK de Otto Frank es el mostrado en la **Fig. 3.1-2**, cuyo análisis es el siguiente: El aumento instantáneo de volumen será igual a la diferencia de los flujos de entrada y salida y usando 3.1-1 y 3.1-3 resulta,

$$\frac{dV(P(t))}{dt} = (Q_{in} - Q_{out}(t)) = \frac{dV}{dP} \frac{dP}{dt} = CR \frac{dQ_{out}}{dt} \quad (3.1-4)$$

Si consideramos el flujo de entrada  $Q_{in}$  como constante durante la sístole, es decir, en el intervalo  $(0-t_{max})$ , tendremos que la solución de esta ecuación diferencial en  $Q_{out}$ , en el intervalo  $(0-t_{max})$  será,

$$Q_{out}(t) = Q_{in} + Ke^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.1-5)$$

Donde  $K$  viene determinada por la condición inicial, definida por el valor del flujo de salida al comienzo de la sístole ( $t = 0$ ) que llamamos  $Q_{min}$ ,

$$Q_{out}(0) = Q_{min} = Q_{in} + K \quad (3.1-6)$$

El flujo máximo será el flujo al final de la sístole en  $t_{max}$ ,

$$Q_{max} = Q_{out}(t_{max}) \quad (3.1-7)$$

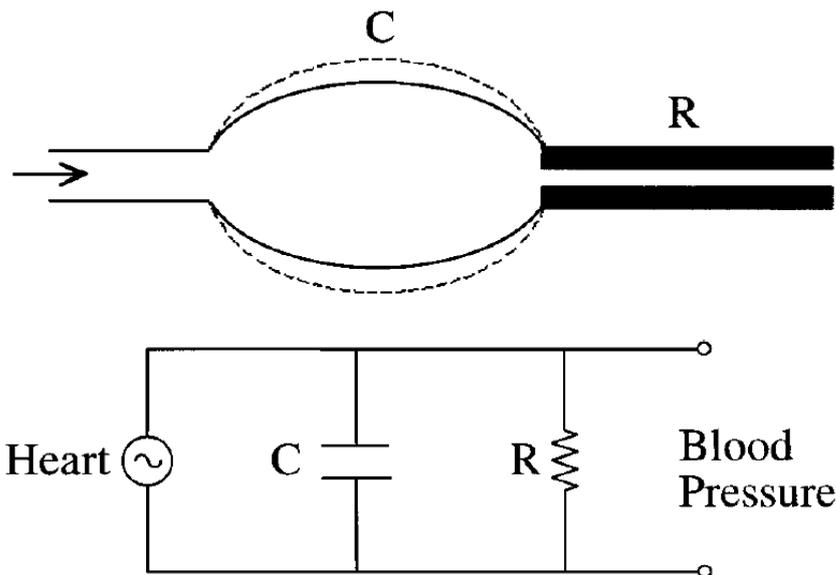
La presión durante la sístole, en el intervalo  $(0, t_{max})$  será pues:

$$P_{out} = R \left( Q_{in} + (Q_{min} - Q_{in}) e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (3.1-8)$$

El flujo y la presión durante la diástole, cuando no hay flujo de entrada, en el intervalo  $(t_{max}, 2t_{max})$ , serán respectivamente,

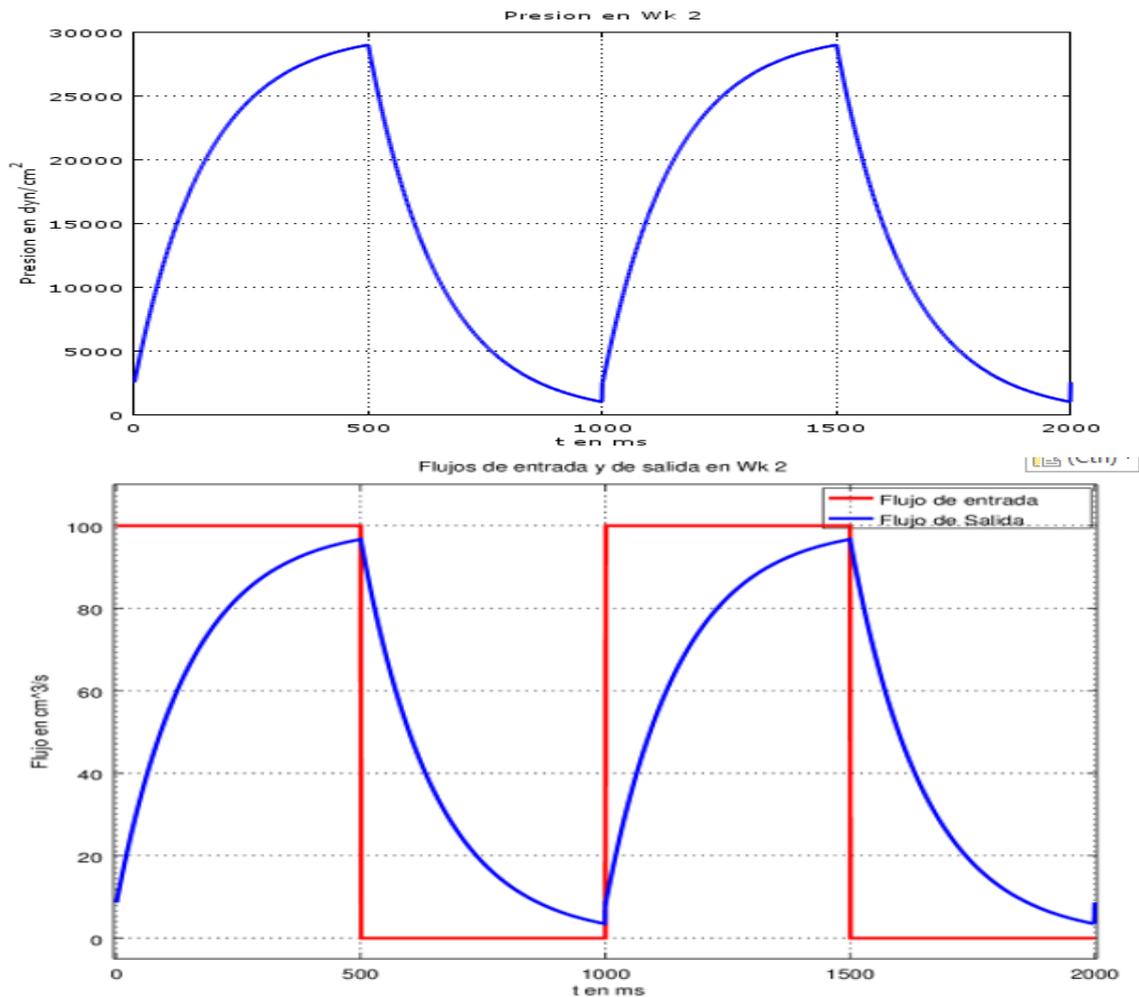
$$Q_{out}(t) = Q_{max} e^{-\frac{(t-t_{max})}{RC}} \quad (3.1-9)$$

$$P_{out}(t) = R \left( Q_{max} e^{-\frac{(t-t_{max})}{RC}} \right) \quad (3.1-10)$$



**Fig. 3.1-4. Windkessel con dos elementos (WK2)- El capacitor modela la compliancia de la arteria y la resistencia R modela la resistencia hidráulica. Tomada de [19]**

La **Fig. 3.1-4** [19] muestra el circuito eléctrico que modela el WK2 descrito. En la analogía hidráulica-eléctrica la presión se corresponde con la tensión eléctrica, el flujo se corresponde con la intensidad de corriente, la resistencia eléctrica R se corresponde con la resistencia hidráulica y la capacidad eléctrica con la compliancia. La **Fig. 3.1-5** muestra la respuesta suavizada, obtenida con el código del Anexo, del modelo WK2 a una onda cuadrada de flujo concreta  $Q_{in}$ .



**Fig. 3.1-5, muestra la solución del modelo WK 2 de O. Frank, obtenida con el código del Anexo donde se supone igual duración ( $t_{max}$ ) para la sístole que para la diástole y se supone un flujo de entrada constante ( $Q_{in}$ ) durante la sístole. La Fig. 13 muestra un circuito eléctrico correspondiente a este WK 2 en la que  $R=400$  y  $C=4e-6$ . La presión es directamente proporcional al flujo de salida.**

El modelo sencillo WK2, aunque modela bastante mal la presión en la aorta con la válvula abierta durante la sístole, modela bastante bien el comportamiento de la presión diastólica con la válvula aórtica cerrada, como se puede ver en la **Fig. 3.1-3** [14].

La limitación principal del modelo WK2 es que, para altas frecuencias, su impedancia se reduce a 0 y el desfase entre la presión y el flujo de salida se aproxima a  $-90^\circ$  lo que no se corresponde con el comportamiento fisiológico, por este motivo se han introducido modelos WK con 3 y 4 elementos como el circuito WK3 de tres elementos que se muestra en la **Fig. 3.1-6**.

La diferencia de tensión en los extremos del circuito eléctrico  $V(t)$  se corresponde con la diferencia de presiones  $P(t)$  a la entrada de la arteria y a la salida y la intensidad de corriente  $I(t)$  se corresponde con el flujo. Aplicando la ley de Kirchhoff al circuito WK 2, resulta que la intensidad de entrada  $I(t)$  será la suma de la intensidad que circula por R más la intensidad que circula por el capacitor C y siendo  $V(t)$  la tensión de entrada, se verificará:

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt} \quad (3.1-11)$$

La ecuación (3.1-11) se corresponde exactamente con la ecuación WK2 hidráulica (3.1-4), repetida aquí:

$$Q_{in}(t) = Q_{out}(t) + CR \frac{dQ_{out}(t)}{dt} \quad (3.1-12)$$

Mediante las siguientes correspondencias,

$$Q_{in}(t) \leftrightarrow I(t); \quad Q_{out}(t) \leftrightarrow \frac{V(t)}{R}; \quad CR \frac{dQ_{out}(t)}{dt} \leftrightarrow C \frac{dV(t)}{dt} \quad (3.1-13)$$

El fundamento de esta analogía entre circuitos eléctricos y sistemas hidráulicos es la igualdad formal entre la ley de Ohm y la ley de Poiseuille. La ley de Poiseuille establece la proporcionalidad entre el flujo en una tubería rígida con simetría axial y la diferencia de presión en los extremos de dicha tubería para el caso de flujo incompresible, estacionario, Newtoniano y totalmente desarrollado,

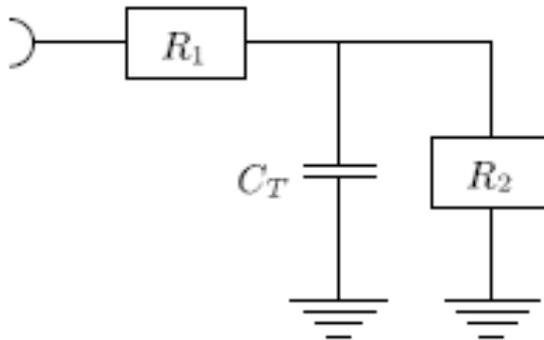
$$Q = \frac{(P_1 - P_2)}{R} \quad (3.1-14)$$

La ley de Ohm, formalmente idéntica a la de Poiseuille, establece la proporcionalidad entre la intensidad de la corriente eléctrica a través de una resistencia y la diferencia de potencial en sus extremos:

$$I = \frac{(V_1 - V_2)}{R} \quad (3.1-15)$$

### 3.1.2 Modelo WK3

En el circuito de la Fig. 3.1-6. Modelo WK 3 cuya impedancia a altas frecuencias tiende a  $R_1$  se cumple que la corriente que circula por  $R_1$  será igual a la que circula por  $R_2$  más la que circula por  $C_T$ . Llamando  $V^*$  a la tensión en los extremos de  $R_2$ , se cumplirá que,



**Fig. 3.1-6. Modelo WK 3 cuya impedancia a altas frecuencias tiende a  $R_1$  y con el que se puede modelar de manera más realista que con un modelo WK 2, la relación entre presión y flujo en un vaso flexible. Tomada de [17]**

$$\frac{(V-V^*)}{R_1} = \frac{C_T dV^*}{dt} + \frac{V^*}{R_2} = I \quad (3.1-16)$$

Como,

$$V^* = V - IR_1 \quad (3.1-17)$$

Se obtiene la siguiente relación,

$$\frac{I}{C_T} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{V}{C_T R_2} + R_1 \frac{dI}{dt} = \frac{dV}{dt} \quad (3.1-18)$$

De acuerdo con la analogía hidráulica-eléctrica,

$$I \leftrightarrow q ; V \leftrightarrow p \quad (3.1-19)$$

La ecuación (3.1-18) se convierte en términos de presiones y flujos en:

$$\frac{q}{C_T} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{p}{C_T R_2} + R_1 \frac{dq}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad (3.1-20)$$

Que puede integrarse para obtener  $q(t)$ , suponiendo conocidas  $p(t)$  y  $dp/dt$ . Otro procedimiento para obtener  $q(t)$  es el análisis directo del circuito de la Fig. 3.1-6. Si en este circuito conocemos el valor de la tensión  $V^*$  en los extremos de la resistencia  $R_2$  en el instante  $t_n$  que denotamos por  $V_n^*$  y el valor de  $V_{n-1}^*$  en el instante  $t_{n-1}$ , y aproximamos la corriente que circula por el capacitor  $I_{CT} = \frac{C_T dV^*}{dt}$  por,

$$I_{CT} = \frac{C_T (V_n^* - V_{n-1}^*)}{\Delta t} \quad (3.1-21)$$

Podemos escribir (3.1-16) como,

$$\frac{C_T (V_n^* - V_{n-1}^*)}{\Delta t} + \frac{V_n^*}{R_2} = \frac{V - V_n^*}{R_1} \quad (3.1-22)$$

Es decir,

$$V_n^* = \frac{\frac{C_T V_{n-1}^*}{\Delta t} + \frac{V}{R_1}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{C_T}{\Delta t}} \quad (3.1-23)$$

A partir de la cual obtenemos la expresión para el flujo de salida,

$$q_n \leftrightarrow \frac{V_n^*}{R_2} \quad (3.1-24)$$

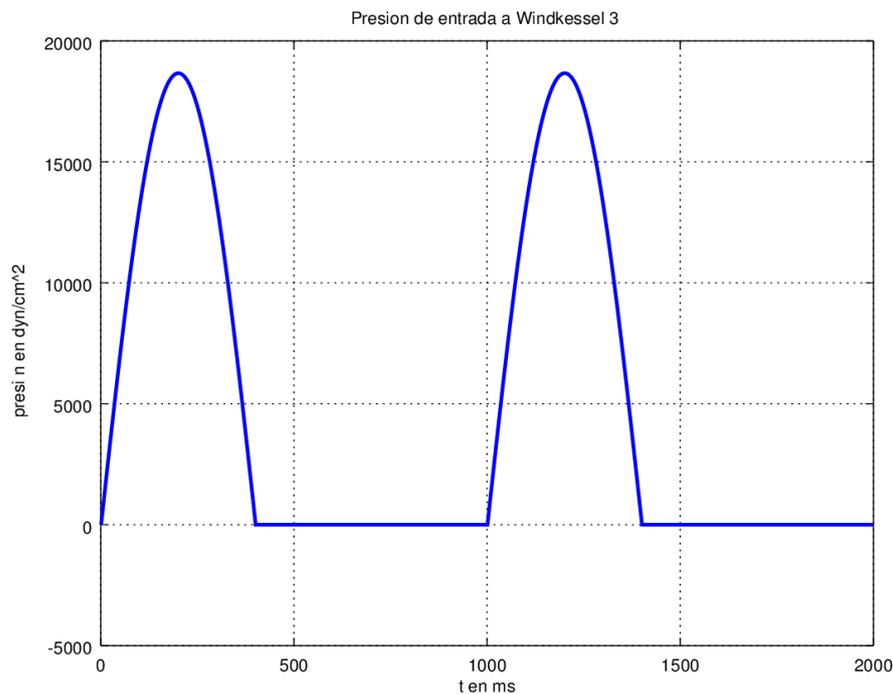
En el Anexo se implementa el algoritmo proporcionado por las ecuaciones (3.1-23) y (3.1-24) para calcular el flujo de respuesta del WK3 a la siguiente presión periódica de entrada de periodo 1 mostrada en la **Fig. 3.1-7**,

$$p(t) = p_{max} \sin(2,5 * \pi * t) ; \quad 0 \leq t \leq 0,4 \quad p(t) = 0 \\ 0,4 \leq t \leq 1 \quad (3.1-25)$$

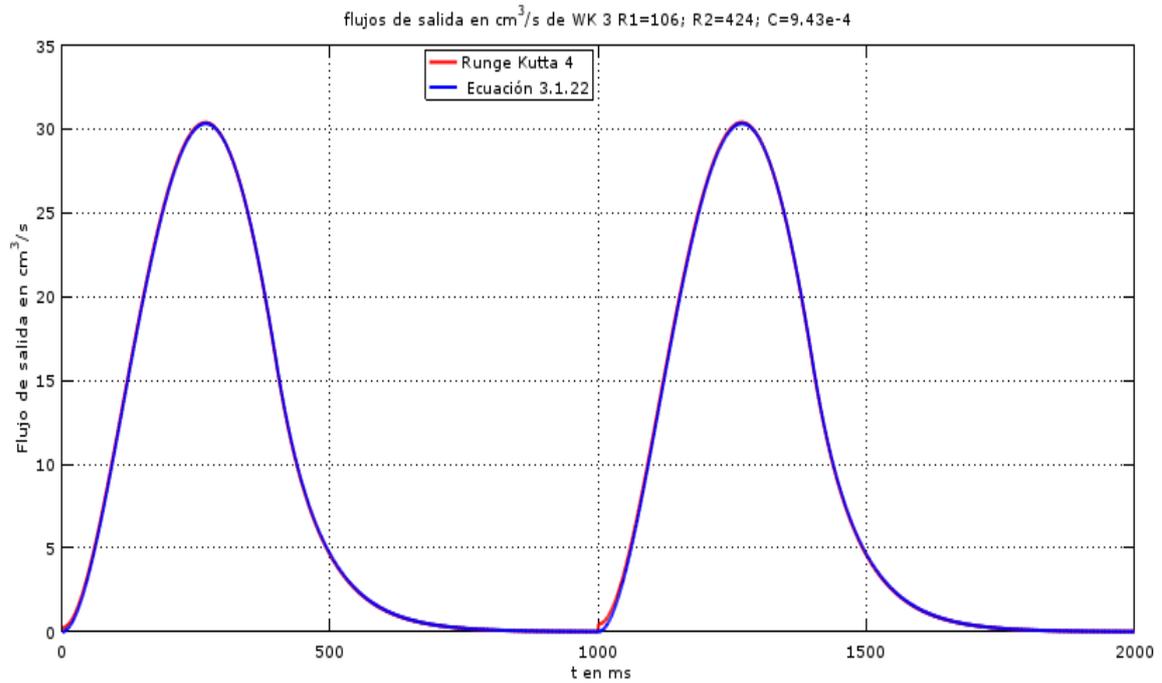
En el cálculo se han utilizado los siguientes valores para los elementos del WK3,

$$R_1 = 106 \frac{g}{cm^4} \cdot s; R_2 = 424 \frac{g}{cm^4} \cdot s; C_T = 9.43 \cdot 10^{-4} cm^4 \cdot \frac{s^2}{g} \quad (3.1-26)$$

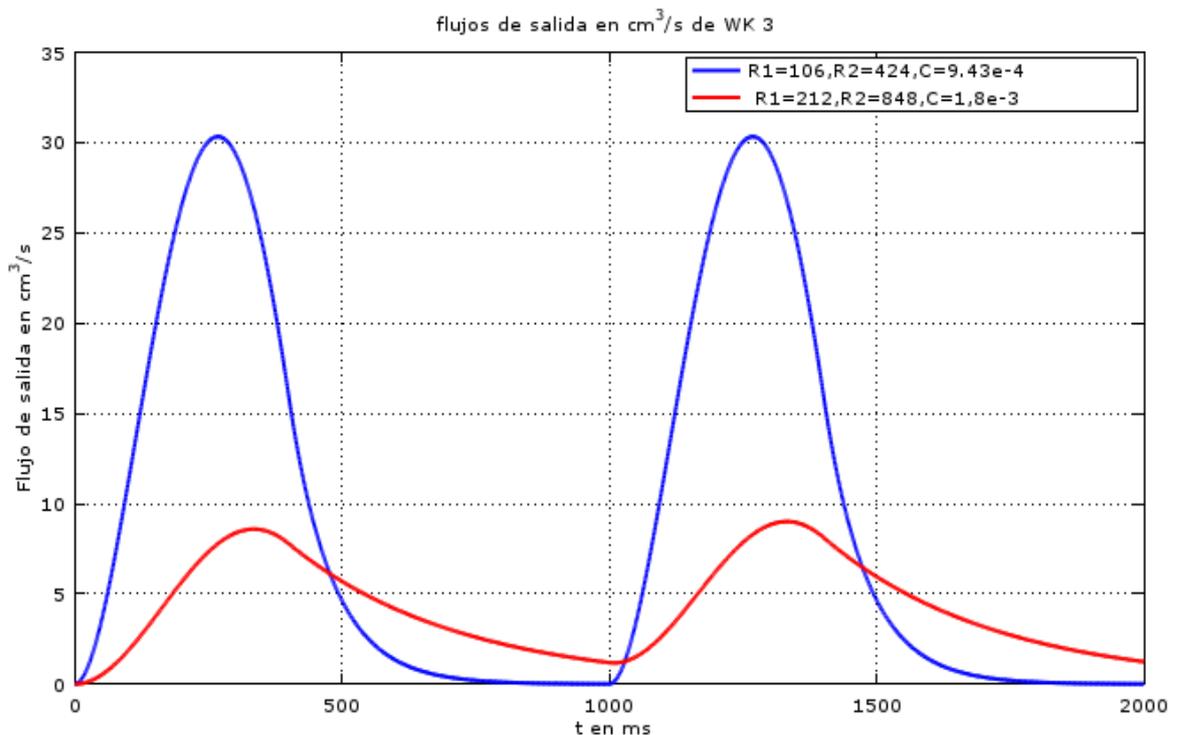
La **Fig. 3.1-9** muestra el flujo  $q(t)$  de respuesta, obtenido mediante la integración de la EDO (3.1-20) con un algoritmo RK 4 usando expresiones analíticas para la función de entrada (3.1-25) y su derivada,  $p(t)$  y  $dp/dt$  y con el algoritmo 3.1-23 con los mismos pasos de tiempo de de 1ms y los mismos valores de los elementos del WK3 dados en (3.1-26). Se observa que el resultado de ambas soluciones es prácticamente equivalente, por lo que, en el modelo 1D presentado en este trabajo, se usará el WK3 eléctrico basado en las leyes de Kirchoff, por que no requiere la estimación de la derivada de la función en puntos intermedios del intervalo  $\Delta t$  entre los instantes  $t_{n-1}$  y  $t_n$ , que son valores no disponibles durante la simulación.



**Fig. 3.1-7. Ejemplo de presión periódica de entrada al WK 3. Esta función tiene una forma sinusoidal durante la sístole y nula durante la diástole.**



**Fig. 3.1-8:** Respuesta del WK de 3 elementos a la presión de entrada de la Fig. 3.1-7 calculada con el algoritmo Runge-Kutta 4 y con la ecuación (3.1-22). Se puede apreciar que los resultados obtenidos por ambos métodos son prácticamente coincidentes.



**Fig. 3.1-9.** Respuesta de dos WK3 distintos a la misma presión de entrada. El segundo WK 3 tiene valores dobles de resistencias y capacidad. Se puede apreciar el gran efecto que tienen estos valores en el flujo de salida del WK.

### 3.2 Flujo pulsante en tubos rígidos, solución de Womersley

El modelo de Womersley es un modelo 1D que permite calcular el perfil de velocidades en la sección de un tubo circular rígido y las tensiones que el fluido provoca en las paredes del tubo, cuando el flujo del fluido es Newtoniano e incompresible y está causado por un gradiente de presión pulsante. El cálculo se realiza resolviendo las ecuaciones de NS, a diferencia con los modelos WK, que utilizan la analogía eléctrica.

En el modelo de Womersley se supone flujo incompresible con simetría axial, es decir que la velocidad en cilíndricas  $(x, r, \theta)$  está dirigida exclusivamente en la dirección del eje del tubo y carece de componentes radial ( $u_r = 0$ ) y angular ( $u_\theta = 0$ ), es decir,

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = (u(x, r, t), 0, 0,) \quad (3.2-1)$$

siendo  $z$  la coordenada espacial a lo largo del tubo. Por suponer el flujo con simetría axial se cumple  $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$  y por la ecuación de continuidad para flujo incompresible,

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.2-2)$$

Se verifica que  $u(r, t) = Cte$  y por tanto dependiente solamente de  $r$  y del tiempo y no de la coordenada  $x$ , lo que hace que el modelo de Womersley sea 1D. La simetría axial implica, por las razones aducidas, la anulación del término no lineal de la ecuación NS ya que,

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{div})(\mathbf{u}) = \left( u \frac{\partial u}{\partial x}, 0, 0 \right) = (0, 0, 0) \quad (3.2-3)$$

Por tanto, las fuerzas de inercia no lineales son idénticamente nulas y las ecuaciones NS quedan muy simplificadas. Con respecto a la ecuación de conservación del momento, es preciso decir que hay gradientes de velocidad en dirección axial  $x$  debido a la variación del área de la arteria en la dirección axial, pero que estos gradientes son muchísimo más pequeños que los gradientes de velocidad en dirección radial, porque estamos trabajando en el límite de longitudes de onda largas, esto es:  $d \ll \lambda$  siendo  $d$  el diámetro de la arteria del orden de 2 cm y  $\lambda$  la longitud de la onda de flujo, del orden de 5 m, por tanto los gradientes de velocidad en dirección axial se pueden despreciar, quedando las ecuaciones de NS reducidas a,

$$\rho \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right) \right) \quad (3.2-4)$$

Con la condición de no deslizamiento,

$$u(r, t) = 0 \quad (3.2-5)$$

Las ecuaciones (3.2-4) y (3.2-5) se pueden escribir en forma adimensional mediante el siguiente cambio de variables,

$$r^* = \frac{r}{a}, \quad t^* = t \cdot \omega, \quad p^* = p(r, t)a/(\mu U_0), \quad u^* = u(r, t)/U_0 \quad (3.2-6)$$

Donde  $a$  es el radio del vaso,  $\omega$  es la frecuencia característica del flujo que para el flujo sanguíneo tomamos 1 Hz,  $U_0$  es la velocidad media de la sangre, que para una gran arteria es del orden de 50 cm/s. Si se hacen los cambios de variable (3.2-6) en (3.2-4) se obtiene la

ecuación (3.2-7), en la que se han escrito sin asterisco, las nuevas variables adimensionales  $r^*, t^*, p^*$  y  $u^*$ ,

$$W^2 \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right) \right) \quad (3.2-7)$$

Siendo  $W = a\sqrt{\rho\omega/\mu}$  el número de Womersley y siendo  $Re = \rho Ua/\mu$  el número de Reynolds. El número de Womersley, es un número adimensional con diversas interpretaciones físicas, por una parte, el número  $W$  mide la relación entre las fuerzas no estacionarias debidas al carácter pulsante del flujo y las fuerzas debidas a la viscosidad del fluido, también mide la relación entre la longitud característica del flujo (*radio a*) y el espesor de la capa límite ( $\delta$ ), ya que debido al carácter pulsante del flujo con frecuencia  $\omega$ , en la parte central de la arteria la velocidad axial alcanza el valor  $U$  periódicamente en un tiempo  $\pi/\omega$  y en una distancia igual al espesor de la capa límite  $\delta$ , en el centro de la arteria dominan las fuerzas inerciales y junto a la pared las fuerzas viscosas pero a la distancia  $\delta$  ambas fuerzas son del mismo orden. Igualando ambas fuerzas tenemos,

$$\rho\omega U = \frac{\mu U}{\delta^2} \quad (3.2-8)$$

De donde resulta que,

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} = a/W \quad (3.2-9)$$

Siendo  $a$  el radio de la arteria, por lo que cuanto mayor sea el número de Womersley menor será el espesor de la capa límite, lo que quiere decir que si  $W$  es grande el efecto de la viscosidad del fluido no se propaga muy lejos de la pared y la parte central se comportará casi como si el fluido fuera no viscoso, esto es con un perfil de velocidad bastante plano. Por otra parte como  $W = a\sqrt{\omega/\nu}$  se aprecia que  $W$  crece con la raíz cuadrada de la frecuencia  $\omega$  característica del flujo, es decir con la inversa de la raíz cuadrada de los tiempos característicos del flujo. Considerando que  $a^2/\nu$  es del orden del tiempo necesario para que una perturbación en el flujo se propague por viscosidad una distancia  $a$  y que  $\omega$  es del orden de  $1/T$  siendo  $T$  el periodo de las oscilaciones, tenemos otra interpretación muy interesante del número de Womersley como cociente de tiempos,

$$W^2 = \frac{\text{Tiempo característico de difusión del momento lineal}}{\text{Periodo característico del flujo pulsante}}$$

El número de Womersley ( $W$ ) se define también como el producto de los números de Reynolds y Strouhal,

$$W^2 = Re \cdot St = \frac{Ua}{\nu} \frac{\omega a}{U} = \frac{\omega a^2}{\nu} \quad (3.2-10)$$

Poniendo como valores para la aorta humana:  $a=0.015$  m,  $\nu=4,0e-6$  m<sup>2</sup>/s. y  $\omega = 2\pi$  rad/s, se obtiene como valor típico para la aorta  $W = 18$ . Como el número de Womersley aumenta

con el radio del vaso, el número de Womersley de las arterias más pequeñas será menor que el número de Womersley de la aorta.

McDonald y Womersley [26,27] confirmaron experimentalmente que las fuerzas de inercia no lineales en el flujo arterial son despreciables y que, por tanto, el sistema arterial se puede considerar como un sistema lineal en una aproximación de primer orden y puede ser analizado como un sistema lineal en el dominio de la frecuencia [26]. Es el carácter lineal que tiene la ecuación de NS en este caso, lo que permite aplicar el principio de superposición y obtener el flujo causado por un gradiente de presión periódico dado, sumando los flujos causados por cada uno de los armónicos que aparecen en la transformada de Fourier de dicho gradiente de presión.

Para obtener la distribución radial del flujo resultante de un gradiente periódico de presión en un tubo rígido supondremos además que el fluido es newtoniano (hipótesis aceptable para el flujo de la sangre en grandes arterias), uniforme y laminar, pero al contrario que en el flujo de Poiseuille, el modelo de Womersley considera flujos pulsantes en lugar de estacionarios y puede ser aplicado también al flujo de aire en los pulmones que es un flujo periódico sin componente continua [21].

Como el gradiente de presión es una función periódica del tiempo supondremos que admite un desarrollo en serie de Fourier,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \text{Real} \left( \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n e^{i\omega n t} \right) \quad (3.2-11)$$

Dada la linealidad de la ecuación simplificada de NS, que implica la no interacción entre los diferentes armónicos, podemos resolver la ecuación de NS de manera independiente para cada armónico  $a_n$  del gradiente de presión. Para ello expresaremos la velocidad  $u(r, t)$  como suma de las soluciones para los distintos armónicos. La EDP 3.2-7, de segundo orden, se puede resolver para  $n > 0$  por separación de variables, suponiendo soluciones elementales de la forma,

$$u_n(r, t) = f_n(r) e^{i\omega n t} \quad (3.2-12)$$

Que aplicando el principio de superposición nos permiten obtener el perfil de velocidades,

$$u(r, t) = \text{Real} \left( \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n(r, t) \right) = \text{Real} \left( \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(r) e^{i\omega n t} \right) \quad (3.2-13)$$

La ecuación (3.2-7) para el armónico  $n$  que queda reducida a,

$$\frac{(-a_n e^{i\omega n t})}{\rho} = \nu \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad (3.2-14)$$

Para  $n=0$ , la ecuación (3.2-10) se reduce a la ecuación del modelo de Poiseuille cuya solución es el perfil parabólico,

$$u_0(r) = \frac{-a_0}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (3.2-15)$$

Donde  $R = 1$  en variables adimensionales.

Para los términos no estacionarios ( $n > 0$ ),  $f_n(r)$  se calcula haciendo la sustitución

$u_n(r, t) = f_n(r)e^{i\omega n t}$  en la ecuación (3.2-7), dividiendo luego por  $v$  y cancelando el término  $e^{i\omega n t}$ , entonces se observa que  $f_n(r)$  verifica la siguiente EDO,

$$\frac{a_n}{\mu} = \frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_n}{dr} - \frac{i\omega n}{v} f_n(r) \quad (3.2-16)$$

Siendo  $\omega$ , la frecuencia fundamental, que corresponde a la frecuencia cardiaca. La ecuación homogénea correspondiente a la EDO (3.2-14) es,

$$\frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_n}{dr} + \left( \frac{-i\omega n}{v} \right) f_n(r) = 0 \quad (3.2-17)$$

Haciendo el cambio de variable independiente,

$$z = \lambda r \quad \text{donde} \quad \lambda^2 = -\frac{i\omega n}{v} \quad (3.2-18)$$

La ecuación (3.2-15) se convierte en una ecuación diferencial de Bessel de orden  $m=0$ ,

$$y'' + \frac{y'}{z} + \left( 1 - \frac{m^2}{z^2} \right) y = 0 \quad (3.2-19)$$

En la variable  $z = \lambda r$  cuya solución es,

$$f_n(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \quad (3.2-20)$$

La constante  $C_2$  debe ser 0 ya que la función  $Y_0(\lambda r)$  (función de Bessel de segunda especie), no tiene sentido físico para este problema porque  $Y_0(\lambda r) \rightarrow -\infty$  para  $r \rightarrow 0$ .

Para obtener la solución completa de la EDO (3.2-14), necesitamos una solución particular, que podemos suponer constante,  $f_n(r) = C_3$  con lo que la ecuación (3.2-14) queda,

$$\frac{a_n}{\mu} = \frac{-i\omega n}{v} C_3 \quad (3.2-21)$$

De donde resulta que la solución completa de (3.2-14) será,

$$u_n(r) = C_1 J_0(\lambda r) - \frac{-a_n}{i\rho\omega n} \quad (3.2-22)$$

La constante de integración  $C_1$  se calcula imponiendo la condición de no deslizamiento (velocidad nula) en las paredes del tubo ( $u(R)=0$ ) de donde se obtiene,

$$u_n(R) = C_1 J_0(\lambda R) - \frac{-a_n}{i\rho\omega n} = 0 \quad (3.2-23)$$

$$C_1 = \frac{-a_n}{i\rho\omega n J_0(\lambda R)} \quad (3.2-24)$$

Por tanto, la solución completa de (3.2-14) será,

$$f_n(r) = \frac{-a_n}{i\rho\omega n} \left( \frac{J_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)} - 1 \right) \quad (3.2-25)$$

Y el armónico n-ésimo de la velocidad (solución de la EDP 3.2-7) será,

$$u_n(r, t) = f_n(r) e^{i\omega n t} \quad (3.2-26)$$

Sustituyendo (3.2-23) en (3.2-11) obtenemos:

$$u(r, t) = \text{Real} \left( \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{-a_n}{i\rho\omega n} \left( \frac{J_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)} - 1 \right) e^{i\omega n t} \right) \quad (3.2-27)$$

La amplitud relativa de la velocidad  $u_n(r)$  correspondiente a cada armónico, con respecto al flujo de Poiseuille de gradiente de presión  $-a_n$ , se puede escribir en función del radio normalizado adimensional y del número de Womersley  $W$  como,

$$u_n(r) = \text{Real} \left( \frac{4}{W^2} i \left[ 1 - \frac{J_0\left(\frac{3}{i^2} W r\right)}{J_0\left(\frac{3}{i^2} W\right)} \right] \right) \quad (3.2-28)$$

Esta es la ecuación que se ha utilizado en el cálculo de la **Fig. 3.4-1**

### 3.3 Comportamiento en función de la frecuencia

Si el único armónico no nulo del gradiente de presión fuese el termino estacionario  $a_0$ , correspondiente a  $n=0$ , el flujo de Womersley se reduciría al flujo de Poiseuille y, por tanto, la velocidad y el flujo serían respectivamente:

$$u_0(r) = \frac{-a_0}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (3.3-1)$$

$$q = \frac{-\pi R^4 a_0}{8\mu} \quad (3.3-2)$$

Se puede ver que esta solución se obtiene como límite de la solución de Womersley para el caso en que el número de Womersley tiende a cero ( $W \rightarrow 0$ ), basta para ello sustituir  $J_0(z)$  en la expresión de la velocidad por  $1 - \frac{z^2}{4}$  ya que:

$$J_0(z) \cong 1 - \frac{z^2}{4} \quad \text{para } z \rightarrow 0. \quad (3.3-3)$$

En el caso de la aorta, es mejor considerar la aproximación ( $W \rightarrow \infty$ ), donde al cumplirse

$$J_0(iz) \cong \frac{e^z}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{para } z \rightarrow \infty \quad (3.3-4)$$

Resulta,

$$f_n(r) = \frac{a_n R^2}{inW^2\mu} \left( 1 - \exp \left( \sqrt{n} W \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \left( \frac{r}{R} - 1 \right) \right) \right) \quad (3.3-5)$$

Donde observamos, que al tender  $r \rightarrow R$  la velocidad se anula (no deslizamiento) y el término exponencial se hace despreciable cuando  $(1 - \frac{r}{R})W$  es grande, lo que indica que la velocidad es constante en toda la sección del tubo excepto en la zona muy cercana a las paredes donde la velocidad se anula. Este análisis aproximado justifica como el flujo en las arterias se puede considerar como constante para todos los radios excepto en la capa límite próxima a la pared arterial donde se verifica la condición de no deslizamiento y la velocidad llega a 0.

Otra conclusión interesante, se obtiene comparando el término estacionario de la velocidad con el término correspondiente al primer armónico, obteniéndose,

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4a_1}{Wa_0} \quad (3.3-6)$$

Por tanto, vemos que para números de Womersley elevados una pequeña variación en el término estacionario del gradiente de presión  $a_0$  ocasiona una variación en el término estacionario  $u_0$  de la velocidad  $W$  veces mayor.

En la **Fig. 3.4-1**, obtenida con el código que figura en el Anexo, muestra perfiles de velocidad correspondientes a ondas sinusoidales de presión con diferentes números de Womersley calculados con la ecuación (3.2-28). Se observa que para números bajos de Womersley, el perfil de velocidades que se obtiene, es prácticamente el de Poiseuille, mientras que para valores altos del número de Womersley el perfil de velocidades se hace más plano y la velocidad máxima dividida por la velocidad máxima de Poiseuille correspondiente a un gradiente de presión constante igual a la amplitud del gradiente oscilatorio, disminuye.

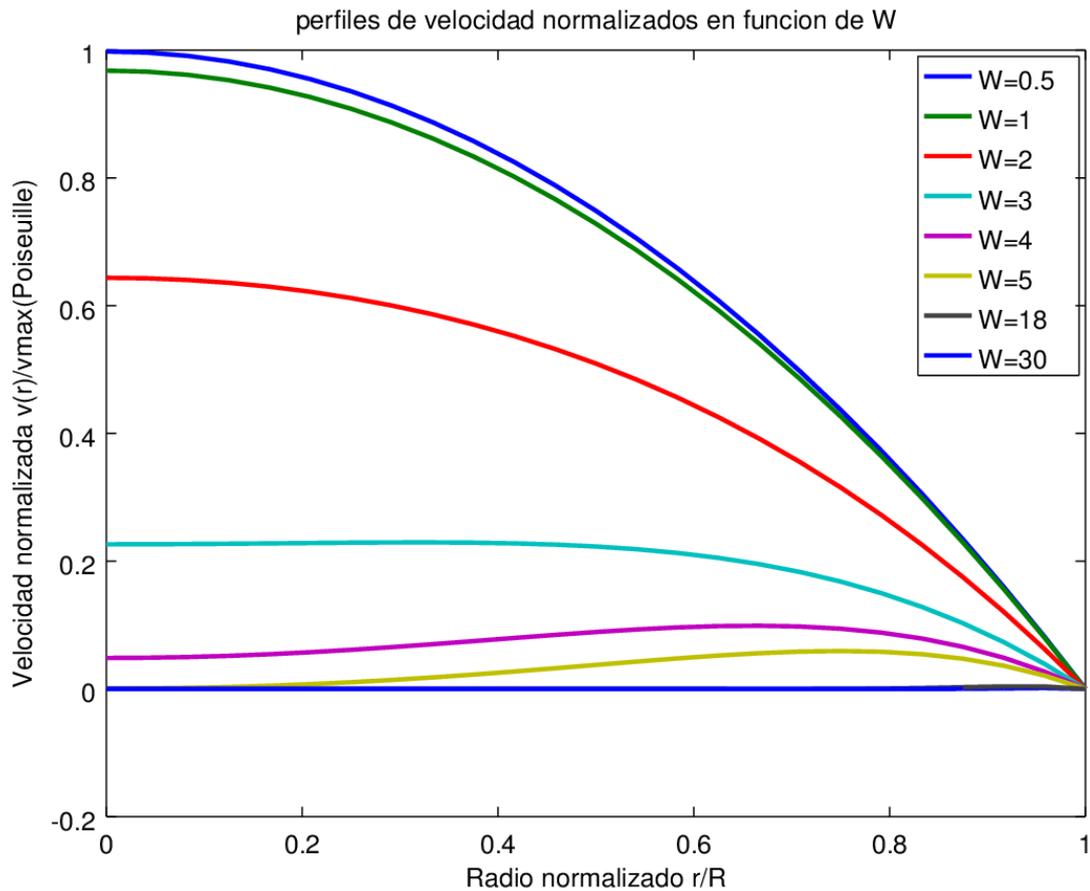
### 3.4 Limitaciones del modelo de Womersley

Aunque el modelo de Womersley permite obtener varias conclusiones correctas sobre los flujos pulsantes, sus hipótesis son bastante restrictivas y limitan la validez de estas conclusiones, siendo este modelo aplicable sólo en las siguientes circunstancias:

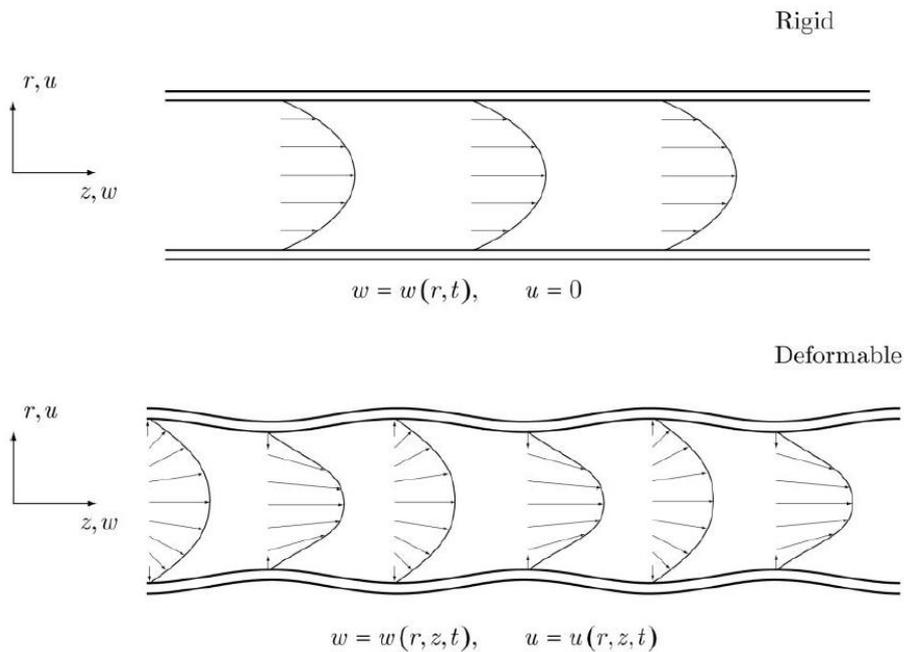
- Tubo con paredes totalmente rígidas, lo que implica ausencia de componentes radiales de velocidad y la uniformidad del flujo (ver Fig. 3.4-2).
- Flujos Newtonianos, unidireccionales y laminares
- Flujos completamente desarrollados, en los que no varía a lo largo del tubo el perfil de velocidades en los distintos radios ( $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ).
- Flujos con velocidad de propagación infinita, que no pueden modelar la propagación de las ondas de flujo y presión en arterias reales
- Flujos cuyo comportamiento es perfectamente lineal y, por tanto, sin interacción entre los distintos armónicos.
- Estos flujos provocan tensiones uniformes en las paredes.

Como la simetría axial, en tubo rígido, implica que  $(u \cdot \text{div})(u)(0,0,0) = 0$ , las fuerzas de inercia son idénticamente nulas y el modelo se puede aplicar a altos números de Reynolds, aunque puede dar resultados no realistas. La aplicación del modelo de Womersley fuera de sus condiciones de validez, puede conducir a conclusiones erróneas.

El modelo de flujo de Womersley para tubos rígidos se puede extender al estudio del flujo en tubos deformables, para su aplicación al flujo en arterias donde permite la observación de ondas de flujo y presión, precisamente debidas a las pequeñas componentes radiales no nulas de la velocidad [24]. La dificultad principal para la extensión del modelo de Wormesley a paredes deformables es que la condición de no desplazamiento es más difícil de imponer ya que la pared arterial se mueve y ese movimiento es de hecho parte de la solución.



**Fig. 3.4-1.** Perfiles de velocidad correspondientes a gradientes de presión sinusoidales con distintos números de Womersley, relativos a la máxima velocidad de Poiseuille, obtenidos para distintos números de Womersley ( $W$ ).



**Fig. 3.4-2 Perfil de velocidades en un tubo rígido y en un tubo deformable. En un tubo deformable hay componentes radiales de la velocidad y la velocidad en un cierto radio no es constante en todo el tubo. Tomada de [24].**

#### 4 Modelos 1D del flujo en grandes arterias

Para superar las limitaciones y dificultades ya descritas de los modelos 0D y de Womersley, se han construido los modelos 1D. Los modelos 1D son modelos distribuidos que descomponen el árbol arterial, o un subconjunto de él, en segmentos con propiedades elásticas y con geometría dependientes únicamente de la coordenada axial.

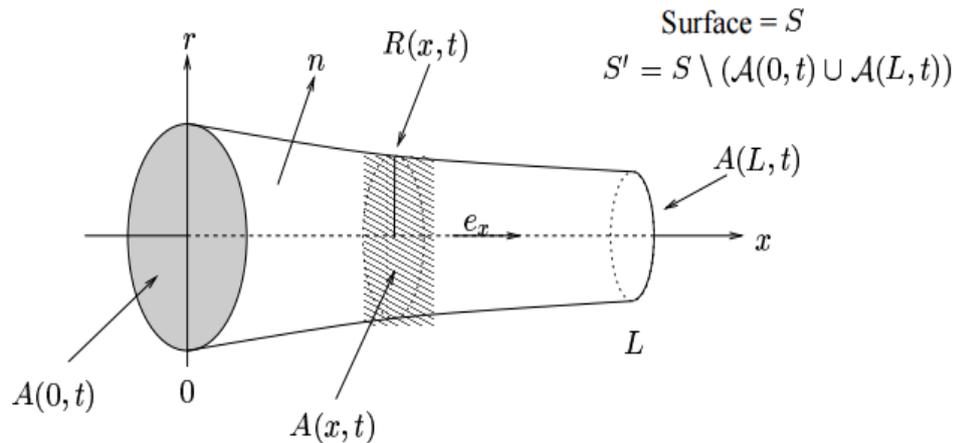
El modelo que se presenta utiliza el mismo procedimiento de simplificación de las ecuaciones de NS escritas para las nuevas variables (flujo medio y presión en cada sección) que los diversos modelos estados del arte [1, 2, 6, 7, 8 y 11], el modelo se acopla a la salida con sistemas WK3. El modelo es adecuado para describir el flujo en las grandes arterias y se basa en las siguientes hipótesis simplificadoras:

- 1) Vasos elásticos con simetría axial en cada sección y estrechamiento progresivo, que en el modelo implementado se ha supuesto exponencial,

$$r(x) = r_t e^{\left(\log\left(\frac{r_b}{r_t}\right)\frac{x}{L}\right)} \quad (3.4-1)$$

Siendo  $r_b$  el radio en el extremo más estrecho de la arteria y  $r_t$  el radio en el extremo inicial más ancho y  $L$  la longitud de la arteria. la geometría de equilibrio es la correspondiente a la presión diastólica  $p(x, t) = p_0$  (**Fig. 2.2-3**).

- 2) Pared impermeable y flexible, que solo sólo sufre deformaciones radiales y ninguna deformación longitudinal, que cumple la condición de velocidad axial nula (no-slip)  $u(x, r, t) = 0$  y en el que la velocidad del fluido en la pared coincide con la velocidad de deformación de la pared.
- 3) Flujo incompresible ( $\rho = \text{cte.}$ ) y Newtoniano ( $\mu = \text{cte.}$ )



**Fig. 3.4-1. Geometría de un trozo de arteria. Tomada de [2]**

#### 4.1 La ecuación de continuidad

Se utilizan coordenadas cilíndricas, con la notación de la **Fig. 3.4-1**. La ecuación de continuidad para flujo incompresible ( $\rho = \text{cte.}$ ) es  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$  y por tanto, en coordenadas cilíndricas, siendo  $u_x$  y  $u_r$  las componentes axial y radial de la velocidad respectivamente la ecuación de continuidad es,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} = 0 \quad (4.1-1)$$

Integrando el segundo término de esta ecuación, en una sección transversal de la arteria y suponiendo el radio  $R$  variable, usando la fórmula para la derivada de una integral con límites variables se obtiene:

$$2\pi \int_0^R \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} dr = 2\pi [ru_r]_R \quad (4.1-2)$$

Por no haber movimientos longitudinales en la pared  $[u_x]_R = 0$  y la velocidad radial en la pared será la velocidad de desplazamiento radial de la pared.

$$[u_r]_R = \frac{\partial R}{\partial t} \quad (4.1-3)$$

Considerando que el área variable de la sección es  $A = \pi R^2$ , podemos expresar el último término de la ecuación 4.1-2 como:

$$2\pi \int_0^R \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} dr = 2\pi [ru_r]_R = 2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \quad (4.1-4)$$

Si introducimos el flujo variable  $q$  en la sección como nueva variable

$$q = 2\pi \int_0^R u_x r dr \quad (4.1-5)$$

La ecuación de continuidad (4.1-1)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0 \quad (4.1-1)$$

expresada en las variables  $q$  y  $A$  queda,

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (4.1-6)$$

## 4.2 La Ecuación de Conservación del Momento

La ecuación de conservación del momento, para flujo incompresible, con simetría axial queda en las coordenadas  $x, r$ ,

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \quad (4.2-1)$$

Donde se ha despreciado el término viscoso longitudinal  $\nu (\partial^2 u_x) / (\partial x^2)$ , porque es pequeño con respecto al término radial, por ser la dimensión longitudinal de las arterias mucho mayor que su dimensión radial. Esta ecuación se puede escribir en forma adimensional mediante el siguiente cambio de variables,

$$r^* = r/a, t^* = t\omega, p^* = p(x, r, t) / \left( \frac{\mu U_0}{a} \right), u_x^* = u_x / U_0, u_r^* = u_r / U_0 \quad (4.2-2)$$

Donde  $a$  es el radio del tubo,  $\omega$  es la frecuencia característica del flujo que para el flujo sanguíneo podemos considerar  $\omega = 1$  Hz,  $U_0$  es la velocidad media de la sangre que para una gran arteria podría ser del orden de 50 cm/s.

Si hacemos estos cambios de variable en (4.2-1) obtenemos la ecuación siguiente escribiendo, de nuevo, sin asterisco, las nuevas variables adimensionales  $r^*, t^*, p^*$  y  $u^*$ ,

$$W^2 \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right) \quad (4.2-3)$$

Los términos de la izquierda representan la aceleración total axial y los de la derecha las fuerzas axiales por unidad de masa derivadas del gradiente de presión y del rozamiento viscoso, donde se ha despreciado el rozamiento viscoso longitudinal por que la relación longitud /radio en las arterias es grande.

Siguiendo el mismo proceso de integración en una sección que se ha seguido para la ecuación de continuidad, es preciso calcular la integral correspondiente al termino no lineal, que integrando por partes queda,

$$2\pi \int_0^R \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) r dr = 2\pi \int_0^R \left( ru_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - u_x \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} \right) dr = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\pi \int_0^R u_x^2 r dr \right) \quad (4.2-4)$$

y considerando las expresiones para la derivada de una integral con límites variables y la condición de contorno de no deslizamiento se llega a la siguiente EDP:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\pi \int_0^R u_x^2 r dr \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 2\pi\nu \left[ r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R \quad (4.2-5)$$

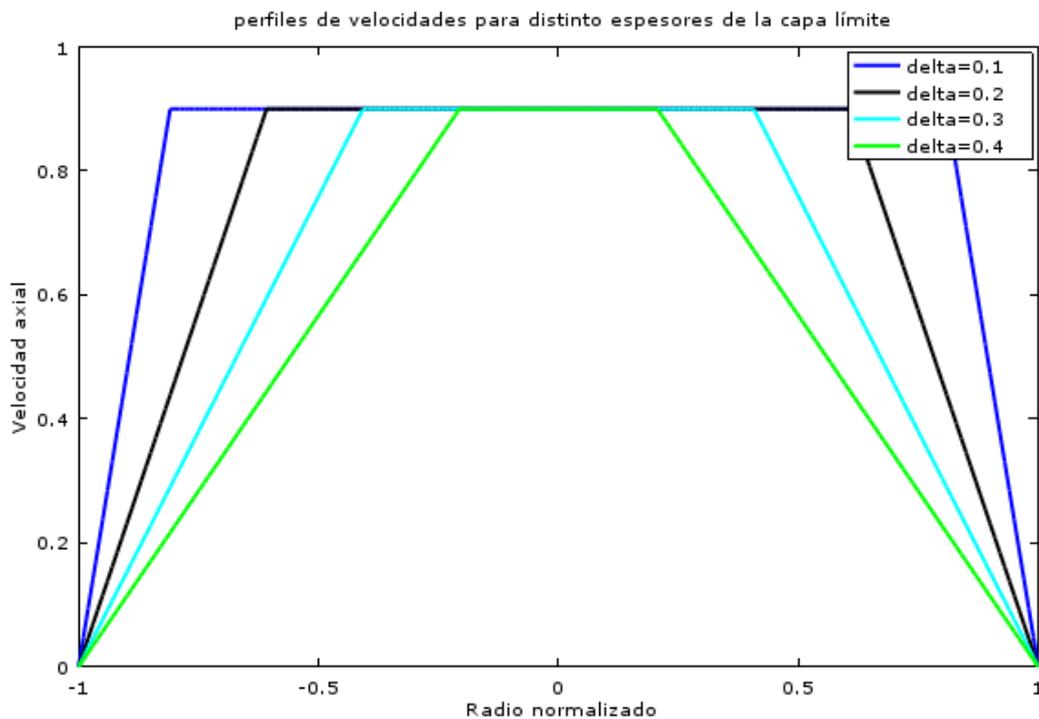
En este momento se introduce como simplificación la forma del perfil  $u_x(r)$ , que en vasos que se estrechan ligeramente y en flujo laminar pulsante es bastante plano. La hipótesis de [6] es que el perfil de velocidad axial es totalmente plano, excepto en las proximidades de la pared (capa límite) de tamaño  $\delta$  y por tanto  $u_x$  tiene la siguiente forma:

$$u_x(x, r) = U(x) \text{ para } r \leq R - \delta \quad (4.2-6)$$

$$u_x(x, r) = \frac{U(x)(R - r)}{\delta} \text{ para } R - \delta \leq r \leq R \quad (4.2-7)$$

Los modelos antiguos del flujo arterial suponían, por simplificación, un perfil parabólico de velocidades, aunque indicaban que en realidad sólo era aplicable a condiciones de flujo laminar y estacionario [36], ya que como se demuestra en [34], el perfil de velocidad es bastante plano en arterias que se estrechan suavemente con flujo laminar, por lo que es bastante razonable suponer un perfil plano de velocidad con una capa límite de espesor,

$\delta = \sqrt{\nu/\omega}$ . La **Fig. 4.2-1** muestra la forma de este perfil de velocidades simplificado para distintos valores del espesor de la capa límite.



**Fig. 4.2-1. Perfil simplificado de velocidades axiales en función del radio normalizado y del espesor de la capa límite**

Donde  $U(x)$  es la velocidad fuera de la capa límite que se supone constante en toda la sección  $A(x, t)$  aunque dependiente de  $x$ .

Según Lighthill [16], el tamaño de la capa límite en las arterias se puede estimar como,

$$\delta = \sqrt{\nu/\omega} \cong 0.1 \text{ cm.}$$

Esta aproximación es de hecho razonable y se puede obtener también como la estimación del espesor de la capa límite para altos números de Reynolds,  $\delta = L/\sqrt{Re}$ , siendo  $Re$  el número de Reynolds  $Re = L u/\nu$ , y la longitud característica la distancia que recorre el fluido en un tiempo  $1/\omega$ , por ser  $\omega$  la frecuencia característica es decir  $L = u/\omega$  resulta,

$$\delta = \frac{\frac{u}{\omega}}{\sqrt{\frac{u}{\omega} \frac{u}{\nu}}} = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \quad (4.2-8)$$

Para una viscosidad cinemática  $\nu = 0.046 \text{ cm}^2/\text{s}$  y  $T = 1\text{s}$  Usando esta expresión en (4.2-5) y (4.2-6), podemos aproximar las integrales de 4.1-5 y (4.2-4) hasta primer orden,  $O(\delta^2)$  como sigue,

$$2\pi \left( \int_0^R u_x r dr \right) = A(x,t)U(x) \left( 1 - \frac{\delta}{R} \right) \quad (4.2-9)$$

$$2\pi \int_0^R u_x^2 r dr = \frac{q^2}{A} \left( 1 + \frac{2\delta}{3R} \right) \quad (4.2-10)$$

El rozamiento viscoso queda,

$$2\pi\nu \left[ r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]_R = -2\pi\nu \frac{R}{\delta} \frac{q}{A} \quad (4.2-11)$$

Y por tanto la ecuación (4.2-3) de conservación del momento en las variables  $q$  y  $A$ , es la siguiente:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -2\pi\nu \frac{R}{\delta} \frac{q}{A} \quad (4.2-12)$$

En esta ecuación se está suponiendo que las tensiones viscosas están perfectamente en fase con la velocidad media  $U(x)$ , lo que no es exacto ya que también dependen de la derivada temporal de la velocidad, pero es una aproximación razonable para el flujo en las grandes arterias.

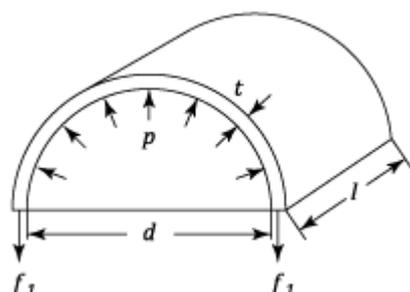
Con las dos ecuaciones de conservación del momento y de continuidad no es posible resolver las tres funciones incógnitas:  $q, A, p$ , se necesita una tercera ecuación que es la ecuación de estado, la cual relaciona el área de cada sección con la presión en esa sección.

### 4.3 Ecuación de estado

Se supone que el comportamiento de la dilatación de la sección de las arterias es puramente elástico lineal en función de la presión. Por tanto, no se está considerando el papel de los músculos blandos que regulan el flujo sanguíneo mediante la compresión de las arterias (se supone que el individuo está en reposo y estos mecanismos no actúan) ni se considera el comportamiento viscoelástico de la pared arterial.

Con estas simplificaciones, la fuerza externa que actúa sobre la arteria es la presión que se debe equilibrar con la tensión en la dirección circular de la arteria **Fig. 4.3-1** siendo  $t$  el grosor efectivo de la pared arterial, si consideramos un semicilindro arterial de longitud  $l$  y radio interior  $r$  la componente vertical de la fuerza en dirección  $+z$ , ejercida por la presión de la sangre sobre el semicilindro será,

$$\text{Fuerza de presión} = (p - p_0)2rl \quad (4.3-1)$$



**Fig. 4.3-1.** La fuerza de tensión circular (flechas verticales hacia abajo) es:  $2t\sigma l$  y se debe igualar a la suma de las componentes verticales de las fuerzas de presión que es:  $(p - p_0)dl$

La fuerza elástica en dirección vertical negativa ( $-z$ ) ejercida por las paredes del semicilindro complementario de la arteria, que es la que compensa la fuerza de presión será:

$$\text{Fuerza de tensión circular} = 2t\sigma l \quad (4.3-2)$$

Siendo  $t$  el espesor de la pared arterial (no confundir con la variable tiempo), por lo que el equilibrio de ambas fuerzas determina la tensión elástica de la pared arterial,

$$\sigma = \frac{r(p - p_0)}{t} \quad (4.3-3)$$

Considerando que la deformación radial se define como,

$$\epsilon_r = \frac{r - r_0}{r} \quad (4.3-4)$$

Suponiendo aplicable la relación de la teoría de elasticidad lineal entre tensión y deformación,

$$\sigma = \frac{E}{(1 - \nu_x \nu_\theta)} \epsilon_r \quad (4.3-5)$$

Donde  $E$  es el módulo de Young en la dirección de la circunferencia y  $\nu_x$  y  $\nu_\theta$  los cocientes de Poisson en las direcciones axial y radial que supondremos de valor  $\frac{1}{2}$  como en [2]. Expresando el radio  $r$  en función del área de la sección  $r = \sqrt{A/\pi}$  y  $r_0 = \sqrt{A_0/\pi}$ , de (4.3-3) obtenemos,

$$p - p_0 = \frac{\sigma t}{r} = \frac{tE}{r(1 - \frac{1}{4})} \left( \frac{r - r_0}{r} \right) \quad (4.3-6)$$

Que finalmente podemos escribir como,

$$p(x, t) - p_0(x) = \frac{4Et}{3r_0} \left( 1 - \sqrt{\frac{A_0}{A}} \right) \quad (4.3-7)$$

Esta ecuación de estado es aproximada y por ejemplo verifica que  $\partial p / \partial A$  disminuye con  $p$ ,

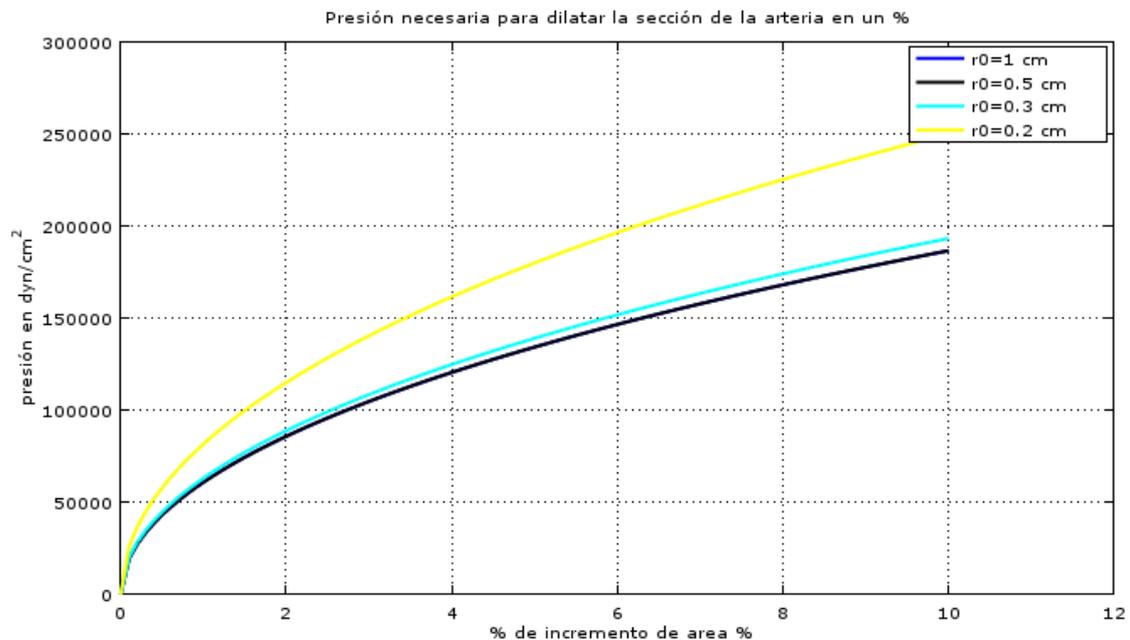
aunque sabemos que en las arterias reales aumenta con  $p$ . Para compensar en alguna medida este efecto, el modelo contempla la variación de  $E$  en distintas posiciones del árbol arterial reflejando los distintos contenidos de elastina de los distintos vasos, en concreto para modelar la mayor rigidez de las arterias pequeñas se convierte  $E$  en la siguiente función, obtenida mediante de estimaciones de compliancia [2], del radio diastólico  $r_0$ ,

$$\frac{Et}{r_0} = k_1 e^{k_2 r_0} + k_3 \quad (4.3-8)$$

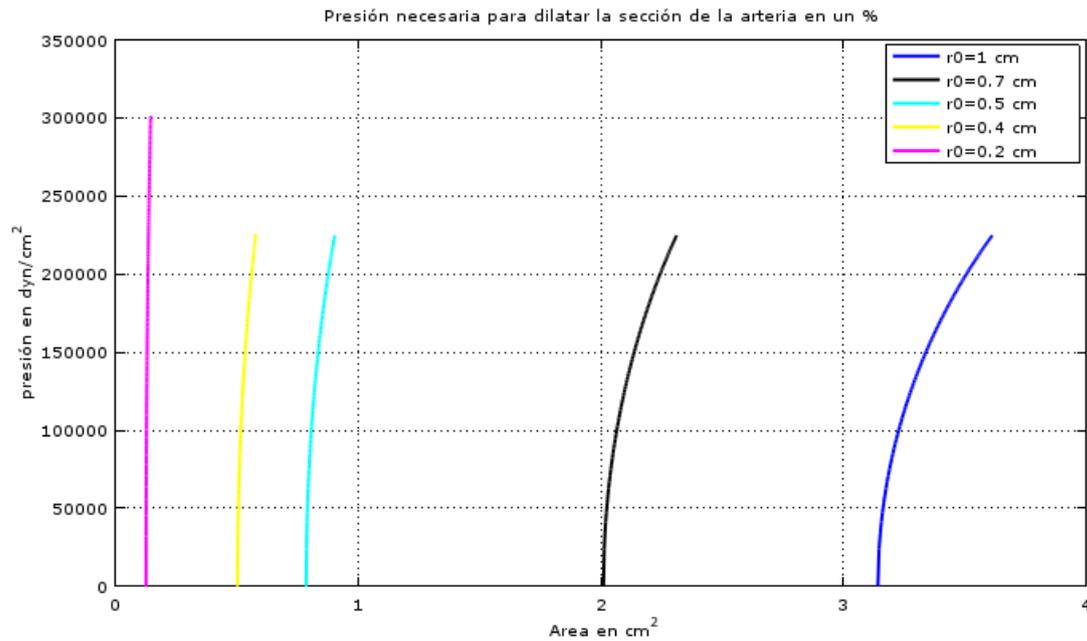
Siendo:  $k_1=2,0e7 \text{ g/s}^2 \text{ cm.}$ ;  $k_2= -22.53/\text{cm.}$  y  $k_3= 8,65e5 \text{ g/s}^2 \text{ cm.}$  [2], se obtiene un valor para la aorta de,

$$\frac{Et}{r_0} = 2 \cdot 10^6 \text{ g} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-1} \quad (4.3-9)$$

Las figuras **Fig. 4.3-2** y **Fig. 4.3-3** muestran el comportamiento del área de la sección de la arteria con la presión para arterias de distintos radios según este modelo viscoelástico.



**Fig. 4.3-2.** Esta figura muestra el fuerte incremento de presión, que predice el modelo viscoelástico, necesario para aumentar el área de la sección de la arteria en distintos porcentajes para arterias de diferentes radios. Se observa que al disminuir el radio de la arteria esta se hace más rígida y se necesita una presión mayor para dilatarla el mismo porcentaje.



**Fig. 4.3-3- Variación del de la presión con el área de la sección de la arteria para Arterias de distintos radios. Se observa como el modelo viscoelástico reproduce el hecho de que las arterias se hacen más rígidas al disminuir su radio y como con grandes variaciones de presión apenas modifican su área.**

#### 4.4 Sistema de ecuaciones hiperbólicas de primer orden

Podemos eliminar la variable presión de la ecuación de estado, considerando que  $p$  es función de  $r_0$  y de  $A$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (4.4-1)$$

Sustituyendo  $\frac{\partial p}{\partial x}$  en la ecuación (4.2-15)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -2\pi \frac{R}{\delta R_e} \frac{q}{A} \quad (4.4-2)$$

Se obtiene la ecuación,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} \right) = -2\pi \frac{R}{\delta R_e} \frac{q}{A} \quad (4.4-3)$$

Que, junto con la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (4.4-4)$$

Forman un sistema que se puede escribir en forma matricial como,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + M \frac{\partial u}{\partial x} = C \quad (4.4-5)$$

Siendo  $C$  un vector constante en cada sección,  $u$  el vector,  $u = \begin{bmatrix} A \\ q \end{bmatrix}$  y  $M$  la matriz,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{A^2} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} & \frac{2q}{A} \end{bmatrix} \quad (4.4-6)$$

Usando la ecuación de estado 4.3-6 para calcular  $\frac{\partial p}{\partial A}$  se puede escribir como,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{A^2} + \frac{Af(r_0)}{2\rho} \sqrt{\frac{A_0}{A^3}} & \frac{2q}{A} \end{bmatrix} \quad (4.4-7)$$

Siendo,

$$f(r_0) = k_1 e^{k_2 r_0} + k_3 \quad (4.4-8)$$

$$\frac{df}{dr_0} = \frac{4}{3} k_1 k_2 e^{k_2 r_0} \quad (4.4-9)$$

Y siendo  $C$  el vector constante,

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{(C_1 A + C_2 \sqrt{A})}{\rho} - \frac{C_3}{A} \end{bmatrix} \quad (4.4-10)$$

Con,

$$C_1 = \frac{df}{dr_0} \frac{dr_0}{dx} \quad (4.4-11)$$

$$C_2 = \left( \frac{df}{dr_0} \sqrt{A_0} + f \sqrt{\pi} \right) \frac{dr_0}{dx} \quad (4.4-12)$$

$$C_3 = \frac{2\pi\nu q R}{\delta} \quad (4.4-13)$$

El sistema hiperbólico no homogéneo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + M \frac{\partial u}{\partial x} = C \quad (4.4-5)$$

Se puede poner en forma canónica [37], calculando sus autovalores  $\lambda_1(x, t)$  y  $\lambda_2(x, t)$  que supondremos reales y distintos y la matriz  $P$  cuyas columnas son los autovectores linealmente independientes correspondientes a estos autovalores.

Haciendo el cambio de variable  $v = P^{-1}u$ , es decir  $u = Pv$ , el sistema (4.4-5) se convierte en,

$$P \frac{\partial v}{\partial t} + MP \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} v + M \frac{\partial P}{\partial x} v = C(x, t, Pv) \quad (4.4-14)$$

Multiplicando la ecuación anterior por la izquierda por  $P^{-1}$  resulta,

$$P^{-1}P \frac{\partial v}{\partial t} + P^{-1}MP \frac{\partial v}{\partial x} + P^{-1} \frac{\partial P}{\partial t} v + P^{-1}M \frac{\partial P}{\partial x} v = P^{-1}C(x, t, Pv) \quad (4.4-15)$$

Como  $P^{-1}P$  es la matriz unidad y  $D = P^{-1}MP$  es la matriz diagonal,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x, t) \end{pmatrix} \quad (4.4-16)$$

formada con los autovalores de  $M$ . Agrupando a la derecha los términos de (4.4-15)

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = s_1(x, t, v_1, v_2) \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} = s_2(x, t, v_1, v_2) \end{aligned} \quad (4.4-19)$$

que no contienen derivadas de  $v$ , resulta el siguiente sistema de ecuaciones EDP en el que las partes principales (términos con derivadas) están desacopladas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \lambda_1(x, t) \frac{\partial v_1}{\partial x} &= s_1(x, t, v_1, v_2) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \lambda_2(x, t) \frac{\partial v_2}{\partial x} &= s_2(x, t, v_1, v_2) \end{aligned} \quad (4.4-17)$$

Por cada punto  $(x, t)$  del plano pasan dos curvas soluciones de las siguientes EDO,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda_1(x, t) \\ \frac{dx}{dt} &= \lambda_2(x, t) \end{aligned} \quad (4.4-18)$$

Estas curvas se denominan las curvas características del sistema hiperbólico (4.4-5). El significado físico de estas ecuaciones es que los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las velocidades de propagación de las ondas que a partir de cada punto se propagan en direcciones opuestas (onda directa y onda reflejada). A lo largo de estas curvas características el sistema de EDP hiperbólico queda reducido al siguiente sistema EDO,

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = s_1(x, t, v_1, v_2) \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} = s_2(x, t, v_1, v_2) \end{aligned} \quad (4.4-19)$$

Los autovalores de la matriz  $M$  en concreto, son la solución de la siguiente ecuación de segundo grado en  $\lambda$ :

$$\lambda^2 - \frac{2q\lambda}{A} + \left( \frac{q^2}{A^2} - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} \right) = 0 \quad (4.4-20)$$

Cuyas soluciones son,

$$\lambda_i = \frac{q}{A} \pm \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A}} = \frac{q}{A} \pm c_0 \quad (4.4-21)$$

El significado físico de estos autovalores  $\lambda_i$  es que las velocidades de propagación de las ondas de flujo directa y reflejada no son iguales en valor absoluto porque aparece sumada a la velocidad local de la sangre  $q/A$  que posee el mismo signo para ambas ondas. La matriz diagonal  $D$  del sistema (4.4-15) en forma canónica es,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1(x,t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{A} + c_0 & 0 \\ 0 & \frac{q}{A} - c_0 \end{pmatrix} \quad (4.4-22)$$

La matriz  $P$  cuyas columnas son los autovectores de  $M$  es:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{q}{A} + c_0\right)^{-1} & \left(\frac{q}{A} - c_0\right)^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4-23)$$

De donde resulta que haciendo el cambio de variables  $v = P^{-1}u$ , el sistema EDO, en las variables originales  $q$  y  $A$  que define las curvas características (4.4-17) toma la forma:

$$\frac{dA}{dt} + \left(-\frac{q}{A} \pm c_0\right)^{-1} \frac{dq}{dt} = H^\pm \quad (4.4-24)$$

Donde,

$$H^\pm = - \left(-\frac{q}{A} \pm c_0\right)^{-1} \left(\frac{c_1 A + c_2 \sqrt{A}}{\rho} + \frac{c_3}{A}\right) \quad (4.4-25)$$

## 4.5 Ecuaciones adimensionales de continuidad y momento

Para reducir los problemas numéricos de la resolución de estas ecuaciones conviene proceder a su adimensionalización mediante el siguiente cambio de variables en las ecuaciones

$$x^* = \frac{x}{r_c}, r_0^* = \frac{r_0}{r_c}, q^* = \frac{Q}{q_c}, A^* = \frac{A}{r_c^2}, t^* = \frac{t q_c}{r_c^3}, p^* = \frac{p r_c^4}{\rho q_c^2} \quad (4.5-1)$$

Donde para la aorta,  $r_c = 1 \text{ cm}$ , que es un radio característico,  $q_c = 20 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$  que corresponde a un flujo medio típico en la aorta y  $\rho = 1,06 \text{ g/cm}^3$  que es la densidad media de la sangre.

Con este cambio de variables las ecuaciones (4.5-1) y (4.5-2), mantienen la misma forma que tenían anteriormente. La ecuación de continuidad queda:

$$\frac{\partial(A^* r_c^2)}{\partial\left(\frac{t^* r_c^3}{q_c}\right)} + \frac{\partial(q^* q_c)}{\partial(x^* r_c)} = \frac{q_c}{r_c} \left(\frac{\partial A^*}{\partial t^*} + \frac{\partial q^*}{\partial x^*}\right) = 0 \quad (4.5-3)$$

Que tiene la misma forma que la ecuación 4.4-1, una vez simplificada la constante  $\frac{q_c}{r_c}$  y eliminado el \* de los nombres de las variables queda,

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (4.5-4)$$

La ecuación de conservación del momento se puede escribir [2], después de hacer el cambio de variables y después de prescindir del “\*” en el nombre de las variables como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} + f\sqrt{A_0 A} \right) = & - \frac{2\pi r}{\delta \cdot R_e \cdot A} q + \\ & \left( 2\sqrt{A} \left( \sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} \frac{df}{dr_0} \right) - A \frac{df}{dr_0} \right) \frac{dr_0}{dx} \end{aligned} \quad (4.5-5)$$

Siendo  $R_e$  el número de Reynolds,

$$R_e = \frac{q_c}{\nu r_0} \quad (4.5-6)$$

## 5 Resolución Numérica por el método de las características

Los métodos numéricos elegidos para la resolución de este problema han sido el método de las curvas características [1], [2], [18] y [19] y el método de diferencias finitas de Lax-Wendroff. Se han elegido estos métodos con convergencia de primer orden y convergencia de segundo orden respectivamente, en lugar del método de elementos finitos discontinuos de Galerkin o del método de volúmenes finitos (FVM), que poseen mejores propiedades de convergencia, por su mayor sencillez de programación y por lo limitado del tiempo de realización del trabajo. Se ha implementado el modelo completo de simulación de manera general en MATLAB como se muestra en el Anexo y se han obtenido en particular los flujos y presiones mostrados en las figuras **Fig. 7.1-1** a **Fig. 7.2-36** para el conjunto de parámetros de la **Fig. 4.5-1**:

Parámetros del ejemplo simulado	Valores
Longitud del segmento de arteria	16cm
Radio superior	entre 1,2 cm y 1 cm
Radio inferior	1 cm
Condición de contorno de entrada	$q_c=50 \text{ cm}^3$ y $q_c=60 \text{ cm}^3$
$\Delta x$	0,01 mm
$\Delta t$	0,1 ms
Tiempo total simulado	2s
densidad	1,060 g/cm <sup>3</sup>
viscosidad cinemática	0,046 cm <sup>2</sup> /s
espesor de la capa límite ( $\delta$ )	0,8mm
Frecuencia del ciclo de entrada	1Hz
Modelo elástico	$k_1=2.0e-7$ $k_2=-22.53$ $k_3=8.65e5$
Parámetros de la condición de contorno de salida WK3	R1 entre 100 y 200 R2 entre 200 y 500 C entre $9e-4$ y $9e-3$
Números de Reynolds	Entre 800 y 1350
Números Womersley	Entre 12 y 15

**Fig. 4.5-1. Parámetros concretos usados en el ejemplo de simulación cuyos resultados se muestran en el presente trabajo**

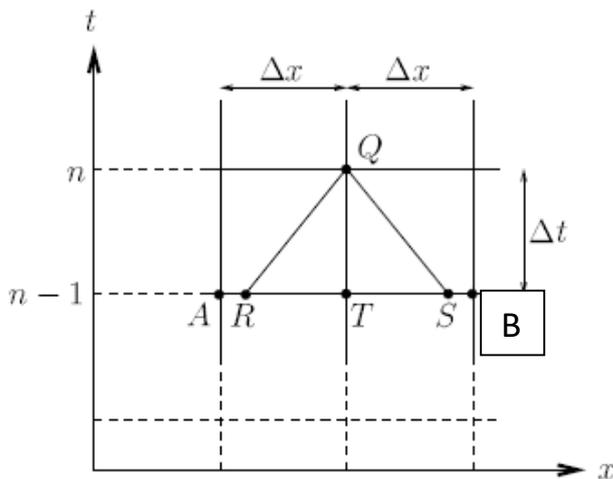
Para resolver el problema se debe definir una malla discreta y fijar las condiciones de contorno adecuadas. Esto se describe en los siguientes párrafos

### 5.1 Definición de la malla

Para asegurar la convergencia es preciso que los pasos de la malla  $\Delta x$  y  $\Delta t$  y cumplan la condición CFL (Courant-Friedrichs-Levy 1928) siguiente,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \left| \frac{q_i}{A_i} \mp c_i \right|^{-1} \quad (5.1-1)$$

Esta condición asegura que la curva característica positiva que llega a un vértice  $Q = (i\Delta x, n\Delta t)$  desde la izquierda, corta a la recta  $t = (n-1)\Delta t$  en un punto  $R$  tal que  $(i-1)\Delta x < x_R < i\Delta x$ , **Fig. 5.1-1**. En el ejemplo, con el que se han obtenido los resultados, se ha elegido un paso de tiempo muy pequeño 0,1 milisegundos y un paso de espacio suficientemente grande 1 mm para asegurar el cumplimiento de la condición CFL, es decir:  $\Delta t = 0,1$  ms., y  $\Delta x = 1$ mm.



**Fig. 5.1-1**, la condición CFL garantiza que las curvas características que llegan al punto  $Q$  desde la derecha y desde la izquierda salen de puntos  $R$  y  $S$  pertenecientes a celdas adyacentes al punto  $Q$  en el instante de anterior, esto es:  $x_A < x_R < x_T < x_S < x_B$ . Esta es precisamente la caracterización geométrica de la condición CFL. Tomada de [2]

### 5.2 Condición de contorno en bifurcaciones

Si la bifurcación se modela como ocurriendo en un punto necesita, para fijar los valores de  $q$  y  $p$  (A) en las dos bifurcaciones de tres ecuaciones adicionales en [18] se han fijado las siguientes condiciones simplificadas (**Fig. 5.2-1**).

- Flujo de entrada a la bifurcación  $q_1$  igual a la suma de flujos de las arterias hijas  $q_2$  y  $q_3$ , por tanto, en la bifurcación habrá una condición de contorno de salida para las ecuaciones de la arteria padre y una condición de contorno de entrada para cada

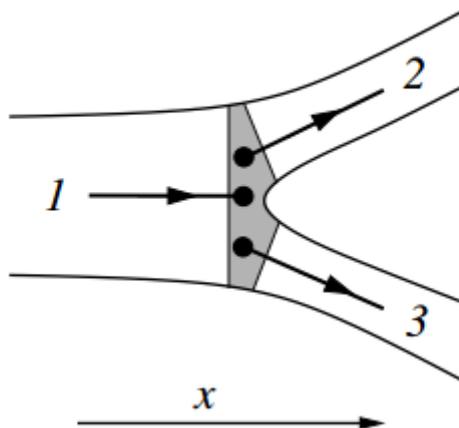
arteria hija verificándose,

$$q_1 = q_2 + q_3 \quad (5.2-1)$$

- b. Para encontrar la relación entre las presiones medias de la arteria padre y las arterias hijas en la bifurcación, se omite la región de la bifurcación (zona sombreada de la **Fig. 5.2-1**), y la condición de contorno relaciona los valores a uno y otro lado de esta región sombreada que no se estudian con detalle. Para encontrar esta relación se utiliza la conservación del momento lineal transportado por el fluido a través de la región sombreada (despreciando separación, pérdidas y formación de vórtices) según la ecuación de Bernouilli,

$$p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} = p_3 + \frac{\rho u_3^2}{2} \quad (5.2-2)$$

Los fenómenos de separación de flujo que se pueden producir en el cambio brusco de dirección del flujo en la bifurcación y que pueden jugar un papel fundamental en la explicación de ciertas patologías relacionadas con la arterioesclerosis, obviamente, no pueden ser modelados con las condiciones anteriores.



**Fig. 5.2-1. Diagrama de bifurcación de una arteria, las condiciones de la bifurcación son la conservación del flujo total y la conservación de las presiones dinámicas. Tomada de [11]**

### 5.3 Cálculo de puntos interiores

Los valores de  $q$  y de  $A$  en cada punto interior  $Q$  en el instante  $t = n \Delta t$  se estiman a partir de los valores en ese mismo punto y en el anterior y posterior en el instante  $t - \Delta t$

Para estimar los valores de  $q$  y  $A$  en punto  $Q$ , en primer lugar, se calculan las coordenadas espaciales de los puntos  $R$  y  $S$  (**Fig. 5.1-1**) cuyas características llegan al punto  $Q$ .

$$x_R = x_Q - \left( \frac{q_R}{A_R} + c_R \right) \Delta t \quad (5.3-1)$$

$$x_S = x_Q + \left( \frac{q_S}{A_S} - c_S \right) \Delta t \quad (5.3-2)$$

Este cálculo requiere, resolver cada una de estas ecuaciones no lineales mediante el método de Newton o de iteraciones sucesivas (el utilizado en la implementación del Anexo), porque  $c_R, c_S, \frac{q_R}{A_R}$  y  $\frac{q_S}{A_S}$ , son funciones no lineales de  $x_R$  y  $x_S$ .

A continuación, se calculan las variables  $q_Q$  y  $A_Q$ , en el punto Q en el instante  $t_n$  a partir de los valores de  $q$  y  $A$  en el instante  $t_{n-1}$  en los puntos R, S y T sustituyendo en las ecuaciones de las dos curvas características, que salen de los puntos R y S respectivamente y llegan a Q y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones con las dos incógnitas relativas al punto,

$$Q = (A_Q, q_Q) \quad (5.3-3)$$

$$f_R A_Q + q_Q = h_R \quad (5.3-4)$$

$$f_S A_Q + q_Q = h_S \quad (5.3-6)$$

Siendo,

$$f_R = c_R - \frac{q_R}{A_R} \quad (5.3-7)$$

Siendo los términos independientes  $h_R$  y  $h_S$  obtenidos a partir de las correspondientes curvas características que salen de los puntos R y S.

El código MATLAB que implementa el cálculo de  $Aq$  y  $qQ$  en los puntos interiores de la malla con el algoritmo anterior, es la función  $qQAQ$  del Anexo.

## 5.4 Condición de contorno de flujo de entrada

En el punto de entrada  $x=0$ , conocemos el flujo  $q(0, t)$ , y para conocer el valor de A en el instante n sólo necesitamos obtener la información adicional de la curva característica negativa que llega al punto  $x=0$  desde el instante  $n-1$ .

El flujo  $q(0, t)$  representa la condición de contorno define el flujo pulsante a la entrada de la arteria y se ha establecido en los cálculos de ejemplo realizados como, **Fig.**

### 5.4-1

$$q(0, t) = q_0 \frac{t}{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \text{ para } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \quad (5.4-1)$$

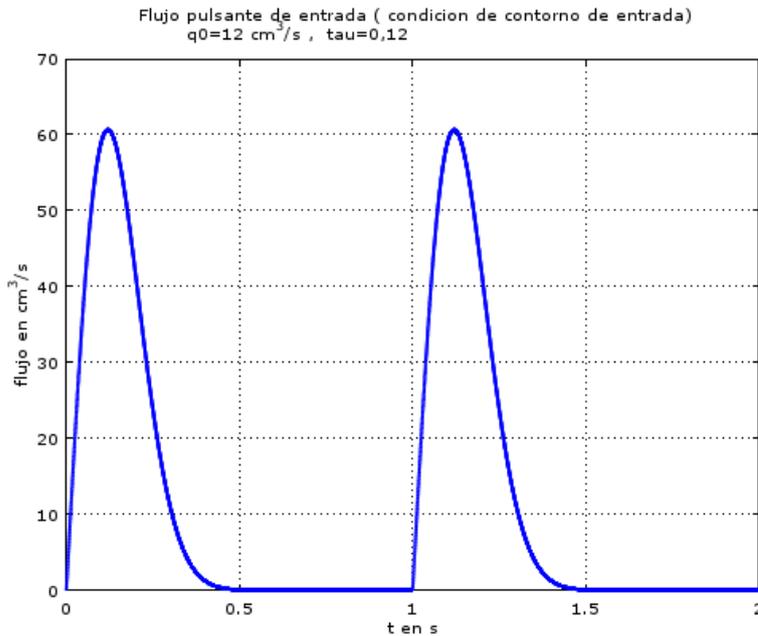
$T$  es el periodo del flujo pulsante que se ha definido, en el ejemplo, como 1s.

$$q(0, t + jT) = q(0, t); \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (5.4-2)$$

Siendo  $q(0, t)$  el flujo de entrada a la aorta y  $\tau$  el instante del ciclo en el que es máximo el flujo de entrada a la arteria. Como condición inicial fijaremos que en el instante  $t=0$  los flujos y presiones son nulos:

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= 0 ; \quad \forall x \\ & y \\ q(x, 0) &= 0 ; \quad \forall x \end{aligned} \quad (5.4-3)$$

La **Fig. 5.4-1** muestra la forma periódica de flujo de entrada, que simula el flujo de entrada a la aorta, utilizado en los ejemplos numéricos de este trabajo.



**Fig. 5.4-1:** Flujo periódico de entrada utilizado en los ejemplos numéricos. Este flujo constituye la condición de contorno de entrada del ejemplo.

## 5.5 Condiciones de contorno de entrada y salida

A cada punto  $Q$  de la entrada ( $x=0$ ) llega una característica negativa desde el instante anterior que permite calcular la presión (función del área  $A$ , a través de la ecuación de estado) en dicho instante, en la entrada. El cálculo se realiza, igual que en el caso de puntos interiores, resolviendo el sistema (5.5-1), (5.5-2), localizando previamente el punto  $S=(q_S, A_S)$  del instante anterior, del que sale la curva característica negativa que llega al punto  $Q$ .

$$x_Q - x_S = \left( \frac{q_Q}{A_S} - c_S \right) \Delta t \quad (5.5-3)$$

$$A_Q - A_S + \frac{q_Q - q_S}{-\frac{q_S}{A_S} - c_S} = H_S^- \Delta t \quad (5.5-4)$$

En el punto de salida  $x=L$ , se establece una condición de contorno tipo OD WK de 3 elementos, que simula el comportamiento entre presiones y flujos en la zona no modelada constituida por arterias pequeñas, arteriolas y capilares a las que va conectada la salida de la arteria **Fig. 3.1-6**. En la **Fig. 5.5-1**[17] figuran los valores concretos de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C_T$ , utilizados en la literatura para simular condiciones de salida en distintas arterias en función de su radio. En los ejemplos numéricos de este trabajo se han tomado los valores correspondientes a grandes arterias.

ARTERY DATA

Artery Nr.	Type	$R_{top}$ [cm]	$R_{bot}$ [cm]	$Q_{mean}$ [ml/s]	Length [cm]	$R_1$ [g/(cm <sup>4</sup> s)]	$R_2$ [g/(cm <sup>4</sup> s)]	$C_T$ [(cm <sup>4</sup> s <sup>2</sup> )/g]
1	Large	1.25	1.14	50	7.0	106	424	9.43e-4
2	Medium	0.43	0.37	5.7	7.0	848	3392	9.43e-6
3	Small	0.16	0.14	0.7	7.0	1696	6784	9.43e-7

### Fig. 5.5-1. Datos de arterias típicas y WK con tres elementos que las simulan. Tomados de [17]

Que permite estimar el flujo de salida usando la ecuación (3.1-23). Los parámetros del modelo WK utilizado tienen gran influencia sobre el flujo resultante como se puede ver, por ejemplo, en la **Fig. 7.1-2** y **Fig. 7.1-3**, que se diferencian solamente en el valor de la capacidad del capacitor del WK3. En [31], donde se propone la utilización de modelos 1D para estudios sobre pacientes específicos, se hace énfasis en la importancia de la estimación correcta de los parámetros del modelo WK3 de condición de contorno de salida para estas simulaciones.

A cada punto Q correspondiente a la salida  $x=L$ , llega una característica positiva desde el instante anterior que permite calcular la presión (en función del área de la sección a la salida A) en dicho instante, el cálculo se realiza, igual que en el caso de puntos interiores, de la manera siguiente

$$x_R = x_Q - \left( \frac{q_R}{A_R} + c_R \right) \Delta t \quad (5.5-5)$$

$$A_Q - A_R + \frac{q_Q - q_R}{-\frac{q_R}{A_R} + c_R} = H_R^+ \Delta t \quad (5.5-6)$$

Donde se utiliza en lugar de  $q_Q$  el valor calculado por el Windkessel de la salida.

Las ecuaciones anteriores forman un sistema no lineal en  $x_R$  y  $A_Q$ , que se puede resolver por el método de Newton, una vez que se conoce  $q_Q$  que es el valor proporcionado por el WK3.

La función de respuesta del WK3, se ha implementado aplicando las ecuaciones de Kirchoff al circuito correspondiente según las ecuaciones (3.1-22) y (3.1-23), no solamente por ser un procedimiento muy sencillo de implementar, sino porque el RK4 requiere el conocimiento de la derivada de la función  $p(t)$  en puntos intermedios del intervalo  $(t^{n-1}, t^n)$  y no se puede aplicar en el acoplamiento del WK3 como condición de salida al desconocerse la derivada de la presión en los puntos intermedios del intervalo  $(t^{n-1}, t^n)$  que se está calculando. De todos modos, las Fig. 3.1-8 y Fig. 3.1-9 muestran que el algoritmo de Kirchoff y la integración RK 4 dan resultados prácticamente coincidentes.

## 6 Cálculo del modelo 1D por el método de Lax-Wendroff

### 6.1 Formulación del modelo y notación

Para la aplicación del algoritmo de Lax-Wendroff es necesario expresar las ecuaciones de continuidad y de conservación del momento (4.2-12) en forma conservativa (6.1-1)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} + B \right) = \text{Terminos fuente} \quad (6.1-2)$$

Para llegar a la forma conservativa es preciso hacer el siguiente cambio de variables que pasa de la variable  $A(x, p)$  a la variable  $B(x, p)$  siendo:

$$B(r_0(x), p) = \frac{1}{\rho} \int_{p_0}^{p(x,t)} A(r_0(x), p') dp' \quad (6.1-3)$$

Por la regla de la cadena se cumple,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{dr_0}{dx} \frac{\partial B}{\partial r_0} \quad (6.1-4)$$

Con lo que la ecuación del momento (4.2-12) expresada en función de q y B queda:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} + B \right) = -2\pi R \frac{1}{\delta R_e} \frac{q}{A} + \frac{dr_0}{dx} \frac{\partial B}{\partial r_0} \quad (6.1-5)$$

El punto de partida del método de Lax-Wendroff es el modelo formulado en forma conservativa (4.5-4) y (4.5-5). La ecuación de conservación del momento se puede escribir [2], en variables adimensionales y considerando el modelo viscoelástico propuesto, como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{A} + f\sqrt{A_0 A} \right) = \\ - \frac{2\pi r}{\delta \cdot R_e \cdot A} q + \left( 2\sqrt{A} \left( \sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} \frac{df}{dr_0} \right) - A \frac{df}{dr_0} \right) \frac{dr_0}{dx} \end{aligned} \quad (6.1-6)$$

Siendo  $R_e$  el número de Reynolds,

$$R_e = \frac{q_c}{vr_c} \quad (6.1-7)$$

Con lo que el sistema formado por la ecuación de continuidad y la del momento se puede escribir de forma conservativa compacta de la manera siguiente,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (6.1-8)$$

Siendo  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{S}$  los vectores,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ q \end{pmatrix}; \text{ variables a integrar} \quad (6.1-9)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{A} + f\sqrt{A_0 A} \end{pmatrix}; \text{ Flujos del sistema conservativo} \quad (6.1-10)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \frac{2\pi r}{\delta R_e} \frac{q}{A} + \left( 2\sqrt{A} \left( \sqrt{\pi} f + \sqrt{A_0} \frac{df}{dr_0} \right) - A \frac{df}{dr_0} \right) \frac{dr_0}{dx} \end{pmatrix}; \text{ términos fuente} \quad (6.1-11)$$

Las condiciones de contorno de flujo en entrada, y WK3 salida, así como la condición inicial son las mismas que en el algoritmo basado en las curvas características, por lo que no se repiten aquí.

Se utilizará la siguiente notación, usual en el método de diferencias finitas, para describir los valores de un vector en un nodo de la malla

$$\mathbf{V}(i, j) = \mathbf{V}(i\Delta x, j\Delta t/2)$$

Donde los índices  $i$  y  $j$  pueden tomar valores semienteros, denota los valores del vector  $\mathbf{V}$  que puede ser cualquiera de los vectores  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{S}$ , en el punto de abscisa  $i\Delta x$ , en el instante  $j\Delta t$ .

A continuación, se describen las dos etapas del esquema Lax-Wendroff

## 6.2 Primera etapa del esquema Lax-Wendroff

En cada etapa del método de Lax-Wendroff se calculan los valores correspondientes a dos intervalos de tiempo  $\Delta t/2$ . En la primera etapa se calculan los valores intermedios de  $\mathbf{U}$  correspondientes al primer incremento de tiempo de  $\Delta t/2$ , suponiendo conocidos todos los vectores en el instante  $n\Delta t/2$  mediante el siguiente esquema [35] se obtienen los valores de  $\mathbf{U}$  en el instante intermedio  $(n + 1/2)\Delta t$

$$\frac{U(j, n + \frac{1}{2}) - \frac{(U(j+1, n) + U(j-1, n))}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} = - \left( \frac{F(j+1, n) - F(j-1, n)}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{S(j+1, n) - S(j-1, n)}{2} \right) \quad (6.2-1)$$

Esta expresión permite calcular los valores de  $U(j, n + 1/2)$ , a partir de valores en el tiempo anterior  $t_n$ . Una vez conocidos los valores  $U(j, n + 1/2)$ , se puede proceder a calcular los valores de  $F(j, n + 1/2)$  y  $S(j, n + 1/2)$ , debido a que estos valores exclusivamente son funciones de los valores  $U(j, n + 1/2)$ , que acabamos de calcular como se observa en las ecuaciones (6.1-3) y (6.1-4). Aunque el esquema de aproximación para los valores  $U(j, n + 1/2)$  intermedios, el esquema global que conduce al cálculo de los valores  $U(j, n + 1)$  en la segunda etapa del esquema utilizando estos valores intermedios tiene convergencia de segundo orden es decir los errores en el cálculo de  $U(j, n + 1)$  tienen la forma  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

## 6.3 Segunda etapa del esquema Lax-Wendroff

En esta etapa se obtienen los valores de los vectores en el instante  $(n + 2)\Delta t/2$ , a partir de los vectores en el instante  $(n + 1)\Delta t/2$ , calculados en la etapa 1 mediante el esquema [35],

$$\frac{U(j, n + 1) - U(j, n)}{\Delta t} = - \left( \frac{F(j+1, n + \frac{1}{2}) - F(j-1, n + \frac{1}{2})}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{S(j+1, n + 1/2) - S(j-1, n + 1/2)}{2} \right) \quad (6.3-1)$$

Esta ecuación (6.3-1) permite calcular los valores de  $U(j, n + 1)$  que son los valores de  $U$  en el instante  $(n + 1)\Delta t$ . Una vez conocidos estos valores  $U(j, n + 1)$ , se pueden calcular los valores de  $F(j, n + 1)$  y  $S(j, n + 1)$ , debido a que son funciones directas de  $U(j, n + 1)$ , como se observa en las ecuaciones (6.1-3) y (6.1-4).

En este momento, estamos en las mismas condiciones para proceder a la integración en el siguiente intervalo de tiempo y pasar de los valores ya conocidos para el instante  $t_{n+1}$  que acabamos de calcular, a los valores en el siguiente instante de tiempo  $t_{n+2}$  y así sucesivamente.

## 7 Resultados

En el trabajo se describen en primer lugar y muy brevemente los elementos del sistema cardiovascular, subrayando los aspectos más significativos relacionados con la mecánica de fluidos.

A continuación, se presentan un par de ejemplos de modelos de Windkessel 0D, con dos y tres elementos, que relacionan de manera sencilla los flujos y las presiones en el árbol, pero no pueden analizar las ondas de presión y flujo causadas en el árbol arterial por la presión pulsante del corazón. El modelo Windkessel de tres elementos se utiliza posteriormente acoplado al modelo 1D que se describe e implementa en este trabajo.

Después se describe e implementa en MATLAB la teoría de Womersley (1959) que analiza los flujos en tubos de paredes rígidas y que proporciona un modelo que es una extensión del de Poiseuille para la estimación de la distribución de velocidades axiales y al contrario del de Poiseuille puede analizar el comportamiento de los flujos pulsantes y se extendido al estudio de flujos en tubos flexibles y estimar en ellos las correspondientes ondas de presión y flujo.

Finalmente se describe e implementa completamente en MATLAB de manera general, el modelo 1D de las ecuaciones de NS, expuesto este trabajo, y que utiliza la versión 1D de las ecuaciones de NS y de la ecuación de continuidad en las variables flujo medio y presión. Estas ecuaciones en las variables flujo medio y presión son usadas en prácticamente todos los modelos 1D estado del arte, por ejemplo, en los modelos presentados en las referencias [1,2,6,7 y 8]. El modelo describe cada arteria como un cilindro de radio decreciente con el módulo de Young creciente a medida que disminuye el radio. El modelo es extensible al árbol arterial completo como se indica en [1,2,5,6] para lo cual se modelan las bifurcaciones del árbol arterial, como quedó explicado, hasta un determinado nivel y a partir de ese nivel se acopla el modelo 1D con un modelo 0D de WK de la microcirculación que arranca de esa arteria. El comportamiento del modelo 0D WK acoplado se utiliza para imponer condiciones de contorno a la derecha para las ecuaciones de NS. Las condiciones de contorno a la izquierda quedan definidas por el flujo pulsante del corazón en la aorta.

Uno de los métodos numérico utilizados en este trabajo ha sido el de integración del sistema de EDP hiperbólico, siguiendo sus líneas características usando una malla regular con pasos  $\Delta t$  lo suficientemente pequeños para que se cumpla la condición de convergencia de CFL (Courant-Friedrichs-Levy). No obstante, por la limitación de tiempo para la realización del trabajo, el código MATLAB desarrollado contempla sólo un segmento de arteria acoplado por la izquierda con un flujo pulsante que modela el corazón y acoplado por la derecha con un modelo 0D WK de 3 elementos para modelar el comportamiento flujo/presión a la salida del segmento modelado.

El otro método numérico utilizado ha sido el algoritmo de diferencias finitas de Lax-Wendroff, que posee propiedades de convergencia de segundo orden. Ambos algoritmos se han codificado sin utilizar ningún código ni herramientas de terceros excepto el propio sistema de programación Matlab.

Este trabajo se podría ampliar obviamente en multitud de direcciones: Modelado del árbol arterial completo incluyendo las bifurcaciones necesarias y los modelos terminales necesarios en cada una de las arterias, sustitución del modelo OD de WK por un modelo de árbol estructurado, mejora del modelo numérico pasando del modelo de integración de las curvas características (convergencia de primer orden), o por el algoritmo de Lax-Wendroff con convergencia de segundo orden, a un modelo de elementos de volumen finitos (FVM) o a un modelo de elementos finitos discontinuos de Galerkin.

Aunque el simulador implementado e incluido en el Anexo, es general, tanto en la implementación del algoritmo de curvas características como del algoritmo de Lax-Wendroff y se pueden seleccionar los diferentes casos variando los parámetros ya descritos de geometría, condiciones de contorno de entrada y salida, propiedades elásticas de la pared y propiedades del fluido, los resultados que se muestran en las **Fig. 7.1-1** hasta **Fig. 7.2-36** muestran ejemplos de flujos concretos obtenidos con los parámetros que figuran en la **Fig. 4.5-1**. Estas figuras muestran los valores del flujo en todos los puntos de la arteria en distintos momentos del ciclo, así como, la evolución temporal del flujo en distintos puntos de la arteria, para esos casos concretos. En la sección de conclusiones se realizan un análisis preliminar de los resultados obtenidos que por limitación de tiempo no se ha podido realizar en profundidad. El tiempo de cálculo utilizado para uno de los casos presentados en este trabajo, por los algoritmos descritos ejecutados en Octave (versión de software libre de Matlab) corriendo sobre W10 en un procesador Intel i5 ha sido de unos 15 minutos por caso, para 2 segundos de simulación equivalentes a 20000 pasos de tiempo  $\Delta t$  (0,1 ms), y 160 celdas espaciales de tamaño  $\Delta x$  (0,1 cm) en cada paso. Usando el algoritmo de curvas características y de unos 30 minutos usando el algoritmo de diferencias finitas explícitas de Lax-Wendroff. La eficiencia podría aumentarse considerablemente utilizando, en lugar de Octave, lenguajes de programación compilados como el C++.

## 7.1 Ejemplos de flujos calculados con el algoritmo de curvas características

### 7.1.1 CASO 1

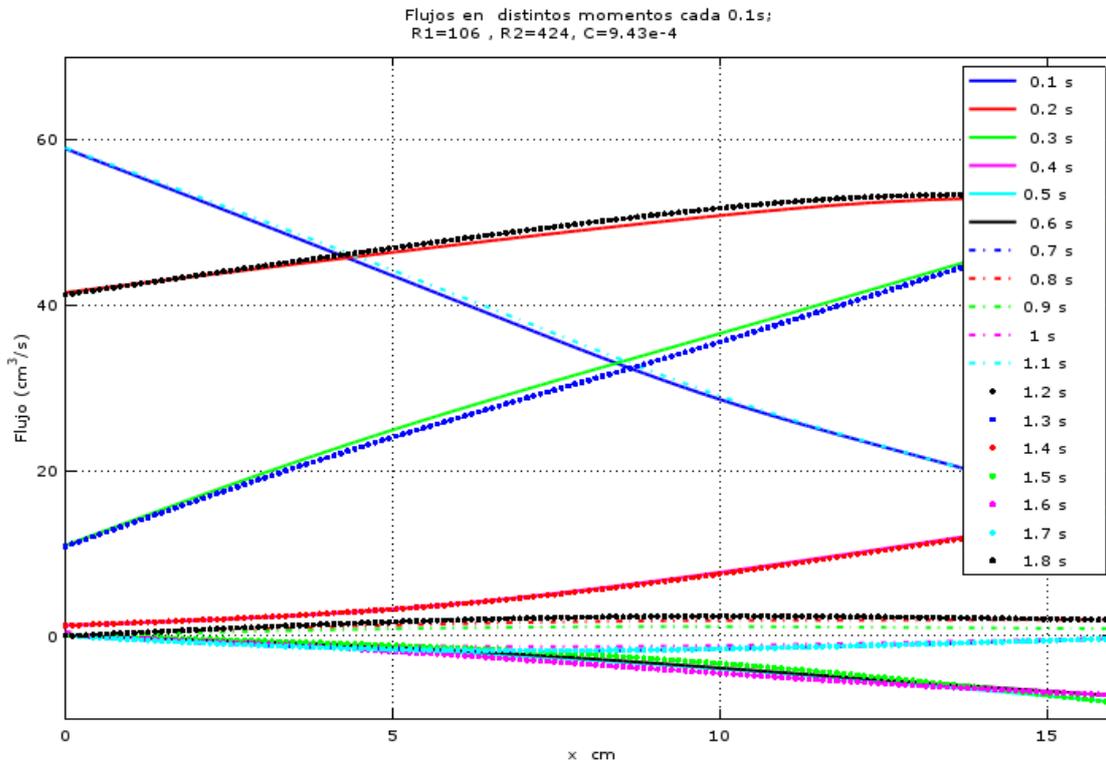
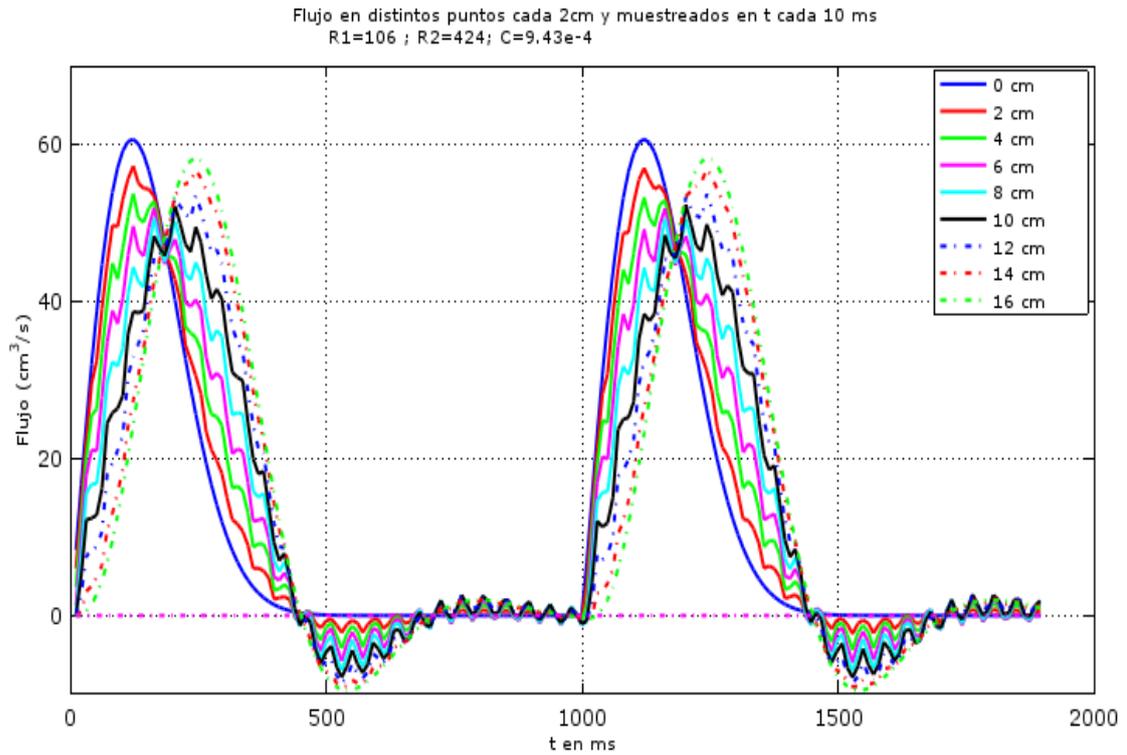


Fig. 7.1-1. Algoritmo de curvas características. Caso de impedancia pequeña y radio constante a1,2 cm. Muestra los flujos a lo largo de todo el segmento de arteria cada 0.1 s para el flujo de entrada de la Fig. 5.4-1.



**Fig. 7.1-2. Algoritmo de curvas características. Caso de impedancia pequeña y radio constante a 1,2 cm. Muestra los flujos en distintos puntos de la arteria separados 2 cm entre si y muestreados cada 10 ms, para el flujo de entrada de la Fig. 5.4-1.**

7.1.2 CASO 2

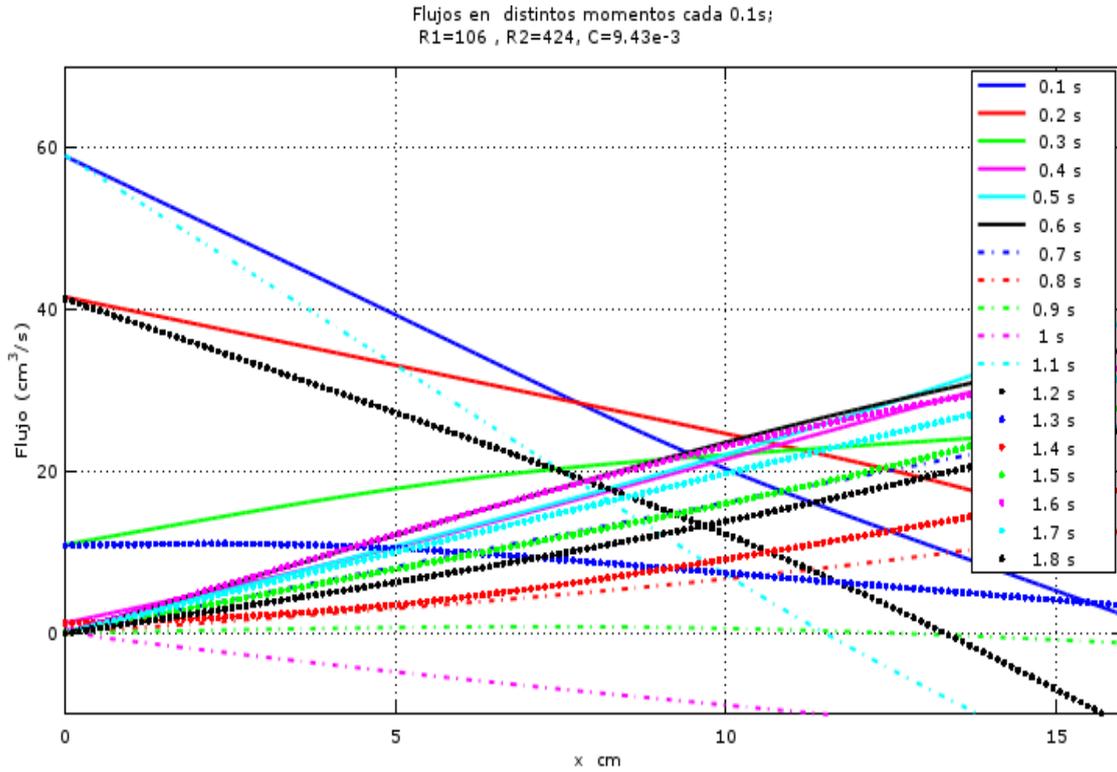
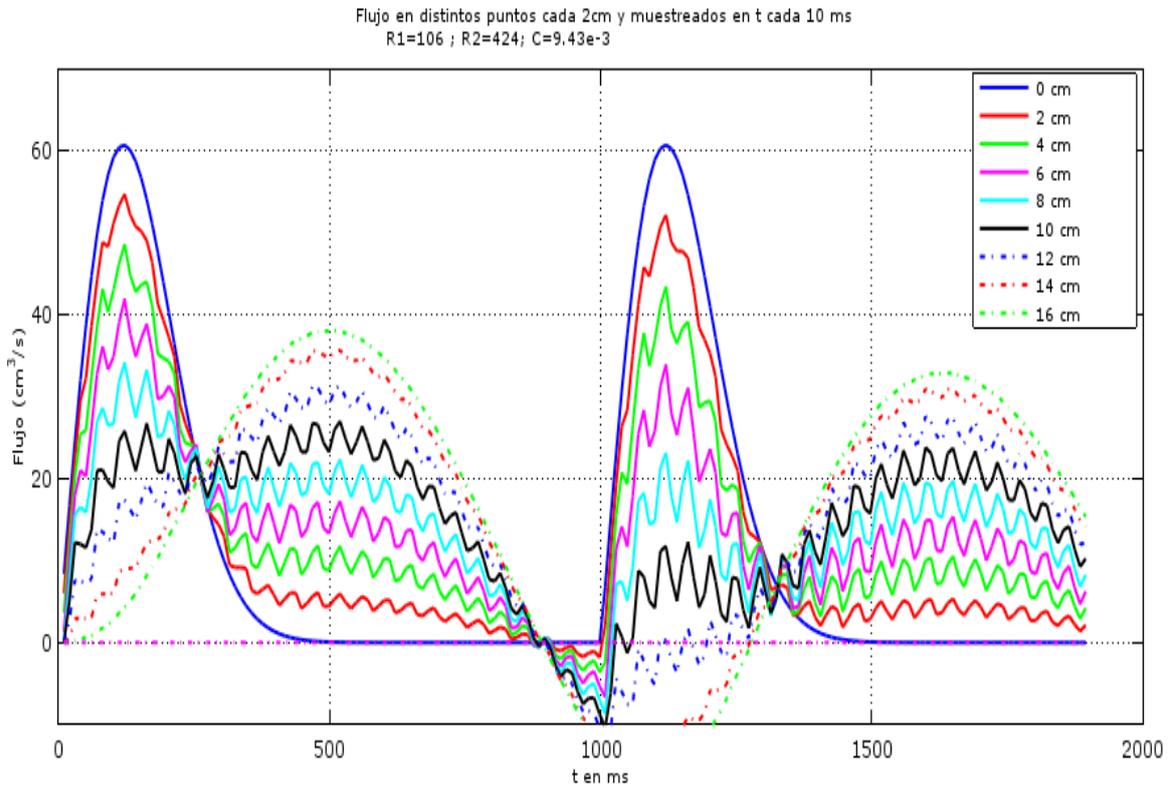


Fig. 7.1-3 Algoritmo de curvas características. Caso impedancia grande y radio constante. Muestra los flujos, para un capacitor 10 veces mayor, a lo largo de todo el segmento de arteria cada 0.1 s para el flujo de entrada de la Fig. 5.4-1. Radio constante en toda la arteria a 1.2 cm.



**Fig. 7.1-4. Algoritmo de Curvas características con capacitor grande, y Radio constante a 1,2 cm Muestra los flujos en distintos puntos de la arteria separados 2 cm entre si y muestreados cada 10 ms, para el flujo de entrada de la Fig. 5.4-1**

7.1.3 CASO 3

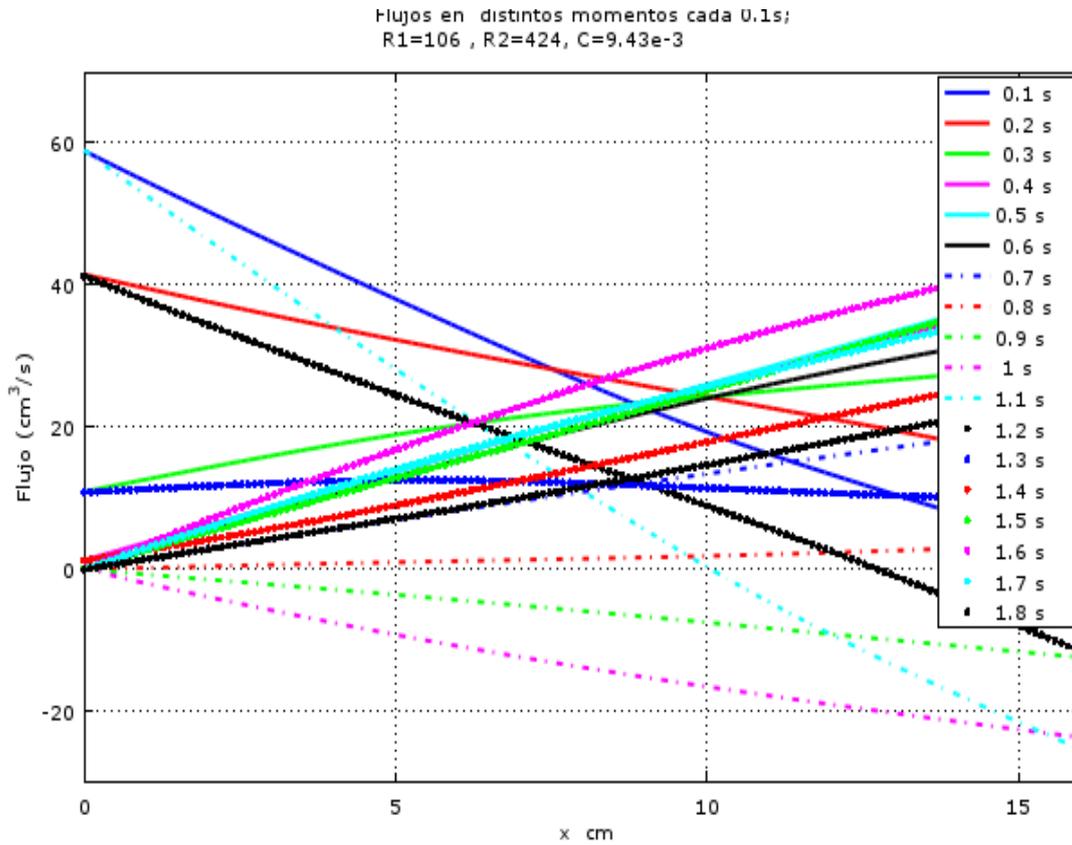
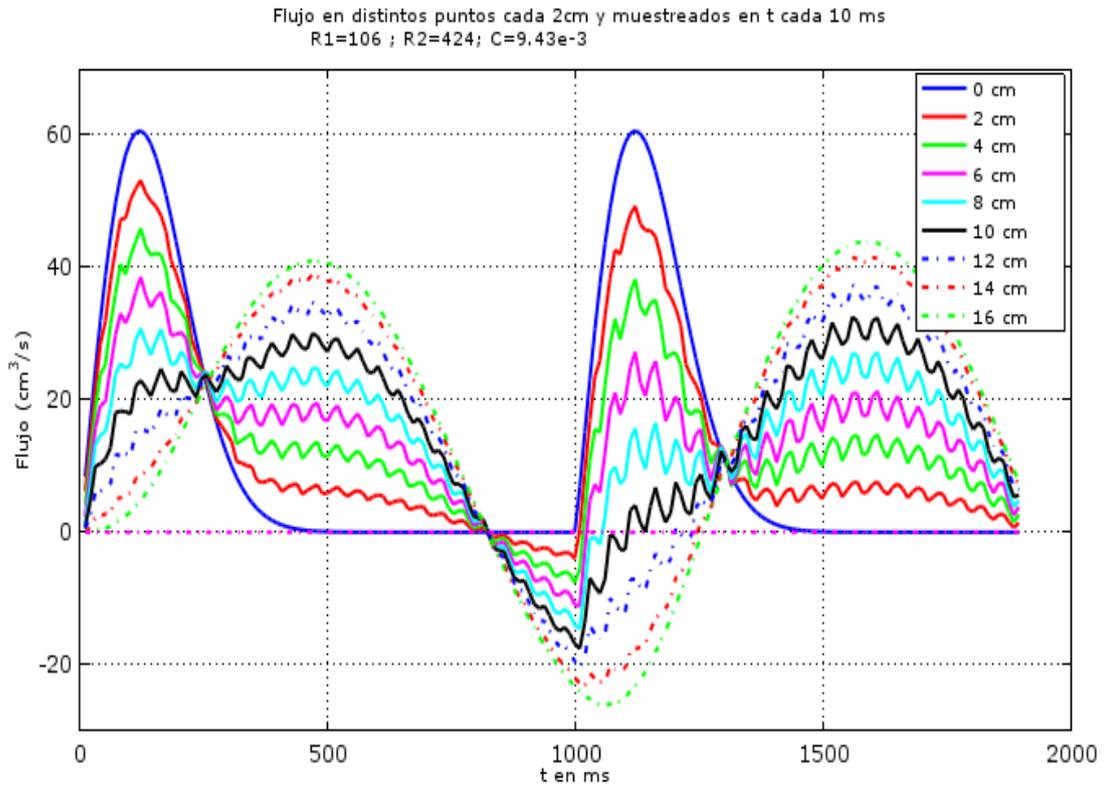


Fig. 7.1-5. Algoritmo de Curvas características con impedancia grande, radio mayor 1,2 cm y radio menor 1cm. Muestra los flujos, para un capacitor 10 veces mayor, a lo largo de todo el segmento de arteria cada 0.1 s para el flujo de entrada de la Fig. 5.4-1.



**Fig. 7.1-6. Algoritmo de Curvas características con capacitor grande, radio mayor 1,2 cm, radio menor 1cm. Muestra los flujos en distintos puntos de la arteria separados 2 cm entre si y muestreados cada 10 ms, para el flujo de entrada de la Fig. 5.4-1.**

## 7.1.4 CASO 4

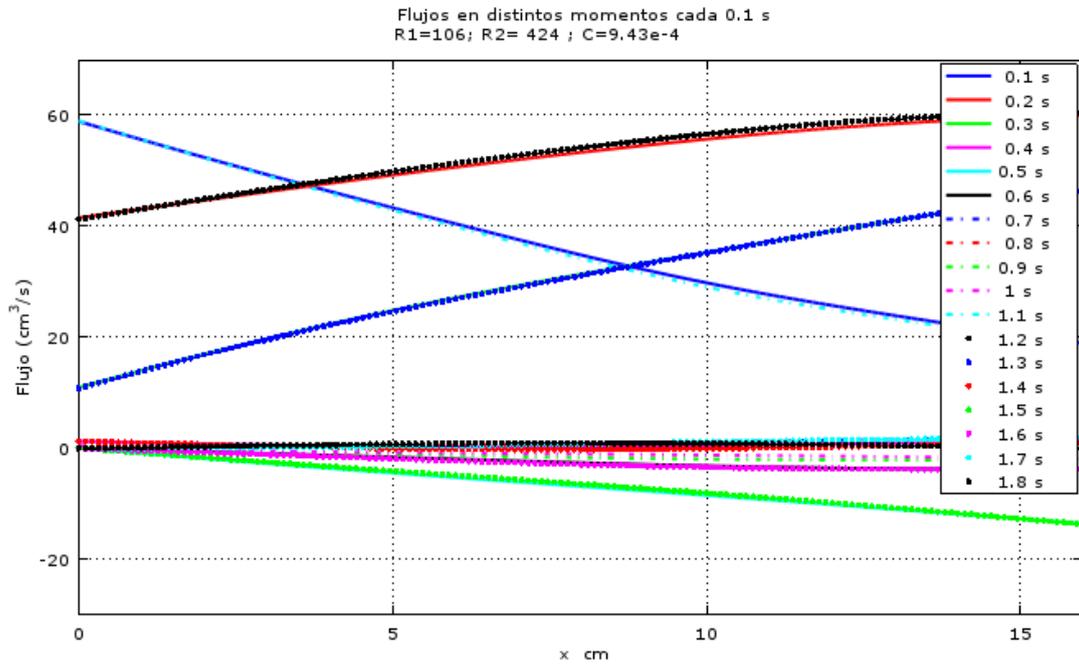
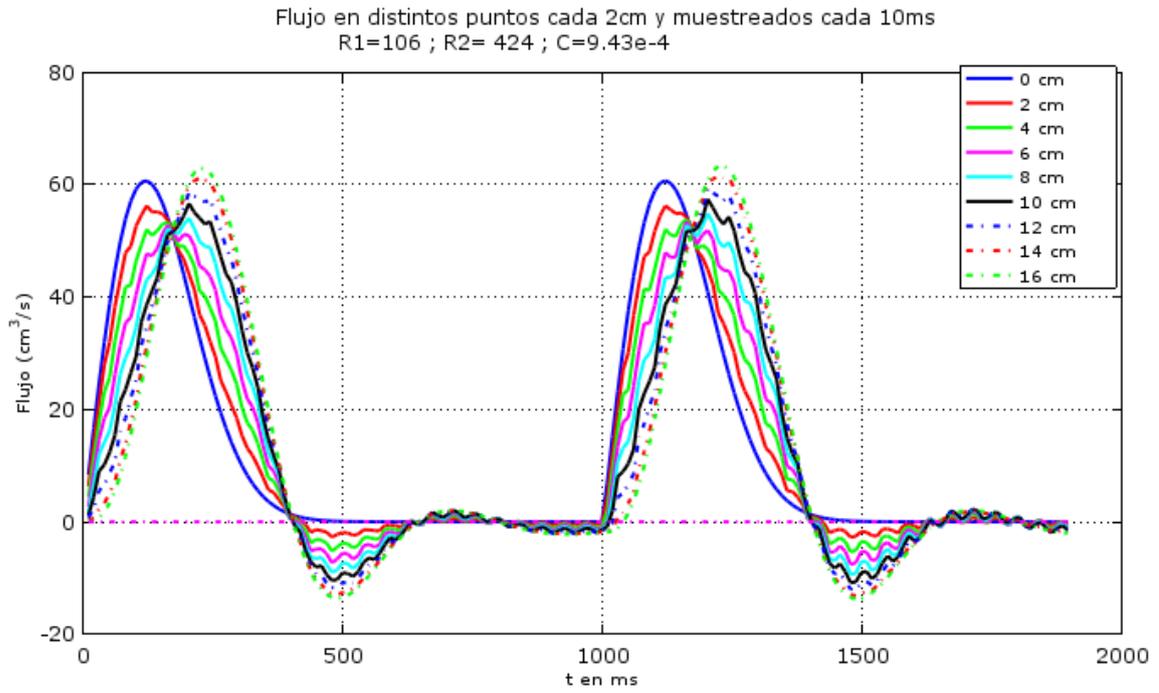


Fig. 7.1-7. Algoritmo de Curvas características con capacitor pequeño, Radio mayor 1,2 cm, Radio menor 0,9cm. Se muestran los flujos a lo largo de todo el segmento de arteria cada 0.1 s para el flujo de entrada de la Fig. 5.4-1.



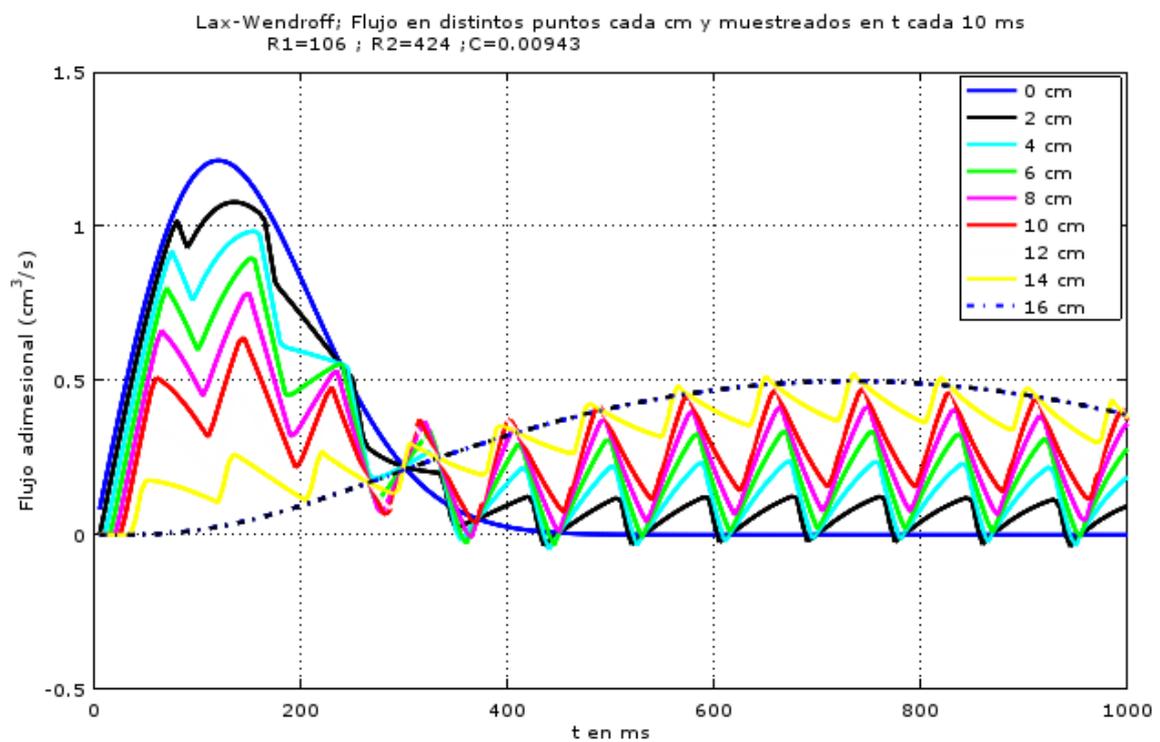
**Fig. 7.1-8.** Algoritmo de Curvas características con capacitor pequeño, Radio mayor=1,2cm y Radio menor 0.9 cm. Muestra los flujos en distintos puntos de la arteria separados 2 cm entre si y muestreados cada 10 ms, para el flujo de entrada de la Fig. 5.4-1.

## 7.2 Ejemplos de flujos calculados con el algoritmo de diferencias explícitas de Lax-Wendroffs

### 7.2.1 CASO 1

$dx=0.5$  mm

$dt=0.02$  ms Re 1087



**Fig. 7.2-1.** Evolución del flujo en distintos puntos en distintos puntos de la arteria, para la entrada de flujo de la Fig. 5.4-1. La malla de cálculo ha sido  $dx=0,5$ mm y  $dt=0,02$  ms. El número de Reynolds  $Re=1087$ , para un flujo crítico  $q_c=50$  cm<sup>3</sup>

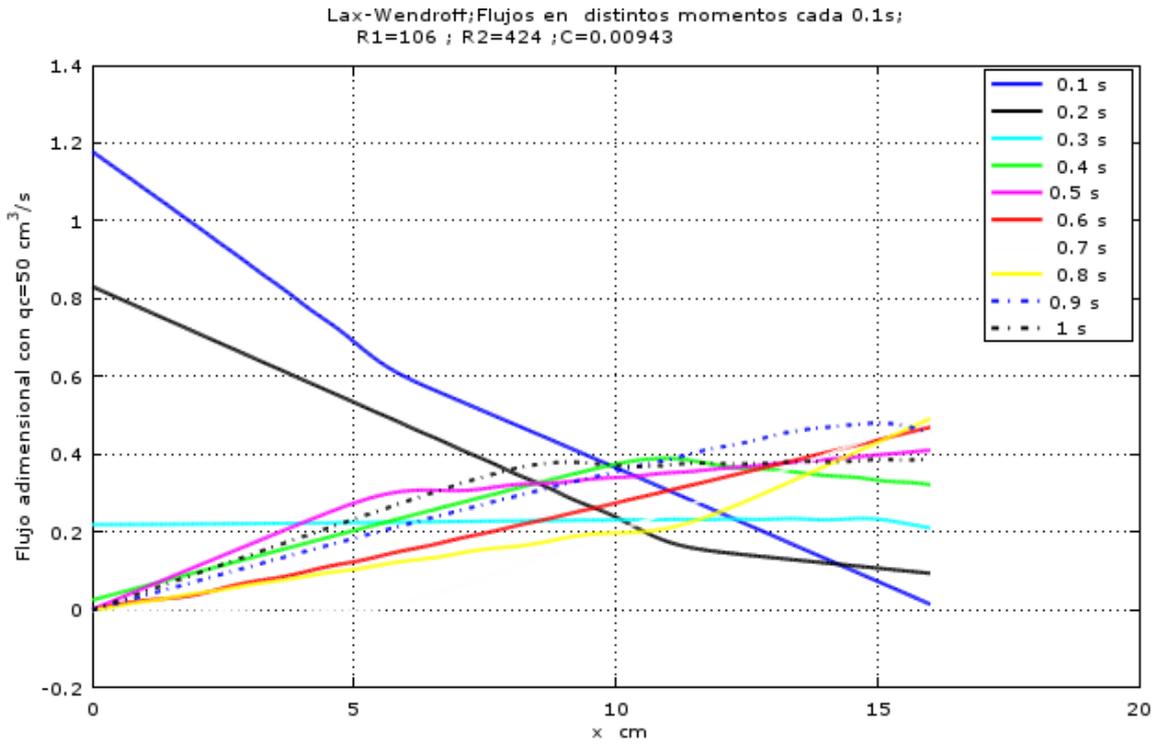


Fig . 7.2-2. Flujo en distintos puntos de la arteria, para la entrada de flujo de la Fig. 5.4-1. La malla de cálculo ha sido  $dx=0,5\text{mm}$  y  $dt=0,02 \text{ ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1087$ , para un flujo crítico  $q_c=50 \text{ cm}^3/\text{s}$

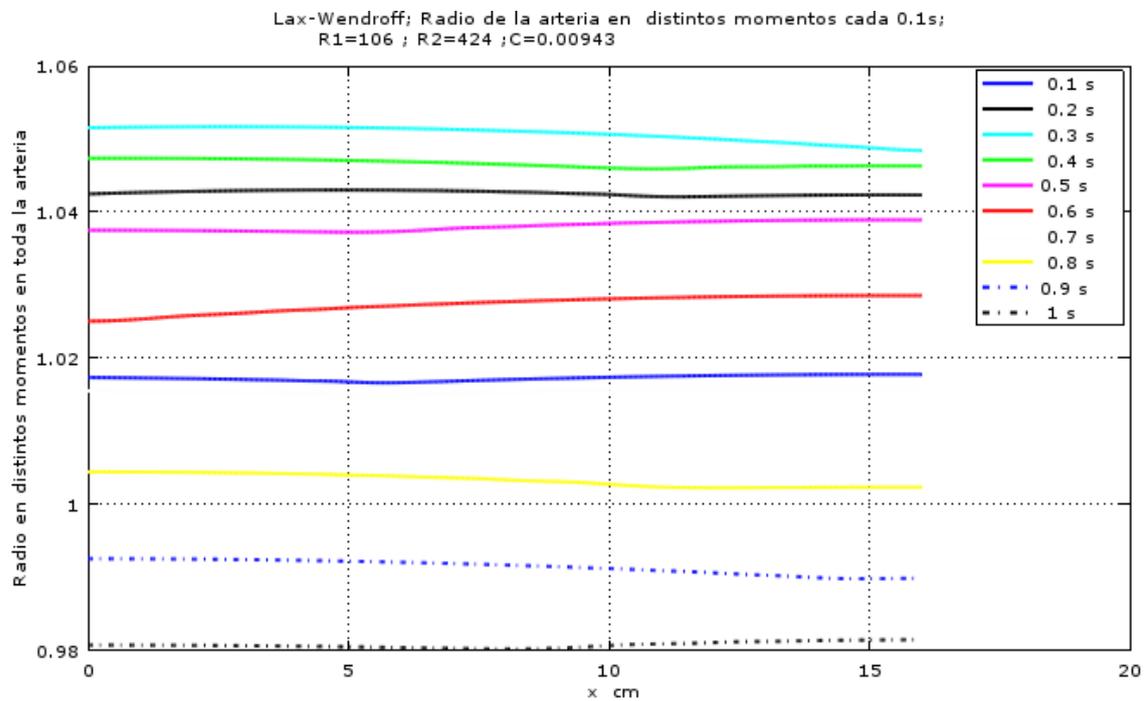


Fig. 7.2-3. Forma de la arteria en distintos instantes de tiempo, , para la entrada de flujo de la Fig. 5.4-1. La malla de

cálculo ha sido  $dx=0,5\text{mm}$  y  $dt=0,02\text{ ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1087$ , para un flujo crítico  $q_c=50\text{ cm}^3$

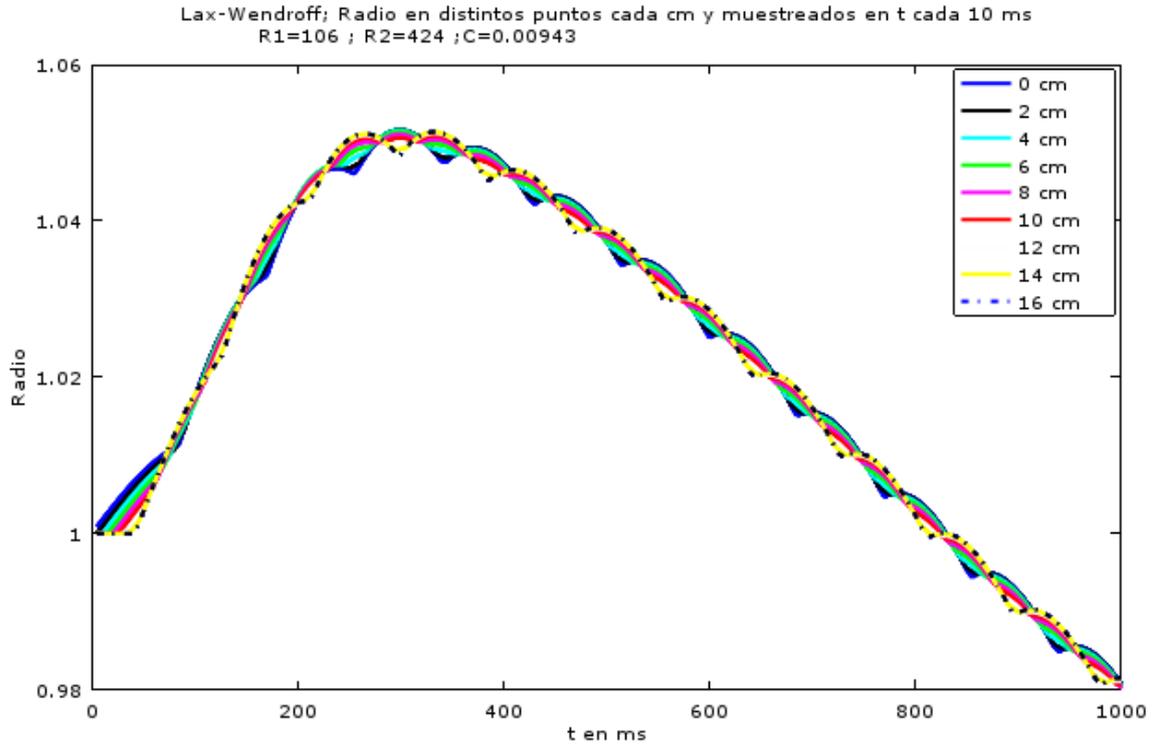


Fig. 7.2-4. Evolución del radio de la arteria en distintos puntos. , para la entrada de flujo de la Fig. 5.4-1. La malla de cálculo ha sido  $dx=0,5\text{mm}$  y  $dt=0,02\text{ ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1087$ , para un flujo crítico  $q_c=50\text{ cm}^3$

## 7.2.2 CASO 2

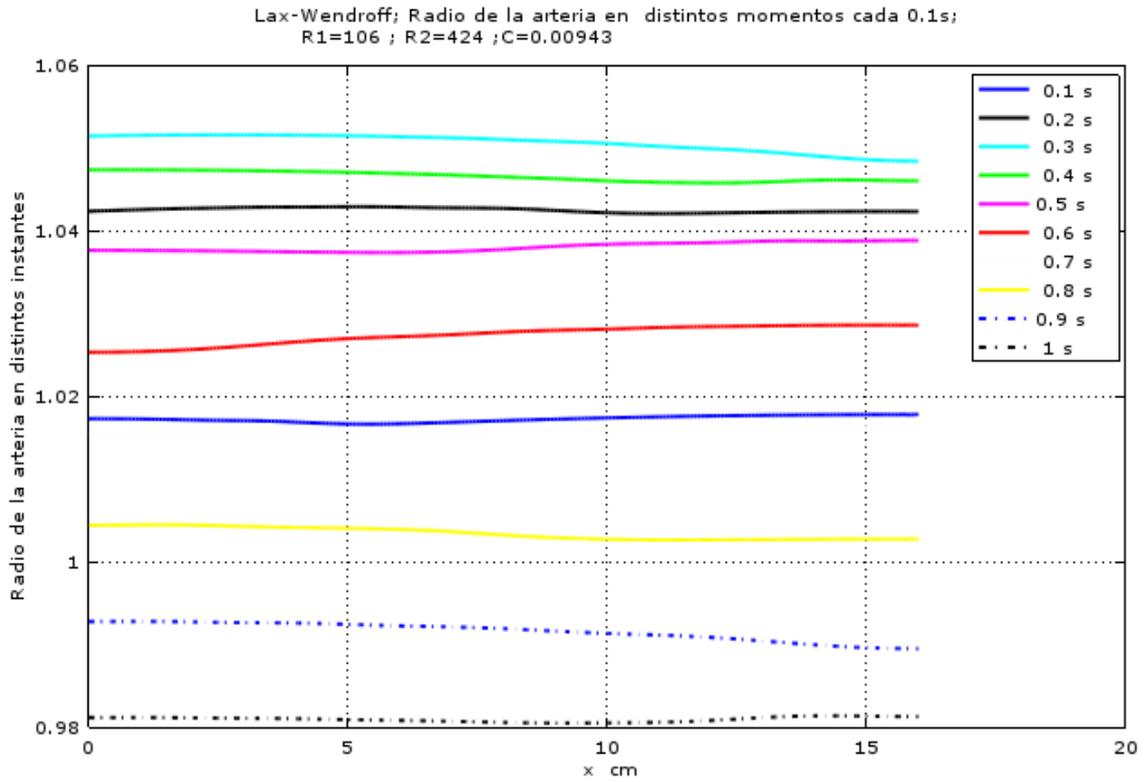
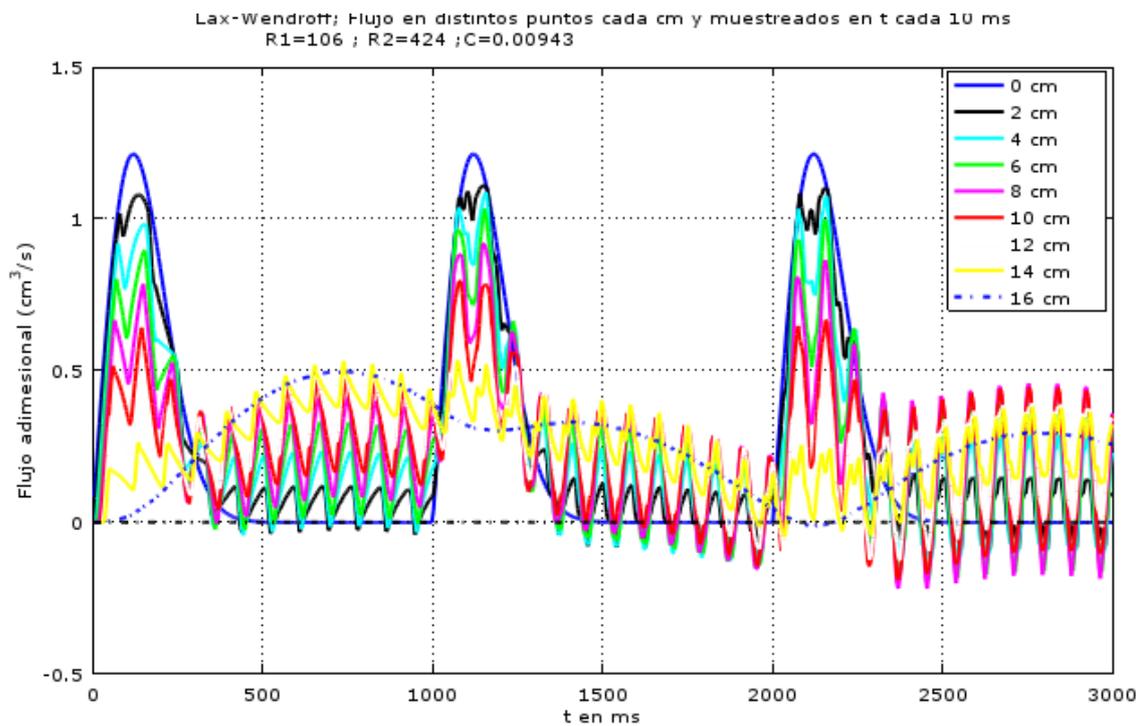


Fig . 7.2-5. Forma de la arteria en distintos instantes de tiempo, , para la entrada de flujo de la Fig. 5.4-1. La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5\text{mm}$  y  $dt=0,075\text{ ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1087$ , para un flujo crítico  $q_c=50\text{ cm}^3$



**Fig. 7.2-6.** Evolución del flujo en distintos puntos en distintos puntos de la arteria en los tres periodos iniciales, para la entrada de flujo de la Fig. 5.4-1. La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5\text{mm}$  y  $dt=0,075\text{ ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1087$ , para un flujo crítico  $q_c=50\text{ cm}^3$

### 7.2-7

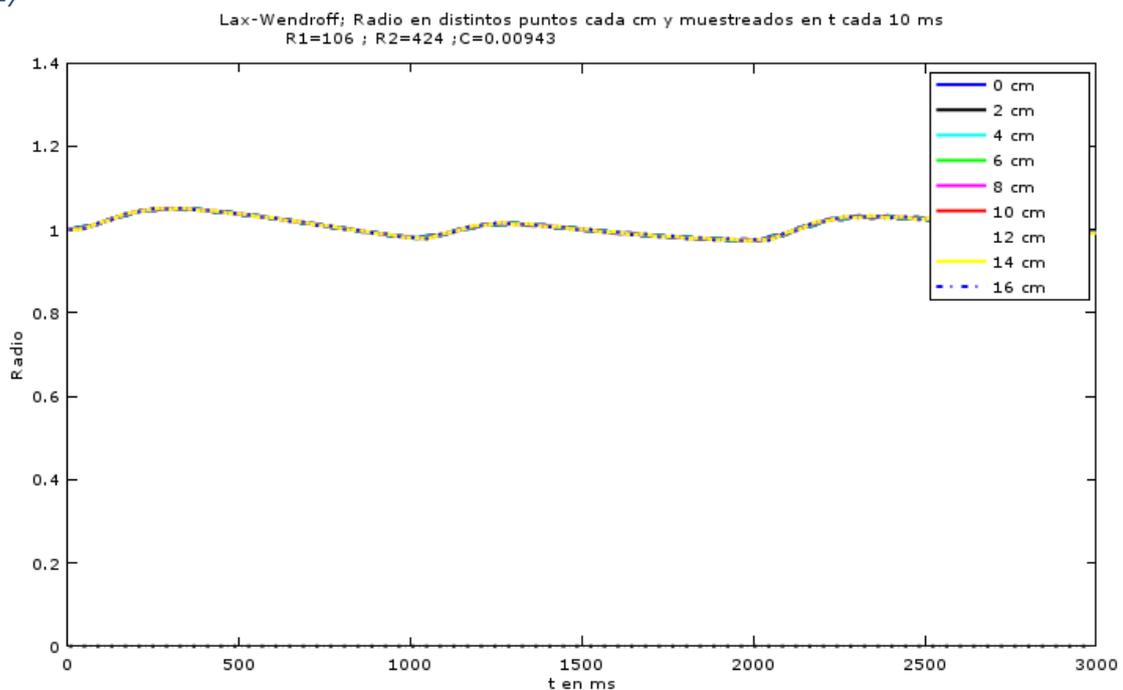


Fig. 7.2-8. Evolución del radio de la arteria en distintos puntos, para la entrada de flujo de la Fig. 5.4-1. La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5\text{mm}$  y  $dt=0,075\text{ ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1087$ , para un flujo crítico  $q_c=50\text{ cm}^3$

### 7.2.3 Flujo de entrada 2

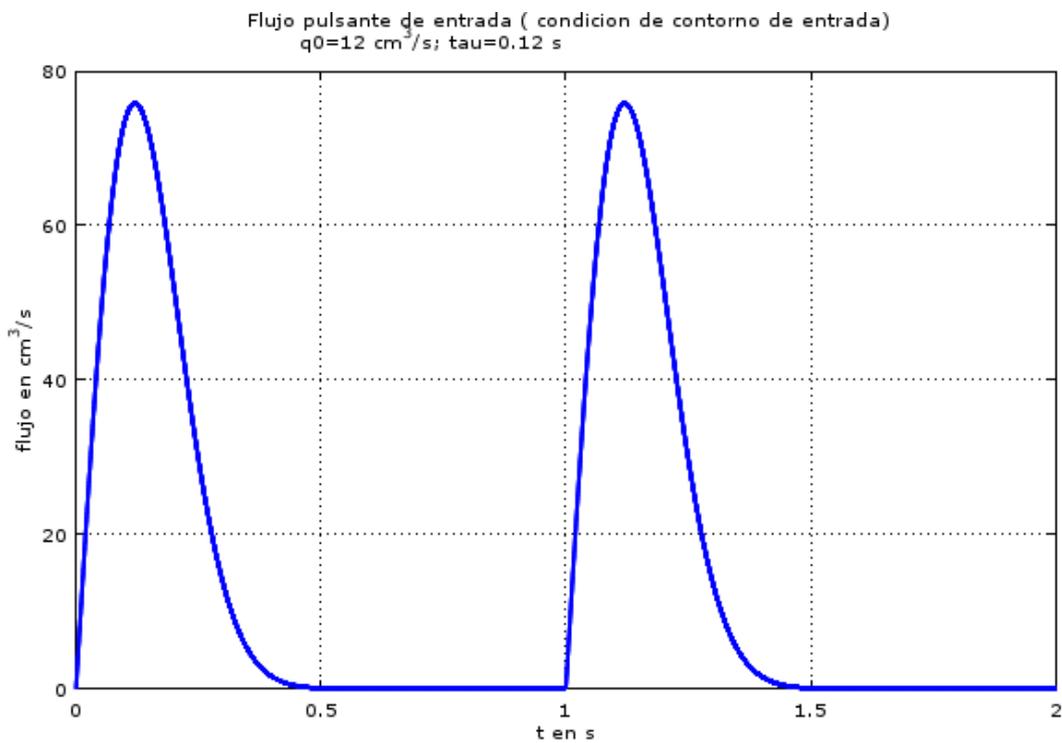


Fig. 7.2-9. Forma de entrada para  $Re=1304$ , con  $q_c=60\text{ cm}^3$

## 7.2.4 CASO 3

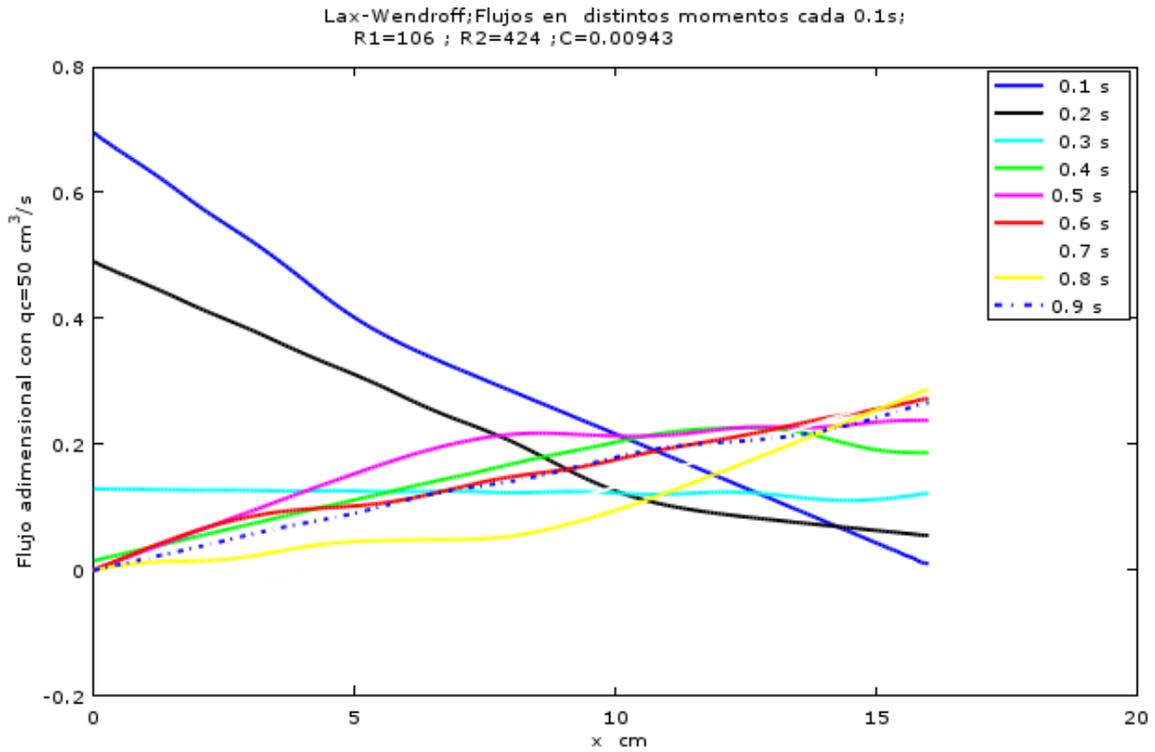


Fig. 7.2-10. Flujo en la arteria en distintos instantes, para la entrada de flujo de la Fig.7.2-9 . La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5\text{mm}$  y  $dt=0,075\text{ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60\text{cm}^3$

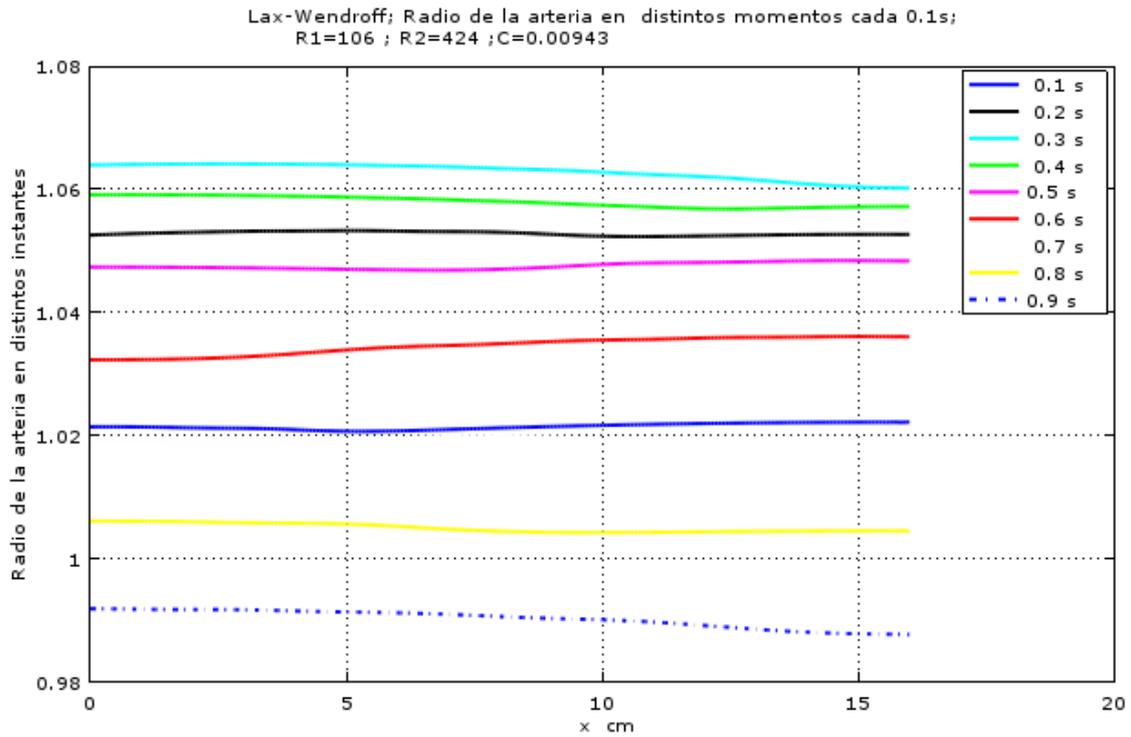


Fig. 7.2-11. Radio de la arteria en distintos instantes, , para la entrada de flujo de la Fig.,7.2-9 . La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5mm$  y  $dt=0,075$  ms. El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60$   $cm^3$

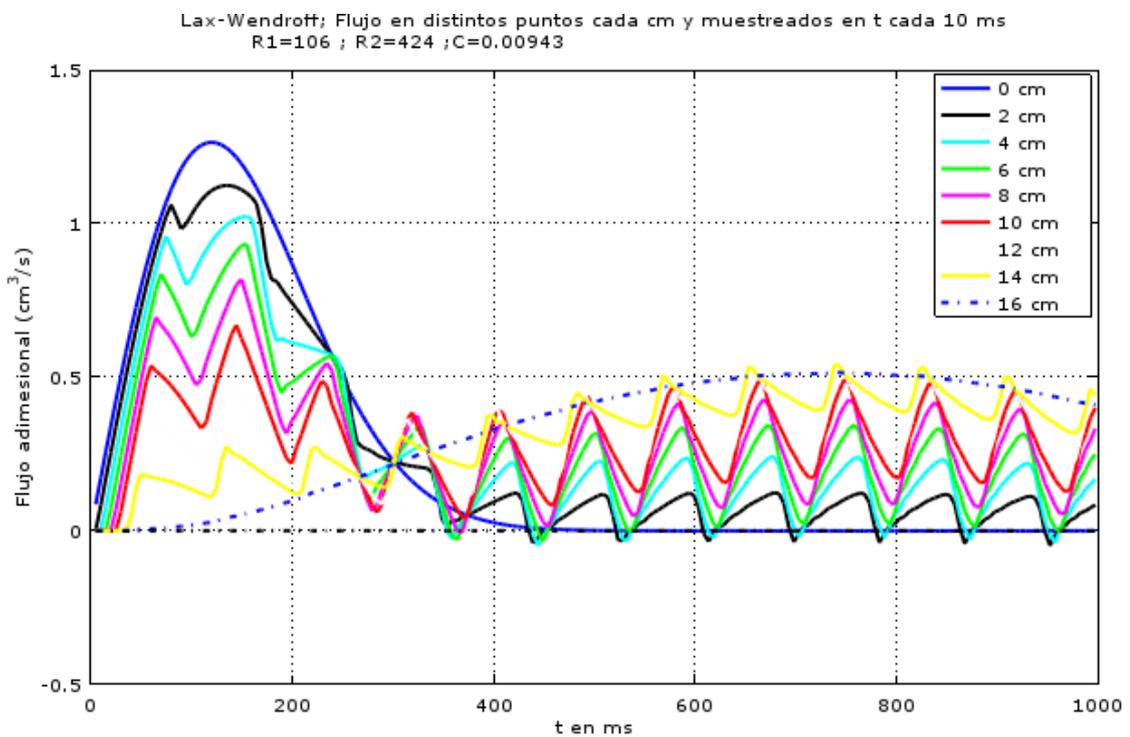


Fig. 7.2-12. Flujo en la arteria en distintos puntos, para la entrada de flujo de la Fig.,7.2-9 . La malla de cálculo ha sido

$dx=1,5\text{mm}$  y  $dt=0,075\text{ ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1304$ ,  
para un flujo crítico  $q_c=60\text{ cm}^3$

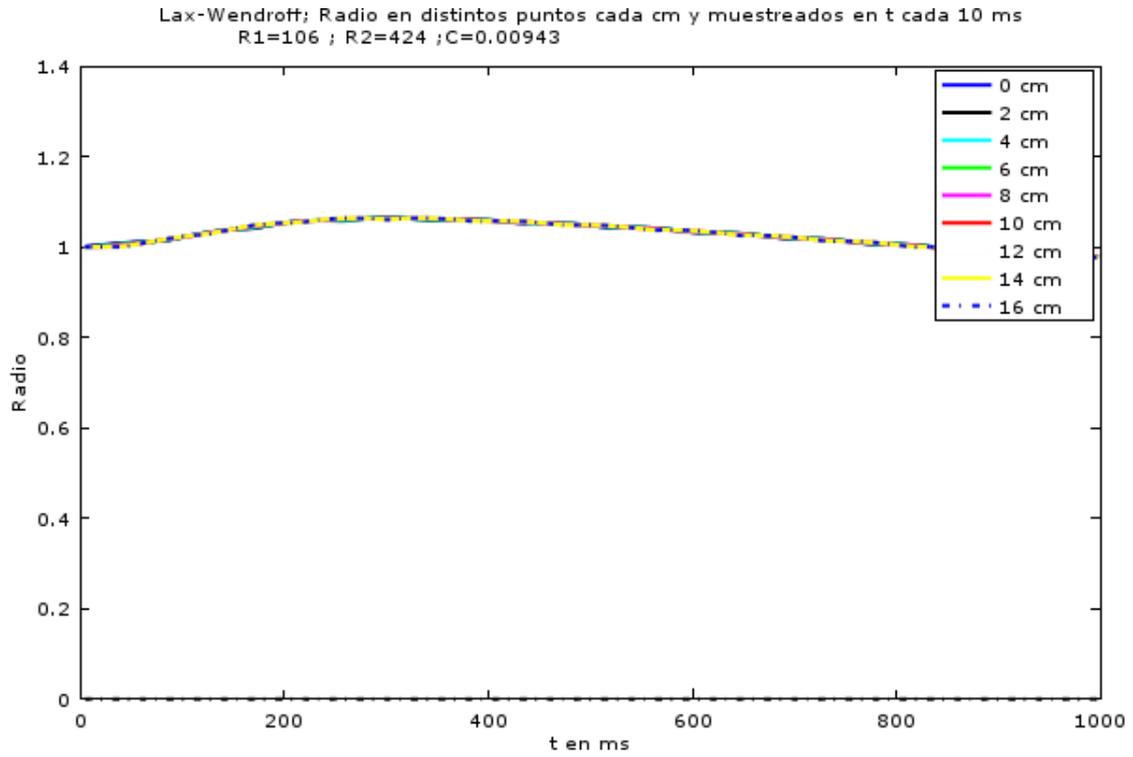


Fig. 7.2-13. Radio en la arteria en distintos puntos, para la entrada de flujo de la Fig. 7.2-9 . La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5\text{mm}$  y  $dt=0,075\text{ ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60\text{ cm}^3$

7.2.5 Caso 4

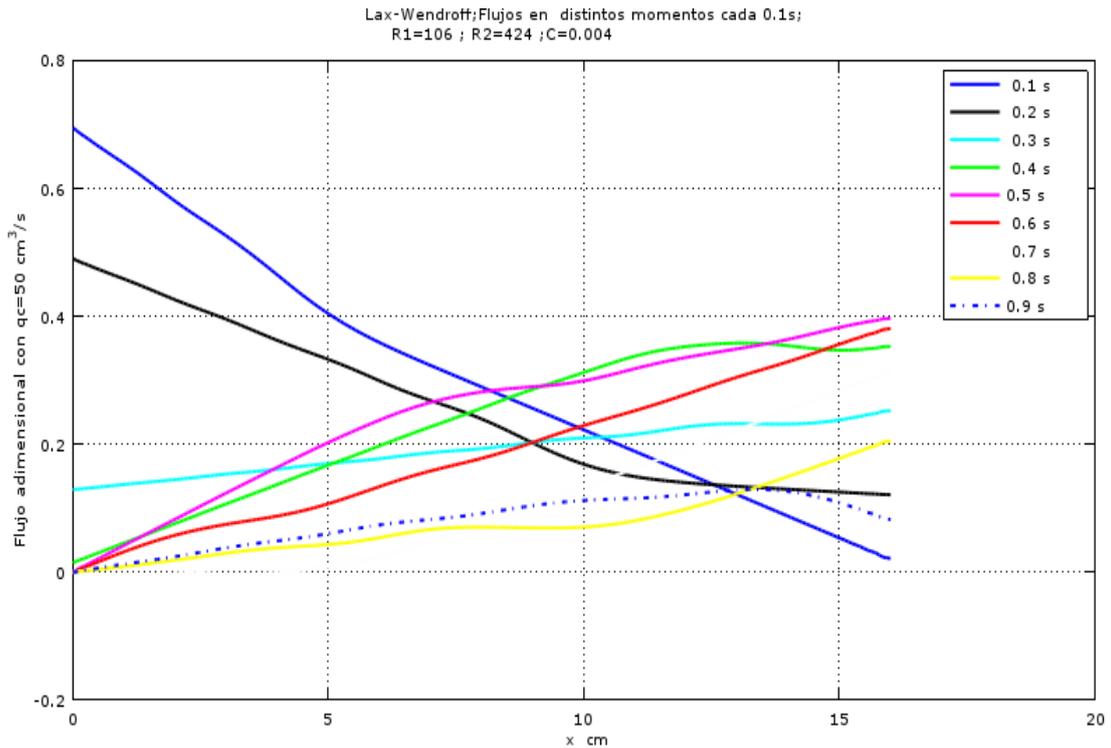


Fig. 7.2-14. Flujo en la arteria en distintos instantes, para la entrada de flujo de la Fig. 7.2-9 . La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5\text{mm}$  y  $dt=0,075 \text{ ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60 \text{ cm}^3$ .

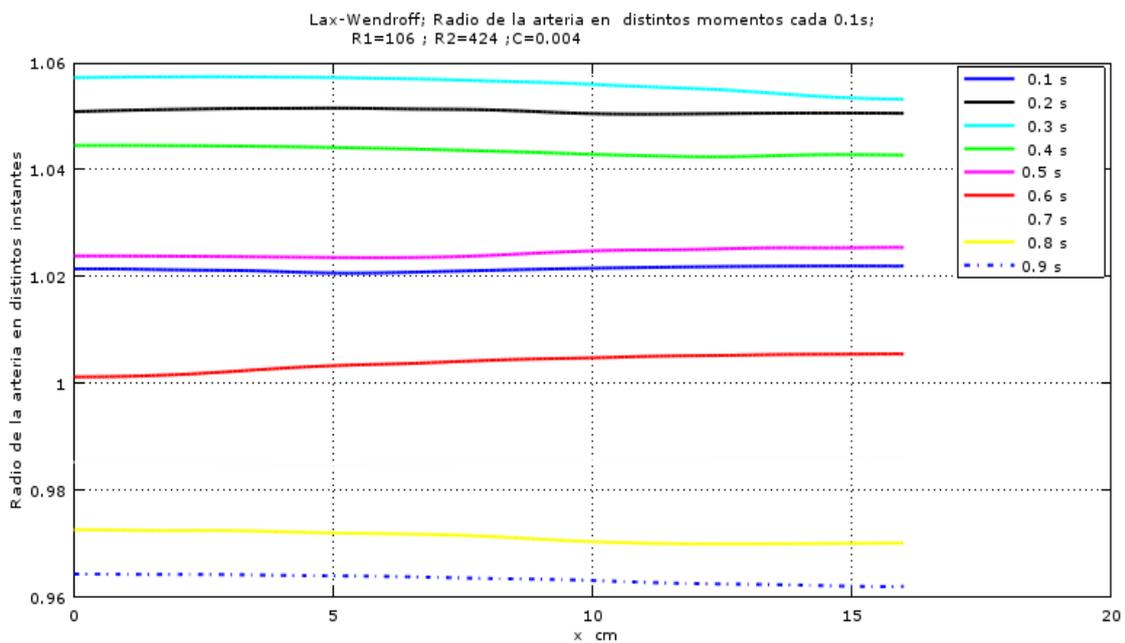


Fig. 7.2-15. . Radio de la arteria en distintos instantes, , para la entrada de flujo de la Fig,.7.2-9 . La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5mm$  y  $dt=0,075$  ms. El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60$   $cm^3$

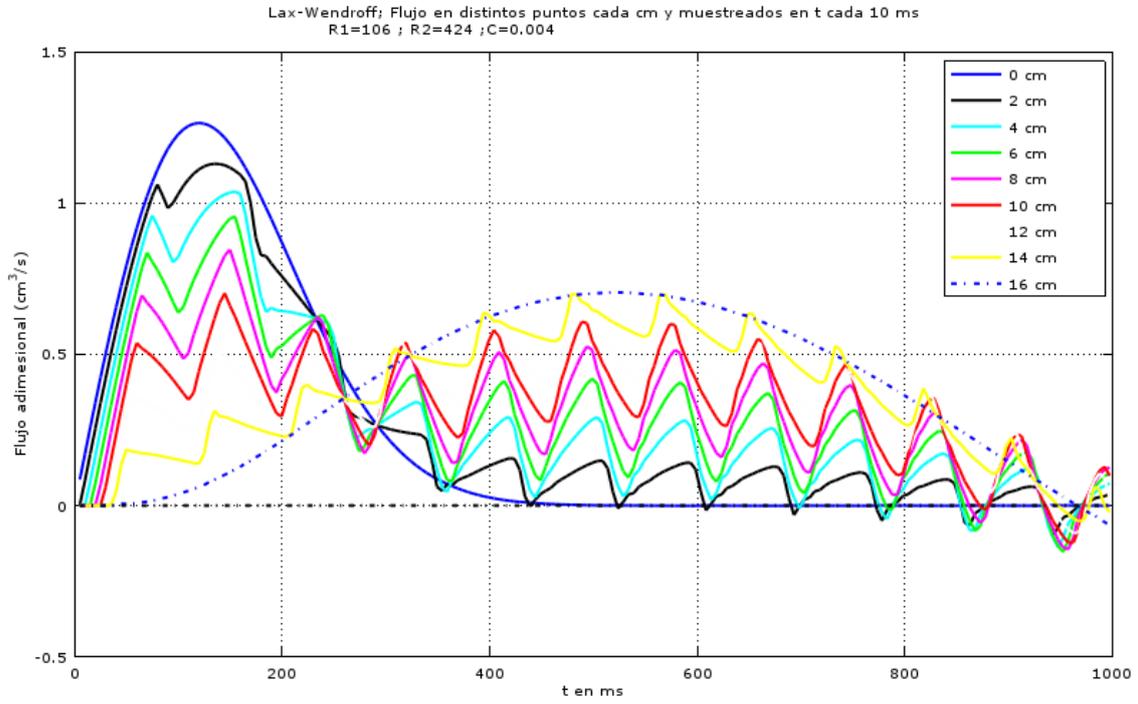
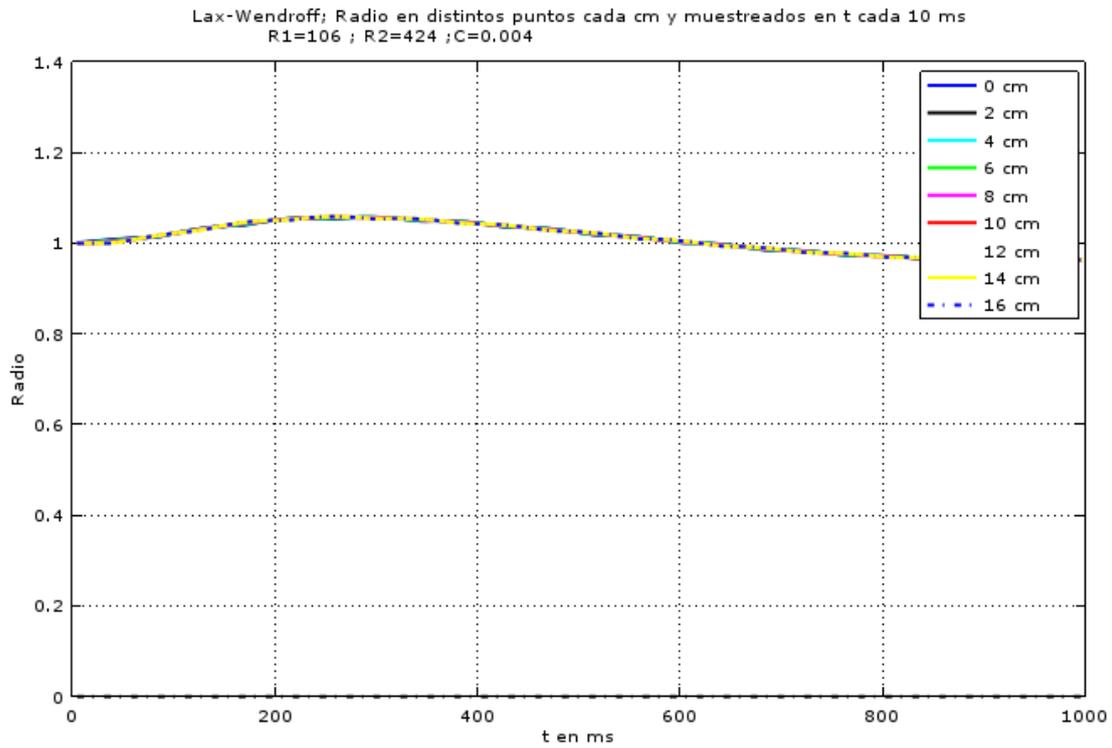
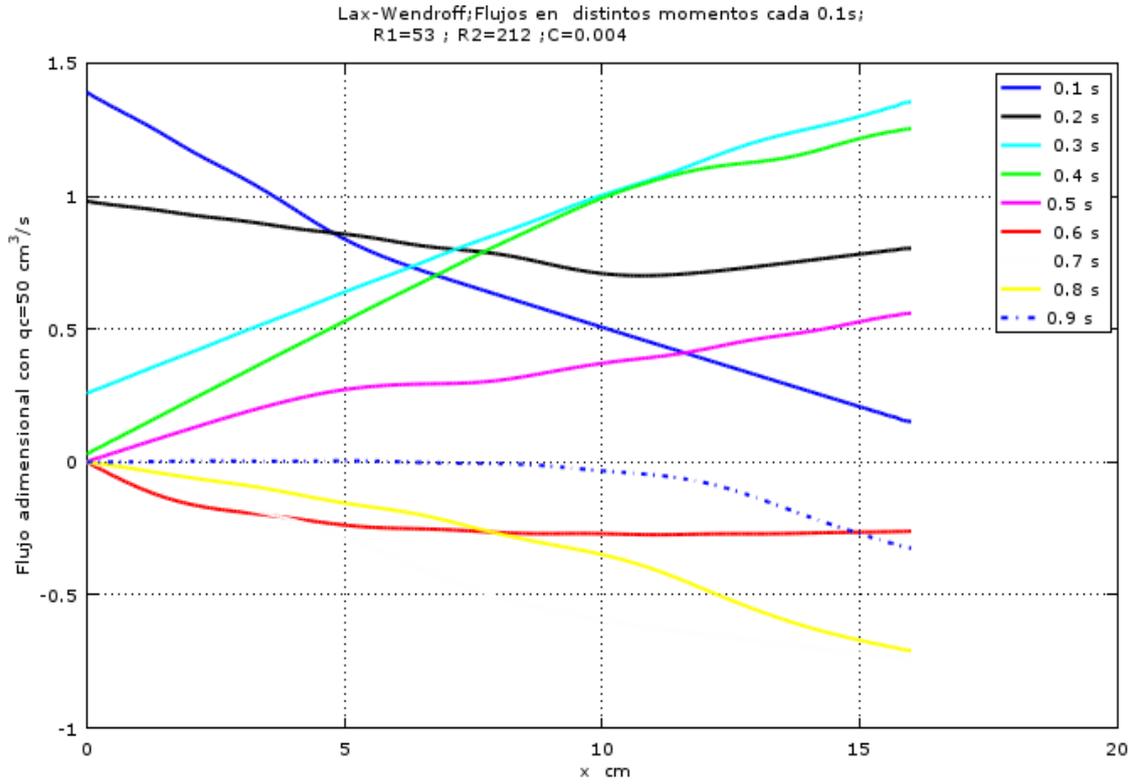


Fig. 7.2-16. Flujo en la arteria en distintos puntos, para la entrada de flujo de la Fig,.7.2-9 . La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5mm$  y  $dt=0,075$  ms. El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60$   $cm^3$

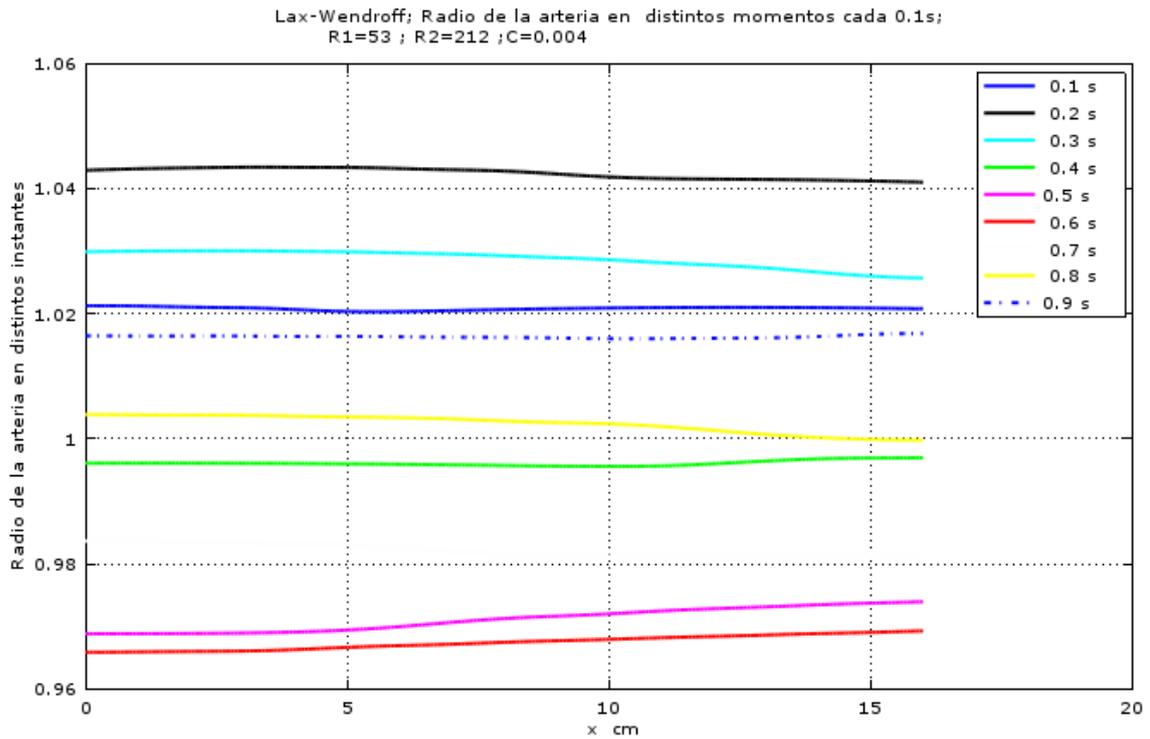


**7.2-17. Radio en la arteria en distintos puntos, para la entrada de flujo de la Fig.7.2-9 . La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5mm$  y  $dt=0,075$  ms. El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60$   $cm^3$**

## 7.2.6 CASO 5



**Fig. 7.2-18.** Flujo en la arteria en distintos instantes para resistencia de salida muy baja. La entrada de flujo de la Fig. 7.2-9. La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5\text{mm}$  y  $dt=0,075\text{ms}$ . El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60\text{cm}^3/\text{s}$



**Fig. 7.2-19.** Radio de la arteria en distintos instantes, para la entrada de flujo de la Fig.,7.2-9 . La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5mm$  y  $dt=0,075$  ms. El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60\text{ cm}^3$ .

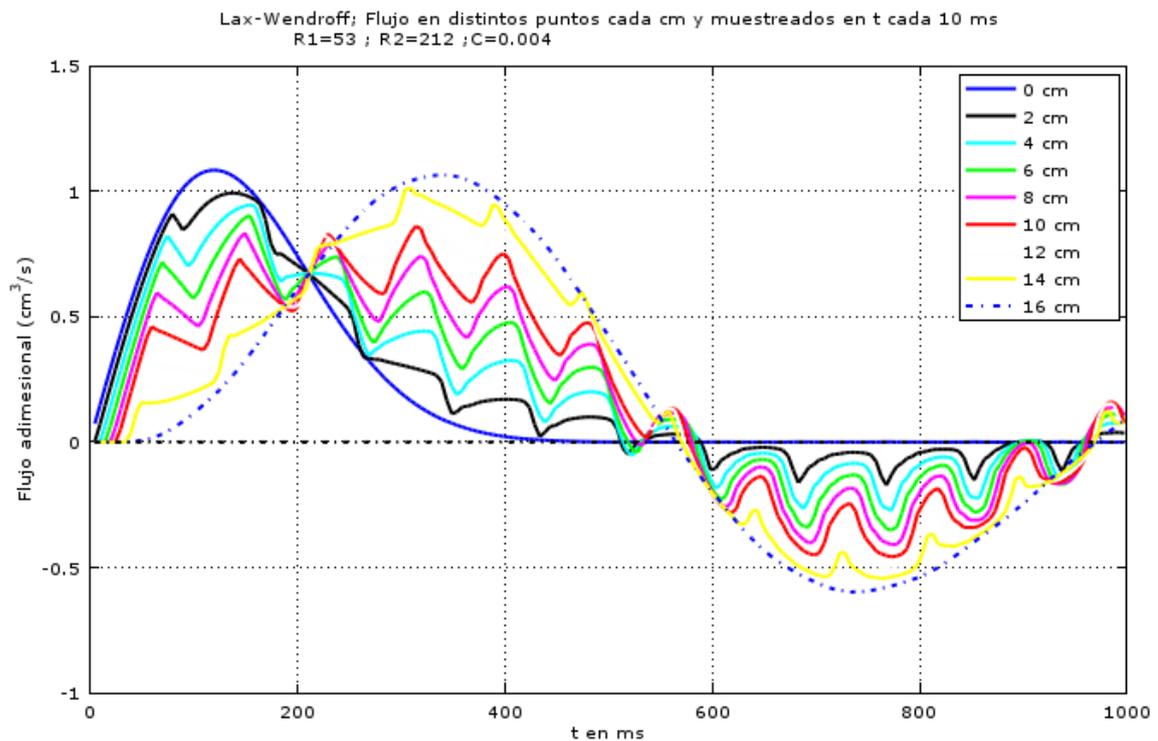


Fig. 7.2-20. Flujo en la arteria en distintos puntos, para la entrada de flujo de la Fig.,7.2-9 . La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5mm$  y  $dt=0,075$  ms. El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60$   $cm^3$

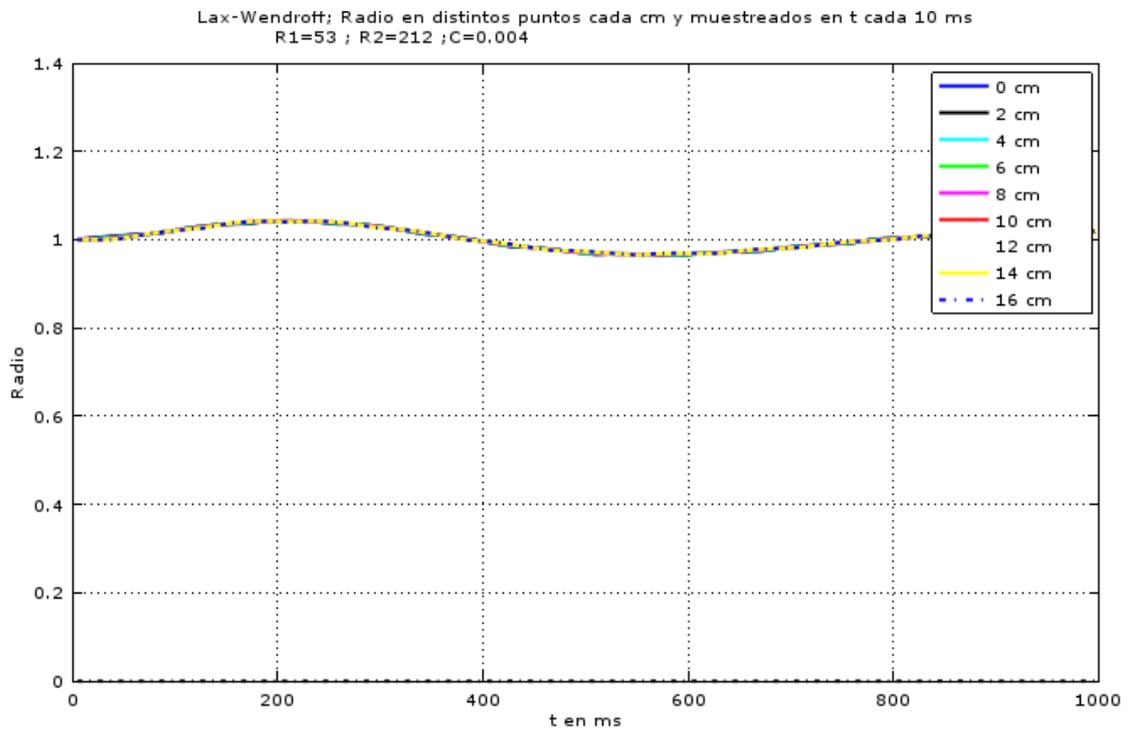


Fig. 7.2-21. Radio en la arteria en distintos puntos, para la entrada de flujo de la Fig.,7.2-9 . La malla de cálculo ha sido  $dx=1,5mm$  y  $dt=0,075$  ms. El número de Reynolds  $Re=1304$ , para un flujo crítico  $q_c=60$   $cm^3$

7.2.7 CASO 6

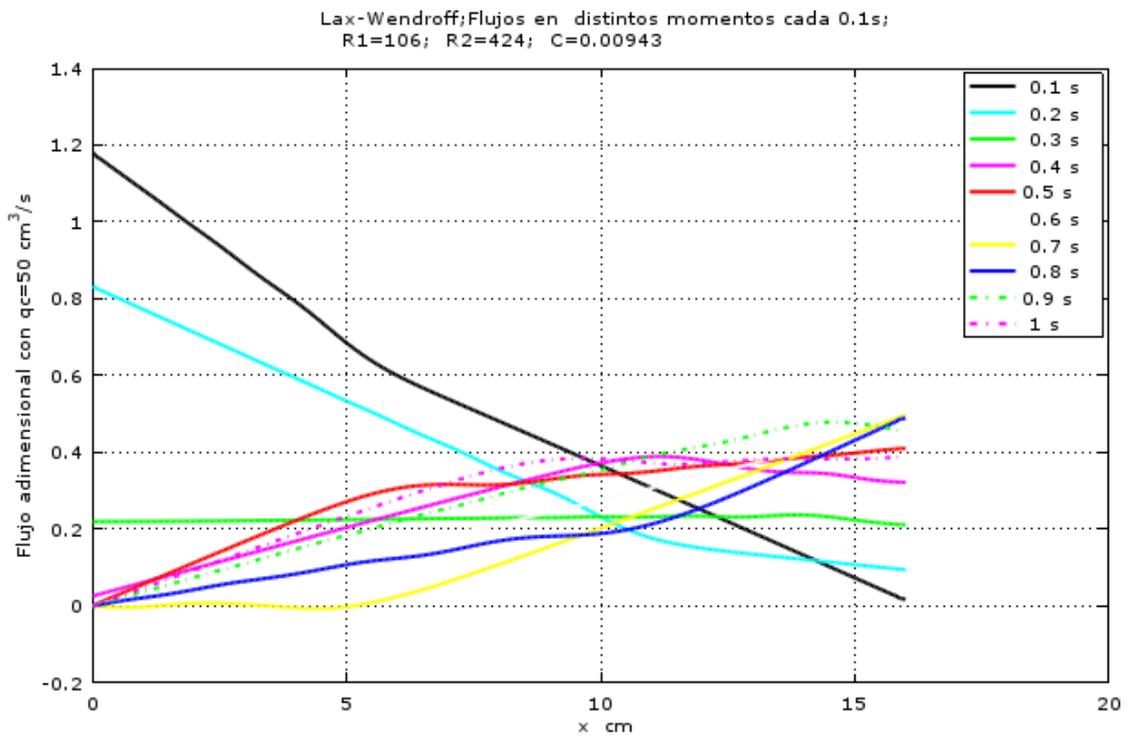


Fig. 7.2-22. Situación del flujo en toda la arteria en distintos momentos del tiempo. Radio en reposo constante de 1cm.

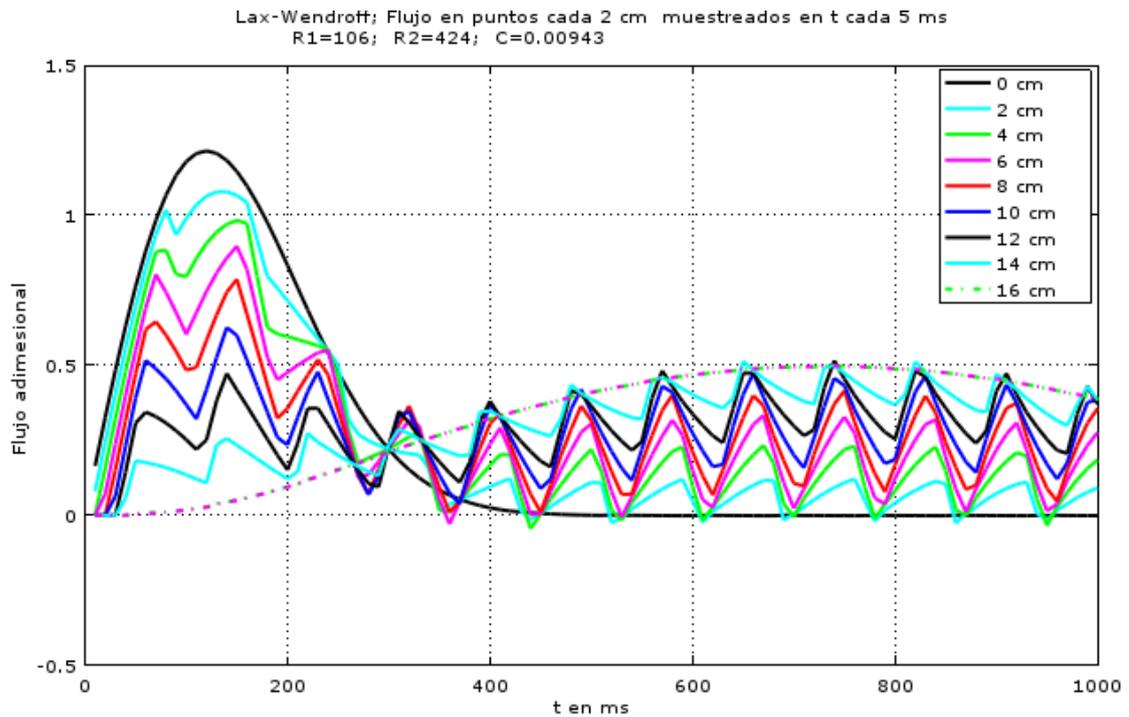


Fig. 7.2-23 Evolución temporal del flujo en distintos puntos de la arteria. Radio en reposo constante de 1cm.

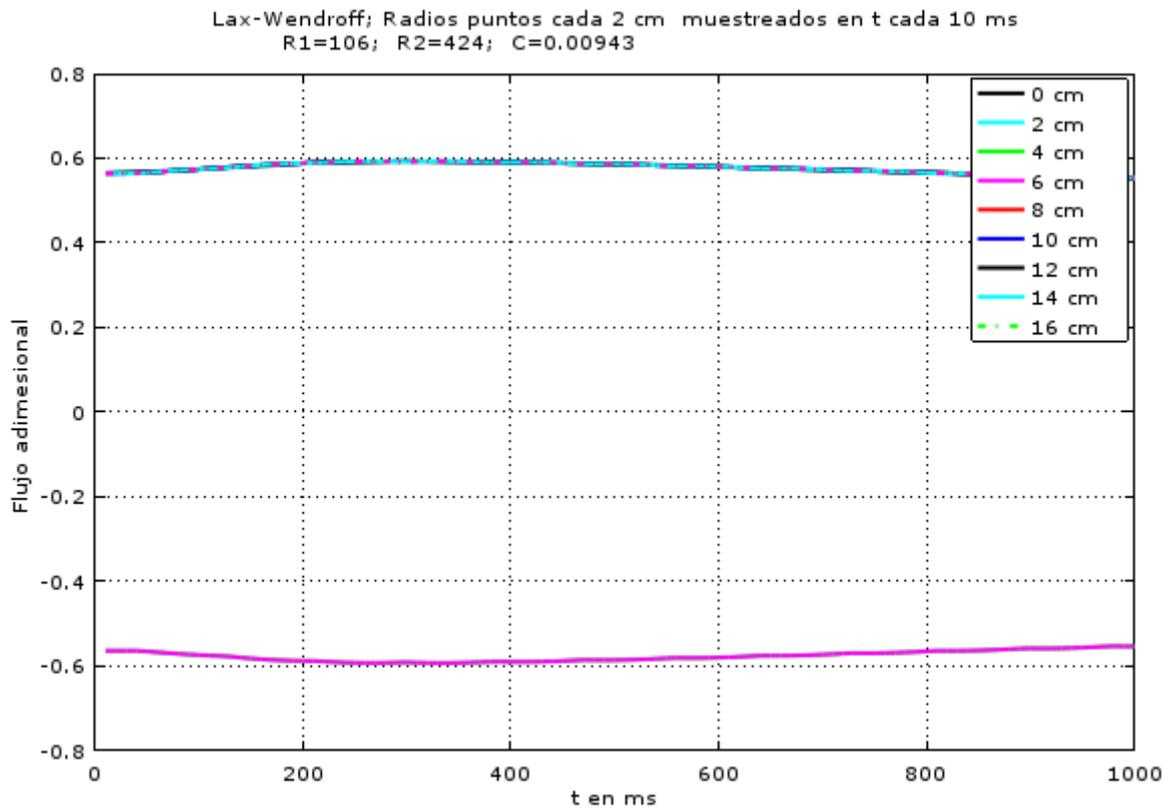


Fig. 7.2-24. Evolución temporal del flujo en distintos puntos de la arteria. Radio en reposo constante de 1cm.

7.2.8 CASO 7

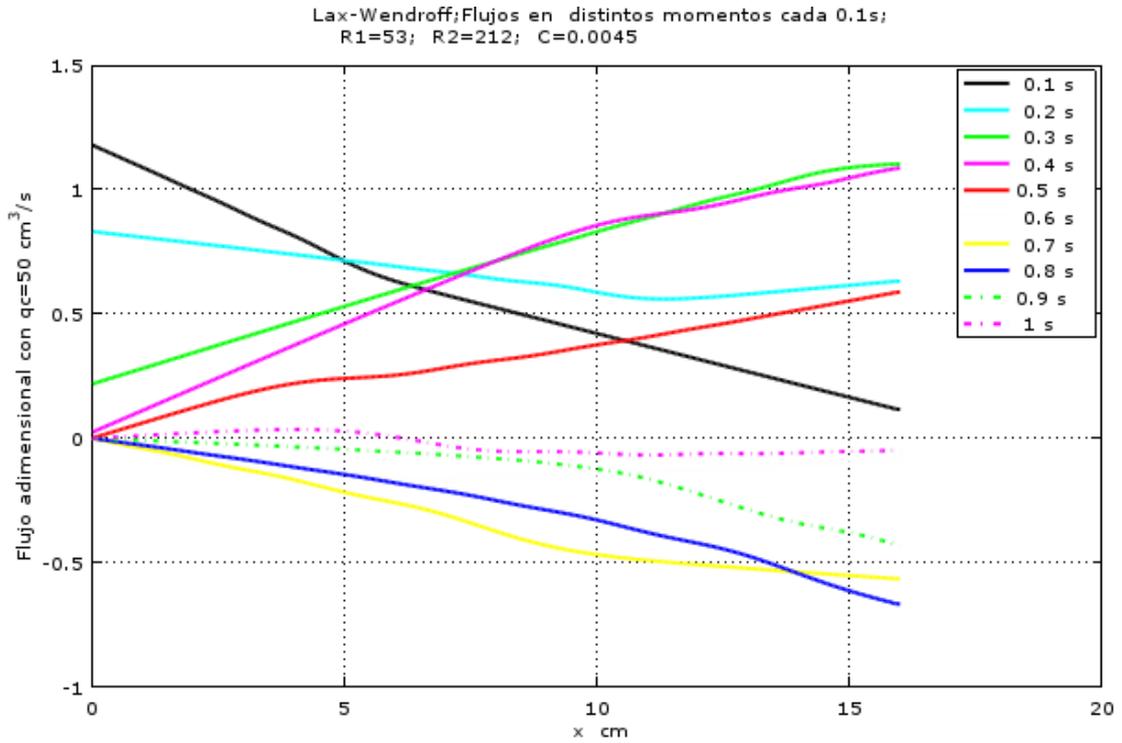
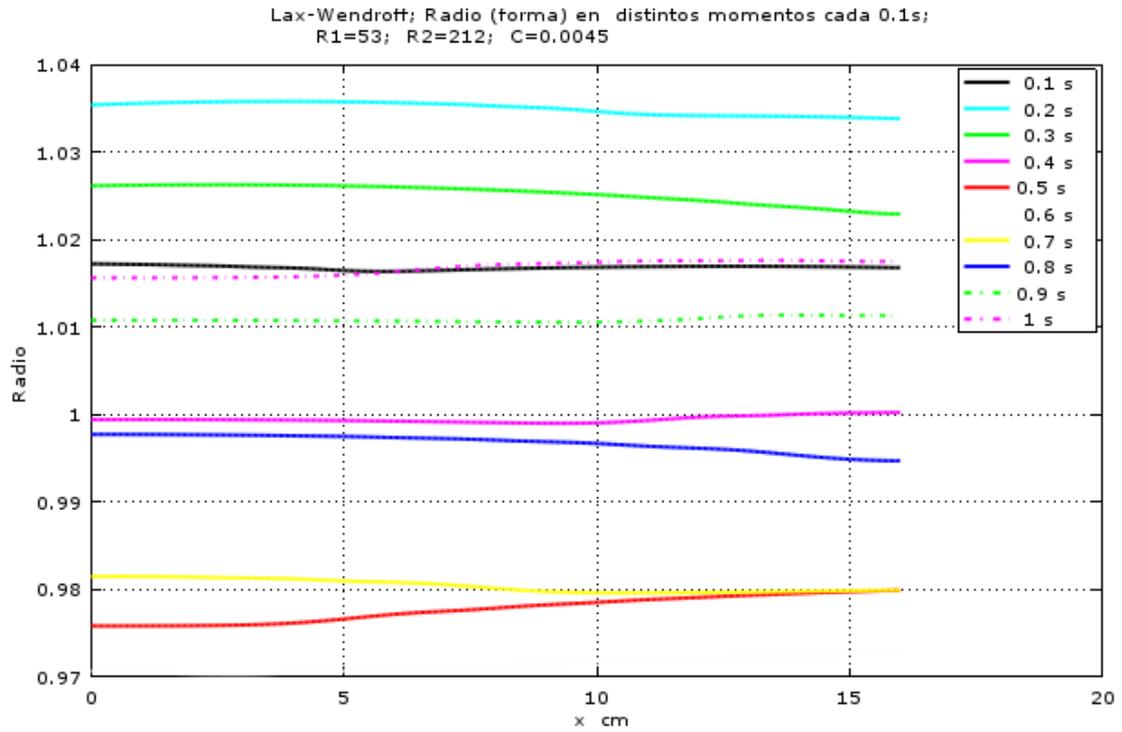


Fig. 7.2-25. Flujo en toda la arteria en distintos momentos. Radio en reposo constante de 1cm.



**Fig. 7.2-26.** Deformación de la pared arterial en toda la arteria en distintos momentos. Radio en reposo constante de 1cm.

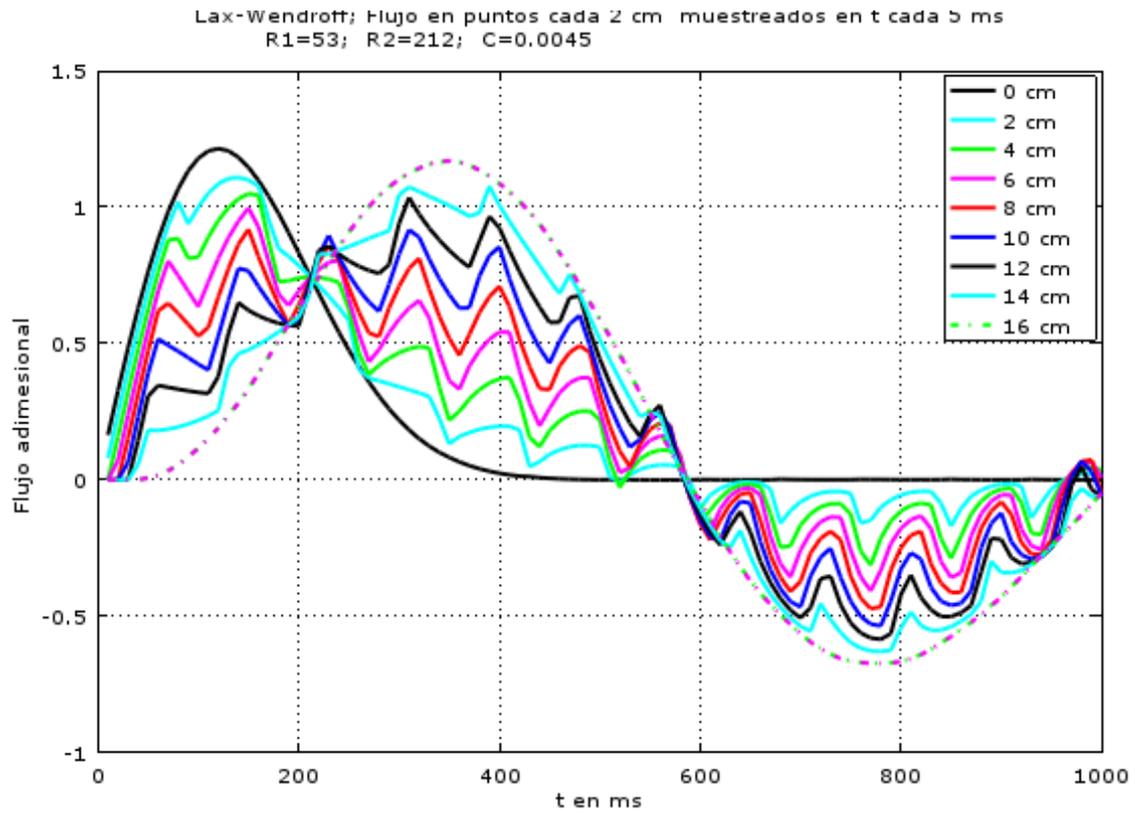


Fig. 7.2-27. Flujo en distintos puntos a lo largo del primer ciclo. Radio en reposo constante de 1cm.

7.2.9 Caso 8

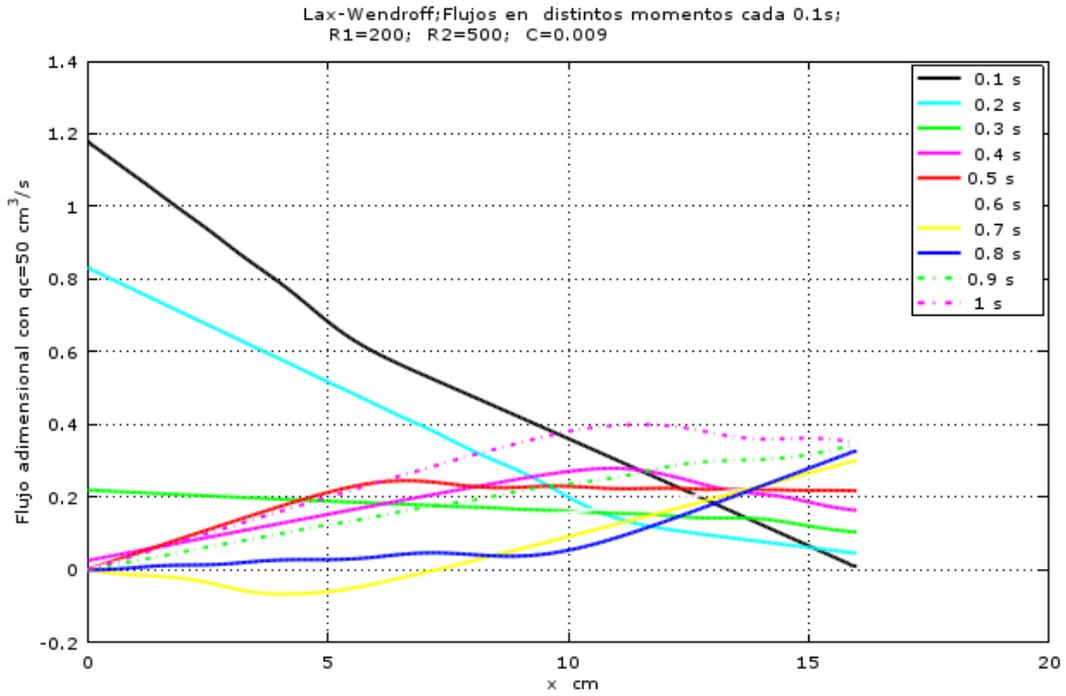
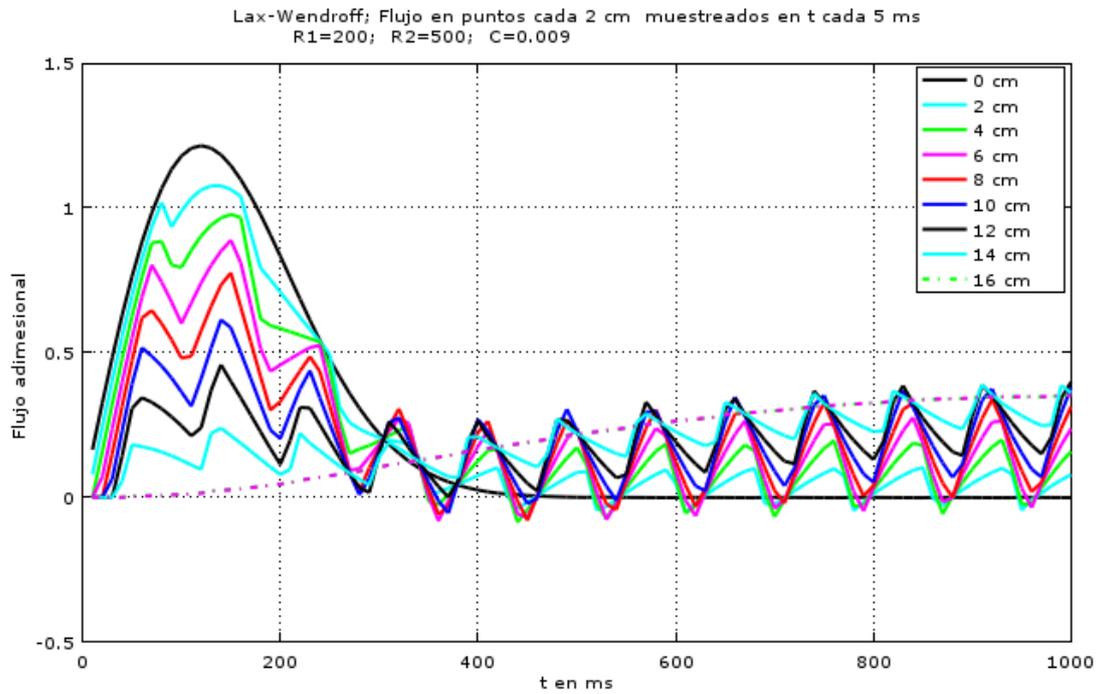
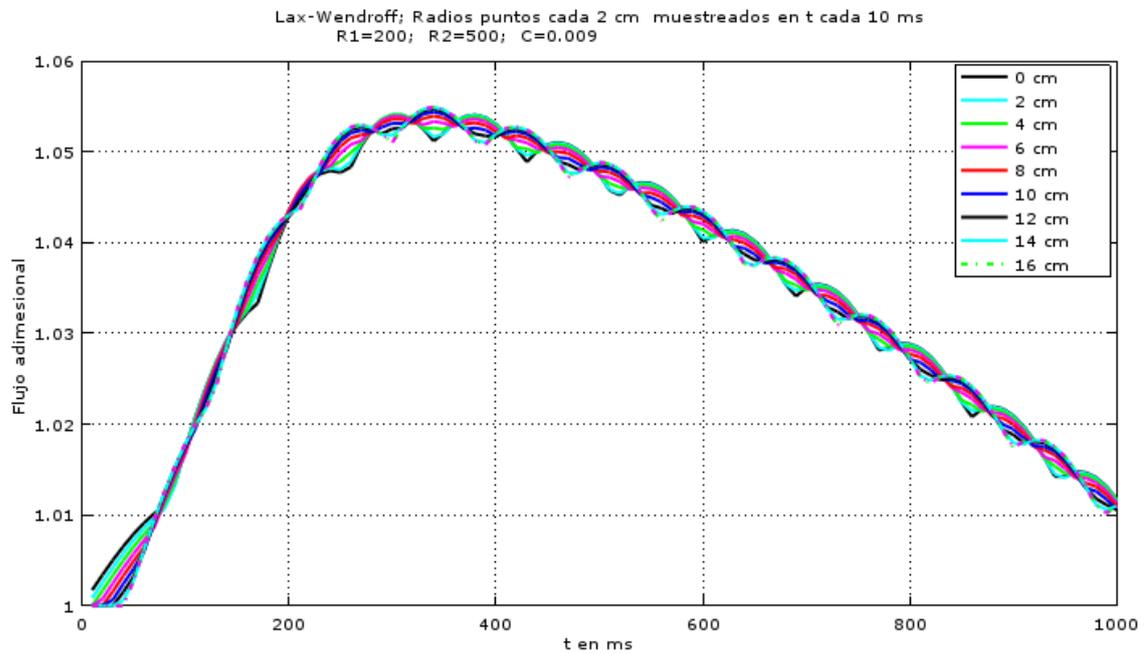


Fig. 7.2-28 . Flujos en toda la arteria en distintos momentos del primer ciclo. Radio en reposo constante de 1cm.



**Fig. 7.2-29 .Flujos en distintos puntos de la arteria a lo largo de todo el primer ciclo. Radio en reposo constante de 1cm.**



**Fig. 7.2-30. Deformación de la pared arterial en distintos puntos de la arteria a lo largo de todo el primer ciclo. Radio en reposo constante de 1cm.**

7.2.10 CASO 9

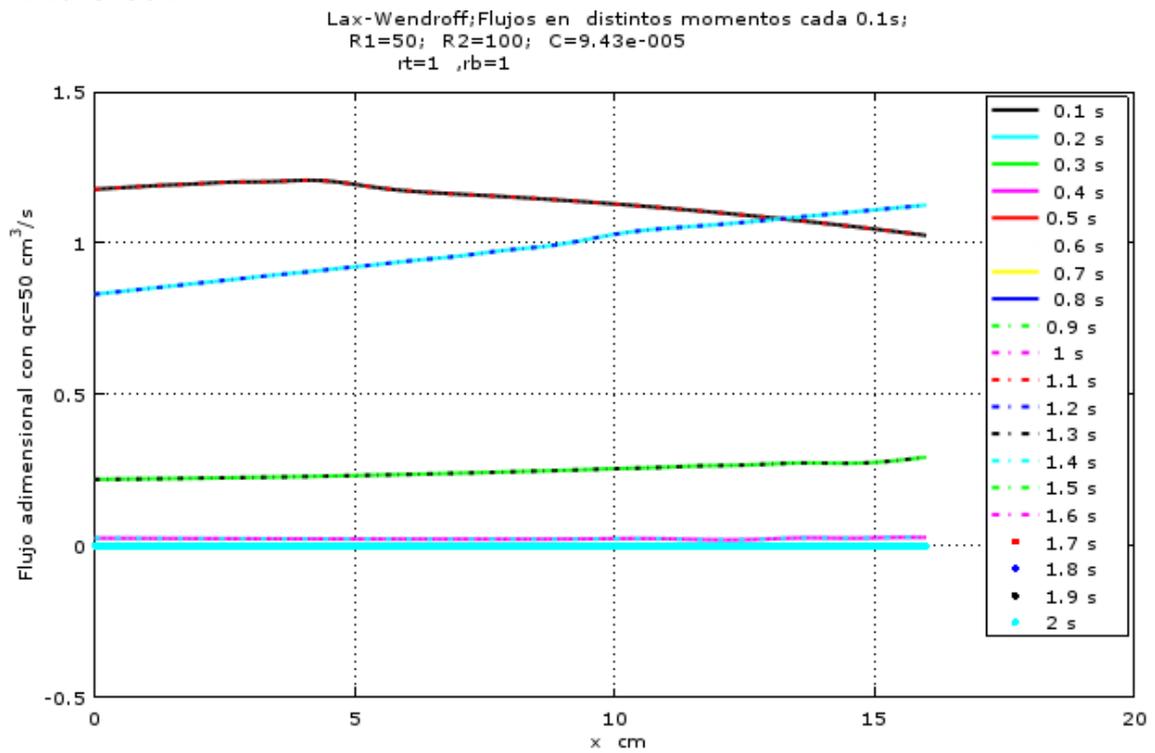


Fig. 7.2-31. Algoritmo de Lax-Wendroff con impedancia muy baja. Muestra los flujos en distintos instantes de tiempo a lo largo de toda la arteria obtenidos mediante muestreo cada 0,1s, para el flujo de entrada de la Fig. 5.4-1. Se observa que el flujo es prácticamente constante en todo momento.

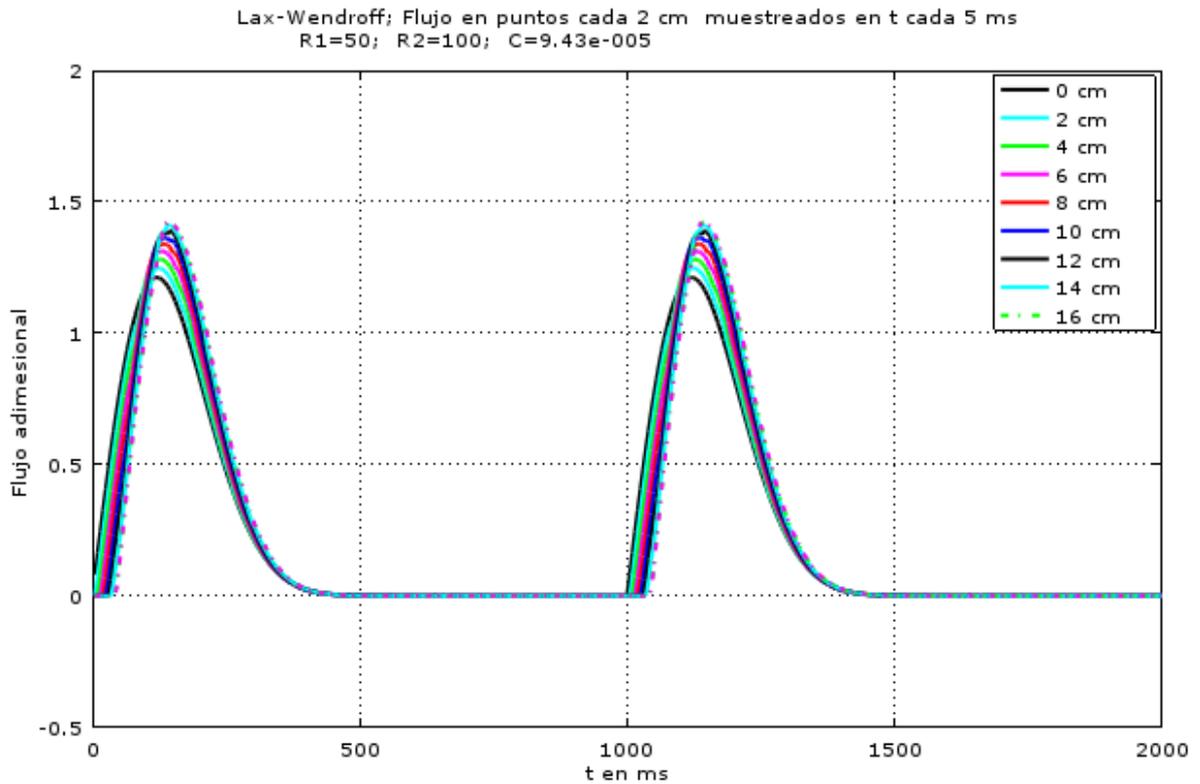


Fig. 7.2-32. Algoritmo de Lax-Wendroff con impedancia muy baja. Muestra los flujos de salida en distintos puntos de la arteria separados 2 cm entre sí, para el flujo de entrada de la Fig. 5.4-1 muestreando cada 10 ms,. Se observa que el flujo es prácticamente constante en toda la arteria en todo momento.

7.2.11 CASO 10

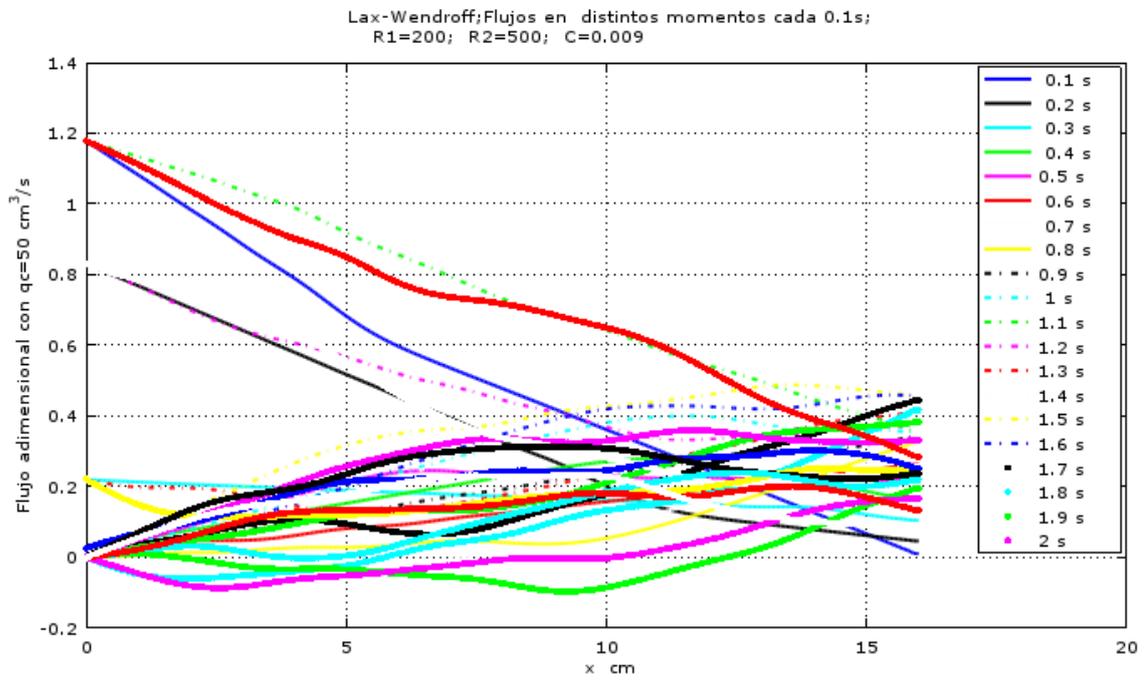
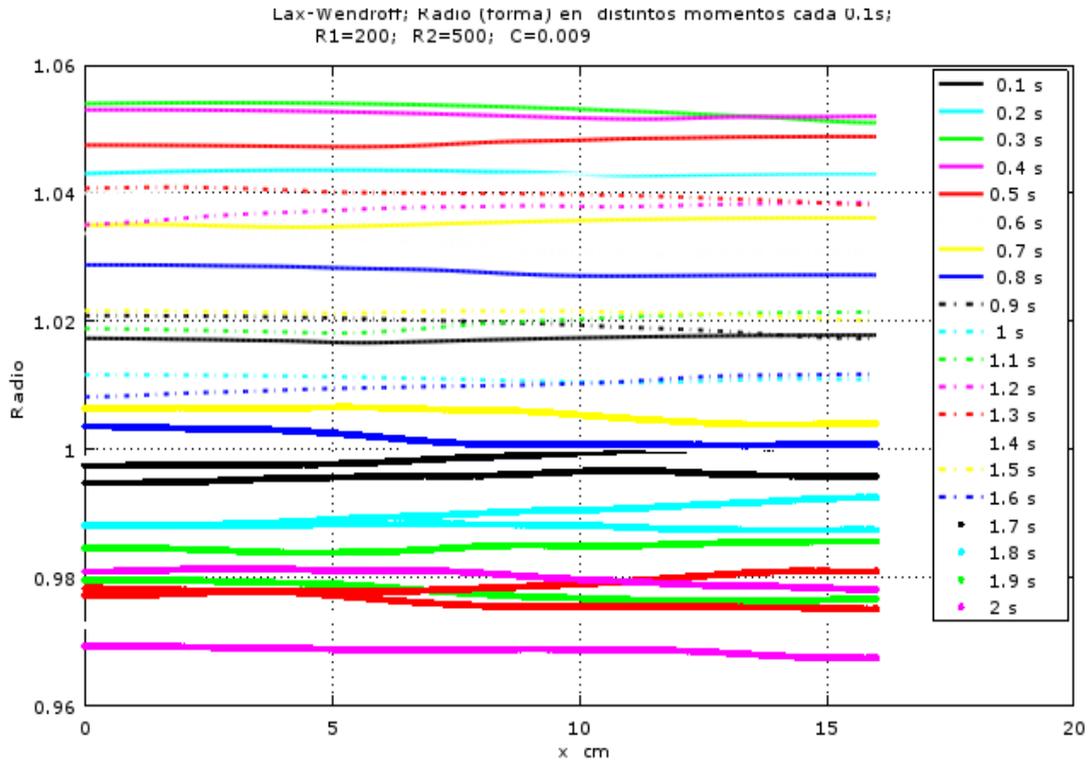
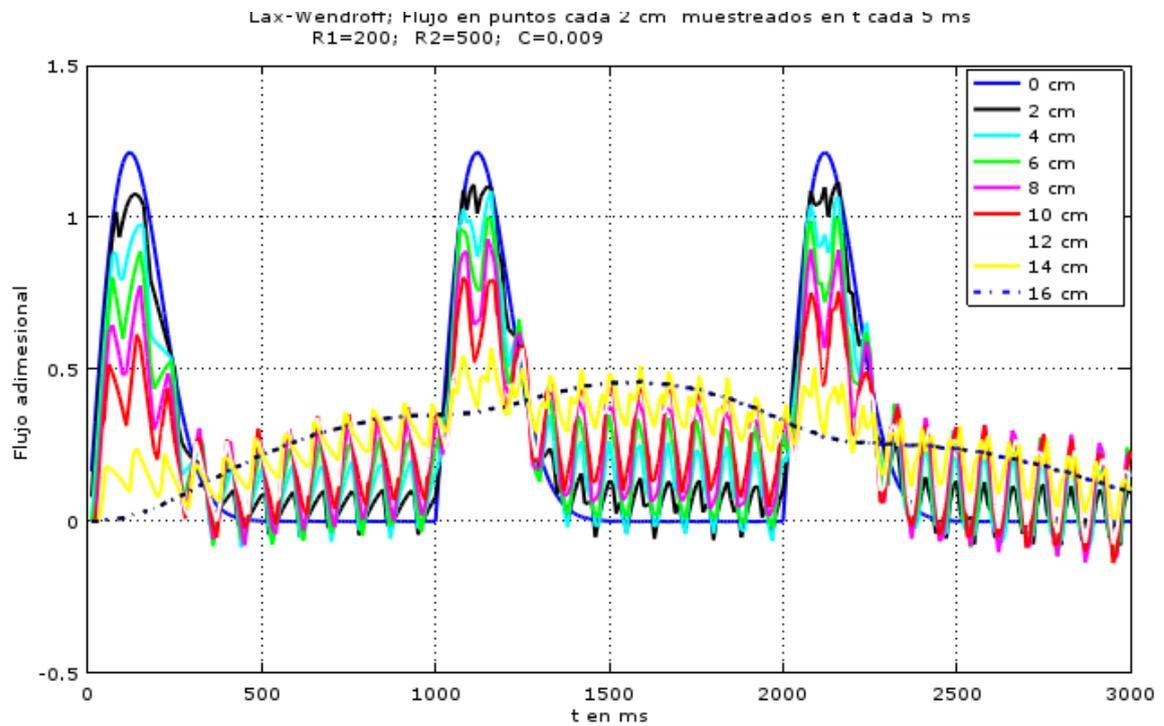


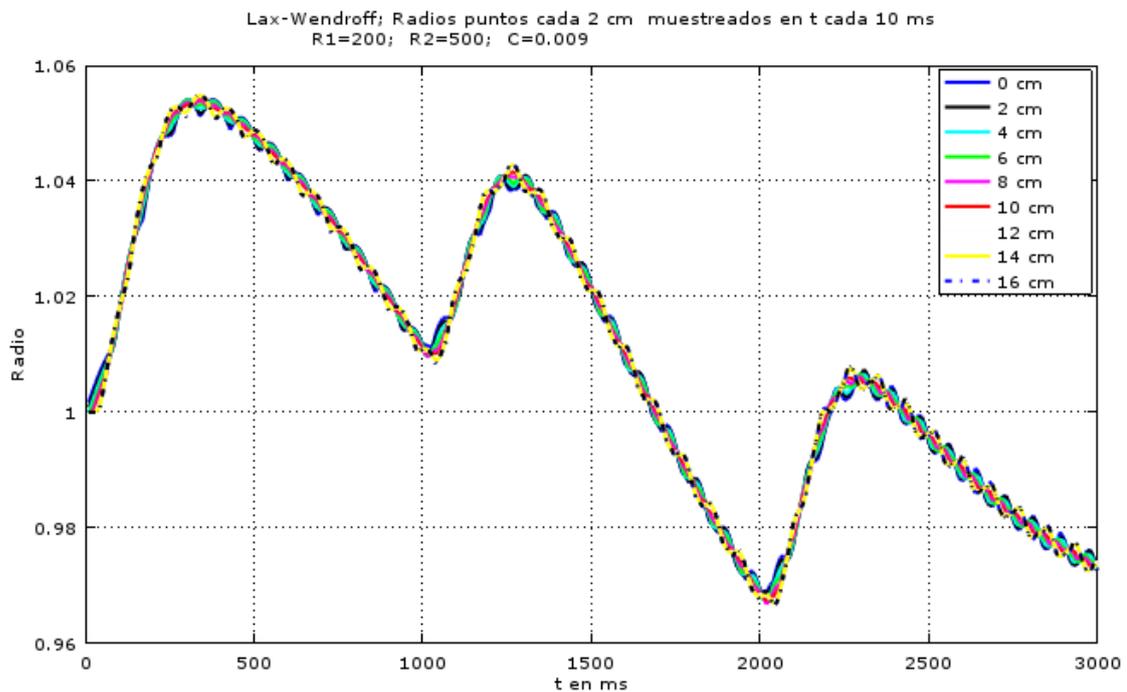
Fig. 7.2-33. Flujos en toda la arteria en distintos momentos del primer ciclo. Radio en reposo constante de 1cm.



**Fig. 7.2-34. Deformación de la arteria (radio actual) en distintos momentos de tiempo. El radio en reposo es 1cm en toda la arteria**



**Fig. 7.2-35. Flujo en puntos distintos a lo largo de tres periodos. El radio en reposo es constante a 1cm.**



**Fig. 7.2-36.** Forma de la arteria en distintos puntos a lo largo de tres ciclos, el radio en reposo es 1cm.

## 8 Implementación en Matlab

A continuación, se enumeran y describen brevemente, usando las cabeceras de las funciones que figuran completas en el Anexo, las principales funciones del código MATLAB implementado.

### 8.1 Función getmesh

Define la malla correspondiente a un segmento de arteria a partir de la geometría de la arteria, también define el tiempo total a simular y los pasos  $dx$  y  $dt$ , inicializa los flujos y áreas en  $t=0$

```

1 function [xt,tt,dx,dt,T,nx,nt,A0,Qi,Ai,Q0]=getmesh(numesh) ;
2 % inicializa el grid de un segmento de arteria
3 % definiendo dx,dy ( pasos de la red) , el tiempo total de simulación deseado (2s)
4 % Las dimensiones del segmento de arteria ( en este caso 7cm de long
5 % y 1,3 cm de radio
6 % La forma del caudal de entrada Q0 ( si no se trata de una bifurcación ) con la
7 % función getq
8 % Asimismo inicializa las matrices Ai y Qi que en el curso de la simulación
9 % iran conteniendo los valores de Flujo y Area en cada nodo de la

```

## 8.2 Función getq (Cálculo del flujo de entrada)

Esta función define el flujo de entrada al modelo como condición de contorno a la derecha

```

1 function [q] = getq (q0,tau,T,t)
2 % implementa el caudal de entrada periodico que es la condición de contorno a
3 % la izquierda , el caudal viene definido por los parámetros q0 y tau
4 % y el periodo de la señal es T
5 t1=q0*(mod(t,T))/tau^2;
6 q=t1.*(e.^(-(mod(t,T).^2/(2*tau^2))));
7 endfunction

```

## 8.3 Función gammam

Esta función define el área en un nodo  $Q=(i,j)$ , a partir del área y los flujos en el instante de la iteración anterior en los puntos  $T=(i,j-1)$  y  $B=(i+1,j-1)$ , siguiendo la ecuación de la curva característica que viaja hacia la izquierda y llega a Q desde su derecha

```

1 function [AQ] = gammam(qT,AT,qB,AB,qQ,A0,nq,dx,dt)
2 % Define el area AQ en un nodo (i,j) , a partir del caudal y area
3 % en los puntos T( i,j-1 ) y B( i+1,j-1) , siguiendo la ecuación de la curva
4 % característica que llega a Q desde la derecha

```

## 8.4 Función gammap

Esta función define el área en un nodo  $Q=(i,j)$ , a partir del área y los flujos en el instante de la iteración anterior en los puntos  $T=(i,j-1)$  y  $A=(i-1,j-1)$ , siguiendo la ecuación de la curva característica que viaja hacia la derecha y que llega a Q desde su izquierda

```

1 function [AQ] = gammap(qA,AA,qT,AT,qQ,A0,nq,dx,dt)
2 % Esta función define el área en un nodo Q= (i,j) ,
3 % a partir del área y los flujos en el instante anterior en los puntos
4 % T= ( i,j-1 ) y A= ( i-1,j-1) , siguiendo la ecuación de la
5 % curva característica que viaja hacia la derecha
6 % y que llega a Q desde su izquierda

```

## 8.5 Función qQAQ

Esta función calcula el flujo y el area en el punto  $Q=(i*dx,j*dt)$  interior a partir de los flujos y áreas de los puntos de la iteración anterior  $A=(i-1,j-1)$ ,  $T=(i,j-1)$  y  $B=(i+1,j-1)$ . Se utiliza la curva característica positiva (función gammap) que viaja hasta Q desde un punto R situado entre A y T y la curva característica negativa ( gammam) que viaja hasta Q desde un punto S situado entre T y B. La función calcula primero los puntos R y S resolviendo por iteraciones sucesivas las correspondientes ecuaciones no lineales y verificando siempre el cumplimiento

de la condición CFL. Después, obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales con los valores del área  $A$  y del flujo  $qQ$  en el punto  $Q$ .

```

1 function [qQ,AQ] = qQAQ(qA,AA,qB,AB,qT,AT,nq,dx,dt,A0)
2 % Calculo de Area y Flujo en un punto interior por intersección de
3 % las curvas características que llegan a el
4 % desde la derecha y desde la izquierda
5 % Calcula qQ y AQ en un punto interior (i,j) de coordenadas i*dx, j*dt
6 % por el método de las características.
7 % el punto A es (i-1,j-1) , T= (i,j-1) ; y B= (i+1,j-1) x xq=nq*dx

```

## 8.6 Función C123

Esta función implementa la ecuación de estado de la pared arterial que relaciona la presión con el área de la sección a través del módulo de Young y calcula las constantes  $C1$ ,  $C2$  y  $C3$  así como la velocidad de propagación de la onda en el punto  $x$

```

1 function [c0, cp, cm, C1, C2, C3] = C123(A0,x,q,A)
2 % Modelo elástico de la pared arterial
3 % dado A0 ( area de la sección) inicial , un punto x ,
4 % el flujo q y la area A en ese punto
5 % Devuelve c0 c+ c- C1,C2 C3 ; siendo C1, C2 y C3 las constantes
6 % de la ecuación de estado que son función de x

```

## 8.7 Función getEh

Esta función implementa el modelo elástico de la pared arterial, devolviendo el módulo de Young que corresponde a cada posición de la arteria y que aumenta al disminuir el radio en reposo de la sección.

```

1 function f=getEh(A0,beta,x)
2 % devuelve el término 4Eh/3r0 , correspondiente a la posición x en la arteria
3 % La geometría inicial esta definida por el area de la sección inicial
4 % y por el factor beta de modo que A(x)= A(0)*exp(-beta*x), el
5 % modulo de Young ( la rigidez de la pared ) , crece al disminuir el radio
6 %

```

## 8.8 Función eleva

```

1 function [a,q,r,s]=eleva(Am,Qm,R2,S2,j,m,A0,beta,delta,Re,dx,dt)
2 % Implementa las ecuaciones 18.1 y 18.2 de [35] del esquema LAX-WENDROFF
3 % Esta función implementa los dos tipos de iteraciones de Lax-Wendroff
4 % Para m=2 calcula los valores intermedios A, Q,R, S en (n +1/2), en el punto j
5 % Para m=3 calcula los valores iniciales del siguiente paso de A,Q, R, S
6 % en (n +1), en el punto j

```

## 9 Conclusiones

Como se describe en [7], los modelos 1D, a pesar de su menor coste de implementación y su simplicidad, tienen la capacidad de ser utilizado como herramientas de investigación versátiles para la simulación de una variedad de fenómenos fisiológicos y patológicos y se puede utilizar para apoyar la toma de decisiones clínicas y la planificación quirúrgica.

En este trabajo se han presentado los modelos clásicos 0D y 1D de flujo pulsátil en arterias y se han descrito en concreto los modelos siguientes, presentando sus bases físicas y matemáticas:

- El Windkessel 0D con dos elementos del modelo de Frank (1899)
- El modelo Windkessel 0D con 3 elementos que más tarde se ha utilizado para la interfaz con el modelo 1D al que proporciona las condiciones de contorno a la derecha.
- El modelo Womersley para analizar la distribución de las velocidades en función del radio y del tiempo para un flujo viscoso pulsátil y laminar en un tubo rígido con simetría axial.
- El modelo 1D de flujo pulsátil, siguiendo las referencias [1,2,5,6 y 11], en una arteria con paredes elásticas mediante el uso de la forma de 1D de las ecuaciones de Navier Stokes y de la ecuación de continuidad, junto con la ecuación de estado que describe el comportamiento elástico de las paredes arteriales. El modelo presentado es capaz modelar bifurcaciones de arterias, aunque esta característica no se ha implementado en el código por limitaciones de tiempo. El modelo 1D se puede conectar a los modelos 0D para simular la microcirculación acoplado un modelo 0D a cada terminación arterial, en el trabajo se ha implementado un único modelo 0D (Windkessel con 3 elementos) al modelo 1D de un único segmento de arteria.
- Se ha implementado el algoritmo de diferencias finitas explícitas de Lax- Wendroff, [35], que posee propiedades de convergencia de segundo orden.

Todos estos modelos han sido implementados en Matlab y se han realizado algunas pruebas numéricas, principalmente relativas a evaluar la influencia de la impedancia de salida en el flujo arterial, aunque el mismo modelo en su estado actual se podría usar para evaluar otros aspectos como la influencia que tiene el comportamiento elástico de a pared arterial en el flujo lo que no se ha realizado por limitación de tiempo, por esta misma razón, se ha limitado el software escrito con los algoritmos de las curvas características y del método de diferencias explícitas de Lax-Wendroff, a un único tramo de arteria sin bifurcaciones y con condiciones de contorno a la entrada y a la salida.

Se han utilizado dos condiciones de contorno de entrada distintas correspondientes a números de Reynolds de 1087 y 1304 respectivamente ambas con un flujo oscilante de periodo 1Hz que simula el corazón y distintas condiciones de contorno de salida mediante un modelo WK con 3 elementos que simula la microcirculación al final de arteria, para diversas impedancias, para así analizar la influencia de la resistencia periférica en el flujo arterial. Se han realizado simulaciones con distintas condiciones de contorno salida, variando la impedancia del Wk de salida y obteniendo los resultados que se muestran y que son bastante diferentes en función de dicha impedancia.

Los parámetros del modelo viscoelástico de la pared arterial se han mantenido constantes en los ejercicios que se adjuntan.

También se ha utilizado mallas de diversos tamaños, que cumplieran la condición CFL, observándose escasa diferencia en los resultados para los tamaños utilizados.

La solución numérica de las ecuaciones de NS 1D se ha realizado utilizando el método de las curvas características y el de diferencias finitas de Lax-Wendroff.

Las principales conclusiones que se obtienen del análisis de los resultados del presente trabajo son las siguientes:

- El modelo 1D, permite con un esfuerzo moderado de implementación y de cálculo, predecir ondas de flujo y presión, así como tensiones medias en la pared arterial.
- El modelo 1D implementado presenta una sensibilidad importante a las variaciones de geometría, modelo viscoelástico y condiciones de contorno de entrada y salida como se puede observar en la gran diferencia en los resultados obtenidos al variar la

impedancia de salida, o el flujo de entrada, lo que está de acuerdo con la gran importancia fisiológica de la geometría de la arteria, de la resistencia de salida y de la compliancia junto con el comportamiento viscoelástico de la pared arterial. El modelo permitiría realizar predicciones realistas sobre ondas de flujo y presión, así como sobre las tensiones en la pared arterial si se hubiese ajustado la geometría, impedancia y modelo viscoelástico a condiciones fisiológicas determinadas, lo cual no se ha hecho en el presente trabajo y queda pendiente para un trabajo posterior.

- Se observa como la utilización del método de Lax Wendroff de segundo orden permite eliminar ruidos de alta frecuencia que aparecen en la utilización del método de las características que presenta orden de convergencia de primer orden, queda para un trabajo posterior analizar el impacto de utilización de otros métodos numéricos como

## 10 Posibles ampliaciones del presente trabajo

Este trabajo se podría ampliar obviamente en multitud de direcciones, por ejemplo:

- Implementación de un modelo del árbol arterial completo incluyendo las bifurcaciones necesarias y los modelos terminales necesarios en cada una de las arterias, ajustados a las características fisiológicas de cada arteria
- Sustitución del modelo OD de Windkessel por un modelo de árbol estructurado como se describe en [2].
- Implementación de un método numérico más robusto, pasando del modelo de integración de las curvas características (convergencia de primer orden), o del modelo Lax-Wendroff con convergencia de segundo orden a un modelo de volúmenes finitos (FVM) o de elementos finitos (FEM) discontinuos de Galerkin con mejores propiedades de convergencia y más generalizables a modelos 2D y 3D.
- Consideración de las características no Newtonianas de la sangre.
- Mejor modelación de las características viscoelásticas de la pared arterial.
- Extensión del modelo de Womersley a tubos con paredes flexibles como las arterias.
- Extensión del modelo a todo el árbol arterial modelando las bifurcaciones y la microcirculación de salida al final de cada arteria, mediante modelos Windkessel ajustados a cada arteria o mediante arboles estructurados como en [2,6] igualmente adecuados a cada arteria.
- Ajuste de los parámetros del modelo a los datos fisiológicos reales obtenidos a partir de la literatura fisiológica o a partir de imágenes de resonancia magnética.

## 11 Bibliografía

1. M. S. Olufsen et al. Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured –tree outflow conditions. *Annals of Biomedical engineering*. Vol 28 pp. 1281-12999,2000
2. M. S. Olufsen. Modelling the arterial system with reference to an arterial simulator. Ph D. Thesis -1998. Roskilde University DN.

3. D. Rubinstein et al. *Biofluids mechanics*. Elsevier 2012
4. L. Waite et al. *Applied Biofluid Mechanics*. Mc Graw Hill 2007
5. L. Formaggia et al. *Cardiovascular mathematics*. Springer Verlag 2009
6. Tao Du et al. Outflow Boundary Conditions on Blood Flow in Arterial Trees..PLOS OneDOI:10.1371/journal.pone.0128597. May 22.2015
7. F.N. Van deVosse & N. Stergiopoulos N. Pulse wave propagation in the arterial tree. *AnnualReviewofFluid Mechanics*.2011;43:467–499.
8. D.A. Johnson et al. Application of 1D blood flow models of the human arterial network to differential pressure predictions. *Journal of Biomechanics* 44 (2011) 869-876.
9. A. Johnson et al. An impedance model for blood flow in the human arterial system. Part I: Model development and MAT.LAB implementation.
10. Xiao-Fei Wang et al. Fluid friction and wall viscosity of the 1D blood flow model. *Journal of Biomechanics* 49 (2016) 565–571[2]
11. J. Alastruey. Numerical modelling of pulse wave propagation in the cardiovascular system: development, validation and clinical applications. PhD thesis, Imperial College London, University of London, 2006
12. Delestre & P.-Y. Lagrée. A. "well-balanced" finite volume scheme for blood flow simulation. arXiv:1205:6033v1-28-May-2012
13. <http://www.mater.upm.es/Docencia/Materiales/Biomateriales/Archivos.pdf/VasosSanguineos.pdf>
14. <https://en.wikipedia.org/wiki/Capillary#/media/File:Capillary.svg>
15. Westerhof, Nico; Lankhaar, Jan-willem; Westerhof, Berend E. The Arterial Windkessel. *Medical and Biological Engineering and Computing* 47.2 (Feb 2009): 131-41.
16. Yubing Shi et al. Review of Zero-D and 1D Models of Blood Flow in the Cardiovascular System. *Biomed Eng Online*. 2011; 10: 33. Published online 2011 Apr 26. doi: 10.1186/1475-925X-10-33.
17. L. M. Itu1. Analysis of outflow boundary condition implementations for 1D blood flow models. *Proceedings of the 3rd International Conference on E-Health and Bioengineering - EHB 2011*, 24th-26th November, 2011, Iași, Romania.
18. S.J. Sherwin et al. One-dimensional modeling of a vascular network in space-time variables. *Journal of Engineering Mathematics* 47:217:250,2003
19. D.N. Ku; *Blood Flow in Arteries*, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1997. 29:399–434 Copyright© 1997 by Annual Reviews Inc. All rights reserved.
20. Yunlong Huo et al. A hybrid one-dimensional/Womersley model of pulsatile blood flow in the entire coronary arterial tree. *Am J Physiol Heart Circ. Physiol.* 292: H2623–H2633, 2007. First published January 5, 2007
21. J. Mestel. *Bio Fluid Mechanics:Lecture 14*  
<http://wwwf.imperial.ac.uk/~ajm8/BioFluids/lec1114.pdf>.

22. GG Belz. Elastic properties and Windkessel function of the human aorta. *Cardiovasc Drugs Ther.* 1995 Feb;9(1):73-83.
23. M.Saito. One-Dimensional Modeling of Pulse Wave for a human artery model. Master Thesis, Doshisha University Kyoto, Japan 2010
24. A.Figueroa. Womersley theory for blood flow in elastic tubes. PhD dissertation. Stanford University 2006
25. [http://bme.elektro.dtu.dk/31545/notes/lecture\\_4\\_4\\_per\\_page.pdf](http://bme.elektro.dtu.dk/31545/notes/lecture_4_4_per_page.pdf)
26. Nichols, W.W. et al. McDonald's Blood Flow in Arteries, Experimental and Clinical Principles. Oxford University Press, New York (2005)
27. K. Gayathri et al. Pulsatile blood flow in large arteries: comparative study of Burton's and McDonald's models
28. Benetos A. et al. Pulse pressure: a predictor of long-term cardiovascular mortality in a French male population. *Hypertension* 30:1410–1415
29. Segers P, Stergiopoulos N, Westerhof N (2002) Relation of effective arterial elastance to arterial system properties. *Am J Physiol Heart Circ Physiol* 282:H1041–H1046
30. G. J. Tortora and B. Derrickson. Principles of Anatomy and Physiology. Twelfth Edition. J. Wiley & Sons, 2009
31. [http://macanatomy.mcmaster.ca/index.php?option=com\\_content&view=article&id=233%3Aarteries](http://macanatomy.mcmaster.ca/index.php?option=com_content&view=article&id=233%3Aarteries)
32. Alastruey I, 2 et al. Lumped Parameter Outflow Models for 1-D Blood Flow Simulations: Effect on Pulse Waves and Parameter Estimation. Global Science Preprint 2007.
33. M.S. Olufsen, C.S. Peskin, W.Y. Kim, E.M. Pedersen, A. Nadim, and J. Larsen. Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions. *Annals Biomed. Engng.*, 28:1281–1299, 2000.
34. Wilmer W. Nichols et al. McDonald's Blood flow in arteries. Sixth edition 2011. Hodder Arnold
35. R.D. Richtmyer. A Survey of Difference Methods for Non-Steady Fluid Dynamics. National Center for Atmospheric Research. Boulder, Colorado. NCAR Technical Notes 63-2. Manuscript completed August 27, 1962
36. Raines, J. et al. A computer simulation of arterial dynamics in the human leg. *J. Biomechanics* V7 (1974).
37. Zachmanoglou et al. Introduction to Partial Differential Equations with Applications. Dover (1986).

EDP	Ecuaciones en derivadas parciales
EDO	Ecuaciones diferenciales ordinarias
NS	Navier Stokes

Re	Número de Reynolds
St	Número de Strouhal
W	Número de Womersley
WK	Modelo Windkessel
E	Módulo de Young. Pasc= N/m <sup>2</sup>
RK	Algoritmo de Runge Kutta
$\epsilon$	Alargamiento relativo
$\sigma$	Tensión en las paredes de la arteria. Pasc=N/m <sup>2</sup>
q,Q	Flujo. m <sup>3</sup> /s
A	Area de la sección transversal de la arteria. m <sup>2</sup>
$\omega$	Frecuencia del flujo pulsante. rad/s
r	Coordenada radial. m <sub>m</sub>
$\delta$	Espesor de capa límite. m.
$\rho$	Densidad de la sangre en kg/m <sup>3</sup>
$\nu$	Viscosidad cinemática de la sangre. m <sup>2</sup> /s
$\nu_x$	Coefficiente elástico de Poisson en dirección longitudinal
$\nu_\theta$	Coefficiente elástico de Poisson en dirección radial
$\mu$	Viscosidad dinámica de la sangre. Ns/m <sup>2</sup>
$\Delta$	Operador Laplaciana
u	Velocidad de la sangre. cm/s
c	Velocidad de propagación de la onda de flujo. m/s
r	Radio de la arteria. cm

## 12 ANEXO Código Matlab

### 12.1 Modelo Windkessel con 2 elementos

```

1 T=0.5
2 Qin=400
3 qmin=20
4 qmax=380
5 RC=-T/(log((Qin-qmax)/(Qin-qmin)))
6 Q=zeros(1000,1);
7 Q(1:500)=Qin*ones(500,1);
8 t=linspace(0,1,1000);
9 figure(1)
10 qout=zeros(1000,1);
11 qout(1:500)=Qin+(qmin-Qin)*exp(-t(1:500)/RC)';
12 qout(501:1000)=qmax*exp(-t(1:500)/RC);
13 plot(t,Q','r',t,qout','k')
14 axis([0,1,-5,500])
15 title('Respuesta de un WK con dos elementos')
16 xlabel('tiempo')
17 ylabel('flujo')
18 legend('Qin','Qout',2)
19 ax = gca();
20 set(ax, 'fontsize', 12);
21 grid on

```

## 12.2 Modelo Windkessel con 3 elementos resuelto por Kirchoff.

Esta función se utiliza para definir las condiciones de contorno de salida (“outflow”) del modelo 1D. Se utiliza la analogía eléctrica para resolver por Kirchoff la corriente por la resistencia R2 (que se corresponde con el flujo de salida).

```

1 function [qnml, Vst]=Windk3(pn, qn, Vstn, R1, R2, C, dt)
2 % implementación de la función de respuesta del Windkessel con tres elementos
3 % calculada mediante aplicación de las leyes de kirchoff
4 %Vstn es la tensión en los bornes del capacitor en el instante n-1
5 %La corriente a través del Capacitor en el instante n se aproxima por C(Vst-Vstn)/dt
6 Vst=(C*Vstn/dt+pn/R1)/((1/R1+1/R2)+C/dt); %
7 qnml=Vst/R2;
8 endfunction

```

### 12.3 Windkessel de 3 elementos implementado con RK-4

```

90 function qq=Windkessel3_rk4()
91 %Implementa el algoritmo Runge Kutta 4
92 % para resolver la EDO q'(t) = f(t,p(t),q(t))
93 qq=zeros(2000,1);
94 h = 0.001;
95 t = 0;
96 w = 0; %caudal inicial ==0
97 i = 0.0;
98 printf('Step %d: t = %6.4f, w = %18.15f\n ', i, t, w);
99 while i<2000
100 k1 = f(t,w);
101 k2 = f(t+h/2, w+h/2*k1);
102 k3 = f(t+h/2, w+h/2*k2);
103 k4 = f(t+h, w+h*k3);
104 w = w + h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
105 t = t+h;
106 i = i+1;
107 qq(i)=w;
108 end
109 endfunction

```

```

48 % ecuación diferencial a integrar
49 function dqdt = f(t,q)
50 R1=206;
51 R2=424;
52 C=5.0e-4;
53 dqdt=dppdt(t)-q*(1+R1/R2)/C + pp(t)/(C*R2)
54 dqdt=dqdt/R1
55 endfunction
56 % Forma analítica de la presión de entrada , t en ms
57 function v=pp(tt)
58 t=mod(tt,1); %t en ms modulo 1000;
59 if(t<0.401) v=140/0.0075*sin(pi/0.4*t); else v=0; endif;
60 endfunction
61
62 % Derivada analítica de la presión de entrada
63 function v=dppdt(tt)
64 t=mod(tt,1)*1000; %t en ms modulo 1000;
65 if(t<0.401) v=(140/0.0075)*(pi/0.4)*cos(pi/0.4*t); else v=0; endif;
66 endfunction

```

## 12.4 Modelo de Womersley

```

1  %MODELO DE WOMERSLEY PARA FLUJO PULSANTE EN TUBO DE SIMETRIA AXIAL Y RIGIDO
2  %
3  % PARAMETROS DE VISCOSIDAD, FRECUENCIA, RADIO del TUBO, etc..
4  nu=3.302e-6 ; %viscosidad cinemática de la sangre en m^2/s
5  mu=0.0035; % Viscosidad dinámica de la sangre en Ns/m^2
6  ro=1060; % ro= densidad de la sangre en Kg/m^3
7  R=0.015; % radio del vaso =2,5mm
8  nr=25; % dimesion de la malla de velocidades en dirección r
9  W=[0.5,1,2,3,4,5,18,30]; %numeros de Womerley a calcular
10 omega=(nu/R^2)*(W.*W); %frecuencias correspondientes a esos alpha
11 T=2*pi*ones(length(W),1)./omega'
12 rsR=linspace(0,1,nr); % radios normalizados entre 0 y 1
13 % Calculo de perfiles de velocidad normalizados para cada alpha
14 % obtenido dividiendo por el valor máximo del flujo de Poiseuille
15 v=zeros(25,5,length(W));
16 figure(1)
17 hold on
18 t=linspace(0,1,5)
19 for j=1:length(W)
20     lamb=i^(3/2)*W(j)
21     b=besselj(0,lamb)
22     t=linspace(0,1,5)
23     for k=1:nr
24         ve= (-4/lamb^2)*( 1-(besselj(0,lamb*rsR(k))/b));
25         for l=1:5
26             v(k,l,j)=abs((ve*exp(i*omega(j)*t(l))));
27         end
28     end
29 end
30 end
31 plot(rsR,v(:,1,1),rsR,v(:,1,2),rsR,v(:,1,3),rsR,...
32 v(:,1,4),rsR,v(:,1,5),rsR,v(:,1,6),rsR,v(:,1,7),rsR,v(:,1,8))
33 ax = gca();
34 set(ax, 'fontsize', 12);
35 title('perfiles de velocidad noemalizados en funcion de W')
36 legend('W=0.5','W=1','W=2','W=3','W=4','W=5','W=18','W=30')
37 xlabel('Radio normalizado r/R')
38 ylabel('Velocidad normalizada v(r)/vmax(Poiseuille)')

```

## 12.5 Pseudocódigo del algoritmo de curvas características

Este es el programa principal del simulador 1D que tiene el siguiente esquema de flujo en pseudocódigo:

- 1) Definir: la malla, el estado inicial de la solución (0 flujo y 0 presión). la geometría de la arteria y el flujo de entrada a la arteria (líneas 1-18).
- 2) **For** n=1: nt ; una iteración por cada dt ( en el ejemplo cada 0,1 milisegundo)  
    Calcular flujo en el punto inicial x=0, usando el flujo de entrada (función getq)  
    Calcular área en x=0, usando la curva característica negativa (función gammam)  
    **For** ix=2: nx-1  
        % Una iteración en cada punto interior de la arteria  
        Calcular Q y A en cada nodo (n,ix) usando las curvas características

negativas (función  $\gamma_{mm}$ ) y positiva (función  $\gamma_{mp}$ )

**End For** para puntos interiores en el instante  $n$

Calcular el flujo  $Q$  en el punto final de la arteria usando WK3

Calcular el área  $A$  en el punto final usando la curva característica positiva

**EndFor**

- 3) Presentación de curvas de flujo en toda la arteria cada 0.1 s y de curvas flujo en los dos segundos en puntos de la arteria cada 2 cm

## 12.6 Pseudocódigo del algoritmo Lax-Wendroff

Este es el programa principal del simulador 1D que tiene el siguiente esquema de flujo en pseudocódigo:

- 4) Definir: la malla, el estado inicial de la solución (0 flujo y 0 presión). la geometría de la arteria y el flujo de entrada a la arteria (líneas 1-18).  
 5) **For**  $n=1: nt$ ; una iteración por cada  $dt$  (en el ejemplo cada 0,1 milisegundo)

**For**  $ix=3: nx-2$

% Una iteración en cada punto interior de la arteria

Calcular  $Q$  y  $A$  en cada nodo intermedio ( $j, n+1/2$ )

usando la ecuación (6.2-1)

**End For** del primer paso intermedio para puntos interiores en el instante  $n$

**Aplicar condiciones de contorno**

Calcular el flujo  $Q$  en el punto final de la arteria usando WK3

Calcular el área  $A$  en el punto final usando las ecuaciones (6.2-1) y (6.3-1)

**For**  $ix=2: nx$

% Una iteración en cada punto interior de la arteria

Calcular  $Q$  y  $A$  en cada nodo intermedio ( $j, n$ )

usando la ecuacion (6.3-1)

**End For** del segundo paso final para puntos interiores en el instante  $n$

**EndFor**

- 6) Presentación de curvas de flujo en toda la arteria cada 0.1 s y de curvas flujo en los dos segundos en puntos de la arteria cada 2 cm

## 12.7 Código Matlab del Algoritmo de curvas características del modelo 1D

```

1 numesh=1 ; %arteri #1 , % Cada arteria tiene una malla asociada
2 % en la implementación actual sólo hay una arteria
3 nwk=1; %windkessel #1
4 %inicializar malla
5 % SIMULA UN TROZO DE ARTERIA ACABADO EN UN WINDKESSEL
6 % UTILIZA EL METODO DE LAS CARACTERISTICAS
7 % CONVERGENCIA DE PRIMER ORDEN CUMPLIENDO CFL
8 % unidades en sistema CGS
9 %
10 [xt,tt,dx,dt,T,nx,nt,A0,beta,tau,Q1,A1,Q0]=getmesh(numesh); % obtner datos de malla
11 figure(20)
12 hold on
13 abcisas=linspace(0,xt,nx);
14
15 itx=1;
16 % numero de pasos de dt simulados
17 nsel=mod((0:nx-1),20)==0 ;% puntos en los que se mide la evolución temporal
18 nsel(nx-1)=1
19 ns=sum(nsel)
20 nsample=ceil(0.01/dt)+1;
21 FlujoTX=zeros(nsample,ns+1); % inicialización de flujos a medir
22 nfig=1; % contador de figuras
23 pnn1=0; % presion inicial en Windkessel para condicion de contorno a la derecha
24 qnm1=0;
25 pst=0 % pst=pst+qdt/C; q=(p-p*)/C
26 lgend=""
27 col=["k","b","r","g","m","c"]
28 kk=1;
29 R1=106;
30 R2=424;
31 C=9.43e-4;
32 Vst=0;
33 Vstn=0;
34
35 %*****
36 %*****
37 lnn=ceil(19*0.1/dt)+ 10;
38 for n=1:lnn %nt ; % numero de pasos de dt simulados
39     if (mod(n,nsample)==0) % recoger valores de flujo acad 5*dx de longitud
40         %if(itx<=ceil(nt/450))
41             FlujoTX(itx,1:ns)=Q1(nsel,1); % cada 4,5 ms se mide el flujo
42             % en los puntos nsel
43             Flujo(itx,ns+1)=Q1(nx,1);
44             itx=itx+1
45         % endif
46     endif

```

```

47     %disp(n)
48     % CONDICION DE CONTORNO A LA IZQUIERDA
49     % Condición de contorno a la izda x=0; Q = parametro de entrada
50     % A se calcula con la curva caracteristica negativa
51     %
52     Q1(1,2)=getq(n*dt); %qn(1) es el Caudal de entrada a la izquierda
53     qQ=Q1(1,2);
54     qT=Q1(1,1);
55     % Q1 y A1( :, 1) = datos del instante dt*(n-1)
56     % Q1 1 A1( :, 2) = datos del instante dt*n
57     AT= A1(1,1);
58     qB=Q1(2,1);
59     AB=A1(2,1);
60     nq=1;
61     AI = gammamr0(qT,AT,qB,AB,qQ,A0,beta,nq,dx,dt); %gammamr0(qT,AT,qB,AB,qQ,A0,
62     A1(1,2)=AI ;% Calculo de area por caracteristica negativa f
63     for ix=2:nx-1
64         %%iteracion de puntos interiores
65         qA=Q1(ix-1,1);
66         AA=A1(ix-1,1);
67         qT=Q1(ix,1);
68         AT=A1(ix,1);
69         qB=Q1(ix+1,1);
70         AB=A1(ix+1,1);
71         [qQ,AQ] = qQAQr0(qA,AA,qB,AB,qT,AT,ix,dx,dt,A0,beta);
72         Q1(ix,2)=qQ ;
73         A1(ix,2)=AQ ;
74     endfor
75     % CONDICION DE CONTORNO DE SALIDA
76     % Calculo condición de contorno de salida con Windkessel
77     %
78
79     % [pn] = pfromAr0 (A0,beta,A1(nx,1),xt) ; %pfromAr0 (A0,beta,Ax,xt) %presio
80     qn= Q1(nx,1);
81     % [R1,R2,C]=getWindk(nwk);
82     qA=Q1(nx-1,1);
83     AA=A1(nx-1,1);
84     qT=Q1(nx,1);
85     AT=A1(nx,1);
86     qQ=qnm1;
87     nq=nx;
88     Q1(:,1)=Q1(:,2);
89     A1(:,1)=A1(:,2);
90     AD = gammapr0(qA,AA,qT,AT,qQ,A0,beta,nq,dx,dt);
91     A1(nx,2)=AD;
92     pn = pfromAr0 (A0,beta,AD,xt); % [p] = pfromAr0 (A0,beta,Ax,xt)
93     [qnm1,Vst]=Windk3(pn,qn,Vst,R1,R2,C,dt)
94     Q1(nx,2)=qnm1; % el flujo se calcula por el Windkessel
95     Q1(nx,1)=qnm1; % la presión (AREA) en la derecha se calcula

```

```

96         % usando la característica positiva
97     % copiar el tiempo n en el tiempo n-1
98     pnn1= pn; %presión actual en x=L
99     if(mod(n,ceil(0.1/dt))==0) % guardar una imagen cad 50 ms s segundos
100         disp("DIBUJANDO CURVA SIGUIENTE")
101         disp(n)
102         if(kk<7)
103             plot(abcisas,Q1(:,1), col(mod(kk,6)+1), 'LineWidth',2)
104         elseif(kk<12)
105             colu=strcat("-", col(mod(kk,6)+1))
106             plot(abcisas,Q1(:,1), colu, 'LineWidth',2)
107         elseif (kk>=12)
108             colu=strcat(".", col(mod(kk,6)+1))
109             plot(abcisas,Q1(:,1), colu, 'LineWidth',2)
110         endif
111         disp(kk)
112         disp(" CURVA DIBUJADA")
113         kk=kk+1
114     endif
115 endfor
116 hold off
117 axis([0,xt,-10,70])
118 title(["Flujos en distintos momentos cada 0.1s;"; "R1=106 , R2=424, C=9.43e-3" ] )
119 xlabel (" x cm")
120 ylabel ("Flujo (cm^3/s)")
121 legend( " 0.1 s", " 0.2 s", " 0.3 s", " 0.4 s", "0.5 s", ...
122 " 0.6 s", " 0.7 s", " 0.8 s", "0.9 s", " 1 s", "1.1 s", "1.2 s", "1.3 s", "1.4 s"...
123 "1.5 s", "1.6 s", "1.7 s", "1.8 s", "1.9 s", "2 s")
124 ax=gca()
125 set ax('fontsize' , 12)
126 grid on
127 hold off
128 figure(30)
129 hold on
130 kk=1
131 for i=1:ns+1
132     if(kk<7)
133         plot((1:itx-1)*nsample*dt*1000, FlujoTX(1:itx-1,i), col(mod(kk,6)+1), 'LineWidth',2)
134     elseif(kk<12)
135         colu=strcat("-", col(mod(kk,6)+1))
136         plot((1:itx-1)*nsample*dt*1000, FlujoTX(1:itx-1,i), colu, 'LineWidth',2)
137     elseif (kk>=12)
138         colu=strcat(".", col(mod(kk,6)+1))
139         plot((1:itx-1)*nsample*dt*1000, FlujoTX(1:itx-1,i), colu, 'LineWidth',2)
140     endif
141     disp(kk)
142     disp(" CURVA DIBUJADA")
143     kk=kk+1
144 endfor

145 axis([0,2000,-10,70 ])
146 title([" Flujo en distintos puntos cada 2cm y muestreados en t cada 10 ms"; "R1=106 ; R2=424; C=9.43e-3" ] )
147 xlabel ("t en ms")
148 ylabel("Flujo (cm^3/s)")
149 legend( "0 cm", "2 cm ", "4 cm ", "6 cm ", "8 cm ", "10 cm ", "12 cm ", "14 cm ", "16 cm ")%
150 ax=gca()
151 set(ax,'fontsize',12)
152 grid on
153 hold off

```

### 12.7.1 Función getmesh (Definición de la malla)

Define la malla correspondiente a un segmento de arteria a partir de la geometría de la arteria, también define el tiempo total a simular y los pasos  $dx$  y  $dt$ , inicializa los flujos y áreas en  $t=0$

```

1 function [xt,tt,dx,dt,T,nx,nt,A0,beta,tau,Qi,Ai,Q0]=getmesh(numesh)
2 %function [xt,tt,dx,dt,T,nx,nt,A0,Qi,Ai,Q0]=getmesh(numesh) ;
3 % inicializa el grid de un segmento de arteria
4 % definiendo dx,dy ( pasos de la red) , el tiempo total de simulación deseado (2s)
5 % Las dimensiones del segmento de arteria ( en este caso 7cm de long
6 % y 1,3 cm de radio
7 % La forma del caudal de entrada Q0 ( si no se trata de una bifurcación ) con la
8 % función getq
9 % Asimismo inicializa las matrices Ai y Qi que en el curso de la simulación
10 % iran conteniendo los valores de Flujo y Area en cada nodo de la
11 if(numesh==1) ;
12     xt=16; % longitud total del segmento en cm
13     r0=1.2; % Radio inicial de la arteria
14     rb=1; % radio final de la arteria
15     A0=pi*r0^2;
16     A0b=pi*rb^2;
17     beta=-log(A0b/A0)/xt ; % A/(x)=A0*exp(-beta*x)
18     tt=2; % 2 segundos
19     dx=0.105; % 1 milimetro
20     dt=0.000105 % 0,11 ms
21     nx=ceil(xt/dx)
22     nt=ceil(tt/dt)
23     nu=0.046;
24     qc=50;
25     Re=qc/(nu*r0)
26     Qi=zeros(nx,2); % para contener valores de n,n-1/2 y n-1
27     Ai=zeros(nx,2);
28     Ai(:,2)=A0fr0(A0,beta,linspace(0,xt,nx));
29     Ai(:,1)=Ai(:,2);
30     Q0=zeros(ceil(1/dt),1);
31     [q0,tau,T] = getq0();
32     t=linspace(0,tt,ceil(tt/dt));
33     figure(1)
34     Q0= getq (t);
35     axis([0,tt,0,max(Q0)])
36     plot(t,Q0,'LineWidth',2)
37     grid on
38     xlabel("t en s" )
39     ylabel(" flujo en cm^3/s ")
40     s1=" Flujo pulsante de entrada ( condicion de contorno de entrada)";
41     s2=" q0=12 cm^3/s , tau=0,12 ";
42     title([s1;s2])
43 endif
44 endfunction

```

### 12.7.2 Función gammam ( Curva característica negativa )

```

1 function [AQ] = gammam(qT,AT,qB,AB,qQ,A0,nq,dx,dt)
2 % Define el area AQ en un nodo (i,j) , a partir del caudal y area
3 % en los puntos T( i,j-1 ) y B( i+1,j-1) , siguiendo la ecuación de la curva
4 % característica que llega a Q desde la derecha
5 if(nq>1)
6     disp("ERROR EN FRONTERA IZDA nq< >1")
7 endif
8 xQ=(nq-1)*dx;
9 xT=xQ;
10 xS=xQ+dx;
11 xB=xS;
12 qS=qB;
13 AS=AB;
14 d1a=0;
15 d1=dx;
16 j=1;
17 while abs(d1a-d1) > 0.0001
18     j=j+1;
19     if(j>20)
20         disp("gammam NO CONVERGE")
21         d1a
22         d1
23         para
24     endif
25     A0;
26     [cS, cp, cm, c1S, c2S, c3S] = C123(A0, xS, qS, AS) ; % [cS, c1S, c2S, c3S] = C123(A0, xS, qS, AS)
27     d1a=d1;
28     d1=(qS/AS - cS)*dt;
29     if(abs(d1)>dx)
30         disp(" NO SE CUMPLE CFL en gammam ")
31         disp(cS)
32         disp(qS)
33         disp(AS)
34         para
35     endif
36     xS=xQ-d1;
37     AS=intplin(xT,AT,xB,AB,xS);
38     qS=intplin(xT,qT,xB,qB,xS);
39     endwhile
40     t=((c1S*AS+c2S*sqrt(AS))/1.060 + c3S/AS);
41     HSm= -(1/(-qS/AS - cS)) *t;
42     f1=1/(-qS/AS-cS);
43     AQ=HSm*dt+AS - (qQ-qS)*f1;
44     %disp(" Fin de gamma")
45     endfunction

```

### 12.7.3 Función getq (Cálculo del flujo de entrada inicial)

```
1 function [q] = getq (q0,tau,T,t)
2 % implementa el caudal de entrada periodico que es la condición de contorno a
3 % la izquierda , el caudal viene definido por los parámetros q0 y tau
4 % y el periodo de la señal es T
5 | t1=q0*(mod(t,T))/tau^2;
6 | q=t1.*(e.^(-(mod(t,T).^2/(2*tau^2))));
7 endfunction
```

### 12.7.4 Función pfromA (Calcula la presión correspondiente a un área A)

```
1 function [p] = pfromAr0 (A0,beta,Ax,x)
2 % Calcula la presión a partir del area en el punto x
3 % A0 = radio inicial de la arteria
4 f=getEh(A0,beta,x)
5 p=f*(1-sqrt(A0*exp(-beta*x)/Ax));
6 endfunction
```

### 12.7.5 Función gammam – (Curva característica negativa)

Esta función calcula la presión de un punto a partir de la curva característica positiva que llega a él desde la derecha.

```

1 function [AQ] = gammamr0(qT,AT,qB,AB,qQ,AO,beta,nq,dx,dt)
2 % Define el area AQ en un nodo (i,j) , a partir del caudal y area
3 % en los puntos T( i,j-1 ) y B( i+1,j-1) , siguiendo la ecuación de la curva
4 % característica que llega a Q desde la derecha
5 if(nq>1)
6     disp("ERROR EN FRONTERA IZDA nq< >1")
7 endif
8 xQ=(nq-1)*dx;
9 xT=xQ;
10 xS=xQ+dx;
11 xB=xS;
12 qS=qB;
13 AS=AB;
14 d1a=0;
15 d1=dx;
16 j=1;
17 while abs(d1a-d1) > 0.0001
18     j=j+1;
19     if(j>20)
20         disp("gammam NO CONVERGE")
21         d1a
22         d1
23         para
24         endif
25         A0;
26     [cS,cp,cm,c1S,c2S,c3S] = C123r0(A0,beta,xS,qS,AS); % [cS,c1S,c2S,c3S] = C123(A0,xS,
27     d1a=d1;
28     d1=(qS/AS - cS)*dt;
29     if(abs(d1)>dx)
30         disp(" NO SE CUMPLE CFL en gammam ")
31         disp(cS)
32         disp(qS)
33         disp(AS)
34         para
35         endif
36         xS=xQ-d1;
37         AS=intplin(xT,AT,xB,AB,xS);
38         qS=intplin(xT,qT,xB,qB,xS);
39     endwhile
40     t=((c1S*AS+c2S*sqrt(AS))/1.060 + c3S/AS);
41     HSm= -(1/(-qS/AS - cS)) *t;
42     f1=1/(-qS/AS-cS);
43     AQ=HSm*dt+AS -(qQ-qS)*f1;
44     %disp(" Fin de gamma")
45 endfunction

```

### 12.7.6 Función gammap – (Curva característica positiva)

Esta función calcula la presión de un punto a partir de la curva característica positiva que llega a él desde la izquierda.

```

1 function [AQ] = gammapr0(qA,AA,qT,AT,qQ,A0,beta,nq,dx,dt)
2 % Esta función define el área en un nodo Q= (i,j) ,
3 % a partir del área y los flujos en el instante anterior en los puntos
4 % T= ( i,j-1 ) y A= ( i-1,j-1) , siguiendo la ecuación de la
5 % curva característica que viaja hacia la derecha
6 % y que llega a Q desde su izquierda
7 xQ=(nq-1)*dx; %xQ= coordenada del punto más a la derecha
8 xA=xQ-dx;
9 xT=xQ;
10 xR=xQ-dx;
11 qR=qA;
12 AR=AA;
13 d1a=0;
14 d1=dx;
15 j=1;
16 %CALCULA el punto R desde el que sale la curva caracteristica que llega a Q
17 while abs(d1a-d1) > 0.0001
18     j=j+1;
19     if(j>20)
20         disp("gammaP NO CONVERGE en GAMMAP")
21         d1a
22         d1
23         nq
24         para
25     endif
26     [cR, cp, cm, c1R, c2R, c3R] = C123r0(A0,beta,xR,qR,AR);
27     d1a=d1;
28     d1=(qR/AR + cR)*dt;
29     if(abs(d1)>dx)
30         disp(" gamma pNO SE CUMPLE CFL en S ")
31         nq
32         para
33     endif
34     xR=xQ-d1;
35     AR=intplin(xA,AA,xT,AT,xR);
36     qR=intplin(xA,qA,xT,qT,xR);
37 endwhile
38 t=((c1R*AR+c2R*sqrt(AR))/1.060 + c3R/AR);
39 HRp= -(1/(-qR/AR + cR)) *t;
40 % Calculo de AQ con la curva caracteristica gamma menos
41 f1=1/(cR-qR/AR);
42 AQ=HRp*dt+ AR -(qQ -qR)*f1;
43 endfunction
44

```

### 12.7.7 Función qQAQ – (Cálculo de flujos y áreas en puntos interiores)

Esta función calcula el flujo ( $qQ$ ) y el área ( $AQ$ ) en el punto interior  $Q$  en el instante  $n$ , usando las curvas características que llegan al punto  $Q$ , desde el instante  $n-1$  y los valores de flujo y área en esos puntos.

```

1 function [qQ,AQ] = qQAQr0(qA,AA,qB,AB,qT,AT,nq,dx,dt,A0,beta)
2 % Calculo de Area y Flujo en un punto interior por intersección de
3 % las curvas características que llegan a el
4 % desde la derecha y desde la izquierda
5 % Calcula qQ y AQ en un punto interior (i,j) de corrdenadas i*dx, j*dt
6 % por el método de las características.
7 % el punto A es (i-1,j-1) , T= (i,j-1) ; y B= (i+1,j-1) x xq=nq*dx
8 xq=(nq-1)*dx; % inicializar valores de x ,A, Q en los puntos A,B,T
9 xT=xq;
10 xA=xq-dx;
11 xB=xq+dx;
12 xR=xA;
13 xS=xB;
14 qR=qA;
15 AR=AA;
16 qS=qB;
17 AS=AB;
18 %
19 dla=0;
20 d1=dx;
21 j=1 ;
22 while abs(dla-d1) > 0.0001 ; % Calculo iterativo de xR
23 j=j+1;
24 if(j>20)
25 disp("qQAQ NO CONVERGE en R")
26 nq
27 stop
28 endif
29 [cR,cp,cm,c1R,c2R,c3R] = C123r0(A0,beta,xR,qR,AR); % [cR,c1R,c2R,c3R] = C123(A0,xR,qR,AR)
30 dla=d1;
31 d1=(qR/AR+cR)*dt;
32 if(abs(d1)>dx)
33 disp(" NO SE CUMPLE CFL en R ") % verificación del cumplimiento de CFL
34 nq

```

```

35     para
36     endif
37     xR=xq-d1;
38     AR=intplin(xA,AA,xT,AT,xR);
39     qR=intplin(xA,qA,xT,qT,xR);
40     endwhile
41     dla=0;
42     d1=dx;
43     j=1;
44     while abs(dla-d1) > 0.0001 ; % Calculo iterativo de xS
45     j=j+1;
46     if(j>20)
47         disp("qQAQ NO CONVERGE en S")
48         stop
49     endif
50     [cS, cp, cm, c1S, c2S, c3S] = C123r0(A0,beta,xS,qS,AS); % [cS, c1S, c2S, c3S] = C123(A0,xS,qS,AS)
51     dla=d1;
52     d1=(qS/AS - cS)*dt;
53     if(abs(d1)>dx)
54         disp(" NO SE CUMPLE CFL en S ")
55         stop
56     endif
57     xS=xq-d1;
58     AS=intplin(xT,AT,xB,AB,xS);
59     qS=intplin(xT,qT,xB,qB,xS);
60     endwhile
61     t=(c1R*AR+c2R*sqrt(AR))/1.060 + c3R/AR; % Cada curva caracteristica
62     % la que pasa por R y la que pasa por S y llegan a Q
63     % proporciona un sistema con dos incognitas
64     % para calcular Aq, qQ
65     HRp= -(1/(-qR/AR + cR )) *t;
66     t=((c1S*AS+c2S*sqrt(AS))/1.060 + c3S/AS);
67     HSm= -(1/(-qS/AS - cS )) *t;
68     f1=(cR-qR/AR);
69     f2=- (cS+qS/AS);
70     h1=qR+f1*(AR+HRp*dt);
71     h2=qS+f2*(AS+HSm*dt);
72     det=f1-f2;
73     AQ=(h1-h2)/det;
74     qQ=(f1*h2-f2*h1)/det;
75     endfunction

```

### 12.7.8 Función C123 (Ecuación de estado de la pared arterial)

Esta función implementa el modelo elástico de la pared arterial, calculando las constantes C1, C2 y C3, el módulo de Young en el punto x, así como la velocidad de propagación de las ondas en ese punto.

```

1 function [c0,cp,cm,C1,C2,C3] = C123r0(A0,beta,x,q,A) ;
2 % Modelo elástico de la pared arterial
3 % dado A0 ( area de lasección) inicial , un punto x ,
4 % el flujo q y la area A en ese punto
5 % Devuelve c0 c+ c- C1,C2 C3 ; siendo C1, C2 y C3 las constantes
6 % de la ecuación de estado que son función de x
7 [k1,k2,k3]=getk();
8 A0x=A0*exp(-beta*x);
9 r0x=sqrt(A0x/pi);
10 f=4/3*(k1*exp(k2*r0x)+k3); % C1=df/dr0*dr0/dxf ; f = 4Eh/3r0
11 dfdr0=4/3*(k1*k2*exp(k2*r0x));
12 dr0dx=sqrt(A0/pi)*(-beta/2)*exp(-beta*x/2);
13 %dr0dx=(-beta*r0x*exp(-beta*x/r0x)/(2*sqrt(r0x*exp(-beta*x/r0x)))));
14 C1=dfdr0*dr0dx; % C1,C2,C3 = constantes
15 C2=- ( dfdr0*sqrt(A0x)+ f*sqrt(pi))*dr0dx;
16 nu=getnu();
17 delta=getdelta(); % tamaño de la capa límite
18 C3=2*pi*nu*q*r0x/delta;% c0=sqrt(A/ro*f/2*sqrt(A0/A^3))
19 % VELOCIDAD de propagación de las ondas
20 % delta es la anchura de la capa límite , en el resto de la sec
21 % se supone U = Cte ( perfil plano de velocidades)
22 c0=sqrt(A/1.060*f/2*sqrt(A0x/A^3));
23 t=q/A;
24 cp=t+c0; % velocidad de propgación positiva
25 cm=t-c0; % velocidad de propagación negativa
26 endfunction

1 function f=getEh(A0,beta,x)
2 % devuelve el término 4Eh/3r0 , correspondiente a la posición x en la arteria
3 % La geometria inicial esta definida por el area de la sección inicial
4 % y por el factor beta de modo que A(x)= A(0)*exp(-beta*x), el
5 % modulo de Young ( la rigidez de la pared ) , crece cal disminuir el radio
6 %

```

### 12.7.9 Función Windk3 ( Windkessel 3 como condición del flujo de salida

Esta función calcula el flujo de salida en el punto final de la arteria usando el modelo WK3 de tres elementos definido por los valores R1, R2, y C. El cálculo se hace resolviendo el circuito eléctrico análogo por las leyes de kirchoff.

```

1 function f=getEh(A0,beta,x)
2 % devuelve el término 4Eh/3r0 , correspondiente a la posición x en la arteria
3 % La geometria inicial esta definida por el area de la sección inicial
4 % y por el factor beta de modo que A(x)= A(0)*exp(-beta*x), el
5 % modulo de Young ( la rigidez de la pared ) , crece cal disminuir el radio
6 %

```

## 12.8 Código Matlab del algoritmo de Lax-Wendroff del modelo 1D

Se incluyen aquí el módulo principal y las funciones que no son comunes con el algoritmo de las curvas características, p. ej. no se incluye el algoritmo de WK3 por ser común a los dos métodos.

### 12.8.1 Programa principal del método de Lax-Wendroff

```

1  % MAIN del simulador Lax-Wendroff
2  numesh=1 ; %arteri #1 , % Cada arteria tiene una malla asociada
3  % en la implementación actual sólo hay una arteria
4  nwk=1; %windkessel #1 ; Cada arteria acaba en un Wk distinto, en la
5  % implementación actual sólo hay un Wk
6  %inicializar malla
7  % SIMULA UN TROZO DE ARTERIA ACABADO EN UN WINDKESSEL
8  % UTILIZA EL METODO DE LAX- WENDROFF Explicito según [35]
9  % CONVERGENCIA DE PRIMER ORDEN CUMPLIENDO CFL
10 % unidades en sistema CGS
11 %
12 % Inicialización de la geometría de la malla y del flujo de entrada
13 [xt,tt,dx,dt,T,nx,nt,A0,beta,Qm,Am,R2,S2,Re,delta,r0,rb]=getmeshLax(numesh);
14 figure(20), % Figura para recoger el flujo en distintos instantes
15 hold on
16 figure(21)
17 hold on
18 %
19 nsel=mod((0:nx),round(2/dx))==0 ;%puntos en los que se mide el flujo (uno cada 2
20 nsel(nx)=1;nsel(2)=1;nsel(1)=0;
21 ns=sum(nsel);
22 nsample=round(0.01/dt); % cada 10 ms se toma una muestra en distintos puntos
23 itx=1;
24 Nper=1 ; %numero de periodos de simulación
25 lnn=ceil(Nper*T/dt); % simular 3 periodos
26 FlujoTX=zeros(ceil(lnn/nsample)+2,ns+1); % inicialización de flujos a medir
27 AreaTX=FlujoTX;
28 %Parametros del Windkessel3
29 R1w=200;R2w=500 ;Cw= 9e-3;
30 Vst=0;Vstn=0;
31 qc=50; % factor de normalización del flujo para adimensionalizar
32 % COMIENZO DE ITERACION PRINCIPAL
33 kk=1;
34 disp("tiempo de comienzo")
35 clock
36 for n=1:2:lnn %nt ; % numero de pasos de dt simulados FOR FOR FOR
37 if(mod(n-1,500)==0) disp(n) endif
38 if (mod(n,nsample)==0 || mod(n+1,nsample)==0)
39     FlujoTX(itx,1:ns)=Qm(nsel,1); % cada 5 ms se mide el flujo
40     AreaTX(itx,1:ns)=Am(nsel,1);
41     itx=itx+1;
42 endif
43 % FASE 1 de LAX-Wendroff (solo de 3 a nx-1 )
44 for j=3:nx-1
45     [a,q,r,s]=eleva(Am,Qm,R2,S2,j,2,A0,beta,delta,Re,dx,dt);
46     Am(j,2)=a; Qm(j,2)=q;
47     R2(j,2)=r; S2(j,2)=s;
48 endfor
49 %CONDICIONES DE CONTORNO
50 % Cálculo de condición de contorno de entrada (INFLOW) y punto simetrico

```

```

51     [qQ,AQ]=lBCLax(n,dx,dt,Qm,Am,A0,beta,qc);
52     Am(2,2)=AQ;
53     Qm(2,2)=qQ;
54     Am(1,2)=Am(2,2)*2-Am(3,2); % punto simétrico
55     Qm(1,2)=Qm(2,2)*2-Qm(3,2);
56     R2(1,2)=fR2(Qm(1,2),Am(1,2),1,dx,A0,beta);
57     S2(1,2)=fS2(Qm(1,2),Am(1,2),1,dx,A0,beta,delta,Re);
58     R2(2,2)=fR2(Qm(2,2),Am(2,2),1,dx,A0,beta);
59     S2(2,2)=fS2(Qm(2,2),Am(2,2),1,dx,A0,beta,delta,Re);
60 % Cálculo de condición de contorno a la salida (OUTFLOW) y punto simétrico
61     [qQ,AQ,Vstn]=rBCLax(nx,xt,dx,dt,Qm,Am,A0,beta,Vst,R1w,R2w,Cw,qc);
62     Vst=Vstn;
63     Am(nx,2)=AQ;
64     Qm(nx,2)=qQ;
65     Am(nx+1,2)=Am(nx,2)*2-Am(nx-1,2); % punto simétrico
66     Qm(nx+1,2)=Qm(nx,2)*2-Qm(nx-1,2);
67     R2(nx+1,2)=fR2(Qm(nx+1,2),Am(nx+1,2),nx+1,dx,A0,beta);
68     S2(nx+1,2)=fS2(Qm(nx+1,2),Am(nx+1,2),nx+1,dx,A0,beta,delta,Re);
69     R2(nx,2)=fR2(Qm(nx,2),Am(nx,2),nx,dx,A0,beta);
70     S2(nx,2)=fS2(Qm(nx,2),Am(nx,2),nx,dx,A0,beta,delta,Re);
71 % FASE SEGUNDA del algoritmo de Lax-Wendroff
72 % Cálculo de valores q y A para el nivel
73 for j=2:nx % % calculo de nivel dt
74 % [a,q,r,s]=eleva(Am,Qm,R2,S2,j,m,A0,beta,delta,Re,dx,dt)
75 [a,q,r,s]=eleva(Am,Qm,R2,S2,j,3,A0,beta,delta,Re,dx,dt);
76 Am(j,3)=a; Qm(j,3)=q;
77 R2(j,3)=r; S2(j,3)=s;
78 endfor
79 % iniciación de valores pa el siguiente intervalo de tiempo
80 R2(:,1)=R2(:,3);
81 S2(:,1)=S2(:,3);
82 Qm(:,1)=Qm(:,3);
83 Am(:,1)=Am(:,3);
84 % Dibujar de flujo cada 0,1 s a lo largo de toda la arteria
85 if(mod(n,ceil(0.1/dt))==0 ||mod(n+1,ceil(0.1/dt))==0)
86     kk=dibufluj(Qm,Am,nx,dt,xt,cc,qc);
87     endif
88 endfor
89 figure(20)
90 grid on
91 title([" Lax-Wendroff;Flujos en distintos momentos cada 0.1s;"];...
92 strcat("R1=",num2str(R1w) , "; R2=", num2str(R2w), "; C= ", num2str(Cw)))
93 xlabel(" x cm")
94 ylabel("Flujo adimensional con qc=50 cm^3/s")
95 legend(" 0.1 s"," 0.2 s"," 0.3 s"," 0.4 s","0.5 s",...
96 " 0.6 s"," 0.7 s"," 0.8 s","0.9 s"," 1 s","1.1 s","1.2 s","1.3 s","1.4 s"...
97 ,"1.5 s","1.6 s","1.7 s","1.8 s","1.9 s","2 s")

98
99 figure(21)
100 grid on
101 title([" Lax-Wendroff; Radio (forma) en distintos momentos cada 0.1s;"];...
102 strcat("R1=",num2str(R1w) , "; R2=", num2str(R2w), "; C= ", num2str(Cw)))
103 xlabel(" x cm")
104 ylabel("Radio ")
105 legend(" 0.1 s"," 0.2 s"," 0.3 s"," 0.4 s","0.5 s",...
106 " 0.6 s"," 0.7 s"," 0.8 s","0.9 s"," 1 s","1.1 s","1.2 s","1.3 s","1.4 s"...
107 ,"1.5 s","1.6 s","1.7 s","1.8 s","1.9 s","2 s")
108
109 % dibujo de formas de onda de flujo en distintos puntos
110 dibuwav(dt,FlujoTX,AreaTX,nsample,ns,itx,qc,R1w,R2w,Cw)
111 disp("tiempo finalizacion")
112 clock
113

```

### 12.8.2 Función eleva ( Aplica las ecuaciones (6. 2-1) y (6. 3-1) )

```

1 function [a,q,r,s]=eleva(Am,Qm,R2,S2,j,m,A0,beta,delta,Re,dx,dt) % 18.1 y 18.2 de [35]
2 % Iteraciones Lax Wendroff en el punto j,m
3     if(m==2)
4         a =(Am(j+1,m-1)+Am(j-1,m-1))/2 +dt/2*(-(Qm(j+1,m-1)-Qm(j-1,m-1))/(2*dx));
5         q =(Qm(j+1,m-1)+Qm(j-1,m-1))/2 +dt/2*( -(R2(j+1,m-1)-R2(j-1,m-1))/(2*dx) + ...
6             (S2(j+1,m-1)+S2(j-1,m-1))/2);
7     else
8         a =Am(j,m-2) +dt*(-(Qm(j+1,m-1)-Qm(j-1,m-1))/(2*dx));
9         q =Qm(j,m-2) +dt*( -(R2(j+1,m-1)-R2(j-1,m-1))/(2*dx) ) + ...
10            dt*(S2(j+1,m-1)+S2(j-1,m-1))/2;
11     endif
12     r =fR2(q,a,j,dx/2,A0,beta);
13     s =fS2(q,a,j,dx/2,A0,beta,delta,Re);
14 endfunction
15

```

### 12.8.3 Función FR2 (Calcula el término flujo de la EDP para la variable q)

```

1 function R2=fR2(q,A,jt,dx,A0,beta)
2 % Cálculo del término flujo para la ecuación de q
3 [k1,k2,k3]=getk();
4 x=(jt-1)*dx;
5 A0x=A0*exp(-beta*x);
6 r0x=sqrt(A0x/pi);
7 f=4/3*(k1*exp(k2*r0x)+k3) ;
8 R2=q^2/A+ f*sqrt(A*A0x);
9 endfunction

```

### 12.8.4 Función FS2 (Calcula el término fuente de la EDP para la variable q)

```

1 function R2=fR2(q,A,jt,dx,A0,beta)
2 % Cálculo del término flujo para la ecuación de q
3 [k1,k2,k3]=getk();
4 x=(jt-1)*dx;
5 A0x=A0*exp(-beta*x);
6 r0x=sqrt(A0x/pi);
7 f=4/3*(k1*exp(k2*r0x)+k3) ;
8 R2=q^2/A+ f*sqrt(A*A0x);
9 endfunction

```

### 12.8.5 función getmeshLax (especifica malla inicial y el flujo de entrada en forma dimensional)

```

1 function [xt,tt,dx,dt,T,nx,nt,A0,beta,Qi,Ai,R2,S2,Re,delta,r0,rb]=getmeshLax(numesh)
2 % inicializa el grid de un segmento de arteria
3 % definiendo dx,dy ( pasos de la red) , el tiempo total de simulación deseado (2s)
4 % Las dimensiones del segmento de arteria ( en este caso 16 cm de long
5 % y 1 cm de radio
6 % La forma del caudal de entrada Q0 ( si no se trata de una bifurcación ) con la
7 % función getq
8 % Asimismo inicializa las matrices Qi y Ai que en el curso de la simulación
9 % iran conteniendo los valores de Flujo y Area respectivamente
10 % en cada nodo de la
11 % el espaciado en x es dx/2
12 % el espaciado en t es dt/2
13 % Qi(:,1)= flujos en t ; Qi(:,2)= flujos en t+ dt/2; Q(:,3) = flujos en t+dt
14 if(numesh==1) ;
15     xt=16; % longitud total del segmento en cm
16     r0=1; % Radio inicial de la arteria
17     rb=1; % radio final de la arteria
18     A0=pi*r0^2;
19     A0b=pi*rb^2;
20     beta=-log(A0b/A0)/xt ; % A/(x)=A0*exp(-beta*x)
21     tt=2; % 2 segundos
22     dx=0.1/2; % 1 milimetro, dividido por 2 para aplicar Lax Wendroff
23     dt=0.00009/2 % 0,1 ms
24     nx=ceil(xt/dx)+2; nt=ceil(tt/dt);
25     nu=0.046; qc=50;
26     delta=sqrt(nu/(2*pi))
27     %delta=getdelta()
28     Re=qc/(nu*r0); Qi=zeros(nx+2,3); R2=zeros(nx+2,3);S2=zeros(nx+2,3);Ai=Qi;
29     Ai(:,1)=A0*exp(-beta*linspace(-dx/2,xt+dx/2,nx+2));
30     Ai(:,2)=Ai(:,1);
31     for j=1:nx+2
32         R2(j,1)=fR2(0,Ai(j,1),j,dx,A0,beta);
33         %S2(j,1)=fS2(0,0,jt,dx,A0,beta,delta,Re)
34     endfor
35     Q0=zeros(ceil(1/dt)+2,1);
36     [q0,tau,T] = getq0();
37     t=linspace(0,tt,ceil(tt/dt)+2);
38     figure(1)
39     Q0= getq (t);
40     axis([0,tt,0,max(Q0)])
41     plot(t,Q0,'LineWidth',2)
42     grid on
43     xlabel("t en s" )
44     ylabel(" flujo en cm^3/s ")
45     s1=" Flujo pulsante de entrada ( condicion de contorno de entrada)";
46     s2=strcat(" q0= ", num2str(q0), " cm^3/s" , "; tau= " , num2str(tau), " s");
47     title([s1;s2])
48 endif
49 endfunction

```

### 12.8.6 Función dibufluj ( Dibujo de flujos en distintos instantes en toda la arteria)

```

1 function kk=dibufluj(Qm,Am,nx,dt,xt,kk,qc)
2     abcisas=linspace(0,xt,nx-1);
3     % guardar una imagen cada 100 ms
4     col=["b", "k", "c", "g", "m", "r", "y"]
5     if(kk<8)
6         figure(20)
7         plot(abcisas,Qm(2:nx,1)/qc,col(kk),"linewidth",2)
8         figure(21)
9         plot(abcisas,sqrt(Am(2:nx,1)/pi),col(kk),"linewidth",2)
10        %plot(abcisas,-sqrt(Am(2:nx,1)/pi),col(mod(kk,8)+1),"linewidth",2)
11    elseif(kk<13)
12        figure(20)
13        colu=strcat("-",col(mod(kk,7)+1));
14        plot(abcisas,Qm(2:nx,1)/qc,colu,"linewidth",2)
15        figure(21)
16        plot(abcisas,sqrt(Am(2:nx,1)/pi),colu,"linewidth",2)
17        %plot(abcisas,-sqrt(Am(2:nx,1)/pi),col(mod(kk,8)+1),"linewidth",2)
18    elseif(kk>=13)
19        figure(20)
20        colu=strcat(".",col(mod(kk,7)+1));
21        plot(abcisas,Qm(2:nx,1)/qc,colu,"linewidth",2)
22        figure(21)
23        plot(abcisas,sqrt(Am(2:nx,1)/pi),colu,"linewidth",2)
24        %plot(abcisas,-sqrt(Am(2:nx,1)/pi),colu,"linewidth",2)
25    endif
26    kk=kk+1;
27 endfunction

```

### 12.8.7 Función dibujwav ( Dibujo de flujos en distintos puntos a lo largo del tiempo)

```

1 function dibujwav(dt,FlujoTX,AreaTX,nsample,ns,itx,qc,R1w,R2w,Cw )
2 col=["b", "k", "c", "g", "m", "r", "y"]
3 figure(30)
4 hold on
5 figure(31)
6 hold on
7 kk=1;
8 for i=1:ns
9     if(kk<8)
10        figure(30)
11        plot((1:itx-1)*nsample*dt*1000, FlujoTX(1:itx-1,i)/qc, ...
12        col(kk),"linewidth",2)
13        figure(31)
14        plot((1:itx-1)*nsample*dt*1000, sqrt(AreaTX(1:itx-1,i)/pi), ...
15        col(mod(kk,9)),"linewidth",2)
16        elseif(kk<13)
17            figure(30)
18            colu=strcat("-.", col(mod(kk,7)+1));
19            plot((1:itx-1)*nsample*dt*1000, FlujoTX(1:itx-1,i)/qc,colu,"linewidth",2)
20            figure(31)
21            plot((1:itx-1)*nsample*dt*1000, sqrt(AreaTX(1:itx-1,i)/pi), ...
22            colu,"linewidth",2)
23            elseif (kk>=13)
24                figure(30)
25                colu=strcat(".", col(mod(kk,8)+1));
26                plot((1:itx-1)*nsample*dt*1000, FlujoTX(1:itx-1,i)/qc,colu,"linewidth",2)
27                figure(31)
28                plot((1:itx-1)*nsample*dt*1000, sqrt(AreaTX(1:itx-1,i)/pi), ...
29                colu,"linewidth",2)
30            endif
31            kk=kk+1
32        endfor
33        figure(30)
34        title(["Lax-Wendroff; Flujo en puntos cada 2 cm muestreados en t cada 5 ms";...
35        strcat("R1=",num2str(R1w) , "; R2=", num2str(R2w), "; C= ", num2str(Cw))] )
36        xlabel ("t en ms")
37        ylabel("Flujo adimensional ")
38        legend( "0 cm", "2 cm", "4 cm ", "6 cm ", "8 cm ", "10 cm ", "12 cm ", "14 cm ", "16 cm ")
39        grid on
40        figure(31)
41        title(["Lax-Wendroff; Radios puntos cada 2 cm muestreados en t cada 10 ms";...
42        strcat("R1=",num2str(R1w) , "; R2=", num2str(R2w), "; C= ", num2str(Cw))] )
43        xlabel ("t en ms")
44        ylabel("Radio ")
45        legend( "0 cm", "2 cm", "4 cm ", "6 cm ", "8 cm ", "10 cm ", "12 cm ", "14 cm ", "16 cm ")
46        grid on
47    endfunction

```