

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

FACULTAD DE CIENCIAS



TRABAJO FIN DE MÁSTER

**INESTABILIDAD EN LA  
CAPA LÍMITE DE EKMAN**

**Octubre 2015**

**Autor:**

José Amer Llobera

**Tutores:**

Dr. Emilia Crespo del Arco

Dr. José J. Sánchez Álvarez



# Índice de Contenidos

Lista de símbolos.....	iii
Capítulo 1:INTRODUCCIÓN.....	1
1.1.Introducción.....	1
Capítulo 2:PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES.....	5
2.1.Formulación fluido-dinámica.....	5
2.1.1.Conservación de la masa.....	5
2.1.2.Ecuación del calor.....	5
2.1.3.Ecuación de estado.....	7
2.1.4.Ecuación de momento.....	8
2.1.5.Condiciones de contorno.....	10
2.2.Estado básico estacionario.....	11
2.3.Estabilidad.....	13
2.4.Análisis de estabilidad.....	19
Capítulo 3:RESOLUCIÓN NUMÉRICA.....	25
3.1.Análisis del sistema en estudio.....	25
3.2.Desarrollo del método numérico.....	26
3.2.1.Cálculo del número de Rayleigh crítico.....	30
3.2.2.Cálculo del número de onda crítico.....	31
3.2.3.Resumen del método numérico.....	31
Capítulo 4:RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	33
4.1.Validación del método de resolución.....	33
4.2.Análisis de los números de onda críticos.....	35
4.3.Análisis de la malla del dominio z.....	39
4.4.Variación de los resultados con el número de Prandtl.....	40
4.5.Variación de los resultados con el número de Froude.....	41
4.6.Conclusiones.....	42
Apéndice I: Solución analítica del estado base.....	43
Bibliografía.....	47



## Lista de símbolos

$b$	Número de Froude	$\alpha$	Coefficiente de expansión térmica
$d$	Distancia entre las paredes	$\beta$	Gradiente lineal de temperatura entre las paredes
$g$	Constante gravitatoria	$\theta$	Temperatura no estática
$p$	Presión	$\kappa$	Difusividad térmica
$P$	Número de Prandtl	$\mu$	Viscosidad dinámica
$R$	Número de Rayleigh	$\nu$	Viscosidad cinemática
$Re$	Número de Reynolds	$\rho$	Densidad
$s$	Parte real del autovalor	$\sigma$	Autovalor
$T$	Temperatura	$\omega$	Parte imaginaria del autovalor
$T_s$	Temperatura estática	$\Pi$	Presión no estática
$T_0$	Temperatura media	$\Omega_D$	Velocidad de rotación del sistema sobre el eje vertical
$Ta$	Número de Taylor	$\Omega$	Velocidad de rotación adimensional
$u$	Distribución de velocidad		
$v$	Perturbación de la velocidad		



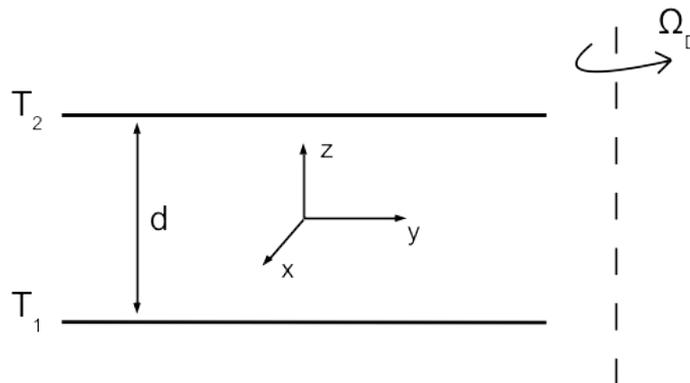
# Capítulo 1: INTRODUCCIÓN

## 1.1. Introducción

El objetivo principal de este trabajo es realizar un análisis de estabilidad lineal en una capa de fluido en presencia de paredes horizontales, entre las que se impone cierto gradiente de temperatura, y con rotación sobre un eje vertical.

En la *Figura 1.1* se esquematiza el modelo en estudio, donde:

- $d$ , es la distancia entre las paredes.
- $T_1$  y  $T_2$ , son la temperatura impuesta en la pared inferior y superior, respectivamente.
- $\Omega_D$ , es la velocidad de rotación del sistema sobre el eje vertical. Será uno de los parámetros de control del estudio.
- $(x, y, z)$ , sistema de coordenadas no inercial, fijo en el plano equidistante entre ambas paredes.



*Figura 1.1. Configuración del sistema en estudio.*

Se define el parámetro,

$$\beta \equiv \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{d} \quad (1.1)$$

que representa el gradiente lineal de temperatura impuesto en la capa de fluido. La tilde situada

## INTRODUCCIÓN

sobre las variables indica que son variables dimensionales.

Se prevé que la inestabilidad del flujo en rotación aparezca en primer lugar para valores negativos de  $\beta$ . Esto es, cuando el flujo estratificado tiene mayor temperatura en la parte inferior que la superior ( $T_1 > T_2$ ). Con este gradiente adverso surgen fuerzas de flotación que desestabilizan el flujo.

El interés en este tipo de sistemas físicos se debe a que puede modelar sistemas reales como, la capa límite planetaria en un contexto geofísico, o las cavidades de refrigeración/lubricación de las turbinas en un contexto técnico; donde hay una influencia a los gradientes de temperatura.

El análisis de estabilidad lineal del sistema tiene como objetivo obtener la línea de estabilidad neutral. Esto es, determinar la línea que divide las zonas estables e inestables, en función de los siguientes parámetros adimensionales:

- Número de Prandtl:  $P = \nu / \kappa$ , definido como el cociente entre la difusividad de momento  $\nu$  (viscosidad) y la difusividad térmica  $\kappa$ . Existen algunos resultados de la literatura [4] que usan este mismo valor, lo que nos permite hacer comparaciones más apropiadas.
- Número de Froude:  $b = \frac{\Omega_D^2 \tilde{r}_0}{g}$ , relaciona el efecto de las fuerzas de inercia y las fuerzas de gravedad que actúan sobre el fluido.
- Número de Rayleigh:  $R = \frac{\alpha \beta g d^4}{\kappa \nu}$ , está asociado a la transferencia de calor en el interior del fluido. Cuando el número de Rayleigh está por debajo de un cierto valor crítico, la transferencia se produce principalmente por conducción; cuando está por encima del valor crítico, la transferencia se produce principalmente por convección.  
Como se ha mencionado anteriormente, el flujo será inestable a partir de cierto valor negativo de  $\beta$ , que se corresponde con el número de Rayleigh crítico.
- Velocidad de rotación adimensional:  $\Omega = \frac{\Omega_D d^2}{\nu}$ , se obtiene al adimensionalizar la velocidad angular con las dimensiones del tiempo característico del problema.

El objetivo principal consiste en, dado un sistema definido por los parámetros ( $P$ ,  $b$ ), encontrar en función de  $\Omega$  el valor del número de Rayleigh crítico.

El primer paso es plantear las ecuaciones que describen el flujo, y obtener la solución del estado básico estacionario. Seguido, sobre la solución básica se añaden pequeñas perturbaciones de

## 1.1.Introducción

velocidad y temperatura, resultando el sistema de ecuaciones sobre el que se realiza el análisis de inestabilidad.

La bibliografía básica para el análisis del modelo son Crespo [1], Chandrasekhar [2] y Tritton [3]; donde se desarrolla con detalle la base fluido-dinámica, y el análisis de inestabilidades en fluidos. Y con especial interés, se analiza el artículo *Influence of Thermal Stratification on the Stability of Ekman-Couette-Flow* de Withalm y Hoffmann [4], particularizado para el caso de cero deslizamiento entre las paredes. La validación de los resultados obtenidos se basa en los datos de dicho estudio.



## Capítulo 2: PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES

### 2.1. Formulación fluido-dinámica

El sistema planteado en el capítulo anterior se modela en base a las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos: continuidad, cantidad de movimiento y energía.

En particular, el modelo considera el movimiento de un fluido incompresible, viscoso y conductor del calor, observado en un sistema de referencia no inercial (en rotación).

#### 2.1.1. Conservación de la masa

En base a una derivación Euleriana, la ecuación de continuidad se obtiene al considerar un elemento fijo de volumen en el espacio, en el cual el ratio neto de entrada de fluido por su superficie debe ser equivalente al ratio de acumulación de masa dentro del volumen. Esto es,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{t}} + \nabla \cdot (\rho \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (2.1)$$

Con ello, para el caso en estudio, donde se trabaja con fluidos incompresibles ( $\rho$  constante), se obtiene,

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.2)$$

#### 2.1.2. Ecuación del calor

La ecuación del calor se obtiene en base a la ley de conservación de la energía. Y para el caso en estudio, se considera que la transferencia de calor viene caracterizada por la ley de Fourier. En este caso, la ecuación del calor se escribe como,

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} = \kappa \nabla^2 \tilde{T} \quad (2.3)$$

donde  $\kappa$  es la difusividad térmica.

La distribución estática de la temperatura se obtiene al anular la derivada temporal de la temperatura,  $\partial \tilde{T} / \partial \tilde{t} = 0$ , y la distribución de velocidad,  $\tilde{u} = 0$ . De este modo, la distribución estática resultante es,

$$\nabla^2 \tilde{T}_s = 0 \quad (2.4)$$

Para obtener  $\tilde{T}_s$ , se observa que en base a las condiciones de contorno, sólo existe diferencia de temperatura en el eje vertical, y de valor  $\beta$ . Con ello, la ecuación anterior resulta,

$$\nabla^2 \tilde{T}_s = \frac{\partial^2 \tilde{T}_s}{\partial \tilde{z}^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial \tilde{T}_s}{\partial \tilde{z}} = \beta \equiv \frac{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}{d} \quad (2.5)$$

Y al integrar de nuevo, se obtiene finalmente la distribución de temperatura estática,

$$\tilde{T}_s = \beta \tilde{z} + A \quad (2.6)$$

Donde  $A$  es una constante que se determina con la siguiente condición de contorno,

$$\text{En } z=0, \quad \tilde{T}_s(\tilde{z}=0) = \tilde{T}_0 = (\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2) / 2 \quad (2.7)$$

e introduciéndola en la distribución de temperatura estática, se obtiene,

$$\tilde{T}_0 = A \quad (2.8)$$

El valor  $A$  se sustituye en la ecuación (2.6), resultando,

$$\tilde{T}_s = \tilde{T}_0 + \beta \tilde{z} \quad (2.9)$$

Esta distribución de temperatura describe el estado de equilibrio conductivo. De este modo, se puede descomponer la temperatura en un punto como la suma de la temperatura de equilibrio conductivo  $\tilde{T}_s$ , más un término complementario  $\tilde{\theta}$ ,

$$\tilde{T} = \tilde{T}_s + \tilde{\theta} = \tilde{T}_0 + \beta \tilde{z} + \tilde{\theta} \quad (2.10)$$

Esta descomposición se introduce en la ecuación del calor (Ec. (2.3)),

$$\frac{\partial(\tilde{T}_s + \tilde{\theta})}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\vec{u}} \cdot \nabla(\tilde{T}_s + \tilde{\theta}) = \kappa \nabla^2(\tilde{T}_s + \tilde{\theta}) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} + \beta \tilde{\vec{u}} \cdot \hat{k} + \tilde{\vec{u}} \cdot \nabla \tilde{\theta} = \kappa \nabla^2 \tilde{\theta} \quad (2.12)$$

Para adimensionalizar las ecuaciones se usan las siguientes escalas,

$$[L] = d, \quad [T] = \beta d, \quad [u] = \nu/d, \quad [t] = d^2/\nu \quad (2.13)$$

Al adimensionalizar la Ec. (2.11), se obtiene,

$$\frac{\partial \theta(\beta d)}{\partial t (d^2/\nu)} + \beta (\nu/d) \vec{u} \cdot \hat{k} + (\nu/d) \vec{u} \cdot \nabla \theta \left( \frac{\beta d}{d} \right) = \kappa \nabla^2 \theta \left( \frac{\beta d}{d^2} \right) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \hat{k} + \vec{u} \cdot \nabla \theta = \frac{\kappa}{\nu} \nabla^2 \theta \quad (2.15)$$

Y haciendo uso de la definición del número de Prandtl, se obtiene la ecuación del calor adimensional para el modelo en estudio,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \theta = -\vec{u} \cdot \hat{k} + P^{-1} \nabla^2 \theta \quad (2.16)$$

### 2.1.3. Ecuación de estado

Con el objetivo de simplificar el modelo físico-matemático del flujo no-isotérmico en estudio, se utiliza la aproximación de Oberbeck-Boussinesq (Oberbeck 1891, Boussinesq 1903). Esta aproximación consiste en despreciar la dependencia con la temperatura de las propiedades del fluido (e.g. viscosidad, difusividad térmica, densidad, capacidades caloríficas). Sólo se tienen en cuenta las diferencias de densidad debidas a cambios de temperatura, cuando éstas originan fuerzas de flotación.

De este modo, resulta la siguiente ecuación de estado (Ref. [1]),

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (\tilde{T} - \tilde{T}_0)] \quad (2.17)$$

donde,

- $\tilde{T}_0$  es la temperatura de referencia. En el problema planteado, es la temperatura media.
- $\rho_0$  es la densidad de referencia del fluido, correspondiente a  $\tilde{T}_0$
- $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica

Esta aproximación es válida para gradientes de temperatura (o densidad) moderados. Para dar un orden de magnitud para el agua, con una temperatura media de 293 K, la aproximación de Boussinesq se puede considerar válida hasta una diferencia de temperatura de 30 K.

#### 2.1.4. Ecuación de momento

Para obtener la ecuación del momento, se parte de la segunda ley de Newton en un sistema inercial,

$$\left( \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\tilde{t}} \right)_I = \sum_i \tilde{\mathbf{f}}_i \quad (2.18)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{u}}$  es la velocidad del flujo en un punto y  $\tilde{\mathbf{f}}_i$  es una fuerza individual por unidad de masa.

En el modelo planteado, se está trabajando en un sistema de coordenadas no inercial, fijado en el sistema giratorio. De este modo, se tienen en cuenta las siguientes fuerzas aparentes:

$$\text{Fuerza de Coriolis: } \tilde{\mathbf{f}}_{\text{coriolis}} = -2\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \tilde{\mathbf{u}} = -\Omega_D \hat{\mathbf{k}} \wedge \tilde{\mathbf{u}} = 2\Omega_D \tilde{\mathbf{u}} \wedge \hat{\mathbf{k}} \quad (2.19)$$

$$\text{Fuerza centrífuga: } \tilde{\mathbf{f}}_{\text{cent}} = -\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \tilde{\mathbf{r}}) = \Omega_D^2 \tilde{\mathbf{r}} \quad (2.20)$$

Resultando,

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\tilde{t}} = \left( \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\tilde{t}} \right)_I + 2\Omega_D \tilde{\mathbf{u}} \wedge \hat{\mathbf{k}} + \Omega_D^2 \tilde{\mathbf{r}} = \sum_i \tilde{\mathbf{f}}_i + 2\Omega_D \tilde{\mathbf{u}} \wedge \hat{\mathbf{k}} + \Omega_D^2 \tilde{\mathbf{r}} \quad (2.21)$$

Por otro lado, se consideran las siguientes fuerzas fundamentales:

$$\text{Gradiente de presión: } \tilde{\mathbf{f}}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.22)$$

$$\text{Fuerza de la gravedad: } \tilde{\mathbf{f}}_g = -\frac{GM}{\tilde{r}^2} \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{g}} = -g \hat{\mathbf{k}} \quad (2.23)$$

$$\text{Fuerza de fricción (fluido viscoso): } \tilde{\mathbf{f}}_r = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.24)$$

Donde  $p$  es la presión en el fluido,  $g$  es la constante gravitatoria,  $\mu$  es la viscosidad dinámica y  $\nu$  la viscosidad cinemática.

Finalmente, se reagrupan los anteriores términos y se obtiene,

$$\rho(\partial_{\tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - \rho g \hat{k} + 2\rho \Omega_D \tilde{\mathbf{u}} \wedge \hat{k} + \rho \Omega_D^2 \tilde{\mathbf{r}} \quad (2.25)$$

Además, como se ha detallado anteriormente, se trabaja bajo la aproximación de Boussinesq. Esto es, sólo se tienen en cuenta las variaciones de  $\rho$  en los términos de gravedad y centrífuga. Con ello, se aplica la aproximación definida en la Ec. (2.17), y se divide por la densidad de referencia  $\rho_0$ ,

$$\begin{aligned} & (\partial_{\tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + 2\Omega_D \hat{k} \wedge \tilde{\mathbf{u}} = \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - (1 - \alpha(\tilde{T} - \tilde{T}_0)) g \hat{k} + (1 - \alpha(\tilde{T} - \tilde{T}_0)) \Omega_D^2 \tilde{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por un lado, se sustituye la temperatura por la descomposición obtenida en la Ec. (2.10),

$$\begin{aligned} & (\partial_{\tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + 2\Omega_D \hat{k} \wedge \tilde{\mathbf{u}} = \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - (1 - \alpha(\beta \tilde{z} + \tilde{\theta})) g \hat{k} + (1 - \alpha(\beta \tilde{z} + \tilde{\theta})) \Omega_D^2 \tilde{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Y por otro lado, se descompone la distribución de la presión en un término estático y su complementario,

$$p = p_s + \tilde{\Pi} = \left( -\rho_0 g \tilde{z} + \rho_0 \Omega_D^2 \frac{\tilde{r}^2}{2} \right) + \tilde{\Pi} \quad (2.28)$$

resultando,

$$\begin{aligned} & (\partial_{\tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + 2\Omega_D \hat{k} \wedge \tilde{\mathbf{u}} = \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{\Pi} + \nabla \left( g \tilde{z} - \Omega_D^2 \frac{\tilde{r}^2}{2} \right) + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} - (1 - \alpha(\beta \tilde{z} + \tilde{\theta})) g \hat{k} + (1 - \alpha(\beta \tilde{z} + \tilde{\theta})) \Omega_D^2 \tilde{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Con ello, se opera el gradiente sobre los términos de la presión estática y se define  $\tilde{\mathbf{r}} = -\tilde{r}_0 \hat{j}$ , donde  $\tilde{r}_0$  es la distancia media entre el eje rotatorio y la zona de estudio. La ecuación de momento resultante es,

$$\begin{aligned} & (\partial_{\tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + 2\Omega_D \hat{k} \wedge \tilde{\mathbf{u}} = \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{\Pi} + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \alpha(\beta \tilde{z} + \tilde{\theta}) g \hat{k} + \alpha(\beta \tilde{z} + \tilde{\theta}) \Omega_D^2 \tilde{r}_0 \hat{j} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
 & (\partial_t + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + 2 \Omega_D \hat{\mathbf{k}} \wedge \tilde{\mathbf{u}} = \\
 & = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{\Pi} + \alpha \beta g \left[ \left( \tilde{z} + \frac{\tilde{\theta}}{\beta} \right) \left( \hat{\mathbf{k}} + \frac{\Omega_D^2 \tilde{r}_0}{g} \hat{\mathbf{j}} \right) \right] + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

El siguiente paso es adimensionalizar la ecuación de momento. Para ello, adicional a las magnitudes de la Ec. (2.11) y el número de Prandtl, se definen,

$$[p] = \rho_0 \nu^2 / d^2$$

$$\text{Número de Froude: } b = \frac{\Omega_D^2 \tilde{r}_0}{g} \tag{2.32}$$

$$\text{Número de Rayleigh: } R = \frac{\alpha \beta g d^4}{\kappa \nu}$$

$$\text{Velocidad de rotación adimensional: } \Omega = \frac{\Omega_D d^2}{\nu}$$

Finalmente, se obtiene la ecuación de momento adimensional que servirá de base para realizar el análisis de estabilidad del problema,

$$\begin{aligned}
 & \left( \partial_t \left( \frac{\mathbf{v}}{d^2} \right) + \left( \frac{1}{d} \frac{\mathbf{v}}{d} \right) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \right) \tilde{\mathbf{u}} \left( \frac{\mathbf{v}}{d} \right) + 2 \Omega_D \left( \frac{\mathbf{v}}{d} \right) \hat{\mathbf{k}} \wedge \tilde{\mathbf{u}} = \\
 & = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \Pi \left( \rho_0 \frac{\mathbf{v}^2}{d^2} \frac{1}{d} \right) + \alpha \beta g \left[ \left( z d + \frac{\theta}{\beta} (\beta d) \right) \left( \hat{\mathbf{k}} + \frac{\Omega_D^2 r_0}{g} (d) \hat{\mathbf{j}} \right) \right] + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} \left( \frac{\mathbf{v}}{d} \frac{1}{d^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$(\partial_t + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + 2 \Omega \hat{\mathbf{k}} \wedge \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \Pi + \frac{R}{P} [(z + \theta)(\hat{\mathbf{k}} + b \hat{\mathbf{j}})] + \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} \tag{2.34}$$

### 2.1.5. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno del sistema planteado en la introducción (ver Figura 1.1) son:

- No deslizamiento en las paredes superior e inferior: Esto es, condición de velocidad nula,  $\bar{\mathbf{u}}=0$ , en los extremos del dominio,  $z = \pm 1/2$ .
- Temperatura en las paredes:  $\tilde{T}_2$  en  $z = +1/2$ ,  $\tilde{T}_1$  en  $z = -1/2$ . Y en base a la Ec. (2.10), esta condición de contorno se puede escribir como:  $\theta=0$  en  $z = \pm 1/2$ .

- Paredes adiabáticas: Esto es, condición de no-transferencia de calor,  $\partial_z \theta = 0$ , en los extremos del dominio,  $z = \pm 1/2$ .

## 2.2. Estado básico estacionario

El primer paso para poder realizar el análisis de estabilidad, es obtener el estado básico estacionario. Y sobre dicha solución se superpondrá una pequeña perturbación, que será el objeto de análisis.

En referencia al estado básico estacionario, se realiza la siguiente observación: en base a las condiciones de contorno y las ecuaciones del movimiento, el flujo se considera uniforme en cada capa horizontal. Esto es, se busca una solución de la forma:

$$\vec{u}_0 = (U_{0x}(z), U_{0y}(z), 0) ; \quad \theta = 0 ; \quad \Pi = \Pi(z) \quad (2.35)$$

Al sustituir dichas soluciones en la ecuación del momento adimensional (Ec. (2.34)), resulta,

$$\vec{u}_0 \cdot \nabla \vec{u}_0 + 2\Omega \hat{k} \wedge \vec{u}_0 = -\nabla \Pi + \frac{R}{P} z (\hat{k} + b\hat{j}) + \nabla^2 \vec{u}_0 \quad (2.36)$$

donde,

$$\begin{aligned} \vec{u}_0 \cdot \nabla \vec{u}_0 &= (U_{0x}, U_{0y}, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial_z U_{0x} & \partial_z U_{0y} & 0 \end{pmatrix} = 0 \\ 2\Omega \hat{k} \wedge \vec{u}_0 &= 2\Omega \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ U_{0x} & U_{0y} & 0 \end{pmatrix} = 2\Omega (-U_{0y}, U_{0x}, 0) \\ \nabla^2 \vec{u}_0 &= (\nabla^2 U_{0x}, \nabla^2 U_{0y}, 0) = (\partial_{zz}^2 U_{0x}, \partial_{zz}^2 U_{0y}, 0) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Reagrupando, se tiene para cada componente vectorial:

$$\begin{aligned} \text{Componente } \hat{i} &\rightarrow -2\Omega U_{0y} = \frac{\partial^2 U_{0x}}{\partial z^2} \\ \text{Componente } \hat{j} &\rightarrow 2\Omega U_{0x} = \frac{\partial^2 U_{0y}}{\partial z^2} + \frac{Rb}{P} z \\ \text{Componente } \hat{k} &\rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{R}{P} z \end{aligned} \quad (2.38)$$

La ecuación en la componente vertical describe el gradiente vertical de la diferencia entre la presión estacionaria y la presión estática,  $\partial_z \Pi = \partial_z (p - p_s)$  .

Por otro lado, las componentes horizontales, junto a las condiciones de contorno adecuadas, describen la solución de la velocidad estacionaria. Esto es,

$$\begin{aligned} \text{Componente } \hat{i} &\rightarrow -2\Omega U_{0y} = \frac{\partial^2 U_{0x}}{\partial z^2} \\ \text{Componente } \hat{j} &\rightarrow 2\Omega U_{0x} = \frac{\partial^2 U_{0y}}{\partial z^2} + \frac{Rb}{P} z \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\text{Condiciones de contorno} \rightarrow U_{0x} = U_{0y} = 0 \quad ; \text{ en } z = \pm 1/2$$

En el Apéndice I: Solución analítica del estado base, se detalla la resolución de este sistema de ecuaciones, cuya solución resulta ser,

$$\begin{aligned} U_{0x} &= \frac{Rbz}{2P\Omega} - A \sin \sqrt{\Omega} z \cosh \sqrt{\Omega} z + B \cos \sqrt{\Omega} z \sinh \sqrt{\Omega} z \\ U_{0y} &= A \cos \sqrt{\Omega} z \sinh \sqrt{\Omega} z + B \sin \sqrt{\Omega} z \cosh \sqrt{\Omega} z \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde, las constantes  $A$  y  $B$ , se determinan con las relaciones de las condiciones de contorno,

$$\begin{aligned} A [\sin \sqrt{\Omega/4} \cosh \sqrt{\Omega/4}]^{-1} &= -B [\cos \sqrt{\Omega/4} \sinh \sqrt{\Omega/4}]^{-1} = \\ &= \frac{Rb}{4\Omega P} [\sin^2 \sqrt{\Omega/4} \cosh^2 \sqrt{\Omega/4} + \cos^2 \sqrt{\Omega/4} \sinh^2 \sqrt{\Omega/4}]^{-1} \end{aligned} \quad (2.41)$$

A modo de comprobación, se verifica que la solución planteada cumple con el sistema de ecuaciones obtenido, sustituyendo las ecuaciones (2.40) en las ecuaciones (2.39). Para la componente  $\hat{i}$  ,

$$\begin{aligned} -2\Omega [A \cos \sqrt{\Omega} z \sinh \sqrt{\Omega} z - B \sin \sqrt{\Omega} z \cosh \sqrt{\Omega} z] &= \\ = [-A \Omega (2 \cos \sqrt{\Omega} z \sinh \sqrt{\Omega} z) - B \Omega (2 \sin \sqrt{\Omega} z \cosh \sqrt{\Omega} z)] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para la componente  $\hat{j}$  ,

$$2\Omega \left[ \frac{Rbz}{2P\Omega} - A \sin \sqrt{\Omega}z \cosh \sqrt{\Omega}z + B \cos \sqrt{\Omega}z \sinh \sqrt{\Omega}z \right] = \quad (2.43)$$

$$= \left[ A\Omega(-2 \sin \sqrt{\Omega}z \cosh \sqrt{\Omega}z) + B\Omega(2 \cos \sqrt{\Omega}z \sinh \sqrt{\Omega}z) \right] + \frac{Rb}{P}z$$

En la Figura 2.1 se representa la solución básica para el sistema definido con:  $b=1$ ,  $P=1$ ,  $\Omega=50$ ,  $R=-50$ . Como se verá en el capítulo de resultados, esta solución es estable, a pesar de tener un número de Rayleigh negativo.

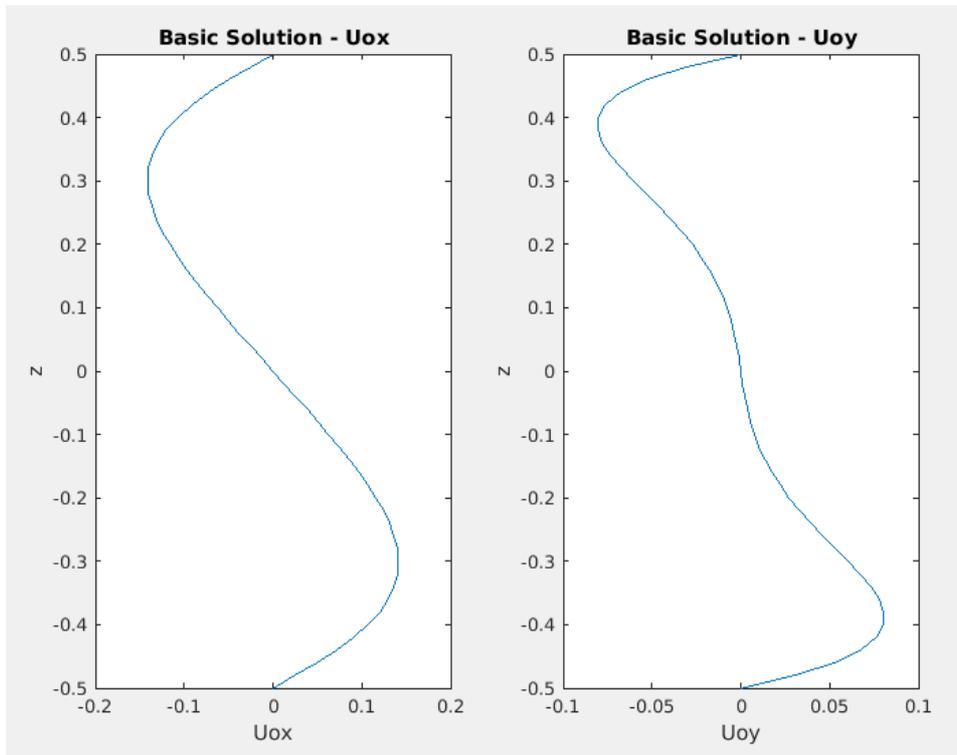


Figura 2.1. Solución básica del sistema con los siguientes parámetros:  $b=1$ ,  $P=1$ ,  $\Omega=50$ ,  $R=-50$ . La gráfica de la izquierda representa la velocidad horizontal en el eje  $\vec{i}$ ,  $U_{0x}$ . Y la gráfica de la derecha representa la velocidad horizontal en el eje  $\vec{j}$ ,  $U_{0y}$ . Las variables representadas son adimensionales de acuerdo con el desarrollo planteado.

### 2.3. Estabilidad

Tal y como se ha presentado en la introducción, para analizar el efecto de una perturbación en la distribución de velocidad de equilibrio, se superpone una perturbación  $\vec{v}$  sobre la velocidad de equilibrio  $\vec{u}_0$ ,

$$\vec{u} \rightarrow \vec{u}_0 + \vec{v} \quad (2.44)$$

Con el objetivo de obtener un sistema de ecuaciones que describa la perturbación, se realiza una descomposición Toroidal-Poloidal de la velocidad (Ref. [3], Apéndice III). Como condición físico-matemática, un campo vectorial admite tal descomposición, si  $\bar{v}$  es un campo tal que  $\nabla \cdot \bar{v} = 0$ .

De este modo, se cambia  $\bar{v}$  (vector de tres componentes) por  $\phi$  y  $\psi$  (dos funciones escalares). Y además, se cumple automáticamente la ecuación de continuidad (Ec. (2.2)) porque está implícitamente incorporada en la descomposición de la velocidad.

Se expresa entonces la perturbación como (ver Ref. [3], Apéndice III),

$$\bar{v} = \nabla \wedge (\nabla \phi \wedge \hat{k}) + \nabla \psi \wedge \hat{k} \quad (2.45)$$

donde,  $\phi$  es la componente poloidal, y  $\psi$  es la componente toroidal.

Desarrollando la Ec. (2.45) se obtienen las componentes de  $\bar{v}$  en términos de  $\phi$  y  $\psi$ ,

$$\nabla \wedge (\nabla \phi \wedge \hat{k}) = \nabla \wedge \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \nabla \wedge \begin{pmatrix} \phi_y \\ -\phi_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \phi_y & -\phi_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{xz} \\ \phi_{yz} \\ -\phi_{xx} - \phi_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\nabla \psi \wedge \hat{k} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

resultando,

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} \partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi \\ \partial_{yz}^2 \phi - \partial_x \psi \\ -\Delta_2 \phi \end{pmatrix}, \text{ donde } \Delta_2 \equiv \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 \quad (2.47)$$

Seguido, se introduce dicha perturbación en la ecuación del momento adimensional (Ec. (2.34)),

$$(\partial_t + \vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + 2\Omega \hat{k} \wedge \vec{u} = -\nabla \Pi + \frac{R}{P} [(\theta + z)(\hat{k} + b \hat{j})] + \nabla^2 \vec{u} \quad (2.48)$$

$$(\partial_t + (\vec{u}_0 + \bar{v}) \cdot \nabla) (\vec{u}_0 + \bar{v}) + 2\Omega \hat{k} \wedge (\vec{u}_0 + \bar{v}) = -\nabla \Pi + \frac{R}{P} [(\theta + z)(\hat{k} + b \hat{j})] + \nabla^2 (\vec{u}_0 + \bar{v}) \quad (2.49)$$

y considerando que,

- $\vec{u}_0$  es solución estacionaria de la ecuación del momento.
- $\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{R}{P} z$ , esto es, la componente vertical no se ve afectada por la perturbación.

resulta,

$$(\partial_t + (\vec{u}_0 + \vec{v}) \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{u}_0 + 2\Omega \hat{k} \wedge \vec{v} = \frac{R}{P} [\theta(\hat{k} + b \hat{j})] + \nabla^2 \vec{v} \quad (2.50)$$

Tal y como se menciona en la introducción, en este estudio se considera el análisis de estabilidad lineal, esto es, sólo se tienen en cuenta los términos de primer orden en la perturbación. En particular, se desprecia el término  $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$  frente a las perturbaciones de primer orden,

$$(\partial_t + \vec{u}_0 \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{u}_0 + 2\Omega \hat{k} \wedge \vec{v} = \frac{R}{P} [\theta(\hat{k} + b \hat{j})] + \nabla^2 \vec{v} \quad (2.51)$$

Se desarrolla término a término la ecuación anterior, incorporando la descripción de la perturbación de la velocidad (Ec. (2.47)). Además, durante el desarrollo se supone una dependencia temporal de las perturbaciones proporcional a  $\exp\{\sigma t\}$ .

- Término  $(\partial_t + \vec{u}_0 \cdot \nabla) \vec{v}$  :

$$(\sigma + \vec{u}_0 \cdot \nabla) \begin{pmatrix} \partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi \\ \partial_{yz}^2 \phi - \partial_x \psi \\ -\Delta_2 \phi \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi \\ \partial_{yz}^2 \phi - \partial_x \psi \\ -\Delta_2 \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{0x} (\partial_{xxz}^3 \phi + \partial_{xy}^2 \psi) + u_{0y} (\partial_{xyz}^3 \phi + \partial_{yy}^2 \psi) \\ u_{0x} (\partial_{xyz}^3 \phi - \partial_{xx}^2 \psi) + u_{0y} (\partial_{yyz}^3 \phi - \partial_{xy}^2 \psi) \\ -u_{0x} \partial_x \Delta_2 \phi - u_{0y} \partial_y \Delta_2 \phi \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

- Término  $\vec{v} \cdot \nabla \vec{u}_0$  :

$$\begin{aligned} & (\partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi, \partial_{yz}^2 \phi - \partial_x \psi, -\Delta_2 \phi) \cdot \nabla \vec{u}_0 = \\ & = (\partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi, \partial_{yz}^2 \phi - \partial_x \psi, -\Delta_2 \phi) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u'_{ox} & u'_{oy} & 0 \end{pmatrix} = -\Delta_2 \phi \begin{pmatrix} u'_{ox} \\ u'_{oy} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.53)$$

- Término  $2\Omega \hat{k} \wedge \vec{v}$  :

$$2\Omega \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = 2\Omega \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \\ 0 \end{pmatrix} = 2\Omega \begin{pmatrix} -\partial_{yz}^2 \phi + \partial_x \psi \\ \partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

- Término  $\frac{R}{P} [\theta(\hat{k} + b \hat{j})]$  :

$$\frac{R}{P} [\theta(\hat{k} + b \hat{j})] = \frac{R}{P} \theta \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

- Término  $\nabla^2 \vec{v}$  :

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 v_x \\ \nabla^2 v_y \\ \nabla^2 v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{xz}^2 \nabla^2 \phi + \partial_y \nabla^2 \psi \\ \partial_{yz}^2 \nabla^2 \phi - \partial_x \nabla^2 \psi \\ -\nabla^2 \Delta_2 \phi \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Se reagrupan los términos en cada dirección del sistema de coordenadas, obteniendo:

$$\text{Componente } (\hat{i}) : \quad \sigma(\partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi) + u_{0x}(\partial_{xxz}^3 \phi + \partial_{xy}^2 \psi) + u_{0y}(\partial_{xyz}^3 \phi + \partial_{yy}^2 \psi) - u'_{0x} \Delta_2 \phi + 2\Omega(-\partial_{yz}^2 \phi + \partial_x \psi) = \partial_{xz}^2 \nabla^2 \phi + \partial_y \nabla^2 \psi \quad (2.57)$$

$$\text{Componente } (\hat{j}) : \quad \sigma(\partial_{yz}^2 \phi - \partial_x \psi) + u_{0x}(\partial_{xyz}^3 \phi - \partial_{xx}^2 \psi) + u_{0y}(\partial_{jyz}^3 \phi - \partial_{xy}^2 \psi) - u'_{0y} \Delta_2 \phi + 2\Omega(\partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi) = \frac{R}{P} b \theta + \partial_{yz}^2 \nabla^2 \phi - \partial_x \nabla^2 \psi \quad (2.58)$$

$$\text{Componente } (\hat{k}) : \quad -\sigma \Delta_2 \phi - u_{0x} \partial_x \Delta_2 \phi - u_{0y} \partial_y \Delta_2 \phi = \frac{R}{P} \theta - \nabla^2 \Delta_2 \psi \quad (2.59)$$

A continuación se realizan ciertas manipulaciones algebraicas sobre las ecuaciones con el objetivo de simplificarlas:

$$\begin{aligned} \sum_1 &\equiv (\partial_{xz}^2, \partial_{yz}^2, -\Delta_2) \\ \sum_2 &\equiv (\partial_y, -\partial_x, 0) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Esto es, el primer operador  $\sum_1$  se aplica sobre los componentes de (2.52) a (2.56),

$$(\partial_{xz}^2, \partial_{yz}^2, -\Delta_2) \sigma \begin{pmatrix} \partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi \\ \partial_{yz}^2 \phi - \partial_x \psi \\ -\Delta_2 \phi \end{pmatrix} = \sigma(\partial_{xxz}^4 \phi + \partial_{xyz}^3 \psi + \partial_{yyz}^4 \phi - \partial_{xyz}^3 \psi - \Delta_4 \phi) = \sigma \nabla^2 \Delta_2 \phi \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{xz}^2, \partial_{yz}^2, -\Delta_2) u_{0x} \begin{pmatrix} \partial_{xxz}^3 \phi + \partial_{xy}^2 \psi \\ \partial_{xyz}^3 \phi - \partial_{xx}^2 \psi \\ -\partial_x \Delta_2 \phi \end{pmatrix} &= \partial_x [u'_{0x}(\partial_{xxz}^3 \phi + \partial_{xy}^2 \psi) + u_{0x}(\partial_{xxz}^4 \phi + \partial_{xyz}^3 \psi)] + \\ &+ \partial_y [u'_{0x}(\partial_{xyz}^3 \phi - \partial_{xx}^2 \psi) + u_{0x}(\partial_{xyz}^4 \phi - \partial_{xxz}^3 \psi)] + u_{0x} \Delta_2 \Delta_2 \partial_x \phi = \\ &= u'_{0x} \partial_{xz}^2 \Delta_2 \phi + u_{0x} \nabla^2 \Delta_2 \partial_x \phi \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_{xz}^2, \partial_{yz}^2, -\Delta_2) u_{0y} \begin{pmatrix} \partial_{xyz}^3 \phi + \partial_{yy}^2 \psi \\ \partial_{yyz}^3 \phi - \partial_{xy}^2 \psi \\ -\partial_y \Delta_2 \phi \end{pmatrix} &= \partial_x [u'_{0y} (\partial_{xyz}^3 \phi + \partial_{yy}^2 \psi) + u_{0y} (\partial_{xyz}^4 \phi + \partial_{yyz}^3 \psi)] + \\
 + \partial_y [u'_{0y} (\partial_{yyz}^3 \phi - \partial_{xy}^2 \psi) + u_{0y} (\partial_{yyz}^4 \phi - \partial_{xyz}^3 \psi)] + u_{0y} \Delta_2 \Delta_2 \partial_y \phi &= \\
 = u'_{0y} \partial_{yz}^2 \Delta_2 \phi + u_{0y} \nabla^2 \Delta_2 \partial_y \phi &
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

$$(\partial_{xz}^2, \partial_{yz}^2, -\Delta_2) \begin{pmatrix} -\Delta_2 \phi \cdot u'_{ox} \\ -\Delta_2 \phi \cdot u'_{oy} \\ 0 \end{pmatrix} = -(u''_{ox} \partial_x \Delta_2 \phi + u'_{ox} \partial_{xz}^2 \Delta_2 \phi + u''_{oy} \partial_y \Delta_2 \phi + u'_{oy} \partial_{yz}^2 \Delta_2 \phi) \tag{2.64}$$

$$(\partial_{xz}^2, \partial_{yz}^2, -\Delta_2) 2\Omega \begin{pmatrix} -\partial_{yz}^2 \phi + \partial_x \psi \\ \partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi \\ 0 \end{pmatrix} = 2\Omega (-\partial_{xyz}^2 \phi + \partial_{xxz}^3 \psi + \partial_{xyz}^2 \phi + \partial_{yyz}^3 \psi) = 2\Omega \partial_z \Delta_2 \psi \tag{2.65}$$

$$(\partial_{xz}^2, \partial_{yz}^2, -\Delta_2) \frac{R}{P} [\theta(\hat{k} + b\hat{j})] = -\frac{R}{P} (\Delta_2 \theta - b \partial_{yz}^2 \theta) \tag{2.66}$$

$$(\partial_{xz}^2, \partial_{yz}^2, -\Delta_2) \begin{pmatrix} \partial_{xz}^2 \nabla^2 \phi + \partial_y \nabla^2 \psi \\ \partial_{yz}^2 \nabla^2 \phi - \partial_x \nabla^2 \psi \\ -\nabla^2 \Delta_2 \phi \end{pmatrix} = (\nabla^2 \partial_{xxz}^4 \phi + \nabla^2 \partial_{yyz}^4 \phi + \nabla^2 \Delta_2 \Delta_2 \phi) = \nabla^4 \Delta_2 \phi \tag{2.67}$$

Al reagrupar los términos, se obtiene,

$$\begin{aligned}
 \nabla^4 \Delta_2 \phi - 2\Omega \partial_z \Delta_2 \psi - \frac{R}{P} (\Delta_2 \theta - b \partial_{yz}^2 \theta) &= \\
 = (u_{0x} \partial_x + u_{0y} \partial_y + \sigma) \nabla^2 \Delta_2 \phi - (u''_{0x} \partial_x + u''_{0y} \partial_y) \Delta_2 \phi &
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

De igual modo, el segundo operador  $\sum_2$  se aplica sobre los componentes de (2.52) a (2.56),

$$(\partial_y, -\partial_x, 0) \sigma \begin{pmatrix} \partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi \\ \partial_{yz}^2 \phi - \partial_x \psi \\ -\Delta_2 \phi \end{pmatrix} = \sigma (\partial_{xyz}^3 \phi + \partial_{yy}^2 \psi - \partial_{xyz}^3 \phi + \partial_{xx}^2 \psi) = \sigma \Delta_2 \psi \tag{2.69}$$

$$(\partial_y, -\partial_x, 0) u_{0x} \begin{pmatrix} \partial_{xxz}^3 \phi + \partial_{xy}^2 \psi \\ \partial_{xyz}^3 \phi - \partial_{xx}^2 \psi \\ -\partial_x \Delta_2 \phi \end{pmatrix} = u_{0x} (\partial_{xxyz}^4 \phi + \partial_{xyy}^3 \psi - \partial_{xxyz}^4 \phi + \partial_{xxx}^3 \psi) = u_{0x} \partial_x \Delta_2 \psi \tag{2.70}$$

$$(\partial_y, -\partial_x, 0) u_{0y} \begin{pmatrix} \partial_{xyz}^3 \phi + \partial_{yy}^2 \psi \\ \partial_{yyz}^3 \phi - \partial_{xy}^2 \psi \\ -\partial_y \Delta_2 \phi \end{pmatrix} = u_{0y} (\partial_{xyyz}^4 \phi + \partial_{yyy}^3 \psi - \partial_{xyyz}^4 \phi + \partial_{xxy}^3 \psi) = u_{0y} \partial_y \Delta_2 \psi \quad (2.71)$$

$$(\partial_y, -\partial_x, 0) \begin{pmatrix} -\Delta_2 \phi \cdot u'_{ox} \\ -\Delta_2 \phi \cdot u'_{oy} \\ 0 \end{pmatrix} = (-u'_{ox} \partial_y + u'_{oy} \partial_x) \Delta_2 \phi \quad (2.72)$$

$$(\partial_y, -\partial_x, 0) 2\Omega \begin{pmatrix} -\partial_{yz}^2 \phi + \partial_x \psi \\ \partial_{xz}^2 \phi + \partial_y \psi \\ 0 \end{pmatrix} = 2\Omega (-\partial_{yyz}^3 \phi + \partial_{xy}^2 \psi - \partial_{xxz}^3 \phi - \partial_{xy}^2 \psi) = -2\Omega \partial_z \Delta_2 \phi \quad (2.73)$$

$$(\partial_y, -\partial_x, 0) \frac{R}{P} [\theta(\hat{k} + b\hat{j})] = -\frac{R}{P} b \partial_x \theta \quad (2.74)$$

$$(\partial_y, -\partial_x, 0) \begin{pmatrix} \partial_{xz}^2 \nabla^2 \phi + \partial_y \nabla^2 \psi \\ \partial_{yz}^2 \nabla^2 \phi - \partial_x \nabla^2 \psi \\ -\nabla^2 \Delta_2 \phi \end{pmatrix} = (\partial_{xyz}^3 \nabla^2 \phi + \partial_{yy} \nabla^2 \psi - \partial_{xyz}^3 \nabla^2 \phi + \partial_{xx}^2 \nabla^2 \psi) = \nabla^2 \Delta_2 \psi \quad (2.75)$$

Al reagrupar los términos, se obtiene,

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \Delta_2 \psi + 2\Omega \partial_z \Delta_2 \phi - \frac{R}{P} b \partial_x \theta = \\ & = (u_{0x} \partial_x + u_{0y} \partial_y + \sigma) \Delta_2 \psi - u'_{ox} \partial_y \Delta_2 \phi + u'_{oy} \partial_x \Delta_2 \phi \end{aligned} \quad (2.76)$$

Por último, se realiza el mismo planteamiento para la ecuación del calor (Ec. (2.16)),

$$\partial_t \theta + (\vec{u}_0 + \vec{v}) \cdot \nabla \theta = -(\vec{u}_0 + \vec{v}) \cdot \hat{k} + \frac{1}{P} \nabla^2 \theta \quad (2.77)$$

Finalmente, se linealiza la anterior ecuación, resultando,

$$P^{-1} \nabla^2 \theta + \Delta_2 \phi = (\sigma + u_{0x} \partial_x + u_{0y} \partial_y) \theta \quad (2.78)$$

## 2.4. Análisis de estabilidad

El siguiente paso es obtener un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con el que realizar el análisis de estabilidad. Para ello, se consideran soluciones de la forma,

$$\begin{aligned}\phi &= \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] f(z) + c.c. \\ \psi &= \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] g(z) + c.c. \\ \theta &= \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] h(z) + c.c.\end{aligned}\tag{2.79}$$

Al sustituir estas expresiones en las ecuaciones (2.68), (2.76) y (2.78), se obtiene un sistema EDO para  $f, g, h$ . A continuación se detallan los cálculos:

En primer lugar, se empieza con la Ec. (2.68), donde término a término, se obtiene,

$$\Delta_2 \phi = (\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2) \phi = -k^2 \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] f \tag{2.80}$$

$$\nabla \Delta_2 \phi = \begin{pmatrix} \partial_x \Delta_2 \phi \\ \partial_y \Delta_2 \phi \\ \partial_z \Delta_2 \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i k^2 k_x f \\ -i k^2 k_y f \\ -k^2 f' \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Delta_2 \phi &= (\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2) \Delta_2 \phi = \\ &= k^4 \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] f - k^2 \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] f''\end{aligned}\tag{2.82}$$

$$\nabla(\nabla^2 \Delta_2 \phi) = \begin{pmatrix} i k^4 k_x f - i k^2 k_x f'' \\ i k^4 k_y f - i k^2 k_y f'' \\ k^4 f' - k^2 f''' \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] \tag{2.83}$$

$$\nabla^4 \Delta_2 \phi = (-k^6 f + 2k^4 f'' - k^2 f''') \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] \tag{2.84}$$

$$\Delta_2 \psi = -k^2 \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] g \tag{2.85}$$

$$\nabla \Delta_2 \psi = \begin{pmatrix} -i k^2 k_x g \\ -i k^2 k_y g \\ -k^2 g' \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] \tag{2.86}$$

$$\Delta_2 \theta = -k^2 \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] h \tag{2.87}$$

$$\partial_{yz}^2 \theta = i k_y \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] h' \tag{2.88}$$

donde,

$$k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2 \quad (2.89)$$

Se reagrupan los términos, resultando,

$$\begin{aligned} & -k^2 f^{IV} + 2k^4 f'' - k^6 f + 2\Omega k^2 g' + \frac{R}{P}(k^2 h + i k_y b h') = \\ & = (i k_x u_{0x} + i k_y u_{0y} + \sigma)(k^4 f - k^2 f'') + k^2 (i k_x u'_{0x} + i k_y u'_{0y}) f \end{aligned} \quad (2.90)$$

En segundo lugar, se introducen las soluciones en la Ec. (2.76). Donde, término a término (adicionales al anterior desarrollo), se obtiene,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Delta_2 \psi & = (\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2) \Delta_2 \psi = \\ & = k^4 \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] g - k^2 \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] g'' \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\partial_x \theta = i k_x \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] h \quad (2.92)$$

Se reagrupan los términos, resultando,

$$\begin{aligned} & k^4 y - k^2 y'' - 2\Omega k^2 f' - i \frac{R}{P} b k_x h = \\ & = -k^2 (i u_{0x} k_x + i u_{0y} k_y + \sigma) g + i k^2 (k_y u'_{0x} - k_x u'_{0y}) f \end{aligned} \quad (2.93)$$

En tercer lugar, se aplican las soluciones a la ecuación del calor (Ec. (2.78)). Donde, término a término (adicionales al anterior desarrollo), se obtiene,

$$\nabla \theta = \begin{pmatrix} i k_x h \\ i k_y h \\ h' \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] \quad (2.94)$$

$$\nabla^2 \theta = (-k^2 h + h'') \exp[i(k_x x + k_y y) + \sigma t] \quad (2.95)$$

Se reagrupan los términos, resultando,

$$P^{-1}(h'' - k^2 h) - k^2 f = (\sigma + i u_{0x} k_x + i u_{0y} k_y) h \quad (2.96)$$

Finalmente, con las ecuaciones (2.90), (2.93) y (2.96) se define el sistema a resolver numéricamente. Y para su resolución se aplican las siguientes condiciones de contorno (ver 2.1.5.

Condiciones de contorno, pág. 10),

$$\vec{v} = \theta = \partial_z \theta = 0 \quad , \text{ en } z = \pm 1/2 \quad (2.97)$$

Esto es,

$$h = g = f = f' = 0 \quad , \text{ en } z = \pm 1/2 \quad (2.98)$$

Con ello, se ha obtenido el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de contorno en ambos extremos de la vertical, que modelan nuestro sistema fluido.

Para la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de contorno, se consideraron dos posibles estrategias de resolución:

- **Método del disparo con Runge-Kutta:**

Bajo este enfoque se transforma el problema de condiciones de contorno, en un sistema de condiciones iniciales. Se resuelve con 4 condiciones iniciales en  $z=-1/2$ , linealmente independientes, que cumplen con las condiciones de contorno en ese extremo del dominio, lo que nos genera 4 soluciones linealmente independientes.

Imponiendo que una combinación lineal de estas 4 soluciones cumpla la condición de contorno en  $z=1/2$  se obtiene la condición de resolubilidad. Esto es, como resultado se obtiene un sistema lineal homogéneo cuyo determinante debe ser nulo, condición que permite determinar el valor del número de Rayleigh crítico.

El sistema EDO que se debe resolver para cada condición inicial está formado por las ecuaciones (2.90), (2.93) y (2.96). Y para su resolución numérica se utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

La condición de resolubilidad que podemos escribir como  $\det[S(R, \vec{k}, \sigma)] = 0$ , nos da  $\sigma$  en función de  $R$  y  $\vec{k}$ . Para calcular la curva de estabilidad neutral imponemos  $\text{Re}(\sigma) = 0$  y separando parte real e imaginaria llegamos al sistema,

$$\Re[\det(S(R, \vec{k}, \sigma))] = 0 \quad (2.99)$$

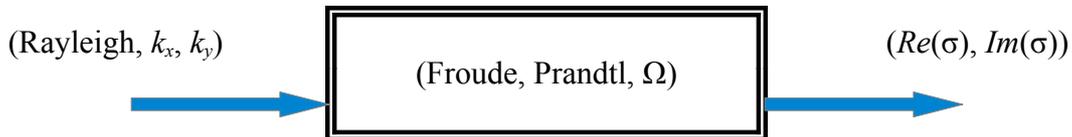
$$\Im[\det(S(R, \vec{k}, \sigma))] = 0 \quad (2.100)$$

que puede resolverse con un método de Broyden.

- **Autovalores generalizados:**

Con este enfoque, el sistema EDO con condiciones de contorno se discretiza por el método de diferencias finitas de segundo orden, en  $N$  puntos del dominio. El sistema obtenido se escribe en modo matricial y se resuelve el problema de autovalores generalizados que resulta.

En el siguiente esquema se representa el método de Autovalores generalizados a modo de caja negra, con una entrada y una salida. Esto es, dado un sistema  $(b, P, \Omega)$  y unos valores de los números de onda  $(k_x, k_y)$  y el número de Rayleigh, se es capaz de determinar directamente la parte real y la parte imaginaria de los autovalores del sistema. Esto es, es posible identificar si el sistema es inestable para algún autovalor ( $Re(\sigma) > 0$ ).



Tras unas primeras pruebas de resolución con ambos métodos numéricos, se observó que el método de Autovalores generalizados era computacionalmente más eficiente, y con ello más adecuado a los recursos computacionales disponibles. En consecuencia, el método de Autovalores generalizados es el método planteado con detalle en el siguiente capítulo.

En referencia al lenguaje de programación, se ha trabajado en Matlab. La ventaja de Matlab es que es un entorno de desarrollo muy eficiente, que permite implementar el código de forma rápida y cómoda. Además el tiempo de ejecución, para los cálculos que se necesitan en el trabajo, es comparable a un lenguaje compilado como Fortran o C.

## Capítulo 3: RESOLUCIÓN NUMÉRICA

### 3.1. Análisis del sistema en estudio

En el capítulo anterior se ha desarrollado el modelo matemático que describe la capa de fluido entre las dos placas. El resultado de dicho modelado es el siguiente sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, junto con sus condiciones de contorno, que debe ser resuelto numéricamente,

$$\begin{aligned}
 & -k^2 f^{IV} + 2k^4 f'' - k^6 f + 2\Omega k^2 g' + \frac{R}{P}(k^2 h + i k_y b h') = \\
 & = [i(k_x u_{0x} + k_y u_{0y}) + \sigma](k^4 f - k^2 f'') + (k_x u''_{0x} + k_y u''_{0y})k^2 f \\
 & \qquad k^4 g - k^2 g'' - 2\Omega k^2 f' - i \frac{R}{P} b k_x h = \qquad (3.1) \\
 & = -[i(u_{0x} k_x + u_{0y} k_y) + \sigma]k^2 g + i(u'_{0x} k_y - u'_{0y} k_x)k^2 f \\
 & \qquad P^{-1}(h'' - k^2 h) - k^2 f - \sigma h = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Condiciones de Contorno: } h = g = f = f' = 0 \quad , \text{ en } z = \pm 1/2 \qquad (3.2)$$

Los números adimensionales y la relación del número de onda, que se han definido en el capítulo anterior, son,

$$\Omega = \frac{\Omega_D d^2}{\nu} \quad , \quad P = \nu / \kappa \quad , \quad b = \frac{\Omega_D^2 r_0}{g} \quad , \quad R = \frac{\alpha \beta g d \dot{U}}{\kappa \nu} \qquad (3.3)$$

$$k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2 \qquad (3.4)$$

Adicionalmente, con el objetivo de obtener un algoritmo más compacto, se identifican los siguientes parámetros del sistema EDO,

$$a_0 \equiv i(u_{0x} k_x + u_{0y} k_y) \quad ; \quad a_1 \equiv i(u'_{0x} k_y - u'_{0y} k_x) \quad ; \quad a_2 \equiv i(u''_{0x} k_x + u''_{0y} k_y) \qquad (3.5)$$

$$Q \equiv \frac{R}{P} ; \quad c_x \equiv i b Q k_x / k^2 ; \quad c_y \equiv i b Q k_y / k^2 \quad (3.6)$$

Con ello, el sistema de ecuaciones resultante se puede escribir como,

$$\begin{aligned} f^{IV} &= -(k^4 + k^2(a_0 + \sigma) + a_2)f + (2k^2 + (a_0 + \sigma))f'' + Qh + c_y h' + 2\Omega g' \\ g'' &= (k^2 + a_0 + \sigma)g - 2\Omega f' - a_1 f - c_x h \\ h'' &= [k^2 + P(\sigma + a_0)]h + P k^2 f \end{aligned} \quad (3.7)$$

En base a la resolución numérica de dicho sistema EDO, se analiza la estabilidad lineal del modelo para obtener los valores de  $\sigma$  que resultan tener parte real nula,  $s \equiv \text{Re}(\sigma) = 0$ . En otras palabras, se quiere obtener la pareja de parámetros  $\bar{k}$  y  $R$  que forman la línea de estabilidad neutral, denominados números de onda y de Rayleigh críticos.

### 3.2. Desarrollo del método numérico

Tal y como se ha descrito en el capítulo anterior, el método numérico utilizado consiste en plantear y resolver un problema de autovalores generalizados. De este modo, el primer paso a realizar es la discretización del sistema EDO (ecuaciones (3.7)) en el dominio de estudio,  $z \in [-1/2, 1/2]$ .

Se observa que el sistema EDO contiene derivadas primeras, segundas y cuartas, que se discretizan por el método diferencias finitas centradas. Para el caso particular de la función  $f$ , resulta,

$$\begin{aligned} f' &= \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \\ f'' &= \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) \\ f^{IV} &= \frac{f_2 + f_{-2} + 6f_0 - 4f_1 - 4f_{-1}}{h^4} + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Con ello, se discretiza el sistema EDO y se escribe en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} [-D_4+(2k^2+a_0)D_2-(k^4+k^2a_0+a_2)I] & [2\Omega D_1] & [QI+c_y D_1] \\ [a_1 I+2\Omega D_1] & [D_2-(k^2+a_0)I] & [c_x I] \\ [-k^2 I] & [0] & [P^{-1}D_2-(P^{-1}k^2+a_0)I] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} [k^2 I-D_2] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

donde se ha definido,

$$D_1 = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$D_4 = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ \dots & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Las matrices  $D_i$  son de tamaño  $[N, N]$ , donde  $N$  es el número de puntos interiores de la malla. La relación entre el espaciado de la malla  $h$  y el número de puntos interiores  $N$  es:

$$h = \frac{z_{max} - z_{min}}{N+1} = \frac{0.5 - (-0.5)}{N+1} = \frac{1}{N+1} \quad (3.12)$$

Nótese que en la construcción de los operadores  $D_1, D_2, D_4$  se han tenido en cuenta las condiciones de contorno del problema a través del método de los nodos virtuales. Esto es,

- Para  $D_1$  y  $D_2$ , las condiciones de contorno  $f=g=h=f'=0$  se cumplen directamente en  $z = \pm 1/2$ .
- Para  $D_4$  (ver Figura 3.1),
  - en base a la Ec. (3.8), la c.c.  $f'=0$  en  $z=-1/2$ , implica que ( $f_{-2} = f_0$ )
  - la c.c.  $f=0$  en  $z=-1/2$ , implica que ( $f_{-1}=0$ ), y con ello, resulta,

$$D_4 = \frac{1}{h^4}(f_2 + f_{-2} + 6f_0 - 4f_1 - 4f_{-1}) - \frac{1}{h^4}(f_2 + 7f_0 - 4f_1) \quad (3.13)$$

- Y en el extremo opuesto,  $z=1/2$ , también se aplica la misma lógica.

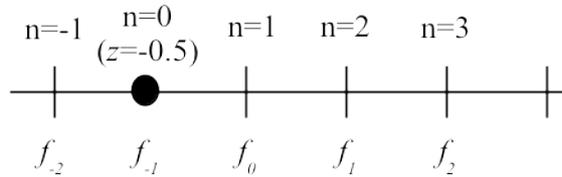


Figura 3.1. Malla del dominio en el entorno de  $z=-1/2$ . Además, se representa la función  $f$  en los puntos necesarios para el cálculo de las diferencias finitas en  $n=1$ .

Así, el problema queda escrito como,

$$A\vec{q} = \sigma B\vec{q} \quad \text{con} \quad \vec{q} = (f, g, h)^T \quad (3.14)$$

Los autovalores  $\sigma$  resultantes se componen de una parte real y una parte imaginaria,  $\sigma \equiv s + i\omega$ , donde,

- $s$ , es la tasa de crecimiento de la solución, en el tiempo. Con ello, los valores positivos de  $s$ , representan soluciones inestables.
- $\omega$ , es la frecuencia característica de la solución.

El siguiente paso es generar el algoritmo para el cálculo de  $R_c$  y  $\bar{k}_c$ . Éste parte del modelo definido por el conjunto de parámetros  $(b, P, \Omega)$ , y en base a los valores de entrada variables  $(\bar{k})$ , es capaz de determinar el número de Rayleigh crítico  $R_c$  correspondiente. El método utilizado para determinar el número de Rayleigh crítico,  $R_c$ , es el método de búsqueda por bisección. Es decir, partiendo de un  $R_0$  inicial,

- se busca un intervalo  $[R_a, R_b]$  que incluya el valor crítico del número de Rayleigh. Para ello,
  - si  $R_0$  es negativo, se busca un valor de  $R_a$  inestable ( $s > 0$ ) y de  $R_b$  estable ( $s < 0$ ). Este caso es el más esperado, tal y como se ha mencionado en la introducción, ya que el efecto de la flotación acelera la inestabilidad en la capa límite de Ekman.
  - si  $R_0$  es positivo, se busca un valor de  $R_a$  estable ( $s < 0$ ) y de  $R_b$  inestable ( $s > 0$ ).
- Se calcula  $R_m$ , siendo éste el punto medio del intervalo  $[R_a, R_b]$ ,  $R_m = (R_a + R_b)/2$ .

- Se determina el signo de  $s$  para  $(b, P, \Omega, \bar{k}$  y  $R_m)$ , y para el caso particular con  $R_0$  negativo,
  - si  $s > 0$ , se reduce el intervalo a la mitad, siendo  $R_a = R_m$
  - si  $s < 0$ , se reduce el intervalo a la mitad, siendo  $R_b = R_m$
  - para el caso con  $R_0$  positivo, el criterio de asignación de los nuevos límites del intervalo sería el opuesto.
- Se repite esta operación hasta que la diferencia relativa de  $R_m$  entre dos pasos sea inferior a una cierta tolerancia. Esto es, cuando

$$\left| \frac{R_{m2} - R_{m1}}{R_{m2}} \right| < Tolerancia \quad (3.15)$$

- Finalmente, cuando se cumple el criterio anterior, se obtiene el número de Rayleigh crítico para un conjunto de parámetros  $(b, P, \Omega)$  y variables  $(\bar{k})$ .

Una vez llegados a este punto, hay que observar que los valores que vienen dados por el sistema físico en estudio vienen representados por  $b, P$  y  $\Omega$ . En cambio, el número de onda,  $\bar{k}$ ,

$$\vec{k} = (k_x, k_y) = (mk \cos(ak), mk \sin(ak)) = f(mk, ak) \quad (3.16)$$

debe ser determinado en la resolución del problema.

Para ello, diferenciamos dos partes de la resolución numérica:

1. Cálculo del número de Rayleigh crítico: obtención de algún conjunto  $(mk, ak)$ , para el que el sistema descrito por  $(b, P$  y  $\Omega)$  es inestable (esto es, existe  $R_c$  con  $s=0$ ).
2. Cálculo del número de onda crítico: obtención del número de onda  $(mk, ak)$  que más se acerca a la inestabilidad (esto es,  $|s|$  mínimo), para el valor crítico de Rayleigh que se ha obtenido en el paso 1.

### 3.2.1. Cálculo del número de Rayleigh crítico

En el primer punto, interesa saber si existe inestabilidad para algún conjunto  $(mk, ak)$ , dado el sistema descrito por  $(b, P$  y  $\Omega)$ . Para ello,

- Se barren los ángulos,  $ak$ , equiespaciando el intervalo  $[-90^\circ, 90^\circ]$  en  $N$  puntos. El intervalo considerado cubre media circunferencia, ya que la media circunferencia complementaria es

simétrica respecto a la parte real de los autovalores  $s$ .

- Para cada  $ak$ , se calcula el valor máximo de la parte real de los autovalores del sistema,  $s_{Max}$ , en el intervalo del módulo de onda  $[mk_{min}, mk_{Max}]$ . Si dicho máximo de  $s$  es positivo, el sistema es inestable para el número de Rayleigh en estudio. Y si el máximo de  $s$  es negativo, el sistema es estable, respectivamente. De este modo, se regresa al método de bisección para obtener el siguiente intervalo  $[R_a, R_b]$ , y por ende, el siguiente punto de estudio con  $R_m$ . Y se repite este cálculo hasta cumplir con el criterio de salida especificado.

Una vez se ha completado este proceso, se es capaz de determinar si existe un Rayleigh crítico del sistema  $(b, P, \Omega)$ , al menos para un número de onda  $\bar{k}$ .

Durante la programación del método numérico, se utilizó también el siguiente algoritmo:

- Para cada  $ak$ , se aplica el método de bisección, en aras de obtener un  $mk$  que haga el sistema inestable en base a los valores  $(b, P, \Omega$  y  $R_m)$ . De modo semejante al detallado para el método de bisección de  $R_m$ , en base a un  $mk_0$  inicial, se busca un intervalo  $[mkA, mkB]$  en el que,
  - Con  $mkA$ , resulten valores crecientes de  $s$  cuando se evoluciona hacia  $mkA+dmk$ , donde  $dmk$  es un intervalo diferencial del módulo  $mk$ .
  - Con  $mkB$ , se obtengan valores decrecientes de  $s$  cuando se evoluciona hacia un punto cercano a  $mkB+dmk$ .
- De este modo, en el interior de dicho intervalo  $[mkA, mkB]$  existe un máximo de  $s$ . Y se va reduciendo el intervalo hasta encontrar un punto donde  $s$  sea igual o mayor de cero. Esto es, que el sistema sea inestable.

Se observó que este algoritmo es más eficiente que el implementado, pero por contra, es poco eficaz. Esto se debe a su alta sensibilidad al intervalo de estudio  $[mkA, mkB]$ . Y por ello, sólo se obtienen resultados válidos en un rango pequeño de  $\Omega$ , del orden de 100.

### 3.2.2. Cálculo del número de onda crítico

En este segundo punto, se realiza una búsqueda del número de onda crítico  $(mk_c, ak_c)$  correspondiente al número de Rayleigh crítico determinado en el anterior paso. Para asegurar la obtención de los números de onda críticos  $\bar{k}_c$ , se desplaza la línea de estabilidad neutral hacia la

zona inestable del orden de la tolerancia del cálculo. Esto es, se utiliza un valor  $R=R_c*5\cdot 10^{-4}$ , para los siguientes cálculos:

- se recorre de nuevo en el ángulo  $ak \in [-90^\circ, 90^\circ]$ . La diferencia respecto al apartado anterior está en la resolución de la malla. En este cálculo, la discretización equiespaciada es mucho más densa para captar con mayor precisión los números de onda críticos.
- Para cada ángulo  $ak$ ,
  - se barre el módulo  $mk$  a lo largo de un intervalo seleccionado  $[mkA, mkB]$ . El objetivo es avanzar desde  $mkA$  hacia  $mkB$  en pasos diferenciales  $dmk$ , hasta que se obtengan  $s$  con distintos signos para  $mkA$  y  $mkA+i\cdot dmk (=mkB')$ , respectivamente.
  - Una vez se ha obtenido el intervalo  $[mkA, mkB']$ , se utiliza el método de la bisección para determinar  $mk$ , tal que  $s$  esté lo más cerca posible de cero. El criterio de salida del bucle iterativo es: la diferencia relativa entre dos valores consecutivos de  $mk$  sea menor a una tolerancia fija; o que el valor absoluto de  $s$  sea numéricamente cero ( $<10^{-6}$ ).

El resultado será un listado, que para cada ángulo  $ak$ , identifica si existe el correspondiente módulo  $mk$  crítico. Y en particular, de todos los números de onda críticos de  $R_c$ , nos interesa el modo más crítico de todos, esto es, el que está más cerca de la línea de estabilidad neutral. Obteniendo el número de onda  $(ak_c, mk_c)$  de  $R_c$  con el que se obtiene el valor mínimo de  $|s|$ .

### 3.2.3. Resumen del método numérico

En base a lo presentado en este sub-capítulo, se tienen las herramientas para, dado un sistema definido por  $(b, P, \Omega)$ , determinar:

- si existe inestabilidad,
- cuál es el número de Rayleigh crítico,
- y su correspondiente número de onda más cercano a la línea de inestabilidad.

De forma natural, el siguiente paso es analizar que sucede si se cambian las condiciones del sistema, esto es, si se varía el valor de  $\Omega$ . Por ello, en el algoritmo se ha añadido el barrido en dicho parámetro adimensional, con el objetivo de analizar su influencia en la estabilidad del sistema. Los resultados obtenidos se presentan en el siguiente capítulo.



## Capítulo 4: RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan los resultados que se han obtenido del modelo analítico y numérico presentado en los capítulos anteriores. En concreto el capítulo recoge los siguientes cinco puntos:

- i) la validación del método numérico comparando los resultados con los datos de la bibliografía.
- ii) el análisis de los números de onda críticos, en base a los resultados validados en el primer punto.
- iii) el análisis de la malla del dominio  $z$ .
- iv) la variación de los resultados con el número de Prandtl.
- v) la variación de los resultados con el número de Froude.

Por último el capítulo recoge las conclusiones del trabajo.

### 4.1. Validación del método de resolución

Con el objetivo de verificar el método desarrollado, se comparan los resultados con los datos de la Ref. [4]. En su estudio, Withalm y Hoffmann, analizan el sistema Ekman-Couette que consiste en dos placas infinitas que se desplazan en direcciones opuestas (cortadura), y sobre este movimiento, se añade una velocidad angular en el eje axial común a ambas placas. Para el caso de velocidad angular nula, el fluido describe el movimiento de un sistema Couette puro. Por el contrario, si se anula la cortadura, el movimiento del fluido es característico de un sistema Ekman puro. En todos los cálculos de dicha referencia se considera un número de Prandtl igual a la unidad.

El parámetro adimensional que da cuenta de la importancia del movimiento de cortadura es el número de Reynolds. En la Figura 4.1 se representan los datos de la Ref. [4], particularizados para el caso semejante a nuestro estudio, esto es,  $Re=0$  (no hay cortadura).

Por otro lado, otra diferencia entre nuestro análisis y la Ref. [4], es la carencia del número de Froude en su planteamiento de las ecuaciones, ya que Hoffmann desprecia el efecto de la fuerza

centrífuga. Con ello, los resultados que se han obtenido se basan en el modelo con número de Froude nulo,  $b=0$ .

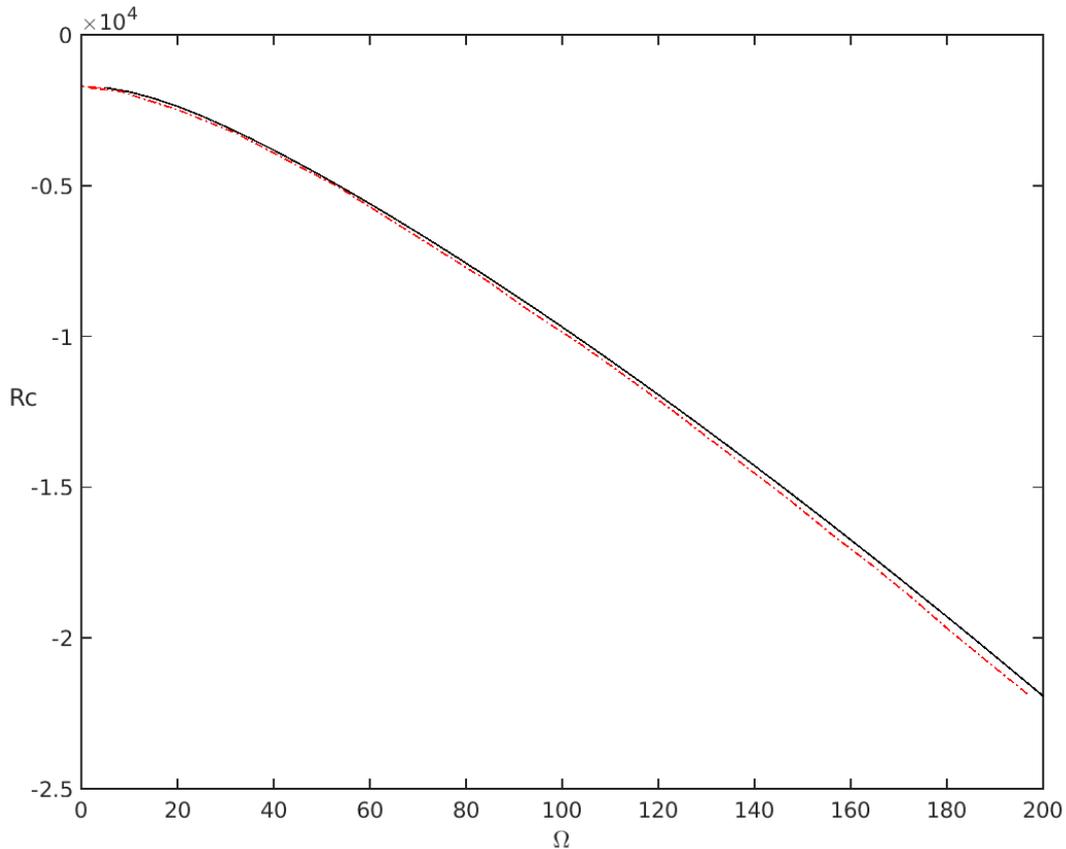


Figura 4.1. Número de Rayleigh crítico,  $R_c$ , en función de la velocidad angular adimensional,  $\Omega$ , para  $P=1$ ; resultados obtenidos con  $b=0$  (línea continua), resultados de Ref. [4] (línea discontinua).

En la Figura 4.1, se representan la línea de estabilidad neutral de Withalm y Hoffmann 2011, con  $Re=0$  (línea roja discontinua); y la del modelo en estudio con  $b=0$  (línea sólida negra). Para ambos resultados se ha utilizado el mismo número de Prandtl, de valor unidad. Y como se puede observar, en términos generales, ambas líneas tienen el mismo comportamiento para un amplio rango de velocidad angular adimensional  $\Omega$ .

De modo cualitativo, el rango de velocidad angular adimensional donde ambas líneas prácticamente coinciden es hasta valores de  $\Omega=120$ . A partir de dicho valor de  $\Omega$ , los resultados de nuestro análisis prevén que el sistema entra en la inestabilidad para diferencias absolutas de temperatura ligeramente inferiores que la Ref. [4], esto es, para valores absolutos del número de Rayleigh menores.

Por otro lado, se comparan los resultados del modelo de estabilidad de la capa límite de Ekman ( $b=1, P=1$ ), frente a los datos de la convección estacionaria con paredes rígidas de la Ref. [3] (pág. 102, Tabla VIII).

En la Ref. [3] se ha definido otro parámetro adimensional para incluir la velocidad de rotación, el número de Taylor  $Ta$ . Y para poder comparar ambos resultados, debe tenerse en cuenta la siguiente relación entre  $\Omega$  y  $Ta$ ,

$$Ta = 4\Omega^2 \quad (4.1)$$

Además, al haber calculado los datos en el rango  $\Omega$  de 25 a 200, en intervalos de 5 unidades, los valores del modelo se han interpolado linealmente en los puntos de  $Ta$  presentados en la Ref. [3].

	Ta	$\Omega$	Rc	$ \bar{k}_c $
Modelo	5000	35,36	-3506	4,09
CH61			-3476	4,25
Modelo	10000	50,00	-4767	4,64
CH61			-4717	4,8
Modelo	30000	86,60	-8326	5,60
CH61			-8326	5,8
Modelo	100000	158,11	-16554	7,01
CH61			-16740	7,2

Tabla 4.1. Comparación del número de Rayleigh crítico,  $R_c$ , y del módulo del número de onda crítico,  $|\bar{k}_c|$ , entre los resultados del modelo (con  $P=1$  y  $b=1$ ), y resultados de Ref. [3] (convección estacionaria con paredes rígidas); para cuatro valores del número de Taylor (y  $\Omega$ ).

En la Tabla 4.1 se comparan el número de Rayleigh y el número de onda crítico entre modelo de capa límite de Ekman y los datos de convección de la Ref. [3], para cuatro valores distintos de  $Ta$  (y  $\Omega$ ). Como se puede observar, la mayor diferencia entre ambos modelos, se encuentra en el valor del módulo del número de onda crítico.

## 4.2. Análisis de los números de onda críticos

La obtención de los números de onda críticos parte de los resultados presentados en la Figura (4.2), esto es, de los valores del número de Rayleigh crítico en función de la velocidad angular,  $\Omega$ , con  $b=1, P=1$ . A modo comparativo, el comportamiento cualitativo entre el modelo con  $b=0$  y  $b=1$ , es semejante. En el caso de despreciar la fuerza centrífuga ( $b=0$ ), la inestabilidad entra en juego para diferencias de temperaturas menores ( $|Rc|$  menores), al compararlo con  $b=1$ .

## RESULTADOS Y CONCLUSIONES

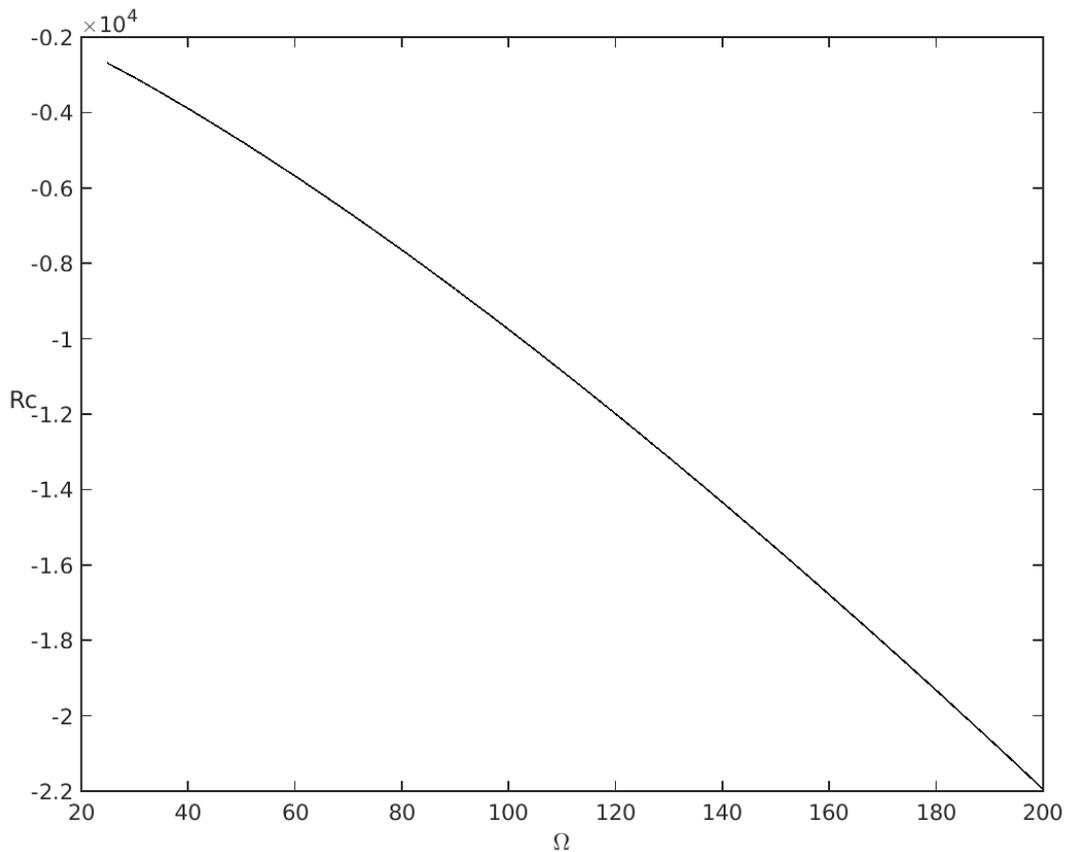


Figura 4.2. Número de Rayleigh crítico,  $R_c$ , en función de la velocidad angular adimensional,  $\Omega$ , para  $P=1$ ,  $b=1$ .

Para cada pareja de valores críticos ( $\Omega$ ,  $R_c$ ), se busca el número de onda que está más cerca de la línea de estabilidad neutral. En otras palabras, se quiere determinar el número de onda  $\bar{k}$  que conlleva el mínimo valor de  $|s|$ .

La dependencia del número de onda crítico con  $\Omega$ , se representa en las Figuras (4.3) y (4.4). En la Figura (4.3) se representa el módulo  $|\bar{k}_c|$  y en (4.4) el ángulo  $ak_c$ , del número de onda.

En referencia al módulo del número de onda crítico, se observa que su tendencia es creciente con la velocidad angular adimensional. De modo cualitativo, el módulo del número de onda crítico se duplica desde  $\Omega=25$  a  $\Omega=200$ , con crecimiento menor para valores mayores de  $\Omega$ .

Por otro lado, el ángulo del número de onda crítico decrece rápidamente entre  $\Omega=25$  y  $\Omega=100$ , de  $-60^\circ$  a  $-83^\circ$ . Y en el segundo segmento entre  $\Omega=100$  a  $200$ , el decrecimiento se va desacelerando de modo asintótico, de  $-83^\circ$  a  $-88^\circ$ .

#### 4.2. Análisis de los números de onda críticos

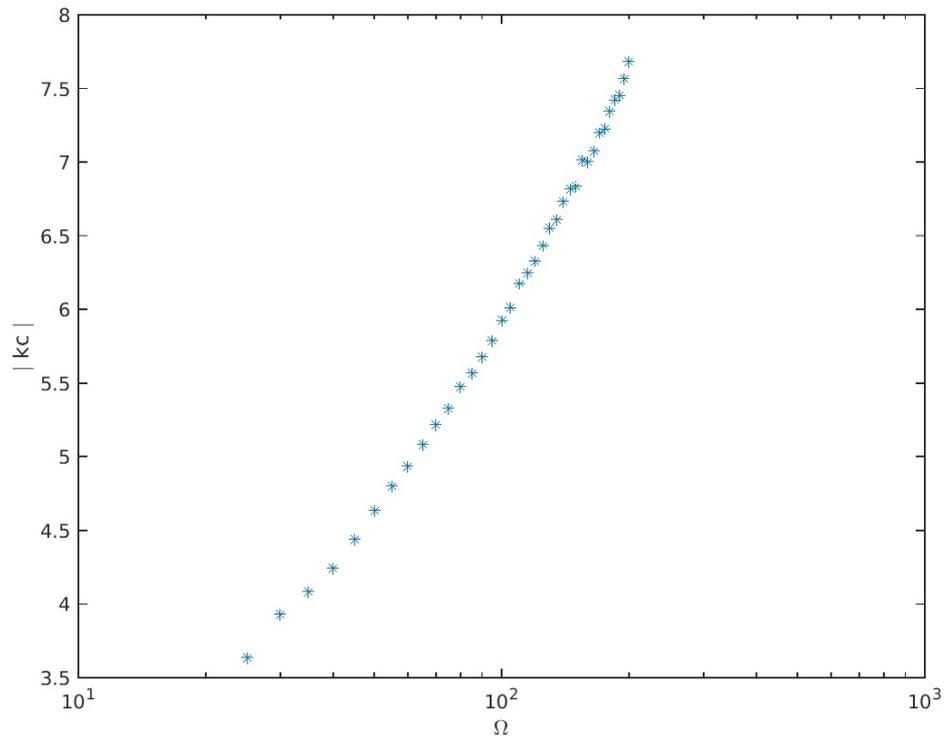


Figura 4.3. Módulo del número de onda crítico, para el sistema modelado con  $b=1$  y  $P=1$ .

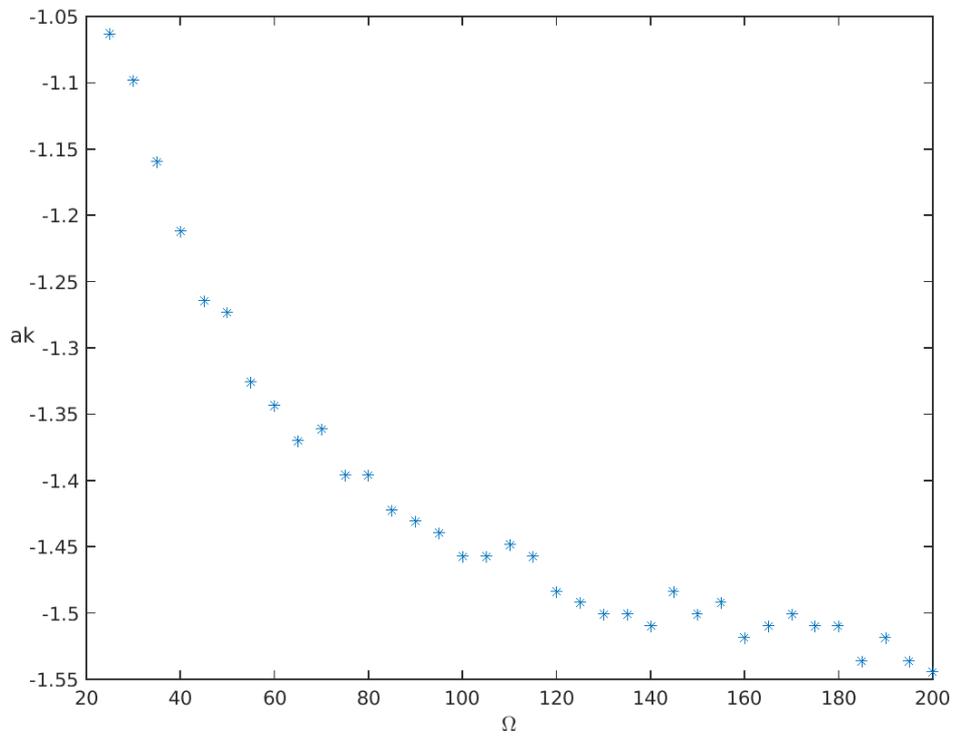


Figura 4.4. Ángulo del número de onda crítico, para el sistema modelado con  $b=1$  y  $P=1$ .

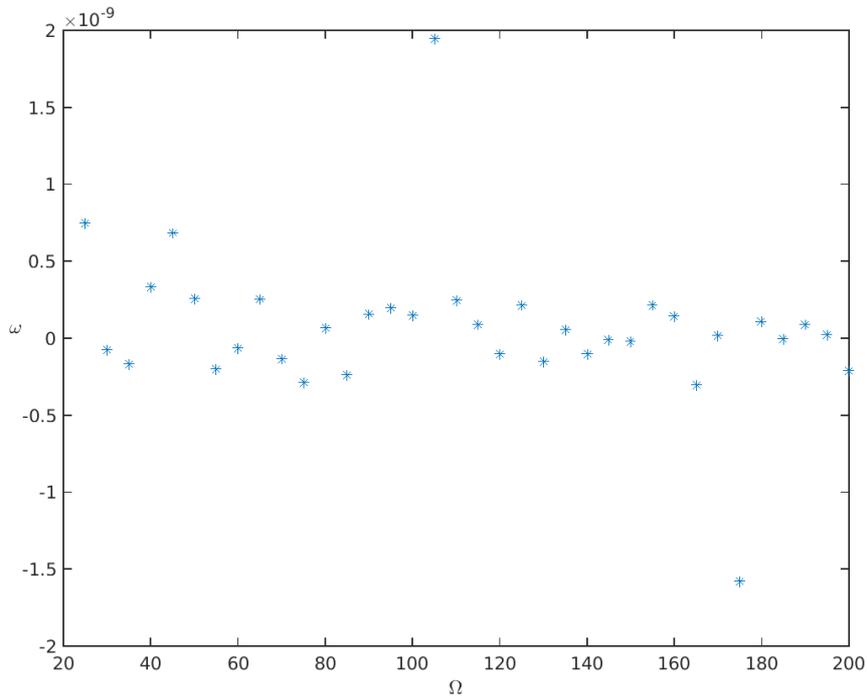


Figura 4.5. Parte imaginaria del autovalor  $\omega$  correspondiente al número de onda crítico. Sistema modelado con  $b=1$  y  $P=1$ .

Finalmente, en la Figura (4.5) se representa la parte imaginaria del autovalor correspondiente al número de onda crítico, esto es, la frecuencia característica de la solución crítica  $\omega$ . Se observa que las frecuencias características son de orden de magnitud  $O(10^{-9})$ . Al no haber ningún salto del orden de magnitud en el dominio de  $\Omega$  analizado, se puede concluir que el sistema se caracteriza por el mismo tipo de inestabilidad en dicho dominio.

Por otro lado, la parte real del autovalor correspondiente al número de onda crítico representa la tasa de crecimiento de la solución. Y de ello depende el grado de convergencia de los números de onda críticos a la línea de estabilidad neutral (idealmente,  $s=0$ ).

En el modelo aplicado, el orden de magnitud de  $s$  resulta  $O(10^{-3})$ . La elección de este nivel de precisión es consecuencia de varias iteraciones con distintos niveles de tolerancia en el algoritmo. Entre todos ellos, se eligió este grado de exactitud ( $O(10^{-3})$ ) de la solución como compromiso entre la calidad de los resultados y los recursos necesarios para su obtención.

### 4.3. Análisis de la malla del dominio z

En el Capítulo 3.2. se ha discretizado el dominio  $z$  en  $N=51$  puntos externos. Con el objetivo de asegurar una precisión adecuada de los resultados, se analiza el efecto de la malla en los resultados obtenidos. Para esto, se repiten los cálculos empleando distintas mallas, en concreto una malla más densa ( $N=77$ ) y otra menos densa ( $N=27$ ), que la malla del análisis planteado ( $N=51$ ).

En la Tabla 4.2 se representan el número de Rayleigh crítico para el intervalo de  $\Omega$  entre 25 y 100, para las 3 mallas definidas anteriormente. Además, se determina la diferencia relativa entre la mayor y menor densidad de malla, comparado con la malla utilizada en el análisis ( $N=51$ ).

W [-]	Ra (N=51) [-]	Ra (N=27) [-]	Err (N=27) [%]	Ra (N=77) [-]	Err (N=77) [%]
25	-2697	-2670	1,0	-2702	0,2
30	-3077	-3043	1,1	-3084	0,2
35	-3478	-3437	1,2	-3487	0,3
40	-3896	-3846	1,3	-3906	0,3
45	-4326	-4267	1,4	-4338	0,3
50	-4767	-4699	1,4	-4782	0,3
55	-5221	-5141	1,5	-5238	0,3
60	-5684	-5593	1,6	-5704	0,4
65	-6160	-6055	1,7	-6183	0,4
70	-6646	-6528	1,8	-6671	0,4
75	-7141	-7010	1,8	-7171	0,4
80	-7646	-7499	1,9	-7678	0,4
85	-8162	-7997	2,0	-8196	0,4
90	-8685	-8505	2,1	-8723	0,4
95	-9218	-9020	2,1	-9260	0,5
100	-9757	-9541	2,2	-9803	0,5

Tabla 4.2. Resultados con distinta densidad de mallado  $N = 51, 27$  y  $77$ . Se comparan los valores de  $N=51$  con  $N=27$  y  $77$ , en base al cálculo del error relativo correspondiente.

Parámetros del sistema modelado:  $b=1, P=1$ .

Como se puede observar en la Tabla 4.2, la diferencia entre  $N=27$  y  $N=51$  es considerable, llegando a alcanzar valores del 2.2%. Por contra, la diferencia entre  $N=77$  y  $N=51$  es inferior al 0.5% para todo el rango de  $\Omega$  analizado.

Al considerar que el tiempo de cálculo es altamente sensible a la obtención de los autovalores para cada interacción (y por ende, sensible a la densidad de malla utilizado), se busca una solución de compromiso para el número de puntos empleados para la discretización. Por ello, y a la vista de los resultados de la Tabla 4.2, se elige una malla con 51 puntos.

Por otro lado, también se destaca que la diferencia relativa de los valores del número de Rayleigh entre distintas densidades de malla, va en aumento con  $\Omega$ . Por ello, para rangos mayores de la velocidad angular adimensional, se debería considerar un aumento en el número de puntos de la malla.

#### 4.4. Variación de los resultados con el número de Prandtl

Con el objetivo de analizar el efecto de variar el número de Prandtl del sistema, se comparan las líneas de estabilidad neutral con  $P=0.7$ , 1 y 6. Se han escogido estos valores ya que son números de Prandtl típicos para el aire ( $P \approx 0.7$ ) y el agua ( $P \approx 6$ ).

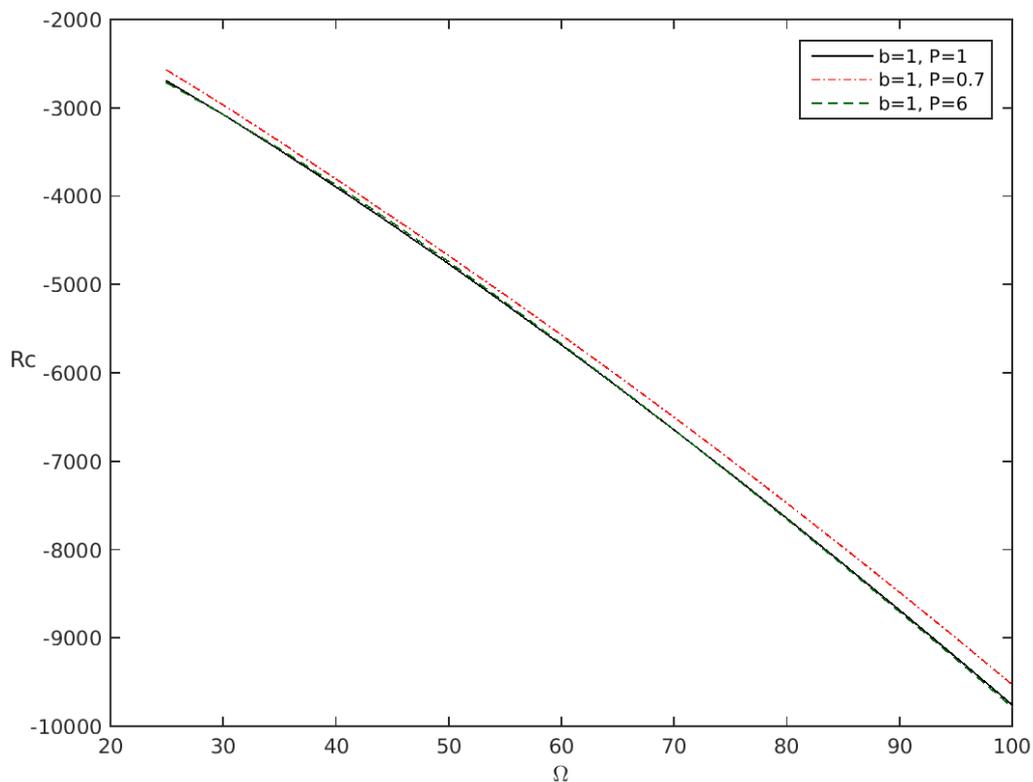


Figura 4.6. Comparación de la línea de estabilidad neutral con distintos valores del número de Prandtl, en particular, para  $P=0.7$ , 1 y 6. Parámetros del sistema modelado:  $b=1$ .

En la Figura (4.7) se observa que tanto para valores típicos de  $P$  para el aire como el agua, el comportamiento de la línea de estabilidad neutral es semejante. Además se observa que para valores menores de  $P$  el sistema se desestabiliza antes. Así, la diferencia de temperatura entre las paredes necesaria para que el sistema con aire sea inestable, es menor que en el caso del sistema con agua.

Por último, se observa cualitativamente que la diferencia entre la línea de estabilidad neutral para  $P=1$  y  $P=6$ , es casi despreciable. No siendo así entre la línea de estabilidad neutral para  $P=1$  y  $P=0.7$ . De este modo, se puede concluir que la línea de estabilidad neutral es más sensible a cambios entre valores de  $P$  menores a la unidad, que para cambios de  $P$  mayores a la unidad.

#### 4.5. Variación de los resultados con el número de Froude

Con el objetivo de analizar el efecto del número de Froude en el sistema, se comparan las líneas de estabilidad neutral con  $b=1$  y  $0.5$ . En la Figura (4.7) se puede observar que una reducción del 50% del número de Froude, y por ende, del efecto de las fuerzas de inercia frente a las fuerzas de gravedad que actúan sobre el fluido, apenas implica variaciones en la línea de estabilidad neutral.

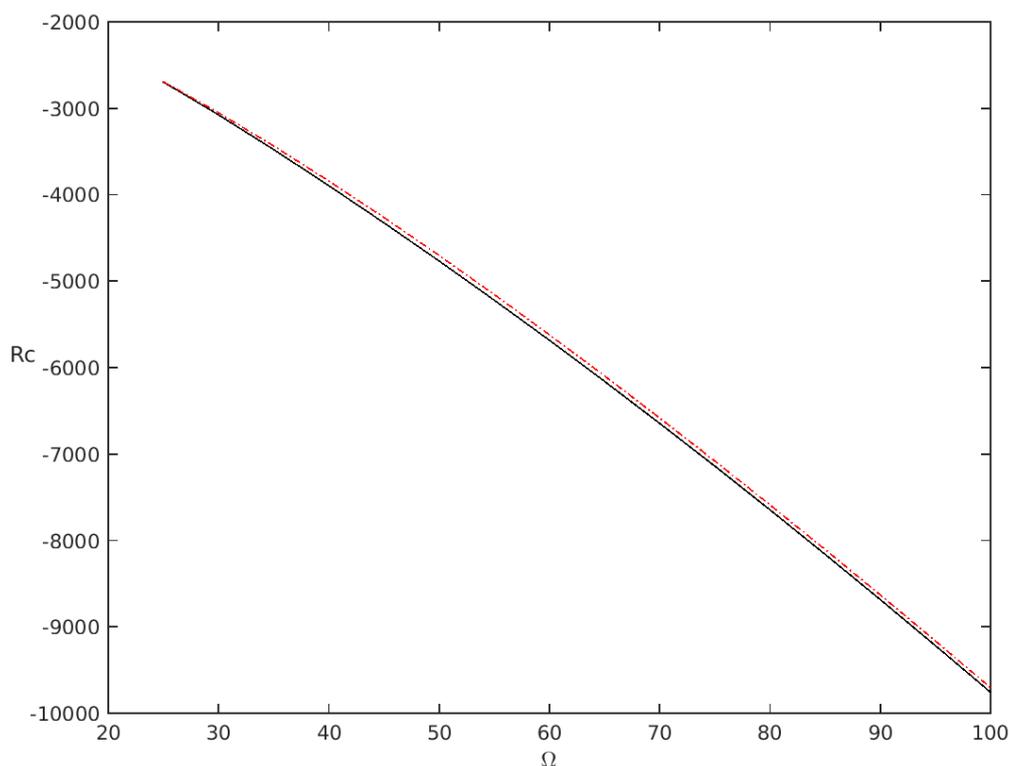


Figura 4.7. Comparación de la línea de estabilidad neutral con distintos valores del número de Froude, en particular, para  $b=0.5$  y  $1$ . Parámetros del sistema modelado:  $P=1$ .

De modo cuantitativo, la mayor diferencia relativa entre el número de Rayleigh crítico con  $b=1$  y  $0.5$ , a lo largo del dominio  $\Omega \in [25, 100]$ , es del 1.4%.

Por último, para dar una idea del orden de magnitud de  $b$ , se realiza la estimación de un valor de  $b$  característico. Por ejemplo, para el caso de una borrasca con los siguientes valores:

$$g=10\text{ m/s}^2 \ ; \ r_0=3\cdot 10^5\text{ m} \ ; \ v=10\text{ m/s} \ ; \ \Omega=v/r_0=10/3\cdot 10^5\approx 3.33\cdot 10^{-5} \quad (4.2)$$

resulta un número de Froude,

$$b=\frac{\Omega_D^2 \tilde{r}_0}{g}\approx 3.33\cdot 10^{-5} \quad (4.3)$$

mucho menor que la unidad.

#### 4.6. Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un análisis de estabilidad de un modelo de capa límite de Ekman, considerando un sistema viscoso e incompresible, bajo la aproximación de Boussinesq. El modelo se ha resuelto numéricamente, encontrando así valores de  $R_c$ ,  $\bar{k}_c$  en función de  $\Omega$ , para distintos valores de los parámetros  $b$ ,  $P$ .

Como era de esperar, dado que la rotación estabiliza el sistema, se ha encontrado que  $|R_c|(\Omega)$  es una función creciente. Lo cual significa que a mayor velocidad de rotación, más estable es el sistema frente a gradientes adversos de temperatura.

Por otro lado, se ha estudiado los cambios en la línea de estabilidad neutral con los parámetros del sistema: número de Froude  $b$ , y número de Prandtl  $P$ . En términos generales, las líneas de estabilidad neutral resultantes presentan un comportamiento cualitativo semejante para los distintos valores de  $b$  y  $P$  analizados. Causando sólo ligeras variaciones en el inicio de la inestabilidad.

## Apéndice I: Solución analítica del estado base

En base a lo desarrollado en el capítulo 2.2.. Estado básico estacionario, la solución analítica del estado base se describe como,

$$\begin{aligned} \text{Componente } \hat{i} &\rightarrow -2\Omega U_{0y} = \frac{d^2 U_{0x}}{dz^2} \\ \text{Componente } \hat{j} &\rightarrow 2\Omega U_{0x} = \frac{d^2 U_{0y}}{dz^2} + \frac{Rb}{P} z \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Condiciones de contorno} \rightarrow U_{0x} = U_{0y} = 0 \quad ; \quad \text{en } z = \pm 1/2$$

Con el objetivo de facilitar el manejo de las ecuaciones se realiza el siguiente cambio de notación,

$$u \equiv U_{0x} \quad ; \quad v \equiv U_{0y} \quad ; \quad \lambda \equiv (Rb)/P \quad (\text{II.2})$$

resultando,

$$\begin{aligned} \text{Componente } \hat{i} \quad , \quad & \frac{d^2 u}{dz^2} = -2\Omega v \\ \text{Componente } \hat{j} \quad , \quad & \frac{d^2 v}{dz^2} = 2\Omega u - \lambda z \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

$$\text{Condiciones de contorno, } u = v = 0 \quad ; \quad \text{en } z = \pm 1/2$$

A continuación, se realiza el siguiente cambio de funciones incógnita,

$$u = w + \frac{\lambda}{2\Omega} z \quad ; \quad v = v \quad (\text{II.4})$$

resultando,

Componente  $\hat{i}$  ,

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -2\Omega v$$

Componente  $\hat{j}$  ,

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = 2\Omega w$$

(II.5)

Condiciones de contorno:

$$* w = -\lambda/(4\Omega) \text{ en } z=1/2 \quad ; \quad w = \lambda/(4\Omega) \text{ en } z=-1/2$$

$$* v = 0 \text{ en } z = \pm 1/2$$

Para obtener una ecuación con una sola variable, se deriva dos veces la componente  $\bar{j}$ , y se sustituye en la componente  $\bar{i}$ ,

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = -4\Omega^2 v \quad (II.6)$$

cuya solución es,

$$v(z) = c_1 \sinh(\sqrt{\Omega}(1+i)z) + c_2 \cosh(\sqrt{\Omega}(1+i)z) \quad (II.7)$$

Y en base a la componente  $\bar{j}$ , se obtiene la solución de  $w(z)$ ,

$$w(z) = i[c_1 \sinh(\sqrt{\Omega}(1+i)z) + c_2 \cosh(\sqrt{\Omega}(1+i)z)] \quad (II.8)$$

El siguiente paso es el cálculo de las constantes,  $c_1$  y  $c_2$ , a partir de las condiciones de contorno. Esto es,

$$\begin{aligned} w(1/2) = -w(-1/2) &\rightarrow i[c_1 \sinh(\sqrt{\Omega}(1+i)/2) + c_2 \cosh(\sqrt{\Omega}(1+i)/2)] = \\ &= -i[-c_1 \sinh(\sqrt{\Omega}(1+i)/2) + c_2 \cosh(\sqrt{\Omega}(1+i)/2)] \rightarrow \\ &\rightarrow c_2 = 0 \end{aligned} \quad (II.9)$$

y,

$$\begin{aligned} w(1/2) = -\lambda/(4\Omega) &\rightarrow i c_1 \sinh(\sqrt{\Omega}(1+i)/2) = -\lambda/(4\Omega) \rightarrow \\ &\rightarrow c_1 = \frac{i\lambda}{4\Omega \sinh(\sqrt{\Omega}(1+i)/2)} \end{aligned} \quad (II.10)$$

Seguido, se reescribe la solución con las funciones incógnita iniciales,

$$u(z) = \frac{\lambda}{2\Omega} z - \frac{\lambda}{4\Omega} \frac{\sinh(\sqrt{\Omega}(1+i)z)}{\sinh(\sqrt{\Omega}(1+i)/2)}$$

$$v(z) = \frac{i\lambda}{4\Omega} \frac{\sinh(\sqrt{\Omega}(1+i)z)}{\sinh(\sqrt{\Omega}(1+i)/2)}$$
(II.11)

Finalmente, se consideran las siguientes relaciones trigonométricas,

$$C \sinh((1+i)x) = C \frac{1}{2} (e^{(1+i)x} - e^{-(1+i)x}) = C \frac{1}{2} [e^x (\cos x + i \sin x) - e^{-x} (\cos x - i \sin x)] =$$

$$= i C \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) + C \cdot \cos x \cdot \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = i C \cdot \sin x \cdot \cosh x + C \cdot \cos x \cdot \sinh x$$
(II.12)

que permiten transformar la solución (II.11) en,

$$U_{0,x} = \frac{Rb z}{2P\Omega} - A \sin \sqrt{\Omega} z \cosh \sqrt{\Omega} z + B \cos \sqrt{\Omega} z \sinh \sqrt{\Omega} z$$

$$U_{0,y} = A \cos \sqrt{\Omega} z \sinh \sqrt{\Omega} z + B \sin \sqrt{\Omega} z \cosh \sqrt{\Omega} z$$
(II.13)

donde, las constantes  $A$  y  $B$ , se determinan con las relaciones de las condiciones de contorno,

$$A [\sin \sqrt{\Omega/4} \cosh \sqrt{\Omega/4}]^{-1} = -B [\cos \sqrt{\Omega/4} \sinh \sqrt{\Omega/4}]^{-1} =$$

$$= \frac{Rb}{4\Omega P} [\sin^2 \sqrt{\Omega/4} \cosh^2 \sqrt{\Omega/4} + \cos^2 \sqrt{\Omega/4} \sinh^2 \sqrt{\Omega/4}]^{-1}$$
(II.14)



## Bibliografía

- [1] E. Crespo; *Inestabilidades y Turbulencia*; UNED, curso 2013/14
- [2] D. E. Stevens, F. X. Crum; *Meteorology, Dynamic (Troposphere)*; Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition), Volume 9
- [3] S. Chandrasekhar; *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*; Oxford University Press (1961)
- [4] M. Withalm, N. P. Hoffmann; *Influence of Thermal Stratification on the Stability of Ekman-Couette-Flow*; PAMM 12/2011
- [5] B. H. Hahn & D.T. Valentine; *Essential Matlab for Engineers and Scientists*; Elsevier, Fifth Edition, 2013.