



# TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER EN FÍSICA DE SISTEMAS COMPLEJOS

---

ESTUDIO DE REDES DE RESISTENCIAS  
ALEATORIAS (RRN) COMO EQUIVALENTE FÍSICO  
DEL MODELO DE PERCOLACIÓN A PRIMER PASO  
(FPP) PARA MÉTRICAS ALEATORIAS DISCRETAS

---

JOSÉ IGNACIO JIMÉNEZ MAROTO

Tutorizado por: *Prof. Pedro Córdoba Torres*

Curso Académico: 2021/2022

## **Agradecimientos**

Este Trabajo de Fin de Máster querría dedicárselo a mi familia, por el apoyo y ánimo que he recibido en todo momento. También me gustaría agradecer al profesor D. Pedro Córdoba, de la Facultad de Ciencias de la UNED, su dedicación e interés para que este TFM saliera adelante, y a todos los profesores que he tenido a lo largo del Máster por ayudarme a entender un poquito los sistemas complejos.

## Resumen

Durante los últimos años se ha producido un gran interés en el estudio de espacios topológicos dotados de una métrica aleatoria como modelos de sistemas desordenados. En estos espacios, objetos como geodésicas y bolas presentan geometrías estocásticas distintas a la geometría euclídea habitual (rectas y circunferencias), y sus propiedades estadísticas siguen ciertas leyes de escala que permiten relacionar estos modelos con las clases de universalidad de los procesos de crecimiento. El modelo discreto más simple de métrica aleatoria es la percolación a primer paso (en inglés *first-passage percolation*, FPP), propuesto inicialmente para simular el transporte de un fluido a través de un medio poroso, y que parece pertenecer a la célebre clase de universalidad de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ). El trabajo desarrollado en este TFM consta de dos partes fundamentales. En la primera de ellas hemos reproducido, mediante simulaciones computacionales, algunos de los resultados más relevantes de la literatura sobre el modelo FPP. Estos resultados muestran que el comportamiento asintótico del modelo pertenece a la clase de universalidad de KPZ. En la segunda parte hemos estudiado la equivalencia entre el modelo FPP y las redes aleatorias de resistencias (en inglés *random resistor networks*, RRN). La razón principal es que estas redes han sido utilizadas con mucha frecuencia para simular el transporte en medios desordenados, como por ejemplo el flujo en medios porosos con aplicaciones en la industria de extracción del petróleo, o la conductividad de medios semiconductores o medios mixtos metal-aislante. Además, se ha observado que, en el límite de ruido fuerte, la principal línea de corriente entre dos nodos coincide con el camino de mínima resistencia, es decir, con la geodésica del modelo FPP equivalente. Por eso nos hemos centrado en el régimen de ruido débil, mucho menos estudiado. La principal novedad de este trabajo es que para estudiar esta equivalencia, además del camino óptimo ( $k=1$ ), hemos considerado las sucesivas  $k$ -geodésicas, es decir, los siguientes  $k$ -ésimos caminos mínimos, lo que nos ha llevado a generalizar el modelo FPP y definir el modelo KPP. Por último, hemos propuesto una interpretación termodinámica del problema basándonos en el formalismo del colectivo canónico.

## Índice

1. Introducción.....	5
1.1 Geometría en métricas aleatorias.....	6
1.2 Clases de universalidad. Universalidad de Kardar-Parisi-Zhang.....	8
2. Modelo de Percolación a Primer Paso (FPP).....	10
2.1 Breve repaso sobre la teoría de percolación.....	11
2.2 Descripción del modelo FPP .....	11
2.3 Fluctuaciones en el tiempo mínimo de llegada .....	14
2.3.1 Escalado sobre los ejes.....	14
2.3.2 Escalado sobre las diagonales .....	17
2.4 Desviación lateral de las geodésicas .....	18
2.4.1 Escalado sobre los ejes.....	18
2.4.2 Escalado sobre las diagonales .....	20
2.5 Modelo KPP ( $k$ -geodésicas). Algoritmo de Yen.....	22
3. Redes aleatorias de resistencias.....	23
3.1 Descripción del modelo RRN.....	24
3.2 Línea principal de corriente: <i>Particle Launching Algorithm</i> (PLA) ..	26
3.3 Objetivos.....	27
4. Resultados.....	27
4.1 Escalado de las líneas principales de corriente .....	27
4.1.1 Escalado sobre los ejes.....	28
4.1.2 Escalado sobre las diagonales .....	32
4.2 Distribución de las líneas principales de corriente .....	35
4.3 Desorden exponencial .....	42
5. Conclusiones y líneas de trabajo futuro.....	47
6. Referencias bibliográficas.....	50

## 1. Introducción

En general, se denominan medios desordenados o aleatorios a aquellos sistemas espacialmente extensos en los que las magnitudes de interés, que pueden tener distinta naturaleza (física, química, biológica, ...), están distribuidas en el espacio de forma aleatoria (debido, por ejemplo, a que existen patrones de interacción heterogéneos entre sus componentes o a fluctuaciones térmicas o cuánticas). Estos medios son ubicuos en la naturaleza, manifestándose en disciplinas tan diferentes como la ciencia de la computación, la ciencia de la información o la neurociencia. En el ámbito de la física son de especial interés en física de la materia condensada. Como ejemplos podemos citar: vidrios de espín, semiconductores magnéticos diluidos (DMS), vidrios estructurales, sistemas cuánticos desordenados, etc. También se ha aplicado en física de polímeros, membranas u otras interfaces fluctuantes.

Cuando una interfase se propaga (“crece”) en un medio desordenado, la naturaleza desordenada del medio provoca fluctuaciones aleatorias en la evolución de la interfase que en la mayoría de los casos conducen a un crecimiento lejos del equilibrio. Los aspectos fundamentales de esta dinámica del crecimiento son descritos por la teoría cinética de la rugosidad (*kinetic roughening*), en la que el ruido juega un papel principal [1]. El formalismo matemático de la teoría se basa en la teoría del escalado dinámico, desarrollado por primera vez por Family-Vicsek [2], donde las fluctuaciones de la dinámica y de la geometría de las interfaces se describen mediante leyes de potencias, de la forma  $y(x) = cx^a$ , las cuales introducen un conjunto de exponentes de escala o exponentes críticos (en analogía con los exponentes críticos de las transiciones de fase en sistemas en equilibrio) [3]. En general, el término crecimiento hace referencia a una amplia variedad de procesos, pudiéndose distinguir entre: a) procesos de crecimiento/desintegración de fase, y b) procesos de propagación de interfaces.

### a) Procesos de crecimiento/desintegración de fase

Son aquellos en los que una fase, por ejemplo, un material sólido, crece o se desintegra debido al incremento o pérdida de sus constituyentes. Ejemplos son: el crecimiento de películas delgadas de cristales por deposición de vapor como la epitaxia molecular (*molecular beam epitaxy*, MBE), la deposición mediante bombardeo con iones (*ion beam sputter deposition*), la formación de nanoestructuras mediante procesos de nucleación, el crecimiento de películas finas de metal, aleaciones o capas de óxidos por electrodeposición, o el crecimiento de bacterias. En el caso de procesos de desintegración de fase podemos citar la erosión (o *sputtering*), el *etching*, la disolución metálica y la corrosión, entre otros.

### b) Procesos de propagación de interfaces

En ellos, una determinada fase se propaga a través de un medio generando una interfase que evoluciona en el tiempo. Como ejemplos, podemos citar, el flujo de fluidos a través de medios porosos, el flujo de campos en medios desordenados (por ejemplo, el del campo magnético en semiconductores con impurezas), el flujo de electricidad en medios aleatorios, la propagación de fracturas o grietas, la propagación de un frente de llamas o de incendios en bosques, la difusión de noticias en redes sociales o de comunicación, etc.

No obstante, hay sistemas que pueden ser interpretados de las dos formas, por lo que esta clasificación no hay que considerarla rigurosa. Por ejemplo, el crecimiento de colonias de bacterias o agregados celulares puede ser visto como la propagación de la colonia en un medio con una distribución de nutrientes.

Los mecanismos que participan en el crecimiento de una interfase están sujetos a fluctuaciones aleatorias o ruido de diferente naturaleza. Puede distinguirse dos tipos de ruido:

- 1) Ruido temporal, que depende del tiempo, con una naturaleza digamos “térmica”, y que está mucho más relacionado con los procesos de crecimiento/desintegración. Por ejemplo, durante los procesos de deposición, el flujo de partículas no es uniforme y los átomos alcanzan la superficie en posiciones aleatorias y en intervalos de tiempo también aleatorios. Una vez depositados pueden difundirse sobre la superficie en busca de posiciones energéticamente más estables siguiendo trayectorias brownianas, también aleatorias.
- 2) Ruido congelado (*quenched noise*) relacionado con la naturaleza desordenada del medio, siendo determinante en la dinámica de la propagación de las interfases. En este caso, las propiedades del medio (por ejemplo, su porosidad) varían aleatoriamente provocando que el avance de la interfase se vea favorecida en unos puntos con respecto a otros de forma aleatoria, pudiendo dar lugar a fenómenos críticos.

Por supuesto, en un mismo proceso pueden darse las dos clases de ruido, las cuales pueden tener diferentes propiedades: correlacionado/no-correlacionado, conservativo/no conservativo, tipo gaussiano o tipo ley de potencias, etc.

Como consecuencia del ruido aparecen fluctuaciones y las superficies adoptan formas irregulares con geometría fractal [3]. La rugosidad es el resultado de la interacción de todos los procesos que tienen lugar en la interfase. Algunos contribuyen positivamente a su desarrollo, como las fluctuaciones en el campo que conduce el crecimiento o las heterogeneidades del medio, pero existen también mecanismos de relajación que se oponen al desarrollo de la rugosidad como, por ejemplo, la difusión superficial de las partículas buscando los estados de mínima energía. El resultado de esta competencia determina la geometría final de la superficie. Hablaremos de crecimiento lejos del equilibrio cuando la evolución del sistema no posibilita que la superficie se reestructure en busca del estado de mínima energía. En general, un sistema complejo evoluciona lejos del equilibrio cuando su comportamiento está dominado por las fluctuaciones.

## 1.1 Geometría en métricas aleatorias

En el plano euclídeo  $R^2$ , la distancia usual entre dos puntos  $x$  e  $y$  es  $d_E$ . Si definimos un nuevo espacio (*manifold* o variedad)  $M$  dotado de una geometría (de Riemann) cuyo tensor métrico  $g$  es de clase  $C^\infty$ , la función distancia entre ambos puntos sería ahora  $d_g$ . Suponemos que este nuevo campo métrico cumple las siguientes condiciones:

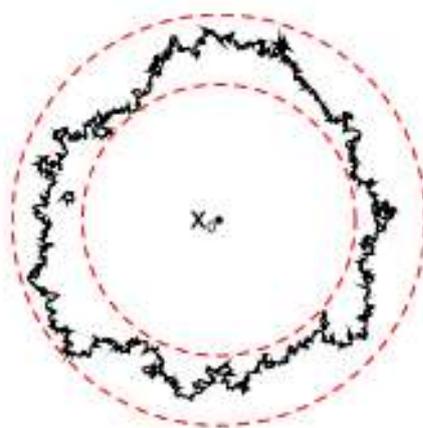
- Independencia en la distancia: los tensores métricos en cualesquiera dos puntos son independientes.
- Homogeneidad e isotropía estadísticas: la función de distribución de probabilidad para los valores del tensor métrico es invariante bajo traslaciones y rotaciones en el plano.
- Suavidad: el tensor métrico  $g$  es  $C^\infty$ .

Se trata, por tanto, de un campo con métrica aleatoria. Una métrica de Riemann con tensor métrico  $g$  define, en cada punto  $x \in M$ , una norma sobre el subespacio tangente  $T$ , dada por  $\|v\|_g \equiv \sqrt{\langle v, g(x)v \rangle}$ , donde  $v \in T$ . Para una curva  $\gamma$  que conecta dos puntos  $x$  e  $y \in M$ , se define su longitud de Riemann como:

$$R(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}\|_g dt \tag{1.1}$$

donde  $\dot{\gamma} \in T$ . Se define la función distancia  $d_g(x, y) \equiv \inf_{\gamma} R(\gamma)$ , que se obtiene sobre todas las curvas suaves que conectan  $x$  e  $y$  [4]. El camino recorrido para obtener la distancia mínima entre dos puntos se denomina *geodésica*. La curva geodésica se puede obtener también a través del cálculo del tiempo mínimo empleado en recorrer la distancia desde el punto  $x$  al punto  $y$  con velocidad unitaria.

Por otro lado, elijamos un punto fijo  $x_0$  (p. ej. el origen) y consideremos el conjunto de puntos  $B_{x_0}(r) = \{x / d_g(x, x_0) \leq r\}$ . Esta “bola” de radio  $r$  puede no ser topológicamente equivalente a la bola euclídea, ya que no necesita ser simplemente conexa, esto es, su frontera  $\partial B_{x_0}(r)$  dispondrá, en general, de una serie de elementos en el plano euclídeo: un “frente” irregular exterior y una serie de “burbujas” en su interior (Fig. 1.1). En el plano euclídeo, esta frontera  $\partial B_{x_0}(r)$  se sitúa entre dos círculos centrados en  $x_0$ , cuyos radios crecen linealmente con  $r$ . La interfase será el frente exterior [1].



**Fig. 1.1.** Bola típica  $B_{x_0}(r)$  de radio  $r$  alrededor de un punto  $x_0$ , obtenida en una métrica aleatoria con las propiedades descritas en el texto. La frontera  $B_{x_0}(r)$  (líneas sólidas) puede contener diferentes componentes. La frontera está encerrada entre dos círculos (líneas discontinuas), cuyos radios crecen linealmente con  $r$  [1].

Si consideramos 2 puntos separados en  $R^2$  por una distancia  $L$ , la geodésica (curva mínima) que los une en una métrica aleatoria puede ser vista como una curva aleatoria, desde un punto de vista euclídeo. Su máxima desviación con respecto a la línea recta euclídea que los une crecerá como  $L^\zeta$ . Si, por otro lado, en esta métrica aleatoria, obtenemos la bola de radio  $R$  alrededor de cualquier punto, desde el punto de vista euclídeo se verá también una curva aleatoria. Para radios  $R$  grandes, la forma de esta curva se aproximará a una circunferencia, cuyo radio es proporcional a  $R$ . Se conjetura que se situará dentro de un anillo cuya anchura crece como  $R^\chi$  [2].

Los exponentes  $\zeta$  y  $\chi$  para las fluctuaciones de las geodésicas y las bolas, respectivamente, denotan una cierta naturaleza fractal universal de líneas rectas y circunferencias en una geometría aleatoria. Los valores de los exponentes de escala obtenidos en estas métricas aleatorias se ajustan a la *clase de universalidad de Kardar-Parisi-Zhang* (KPZ) [2].

## 1.2 Clases de universalidad. Universalidad de Kardar-Parisi-Zhang

Uno de los grandes éxitos de la Mecánica Estadística moderna es el concepto de universalidad. Este concepto describe el hecho de que multitud de sistemas complejos de diferente naturaleza comparten propiedades estadísticas que son universales. Estas propiedades se revelan en el límite termodinámico del continuo, es decir, en grandes escalas tanto temporales como espaciales, y son independientes de los detalles microscópicos de la dinámica y de la geometría del sistema. Dicho de otro modo, sólo unos pocos mecanismos determinan el comportamiento de escala (a gran escala) de los procesos. Por lo tanto, si obtenemos la misma estadística asintótica en procesos diferentes significa que comparte los mismos mecanismos fundamentales. Esto explica que se obtengan los mismos exponentes de escala en, por ejemplo, experimentos de percolación con diferentes tipos de fluido y medio, y que estos coincidan con los obtenidos en la propagación de un frente de llama. El análisis de escala y la estadística de las fluctuaciones nos permiten establecer una clasificación de los sistemas en *clases de universalidad*.

El concepto de universalidad se desarrolló a partir del estudio de fenómenos críticos y las transiciones de fase. Cerca de los puntos críticos, las variables de interés tienden a cero o infinito siguiendo leyes de potencia que reflejan la invariancia de escala intrínseca a la criticalidad del fenómeno. Estas leyes de potencia introducen unos exponentes críticos que sólo dependen de la dimensión del sistema y no de los detalles microscópicos como, por ejemplo, la geometría de la red. Las transiciones de fase térmicas como las que experimentan los materiales ferromagnéticos (modelo de Ising) o la transición de fase en la teoría de la percolación son ejemplos de universalidades. Casi todas las transiciones de fase pueden ser descritas mediante unas pocas clases de universalidad.

Una de las universalidades más estudiadas es la de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ). Fue introducida en 1986 para explicar el escalado dinámico del crecimiento de interfases y hoy se ha convertido en el principal marco de estudio de una gran cantidad de sistemas de no-equilibrio fuertemente correlacionados, describiendo sus propiedades a gran escala (invariancia en la escala espacio-temporal). Como ejemplos podemos citar el crecimiento de colonias de bacterias, cristales líquidos turbulentos, osciladores no-lineales clásicos, hidrodinámica estocástica, agregación coloidal, geometría aleatoria, ondas en sistemas de

reacción-difusión, fluidos polares activos incompresibles o entrelazamiento cuántico.

La universalidad de KPZ es descrita mediante la ecuación diferencial estocástica (ecuación KPZ) [5]:

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = F + v \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(\vec{x}, t) \quad (1.2)$$

Esta ecuación describe la evolución temporal del campo  $h(\vec{x}, t)$  dado por la altura de la superficie en la posición  $\vec{x}$  del sustrato, de dimensión  $D$ , sobre el que se produce el crecimiento en el tiempo  $t$ .  $F$  es el flujo medio de partículas (y responsable del crecimiento irreversible), el cual al no depender de  $\vec{x}$  ni de  $t$ , puede eliminarse si hacemos el cambio de variable  $h \rightarrow h + Ft$ , quedando, por tanto:

$$\frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = v \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(\vec{x}, t) \quad (1.3)$$

Como la posición  $\vec{x}$  varía de forma continua,  $h(\vec{x}, t)$  describe la interfase en escalas mucho mayores que la unidad característica de red. La competencia entre los distintos términos determina la evolución de la altura.

El término  $v\nabla^2 h$ , con el coeficiente de tensión superficial  $v$ , representa un mecanismo de relajación superficial. El efecto del laplaciano es suavizar el perfil de la superficie manteniendo constante el valor medio de  $h$  [6].

$\eta(\vec{x}, t)$  es un término estocástico de ruido que refleja las fluctuaciones aleatorias en el proceso de deposición. Debido al ruido  $\eta(\vec{x}, t)$ , en cada posición  $\vec{x}$  e instante  $t$ , la evolución de  $h(\vec{x}, t)$  es aleatoria.

Por último, el término no-lineal  $\lambda/2 (\nabla h)^2$  representa un mecanismo de crecimiento lateral en la dirección perpendicular a la superficie, y es el que acaba dominando el comportamiento de escala asintótico ( $t, \vec{x} \rightarrow \infty$ ) de la interfase. La ecuación (1.3) sin este término no lineal se denomina *ecuación (y universalidad) de Edwards-Wilkinson (EW)* [6]. En este caso, si además no hubiese flujo ( $F = 0$ ), la ecuación describiría una interfase en el equilibrio.

La ecuación de KPZ es la ecuación más simple compatible con las siguientes simetrías fundamentales del crecimiento:

- Invariancia bajo traslaciones en el tiempo:  $t \rightarrow t + \delta t$ .
- Invariancia bajo traslaciones en la dirección del crecimiento:  $h \rightarrow h + \delta h$ .
- Invariancia bajo traslaciones en la dirección perpendicular al crecimiento:  $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \delta \vec{x}$ .
- Invariancia bajo rotaciones e inversiones ( $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ ) alrededor de la dirección de crecimiento.

Hay una simetría fundamental que no cumple la ecuación de KPZ, y es la denominada simetría *up/down* para la altura:  $h \rightarrow -h$ . Es decir, las fluctuaciones no tienen por qué ser simétricas con respecto a la altura media de la interfase. El origen de la ruptura de esta simetría es la fuerza  $F$  causante del crecimiento en la dirección perpendicular a la superficie, y que introduce, por tanto, una dirección privilegiada en el sistema. La existencia de esta fuerza es una condición necesaria pero no suficiente para la ruptura. En el caso de la ecuación de KPZ es el crecimiento lateral de la superficie lo que provoca dicha ruptura. La ruptura de esta simetría está íntimamente relacionada con la condición de no-equilibrio de la interfase y permite la aparición del término no lineal.

Estudios recientes han demostrado que variedades de Riemann bidimensionales dotadas de un campo métrico aleatorio dado por una perturbación de corto-alcance de la métrica plana, muestran propiedades fractales universales. De este modo, las líneas rectas y las circunferencias correspondientes a geodésicas y bolas en una métrica plana, adquieren una geometría irregular y su rugosidad sigue las leyes de escala de la universalidad de KPZ [1, 7]. Los resultados concretos son:

- La anchura de la superficie de la bola de radio  $R$  o fluctuación radial sigue un escalado del tipo  $W \approx R^\beta$ , donde  $\beta = 1/3$  es el exponente KPZ de crecimiento y, por otro lado, la desviación lateral de una geodésica entre dos puntos cuya distancia en el espacio euclídeo es  $L$  muestra un escalado de la forma  $L^{1/z}$ , en la que  $z = 3/2$  es el exponente KPZ dinámico. Se ha demostrado que bolas de dimensiones superiores también siguen el escalado KPZ con exponentes diferentes, pero que cumplen la conocida relación de KPZ [7],  $z(1+\beta) = 2$ .
- Las fluctuaciones radiales en cualquier punto de la bola siguen la función de distribución de probabilidad de Tracy-Widom asociada al *Gaussian unitary ensemble* (TW-GUE) de matrices aleatorias.
- Antes de alcanzar el comportamiento KPZ, el sistema explora un régimen transitorio: SAW (*SelfAvoiding Walk*) ó EW (*Edwards-Wilkinson*) para geometría de banda o circular, respectivamente [2].

## 2. Modelo de Percolación a Primer Paso (FPP)

La principal propiedad que distingue a los medios estudiados en este trabajo es que las fluctuaciones (ruido) están inducidas por la propia métrica del espacio (ruido congelado, en inglés *quenched noise*), por lo que son independientes del tiempo. Hablamos, por tanto, de espacios con métricas aleatorias. En estos medios, el crecimiento o propagación de interfaces evoluciona generalmente en condiciones de no-equilibrio (régimen dominado por las fluctuaciones). Su dinámica y geometría apenas han sido estudiadas.

Una versión discreta (y muy idealizada) de estas métricas aleatorias está dada por el modelo de *Percolación a Primer Paso* (First-Passage Percolation, FPP).

En primer lugar, exponemos brevemente las características básicas de la teoría de percolación, en la que se basa el modelo FPP.

## 2.1 Breve repaso sobre la teoría de percolación

La percolación es un modelo paradigmático de la física estadística que explica las transiciones de fase de muchos sistemas físicos desordenados, no resueltos exactamente. Se basa en el concepto de clúster en una red discreta, y estudia la estadística y la geometría de estos clústeres, generalmente, de naturaleza fractal. Además, el modelo tiene su propia universalidad [8].

En su definición básica (*site-percolation*), el modelo de percolación consiste en una red regular de nodos que pueden estar ocupados con cierta probabilidad  $p$  (no ocupados, con probabilidad  $1-p$ ). Existe una variante principal denominada *bond-percolation* en la que estas probabilidades se aplican a los enlaces entre nodos vecinos, que pueden estar abiertos o cerrados con esa misma probabilidad. Para una red finita,  $L < \infty$ , si la probabilidad de ocupación  $p$  es pequeña, existen escasas posibilidades de que dos nodos situados en bordes opuestos estén conectados. Si  $p \sim 1$ , las posibilidades son altas de que aparezca un clúster de percolación que conecte ambos nodos a través de la red. En estas condiciones, debe existir un umbral de percolación o probabilidad crítica,  $p_c$ , en la cual aparecerá un clúster de percolación por primera vez. Estos conceptos pueden extenderse a una red infinita. La concentración  $p_c$  es independiente del tamaño de la red, y está tabulada, dependiendo únicamente del tipo de red y de su dimensión espacial. Se demuestra [8], entre otras propiedades, que existe una longitud característica de correlación  $\xi$ , la cual escala como  $1/|p_c - p|^{\nu}$  cuando  $p \rightarrow p_c$ , por lo que diverge cuando  $p = p_c$ . Así, si [8, 9]:

$L \ll \xi$  el sistema percola, por lo que las propiedades cambian drásticamente, adoptando una geometría fractal.

$L \gg \xi$  el sistema se comporta como lo hace habitualmente en un espacio euclídeo.

En el punto de transición de fase  $p = p_c$ , el sistema siempre percolaría, con independencia del tamaño de la red  $L$ .

## 2.2 Descripción del modelo FPP

El modelo FPP en dos dimensiones fue inicialmente propuesto por Hammersly y Welsh en 1965 [1, 10] para estudiar el flujo de un fluido en un medio poroso. Actualmente se ha convertido en un modelo paradigmático en la teoría matemática de la probabilidad. Su desarrollo ha tenido un papel importante en el estudio de sistemas con ruido congelado, con aplicación en áreas tan diversas como el magnetismo, las comunicaciones inalámbricas, la competición ecológica o el alineamiento secuencial en biología molecular [7].

Básicamente, el modelo consiste en una red discreta en la que a cada enlace entre nodos vecinos se le asocia un tiempo de paso aleatorio (o tiempo de enlace). Los tiempos de paso son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una cierta distribución de probabilidad, cuya densidad de probabilidad llamaremos  $f(t)$  y cuya función de distribución acumulada es  $F(t)$ . De este modo puede definirse el tiempo mínimo de llegada  $T(\vec{x})$ , desde el nodo  $\vec{x}_0$  al nodo  $\vec{x}$ , a través de los nodos de la red, como:

$$T(\vec{x}) = \min_{m, \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m-1}\}} \sum_{i=1}^m t(\vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i) \quad (2.1)$$

donde se asume que  $\vec{x}_m = \vec{x}$  y  $t(\vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i)$  es el tiempo de paso entre los nodos  $\vec{x}_{i-1}$  y  $\vec{x}_i$ ; si los nodos  $x$  e  $y$  no son vecinos, entonces  $t(\vec{x}, \vec{y}) = \infty$ .

Para esta distribución de probabilidad, el valor medio  $\langle t \rangle$  y la varianza  $s^2$  del tiempo de paso son:

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad y \quad s^2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 \quad (2.2)$$

Para que pueda definirse una operación *distancia* entre dos nodos cualesquiera de la red (y, por tanto, una métrica), a partir del tiempo mínimo de llegada, nuestra distribución debe cumplir que  $F(0) = 0$ , para que los tiempos de enlace sean siempre positivos y mayores que cero. En estas condiciones, el tiempo mínimo de llegada cumple con todas las propiedades necesarias para dotar a nuestro espacio de una topología estocástica. El camino de tiempo mínimo (o camino óptimo) será la geodésica que une los dos puntos. Como los tiempos de enlace fluctúan de forma independiente, entonces los tiempos de llegada también fluctuarán. De hecho, un pequeño cambio en los tiempos de enlace puede originar un cambio grande en el camino de tiempo mínimo. Como veremos, esta es una de las propiedades del ruido fuerte [11, 12]. De este modo, las estadísticas de los caminos mínimos y de los tiempos de llegada mínimos están fuertemente ligadas [7].

Puede definirse también el concepto de bola de radio  $T$  alrededor de cualquier nodo,  $B(T)$ , como el conjunto de puntos que pueden ser alcanzados desde ese nodo en un tiempo mínimo menor que  $T$  y cuya superficie o interfase presentará una cierta rugosidad. Para obtener las propiedades estadísticas (media y varianza) de observables, como el tiempo mínimo de llegada, es necesario promediar sobre distintas realizaciones del ruido.

Se ha demostrado [7] que el modelo FPP en redes planas, independientemente de su estructura de nodos (regular o aleatoria) y de la distribución empleada en la asignación de tiempos de enlace, evoluciona asintóticamente dentro de la clase de universalidad de KPZ. Además, en condiciones de ruido débil se ha observado un régimen preasintótico (de tipo gaussiano), en el que la geodésica está dada por la línea euclídea, ya que aún no se ha manifestado el crecimiento lateral [7]. El cambio de régimen se produce en la distancia de crossover o distancia crítica,  $d_c$ .

En particular, cuando la red es cuadrada, en [7] se comprueba que el régimen preasintótico se manifiesta a lo largo de los ejes y, sin embargo, a lo largo de las diagonales el régimen preasintótico casi desaparece. Esta diferencia de comportamiento se debe a que la geodésica a lo largo de la diagonal está degenerada si consideramos el caso uniforme homogéneo ( $s^2=0$ , donde todos los tiempos de enlace son iguales) que tomamos como referencia. Esta propiedad depende de la dirección considerada en la red y se manifiesta cuando entre dos nodos existe un número de caminos diferentes con el mismo tiempo de llegada mínimo. En cambio, a lo largo del eje no existe tal degeneración y el camino óptimo es único. Cuando  $s^2$  es positivo pero muy pequeño, a distancias cortas el camino óptimo está muy ligado al eje, hasta que para distancias por encima de  $d_c$ , la amplitud del desorden hace irrelevantes las ligaduras geométricas de la red y permite a las geodésicas explorar libremente el espacio.

Nuestro objetivo, en primer lugar, es verificar este comportamiento de las

fluctuaciones del tiempo mínimo de llegada a cada nodo desde el nodo central, y de la desviación lateral de las geodésicas, en función de la distancia a dichos nodos. Debido a que, como hemos indicado en el apartado 1.2 ó se demuestra en la referencia [7], el comportamiento asintótico hacia la universalidad de KPZ es independiente de la estructura de nodos, utilizaremos únicamente redes cuadradas, ya que permiten la simulación de un número elevado de realizaciones del ruido usando redes grandes.

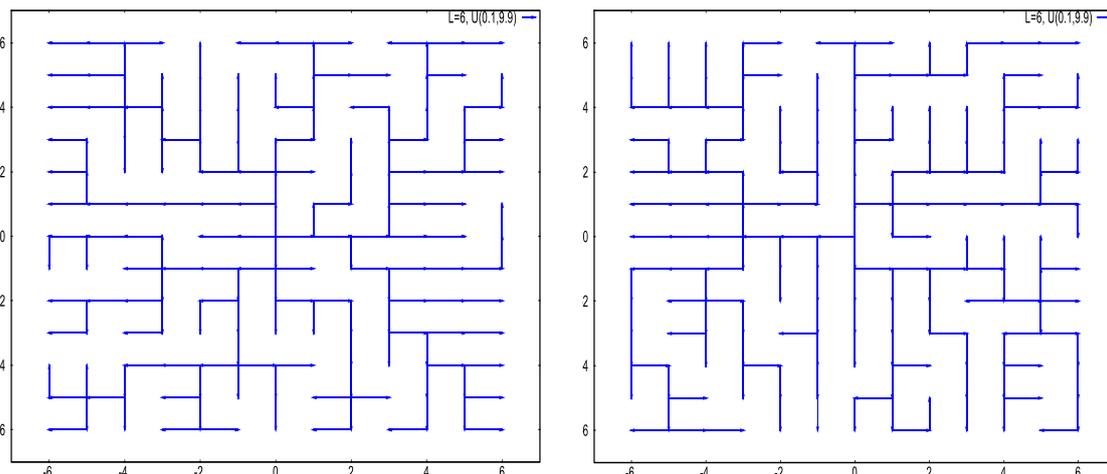
Consideramos una red cuadrada de  $(2L+1)(2L+1)$  nodos, siendo  $L$  el número de nodos desde el origen de coordenadas  $(0,0)$  hasta el borde de la red a lo largo de los ejes. La unidad de distancia que manejaremos será la constante de red. Lógicamente cada nodo tiene 4 vecinos próximos. Cada enlace entre vecinos se caracteriza por un tiempo de paso asignado de forma aleatoria de acuerdo con una distribución de probabilidad. En esta parte del TFM utilizaremos la distribución uniforme para muestrear los tiempos de enlace, la cual expresaremos de forma general como  $U(t_{min}, t_{max})$  con  $t \in [t_{min}, t_{max}]$ . En particular, consideraremos los casos  $U(0.1, 9.9)$ ,  $U(10, 20)$  y  $U(1.0, 1.3)$ .

La razón de elegir esta distribución y estos casos concretos es que, como se demuestra en un trabajo reciente [7], son suficientes para ilustrar los comportamientos que queremos estudiar. Para la distribución uniforme, el valor medio y la varianza son, respectivamente [7]:

$$\langle t \rangle = \tau = (t_{max} + t_{min})/2 \quad \text{y} \quad s^2 = \frac{1}{12} (t_{max} - t_{min})^2 \quad (2.3)$$

Una vez establecida la red FPP con tiempos de paso aleatorios, aplicamos el *algoritmo Dijkstra* [13] para obtener el tiempo mínimo de llegada a cada uno de los nodos de la red partiendo del nodo central, así como el “padre” o nodo que le precede en el correspondiente camino mínimo, lo cual permitirá componer las geodésicas a todos los nodos de la red.

En la Fig. 2.1 se muestran dos ejemplos de las geodésicas obtenidas en una red de  $L = 6$  con tiempos de paso obtenidos a partir de la distribución de probabilidad uniforme  $U(0.1, 9.9)$ . Se puede apreciar que la estructura del árbol geodésico cambia completamente en cada realización del ruido.



**Fig. 2.1.** Geodésicas desde el origen a todos los nodos de una red de tamaño  $L=6$ , para dos configuraciones distintas de los tiempos de enlace, los cuales están distribuidos según  $U(0.1, 9.9)$ .

### 2.3 Fluctuaciones en el tiempo mínimo de llegada

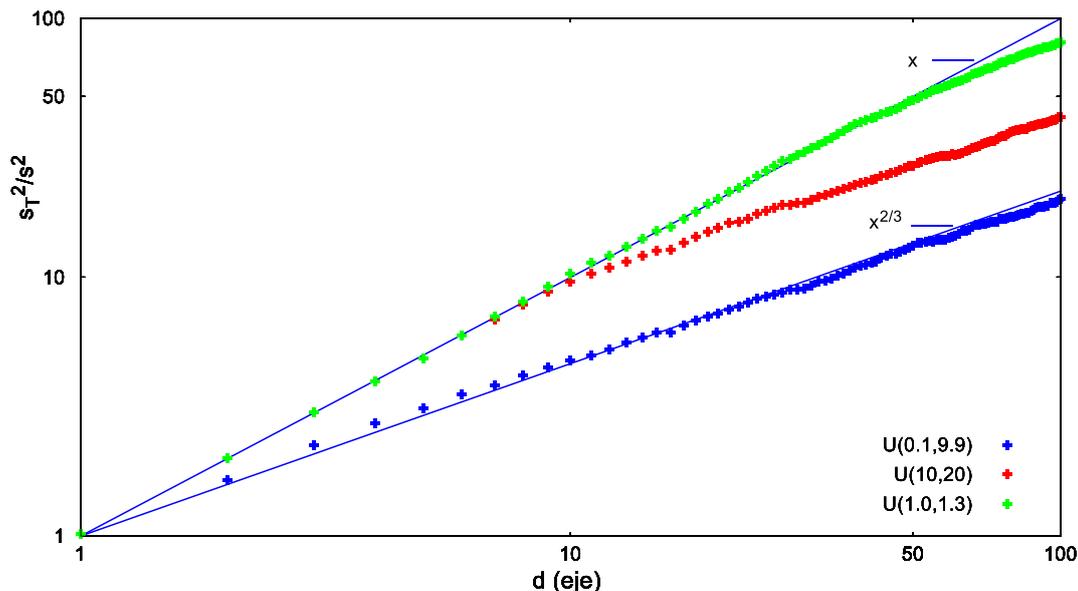
En una red cuadrada, si consideramos el caso homogéneo,  $s^2 = 0$ , que tomamos como referencia, en el que la distribución de tiempos es una delta de Dirac, por lo que todos los tiempos de enlace son iguales, el camino óptimo entre dos puntos del eje es único (no existe degeneración) y coincide con el eje, mientras que en puntos en cualquier otra dirección el camino óptimo está degenerado (existen varios caminos con el mismo tiempo mínimo), siendo máxima esta degeneración en la diagonal.

De este modo, la estructura de red cuadrada sugiere realizar el análisis en 2 direcciones de la red, el eje y la diagonal, ya que representan dos casos límite a partir de los cuales pueden deducirse los comportamientos en las direcciones intermedias. Debido a la simetría que presenta la red, en cada simulación dispondremos de información sobre 4 ejes y 4 diagonales.

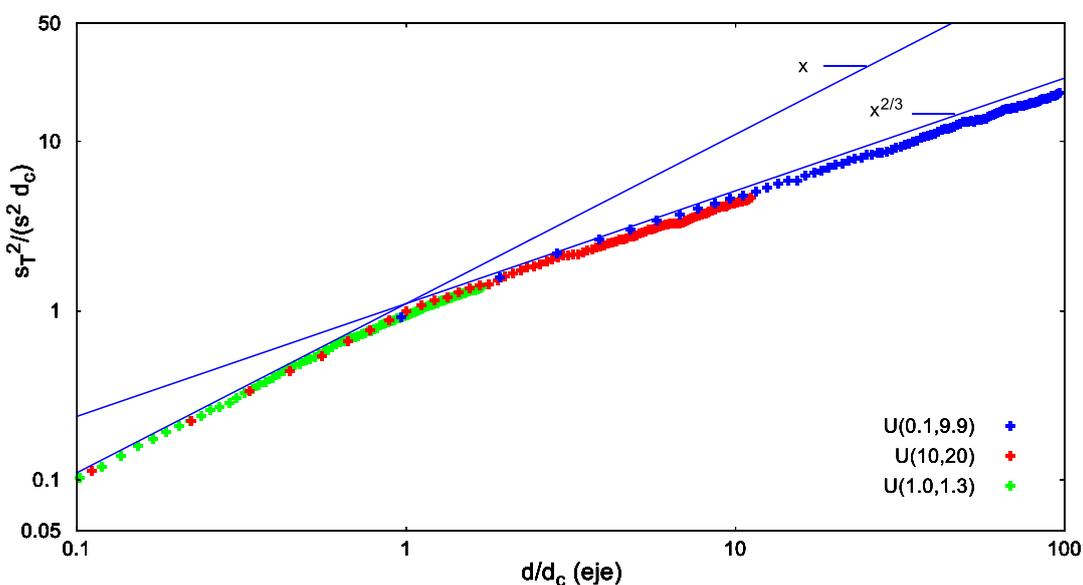
#### 2.3.1 Escalado sobre los ejes

Consideramos los tiempos mínimos de llegada a puntos  $\vec{x}$  sobre los ejes, esto es, a puntos con coordenadas  $(\pm d, 0)$  y  $(0, \pm d)$ , con  $d = 1, \dots, L$ , y cuya distancia euclídea al origen es  $d(\vec{x}_0, \vec{x}) = d$ .

En la Fig. 2.2 se muestra la varianza de las fluctuaciones del tiempo mínimo de llegada (denotada mediante  $s_T^2$ ), reescalada con la varianza de los tiempos de enlace,  $s^2$ , en función de la distancia al origen, en una red de  $L=100$  para las tres distribuciones de los tiempos de paso estudiadas aquí. El número de realizaciones del ruido empleadas se indica como  $N_{realiz}$ . En la Fig. 2.3 se representa la misma información pero ambos ejes de la gráfica están reescalados con la distancia crítica,  $d_c$ .



**Fig. 2.2.** Varianza de las fluctuaciones del tiempo mínimo de llegada a puntos sobre el eje de una red cuadrada en función de su distancia euclídea  $d$  al origen. Resultados obtenidos con una red de  $L=100$  y  $N_{realiz}=1000$ , para 3 distribuciones de probabilidad uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$ . La varianza,  $s_T^2$ , está reescalada por la varianza del tiempo de enlace  $s^2$ . La representación se muestra en escala logarítmica. Las rectas de pendientes 1 y  $2/3$  representan dos comportamientos de escalas diferentes para el crecimiento de la desviación estándar, con exponentes  $\beta=1/2$  y  $\beta=1/3$ .



**Fig. 2.3.** Varianza de las fluctuaciones del tiempo mínimo de llegada a puntos sobre el eje. Se representa la misma información que en la Fig. 2.2 pero ahora ambos ejes de la gráfica están reescalados con la distancia crítica  $d_c$ .

Se distinguen dos comportamientos de escala diferentes (indicados con líneas continuas, rectas de pendientes 1 y  $2/3$ ). Se observa un régimen inicial o preasintótico de tipo gaussiano que escala como  $(s_T/s)^2 \sim d$ , el cual es seguido por un segundo régimen (que podríamos denominar asintótico) con  $(s_T/s)^2 \sim d^{2/3}$ , o lo que es lo mismo, en el que las

fluctuaciones siguen un comportamiento del tipo  $s_T/s \sim d^{1/3}$ , independientemente de la función de distribución de probabilidad elegida. Este exponente coincide con el exponente de crecimiento  $\beta = 1/3$  de la clase de universalidad de KPZ. El crossover entre los dos escalados, el preasintótico gaussiano y el asintótico tipo KPZ, se produce en una cierta distancia que llamaremos distancia crítica  $d_c$ , y que depende de la distribución. El régimen preasintótico puede ser arbitrariamente largo y exceder los límites de la red, aunque, como se observa en las figuras, en nuestros casos esto no sucede (siempre se produce antes del límite de la red).

Como se demuestra en [7], la distancia crítica para el cambio de comportamiento es  $d_c = (\tau/s)^2/3$ . Esta expresión es válida para cualquier distribución. En el caso de la distribución uniforme, sustituyendo las relaciones (2.3) para  $\tau$  y  $s^2$ , obtenemos  $d_c = (t_{max} + t_{min})^2/(t_{max} - t_{min})^2$ , por lo que las distancias críticas asociadas a nuestras tres distribuciones son:

- 1)  $U(0.1, 9.9)$ ,  $d_c = 1.04$
- 2)  $U(10, 20)$ ,  $d_c = 9.00$
- 3)  $U(1.0, 1.3)$ ,  $d_c = 58.78$

En las Figs. 2.2 y 2.3 se observa que, efectivamente, el cambio de comportamiento se produce a estas distancias.

La razón del régimen lineal preasintótico  $(s_T/s)^2 \sim d$  es la siguiente. El camino óptimo entre dos puntos del eje para el caso homogéneo,  $s^2=0$ , que tomamos como referencia, es único (no existe degeneración). Cuando  $s^2$  es positivo pero muy pequeño, las geodésicas todavía seguirán la recta euclídea porque una desviación desde la misma implicaría añadir nuevos pasos (al menos 2), lo cual supone un coste en tiempo proporcional a  $\tau$ , el tiempo de enlace medio. Para distancias cortas, esto es suficiente para evitar cualquier desviación del camino mínimo con respecto al eje. En este régimen, por tanto, el tiempo de llegada medio entre dos puntos separados por una distancia  $d$  es simplemente  $\langle T(d) \rangle = d\tau$ , y su varianza es el resultado de la suma directa de las varianzas de los tiempos de paso  $s_T^2(d) = ds^2$ , lo cual explica el escalado preasintótico mostrado en las Figs. 2.2 y 2.3.

La amplitud de las fluctuaciones del tiempo de llegada, dada por  $s_T(d)$ , crecerá con la distancia  $d$  hasta que sea suficientemente grande como para asumir el coste en tiempo de una eventual desviación desde la geodésica euclídea, la cual es del orden de  $\tau$ . Si denotamos esta distancia crítica como  $d_c$ , este simple argumento nos lleva a concluir que  $d_c$  escalará con los parámetros de la distribución como  $d_c \sim (\tau/s)^2 = (CV)^{-2}$ , siendo  $CV = s/\tau$  el *coeficiente de variación* de la distribución de los tiempos de enlace. Este coeficiente representa una medida de la dispersión y por tanto de la intensidad del ruido, y se define como la razón entre la desviación estándar  $s$  y el tiempo medio  $\tau$  (cuanto menor sea  $d_c$  mayor será la dispersión o la intensidad del ruido, y viceversa). Para distancias mayores que  $d_c$ , la amplitud del desorden hace irrelevantes las ligaduras geométricas impuestas por la red, permitiendo a las geodésicas explorar libremente el espacio.

Como hemos indicado, para la distribución  $U(0.1, 9.9)$ ,  $d_c = 1.04$  es tan pequeña que

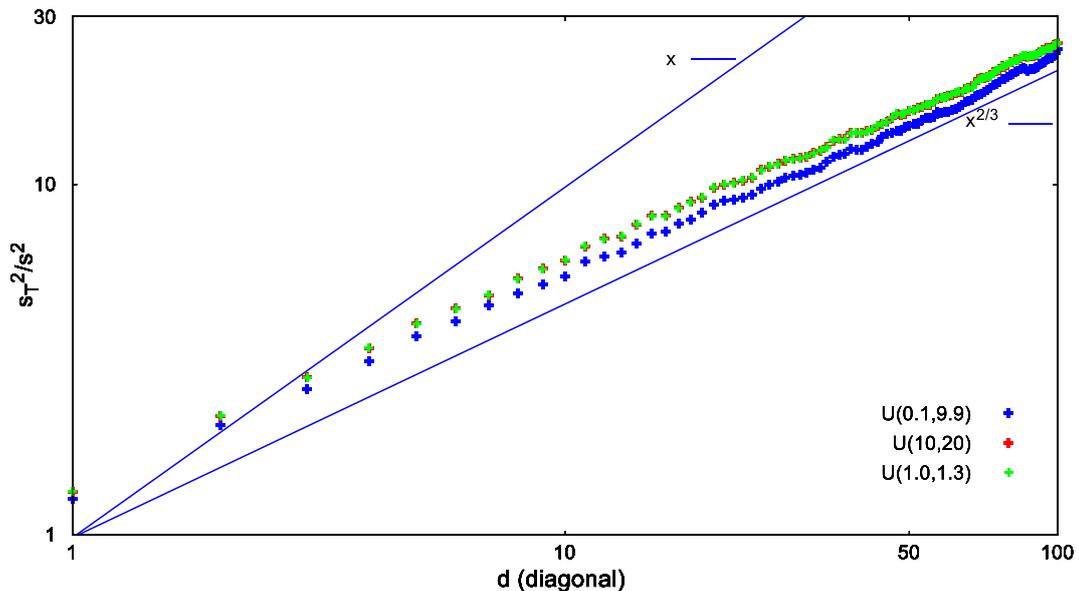
impide que se aprecie el régimen preasintótico, mientras que sí se observa claramente para  $U(10, 20)$ , con  $d_c=9.00$ , y  $U(1.0, 1.3)$ , con  $d_c=58.78$ , al ser inferiores a  $L=100$ . Si se diese el caso de que  $d_c > L$ , entonces  $L$  no sería suficientemente largo para alcanzar el escalado KPZ asintótico.

Como resumen, en el régimen preasintótico a lo largo de los ejes, las fluctuaciones del tiempo mínimo de llegada escalan de la forma  $s_T/s \sim d^{1/2}$ . Una vez superada la distancia crítica  $d_c$ , para  $d \gg d_c$  aparece el régimen asintótico que también se observa en la rugosidad de las bolas y está caracterizado por  $s_T/s \sim d^{1/3}$ , cuyo exponente de escala  $\beta=1/3$  corresponde a la clase de universalidad de KPZ.

### 2.3.2 Escalado sobre las diagonales

Consideramos los tiempos mínimos de llegada a puntos  $\vec{x}$  sobre las diagonales, esto es, a puntos con coordenadas  $(\pm d, \pm d)$ , con  $d=1, \dots, L$ , y cuya distancia euclídea al origen es  $d(\vec{x}_0, \vec{x}) = \sqrt{2}d$ .

En la Fig. 2.4 se muestra la varianza de las fluctuaciones del tiempo mínimo de llegada,  $s_T^2$ , reescalada con la varianza de los tiempos de enlace,  $s^2$ , en función de la distancia  $d$  de los puntos al origen, en una red de  $L=100$ , para las tres distribuciones estudiadas.



**Fig. 2.4** Varianza de las fluctuaciones del tiempo mínimo de llegada a puntos sobre la diagonal de una red cuadrada en función de su distancia euclídea  $d$  al origen. Resultados obtenidos con una red de  $L=100$  y  $N_{realiz}=1000$ , para 3 distribuciones de probabilidad uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$ . La varianza,  $s_T^2$ , está reescalada por la varianza del tiempo de enlace  $s^2$ . La representación se muestra en escala logarítmica. Las rectas de pendientes 1 y  $2/3$  representan, como en el eje, dos comportamientos de escalas diferentes para el crecimiento de la desviación estándar, con exponentes  $\beta=1/2$  y  $\beta=1/3$ .

Al contrario que en el caso de los ejes, a lo largo de la diagonal no se aprecia el

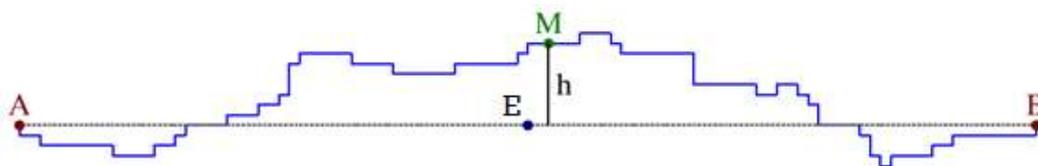
régimen preasintótico y las fluctuaciones muestran el escalado KPZ, con  $\beta = 1/3$ , prácticamente desde el origen. La razón por la que no existe régimen preasintótico es que a lo largo de la diagonal, el camino mínimo en el caso homogéneo ( $s^2=0$ ) está degenerado [7]. En cuanto introducimos una distribución de tiempos de paso con  $s^2 \neq 0$ , la degeneración se rompe, pero sigue existiendo un conjunto de caminos al nodo que recorren el mismo número de nodos (misma longitud), por lo que la geodésica puede fluctuar libremente dentro de ese conjunto sin sufrir el efecto de la geometría de la red que se observaba en el eje. En efecto, se ha comprobado [7] que en condiciones de ruido débil (como las que estamos estudiando aquí), el camino óptimo a puntos en la diagonal pertenece a ese conjunto.

Los resultados obtenidos, tanto para los ejes como para las diagonales, están de acuerdo con los mostrados en [7].

## 2.4 Desviación lateral de las geodésicas

La desviación lateral es una propiedad geométrica de las geodésicas de una red FPP que también caracteriza el comportamiento de escala del modelo.

Definimos el punto medio  $M$  de una geodésica como aquel que se alcanza en el mismo tiempo si partimos desde los dos puntos extremos, o lo que es lo mismo, el punto alcanzado en la mitad del tiempo de paso total (Fig. 2.5). La desviación lateral de la geodésica, que denotaremos como  $h$ , se define como la distancia euclídea desde el punto medio a la línea recta que une los dos puntos.

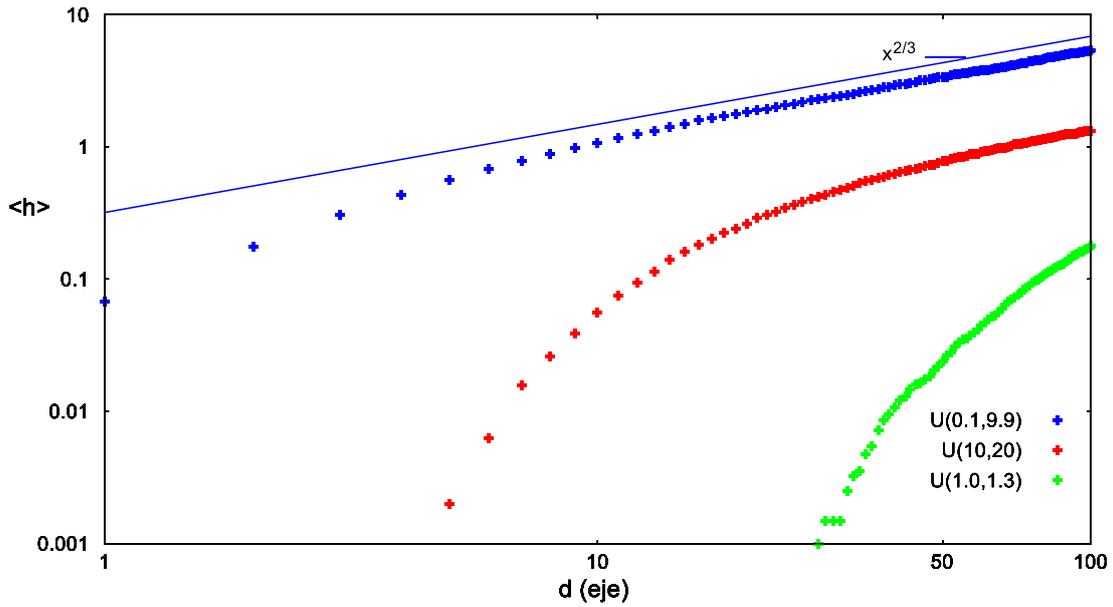


**Fig. 2.5.** Ejemplo de geodésica entre dos puntos, A y B. El punto M se sitúa en el punto medio de la geodésica, el cual puede ser alcanzado desde A y B con el mismo tiempo. También se indica el punto medio E del segmento  $\overline{AB}$  euclídeo entre ambos puntos. La desviación lateral de la geodésica,  $h$ , es la distancia euclídea desde el punto medio M a la línea recta que une los dos puntos [7]. Como se muestra en la figura, la proyección de M sobre la recta no tiene por qué coincidir con E.

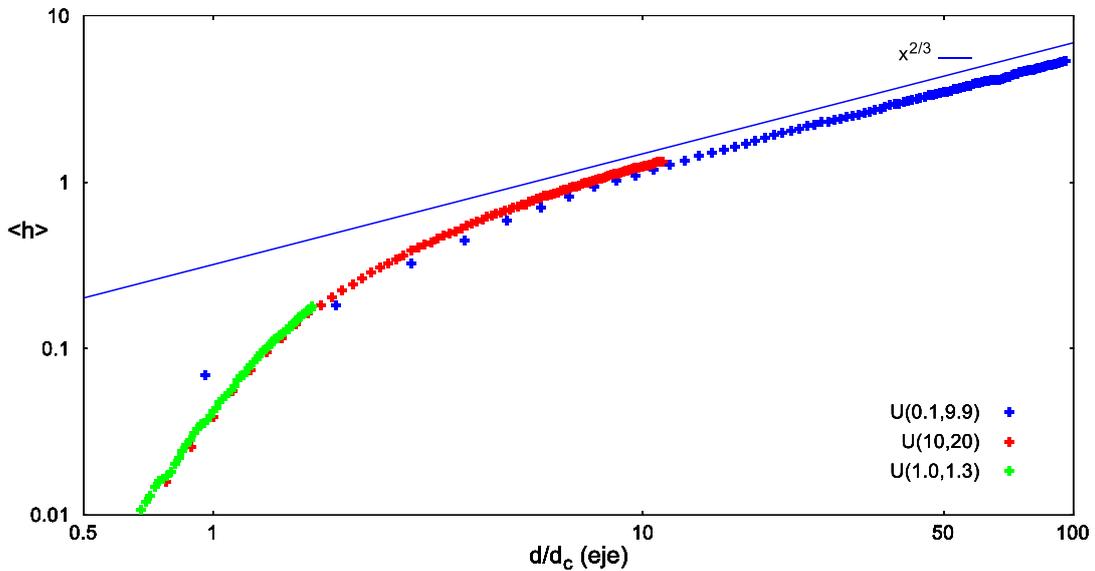
Al igual que hicimos con las fluctuaciones del tiempo mínimo de llegada, a continuación, estudiamos el comportamiento de escala de la desviación lateral de las geodésicas a puntos sobre el eje y la diagonal.

### 2.4.1 Escalado sobre los ejes

En las Figs. 2.6 y 2.7 se muestra el valor medio de la desviación lateral de las geodésicas,  $\langle h \rangle$ , en función de la distancia de los nodos del eje al origen, en una red de  $L=100$ , para las tres distribuciones de tiempos de enlace estudiadas aquí.



**Fig. 2.6.** Desviación lateral media  $\langle h \rangle$  de las geodésicas a puntos sobre el eje, en función de su distancia  $d$  al origen. Resultados obtenidos con una red cuadrada de  $L=100$  y  $N_{realiz}=1000$ , para 3 distribuciones de probabilidad uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$ . La representación se muestra en escala logarítmica. La recta de pendiente  $2/3$  representa el comportamiento de escala con exponente  $1/z=2/3$ .

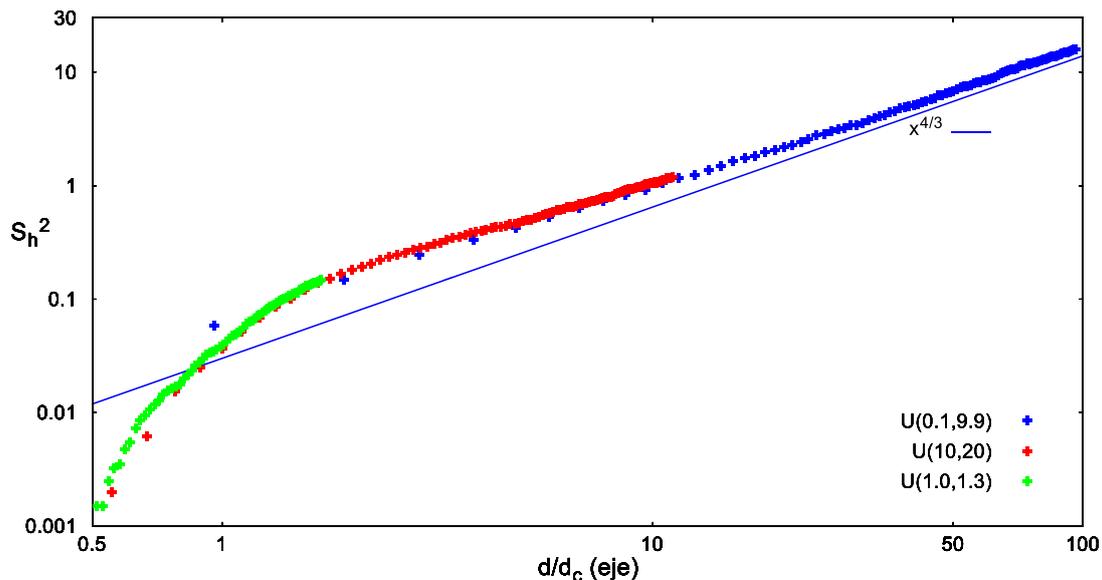


**Fig. 2.7.** Desviación lateral media  $\langle h \rangle$  de las geodésicas a puntos sobre el eje, en función de su distancia  $d$  al origen, reescalada mediante  $d_c$ . Se representa la misma información que en la Fig. 2.6 pero ahora la distancia  $d$  al origen está reescalada con la distancia crítica  $d_c$ .

Se aprecia que el comportamiento de  $\langle h \rangle$  sigue un escalado asintótico del tipo  $\langle h \rangle \sim d^{2/3}$  para  $d \gg d_c$ , independientemente de la distribución utilizada, lo cual es consistente con la clase de universalidad de KPZ para las geodésicas, según se indica en el apartado 1.2. El valor  $2/3$  del exponente coincide con la expresión esperada  $1/z$ , donde  $z=3/2$  es el exponente de escala dinámico de esta universalidad.

Si  $d \ll d_c$ ,  $\langle h \rangle \rightarrow 0$ , y no se observa desviación lateral, de modo que las geodésicas siguen el eje. Este comportamiento preasintótico está en consonancia con lo que indicábamos sobre las fluctuaciones de los tiempos mínimos de llegada. La distancia  $d_c$  es el punto de transición entre ambos comportamientos, que coincide con los obtenidos para las fluctuaciones del tiempo de llegada (apartado 2.3) para el eje.

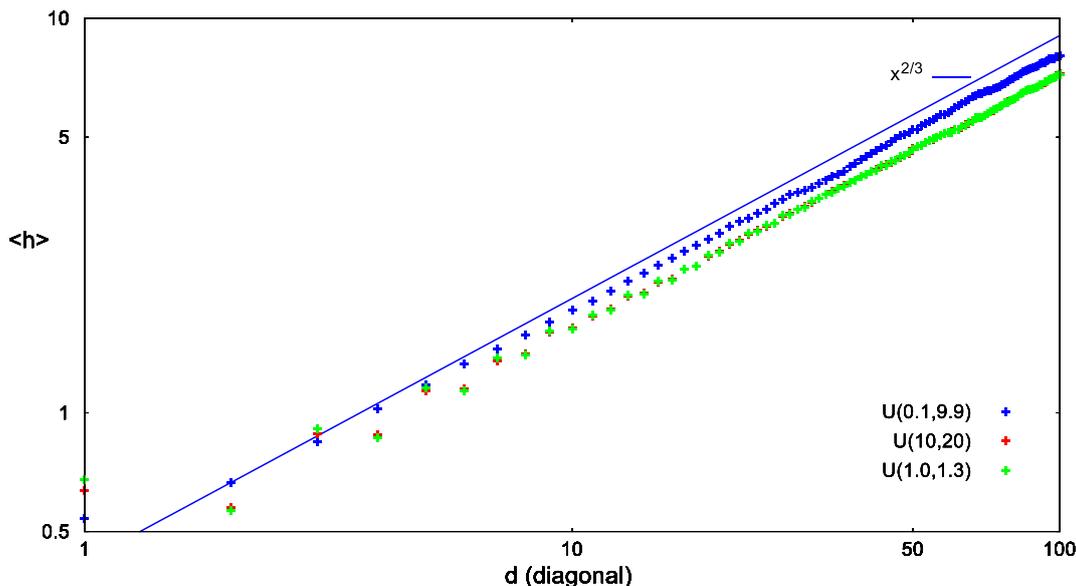
Este mismo comportamiento  $d^{2/3}$  se deduce también si consideramos la desviación estándar  $s_h$  de la desviación lateral  $h$  (Fig. 2.8).



**Fig. 2.8** Varianza de la desviación lateral de las geodésicas a puntos sobre el eje de una red cuadrada, en función de su distancia  $d$  al origen reescalada mediante  $d_c$ . Resultados obtenidos con una red de  $L=100$  y  $N_{realiz}=1000$ , para 3 distribuciones de probabilidad uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$ . La representación se muestra en escala logarítmica. La recta de pendiente  $4/3$  representa el comportamiento de escala para el crecimiento de la desviación estándar, con exponente  $1/z=2/3$ .

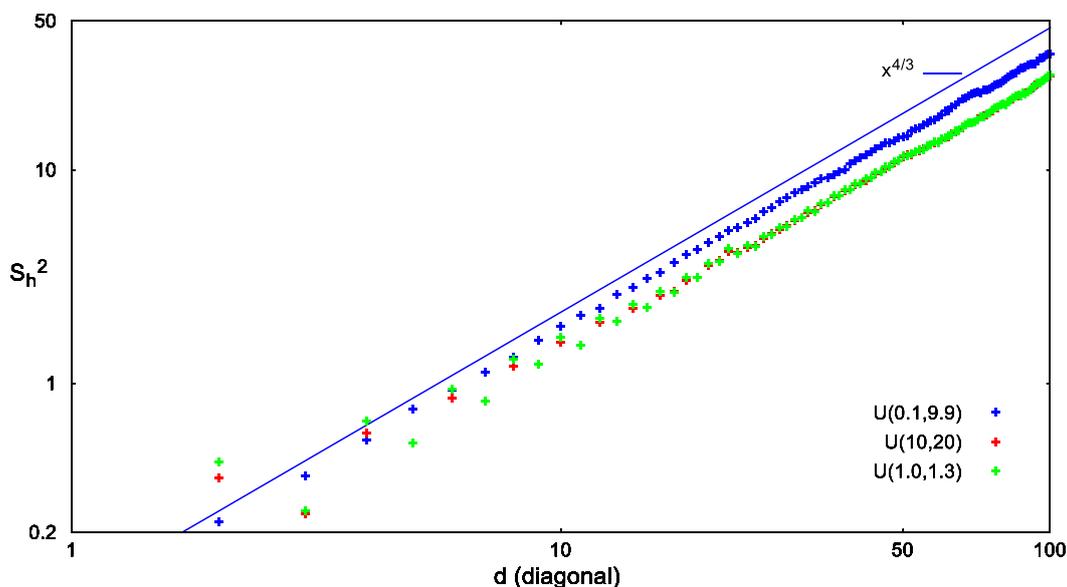
### 2.4.2 Escalado sobre las diagonales

En la Fig. 2.9 se muestra el valor medio de la desviación lateral de las geodésicas  $\langle h \rangle$ , en función de la distancia de los nodos de la diagonal al origen, en una red de  $L=100$ , para las tres distribuciones de tiempos de enlace estudiadas aquí.



**Fig. 2.9.** Desviación lateral media  $\langle h \rangle$  de las geodésicas a puntos sobre la diagonal, en función de su distancia  $d$  al origen. Resultados obtenidos con una red cuadrada de  $L=100$  y  $N_{realiz}=1000$ , para 3 distribuciones de probabilidad uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$ . La representación se muestra en escala logarítmica. La recta de pendiente  $2/3$  representa el comportamiento de escala con exponente  $1/z=2/3$ .

En este caso, de forma similar a las fluctuaciones del tiempo mínimo de llegada a lo largo de la diagonal (Fig. 2.4), las curvas adquieren rápidamente un comportamiento propio de la universalidad de KPZ, del tipo  $\langle h \rangle \sim d^{2/3}$ , independientemente de la distribución de los tiempos de paso. Este mismo comportamiento  $d^{2/3}$  se aprecia si consideramos la desviación estándar  $s_h$  o fluctuación lateral (Fig. 2.10), sin que se vea cambio de régimen.



**Fig. 2.10** Varianza de la desviación lateral de las geodésicas a puntos sobre la diagonal de una red cuadrada, en función de su distancia  $d$  al origen. Resultados obtenidos con una red de  $L=100$  y  $N_{realiz}=1000$ , para 3 distribuciones de probabilidad uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$ . La representación se muestra en escala logarítmica. La recta de pendiente  $4/3$  representa el comportamiento de escala para el crecimiento de la desviación estándar, con exponente  $1/z=2/3$ .

Los resultados obtenidos, tanto para los ejes como para las diagonales, están de acuerdo con los mostrados en [7].

## 2.5 Modelo KPP ( $k$ -geodésicas). Algoritmo de Yen

Hasta ahora hemos considerado el modelo FPP, en el que el camino que conecta dos nodos cualesquiera de la red es la curva geodésica o camino de tiempo de llegada mínimo entre ambos. Sin embargo, en el estudio de determinadas aplicaciones o del comportamiento de ciertos sistemas, como son, por ejemplo, la distribución del tráfico por diferentes accesos entre dos ciudades o la distribución de la corriente en una red de resistencias, resulta conveniente extender el análisis a otros caminos. Si ordenamos todos los caminos entre dos puntos por el tiempo de llegada, de menor a mayor, obtenemos un conjunto de caminos, denominado  $k$ -geodésicas, donde  $k$  representa la posición de un determinado camino en el conjunto. Por ejemplo, el camino mínimo será la curva con  $k=1$ , o 1-geodésica. A este modelo, que no sólo tiene en cuenta el camino óptimo, sino todos los sucesivos, lo llamaremos *modelo KPP*.

El uso de este modelo para el análisis de los patrones de las rutas elegidas por un colectivo de individuos, posibilita el poder abordar proyectos ambiciosos, como son: la comprensión de la movilidad humana, la planificación de infraestructuras urbanas y el desarrollo de las existentes, el desarrollo de sistemas de transporte, el diseño de sistemas de navegación y, en general, la búsqueda de nuevas soluciones de movilidad. La dinámica del tráfico se ha convertido en un tema desafiante que involucra diferentes disciplinas: matemáticas, física, informática, ingeniería civil, sociología, etc. El interés de este problema es aún mayor si tenemos en cuenta la disponibilidad de grandes cantidades de datos recopilados por dispositivos GPS y redes de telefonía móvil, y que pueden ser procesados computacionalmente.

El modelo KPP será de gran utilidad en la sec. 3, cuando estudiemos la distribución de las líneas de corriente en redes aleatorias de resistencias.

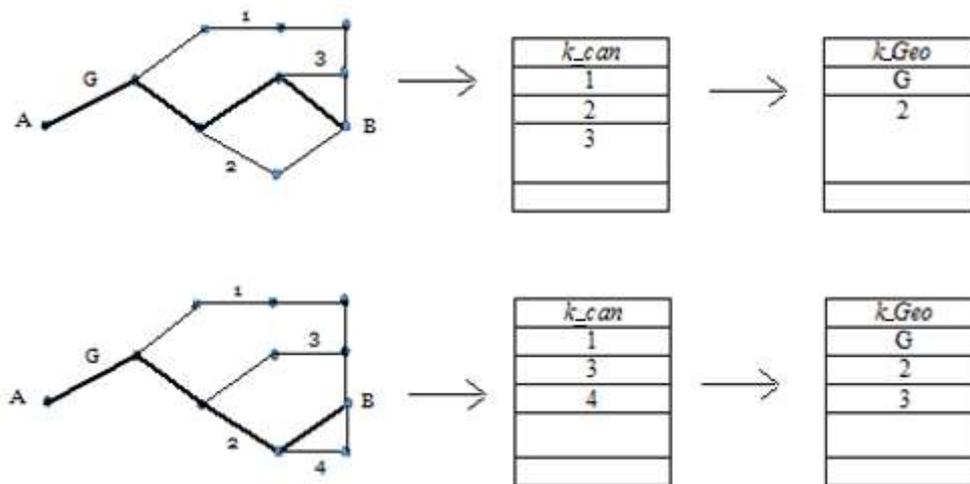
Los  $k$  caminos más cortos entre dos nodos de una red aleatoria pueden ser calculados a partir de la geodésica que los une mediante el *algoritmo de Yen*, el cual exponemos a continuación.

### Algoritmo de Yen

Supongamos que disponemos de una red FPP, con tiempos de paso entre nodos, y aplicamos el algoritmo Dijkstra para obtener la geodésica entre un nodo origen A y un nodo destino B. Lógicamente esta geodésica será el camino óptimo entre ambos nodos y uno de los  $k$ -caminos que buscamos. La geodésica se almacena en la tabla  $k\_Geo$ , la cual irá conteniendo los caminos mínimos que se vayan obteniendo. Por su parte, los *caminos candidatos* a ser un  $k$  camino mínimo se irán almacenando en la tabla  $k\_can$ . Cada camino se registra con el tiempo de llegada.

El procedimiento es el siguiente (en la Fig. 2.11 se muestra un esquema): a partir del nodo A de la geodésica, vamos asignando el que se denomina nodo  $q_{spur}$ , que progresivamente irá trasladándose a lo largo de los nodos de la geodésica y, más

exactamente, del último camino que se haya almacenado en la tabla  $k\_Geo$ , hasta alcanzar el nodo B. El nodo  $q_{spur}$  sirve de referencia para el cálculo del subcamino mínimo desde este nodo  $q_{spur}$  al nodo B, aplicando, como antes, el algoritmo Dijkstra. El tramo A- $q_{spur}$  se denomina subcamino base (o *spur*). No obstante, para que el cálculo del subcamino  $q_{spur}$ -B no pase por los enlaces ya utilizados en el subcamino A- $q_{spur}$ , los tiempos de paso de estos enlaces se ponen a  $t = \infty$ . El camino mínimo resultante se compondrá anteponiendo el subcamino base A- $q_{spur}$  al subcamino mínimo  $q_{spur}$ -B. Este camino mínimo resultante se almacena en la tabla  $k\_can$  como candidato, si no está ya incluido de un proceso anterior. Por cada nodo  $q_{spur}$  del último camino almacenado en  $k\_Geo$  se obtiene un camino mínimo candidato que se almacena en la tabla  $k\_can$ . Una vez que  $q_{spur}$  ha alcanzado el nodo B del último camino mínimo de  $k\_Geo$ , de los caminos mínimos existentes en  $k\_can$ , se selecciona el camino de tiempo de llegada menor, se traslada a la tabla  $k\_Geo$  y se borra de la  $k\_can$ . Para este nuevo camino mínimo en  $k\_Geo$  se aplica de nuevo el procedimiento indicado. Una vez registrados los  $k$  caminos mínimos en la tabla  $k\_Geo$ , o si se llega a la situación de que no existen más candidatos en  $k\_can$ , el proceso habrá concluido. Explicaciones detalladas del algoritmo se encuentran en [14, 15].



**Fig. 2.11. Algoritmo de Yen.** Procedimiento para obtener los  $k$ -caminos más cortos que van de A a B. Cada enlace tiene un tiempo de paso. Cada camino se representa por un número. G es el camino óptimo. La tabla  $k\_Geo$  contiene los caminos mínimos más cortos obtenidos hasta el momento. La tabla  $k\_can$  almacena los candidatos. El procedimiento es iterativo con cada nueva  $k$ -geodésica obtenida.

### 3. Redes aleatorias de resistencias

Como equivalente físico del modelo FPP proponemos el estudio de redes aleatorias de resistencias (en inglés, *random resistor networks*, RRN) [16]. La razón principal es que estos modelos han sido utilizados con mucha frecuencia en la literatura para simular el transporte en medios desordenados, como por ejemplo el flujo en medios porosos con aplicaciones en la industria de extracción del petróleo [17], o la conductividad de medios semiconductores o medios mixtos metal-aislante [18]. Además, el flujo de la magnitud que se transporta obedece a ciertos criterios de minimización que, aunque tengan un rango local, guardan muchas similitudes con el modelo FPP (recordamos que en el modelo FPP el camino

mínimo es globalmente minimizante). Por último, se ha observado que en condiciones de ruido muy fuerte [11], el flujo de la corriente entre dos puntos sigue fundamentalmente el camino óptimo entre los dos puntos, es decir, aquel que minimiza la suma de las resistencias recorridas (también denominado en este contexto *camino de resistencia mínima*).

La similitud entre los modelos FPP y RRN se basa en el hecho de que pueden representarse las geodésicas, en el primer caso, de los tiempos de llegada mínimos y, en el segundo, de los caminos de resistencias mínimas (caminos óptimos), desde un nodo origen a cada uno de los nodos de la red. En el modelo RRN, entre dos nodos, podemos esperar que la corriente máxima circulará con mayor probabilidad por el camino óptimo de resistencias. Uno de nuestros objetivos en este trabajo es comprobar si las líneas de corriente del modelo RRN tienen propiedades estadísticas universales y si su comportamiento sigue la misma clase de universalidad KPZ que en el modelo FPP.

### 3.1 Descripción del modelo RRN

El modelo RRN consiste esencialmente en una red de nodos en la que los nodos vecinos están conectados entre sí mediante una resistencia cuyo valor está distribuido de una cierta forma que pretende capturar las propiedades físicas del medio que se simula. Uno de los tipos de desorden más estudiados es aquel en el que las resistencias pueden valer 1 ó  $\infty$  con una cierta probabilidad, lo que nos lleva directamente al modelo de percolación de enlaces [16]. Otros ejemplos de desorden muy utilizados son la distribución gaussiana o en forma de ley de potencias [19, 20]. En analogía con la red FPP presentada en la sección anterior, nuestra RRN consistirá en una red cuadrada de tamaño  $(2L + 1)(2L + 1)$  con un total de  $N = (2L + 1)^2$  nodos. Denotaremos los nodos de la RRN mediante un índice  $i$ , con  $i = 0, \dots, N-1$ , y donde  $i = 0$  denota el nodo central. Definimos ahora  $r_{ij}$  como la resistencia que conecta los dos nodos vecinos  $i$  y  $j$ . Al igual que los tiempos de enlace en la red FPP, estas resistencias serán variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas. Para estudiar la analogía entre los dos modelos, asignaremos a cada resistencia de la RRN el mismo valor que el tiempo de paso del enlace correspondiente en la red FPP, esto es:

$$r_{ij} = t_{ij} \quad \forall \text{ pareja de nodos vecinos } (i, j) \quad (3.1)$$

De esta manera, los tiempos de enlace y las resistencias correspondientes estarán distribuidos del mismo modo. Esto es razonable ya que un tiempo de enlace mayor debe representar en el equivalente RRN una mayor resistencia al paso de la corriente. Por supuesto, se trata de una hipótesis de trabajo que no excluye otras relaciones no triviales del tipo  $r_{ij} = f(t_{ij})$ . Definimos ahora  $I_{ij}$  como la corriente que va del nodo  $i$  al nodo  $j$ . Si aplicamos la ley de Ohm obtenemos

$$I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{r_{ij}} \quad (3.2)$$

donde  $V_i$  y  $V_j$  son los potenciales eléctricos en los dos nodos. Si  $I_{ij} > 0$ , se trata de una corriente saliente del nodo  $i$  y entrante a  $j$ , y si  $I_{ij} < 0$ , es entrante al nodo  $i$  y saliente del  $j$ . Ahora podemos aplicar la ley de Kirchhoff para la corriente que atraviesa el nodo  $i$  (la corriente que sale del nodo es igual a la que entra):

$$\sum_k I_{ik} = \sum_k \frac{V_i - V_k}{r_{ik}} = I_i \quad (3.3)$$

donde el sumatorio recorre todos los nodos  $k$  que son vecinos de  $i$ , e  $I_i$  es la corriente externa que entra en la red a través del nodo  $i$ . De acuerdo con esta definición, si la corriente entra en el sistema tenemos  $I_i > 0$  (el nodo es una fuente de corriente), mientras que si sale corriente (el nodo es un sumidero) tendremos  $I_i < 0$ . De este modo llegamos a un sistema lineal de ecuaciones para los potenciales en los nodos, que expresamos de forma compacta como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^N$  es el vector potencial con componentes  $V_i$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  es la matriz de coeficientes que contiene los valores de las resistencias, e  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^N$  es el vector cuyas componentes  $I_i$  son las corrientes que entran/salen de la red a través de cada nodo. Como los potenciales aparecen en las ecuaciones siempre en parejas, el vector constante  $\mathbf{V} = \mathbf{c}$  es una solución del problema homogéneo, es decir  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = 0$ , por lo que la matriz  $\mathbf{A}$  tiene un autovalor nulo y no es directamente invertible. Para que el sistema sea compatible se debe cumplir que  $\sum_{i=0}^{N-1} I_i = 0$ , es decir, la corriente que entra en el sistema debe ser igual a la que sale (condición de conservación de la corriente). Cumplida esta condición, para resolver el sistema de forma determinada debemos fijar el potencial en un punto. Nosotros impondremos que el potencial en el nodo central sea 1:

$$V_0 = 1 \quad (3.5)$$

Para definir completamente nuestro modelo sólo nos queda fijar los valores de  $I_i$ . En este TFM hemos seguido el esquema más habitual utilizado en el estudio de las RRN, que consiste en fijar el potencial en los nodos del contorno de nuestra red a 0, y considerar que  $I_i = 0$  para todos los nodos del interior (excepto para el nodo central  $i = 0$ ). De este modo, una cierta corriente  $I_0$  sale por el nodo central que se encuentra a potencial constante 1, se distribuye por todos los enlaces de la red sin ninguna pérdida, hasta que llega a los nodos en la frontera de la red, que actúan como sumideros. Fijado de este modo el potencial, el valor  $I_0$  de la corriente que entra y sale del sistema está determinado por la resistencia equivalente de la red,  $R_{equiv}$ , a través de la ley de Ohm:  $I = \Delta V R_{equiv} = R_{equiv}$ .

Para resolver el sistema resultante de ecuaciones 3.4, éste puede expresarse en la forma  $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{V} = \mathbf{f}$ , donde  $\mathbf{f}$  contiene los términos constantes debidos a los valores fijos del potencial  $V_0=1$  y  $V_q=0$  en la frontera (cambiados de signo, porque los pasamos al otro lado de la igualdad). El sistema lo resolvemos mediante el método de *Gauss-Seidel* con un método de sobrerrelajación SOR [21]. El método de Gauss-Seidel calcula de forma iterativa<sup>(\*)</sup> la solución de un sistema matricial y es apropiado cuando se tratan matrices grandes (>100), como es nuestro caso, ya que, en cada iteración, permite calcular de forma independiente la solución momentánea para cada nodo sin necesidad de componer completamente la matriz.

(\*) Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones son una alternativa muy potente a los métodos directos, como, por ejemplo, el conocido método de *eliminación de Gauss* y sus variantes. Entre los iterativos se encuentran los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel. En éstos se parte de un vector con los valores estimados de la solución  $\mathbf{x}^{(0)}$ , el cual va ajustándose de forma iterativa hasta conseguir que la solución converja. Los métodos iterativos se usan sobre los métodos directos cuando se trata de un sistema grande (>100), como es nuestro caso, ya que necesitaremos matrices grandes (N x N) [9].

Esto evita problemas de memoria cuando el sistema es grande. El método SOR, por su parte, acelera el proceso de convergencia.

### 3.2 Línea principal de corriente: *Particle Launching Algorithm* (PLA)

Uno de los aspectos más importantes en nuestra investigación del modelo RRN es el concepto de *línea principal de corriente*. Supongamos que consideramos el nodo origen ( $i = 0$ ) y un nodo  $j$  cualquiera de la red, que actúa como nodo final. En el modelo FPP es evidente que el camino mínimo que conecta los dos puntos es único. Sin embargo, en el modelo RRN la corriente se distribuye por todos los enlaces de la red, por lo que el número de caminos de corriente que podemos seguir entre los dos puntos es muy grande y aumenta muy rápidamente con el tamaño del sistema. En este TFM hemos optado por una estrategia muy utilizada para trazar rutas de flujo en medios desordenados (como es el caso de las RRN), y que también ha sido utilizada con éxito en otras redes importantes como son las redes de percolación. Es el denominado *particle launching algorithm* [17] (en adelante PLA), que describimos a continuación. Una vez que hemos resuelto nuestras ecuaciones para una realización particular de la red (esto es, para unos ciertos valores aleatorios de las resistencias), y hemos obtenido los potenciales en todos los nodos de la red y las corrientes que atraviesan todos los enlaces, lanzamos secuencialmente partículas trazadoras desde el nodo final  $j$ . Estas partículas recorren la red de acuerdo con unas reglas que vamos a explicar a continuación, y finalmente son recogidas en el nodo origen  $i = 0$ . Cuando una partícula trazadora se encuentra en un cierto nodo  $k$  (en su camino desde el nodo final  $j$ ), decidirá seguir su camino recorriendo el enlace entre el nodo  $k$  y el nodo vecino  $l$  con una probabilidad dada por:

$$p_{kl} = \frac{J_{kl}}{\sum_m J_{km}} \quad (\text{sPLA}) \quad (3.6)$$

donde  $m$  recorre todos los nodos vecinos de  $k$  (incluyendo  $l$ ), y tenemos que  $J_{km} = |I_{km}|$  si  $I_{km} \leq 0$ , y  $J_{km} = 0$  si  $I_{km} > 0$ , es decir, sólo se tienen en cuenta las corrientes “entrantes”. En definitiva, el algoritmo consiste en muestrear aleatoriamente todas las corrientes que entran en el nodo, asignando una probabilidad a cada una de ellas proporcional a la corriente que transporta. Aplicando este algoritmo en todos los nodos recorridos por la partícula llegaremos inevitablemente al nodo origen, ya que es la única fuente de corriente. El camino descrito por la partícula será considerado como la línea principal de corriente entre los dos nodos. Evidentemente, el proceso de trazado es estocástico por lo que esta línea no es única. Lanzando un gran número de partículas (que llamaremos  $N_{part}$ ) obtendremos un conjunto de líneas principales de corriente que podremos estudiar estadísticamente. Como se indica en la Ec. (3.6), nos referiremos a este algoritmo estocástico como sPLA (*stochastic particle launching algorithm*) para diferenciarlo de una variante determinista del mismo, que también hemos considerado en este TFM, y que llamaremos dPLA (*deterministic particle launching algorithm*). En esta variante, la partícula escoge seguir, con probabilidad 1, el enlace con el mayor valor de corriente entrante:

$$p_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } |J_{kl}| > |J_{km}| \quad \forall m \neq l \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (\text{dPLA}) \quad (3.7)$$

De este modo, cuando usamos el dPLA tenemos que  $N_{part} = 1$  y la línea principal de corriente es aquella que maximiza localmente la corriente.

### 3.3 Objetivos

La literatura que conocemos sobre el estudio de los caminos de corriente en RRN se ha centrado en el régimen de desorden muy fuerte [11], es decir, considerando distribuciones de probabilidad con un  $CV \gg 1$ , y muy especialmente en condiciones similares a las redes de percolación, donde las resistencias pueden ser  $\infty$  con una cierta probabilidad, representando así dominios aislantes del medio. En estos casos se podría decir que, en líneas generales, las líneas principales de corriente coinciden con los caminos óptimos, es decir, con aquellos que minimizan la suma total de las resistencias que atraviesan (aunque la distribución de estas líneas no ha sido estudiada con la profundidad con la que lo haremos aquí). Sin embargo, hasta donde sabemos, no se ha estudiado esta relación en condiciones de ruido moderado ( $CV \approx 1$ ) o débil ( $CV \ll 1$ ). Nuestro objetivo principal de esta parte del TFM ha sido estudiar la relación entre las geodésicas del modelo FPP y las líneas principales de corriente obtenidas en el modelo equivalente RRN a partir del PLA, considerando condiciones de ruido moderado y débil. Para ello, comenzaremos estudiando las 3 distribuciones uniformes consideradas en el estudio del modelo FPP presentado en la sección anterior:  $U(0.1, 9.9)$  con  $CV=0.566$ ,  $U(10, 20)$  con  $CV=0.192$  y  $U(1.0, 1.3)$  con  $CV=0.0753$ . Después extenderemos nuestro análisis a ruidos más altos utilizando un desorden de tipo exponencial que nos permitirá tunear de forma continua la intensidad del ruido. La principal novedad de nuestro enfoque es que las líneas principales de corriente no sólo serán comparadas con la geodésica minimizante (la geodésica  $k = 1$ ), sino también con las sucesivas  $k$ -geodésicas, es decir, con los siguientes  $k$ -ésimos caminos mínimos. En la siguiente sección mostramos los resultados obtenidos.

## 4. Resultados

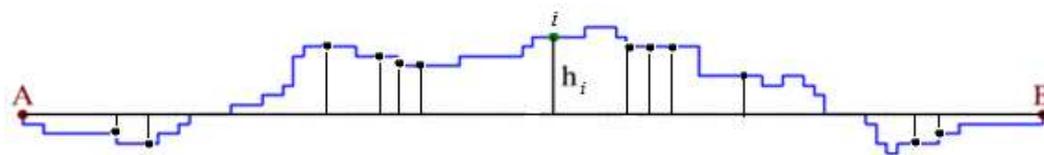
Comenzaremos esta sección de resultados estudiando algunas propiedades de escala de las líneas principales de corriente. En concreto nos fijaremos en la desviación lateral. Como vimos en el estudio del modelo FPP, la desviación lateral de las geodésicas escala con la distancia con un exponente  $2/3$  que está de acuerdo con la universalidad de KPZ. A continuación, estudiaremos cómo se distribuyen las líneas principales de corriente entre el espectro de  $k$ -geodésicas del modelo FPP equivalente. Para analizar este resultado emplearemos una interpretación termodinámica del sistema. Por último, estudiaremos una distribución de resistencias que nos permite obtener ruidos arbitrariamente grandes y veremos cómo cambia la distribución de las líneas de corriente con el ruido.

### 4.1 Escalado de las líneas principales de corriente

A continuación, estudiamos el comportamiento de escala de la desviación lateral de las líneas principales de corriente con el objeto de comprobar si es similar al de las geodésicas del modelo FPP y por tanto consistente con la clase de universalidad de KPZ.

En este caso no disponemos de un tiempo medio como en FPP, así que obtendremos una desviación lateral media,  $\langle h \rangle$ , dada por la media de los valores absolutos de las

distancias ortogonales de todos los nodos por los que pasa la línea de corriente (Fig. 4.1) a la recta que une el nodo central y el nodo que se trate, que estará en el eje o en la diagonal.



**Fig. 4.1.** Ejemplo de línea de corriente entre dos puntos, A y B. La desviación lateral media de la línea de corriente,  $\langle h \rangle$ , es la media de los valores absolutos de las distancias euclídeas de los puntos de red situados en la línea de corriente a la línea recta que une los dos puntos.

Así, por ejemplo, para un nodo  $i$  sobre la línea de corriente que une los puntos A y B, situándose éstos sobre el eje X, su distancia al eje es  $h_i = |y_i|$ , siendo  $|y_i|$  el valor absoluto de la coordenada y del punto  $i$ . La desviación lateral media  $\langle h \rangle$  de la línea de corriente es

$$\langle h \rangle = (\sum_{i=1}^m h_i) / m \tag{4.1}$$

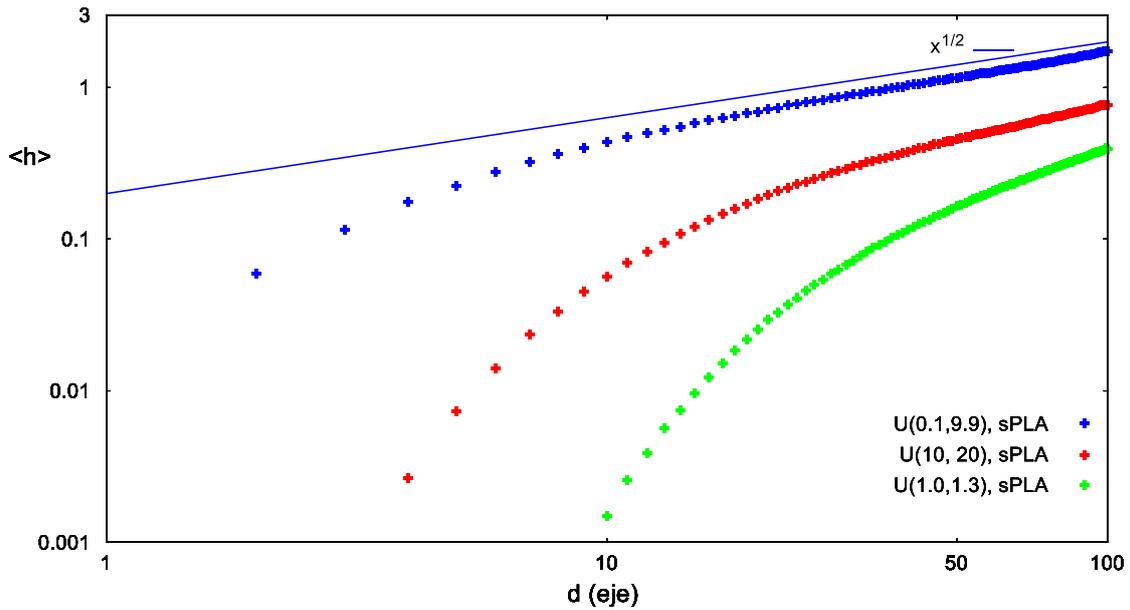
donde  $m$  es el número de nodos de la red situados en la línea de corriente.

El análisis se realiza a puntos sobre el eje y la diagonal, en primer lugar, para las 3 distribuciones uniformes y los dos algoritmos presentados anteriormente: sPLA y dPLA, considerando un tamaño de red fijo  $L = 100$ . Después se analiza el efecto del tamaño del sistema, con ambos algoritmos, para una misma distribución y distintos tamaños de  $L$ : 100, 200, 500 y 1000. Debido a la duración de las simulaciones, sólo se han podido obtener resultados con  $L=1000$  en el caso dPLA.

#### 4.1.1 Escalado sobre los ejes

##### A. Resultados del sPLA

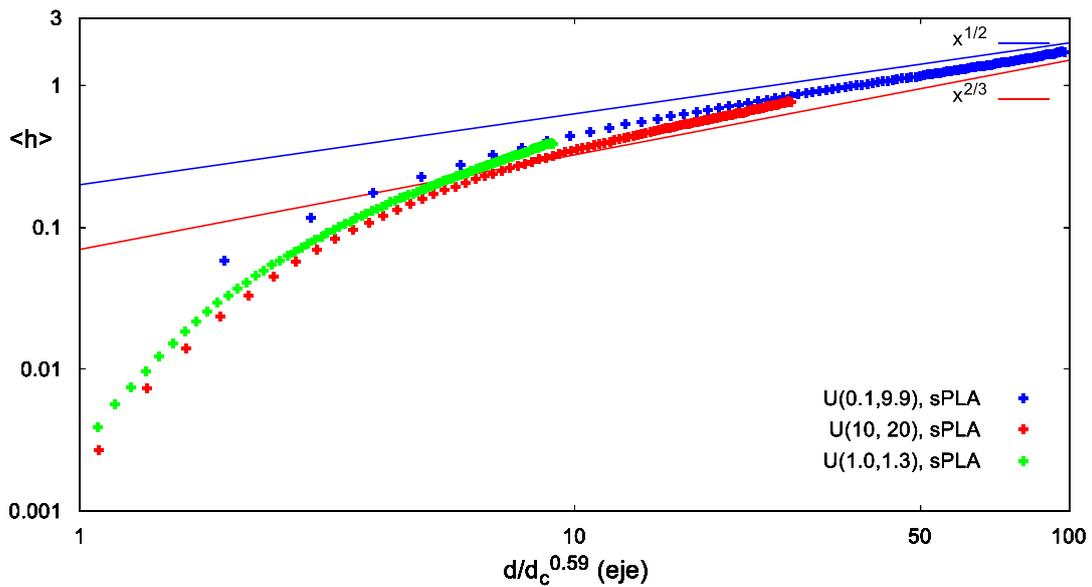
En la Fig. 4.2 se muestra el valor promedio de la desviación lateral media de las líneas principales de corriente,  $\langle h \rangle$ , en función de la distancia de los nodos al origen, en una red de  $L=100$ , para las tres distribuciones de tiempos de enlace estudiadas. Este valor promedio ha sido calculado a partir de las  $N_{realiz} \times N_{part}$  líneas principales de corriente obtenidas en cada caso.



**Fig. 4.2.** Promedio de la desviación lateral media,  $\langle h \rangle$ , de las líneas principales de corriente a puntos sobre el eje, obtenidas con el algoritmo sPLA, en función de su distancia  $d$  al origen. Resultados obtenidos con una red cuadrada de  $L=100$ ,  $N_{realiz}=1000$  y  $N_{part}=1000$ , para 3 distribuciones de probabilidad uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$ . La representación se muestra en escala logarítmica. La recta de pendiente  $1/2$  representa el comportamiento de escala con exponente  $1/z=1/2$ .

En la figura vemos que, de forma similar al modelo FPP (Fig. 2.6), existe una distancia crítica,  $d'_c$ , para cada distribución de probabilidad, en la cual cambia el comportamiento de  $\langle h \rangle$ . Para  $d \gg d'_c$ , las líneas principales de corriente siguen un escalado asintótico del tipo  $\langle h \rangle \sim d^{1/2}$ , independientemente de la distribución utilizada, que no se ajusta a la clase de universalidad de KPZ. Si  $d \ll d'_c$  (comportamiento preasintótico),  $\langle h \rangle \rightarrow 0$ , y no se observa desviación lateral, de modo que las líneas de corriente siguen el eje.

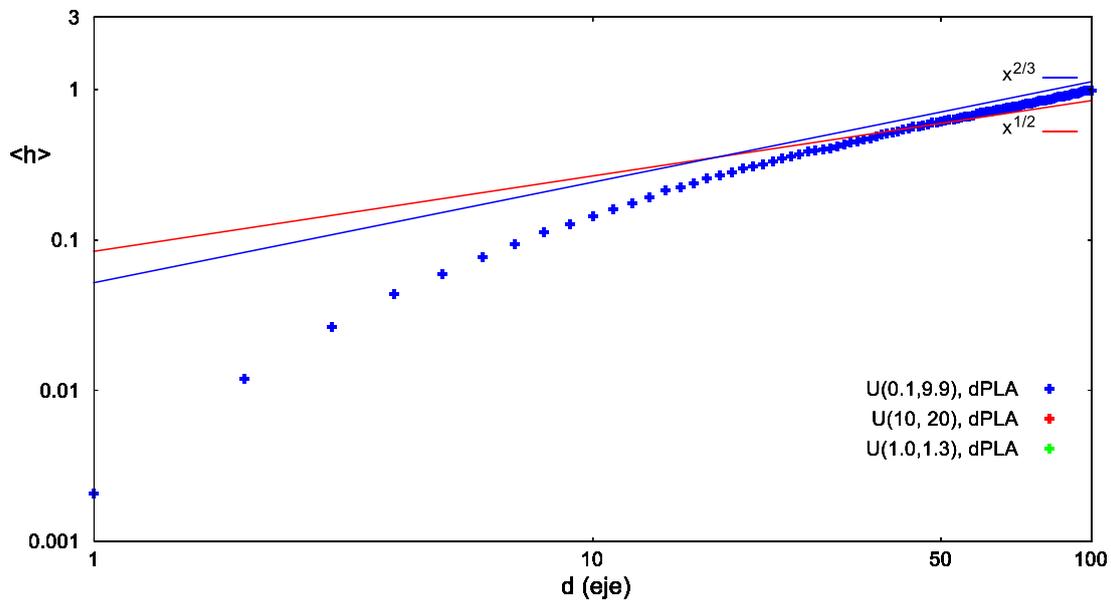
En la Fig. 4.3 hemos intentado colapsar los tres comportamientos mostrados en la figura anterior, y el mejor resultado se consigue con el reescalado de la distancia  $d$  mediante una nueva distancia crítica  $d'_c = d_c^{0.59}$  donde  $d_c$  es la distancia crítica en el modelo FPP. Recordamos que  $d_c = 1/3(CV)^{-2}$ . Vemos que las curvas se aproximan, pero no llegan a colapsar satisfactoriamente. Este resultado muestra que la distancia crítica es menor en el modelo RRN. Esto puede ser debido a que el algoritmo sPLA incrementa la intensidad del ruido en la generación de las líneas principales de corriente, por lo que la desviación con respecto al eje se produce antes que en el modelo FPP.



**Fig. 4.3.** Mismos resultados que en la Fig. 4.2 pero ahora la distancia  $d$  al origen está reescalada con la distancia crítica  $d'_c = d_c^{0.59}$ . La representación se muestra en escala logarítmica. Las rectas de pendientes  $2/3$  y  $1/2$  representan los comportamientos de escala con exponentes  $1/z = 2/3$  y  $1/2$ .

### B. Resultados del dPLA

En la Fig. 4.4 se representan los resultados anteriores (sin reescalar) para las líneas principales de corriente obtenidas del modelo dPLA.



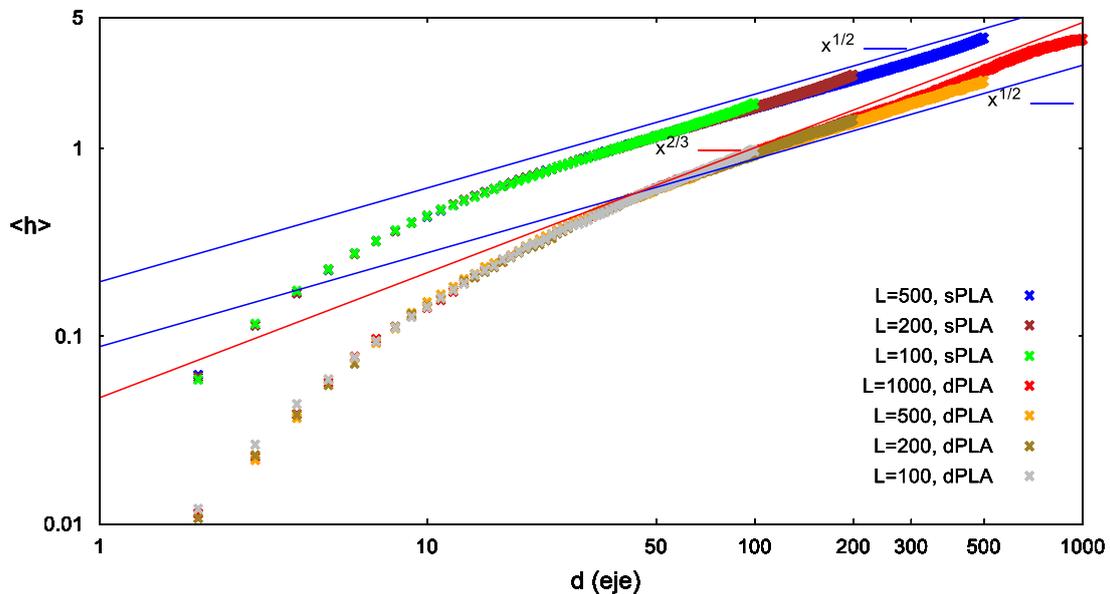
**Fig. 4.4.** Promedio de la desviación lateral media,  $\langle h \rangle$ , de las líneas principales de corriente a puntos sobre el eje, obtenidas con el algoritmo dPLA, en función de su distancia  $d$  al origen. Resultados obtenidos con una red cuadrada de  $L=100$ ,  $N_{realiz}=1000$  y  $N_{part}=1$ , para 3 distribuciones uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$ . Los resultados para  $U(10, 20)$  y  $U(1.0, 1.3)$  no se muestran porque los valores obtenidos fueron cero. La representación se muestra en escala logarítmica. Las rectas de pendientes  $2/3$  y  $1/2$  representan los comportamientos de escala con exponentes  $1/z = 2/3$  y  $1/2$ .

La gráfica para la distribución  $U(0.1, 9.9)$  muestra un comportamiento que parece converger hacia un escalado  $\langle h \rangle \sim d^{2/3}$ , aunque como veremos en el apartado C, cuando se incrementa el tamaño  $L$ , el escalado asintótico parece modificar su tendencia a  $\langle h \rangle \sim d^{1/2}$ , el mismo que el obtenido con sPLA (Fig. 4.2). En cambio, con las distribuciones  $U(10, 20)$  y  $U(1.0, 1.3)$  no se observa desviación lateral y, por tanto, las líneas principales de corriente siguen siempre el eje. Estas dos últimas distribuciones, como ya hemos indicado, están categorizadas como ruido débil. Por su parte,  $U(0.1, 9.9)$  es una distribución de ruido moderado, y el camino óptimo presenta fluctuaciones respecto al eje, lo que se traduce en que la corriente se distribuye por líneas principales de corriente en torno al eje. Esto lo comprobaremos en el apartado 4.2.

Los resultados mostrados en la Fig. 4.4 parecen indicar que la distancia crítica  $d'_c$  asociada al algoritmo dPLA es mucho mayor que  $d_c$ , ya que en los casos  $U(10, 20)$  y  $U(1.0, 1.3)$  y una red con  $L=100$  no hay ninguna desviación lateral con respecto al eje. A continuación, cuando estudiemos el efecto del tamaño del sistema, comprobaremos que esto es así también para  $U(0.1, 9.9)$ . Podemos concluir que el algoritmo sPLA reduce la distancia crítica con respecto al modelo FPP, mientras que el algoritmo dPLA la aumenta.

### C. Efecto del tamaño del sistema

Queremos comprobar cómo afecta el tamaño de la red en el comportamiento de la desviación lateral a lo largo del eje, aplicando los algoritmos sPLA y dPLA, y verificar si es universal. En la Fig. 4.5 se recogen los resultados obtenidos con la distribución  $U(0.1, 9.9)$  y diferentes valores de  $L$ : 100, 200, 500 y 1000, utilizando ambos algoritmos. Como ya hemos señalado, con  $L=1000$  se han obtenido resultados sólo en el caso del dPLA.



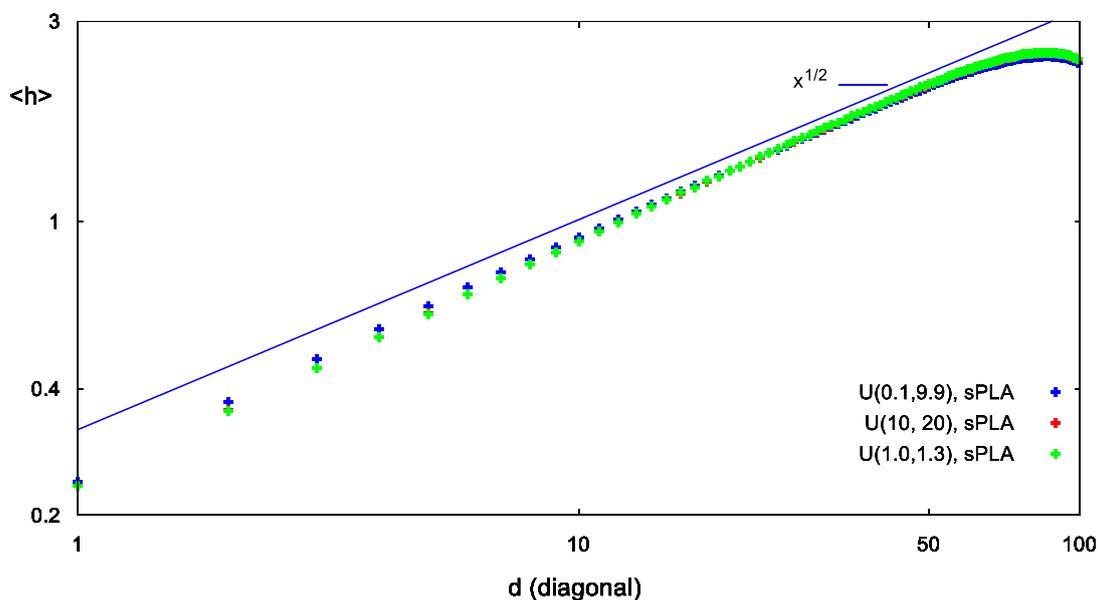
**Fig. 4.5.** Efecto del tamaño del sistema sobre la desviación lateral media  $\langle h \rangle$  de las líneas principales de corriente a puntos sobre el eje, obtenidas con los algoritmos sPLA y dPLA. Resultados obtenidos con redes cuadradas de tamaños  $L=100, 200, 500$  y  $1000$ , la distribución  $U(0.1, 9.9)$ , y  $N_{realiz}=1000$ . Para  $L=1000$  sólo se muestran los resultados del dPLA. Para sPLA,  $N_{part}=1000$ ; dPLA,  $N_{part}=1$ . Escala logarítmica. Las líneas rectas de pendientes  $1/2$  y  $2/3$  representan los comportamientos de escala de exponentes  $1/z=1/2$  y  $1/z=2/3$ .

Vemos que, en ambos casos, las curvas para diferentes tamaños se superponen y parece que inicialmente (régimen preasintótico) siguen un escalado  $\langle h \rangle \sim d^{1/2}$  (tipo gaussiano). Sin embargo, en la simulación con  $L = 1000$  del dPLA se aprecia la posibilidad de que exista crossover, en una distancia cercana a  $d = 500$ , pero no queda claro el escalado asintótico que seguiría. Podemos concluir que, con los tamaños de red que hemos utilizado, no podemos asegurar que el escalado asintótico siga la universalidad de KPZ, como el modelo FPP. Para aclarar esta cuestión serían necesarias simulaciones en redes más grandes que las consideradas en este TFM. En la figura también apreciamos lo que comentábamos más arriba, la distancia crítica del modelo dPLA es mayor que la del modelo sPLA. Por último, es conveniente señalar otro resultado esperado, la desviación lateral de las líneas de corriente obtenidas del modelo sPLA es sensiblemente mayor que la de las obtenidas mediante el dPLA.

#### 4.1.2 Escalado sobre las diagonales

##### A. Resultados del sPLA

En la Fig. 4.6 se muestra el valor promedio de la desviación lateral media de las líneas principales de corriente,  $\langle h \rangle$ , en función de la distancia de los nodos de la diagonal al origen, en una red de  $L = 100$ , para las tres distribuciones de tiempos de enlace estudiadas. De nuevo, este valor promedio ha sido obtenido a partir de las  $N_{realiz} \times N_{part}$  líneas principales de corriente obtenidas en cada caso.



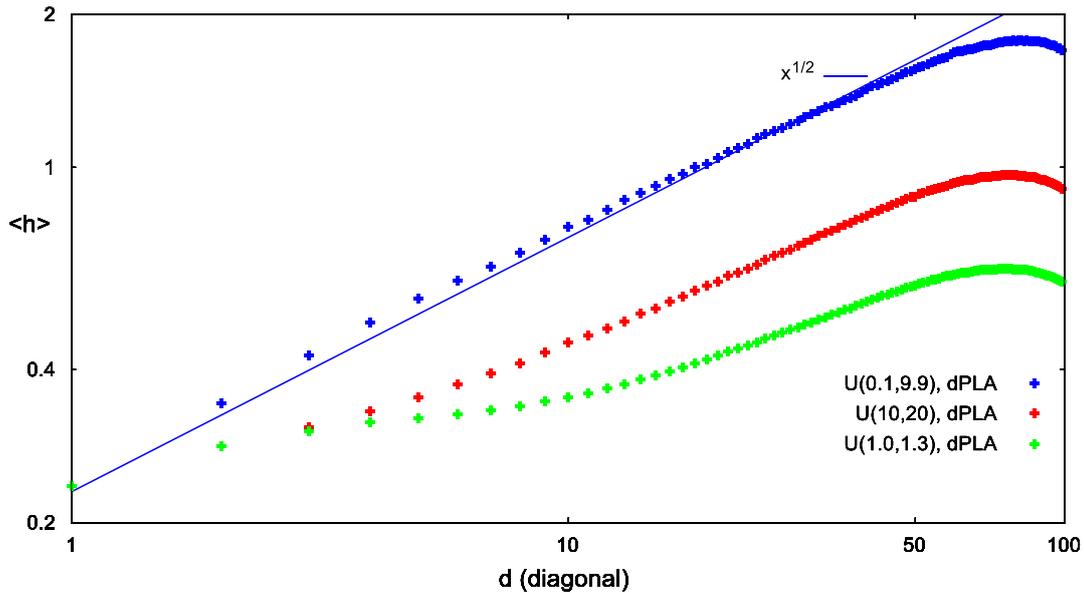
**Fig. 4.6.** Promedio de la desviación lateral media,  $\langle h \rangle$ , de las líneas principales de corriente a puntos sobre la diagonal, obtenidas con el algoritmo sPLA en función de su distancia  $d$  al origen. Resultados obtenidos con una red cuadrada de  $L=100$ ,  $N_{realiz}=1000$  y  $N_{part}=1000$ , para 3 distribuciones de probabilidad uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$ . La representación se muestra en escala logarítmica. La recta con pendiente  $1/2$  representa el comportamiento de escala con exponente  $1/z=1/2$ .

Las curvas de las 3 distribuciones colapsan prácticamente desde el nodo central, al igual que en el modelo FPP, manteniendo un escalado del tipo gaussiano  $\langle h \rangle \sim d^{1/2}$ , hasta

que en las proximidades de la frontera el escalado decae de modo significativo. Es debido a que a medida que las líneas principales de corriente se aproximan a las esquinas de la red, aparecen efectos debidos a la geometría de la frontera.

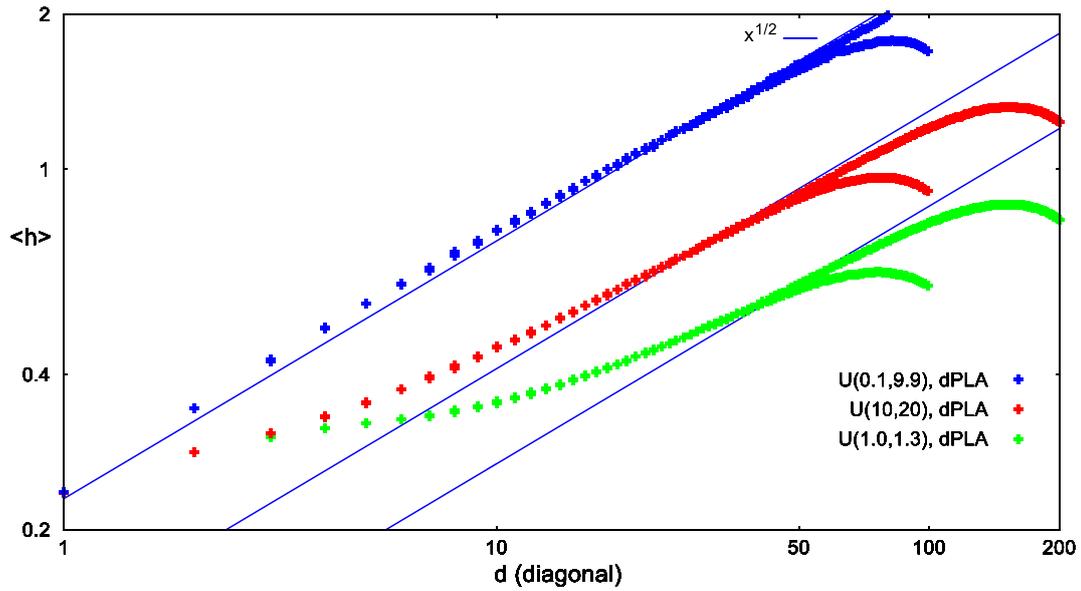
## B. Resultados del dPLA

En la Fig. 4.7 se muestra el valor promedio de la desviación lateral media de las líneas principales de corriente,  $\langle h \rangle$ , en función de la distancia de los nodos de la diagonal al origen, en una red de  $L = 100$ , para las tres distribuciones de tiempos de enlace estudiadas.



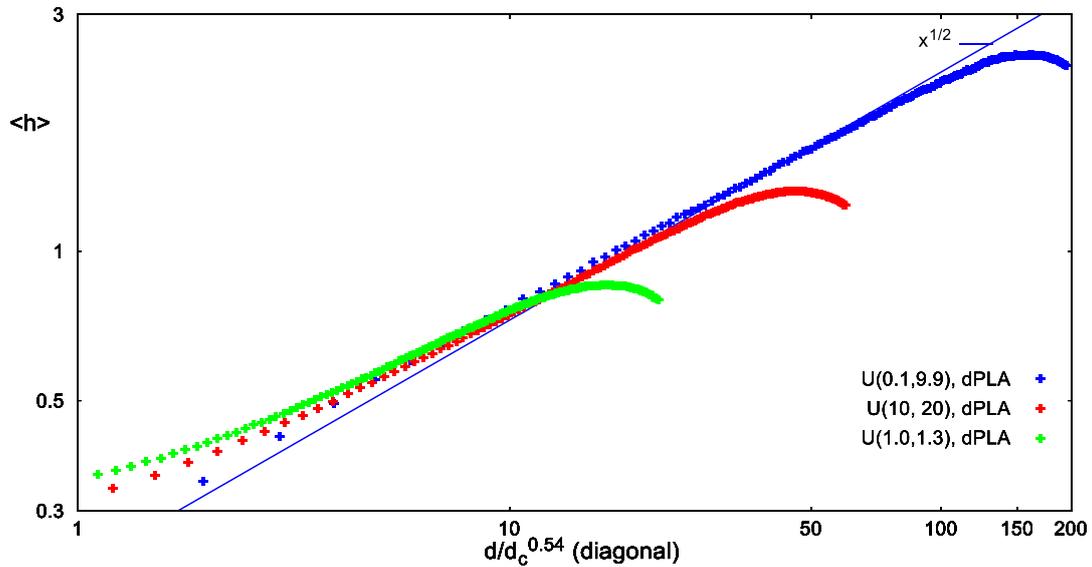
**Fig. 4.7.** Promedio de la desviación lateral media,  $\langle h \rangle$ , de las líneas principales de corriente a puntos sobre la diagonal, obtenidas con el algoritmo dPLA en función de su distancia  $d$  al origen. Resultados obtenidos con una red cuadrada de  $L=100$ ,  $N_{realiz}=1000$  y  $N_{part}=1$ , para 3 distribuciones de probabilidad uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$ . La representación se muestra en escala logarítmica. La recta con pendiente  $1/2$  representa el comportamiento de escala con exponente  $1/z=1/2$ .

A diferencia del eje, las distribuciones  $U(10, 20)$  y  $U(1.0, 1.3)$  sí presentan una desviación lateral debido a que, por la geometría de la red, la propia diagonal nunca puede ser una línea de corriente, por lo que siempre habrá una desviación lateral no nula. Las curvas para las 3 distribuciones están separadas, a diferencia del caso del sPLA (Fig. 4.6). El comportamiento de las curvas parece converger hacia el escalado  $\langle h \rangle \sim d^{1/2}$ , al igual que en el caso sPLA. En la Fig. 4.8 se representan los resultados para  $L = 100$  y  $200$ , y parecen confirmar este comportamiento.



**Fig. 4.8.** Mismos resultados que en la Fig. 4.7 pero ahora con redes de  $L=100$  y  $200$ . Las rectas de pendientes  $1/2$  representan el comportamiento de escala con exponentes  $1/z = 1/2$ .

En la Fig. 4.9 comprobamos para el caso  $L=200$  que si reescalamos la distancia  $d$  con  $d_c^{0.54}$ , las 3 distribuciones parecen colapsar.

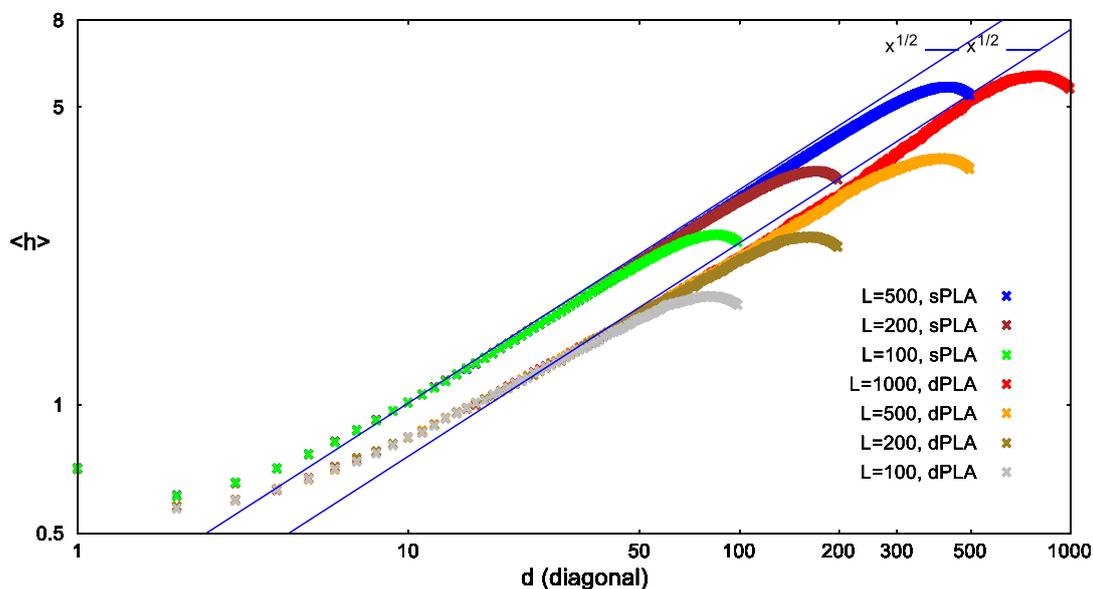


**Fig. 4.9.** Mismos resultados que en la Fig. 4.7 pero ahora con  $L=200$  y la distancia  $d$  al origen está reescalada con la distancia crítica  $d'_c = d_c^{0.54}$ . La recta de pendiente  $1/2$  representa el comportamiento de escala de exponente  $1/z=1/2$ .

### C. Efecto del tamaño del sistema

A continuación, comprobamos cómo afecta el tamaño de la red en el comportamiento de la desviación lateral a lo largo de la diagonal, aplicando los algoritmos sPLA y dPLA, y si se deduce que su comportamiento es universal.

En la Fig. 4.10 se recogen los resultados obtenidos con la distribución  $U(0.1, 9.9)$  y diferentes valores de  $L$ : 100, 200, 500 y 1000, utilizando ambos algoritmos. Como en el eje, con  $L=1000$  se han obtenido resultados sólo en el caso del dPLA.



**Fig. 4.10.** Efecto del tamaño del sistema sobre la desviación lateral media  $\langle h \rangle$  de las líneas principales de corriente a puntos sobre la diagonal, obtenidas con los algoritmos sPLA y dPLA. Resultados obtenidos con redes cuadradas de tamaños  $L=100, 200, 500$  y  $1000$ , la distribución  $U(0.1, 9.9)$  y  $N_{realiz}=1000$ . Con  $L=1000$  sólo se muestran resultados para el caso dPLA. Para sPLA,  $N_{part}=1000$ ; dPLA,  $N_{part}=1$ . La representación se muestra en escala logarítmica. Las rectas de pendientes  $1/2$  representan el comportamiento de escala de exponente  $1/z=1/2$ .

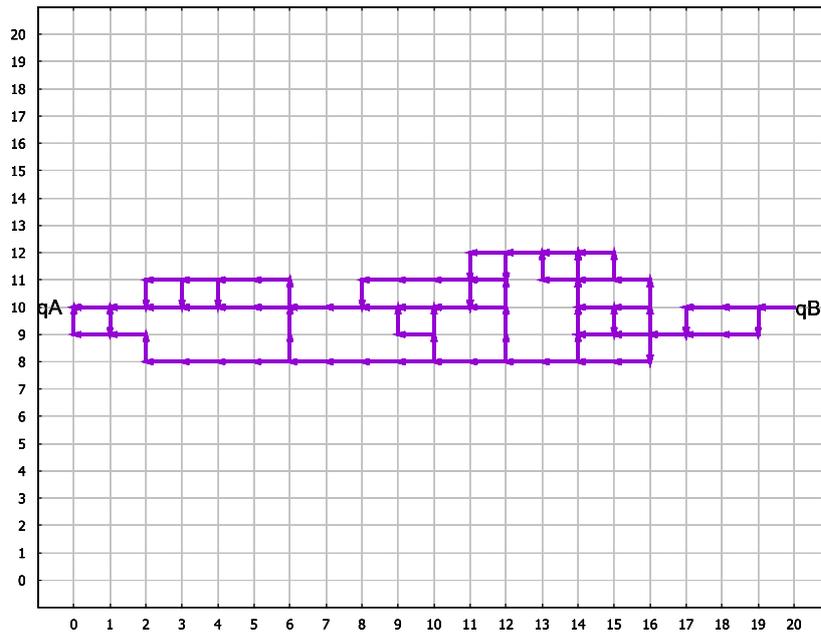
Al igual que en el eje, las curvas para diferentes valores de  $L$  se superponen e inicialmente parece que siguen un escalado  $\langle h \rangle \sim d^{1/2}$ , pero en la simulación con  $L=1000$  del dPLA se aprecia la posibilidad de que exista un crossover, en una distancia cercana a  $d=500$ , aunque no queda claro el escalado asintótico que seguiría. De nuevo, habría que recurrir a simulaciones con redes de tamaños superiores a las empleadas aquí.

## 4.2 Distribución de las líneas principales de corriente

Nuestro propósito ahora es estudiar cómo se distribuyen las líneas principales de corriente entre las  $k$ -geodésicas del modelo FPP equivalente. El estudio lo realizaremos con los dos algoritmos de traza (sPLA y dPLA). También usaremos una red más pequeña, de tamaño  $L \times L$  con  $L=20$ , con la siguiente configuración. Si suponemos que la esquina inferior izquierda de la red coincide con el origen, entonces fijamos a 1 el potencial del punto A con coordenadas  $(0, L/2)$ , y a 0 el potencial del punto B con coordenadas  $(L, L/2)$ :  $V_A = 1$  y  $V_B = 0$ . De este modo, el punto A actuará como única fuente y el punto B como único sumidero. En el resto de nodos se aplica la ley de Kirchhoff.

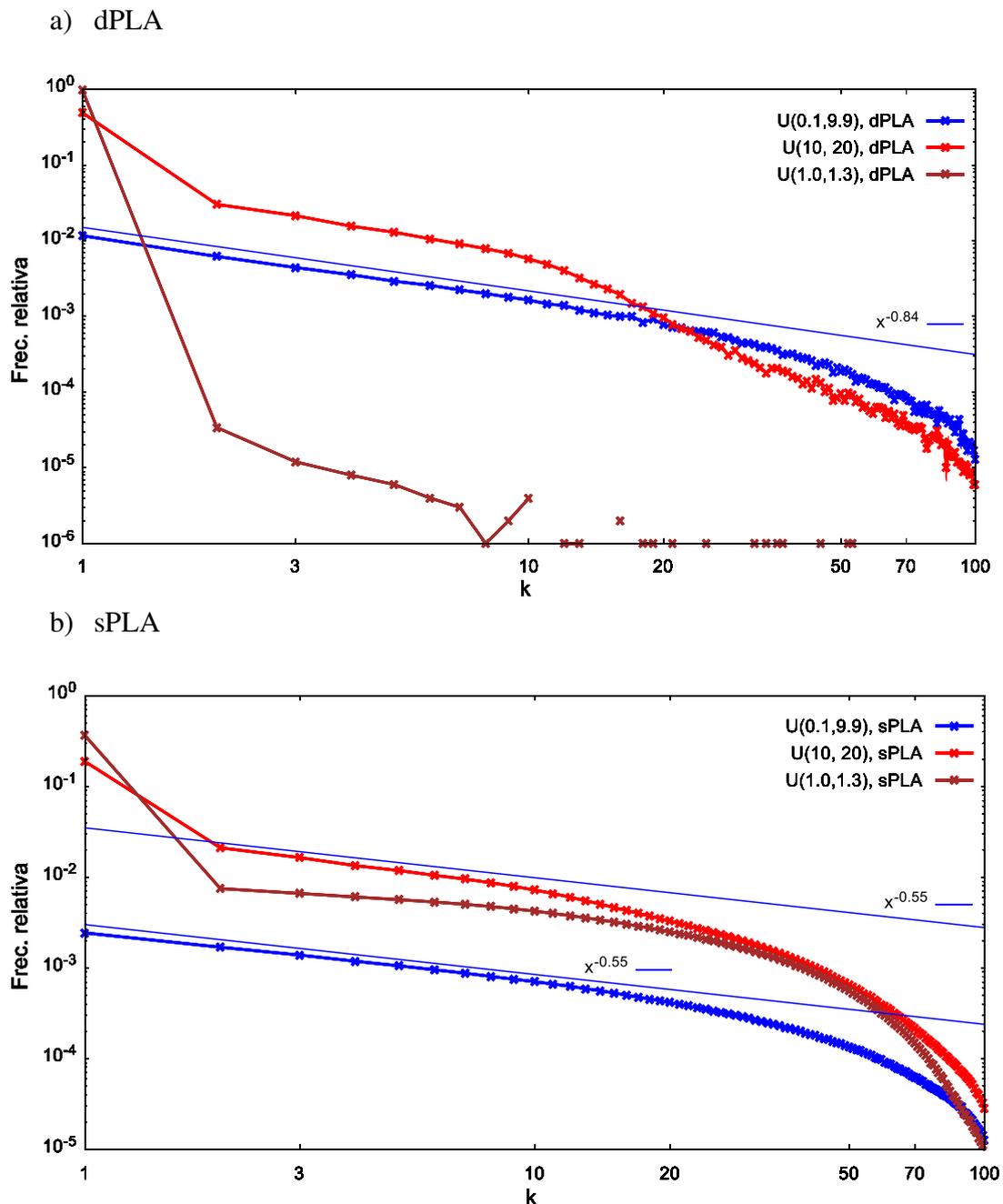
El procedimiento que hemos seguido es el siguiente. Sobre cada una de las realizaciones (distintas configuraciones de resistencias aleatorias para una red de tamaño  $L$ ), primero aplicamos el algoritmo Dijkstra, con el que obtenemos la geodésica o camino de resistencia mínima que va desde el nodo A a cada uno de los nodos de la red. Después, al

camino óptimo entre A y B le aplicamos el algoritmo de Yen, según se indica en el apartado 2.5, para deducir las  $k$ -geodésicas o  $k$ -caminos mínimos de resistencia. En la Fig. 4.11 se muestra un ejemplo de los 20 primeros caminos mínimos obtenidos para una red de  $L=20$ . Posteriormente, lanzamos 1 partícula (siendo, en total,  $N_{part}=1$  con el dPLA y  $N_{part}=10^4$  con el sPLA, por cada realización de ruido) desde B hasta A y comprobamos si la línea de corriente sigue alguna de las  $k$ -geodésicas obtenidas. Este proceso se lleva a cabo un número total de realizaciones ( $N_{realiz}$ ) y calculamos la frecuencia relativa con la que se obtienen las  $k$ -geodésicas. Por último, representamos el histograma en función del orden  $k$  de la geodésica, comenzando en  $k=1$  que representa el camino mínimo global.



**Fig. 4.11.** Modelo de Yen en una RRN cuadrada. Se representan los 20 primeros caminos de resistencia mínima entre A y B. Resultados obtenidos con  $L=20$  y una distribución  $U(0.1, 9.9)$ . La red está definida con los potenciales  $V(A)=1$  y  $V(B)=0$ .

En la Fig. 4.12 se representa el histograma obtenido con las distribuciones uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$  utilizadas hasta ahora, que sabemos que están clasificadas como ruido débil/moderado, para ambos algoritmos.



**Fig. 4.12.** Frecuencia relativa con la que una línea principal de corriente entre los puntos A y B, obtenida mediante (a) dPLA y (b) sPLA, coincide con la geodésica de orden  $k$ . Resultados en una red cuadrada de  $L=20$  con las tres distribuciones uniformes  $U(t_{min}, t_{max})$  empleadas.  $N_{realiz} = 10^6$  y  $N_{part} = 1$  con dPLA y  $N_{realiz} = 10^6$  y  $N_{part} = 10^4$  con sPLA, para los primeros 100 caminos mínimos. Escala logarítmica. Las rectas de pendientes  $-0.84$  y  $-0.55$  representan los comportamientos de escala con exponentes  $-0.84$  y  $-0.55$ .

Se aprecia que a medida que el ruido es más débil, para ambos algoritmos, el camino óptimo ( $k = 1$ ) se toma con mayor frecuencia relativa. Por ejemplo, con dPLA, para  $U(1.0, 1.3)$ , la distribución más débil de las utilizadas, las líneas de corriente siguen generalmente el camino óptimo, con una frecuencia muy cercana a 1, por lo que la corriente no se distribuye prácticamente por el resto de caminos. Esperamos que en el límite de ruido

muy débil, o caso homogéneo ( $CV \rightarrow 0$ ), esta distribución se aproxime a la delta de Kronecker  $\delta_{1k}$ . Con  $U(10, 20)$ , la frecuencia del camino óptimo es 0.5 y con  $U(0.1, 9.9)$ , 0.01, y, en este orden, la corriente está más distribuida. Lo mismo sucede con sPLA, aunque baja la frecuencia para  $k=1$  y la corriente está aún más distribuida por el resto de caminos que con dPLA. Puede concluirse que, en condiciones de ruido débil o moderado, al aumentar la intensidad de ruido, la distribución en forma de delta de Dirac, correspondiente al límite de ruido débil, evoluciona hacia un histograma mucho más distribuido que, inicialmente, muestra un claro comportamiento en ley de potencias, con exponentes  $-0.84$  para dPLA y  $-0.55$  para sPLA. El decaimiento con sPLA es menor que con dPLA debido a que el primer algoritmo introduce fluctuaciones que permiten visitar con mayor probabilidad los caminos de mayor  $k$ .

Por otra parte, la caída final de las curvas podría deberse a algún efecto de tamaño finito, por lo que deberíamos aumentar  $L$  para comprobarlo. Pero también podría deberse al hecho de que no estamos estrictamente en el punto de crossover de la intensidad del ruido, así que podríamos esperar que el comportamiento en ley de potencias se extendiese a órdenes mayores a medida que nos aproximamos al punto. Un resultado que apoya esta hipótesis es el hecho de que la distribución para  $U(10, 20)$ , con dPLA, parece mostrar este comportamiento, aunque en un intervalo de órdenes menor. Esto también se percibe con sPLA, ya que, conforme incrementamos la intensidad del ruido, se añaden puntos de órdenes mayores a la ley de potencias. Como veremos cuando estudiemos el desorden exponencial, este comportamiento aparece siempre que el ruido es débil.

Hemos pensado que podría resultar interesante abordar el análisis desde un enfoque termodinámico, y considerar que nuestra red FPP es un sistema en equilibrio con volumen y temperatura  $T$  constantes, en el que la  $k$ -geodésica entre los puntos A y B representa un microestado cuyo hamiltoniano  $H_k$  está dado por la suma de los tiempos de paso de los enlaces recorridos por el camino, es decir, por el tiempo de llegada entre los dos puntos cuando seguimos esa  $k$ -geodésica, y que denotamos mediante  $T_k$ :

$$H_k = \sum t_{ij} \equiv T_k \quad (i, j) \in k\text{-geodésica} \quad (4.2)$$

Siguiendo este argumento tenemos que la función de partición de nuestro sistema estará dada por

$$Z = \sum_k \exp\left(-\frac{1}{T} T_k\right) \quad (4.3)$$

donde la suma se extiende a todas las  $k$ -geodésicas entre los dos puntos (como la red es finita, este número será finito, aunque aumenta muy rápidamente con  $L$ ). De este modo, la probabilidad  $P_k$  de que el camino entre los dos puntos esté dado por la  $k$ -geodésica es

$$P_k = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{1}{T} T_k\right) \quad (4.4)$$

Cuando  $T = 0$ , el efecto de la entropía es irrelevante y domina la energía interna de cada microestado, por lo que el camino entre los dos puntos será el camino mínimo  $k = 1$  (estado fundamental). Cuando  $T \neq 0$ , la probabilidad de obtener cada camino, relativa a la del camino mínimo, denominada  $P_{k1}$ , será

$$P_{k1} \equiv \frac{P_k}{P_1} = \exp\left[-\frac{1}{T}(T_k - T_1)\right] \tag{4.5}$$

Para obtener esta cantidad a partir de nuestras simulaciones hemos utilizado estas dos aproximaciones:

$$P_{k1,a} = \exp\left[-\frac{1}{T}(\langle T_k \rangle - \langle T_1 \rangle)\right] \tag{4.6a}$$

y

$$P_{k1,b} = \langle \exp\left[-\frac{1}{T}(T_k - T_1)\right] \rangle \tag{4.6b}$$

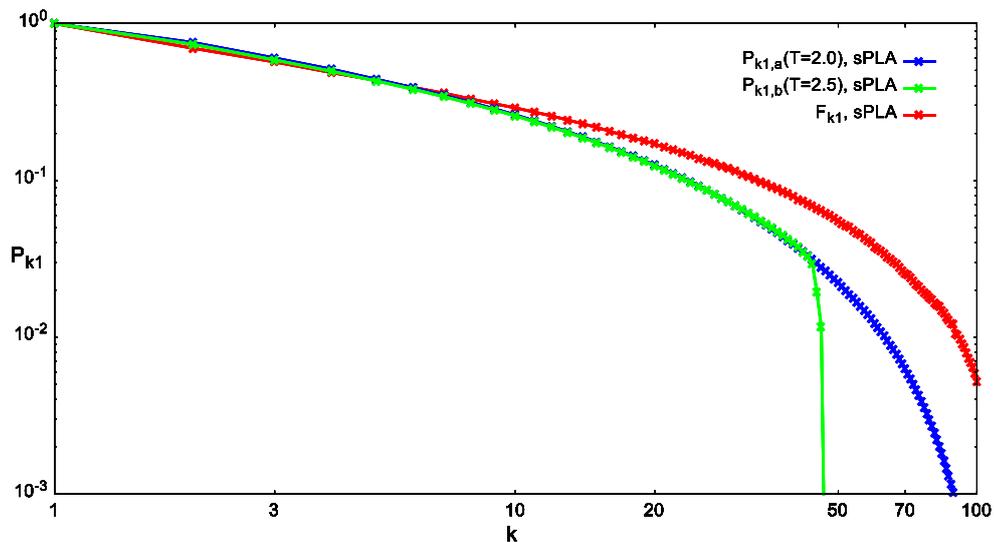
donde  $\langle \dots \rangle$  representa el promedio sobre las  $N_{realiz}$  realizaciones del ruido.

Por otro lado, en el histograma representado en la Fig. 4.12 disponemos de las frecuencias relativas con las que los  $k$ -caminos mínimos son escogidos por las líneas principales de corriente o, lo que es lo mismo, la probabilidad de que la línea principal de corriente (escogida según el algoritmo sPLA o dPLA) sea una de las  $k$ -geodésicas. Llamemos  $F_k$  a esa probabilidad y definimos  $F_{k1}$  como la relación entre la probabilidad de obtener la  $k$ -geodésica y la probabilidad de obtener el camino óptimo:  $F_{k1} = F_k/F_1$ .

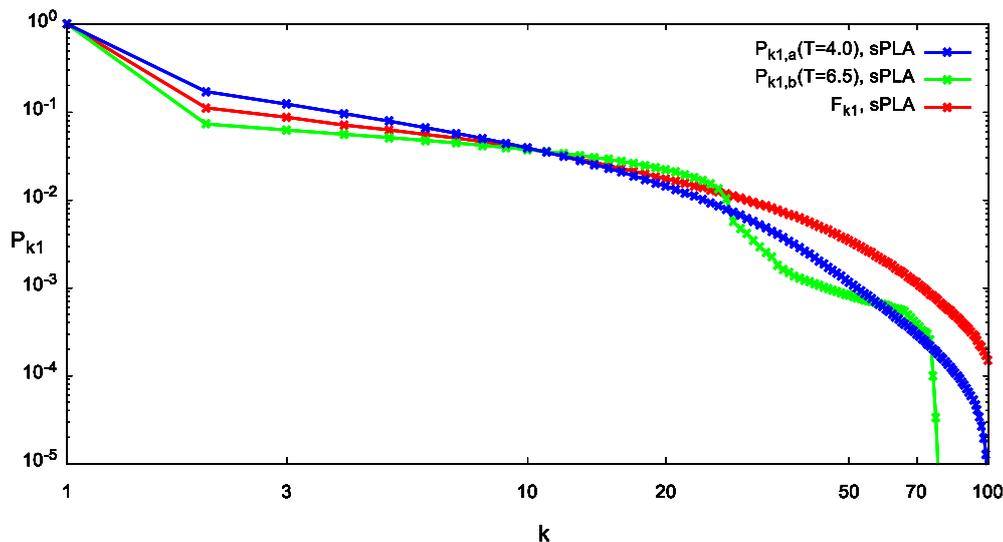
Lo que pretendemos es, para cada una de las 3 distribuciones uniformes, y de forma separada, representar en la misma figura  $F_{k1}$  y las dos aproximaciones de  $P_{k1}$  dadas en las Ecs. (4.6a) y (4.6b) frente a  $k$ . Como  $P_{k1}$  depende de la temperatura  $T$ , consideraremos aquella temperatura que más aproxime los puntos de  $P_{k1}$  a la curva  $F_{k1}$ , para las dos aproximaciones y para los dos algoritmos utilizados. Para deducir  $T$  no hemos empleado ningún tipo de ajuste, sino que ha sido de un modo muy cualitativo probando con diversas temperaturas.

A continuación, mostramos los resultados obtenidos del algoritmo sPLA.

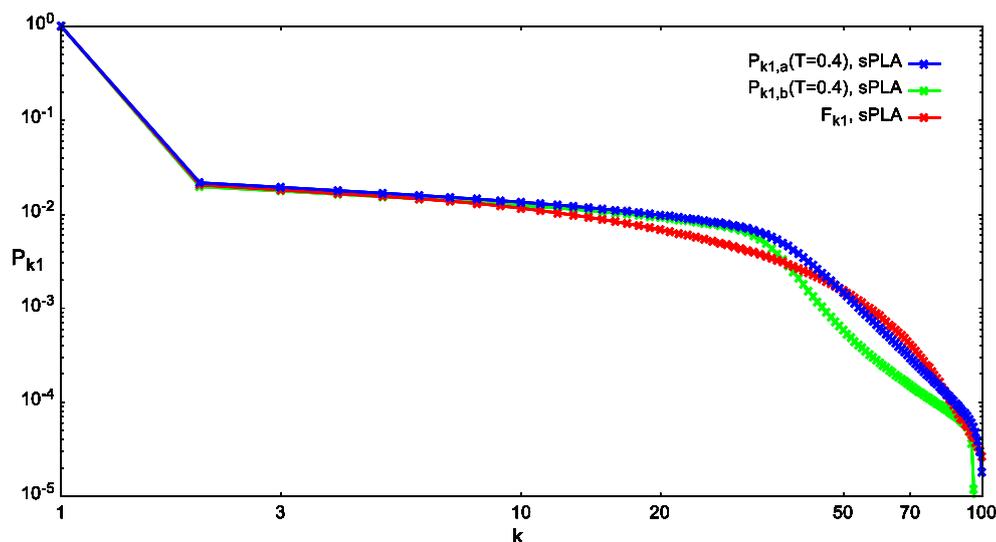
a)  $U(0.1, 9.9)$



b)  $U(10, 20)$



c)  $U(1.0, 1.3)$



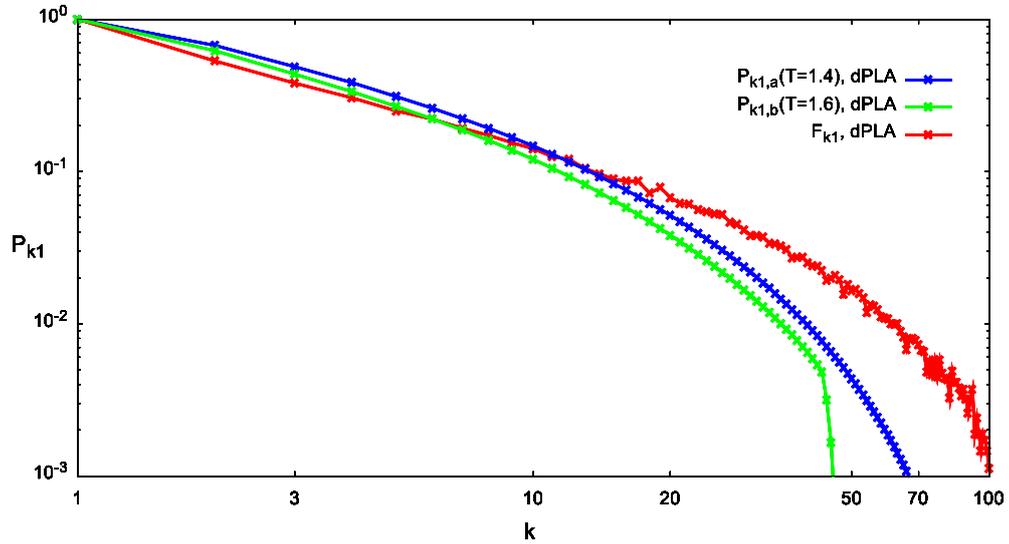
**Fig. 4.13.** Modelo termodinámico para cada distribución uniforme  $U(t_{min}, t_{max})$ , usando sPLA y las dos aproximaciones. (a)  $U(0.1, 9.9)$ ; (b)  $U(10, 20)$ ; (c)  $U(1.0, 1.3)$ . Resultados obtenidos en una red cuadrada de  $L=20$ ,  $N_{realiz}= 10^6$ ,  $N_{part}= 10^4$ , para los primeros 100 caminos mínimos. Escala logarítmica. La temperatura que más aproxima las curvas, en cada aproximación, aparece indicada en la leyenda de la figura.

Comprobamos que nuestro modelo termodinámico reproduce bastante bien los resultados del algoritmo sPLA en los órdenes más bajos (especialmente en las distribuciones  $U(0.1, 9.9)$  y  $U(1.0, 1.3)$ ), pero falla en los órdenes altos. Las temperaturas que mejores aproximaciones han proporcionado son, según sea  $P_{k1,a}$  ó  $P_{k1,b}$ ,  $T = 2.0$  y  $T = 2.5$  para  $U(0.1, 9.9)$ ,  $T = 4.0$  y  $T = 6.5$  para  $U(10, 20)$  y  $T = 0.4$ , en ambos casos, para  $U(1.0, 1.3)$ . Las temperaturas son similares en ambas aproximaciones para  $U(1.0, 1.3)$  y varían sensiblemente en los casos de  $U(0.1, 9.9)$  y  $U(10, 20)$ . En todos los casos tenemos que  $T > 0$  y, por tanto,

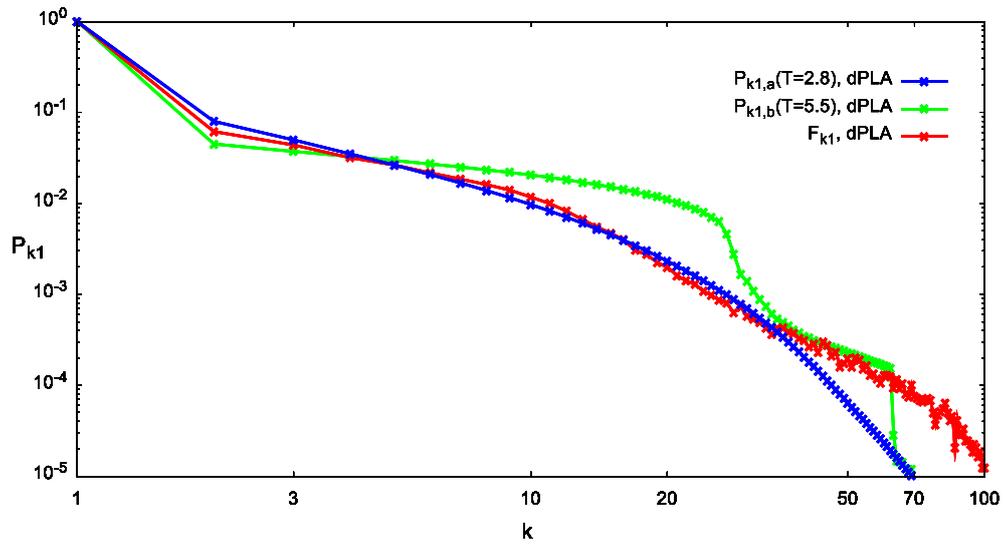
la corriente se distribuye entre todos los caminos mínimos debido a la entropía que se genera con estas distribuciones, como se aprecia en la figura 4.12b.

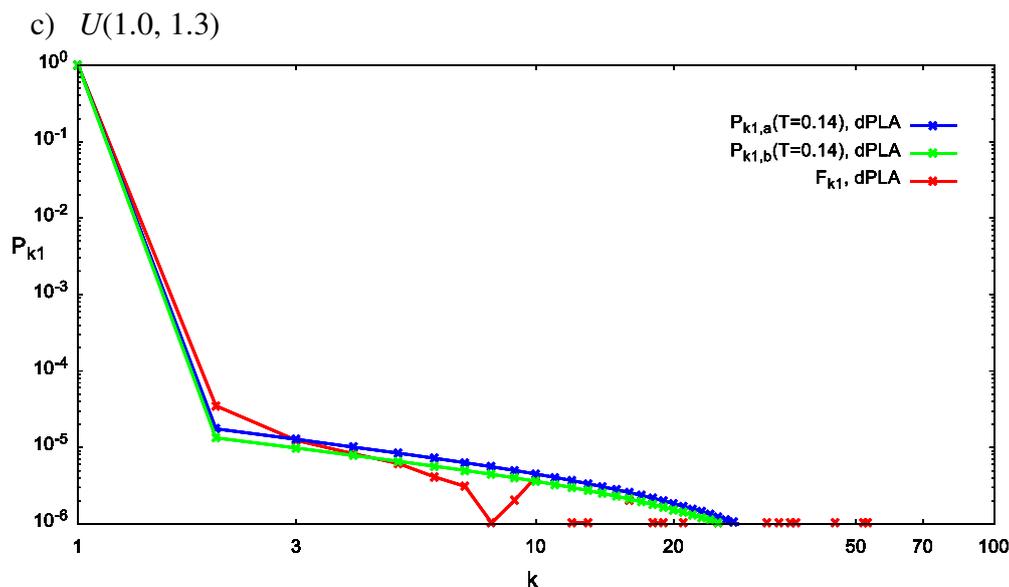
Ahora mostramos los resultados obtenidos del algoritmo dPLA.

a)  $U(0.1, 9.9)$



b)  $U(10, 20)$





**Fig. 4.14.** Modelo termodinámico para cada distribución uniforme  $U(t_{min}, t_{max})$ , usando dPLA y las dos aproximaciones. (a)  $U(0.1, 9.9)$ ; (b)  $U(10, 20)$ ; (c)  $U(1.0, 1.3)$ . Resultados obtenidos en una red cuadrada de  $L=20$ ,  $N_{realiz}=10^6$ ,  $N_{part}=1$ , para los primeros 100 caminos mínimos. Escala logarítmica. La temperatura que más aproxima las curvas, en cada aproximación, aparece indicada en la leyenda de la figura.

En el caso del dPLA, vemos que el modelo termodinámico, con ambas aproximaciones, reproduce bien los resultados para la distribución  $U(1.0, 1.3)$ , como en el caso sPLA, y para la  $U(10, 20)$  es mejor la aproximación  $P_{k1,a}$  (Fig. 4.14b). Los valores de la temperatura que mejor parecen ajustar los datos de la simulación han sido, según se utilice  $P_{k1,a}$  ó  $P_{k1,b}$ ,  $T=1.4$  y  $T=1.6$  para  $U(0.1, 9.9)$ ,  $T=2.8$  y  $T=5.5$  para  $U(10, 20)$  y  $T=0.14$ , en ambas aproximaciones, para  $U(1.0, 1.3)$ . En todos los casos, las temperaturas son más bajas que las obtenidas con sPLA. Esto puede ser debido a la “agitación térmica” que añade el algoritmo, ya que los nodos de la línea principal de corriente son muestreados aleatoriamente. Las temperaturas son similares con ambas aproximaciones para  $U(0.1, 9.9)$  y  $U(1.0, 1.3)$  pero son muy diferentes para  $U(10, 20)$ . De acuerdo con estos valores, para la distribución de ruido más débil,  $U(1.0, 1.3)$ , la temperatura  $T$  es próxima a 0, la entropía es casi nula y, aproximadamente, se cumple lo que decíamos en cuanto a que el camino entre los dos puntos debería ser el camino mínimo  $k=1$  (la distribución adopta la forma de una delta de Kronecker). Para las distribuciones  $U(0.1, 9.9)$  y  $U(10, 20)$ , las temperaturas son  $T > 0$ , y la corriente se distribuye entre todos los caminos mínimos debido a la entropía que se genera con estas distribuciones.

### 4.3 Desorden exponencial

Acabamos de estudiar algunos aspectos de la geometría y de la distribución de las líneas principales de corriente en las tres distribuciones uniformes estudiadas hasta ahora. Como ya se ha comentado anteriormente, estos casos corresponden a condiciones que van de ruido moderado a ruido débil. Sin embargo, el coeficiente de variación de la distribución uniforme está limitado superiormente por el valor  $3^{-1/2}$ , de modo que no podemos conseguir desórdenes muy altos. Efectivamente, como el coeficiente de variación o dispersión es

$CV = s/\tau$ , sustituyendo las expresiones (2.3) obtenemos que  $CV < 1/\sqrt{3} = 0.5773$ . En el caso de  $U(0.1, 9.9)$  obtenemos  $CV = 0.5658$ , por lo que se sitúa muy próximo al máximo de dispersión que puede proporcionar una distribución uniforme.

Por ello debemos utilizar otro tipo de distribuciones que permitan una variación continua del CV desde 0 (caso homogéneo) hasta  $\infty$  (límite de desorden infinito). Un tipo de distribución muy utilizado en la literatura sobre RRN y caminos óptimos es el denominado *desorden exponencial* [11]. En este desorden, las resistencias entre nodos vecinos tienen la forma:

$$r_{ij} = e^{ax_{ij}} \quad (4.7)$$

donde  $a$  es un parámetro que controla la intensidad del desorden, y  $x_{ij}$  es un número aleatorio uniformemente distribuido en el intervalo  $[0, 1]$ . Cuando  $a = 0$  tenemos el caso homogéneo, y el límite  $a \rightarrow \infty$  representa el límite de desorden infinito [11]. La función de densidad de probabilidad asociada a este desorden exponencial tiene la forma

$$f(r) = \begin{cases} (ar)^{-1} & \text{si } 1 \leq r \leq e^a \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.8)$$

y su CV es

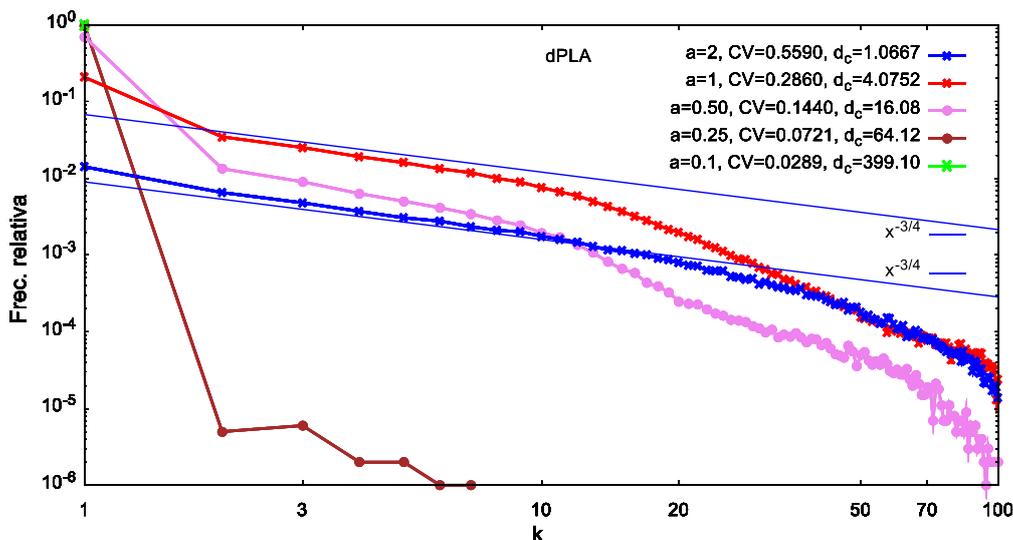
$$CV(a) = \sqrt{\frac{2+a+e^a(a-2)}{2(e^a-1)}} \quad (4.9)$$

Nuestro propósito es estudiar cómo se distribuyen las líneas principales de corriente entre las  $k$ -geodésicas, en redes con un desorden exponencial que varía entre el límite de ruido débil ( $a \rightarrow 0$ ,  $CV \rightarrow 0$ ) y el límite de ruido infinito ( $a \rightarrow \infty$ ,  $CV \rightarrow \infty$ ).

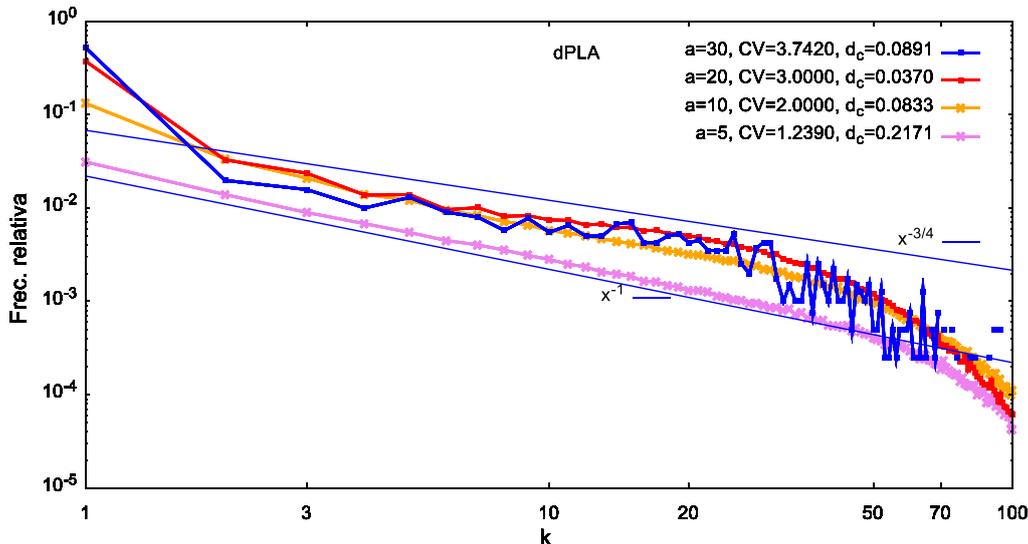
## A. Resultados del dPLA

En la Fig. 4.15 se representa la frecuencia relativa con la que se han obtenido los 100 primeros caminos mínimos ( $k$ -geodésicas) para diferentes valores de  $a$ , utilizando el algoritmo dPLA. La figura ha sido dividida en dos partes, que muestran dos rangos diferentes del parámetro  $a$ . En la parte (a) se muestran los resultados para ruido débil ( $CV < 1$ ), y en la (b) los de ruido fuerte ( $CV > 1$ ).

a)  $a=0.1-2$  (ruido débil)



b)  $a=5-30$  (ruido fuerte)

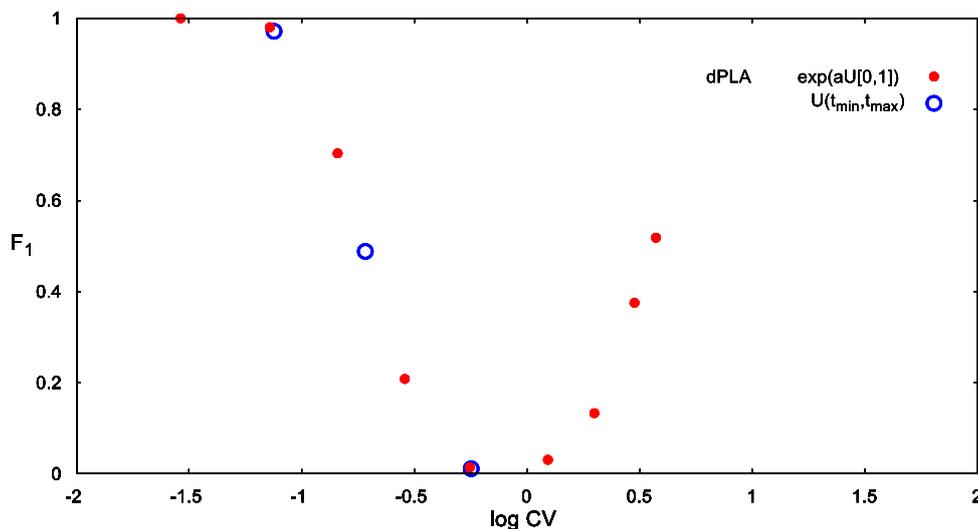


**Fig. 4.15.** Frecuencia de los 100 primeros caminos mínimos entre A y B. Resultados obtenidos en una red cuadrada de  $L=20$ , utilizando el desorden exponencial indicado en las Ecs. (4.7) y (4.8) para diferentes valores de  $a$ , usando el algoritmo dPLA. Se representan dos gráficas según dos rangos de valores. (a)  $a=0.1-2$  (ruido débil); (b)  $a=5-30$  (ruido fuerte).  $N_{realiz} = 10^6$ , salvo  $N_{realiz} = 4 \cdot 10^3$  para  $a=30$ .  $N_{part} = 1$  en todos los casos. Escala logarítmica. Las rectas de pendientes  $-3/4$  y  $-1$  representan los comportamientos de escala con exponentes  $-3/4$  y  $-1$ . Los valores de CV y de  $d_c$ , correspondientes a los diferentes valores de  $a$ , se incluyen en la leyenda.

Observamos que las curvas presentan picos agudos para los valores más bajos y más altos de  $a$ , y que estos picos se agudizan conforme disminuye  $a$  cuando el ruido es débil, y conforme aumenta  $a$  cuando el ruido es fuerte. Puede concluirse que la corriente elige preferentemente el camino óptimo en ruido alto y en ruido muy bajo. Cuando el ruido es tal que los valores de CV están próximos al valor de crossover  $CV = 1$  (el ruido de crossover estaría entre  $a = 2$  y  $a = 5$ ), observamos que aparece una región en la que la distribución decae en forma de ley de potencias, como ya vimos cuando estudiamos la distribución

uniforme (Fig. 4.12). En esta región, el exponente parece tomar un valor entre  $-3/4$  y  $-1$ . También vemos que esta región parece aumentar a medida que nos acercamos al punto de crossover.

Es interesante representar la frecuencia del camino óptimo  $F_1$  frente al logaritmo del CV de cada distribución. El resultado se muestra en la Fig. 4.16. En la misma figura, se incluyen los resultados obtenidos para las 3 distribuciones uniformes.



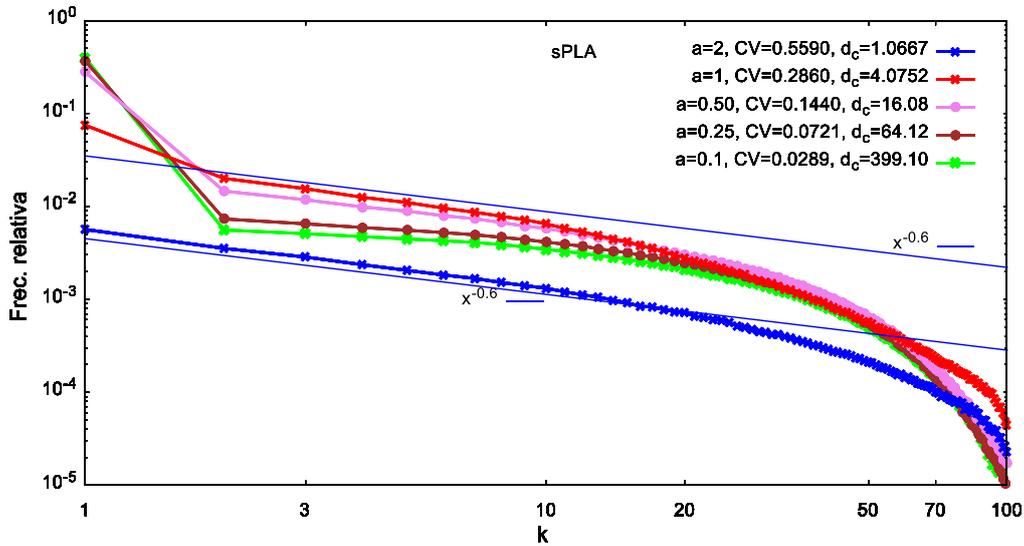
**Fig. 4.16.** Frecuencia del camino óptimo en función de  $\log CV$  de cada distribución. Resultados obtenidos en una red cuadrada  $L=20$ , utilizando el algoritmo dPLA y considerando desórdenes exponenciales de diversa intensidad (diferentes valores de  $a$ ) y las tres distribuciones uniformes estudiadas aquí.  $N_{realiz} = 10^6$ , salvo  $N_{realiz} = 10^5$  para  $a = 20$  y  $N_{realiz} = 4 \cdot 10^3$  para  $a = 30$ .  $N_{part} = 1$  en todos los casos.

Como esperábamos, la curva muestra un mínimo en las cercanías de  $CV = 1$ , que representa el valor de transición entre el ruido fuerte y el ruido débil, y se aproxima a 1 (la distribución sería la delta de Kronecker,  $\delta_{1k}$ ) por los dos lados, cuando  $CV \rightarrow 0$  y cuando  $CV \rightarrow \infty$ . Si redujéramos  $CV$  desde 1 hasta 0, es posible que exista un cierto valor de  $CV$  a partir del cual la frecuencia siempre sea 1. Una impresión, a simple vista, que nos da la gráfica es que la curva podría ser simétrica respecto a un valor cercano a  $CV = 1$ , lo cual sugiere que si aumentáramos  $CV$  desde 0 a  $\infty$ , también podría existir un valor de  $CV$  a partir del cual la frecuencia también fuese 1. No obstante, esta conjetura debe ser comprobada con nuevas simulaciones. Además, los resultados de las distribuciones uniformes coinciden perfectamente con los del ruido exponencial, lo que indica que el comportamiento mostrado en la figura es universal, siendo independiente de la expresión matemática de la función de distribución, y que sólo depende del  $CV$  de la distribución empleada.

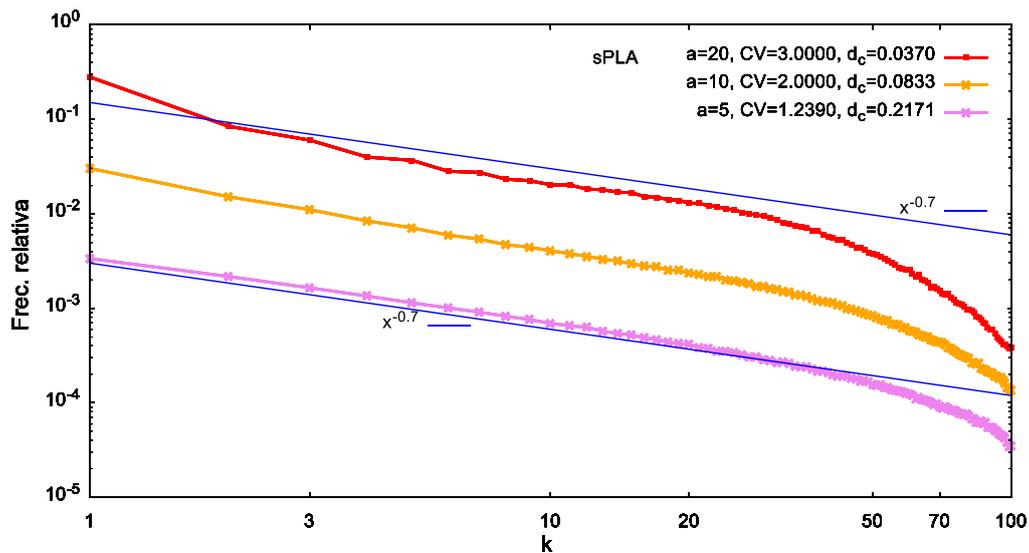
## B. Resultados del sPLA

En la Fig. 4.17 se representa la frecuencia relativa con la que se han obtenido los 100 primeros caminos mínimos ( $k$ -geodésicas) para diferentes valores de  $a$ , utilizando el algoritmo sPLA. Como en el caso anterior, la figura ha sido dividida en dos partes que muestran diferentes rangos de valores de  $a$ : (a) ruido débil y (b) ruido fuerte.

a)  $a=0.1-2$  (ruido débil)



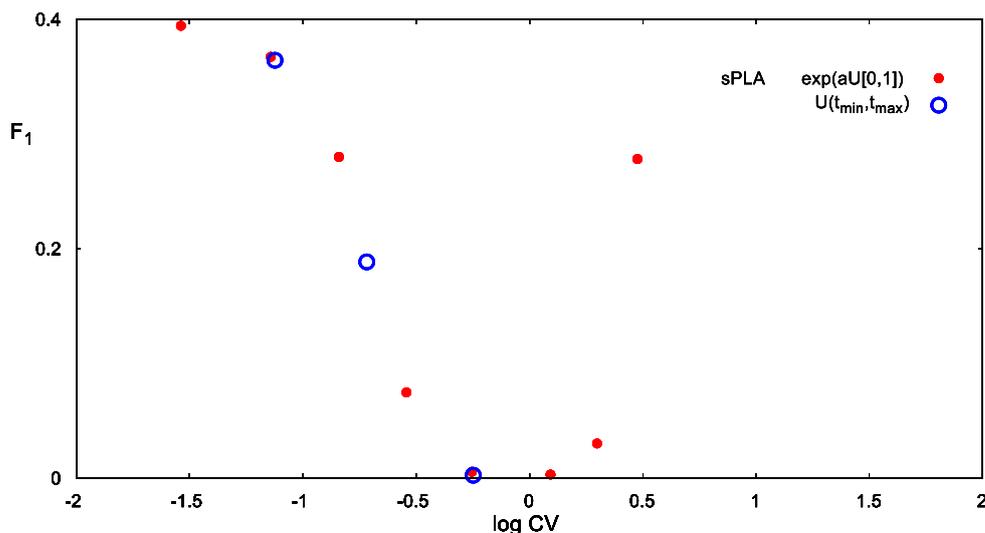
b)  $a=5-20$  (ruido fuerte)



**Fig. 4.17.** Mismos resultados que la Fig. 4.15, pero usando el algoritmo sPLA.  $N_{realiz} = 10^5$  y  $N_{part} = 10^5$ , en todos los casos. Escala logarítmica. Las rectas de pendientes  $-0.6$  y  $-0.7$  representan los comportamientos de escala con exponentes  $-0.6$  y  $-0.7$ .

Vemos que, aunque los picos son mucho menos agudos, el comportamiento es similar al del dPLA. Cerca del punto de crossover, la distribución decae también en forma de ley de potencias, aunque, en este caso, el exponente parece tomar un valor entre  $-0.6$  y  $-0.7$ .

Al igual que con el dPLA, en la Fig. 4.18 representamos la frecuencia del camino óptimo  $F_1$  frente a log CV, para el caso del sPLA.



**Fig. 4.18.** Mismos resultados que la Fig. 4.16, pero usando el algoritmo sPLA.  $N_{realiz} = 10^5$  y  $N_{part} = 10^5$ , en todos los casos.

Se observa que la curva tiene un comportamiento similar a la obtenida con dPLA, pero ahora el máximo de probabilidad, al menos para el ruido muy débil, parece que se sitúa cerca de 0.4. Esto significa que, en el límite  $CV \rightarrow 0$ , la curva no sería la delta de Kronecker  $\delta_{1k}$ , sino una cierta distribución cuya forma nos sugiere la evolución de las curvas de la Fig. 4.17a. También planteamos la conjetura de que la curva fuese simétrica, al menos localmente alrededor de  $CV = 1$ , pero para comprobarlo serían necesarias nuevas simulaciones con ruidos muy débiles y muy fuertes. Los resultados de las distribuciones uniformes están integrados perfectamente dentro de los correspondientes al ruido exponencial. De este modo, podemos concluir que el sistema muestra un comportamiento universal en la toma del camino mínimo, cuando usamos el algoritmo sPLA.

## 5. Conclusiones y líneas de trabajo futuro

A continuación, enumeramos las principales conclusiones del trabajo y proponemos algunas líneas de trabajo futuro que se derivan del mismo.

Respecto al escalado de la desviación lateral de las líneas principales de corriente del modelo RRN, en relación al escalado del camino óptimo en el modelo FPP equivalente, podemos concluir lo siguiente:

- 1) Si consideramos puntos sobre el eje, el algoritmo sPLA parece reducir la distancia crítica  $d_c$  obtenida en el modelo FPP, mientras que el algoritmo dPLA la aumenta.
- 2) A lo largo de la diagonal, el algoritmo sPLA muestra el mismo comportamiento cualitativo que el mostrado por las geodésicas en FPP: no parece haber crossover y el comportamiento de escala se observa prácticamente desde el origen. Sin embargo, el algoritmo dPLA sí que introduce una distancia crítica, por debajo de la cual las líneas de corriente van junto a la diagonal, y por lo tanto, debido a la geometría de la red, tienen una separación lateral mínima (la separación mínima no es 0 como en el caso

del eje).

- 3) Los resultados muestran que, en el modelo RRN, con los tamaños de red ( $L = 100, 200, 500$  y  $1000$ ) y los algoritmos sPLA y dPLA utilizados, el comportamiento de la desviación lateral de las geodésicas es universal de tipo gaussiano. Sin embargo, en la simulación con  $L = 1000$  del dPLA, tanto a lo largo de los ejes como de la diagonal, se aprecia la posibilidad de que exista un crossover en una distancia cercana a  $d = 500$ , pero no queda claro si los escalados asintóticos seguirían la universalidad de KPZ, como sucede en el modelo FPP. Para aclarar esta cuestión serían necesarias nuevas simulaciones en redes más grandes que las consideradas en este TFM.

Respecto a la distribución de probabilidad de las líneas principales de corriente entre el conjunto de  $k$ -geodésicas, podemos concluir lo siguiente:

- 1) En todos los casos, la distribución tiene la forma general esperada: el máximo de probabilidad tiene lugar en  $k = 1$  (camino mínimo) y la probabilidad decae en promedio de forma monótona con  $k$ .
- 2) La forma de la distribución depende de la intensidad del ruido, del tamaño del sistema y del algoritmo (dPLA ó sPLA) utilizado. Para un valor fijo de  $L$ , y un mismo algoritmo, la distribución parece estar determinada únicamente por el parámetro CV de la distribución de probabilidad de las resistencias, de modo que diferentes funciones de probabilidad pero con el mismo CV darán lugar a la misma distribución de líneas de corriente. En este TFM hemos utilizado dos tipos de distribución, la uniforme y el desorden exponencial, pero sería interesante extender este análisis a otras familias de distribuciones y comprobar que es así.
- 3) De nuevo para un tamaño constante, en el límite del ruido débil, o caso homogéneo ( $CV \rightarrow 0$ ), la distribución de las líneas principales de corriente se aproxima a, dependiendo del algoritmo empleado, a) dPLA: a la delta de Kronecker  $\delta_{1k}$ , de modo que todas las líneas de corriente siguen el camino óptimo  $k = 1$ ; b) sPLA: a una distribución cuya probabilidad máxima es un valor próximo a 0.4. Con ambos algoritmos, a medida que aumenta CV, y por tanto también aumenta el ruido, las líneas de corriente empiezan a distribuirse más homogéneamente entre el espectro de  $k$ -geodésicas, de modo que la varianza de la distribución aumenta. Cerca del punto de crossover entre ruido débil y ruido fuerte ( $CV \approx 1$ ), la distribución muestra inicialmente un claro comportamiento en ley de potencias, para luego decaer rápidamente con  $k$ . Los resultados obtenidos en este TFM parecen indicar que, a medida que nos aproximamos a este punto de transición, este comportamiento en ley de potencias parece extenderse a valores de  $k$  cada vez mayores. Esta hipótesis es muy interesante y sin duda merece un estudio en profundidad, ya que podría revelar algún tipo de comportamiento crítico cerca del punto de transición. Este sería el caso de si en el punto de transición la ley de potencias se extendiese a todos los órdenes. Cuando entramos en el régimen de ruido fuerte ( $CV \gg 1$ ), al aumentar el ruido observamos el proceso inverso, según el algoritmo empleado. a) dPLA: la distribución de las líneas de corriente vuelve a concentrarse alrededor del camino óptimo, y en el límite de desorden infinito ( $CV \rightarrow \infty$ ) se espera recuperar la misma delta de Kronecker  $\delta_{1k}$ , obtenida en el caso homogéneo ( $CV \rightarrow 0$ ). b) sPLA: Conjeturamos que también se recuperará la

distribución límite obtenida en el caso homogéneo. Sobre la forma y evolución de la distribución de las líneas de corriente cuando nos separamos del ruido de crossover ( $CV \approx 1$ ) y nos movemos hacia ruidos débiles ( $CV \ll 1$ ) y ruidos fuertes ( $CV \gg 1$ ), los resultados parecen indicar que el comportamiento podría ser simétrico en ambos algoritmos, al menos localmente en un cierto entorno alrededor de  $CV = 1$ . Hasta donde sabemos, nunca se ha obtenido la distribución de las líneas de corriente respecto de las  $k$ -geodésicas.

- 4) No obstante, la evolución de la distribución de las líneas de corriente hacia la delta de Kronecker  $\delta_{1k}$ , cuando  $CV$  aumenta y nos aproximamos al límite de ruido infinito, es más lenta cuando se usa el algoritmo sPLA que con el dPLA. Esto también se observa en el espaciado que existe entre curvas, cuando incrementamos  $a$ , que es mucho mayor con sPLA que con dPLA.
- 5) En nuestra investigación sobre la distribución de las líneas de corriente hemos fijado el tamaño  $L$  del sistema, pero un estudio más general debería considerar también el efecto del tamaño. Por ejemplo, en el caso de la distribución  $U(1.0, 1.3)$  tenemos que  $CV = 0.075$  y  $d_c = 58.78$ . Es esperable que si usamos  $L = 20$  (mucho menor que  $d_c$ ), la distribución obtenida se aproxime mucho a la delta de Kronecker en  $k = 1$ . Pero si considerásemos un sistema con  $L$  mucho mayor que  $d_c$ , por ejemplo  $L = 1000$ , es probable que observemos una distribución mucho más parecida a la que hemos obtenido utilizando  $L = 20$  y  $CV \approx 1$ . Esto quiere decir que el parámetro relevante para determinar la forma de la distribución de las líneas de corriente debería ser una función de  $L/d_c$  (no sabemos si el  $d_c$  del modelo FPP, o los nuevos obtenidos en el modelo RRN). Por ejemplo, supongamos que  $k^*$  es el ordinal de la  $k$ -geodésica en la que acaba el comportamiento en ley de potencias y supongamos que  $k^* = L/d_c$ . De este modo, dado un tamaño  $L$  fijo,  $k^*$  disminuirá a medida que disminuye la intensidad de ruido ( $CV$  disminuye y  $d_c$  aumenta), como observamos en nuestros resultados. Otra conclusión que se deriva de esta conjetura es que fijada la intensidad del ruido a un cierto valor de  $CV$  (y por tanto de  $d_c$ ), el valor de  $k^*$  aumentará a medida que aumentamos el tamaño del sistema, de modo que si  $L \rightarrow \infty$ , obtengamos  $k^* \rightarrow \infty$ , y las líneas principales de corriente se distribuirán por todo el espectro de  $k$ -geodésicas siguiendo una ley de potencias. Para investigar esta conjetura pueden realizarse dos experimentos. El primero consistiría en fijar  $CV$  y variar  $L$ , y comprobar si las distribuciones obtenidas coinciden para los primeros valores de  $k$ , pero con  $k^*$  aumentando con  $L$ . El segundo experimento consiste en considerar diversos tamaños  $L$  y diferentes intensidades de ruido (diferentes valores de  $CV$ ), pero manteniendo constante la relación  $L/d_c$ , y comprobar si las distribuciones de las líneas de corriente son iguales.
- 6) Por último, respecto a la interpretación termodinámica de nuestro modelo, parece funcionar muy bien cuando el ruido es débil, pero a medida que nos acercamos al ruido de crossover comienza a fallar. El objetivo era comprobar si podemos interpretar la intensidad del ruido (medida con  $CV$ ) como una cierta temperatura que fuese la responsable de las fluctuaciones de los valores de las resistencias, y por tanto del potencial y de las intensidades. Es cierto que esta temperatura, como tal, no aparece explícitamente en la dinámica del modelo RRN, por lo que un posible paso en esta línea de investigación podría ser considerar que las probabilidades utilizadas en el modelo

sPLA para elegir el camino seguido por la línea de corriente están activadas térmicamente.

## 6. Referencias bibliográficas

- [1] S.N. Santalla, J. Rodríguez-Laguna, T. LaGatta and R. Cuerno, *Random Geometry and the Kardar-Parisi-Zhang universality class*, New J. Phys. **17** 033018 (2015).
- [2] S.N. Santalla, J. Rodríguez-Laguna, A. Celi and R. Cuerno, *Topology and the Kardar-Parisi-Zhang universality class*, J. Stat. Mech. 023201 (2017).
- [3] P. Meakin. *Fractal, scaling and growth far from equilibrium* (Cambridge University Press, 1998).
- [4] T. Lagatta and J. Wehr, *A Shape Theorem for Riemannian First-Passage Percolation*, J. Math. Phys. **51** 024005 (2010).
- [5] L.A. Braunstein and Chi-Hang Lam, *Exact scaling in competitive growth models*, Phys. Rev. E **72** 026128 (2005).
- [6] M. Björk and E. Deng, *Discrete simulation models of surface growth*, Royal Institute of Technology (KTH), Theoretical Physics (2014).
- [7] P. Córdoba-Torres, S.N. Santalla, R. Cuerno and J. Rodríguez-Laguna, *Kardar-Parisi-Zhang universality in first-passage percolation: the role of geodesic degeneracy*, J. Stat. Mech. 063212 (2018).
- [8] K. Christensen, *Percolation Theory*, Lecture Notes, Imperial College (2002).
- [9] S. Redner, *Fractal and Multifractal Scaling of Electrical conduction in Random Resistor Networks*, in *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (Springer, Meyers RA (ed.), New York, 2009).
- [10] J.M. Hammersley and D.J.A. Welsh, *First Passage Percolation, subadditive processes, stochastic networks and generalized renewal theory*, in *Bernoulli, Bayes, Laplace Anniversary Volume* (Springer, J. Neyman and L-M Le Cam (eds.), Berlin, 1965).
- [11] Z. Wu et al., *Current Flow in Random Resistor Networks: The Role of Percolation in Weak and Strong Disorder*, Phys. Rev. E **71** 045101(R) (2005).
- [12] Y. M. Strelniker, S. Havlin et al., *Hopping Percolation Transition in granular ferromagnets*, J. App. Phys. **99** 08P905 (2006).
- [13] *Introduction to Algorithms*. Lecture Notes for Unit 6: Single-Source Shortest Paths. <https://ocw.mit.edu/courses/6-006-introduction-to-algorithms-fall-2011/pages/lecture-notes/>
- [14] J.Y. Yen, *Finding the K shortest loopless paths in a network*, Management Science **17**(11) Theory Series (1971).
- [15] *Yen's algorithm*, <https://www.linchenguang.com/2018/01/30/Yen-s-algorithm/> (2018).
- [16] A. Bunde and S. Havlin, *Fractals and Disordered Systems* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1995).
- [17] E. López et al., *Postbreathrough behavior in flow through porous media*, Phys. Rev. E **67** 056314 (2003).

- [18] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, London, 1994).
- [19] T. Halpin-Healy and Y. C. Zhang, *Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics*, Phys. Rep. **254**, 215 (1995).
- [20] A. Hansen and J. Kertész, *Phase Diagram of Optimal Paths*, Phys. Rev. Lett. **93** 040601 (2004).
- [21] R.L. Burden y J.D. Faires, *Análisis Numérico*, 7ª Ed. (Cengage Learning, 2001).