

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Facultad de Ciencias



Máster Universitario en Física de Sistemas Complejos

Trabajo Fin de Máster:

**OBJETOS *CLÁSICOS* DEL CINTURÓN DE
KUIPER**

Miguel Ángel Baixauli Romero

mbaixauli1@alumno.uned.es

Tutor: *David García Aldea*

Resumen

En 1992 se anunció el descubrimiento de una población de objetos que orbitaban más allá de la órbita de Neptuno con características físicas y orbitales similares a las de Plutón. En un principio se pensó que este conjunto de cuerpos no habría intervenido en la formación de ningún planeta, por lo que su composición se habría mantenido poco alterada y su estudio podría proporcionar claves para una mejor comprensión del origen del sistema solar. Este trabajo de fin de máster constituye una revisión de algunos resultados ya conocidos sobre estos objetos transneptunianos, en el que se usan como herramientas diversos métodos estadísticos no paramétricos y robustos, ya que no se puede asumir ninguna distribución concreta de los parámetros analizados. El sujeto principal del estudio lo conforman los *objetos clásicos* del cinturón de Kuiper, denominación debida a que se adaptan a la idea inicial de objetos con composición poco alterada, de forma que incluso pudieron haberse formado en la zona que ocupan actualmente. Se confirma la correlación entre los colores de estos objetos con la inclinación de sus órbitas, y además se justifica la existencia de dos familias dentro de este grupo: los objetos *clásicos fríos* y los objetos *clásicos calientes*, en los que a partir de una clasificación basada en parámetros orbitales encontramos diferencias en parámetros físicos, como pueden ser tamaño y color, relacionado este último con la composición de las superficies de estos objetos. Asimismo, se realizan una serie de simulaciones de algunos objetos transneptunianos en las que se muestra la estabilidad de las órbitas de los objetos *clásicos*, en contraposición de las órbitas inestables e incluso caóticas de otras familias, como pueden ser los *centauros* y los *objetos del disco disperso*. Los resultados de las pruebas realizadas son compatibles con la hipótesis de que los *clásicos fríos* pudieran haberse formado en la región que ocupan actualmente, habiendo sufrido pocas alteraciones tanto físicas como orbitales, de forma que podrían considerarse reliquias de la formación del sistema solar.

Palabras clave: Cinturón de Kuiper, TNOs, KBOs, objetos transneptunianos.

Abstract

In 1992 it was announced the discovery of a population of objects orbiting beyond the orbit of Neptune with physical and orbital characteristics similar to those of Pluto. At first it was thought that this set of bodies would not have intervened in the formation of any planet, so its composition would have remained little altered and its study could provide keys to a better understanding of the origin of the solar system. This master's thesis constitutes a review of some already known results on these trans-Neptunian objects, in which various non-parametric and robust statistical methods are used as tools, since no specific distribution of the analyzed parameters can be assumed. The main subject of the study is the *classical objects* of the Kuiper belt, a name due to the reason that they adapt to the initial idea of objects with little altered composition, so that they could even have formed in the area they currently occupy. The correlation between the colors of these objects with the inclination of their orbits is confirmed, and the existence of two families within this group is also justified: the *cold classics* objects and the *hot classics* objects, in which from a classification based on orbital parameters we find differences in physical parameters, such as size and color, related to the composition of the surfaces of these objects. Likewise, a series of simulations of some trans-Neptunian objects are carried out in which the stability of the orbits of the *classical* objects is shown, in contrast to the unstable and even chaotic orbits of other families, such as *centaurs* and *objects of the scattered disk*. The results of the tests carried out are compatible with the hypothesis that the *cold classics* could have formed in the region they currently occupy, having undergone few alterations both physical and orbital, so that they could be considered relics of the formation of the solar system.

Keywords: Kuiper belt, TNOs, KBOs, transneptunian objects.

Índice

1. Introducción.	1
1.1. Formación del sistema solar.	1
1.2. Motivación y estructura del trabajo.	3
2. Estadísticos básicos.	4
2.1. Distribución normal.	5
2.2. Contraste de hipótesis	6
2.3. Cálculo de correlaciones.	7
2.4. Contraste de Wilcoxon-Mann-Whitney.	10
2.5. Test de Kolmogorov-Smirnov.	11
2.6. El test Dip.	13
2.7. Parámetros de localización y de escala robustos. Regresión robusta.	13
2.8. Ajuste FDR.	15
3. Parámetros orbitales y físicos.	15
3.1. Parámetros orbitales.	15
3.2. Parámetros físicos.	16
3.3. Velocidad colisional y parámetro de Tisserand.	18
4. Nomenclatura y clasificación de objetos	19
4.1. Nomenclatura.	19
4.2. Clasificación de objetos transneptunianos.	20
5. Población clásica (objetos CKBO).	22
5.1. Correlaciones entre parámetros físicos y orbitales.	22
5.2. Objetos clásicos <i>fríos</i> y <i>calientes</i>	24
5.3. Comparación con otras poblaciones transteptunianas.	29
6. Comportamiento dinámico: Simulaciones.	32
6.1. Órbitas elípticas.	33
6.2. Resonancias de movimiento medio (MMR).	34
6.3. Órbitas caóticas e inestables.	38
6.4. Órbitas estables.	42
7. Conclusiones.	44
Referencias.	45
Apéndice A. Tablas.	48
Apéndice B. Funciones de R.	53
Apéndice C. Funciones de REBOUND.	59

1. Introducción.

El cinturón de Kuiper, también conocido como cinturón de Edgeworth-Kuiper o como cinturón transneptuniano, es un conjunto de pequeños objetos¹ con superficies que pueden estar compuestas tanto de agua helada como diversos compuestos químicos volátiles², y que orbitan a distancias medias alrededor del Sol mayores que la de Neptuno, siendo esta aproximadamente 30.1 UA³. En la literatura se les denomina indistintamente **KBOs** (*Kuiper Belt Objects*) o **TNOs** (*Transneptunian Objects*), y aquí hay que tener en cuenta que, aunque los objetos de la nube de Oort⁴ también se situarían más allá de la órbita de Neptuno, no entran en este estudio. En Gladman, Marsden & VanLaerhoven (2008), los objetos del cinturón de Kuiper orbitan en una amplia zona con distancias medias al Sol superiores a 30.1 UA e inferiores a 2000 UA, a partir de donde comenzaría la nube de Oort interna. A distancias medias inferiores a 30.1 UA se encuentran los *centauros*, que son objetos caracterizados por cruzar las órbitas de los planetas gigantes. Deben su nombre a su comportamiento híbrido entre cometas y asteroides, y se incluyen en los estudios de los objetos transneptunianos debido a que se piensa que provienen del cinturón de Kuiper (p. ej., Luu, Jewitt & Trujillo, 2000). El cinturón de Kuiper puede proporcionar pistas muy valiosas sobre la formación y evolución del sistema solar; de ahí el interés por el estudio de los grupos o familias que lo conforman, siendo fundamental averiguar qué objetos se originaron en regiones más cercanas al Sol hasta alcanzar su situación actual en el cinturón de Kuiper, y cuáles pudieran haberse formado en esa región tan distante.

Los objetos *clásicos*, también denominados *cubewanos* por ser el objeto 1992 QB1 el primero en descubrirse, son un grupo de objetos del cinturón de Kuiper que se caracterizan por tener órbitas con distancias medias al Sol de entre 37 y 48 UA, casi circulares y de baja inclinación respecto al plano definido por la órbita de la tierra, la eclíptica. Estas características orbitales tienen como resultado que los objetos *clásicos* no experimenten fuertes perturbaciones gravitatorias al evitar proximidades con Neptuno, por lo que sus órbitas son muy estables en el tiempo. Entre la comunidad científica que estudia el cinturón de Kuiper es muy popular la idea de que parte de esa población, los denominados objetos *clásicos fríos* (objetos *clásicos* con inclinación de su órbita menor de 5°), se formaron en el mismo lugar que ocupan actualmente (Morbidelli & Nesvorny, 2020).

1.1. Formación del sistema solar.

El sistema solar, con una edad aproximada de alrededor de 4500 millones de años (p. ej., Bouvier & Wadhwa, 2010), se habría originado a partir de una nebulosa de polvo y gas molecular, constituida por regiones más o menos densas que, quizás debido a una causa externa como pudiera ser la onda de choque producida por la explosión de una supernova cercana (Schramm & Clayton, 1978), habría colapsado lentamente, aumentando su densidad central y adquiriendo mayor velocidad de rotación por la conservación del momento angular. La nebulosa se iría aplanando debido a que la materia existente fuera del plano ecuatorial de rotación *caería* más rápidamente hacia el centro que la situada en el mismo plano, donde la

¹El conocimiento de la distribución de objetos con diámetro menor a 100 km es muy pobre (Morbidelli & Nesvorny, 2020). Como cota superior en tamaño tendríamos los planetas enanos Plutón y Eris, con más de 1000 km de radio.

²Estos compuestos químicos volátiles serían metano, metanol, etano, amoníaco, N₂, CO, CO₂, etc., retenidos en las superficies en función del tamaño de los objetos, lugar de formación e historia de los mismos (Brown, 2012).

³La unidad astronómica o UA es la distancia media de la Tierra al Sol, es decir, 149.5978707 millones de kilómetros.

⁴La nube de Oort es una teórica nube esférica de objetos que rodean al Sol a distancias de decenas de miles de UA (p. ej., Dones *et al.*, 2004).

contracción quedaría contrarrestada por la conservación del momento angular, adquiriendo una forma de disco. El hecho de que las órbitas de los planetas sean aproximadamente coplanarias y circulares induce a avalar la idea de la formación de un disco de polvo y gas orbitando alrededor del Sol. Las observaciones de telescopios infrarrojos muestran la existencia de estrellas con exceso de radiación infrarroja respecto a lo que correspondería a cuerpos negros del mismo tamaño. Por ejemplo, el observatorio espacial IRAS⁵ (*Infrared Astronomical Satellite*) detectó un exceso de radiación infrarroja en la estrella Alfa Lyrae que provendría de granos de polvo del tamaño de más de un milímetro de radio que orbitan alrededor de la estrella. El sistema formado en Alfa Lyrae correspondería a una etapa evolutiva intermedia entre las fases finales de la formación estelar y el estado actual de nuestro sistema solar. Su descubrimiento proporcionó la primera evidencia directa del crecimiento de partículas grandes a partir del remanente de una nebulosa de gas y polvo hallada fuera del sistema solar (Aumann *et al.*, 1984).

Cuando el núcleo adquiriera la suficiente masa⁶ por los efectos de la compresión, la energía gravitatoria provocaría un aumento de temperaturas y presiones tales que activarían una serie de reacciones termonucleares que a su vez darían inicio a la formación del Sol. Los granos sólidos en rotación en el plano ecuatorial comenzarían a chocar unos contra otros, y mediante acreción crecerían hasta convertirse en objetos macroscópicos. A distancias cercanas al núcleo, el gradiente de temperatura producido por la aparición del Sol facilitaría la vaporización de los granos helados, permaneciendo los granos sólidos de silicatos que darían lugar a la formación de planetesimales y que a su vez formarían los planetas terrestres. A distancias más grandes, con temperaturas más frías, los granos orgánicos y helados se condensarían combinándose con los silicatos y formando los núcleos de los planetas gigantes. Estos núcleos atraparían grandes cantidades de gases.

A medida que los planetas se formaban barrerían materia de sus órbitas por acreción o quizás por expulsión. Más tarde, los planetas se verían afectados por impactos gigantes, colisiones entre objetos protoplanetarios muy grandes como la que habría dado origen a la formación del sistema Tierra-Luna (Hartmann & Davis, 1975).

Una vez formados, algunos planetas serían susceptibles de migrar hacia órbitas mayores debido a perturbaciones provocadas por otros planetas, afectando a poblaciones de cuerpos de menor tamaño: esta migración daría forma a la estructura del actual Cinturón de Kuiper (Levison *et al.*, 2008). A medida que los planetas se desplazaran, los cuerpos pequeños quedarían atrapados por efecto de la gravedad y se moverían con ellos, o quizás serían empujados a órbitas caóticas que provocarían su expulsión del sistema solar, o impactarían contra otros planetas e incluso contra el Sol.

El primer objeto observado del Cinturón de Kuiper, Plutón, fue considerado durante años un planeta algo anómalo con respecto a los demás planetas del sistema solar: los pequeños y rocosos terrestres del interior del sistema, y los gigantes de roca, hielo y gas, a mayor distancia. Plutón, ahora reclasificado como planeta enano, es pequeño (con un radio aproximado de 2/3 del radio de la Luna) y está compuesto por una mezcla de hielo y roca. Cruza la órbita de Neptuno y la inclinación de su órbita es de 15.6°, ángulo muy superior a la inclinación de las órbitas del resto de planetas del sistema solar.

En 1992 se anunció el descubrimiento de una población de cuerpos más allá de la órbita de Neptuno con características físicas y orbitales similares a las de Plutón (Jewitt & Luu, 1993). En principio, este conjunto de cuerpos no habría intervenido en la formación de ningún planeta, por lo que su composición se habría mantenido poco alterada, proporcionando su estudio claves para comprender mejor el origen del sistema solar.

⁵<https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/iras/>.

⁶El Sol posee la mayor parte de la masa del sistema solar, mientras que el resto de materia tiene la mayor parte del momento angular del sistema y menor masa.

1.2. Motivación y estructura del trabajo.

Este trabajo se centra en el estudio de los objetos *clásicos*, pero sin perder de vista las demás familias de objetos transneptunianos y *centauros*. Lo enfocamos de dos formas diferentes: por un lado, se han realizado una serie de test estadísticos con la finalidad de estudiar correlaciones entre diversos parámetros de los objetos *clásicos*, así como diversos test destinados a comparar poblaciones e incluso justificar la existencia de subfamilias en diversos grupos. Aquí es importante recalcar que a partir de una clasificación basada exclusivamente en parámetros orbitales tratamos de hallar diferencias entre los parámetros físicos de los objetos, como pudieran ser colores y tamaños⁷. Por otro lado, se realizan una serie de simulaciones con la finalidad de observar la estabilidad de las órbitas de algunos objetos representativos, escogidos a modo de ejemplo, e incluso en el caso de órbitas inestables se utiliza un indicador que permite identificar órbitas caóticas. El problema de N cuerpos ($N > 2$) solo se puede aproximar numéricamente, ya que solo existe solución analítica para el caso general de dos cuerpos (Murray and Dermott, 1999). Por ello, para estudiar sistemas de más de dos cuerpos se han de utilizar integradores numéricos, que son algoritmos diseñados para simular sistemas (en nuestro caso la dinámica de un cuerpo menor influenciado por la acción gravitatoria conjunta de cinco cuerpos: el Sol y los cuatro planetas gigantes) que evolucionan en función del tiempo desde un estado inicial ψ_0 hasta un estado final ψ_f . Estas simulaciones permiten diseñar modelos para estudiar la evolución del sistema solar, pasado y futuro, en períodos de miles o de millones de años.

Con todo esto, la información que se espera obtener es aquella que nos permita perfilar las características propias y peculiaridades de los objetos *clásicos*, tanto físicas como orbitales, y compararlas con el resto de las poblaciones transneptunianas, estudiando a su vez qué parámetros son más determinantes en cada caso. También cotejaremos los datos obtenidos con la finalidad de comprobar si son coherentes con la hipótesis de que algunos objetos *clásicos* hubieran sufrido pocas alteraciones, de forma que podrían considerarse reliquias de la formación del sistema solar.

En la sección 2 se dan una serie de conceptos básicos de estadística⁸ como introducción a los test realizados a lo largo de este trabajo. Se detallan las ideas básicas de funcionamiento de estos test, así como su utilización en combinación con técnicas *bootstrap*⁹. Dado que no podemos suponer ningún modelo poblacional en los datos que disponemos, se han utilizado a lo largo de este estudio una serie de test no paramétricos y de métodos robustos, caracterizados estos últimos por ser poco sensibles a la presencia de datos anómalos o *outliers*, observaciones que son inconsistentes con el resto de los datos. Para la realización de los diversos test estadísticos se ha utilizado el *software* de distribución libre R, versión 4.0.2 (*R Core Team*, 2020). En los anexos se encuentran algunas de las líneas de funciones de los test.

En la sección 3 se introducen los parámetros orbitales y físicos indispensables para el estudio de cuerpos y objetos que orbitan alrededor del Sol. Los parámetros orbitales tratados en esta sección son el equivalente a las coordenadas espaciales, pero referidos a las órbitas elípticas. Los parámetros físicos introducidos son imprescindibles para el estudio del tamaño de estos cuerpos y de la composición de su superficie.

La sección 4 describe el procedimiento de denominación de los objetos transneptunianos, así como el método mediante el cual se han clasificado las diversas familias.

⁷Véase por ejemplo Morbidelli & Levison (2014). Algunas de las figuras de este TFM se han realizado siguiendo esta referencia.

⁸Parte de los resúmenes teóricos han sido confeccionados con ayuda de los libros *Estadística básica con R* (2010) y *Métodos de estadística aplicada. Métodos robustos y de remuestreo* (2005), ambos de Alfonso García Pérez, UNED.

⁹Las técnicas *bootstrap* consisten básicamente en realizar repetidamente remuestreos con reemplazamiento de una muestra inicial, de forma que cada uno de ellos dará lugar a distintos resultados con la misma cantidad de datos que la muestra original.

En la sección 5 nos centramos en el núcleo de este estudio: los objetos *clásicos*, para lo que calcularemos correlaciones entre diversos parámetros y realizaremos una serie de test para justificar la existencia de subfamilias en este grupo. Al final de esta sección se compararán los objetos *clásicos* con las demás familias transneptunianas y con los *centauros*.

Finalmente, en la sección 6 se efectuarán una serie de simulaciones de las órbitas de algunos objetos representativos de sus familias. Para la realización de las simulaciones se ha utilizado el *software* REBOUND¹⁰ sobre *Python*, y en concreto el integrador simpléctico WHFast (Rein & Tamayo 2015), adecuado para simulaciones gravitacionales de largos períodos de tiempo.

Para la confección de este trabajo se han utilizado principalmente los datos procedentes del catálogo J/A+A/577/A35 de *VizieR*, un servicio de catálogos astronómicos proporcionado por el *Centre de Données Astronomiques de Strasbourg*¹¹. El catálogo ha sido confeccionado por Peixinho, Delsanti y Doressoundiram (2015), con datos recopilados por sus autores desde diversas fuentes. Como hacen los autores del catálogo, asumimos que los datos están libres de sesgos. En este TFM se han reproducido algunos resultados del trabajo original (sobre todo en el cálculo de correlaciones) y se han introducido otra serie de test estadísticos y resultados. Se han utilizado también otras bases de datos, como por ejemplo *JPL Small-Body Database Search Engine*¹², para completar este estudio. Con respecto a las simulaciones, con el *software* REBOUND obtenemos datos orbitales de los planetas y objetos menores de la base de datos *NASA Horizons*¹³.

2. Estadísticos básicos.

Un *espacio muestral* S es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, si lanzamos una moneda dos veces consecutivas, el espacio muestral será:

$$S = \{\text{cara-cara, cara-cruz, cruz-cara, cruz cruz}\}$$

Una *variable aleatoria* de un espacio muestral S es una función que asigna un valor, generalmente numérico, a cada resultado de S en un experimento aleatorio. En el ejemplo anterior, si asignamos a S el número de caras sucesivas que salen, X es una variable aleatoria con rango $R_X = \{0, 1, 2\}$.

Vamos a tratar con variables aleatorias continuas, es decir, que el conjunto de posibles valores de las variables en un intervalo abarca todos los números reales entre los límites que lo determinan.

La *función de densidad* (*pdf* o *probability density function*) de una variable aleatoria continua X es una función $f_X(x)$ que describe la probabilidad de que la variable aleatoria esté en un intervalo determinado $a \leq X \leq b$, de forma que:

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_b^a f_X(x)dx \quad (1)$$

La *media* μ o esperanza (momento de primer orden) $E(X)$ de una distribución viene dada por:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \quad (2)$$

¹⁰<https://rebound.readthedocs.io/en/latest/index.html>.

¹¹<https://vizier.u-strasbg.fr/viz-bin/VizieR?-source=J/A+A/577/A35>.

¹²https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb_query.cgi#x (*Jet Propulsion Laboratory*).

¹³<https://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons> (*Jet Propulsion Laboratory*).

y la *varianza* (momento centrado de segundo orden) por:

$$\sigma_X^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (3)$$

La *desviación típica* es la raíz cuadrada de la varianza, es decir:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad (4)$$

La *covarianza* entre dos distribuciones X e Y se define:

$$Cov(X, Y) = E[(x - \mu_X)(y - \mu_Y)] \quad (5)$$

La *función de distribución* (*cdf* o *cumulative distribution function*) de la variable aleatoria X es la función $F(b)$ que mide la probabilidad acumulada por X hasta el punto b :

$$F(b) = P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f_X(x) dx \quad (6)$$

donde $f_X(x)$ es la función de densidad.

2.1. Distribución normal.

La distribución normal o gaussiana es un importante tipo de distribución de probabilidad continua de variable aleatoria real que se encuentra abundantemente en diversos fenómenos naturales y que se utiliza en el tratamiento de errores. Se abrevia $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$, y su función de densidad $f_X(x)$ es simétrica, de forma que:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty \quad (7)$$

donde μ y σ son la media y la desviación típica. La figura 2.1 muestra la función de densidad (izquierda) y la función de distribución (derecha) de una distribución normal con valores $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, denominada distribución normal estándar $Z \rightsquigarrow N(0, 1)$. Mediante el proceso de tipificación pasamos de una distribución normal $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ a una normal estándar $Z \rightsquigarrow N(0, 1)$, utilizando la relación entre variables:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (8)$$

En la figura 2.1, la función de densidad de la distribución normal estándar muestra una serie de porcentajes de área bajo la curva con el siguiente significado: el 68.2% de una población que sigue una distribución normalizada se encuentra dentro de una desviación estándar de la media, es decir, 1σ , el 95.4% dentro de dos desviaciones de la media, 2σ , y el 99.7% dentro de tres desviaciones de la media, 3σ .

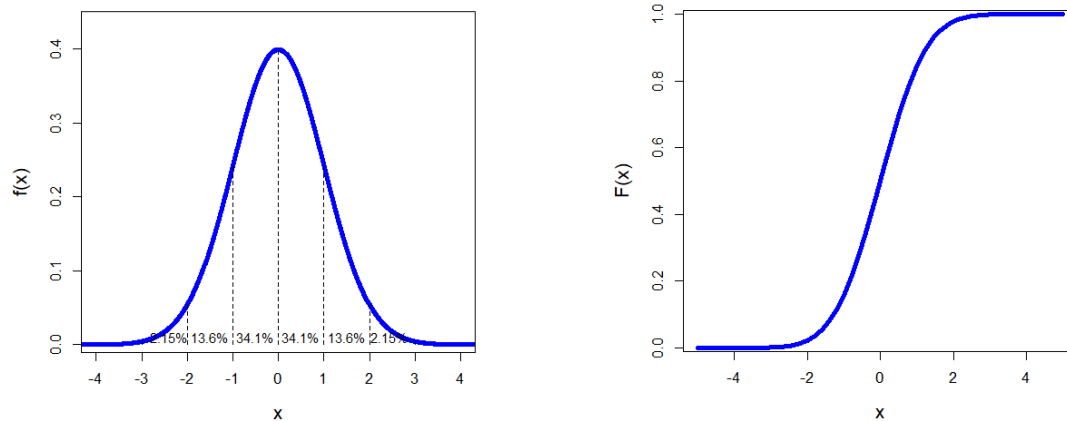


Figura 2.1: Distribución normal estándar: a la izquierda la función de densidad o dpf, y la derecha la función de distribución o cdf.

Como se ha indicado, no podemos asumir que los datos de los parámetros de los objetos que vamos a estudiar sigan una distribución determinada, como pudiera ser la distribución normal, de ahí que utilicemos métodos no paramétricos en los diversos test. No obstante, sí que será necesario el uso de distribuciones normales en la utilización de las técnicas *bootstrap* y en el tratamiento de los errores asociados a los datos de los parámetros físicos.

2.2. Contraste de hipótesis

Pretendemos utilizar los datos obtenidos aleatoriamente (muestreo) para realizar una estimación de un parámetro estadístico determinado de una población. Por ejemplo, calculando la media muestral \bar{x} podemos realizar una estimación puntual de la media poblacional μ , de forma que determinamos que $\bar{x} = \mu$. Sin embargo, si realizamos otro muestreo sobre la misma población no tenemos por qué obtener el mismo resultado inicial \bar{x} , por lo que no sabríamos qué media muestral escoger para realizar una buena estimación de μ . Una forma de evitar esta cuestión es realizar una inferencia con un intervalo de valores del parámetro estadístico, en nuestro ejemplo de la media, es decir, introducimos un *intervalo de confianza* de forma que podamos decir que ese intervalo obtenido cubrirá la media poblacional μ en un $100(1 - \alpha)\%$ de los muestreos que realicemos. La probabilidad $(1 - \alpha)$ se utiliza para construir el intervalo de confianza y se denomina *coeficiente de confianza* o *nivel de confianza*.

En la inferencia estadística, un *contraste de hipótesis* es un test que se realiza para determinar si un parámetro estadístico de una población es compatible con lo observado en una muestra. Para ello planteamos dos hipótesis a contrastar: en primer lugar, la *hipótesis nula* H_0 , que generalmente se corresponde con una situación estándar a refutar, y por otro lado, la *hipótesis alternativa* H_1 , de forma que, mediante una función de los datos muestrales denominada *estadístico de contraste* t , inferimos cuál de las dos hipótesis consideramos correcta. Suponemos entonces un modelo determinado para H_0 , y extraída una muestra al azar, se trata de determinar si el resultado del estadístico t es tan improbable en ese modelo que podamos considerarlo no representativo y rechazamos por tanto la hipótesis nula H_0 . El límite de decisión entre considerar la improbabilidad dentro del modelo, o por el contrario el descarte de este, lo acotamos con α , que es el *nivel de significación* del test. Unos niveles de significación usuales son 0.1, 0.05 y 0.01, aunque utilizaremos otros en este trabajo.

Al realizar un contraste de hipótesis podemos cometer dos tipos de errores: el *error de tipo I*, que consiste en rechazar la hipótesis nula H_0 cuando esta es cierta, y el *error de tipo II*, en el que aceptaríamos H_0 siendo falsa. Precisamente con el nivel de significación α acotamos superiormente la probabilidad de cometer un error de tipo I. Para cada tipo distinto de test se

construirá un *estadístico de contraste t* diferente, ya que será función del estimador utilizado. Mediante el valor resultante *t* podemos calcular el *p-valor*, que se define como el mínimo nivel de significación necesario para rechazar la hipótesis nula. En cualquier tipo de test, un *p-valor* lo suficientemente pequeño (por debajo de un nivel de significación fijado) confirma la decisión de rechazo de la hipótesis nula.

Otra cuestión a tener en cuenta es la *potencia del contraste*: una prueba de gran potencia presenta una buena capacidad de determinar cuándo la hipótesis nula es falsa. La potencia del contraste es igual a $1 - P\{\text{error de tipo II}\}$, y pretendemos que al menos tenga un valor de 0.8.

2.3. Cálculo de correlaciones.

Para el cálculo de correlaciones entre cada par de variables aleatorias, X e Y , se ha utilizado en este trabajo el *coeficiente de correlación por rangos de Spearman* (1904), debido a que es un método no paramétrico y por tanto adecuado a las variables que vamos a tratar, ya que no podemos asumir en ellas una distribución determinada, como pudiera ser la normal, en los conjuntos de datos de los que disponemos. El *coeficiente de correlación por rangos de Spearman* se define como:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(rg[X], rg[Y])}{s_{rg[X]} \cdot s_{rg[Y]}} \quad (9)$$

donde la covarianza, dada por la ecuación (5), se divide por las desviaciones típicas muestrales s . La ecuación (9) no es más que el coeficiente de correlación de Pearson (que proporciona una medida de la correlación lineal entre X e Y), pero calculado sobre los rangos de los datos de cada variable¹⁴. En los test realizados¹⁵ la hipótesis nula implica que $H_0 : \rho_{XY} = 0$, es decir, ausencia de correlación, mientras que la hipótesis alternativa será $H_1 : \rho_{XY} \neq 0$, pero en el sentido de que lo que se identifica es cualquier relación monótona, creciente o decreciente, entre las dos variables (se mide la dependencia lineal entre los rangos de los datos de las variables, no entre valores).

Utilización de remuestreos Bootstrap.

Queremos obtener conclusiones sobre la población de donde proceden los datos a partir de la muestra de la que disponemos. Esto lo realizamos mediante las técnicas *bootstrap*¹⁶, es decir, realizamos repetidamente remuestreos con reemplazamiento de una muestra inicial obteniendo distintos resultados (en cada remuestreo) para los parámetros seleccionados. La cantidad de datos en cada remuestreo es la misma que la de la muestra original. Cuando dispongamos de medida de errores de los datos, en cada remuestreo estimaremos los valores de estos últimos mediante extracciones aleatorias de una distribución normal con el valor del dato como media y con el error asociado al mismo como desviación típica.

Para estudiar la correlación entre dos variables determinadas, X e Y , realizamos un total de s test, uno por cada remuestreo *bootstrap*, y en cada uno obtenemos un coeficiente de correlación ρ_i , un estadístico de contraste t_i , y un *p-valor* $_i$, siendo i el número de remuestreo hasta un total de s . Nos interesan ahora los resultados *bootstrap* que sigan una distribución normal, de forma que podamos utilizar la media de cada distribución como estimador.

¹⁴Si ordenamos los datos de menor a mayor, los rangos vendrían dados por sus posiciones en esa nueva ordenación. Por ejemplo, tenemos los siguientes datos de un parámetro determinado (4, 8, 3, 10). Ordenamos los datos: (3, 4, 8, 10). En la nueva ordenación, los valores (4, 8, 3, 10) tienen, respectivamente, los rangos (2, 3, 1, 4).

¹⁵Los cálculos con R han sido ejecutados con la función *cor.test* del paquete {stats}.

¹⁶Utilizamos la función *boot* del paquete de R {boot}.

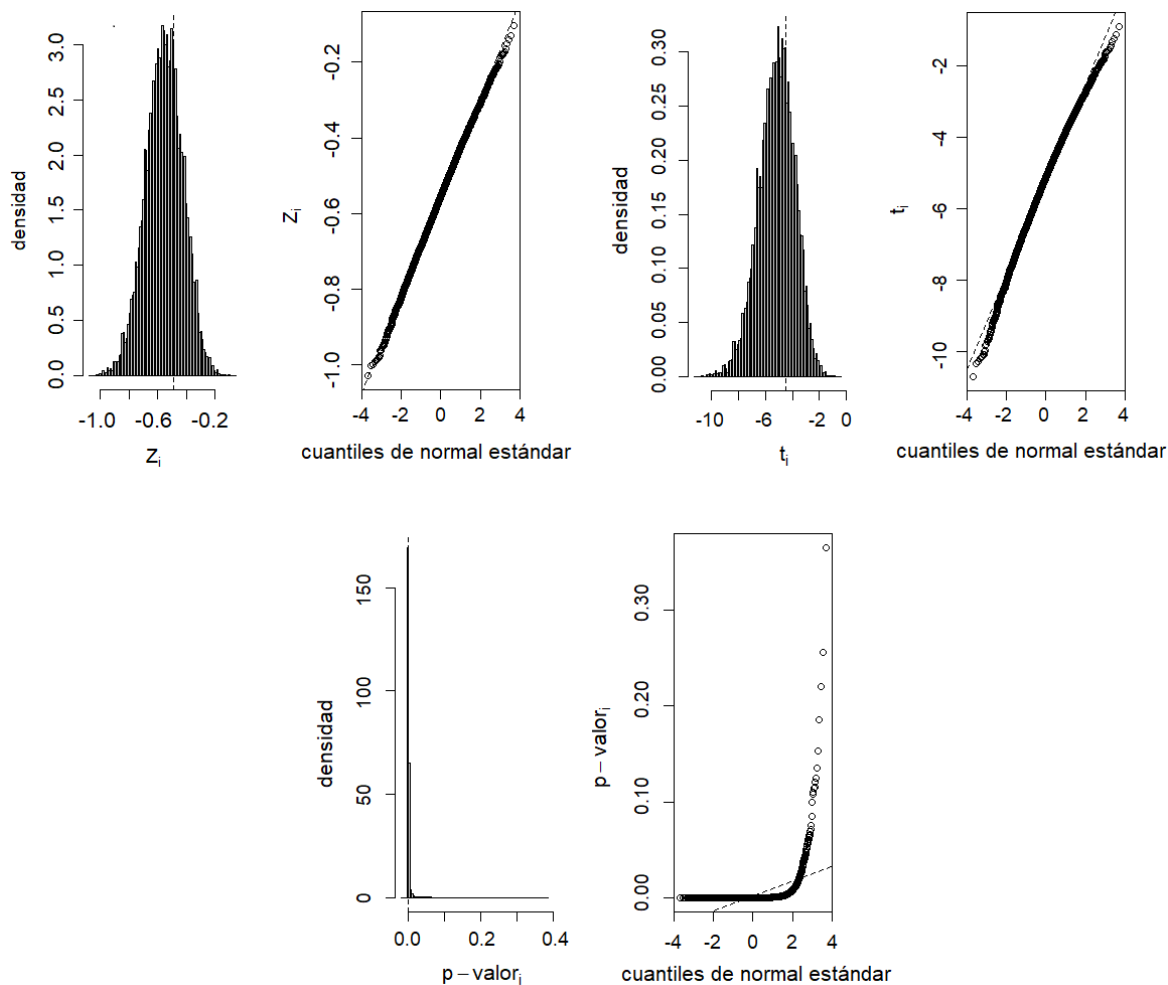


Figura 2.2: Histogramas y gráficos Q-Q (Q viene de cuantil) para los parámetros Z_i , t_i y $p\text{-valor}_i$, obtenidos en los remuestreos bootstrap efectuados para calcular la correlación entre el índice de color B-R y la inclinación de la órbita i de los objetos clásicos del cinturón de Kuiper (la descripción de estos parámetros se realiza en la sección 3). En un gráfico Q-Q normal (a la derecha de cada histograma), cuanto más alineados se muestren los puntos con la línea discontinua, más se acercarán a una distribución normal. Arriba a la izquierda, los valores de Z_i obtenidos mediante la transformación de Fisher (10) siguen una distribución que se aproxima a la normal, al igual que los estadísticos de contraste t_i (arriba a la derecha). En la figura de abajo, los $p\text{-valor}_i$ no siguen una distribución normal, por lo que el $p\text{-valor}$ del test lo obtenemos a partir del estadístico de contraste $t = \sum_i t_i / s$, siendo s el número total de remuestreos realizados. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier. Nota: todas las figuras y gráficos de este TFM han sido elaboradas por el autor del mismo.

Por ejemplo, para calcular el coeficiente de correlación de Spearman de un par de variables realizamos un total de $s = 10^4$ remuestreos *bootstrap*, y en cada uno de estos remuestreos obtenemos un valor para cada uno de estos parámetros: ρ_i , t_i y $p\text{-valor}_i$. Los 10^4 estadísticos de contraste t_i obtenidos siguen una distribución aproximadamente normal (figura 2.2 derecha). Entonces calculamos su media para estimar el estadístico t , de forma que $t = \sum_i t_i / 10^4$. Este será el estadístico de contraste t obtenido para el test de correlación entre las dos variables.

Para el cálculo del valor del coeficiente de correlación correspondiente utilizamos, en cada

remuestreo, la transformación de Fisher:

$$Z_i = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \rho_i}{1 - \rho_i} \right) \quad (10)$$

de forma que los resultados Z_i siguen una distribución aproximadamente normal, como se puede comprobar en la figura 2.2 (izquierda). Calculando su media $Z = \sum_i Z_i / 10^4$ y mediante la transformación inversa a (10) obtenemos el coeficiente de correlación ρ de las variables X e Y :

$$\rho = \tanh(Z) \quad (11)$$

El conjunto de los 10^4 p -valor $_i$ obtenidos en los remuestreos no sigue una distribución normal (figura 2.2 abajo), por lo que no podemos tomar el p -valor como la media de los p -valor $_i$ como hemos con t y con ρ . En vez de hacer eso, calcularemos el p -valor a partir del estadístico t teniendo en cuenta que cuando H_0 es cierta, el estadístico:

$$t = \rho_{XY} \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho_{XY}^2}} \quad (12)$$

sigue una distribución t de Student¹⁷ con $n-2$ grados de libertad (p. ej., Levy & Narula, 1978), siendo n la cantidad de objetos de la muestra. Por lo tanto, podemos calcular el p -valor mediante:

$$\text{p-valor} = 2 \cdot P\{|t_{n-2}| > t\} \quad (13)$$

Recordemos que es el estadístico de contraste t el que limita la aceptación de H_0 , de forma que (13) indica la probabilidad de que una distribución de Student con $n-2$ grados de libertad tenga valores mayores que t y menores que $-t$. El factor 2 es debido a que el contraste es bilateral: en la hipótesis alternativa ρ puede ser mayor o menor que cero.

Correlaciones parciales.

Mediante el cálculo de correlaciones parciales comprobamos si la correlación entre un par de variables es directa o, por lo contrario, quizás sea debida a que cada una de esas variables, independientemente, presente correlación con una tercera. El coeficiente de correlación parcial se define por:

$$\rho_{XY.Z} = \frac{\rho_{XY} - \rho_{XZ} \rho_{YZ}}{\sqrt{(1 - \rho_{XZ}^2)(1 - \rho_{YZ}^2)}} \quad (14)$$

donde para el cálculo de los coeficientes de correlación ρ_{XY} y ρ_{YZ} se utiliza la ecuación (9), es decir, utilizamos coeficientes de correlación por rango según el método Spearman. En (14), $\rho_{XY.Z}$ indica el valor del coeficiente de correlación entre X y Y cuando eliminamos el efecto de Z (variable de control) sobre ambas variables.

¹⁷La distribución t de Student (1908) es otra distribución con forma de campana que se acerca a la distribución normal $N(0, 1)$ a medida que el número de grados de libertad tiende a infinito.

El estadístico de contraste en este caso es:

$$t = \rho_{XY.Z} \sqrt{\frac{n-3}{1-\rho_{XY.Z}^2}} \quad (15)$$

que sigue una distribución t de Student con $n-3$ grados de libertad (p. ej., Levy & Narula, 1978), dado que ahora contamos con una variable más en cada test. Los cálculos se realizan siguiendo el mismo procedimiento *bootstrap* que se ha utilizado con las correlaciones totales.

Potencia del contraste.

Para verificar la potencia del contraste de los test de correlación utilizamos los gráficos de la figura 2.3, donde se muestra la potencia en función del número de elementos de la muestra y el nivel de confianza¹⁸. Nos interesa que la potencia de contraste tenga al menos un valor de 0.8 (líneas horizontales discontinuas). De los gráficos se desprende que, para muestras con un número mayor de 25 objetos (línea vertical discontinua en la figura de la izquierda para un nivel de confianza de 1σ), se asegura una potencia de contraste de 0.8 en los test.

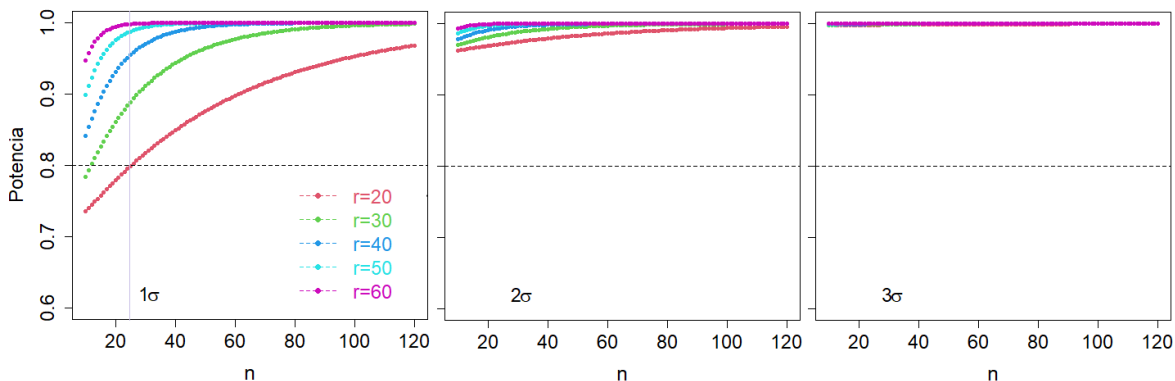


Figura 2.3: Potencia del contraste en función del número de objetos y de los valores de coeficientes de correlación para niveles de confianza de 1σ , 2σ y 3σ (aproximadamente 0.683, 0.955 y 0.997).

2.4. Contraste de Wilcoxon-Mann-Whitney.

El de Wilcoxon-Mann-Whitney (p. ej., García Pérez, 2010) es un test no paramétrico que contrasta la hipótesis nula de igualdad de dos poblaciones independientes¹⁹, de forma que:

$$H_0 : M_X = M_Y$$

$$H_1 : M_X \neq M_Y$$

donde M_X y M_Y son las medianas de las dos variables X e Y (el contraste engloba en general la variabilidad, forma y simetría de las funciones de distribución, y no solo el parámetro de localización central M). En la prueba se mezclan los valores de ambas variables y se ordena el conjunto en orden ascendente, de forma que en esta nueva ordenación se tiene en cuenta si las dos distribuciones están mezcladas indistintamente, o por el contrario hay mayor número de valores de una población desplazados hacia posiciones inferiores o superiores.

¹⁸Para la confección de la gráfica de la figura 2.3 se ha utilizado la función de R `pwr.r.test{pwr}`.

¹⁹En R lo ejecutamos con la función `wilcox.test` del paquete `{stats}`.

El estadístico de contraste utilizado es:

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n D_{ij} \quad (16)$$

donde:

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & Y_j < X_i \\ 0 & Y_j \geq X_i \end{cases} \quad (17)$$

Valores muy grandes de U (por ejemplo, muchos valores de Y_i por delante de valores X_i en la ordenación) llevan a rechazar la hipótesis nula cuando superan el umbral del valor crítico U_c , calculado con el nivel de significación elegido α .

En nuestro caso utilizaremos el valor del estadístico U obtenido para calcular el p -valor del contraste de la siguiente forma: realizamos s remuestreos *bootstrap* con sus correspondientes contrastes, donde obtenemos otros tantos valores de estadísticos de contraste U_i y p -valor $_i$. Como en el caso de las correlaciones, estos últimos no siguen una distribución normal, de forma que el p -valor final de la prueba lo obtenemos tomando el valor medio de los estadísticos *bootstrap* $U = \sum_i U_i/s$ (los U_i obtenidos sí que siguen una distribución normal), y sabiendo que para muestras con tamaños lo suficientemente parecidos y grandes se cumple (García Pérez, 2010):

$$\frac{U - \frac{m n}{2}}{\sqrt{m n (n + m + 1)/12}} \rightsquigarrow N(0, 1) \quad (18)$$

donde m y n son las cantidades de objetos de las dos muestras a comparar. Calculamos entonces el p -valor de la siguiente forma:

$$\text{p-valor} = 2 \cdot P \left\{ Z > \left| \frac{U - \frac{m n}{2}}{\sqrt{m n (n + m + 1)/12}} \right| \right\}$$

La potencia del contraste la estimaremos con los resultados de los p -valor $_i$ *bootstrap* obtenidos (Mumby, Peter J., 2002). La potencia es igual a $1 - \beta$, donde β es el error tipo II, que como sabemos es la probabilidad de aceptar H_0 siendo esta falsa. Asumiendo entonces que H_1 sea cierta:

$$\beta = P\{\text{p-valor} \geq \alpha\} = 1 - P\{\text{p-valor} < \alpha\}$$

y así la probabilidad viene dada en este caso por la razón entre los p -valor $_i$ *bootstrap* obtenidos tales que p -valor $_i < \alpha$ y los totales:

$$\text{Potencia} = 1 - \beta = P\{\text{p-valor}_i < \alpha\} = \frac{n^\circ \{\text{p-valor}_i < \alpha\}}{n^\circ \{\text{p-valor}_i \text{ (total)}\}}$$

2.5. Test de Kolmogorov-Smirnov.

Con el test de Kolmogorov-Smirnov²⁰ se comparan dos distribuciones utilizando la función de distribución empírica *edf* (*empirical distribution function*), construida con los datos de un

²⁰En R lo ejecutamos con la función *ks.test* del paquete {stats}.

muestreo, como estimador no paramétrico e insesgado de la función de distribución (*cdf*) de una determinada población, de forma que:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[X_i \leq x] \quad (19)$$

donde n es el número de observaciones de la muestra y:

$$I[X_i \leq x] = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x \\ 0 & \text{si } X_i > x \end{cases} \quad (20)$$

\hat{F} varía de 0 a 1 con escalones de altura $1/n$ ubicadas en los valores X_i .

El estadístico del test de Kolmogorov-Smirnov se construye determinando la distancia máxima entre las dos distribuciones:

$$D = \max |\hat{F}_1(x) - \hat{F}_2(x)| \quad (21)$$

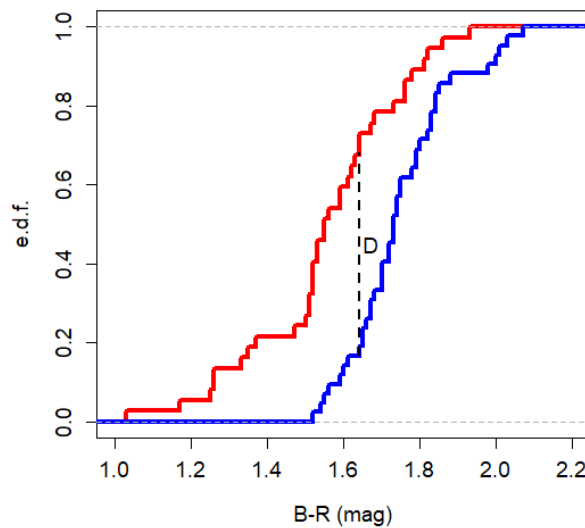


Figura 2.4: Funciones de distribución empíricas del índice de color B-R (sección 3) de las dos poblaciones clásicas (sección 5): frías, en azul y calientes, en rojo. Se señala la distancia máxima D (segmento vertical discontinuo) entre las dos distribuciones. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

En la figura 2.4 se muestra como ejemplo un valor de D entre dos distribuciones. La hipótesis nula en un test de Kolmogorov-Smirnov implica que las dos distribuciones son iguales, de forma que:

$$H_0 : \hat{F}_1(x) = \hat{F}_2(x)$$

$$H_1 : \hat{F}_1(x) \neq \hat{F}_2(x)$$

Utilizaremos de nuevo métodos *bootstrap*: dado que los estadísticos D_i siguen una distribución normal, tomamos su media como estimación del estadístico $D = (1/s) \sum_i D_i$, siendo s el número de replicaciones *bootstrap*.

El valor crítico de D_c para el cual se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significación de α es:

$$D_c < c(\alpha) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} \quad (22)$$

tomándose $(n_1 n_2)/(n_1 + n_2)$ como el tamaño efectivo de la muestra. Para muestras grandes $c(\alpha)$ se aproxima por (Feigelson & Babu, 2012):

$$c(\alpha) = \sqrt{-\frac{1}{2} \log\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (23)$$

Un valor alto de D implica mayor distancia entre distribuciones, de forma que si el valor obtenido es superior al crítico $D > D_c$, se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significación α .

La potencia del test la calculamos con los resultados de los p -valor $_i$ obtenidos con los remuestreos *bootstrap* de forma similar a la explicada en la subsección anterior. Seleccionaremos el nivel mínimo de significación que se introduce en las ecuaciones (22) y (23) con el fin de obtener una potencia del contraste superior a 0.8.

2.6. El test Dip.

El test *dip* es otra prueba no paramétrica (no asume una distribución de probabilidad concreta), que contrasta la multimodalidad de una muestra midiendo la diferencia máxima entre la función de distribución empírica y una función de distribución unimodal construida de forma que mejor se ajuste a los datos (Hartigan & Hartigan, 1985). Esa diferencia se mide de forma similar que en el test de Kolmogorov-Smirnov, aproximándose a cero para muestras con una distribución unimodal y siendo un número positivo cuando la muestra sea al menos bimodal.

Como en los casos anteriores, utilizaremos remuestreos para obtener los estadísticos de contraste *bootstrap* D_i (que siguen una distribución normal) y los p -valor $_i$ *bootstrap* (con distribución no normal), de forma que el estadístico de contraste del test D lo obtendremos mediante la media de los estadísticos *bootstrap* D_i , y con ese valor, mediante tablas, hallaremos el p -valor del test²¹. La potencia del contraste la calcularemos, de forma similar a los test anteriores, utilizando los p -valor $_i$ *bootstrap* obtenidos.

2.7. Parámetros de localización y de escala robustos. Regresión robusta.

El método de la máxima verosimilitud consiste en dar como estimador de un parámetro aquel valor que hace máxima la probabilidad de un suceso. Para ello se utiliza una función denominada *función de verosimilitud de la muestra*. Por ejemplo, maximizando la función de verosimilitud de la muestra de una distribución normal determinamos que el *estimador de máxima verosimilitud* de la media poblacional μ es la media muestral \bar{x} , y que el de la varianza poblacional σ^2 es la varianza muestral s^2 . En general, los denominados M-estimadores (el de Huber, que vamos a utilizar, es uno de ellos) se basan en la generalización del *estimador de máxima verosimilitud* utilizando una función genérica. Mediante esta función genérica se obtiene el M-estimador de localización T_n , o estimador de Huber.

²¹Con el paquete {diptest} de R, mediante la función *dip.test*, obtenemos el valor del estadístico D y del p -valor. También disponemos de la correspondencia entre valores del estadístico D y del p -valor en la tabla *qDiptab* de ese mismo paquete.

Como estimador de escala robusto, a partir de la *desviación absoluta de la mediana* o MAD²², que se define como la mediana de las desviaciones absolutas de la mediana de X (García Pérez, 2005):

$$\hat{\sigma}_{\text{MAD}} = \text{Mediana}\{|X_i - \text{Mediana}(X)|\}_{i=1}^n \quad (24)$$

utilizamos la *desviación absoluta de la mediana estandarizada* o NMAD²³:

$$\hat{\sigma}_{\text{NMAD}} = k \hat{\sigma}_{\text{MAD}} \quad (25)$$

donde el factor $k = 1.482602$ se introduce para que cuando $\hat{\sigma}_{\text{NMAD}}$ se calcule en una variable aleatoria con una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, $\hat{\sigma}_{\text{NMAD}}$ estime σ .

El estimador de Huber T_n sería el equivalente al estimador de localización \bar{x} (media muestral) de una distribución normal y $\hat{\sigma}_{\text{NMAD}}$ a la desviación típica muestral s , pero aplicados a distribuciones no normales, de forma que estos estimadores se ven poco afectados por la presencia de *outliers*.

Mediante la función *huber* del paquete {MASS} del *software* R obtenemos los valores para T_n y $\hat{\sigma}_{\text{NMAD}}$. De nuevo utilizaremos técnicas *bootstrap* incluyendo los errores de los parámetros.

Recta de regresión robusta.

Vamos a utilizar el *estimador de regresión de Huber* para obtener una recta de regresión robusta. Pretendemos obtener un modelo de forma que podamos calcular un parámetro y_i como función de otros parámetros por medio de una relación lineal:

$$y_i = x_i^T \cdot \beta + e_i \quad i = 1, \dots, n, \quad (26)$$

donde x_i es la matriz de datos de entrada (de dimensión $n \times p$, siendo n el número de observaciones y p el número de parámetros de entrada), $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ los coeficientes a determinar y e_i el error aleatorio. La recta de regresión se calcula habitualmente minimizando la suma de los residuos e_i al cuadrado. Sin embargo, mediante métodos robustos, se ajusta un modelo lineal utilizando M-estimadores. Esta modificación se realiza para ponderar mejor las medidas con menor error mediante la introducción del peso w_i , que es función de e_i y de $\hat{\sigma}_{\text{MAD}}$ (24). El peso w_i que se asigna a cada observación será tanto menor cuanto mayor sea el error correspondiente e_i , como es el caso de los *outliers*, de forma que así se atenúa el efecto de estos datos anómalos, teniendo entonces menor influencia en el resultado final.

Los M-estimadores de β se definen como solución de las p ecuaciones²⁴ (Bellio & Ventura, 2005):

$$\sum_{i=1}^n w_i e_i x_{ij} = 0 \quad j = 1, \dots, p \quad (27)$$

donde $e_i = y_i - x_i^T \beta$ se obtiene de (26).

²² *Median absolute deviation.*

²³ *Normalized median absolute deviation.*

²⁴ p es el número de variables independientes utilizadas en el modelo. En nuestro caso solo utilizaremos una variable independiente, es decir, $p=1$.

2.8. Ajuste FDR.

Cuando realizamos muchos test de un tipo determinado incrementamos la probabilidad de cometer errores de tipo I. Por ejemplo, si realizamos 100 test de correlación utilizando un nivel de significación de $\alpha = 0.05$, esperamos que en promedio obtendremos 5 resultados significativos que realmente no lo sean (habremos rechazado la hipótesis nula siendo esta cierta). Para tener en cuenta esta circunstancia utilizamos la *tasa de descubrimiento falso* (*False Discovery Rate* o FDR) introducida por Benjamini y Hochberg (1995), que es un procedimiento especificado para controlar la proporción esperada de resultados significativos (hipótesis nulas rechazadas) que en realidad no lo son.

De forma general, el procedimiento consiste en tomar como significativos los test $H_{(i)}$, ordenados sus *p-valores* correspondientes en forma creciente, hasta el mayor valor de rango k en la ordenación para el cual se cumple que:

$$\text{p-valor}_i \leq \frac{i}{m} q^* \quad (28)$$

siendo m el número total de test y q^* el nivel de significación considerado. Es decir, tomamos como significativos solo los test con rango $i = 1, 2, \dots, k$. A un nivel de significación determinado obtendremos, mediante el paquete {sgof} del *software* R (función *BH*), una nueva serie de *p-valores* coherente con (28).

3. Parámetros orbitales y físicos.

Los parámetros orbitales de los objetos transneptunianos describen su comportamiento dinámico y permiten su clasificación en diversas familias, mientras que los parámetros físicos muestran sus características propias, como pueden ser color y tamaño.

3.1. Parámetros orbitales.

Cinco parámetros principales determinan una órbita elíptica²⁵. Los dos primeros definen la elipse en la que el Sol se sitúa en uno de sus focos:

- **Semieje mayor a** : es función de la energía orbital y equivalente a la distancia media del objeto al Sol. Solo fuerzas aplicadas en el plano de la órbita pueden cambiar el semieje mayor (p. ej., Murray and Dermott, 1999).
- **Excentricidad e** : es el cociente entre su semidistancia focal²⁶ y su semieje mayor:

$$e = c/a$$

La excentricidad es función de la energía y del momento angular de la órbita. Tiene valores que van desde 0 (órbita circular) hasta 1. Solo fuerzas aplicadas en el plano orbital pueden variar la excentricidad (p. ej., Murray and Dermott, 1999).

²⁵En esta sección tratamos los parámetros que determinan la forma de la elipse y su orientación en el espacio. El movimiento del cuerpo dentro de la elipse se analiza en la sección 6.

²⁶Distancia de un foco de la elipse al centro de esta.

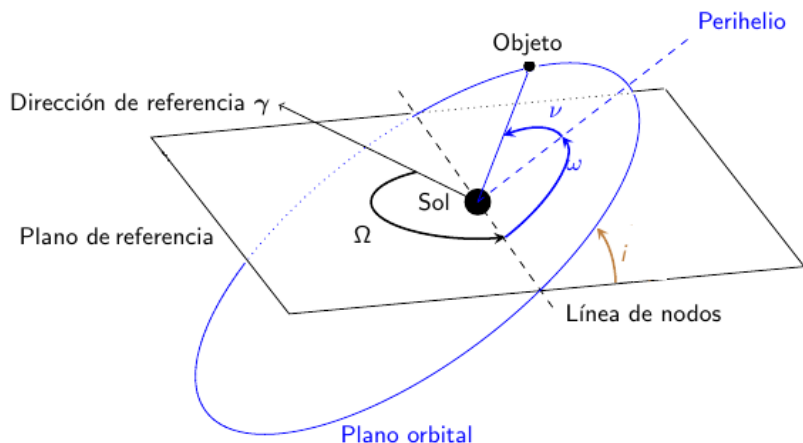


Figura 3.1: Parámetros orbitales de una órbita elíptica.

Utilizando los dos parámetros anteriores a y e se puede determinar la **distancia del perihelio** q , que se define como la mínima distancia al Sol de un objeto en su órbita, y que viene dada por:

$$q = a(1 - e) \quad (29)$$

Su importancia, en el caso de los objetos transneptunianos, radica en que el valor de q determina si un objeto es susceptible de ver perturbada su órbita al acercarse demasiado, durante su perihelio, a Neptuno.

Los tres parámetros que determinan la orientación de la órbita son los siguientes:

- **Inclinación, i :** es el ángulo entre el plano de la órbita del objeto y el plano de la eclíptica, que es el plano de referencia. Solo fuerzas normales al plano orbital pueden cambiar la inclinación i (p. ej., Murray and Dermott, 1999).
- La **longitud del nodo ascendente, Ω :** ángulo, en el plano de la eclíptica, entre la línea de nodos y una dirección de referencia, el punto Aries γ (figura 3.1).
- **Argumento del perihelio, ω :** es el ángulo, en el plano de la órbita del objeto, entre la línea de nodos y el vector que apunta en dirección al perihelio (figura 3.1).

Todas las distancias que utilizemos en este trabajo vendrán dadas en unidades astronómicas ($1 \text{ UA} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}$), mientras que los ángulos están expresados en grados en notación decimal, tal como se presentan en el catálogo J/A+A/577/A35. Los datos de los parámetros orbitales ω y Ω , provienen de la base de datos *JPL Small-Body Database Search Engine*.

3.2. Parámetros físicos.

El **flujo** es la cantidad de luz que recibimos en un área determinada de la Tierra en un tiempo determinado. Se define la **magnitud aparente** m en función del flujo F de la siguiente manera:

$$m = -\log_{2.51} \left(\frac{F}{F_{\text{Vega}}} \right) \quad (30)$$

donde se utiliza el flujo recibido de la estrella Vega, F_{Vega} , como referencia para la escala de magnitud: si recibimos desde un objeto menos luz que la recibida desde Vega mediante un filtro determinado, la magnitud del mismo será positiva, mientras que si se recibe más luz la magnitud será negativa²⁷. La unidad de medida de m es la *magnitud* (abreviada como *mag* o m).

Color	Banda (en Å)
B	4000-5000
V	5000-6000
R	6000-7500
I	7500-10000

Tabla 3.1: Bandas de los colores desde el azul hasta el infrarrojo expresadas en ángstrom.

El signo negativo en la ecuación (30) indica que los objetos más brillantes tienen magnitudes menores: de un objeto con un valor de $m=5$ recibimos 2.51 veces más luz (flujo) que de otro con $m=6$. Si nos interesa medir un color en concreto podemos colocar un filtro adecuado delante de la cámara CCD²⁸, de forma que podemos determinar el brillo en ese color. Las bandas utilizadas en este trabajo son las destacadas en la tabla 3.1 donde, por ejemplo, V es la magnitud en el visible m_V . Los demás colores son el azul B , el rojo R y el infrarrojo I , pertenecientes al sistema fotométrico UBVRI o sistema Johnson-Cousins.

El **índice de color** es la diferencia entre magnitudes aparentes de flujos recibidos en dos longitudes de onda diferentes. Por ejemplo, para la diferencia entre las magnitudes aparentes B-R (azul y roja) medidas de un objeto tenemos²⁹:

$$\text{B-R} = -\log_{2.51} \left(\frac{F_{\text{azul}}}{F_{\text{rojo}}} \right) \quad (31)$$

De esta forma, un valor para un objeto de B-R=1 implica que, aplicando 31:

$$\frac{F_{\text{azul}}}{F_{\text{rojo}}} = 2.51^{-1}$$

es decir, que recibimos desde el objeto 2.51 veces más luz con longitud de onda en el rojo que en el azul. La luz recibida desde los objetos transneptunianos es la reflejada solar (el Sol tiene B-R=1.03), por lo que la fotometría multicolor de banda ancha proporciona valiosa información dada la relación existente entre color y composición de la superficie de esos objetos.

²⁷Históricamente se ha mantenido el antiguo sistema de clasificación de Hiparcos de magnitudes basadas en la observación a ojo desnudo. La antigua escala de Hiparcos determinaba una magnitud 1 para las estrellas más brillantes, mientras que la magnitud 6 se correspondía con las más débiles. En 1850, Pogson cuantificó esa diferencia de 5 magnitudes de forma que la magnitud 1 era 100 veces más brillante que la 6 (la sensibilidad del ojo a la luz es logarítmica). De esta forma tenemos que si la magnitud 1 es 2.51 veces más brillante que la 2, será $2.51^5 = 100$ veces más brillante que la 6.

²⁸Dispositivo de carga acoplada (*Charge-Coupled Device* o CCD) es un dispositivo electrónico formado por un conjunto de condensadores acoplados cuyo funcionamiento está basado en el efecto fotoeléctrico, de forma que la carga eléctrica almacenada es proporcional a la cantidad de luz recibida.

²⁹El flujo, antes de ser medido, ha debido atravesar diversos medios, como son la atmósfera de la Tierra y el filtro utilizado.

Básicamente existen dos procesos que modificarían el color de los objetos transneptunianos: en primer lugar, en objetos helados lo suficientemente alejados de Sol, la irradiación de luz solar ultravioleta y partículas de viento solar incidentes sobre una fina capa de metano de la superficie darían lugar a la aparición de moléculas orgánicas complejas. Estas a su vez absorberían más luz azul que roja, según se ha comprobado en experimentos en laboratorio (Hudson *et al.*, 2008), con resultado final de que la luz reflejada por el objeto tienda a ser roja. Por otro lado, los colores grises se asocian más a impactos ocasionales producidos por pequeños cuerpos que excavarían material del interior de los objetos renovando su superficie (Luu & Jewitt, 1996).

La **magnitud absoluta** H (se mide en *mag* o *m*) se define, para un objeto transneptuniano, como su brillo si este estuviera a una distancia del Sol de $\Delta = 1$ UA, a una distancia de la Tierra de $r = 1$ UA y con ángulo de fase $\alpha = 0$ grados, siendo este último el ángulo entre el Sol, el objeto y el observador con el objeto en el vértice. La relación entre la magnitud absoluta y la magnitud aparente, por ejemplo en la banda V, viene dada por:

$$H_V = V - 5 \log(r \Delta) - \alpha\beta \quad (32)$$

donde $\alpha\beta$ supone una corrección para el efecto de brillo de fase³⁰. β se calcula de forma empírica. Para $\alpha = 0$ y $r = \Delta = 1$ tenemos que $H_V = V$, cumpliéndose así la definición de magnitud absoluta.

Para un albedo³¹ dado, las magnitudes absolutas más pequeñas corresponden a objetos más grandes. No obstante, dado que H_R y el diámetro del objeto D correlacionan muy fuertemente (Peixinho *et al.*, 2012), con la magnitud absoluta en el rojo H_R podemos comparar tamaños entre los objetos transneptunianos.

3.3. Velocidad colisional y parámetro de Tisserand.

Otros parámetros, relacionados con los orbitales, que se analizan en este trabajo son:

- **Velocidad colisional** v_c (en km/s): Es una buena estimación de la velocidad media de impacto de un KBO. Viene definida por³²:

$$v_c = v_{kep} \sqrt{e^2 + i^2} \quad (33)$$

siendo e e i la excentricidad y la inclinación de la órbita del objeto menor, y v_{kep} su velocidad kepleriana $\sqrt{GM_{Sol}/a}$, donde a es el semieje mayor del objeto y G la constante de gravitación universal. La importancia de la velocidad colisional, y de ahí que la hallamos seleccionado para nuestro análisis, es que podría estar relacionada con la diversidad de colores existente en los objetos transneptunianos.

³⁰Aumento repentino en el brillo de un cuerpo cuando su ángulo de fase de observación se aproxima a cero.

³¹El albedo es el porcentaje de radiación reflejada por una superficie respecto a la radiación incidente.

³²Existen en el catálogo parámetros similares y estadísticamente equivalentes como la *excitación orbital* $\varepsilon = \sqrt{e^2 + \sin^2 i}$ o el parámetro *psi* de Öpik $\psi = (\frac{5}{8}e^2 + \sin^2 i)/a$. La diferencia estriba en que v_c está relacionada con la análoga velocidad circular local, mientras que ε y ψ estarían relacionadas con la análoga velocidad circular global (Peixinho *et al.* 2015).

- El **Parámetro de Tisserand** T (adimensional): es un invariante, ya que su valor permanece constante durante un encuentro cercano entre un planeta y un KBO dado aunque cambien los demás parámetros orbitales, circunstancia que permite realizar seguimientos de un objeto. Aplicado a Neptuno, si su valor en un KBO es $T_N > 3$, entonces no cruza la órbita de este planeta, mientras que si $T_N < 3$, generalmente sí que la cruza (Peixinho *et al.*, 2015).

Este parámetro se define de la siguiente forma:

$$T_N = \frac{a_N}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{a_N}(1 - e^2)} \cos i \quad (34)$$

donde a_N es la distancia media al Sol de Neptuno (30.1 UA), mientras que a , e e i son la distancia media, la excentricidad y la inclinación de la órbita del objeto menor.

4. Nomenclatura y clasificación de objetos

Describimos en esta sección el proceso de denominación de los objetos transneptunianos y su clasificación, mediante parámetros orbitales, que define los diversos grupos.

4.1. Nomenclatura.

La IAU (*International Astronomical Union*³³) es la entidad encargada de dar nombre a los objetos celestes. En concreto, los centauros y objetos transneptunianos se nombran de la misma forma que los asteroides. Cuando un objeto es descubierto, se le asigna provisionalmente una denominación que consiste en cuatro dígitos numéricos que indican el año en el que se produjo el descubrimiento y una letra que indica la quincena del año³⁴, seguida de otra letra y de un número que indican el número de descubrimiento dentro de la quincena. Por ejemplo, la denominación 2005 FY9 para un objeto indica que fue descubierto en 2005, señalando la letra F la segunda quincena de marzo. Y9 se refiere al número de descubrimiento en la quincena: a la letra Y le corresponde la posición 24 del abecedario³⁵ dentro del ciclo 9. De ahí que $9 \cdot 25 + 24 = 249$ sea el número de descubrimiento dentro de la quincena. En resumen, 2005 FY9 fue el descubrimiento número 249 en la segunda quincena de marzo de 2005.

Cuando la órbita del objeto es bien conocida (se necesitan algunos años de observación para establecerla) se le asigna un número; en el caso de 2005 FY9 fue 136472. Ningún otro objeto del sistema solar tiene ese mismo número. Más tarde recibe un nombre, que en nuestro ejemplo es *Makemake* y de ahí que nuestro objeto tenga tres denominaciones en total. Si el objeto tiene número y nombre asignado, entonces sabemos que su órbita alrededor del Sol está bien establecida.

³³<https://www.iau.org/>.

³⁴Utilizando las letras del abecedario excepto la I y la Z, A indicaría la primera quincena de enero, B la segunda quincena del mismo mes, C la primera quincena de febrero, etc.

³⁵En este caso se usan de la A a la Z exceptuando la I, es decir, 25 letras que conforman un ciclo.

4.2. Clasificación de objetos transneptunianos.

El catálogo J/A+A/577/A35 ha sido confeccionado por sus autores utilizando el método de clasificación debido a Lykawa y Mukai (2007), donde se ha incluido su análisis de las *resonancias de movimiento medio* MMR con Neptuno³⁶(Peixinho *et al.* 2015).

El orden y criterios orbitales de selección de Lykawa y Mukai, mediante el cual quedan definidos los grupos de objetos, es el siguiente:

1. **Plutinos:** Objetos en resonancia MMR 2:3 con Neptuno.
2. **Otros resonantes:** Objetos con diversas resonancias MMR con Neptuno.
3. **No analizados:** $q < a_J$, donde $a_J \approx 5.2$ UA es el semieje mayor de la órbita de Júpiter.
4. **Centauros:** $q > a_J \wedge a < a_N$, donde $a_N \approx 30.1$ UA es el semieje mayor de la órbita de Neptuno.
5. **SDO** (*Scattered Disk Object* u objeto de disco disperso): $a_J < q < a_N \wedge a \geq a_N$.
6. **SDO:** $a_N < q \leq 37$ UA.
7. **DKBO** (*Detached KBO* u objeto separado): $q \geq 40$ UA \wedge $a \geq 48$ UA.
8. **SDKBO** (*Scattered or Detached KBO* u objeto separado o disperso):

$$37 \text{ UA} \leq q \leq 40 \text{ UA}.$$
9. **cCKBO** (*cold Classical KBO* o población *clásica fría*):

$$i < 5^\circ \wedge \{[q \geq 37 \wedge (37 \text{ UA} \leq a \leq 40 \text{ UA})] \vee [q \geq 38 \text{ UA} \wedge (42 \text{ UA} \leq a \leq 48 \text{ UA})]\}.$$
10. **hCKBO** (*hot Classical KBO* o población *clásica caliente*):

$$i \geq 5^\circ \wedge q \geq 37 \wedge (37 \text{ UA} \leq a \leq 48 \text{ UA}).$$

Se han propuesto otros métodos para la clasificación de estos objetos. Por ejemplo, en Gladman *et al.* (2008), se sitúa la frontera entre centauros y SDOs en $a_N = 30.1$, donde orbitan los troyanos de Neptuno (objetos con resonancia 1:1 con este planeta). El límite superior se sitúa en $a = 2000$ UA, en la nube de Oort interna, donde los efectos galácticos de marea y de estrellas pasajeras ya causan alteraciones en los perihelios e inclinaciones de los objetos (Dones *et al.*, 2004). El resto de los criterios de clasificación alternan el uso de parámetros orbitales con simulaciones.

³⁶Las resonancias de movimiento medio MMR o *Mean Motion Resonances* se producen cuando la relación entre el periodo de la órbita de un objeto con el periodo de la órbita de un planeta mayor, en este caso Neptuno, puede describirse por medio del cociente entre dos números enteros (se dice entonces que esos parámetros son conmensurables). Pero para determinar si un objeto tiene una órbita resonante no solo basta con determinar que se encuentre a la correspondiente distancia media del Sol, como se podría pensar en un principio utilizando la tercera ley de Kepler $P^2/a^3 = \text{constante}$, sino que se han de integrar las trayectorias del objeto y la de Neptuno, y examinar mediante simulaciones, que trataremos en la sección 6, el comportamiento de ciertos parámetros derivados de los orbitales.

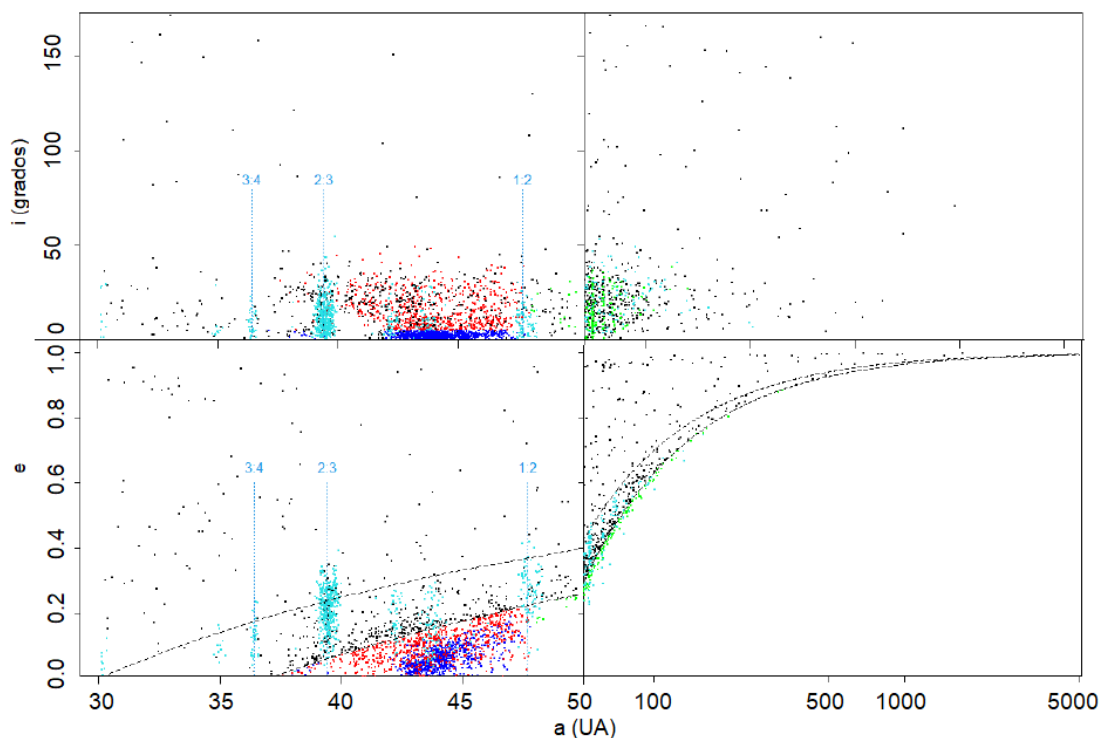


Figura 4.1: Inclínación de la órbita i en función de la distancia media a para los objetos transneptunianos, en la figura superior, y excentricidad e en función de la distancia media a , en la figura inferior. En ambas figuras se observan ciertos objetos atrapados en unas órbitas con unos valores determinados de la distancia media a (color azul claro): son zonas de resonancias de movimiento medio con la órbita de Neptuno. En la figura se muestran algunas de las resonancias principales, entre las que destaca la MMR 2:3, correspondiente a los plutinos (el planeta enano Plutón pertenece a este grupo) con distancias medias cercanas a $a = 39.45$ UA. En la figura inferior, las curvas discontinuas de color negro muestran los límites para valores de la distancia del perihelio $30 \text{ UA} < q < 37 \text{ UA}$. Los objetos **SDO** situados en esa franja y en la parte superior a esta, en color negro, son susceptibles de ver perturbada su órbita por Neptuno ($a_N = 30.1 \text{ UA}$). Los objetos clásicos (en azul oscuro los clásicos fríos y en rojo los calientes), los encontramos situados entre las resonancias 2:3 y 1:2, y con una distancia del perihelio $q \geq 37 \text{ UA}$. Los objetos **DKBO** y **SDKBO** (en verde) están situados más allá de la influencia gravitacional de Neptuno debido a que tienen un valor de $q \geq 37 \text{ UA}$. El grupo **SDKBO** está compuesto por objetos **SDO** y **DKBO** que comparten la misma franja orbital. Los centauros no se muestran en esta figura. El eje de abscisas muestra escala logarítmica para valores $a > 50 \text{ UA}$. Los objetos de esta figura han sido clasificados por el autor de este TFM utilizando el algoritmo de Lykawa y Mukai, con datos procedentes de JPL Small-Body Database Search Engine (en junio de 2020). La identificación de los objetos resonantes, primer paso en la clasificación de los objetos transneptunianos, se ha obtenido de The Deep Ecliptic Survey Object Classifications (<https://www.boulder.swri.edu/~buie/kbo/desclass.html>), de Marc W. Buie (Southwest Research Institute).

5. Población clásica (objetos CKBO).

La población *clásica* es un conjunto de objetos del cinturón de Kuiper que presentan órbitas estables y bajas excentricidades ($e < 0.22$ en el catálogo J/A+A/577/A35 de *Vizier*). En el cuadro inferior izquierdo de la figura 4.1 los encontramos situados entre las resonancias 2:3 y 1:2, con una distancia del perihelio superior a 37 UA (objetos con colores azul y rojo). Debido a esta distancia los objetos *clásicos* evitan ser perturbados fuertemente en sus órbitas por Neptuno.

Es conocida la fuerte correlación entre colores e inclinación de las órbitas en los objetos *clásicos* (p ej., Doressoundiram *et al.*, 2005). Vamos a comprobar este extremo analizando correlaciones entre parámetros físicos y orbitales, con datos procedentes del catálogo de *Vizier*. Los parámetros físicos a analizar (con error 1σ) son la magnitud absoluta en el rojo H_R y los índices de color B-V, V-R, R-I, B-I, V-I y B-R. Respecto a este último indicador es interesante destacar que un valor de $B-R=1.01 \text{ mag}$ se asocia a un azul oscuro, mientras que $B-R=1.88 \text{ mag}$ se codifica como rojo, y que el Sol tiene un índice $B-R=1.03 \text{ mag}$ (Doressoundiram *et al.*, 2002). Otros parámetros que entran en el análisis (esta vez sin datos de errores) son la velocidad colisional v_c , el parámetro de Tisserand respecto a Neptuno T_N , además de los parámetros orbitales descritos en la subsección 3.1.

El catálogo J/A+A/577/A35 contiene 127 objetos clasificados como *clásicos*. De este conjunto y siguiendo el mismo procedimiento del trabajo del que proceden los datos (Peixinho, 2015), se han eliminado 10 objetos, 7 identificados como pertenecientes a la familia de Haumea³⁷, y tres objetos más que tienen unos valores anómalos (*outliers*) del índice de color B-R en comparación con el resto de objetos clásicos con similares inclinaciones de órbitas³⁸. Disponemos entonces de una muestra con un total de 117 objetos *clásicos* del catálogo J/A+A/577/A35 de *VizieR* para realizar los análisis, utilizando en cada test solo los objetos que contengan datos completos para los parámetros implicados. En el caso en el que se utilicen solo parámetros orbitales la muestra será completa, ya que en estos no hay ausencia de datos.

5.1. Correlaciones entre parámetros físicos y orbitales.

Los coeficientes de correlación entre los diversos parámetros físicos y orbitales calculados con los procedimientos descritos en las secciones anteriores se muestran en las tablas de la A.1 a la A.5, mientras que los ajustes FDR de los resultados significativos se pueden encontrar en la tabla A.7, todas en el anexo A. Los coeficientes se muestran con un intervalo de confianza de 68.3% ($\rho_{\pm\sigma}^+$). Los p-valores entre paréntesis vienen dados sin corrección FDR. Uno y dos asteriscos a la derecha de estos valores indican resultados significativos a 2.5σ y 3σ (intervalos de confianza de 98.76% y 99.73% respectivamente) con corrección FDR.

Analizamos en primer lugar las correlaciones entre parámetros orbitales (tablas A.1 y A.2):

- No hay correlación³⁹ entre la distancia media a y la inclinación i .

³⁷El planeta enano Haumea (2003 EL61) pudo sufrir un gran impacto a causa del cual adquiriría una rotación rápida, se formaría su sistema de satélites y además perdería gran parte del hielo de su superficie. La familia de Haumea se compone de una serie de objetos que poseen propiedades de superficie y orbitales similares a las de Haumea, por lo que serían fragmentos de ese manto expulsado de hielo de agua casi puro (Brown *et al.* 2007). Los 7 objetos eliminados en este caso del conjunto de datos y pertenecientes a la familia de Haumea son: 2003 SQ317, 2003 UZ117, 2005 CB79, 1995 SM55, 2002 TX300, 2003 OP32 Y 2005 RR43.

³⁸Los tres objetos son 1998 WV24, 2003 YL179 y 2002 VD131.

³⁹Estrictamente tendríamos que decir que no hay correlación estadísticamente significativa, es decir, que no se puede rechazar la hipótesis nula de que $\rho = 0$ al nivel de significación determinado. No obstante, para simplificar la exposición en este trabajo diremos, cuando se dé el caso, que no hay correlación entre parámetros. Un resultado del test de correlación significativo quiere decir que, a un nivel de significación determinado α , se

- Ni la longitud del nodo ascendente Ω ni el argumento del perihelio ω presentan correlación significativa alguna con ningún parámetro físico ni orbital.
- Los resultados de los coeficientes de correlación parciales entre los parámetros a , e y q están condicionados por su relación expresada en la ecuación (29). Por ejemplo, si tomamos la excentricidad e como parámetro de control sobre a y q obtenemos una fuerte correlación parcial, con $\rho_{aq.e} = 0.83$ y significativa a nivel de 3σ , resultado coherente con la ecuación (29) si mantenemos e constante: estamos calculando en este caso la correlación entre a y q como si todos los objetos tuvieran la misma excentricidad e . Sin embargo, sin parámetros de control no existe correlación entre a y q según la tabla A.1 ($\rho_{aq} = 0.07$; $p=0.45$).
- v_c es función de e e i por medio de la ecuación (33), y T_N es función de a , e y i por medio de (34), por lo que las correlaciones entre estos parámetros están afectadas por esas relaciones.
- Cabe destacar una correlación moderada entre la inclinación de la órbita i y la distancia del perihelio q , con un valor de $\rho_{iq} = -0.47$ y significativa a nivel de 3σ : dado que la distancia del perihelio no es función de la inclinación se piensa que esta correlación puede ser debida a algún mecanismo de evolución en la forma en la que se formó el cinturón de Kuiper o quizás debida a un sesgo muestral (Peixinho *et al.*, 2015). El hecho de que las correlaciones parciales $\rho_{iq.a} = -0.48$ y $\rho_{iq.e} = -0.34$ sean significativas a nivel de 3σ , utilizando a y e como parámetros de control, parece confirmar la correlación entre i y q .
- La correlación entre la excentricidad e y la inclinación de la órbita i , con un valor de $\rho_{ei} = 0.35$ y significativa a nivel de 3σ , desaparece cuando tomamos como parámetro de control la distancia del perihelio q , de forma que $\rho_{ei.q} = 0.02$. Hay que recordar, no obstante, que e y q están relacionados por la ecuación (29) y que la distancia media a no es función de i .

En segundo lugar analizamos las correlaciones en las que intervienen parámetros físicos (tablas de la A.3 a la A.5):

- Ningún parámetro físico presenta resultados significativos de correlación con la distancia media a .
- Los índices de color R-I y V-I no muestran resultados significativos con los parámetros orbitales.
- Existen correlaciones moderadas significativas a nivel de 3σ de la inclinación de la órbita i con los colores B-V, V-R y B-R, y a nivel de 2.5σ con B-I y la magnitud absoluta H_R .
- Hay una correlación moderada entre el índice B-R y la distancia del perihelio q a nivel de 2.5σ . Sin embargo, calculando la correlación parcial con la inclinación i como parámetro de control este resultado significativo desaparece. Esto es debido a que existe correlación directa entre inclinación y color B-R, e independiente, entre inclinación y distancia del perihelio, de forma que las correlaciones entre el índice de color B-R y q sería espuria. Lo mismo ocurre con otros colores que presentan bajas correlaciones con q y niveles menores de 2.5σ .

rechaza la hipótesis nula $H_0 : \rho = 0$ porque el p-valor es menor que α . Los niveles de significación relacionados con 2.5σ y 3σ son, respectivamente, 0.0124 y 0.0027.

- Los índices B-V, B-I y B-R muestran correlaciones moderadas con la excentricidad e pero a niveles inferiores a 2.5σ . Calculando las correlaciones parciales entre cada uno de esos colores y e , utilizando q e i como parámetros de control, esas correlaciones son bajas y no resultan significativas.
- Los índices de color B-V, V-R, B-I y B-R presentan correlaciones moderadas con resultados significativos a nivel de 3σ con la velocidad colisional. Esto parece debido a que la velocidad colisional es función de la inclinación i a través de la ecuación (33): tomando la inclinación i como parámetro de control estas correlaciones pasan a ser bajas o incluso desaparecen. Algo similar ocurre con el parámetro de Tisserand T_N y los colores V-R y B-R, debido esta vez a la relación entre T_N e i a través de la ecuación (34).
- No existen resultados significativos entre los índices de color y magnitud absoluta H_R , de donde podemos inferir que no hay correlación significativa entre índices de color y el tamaño de los objetos *clásicos* (tabla A.4).

Como resumen, podemos indicar que la inclinación de la órbita es el parámetro más destacable de las correlaciones entre parámetros físicos y orbitales en los objetos *clásicos* del cinturón de Kuiper. Por otro lado, la correlación entre la inclinación i y la distancia del perihelio q introduce correlaciones espurias entre diversos parámetros.

5.2. Objetos clásicos *fríos* y *calientes*.

Entre los objetos clásicos del cinturón de Kuiper existe una mayor concentración de objetos con inclinaciones menores de 5° , como se muestra en el histograma de la figura 5.1, que representa el número de objetos *clásicos* en función de la inclinación de su órbita. En este muestreo, obtenido con datos de la *JPL Small-Body Database Search Engine* (en junio de 2020), encontramos que 831 objetos *clásicos* tienen inclinaciones menores de 5° (aproximadamente un 55% del total), mientras que otros 685 objetos poseen inclinaciones superiores a ese valor.

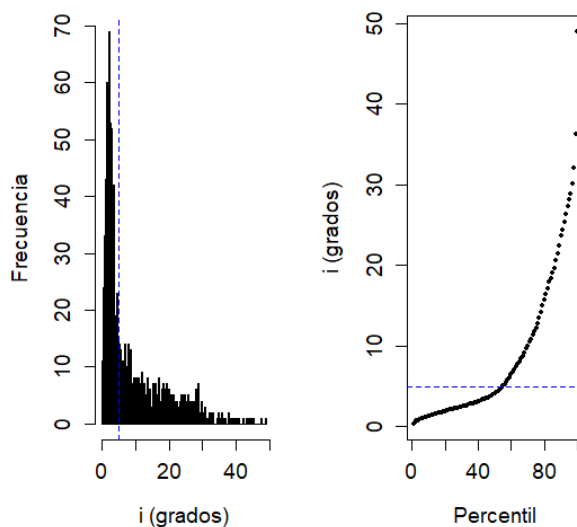


Figura 5.1: Histograma y función de cuantiles de la inclinación de los objetos clásicos. Las líneas discontinuas azules marcan el valor de inclinación de 5° . Base de datos utilizada: *JPL Small-Body Database Search Engine* (junio 2020).

Usualmente, y tal como hemos hecho con la clasificación de Mukai, se ha utilizado este valor de inclinación de 5° para separar la población *clásica* en dos grandes grupos: la **población fría** (*cold population*) con órbitas con inclinaciones menores que 5° , y **población caliente** (*hot population*), con inclinaciones superiores.

Los objetos *clásicos fríos* (de color azul en la figura 5.2) están posicionados preferentemente con unos valores de la distancia del perihelio $q > 40$, mientras que su excentricidad e es menor en promedio que la de los *clásicos calientes* (en rojo). Se ha discutido si estas dos poblaciones *clásicas* habrían tenido un origen común, desplazándose con el tiempo algunos objetos hacia inclinaciones mayores debido a perturbaciones gravitatorias o colisionales; o por el contrario, los dos grupos podrían haberse formado por separado y evolucionado hacia su situación actual en el cinturón de Kuiper.

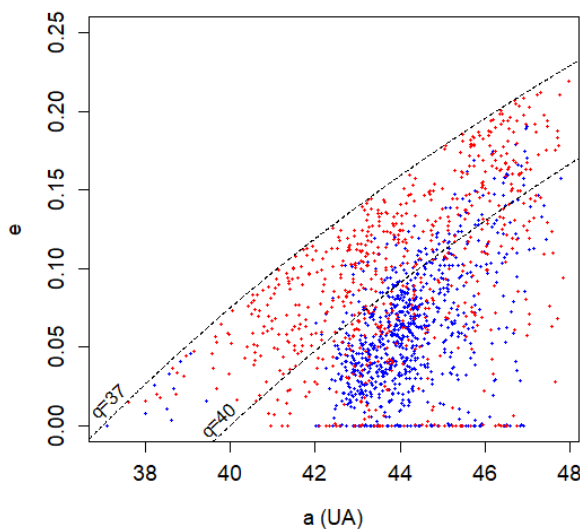


Figura 5.2: Excentricidad en función de la distancia media para objetos clásicos del cinturón de Kuiper (los objetos fríos en azul y los calientes en rojo). La línea discontinua superior e inferior marcan valores para distancias del perihelio con valores de $q = 37$ y $q = 40$, respectivamente. Base de datos utilizada: JPL Small-Body Database Search Engine (junio 2020).

Una diferencia en los parámetros físicos entre objetos *fríos* y *calientes* podría suponer un indicio de orígenes diferentes. Debemos tener en cuenta que para su clasificación hemos utilizado exclusivamente parámetros orbitales, y pretendemos averiguar si esa clasificación tiene reflejo en una diferencia entre parámetros físicos.

En la figura 5.3 (izquierda) se muestra el diagrama de dispersión del índice de color B-R con respecto a la inclinación de las órbitas de los objetos *clásicos*, donde se han incluido las barras de error correspondientes. En los *fríos* (color azul) se observa mayor cantidad de objetos con colores que tienden al rojo (mayor valor del índice de color B-R) que entre los *calientes*, donde estos últimos parecen tener colores más desplazados hacia el azul. Se ha dibujado de forma arbitraria una línea vertical en $B-R = 1.5 \text{ mag}$ para resaltar esta situación. Los tres objetos en la parte inferior izquierda de la figura son los objetos que hemos considerado anómalos (*outliers*) respecto al color B-R y que han sido eliminados de los análisis. En la figura de la derecha se muestra el diagrama de dispersión de la magnitud absoluta H_R con la inclinación de órbita i , donde se observa que los objetos más brillantes (menor valor de la magnitud absoluta H_R , que se corresponde con un mayor tamaño) son más abundantes en la población *caliente*. Se ha dibujado de forma arbitraria una línea de separación vertical en $H_R = 5.5 \text{ mag}$ para destacar esta proporción.

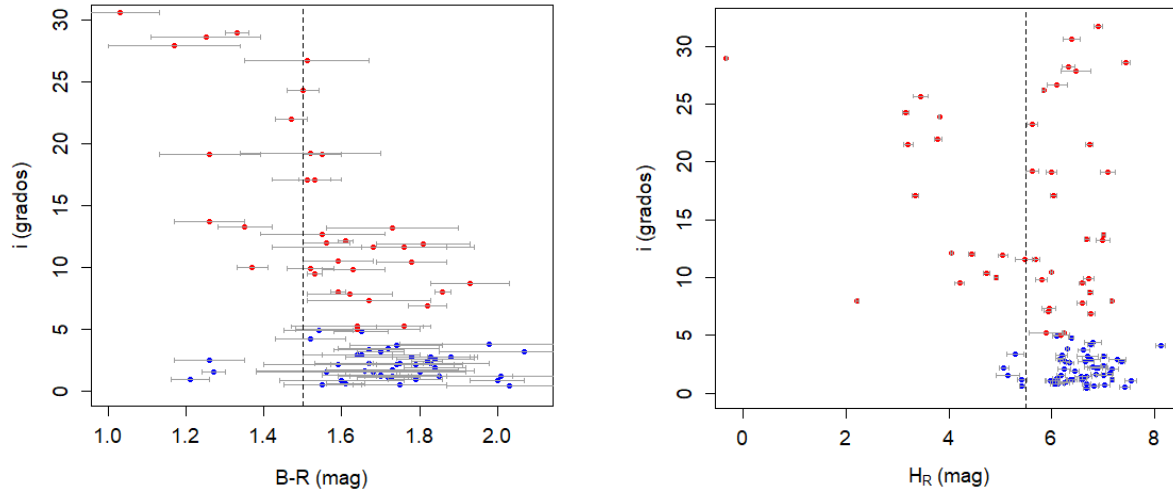


Figura 5.3: Izquierda: diagramas de dispersión del índice de color $B-R$ con la inclinación de órbita i para los objetos clásicos del cinturón de Kuiper. Derecha: diagramas de dispersión de la magnitud absoluta H_R con la inclinación de órbita i . Se incluyen las barras de errores. Base de datos utilizada: catálogo $J/A+A/577/A35$ de Vizier.

Para cuantificar esas diferencias se han calculado los estimadores de Huber del índice de color $B-R$ y de la magnitud absoluta H_R en ambos grupos (tabla 5.1). Para su cálculo se han incluido errores y utilizado las técnicas *bootstrap* descritas, dando como resultado que los objetos *fríos* tienen en promedio menor tamaño y color más rojo que los objetos *calientes*.

	fríos $T_n \pm \sigma_{NMAD}$ (mag)	calientes $T_n \pm \sigma_{NMAD}$ (mag)
$B-R$	1.74 ± 0.16	1.56 ± 0.21
H_R	6.54 ± 0.54	5.69 ± 1.15

Tabla 5.1: Estimadores de Huber de H_R y $B-R$ para los objetos clásicos *fríos* y *calientes*. Base de datos utilizada: catálogo $J/A+A/577/A35$ de Vizier.

La figura 5.4 muestra gráficamente los mismos resultados para el índice de color $B-R$ mediante los histogramas y las funciones suavizadas para ambos grupos⁴⁰. Por otro lado, la figura 5.5 muestra los resultados ahora para la magnitud absoluta en el rojo H_R . En ambas figuras (5.4 y 5.5) se destaca el hecho de que la población *fría* es más homogénea que la *caliente*, tanto respecto al índice de color $B-R$ como a la magnitud absoluta H_R .

⁴⁰Para la confección de este tipo de gráficas se ha utilizado el paquete `{decon}` del *software* R. La estimación de funciones cdf y pdf no paramétricas se realiza mediante los denominados *deconvolution kernel methods*. Las funciones utilizadas, *DeconCdf* y *DeconPdf*, suavizan el perfil de las distribuciones teniendo en cuenta la influencia entre datos cercanos y los errores de los mismos.

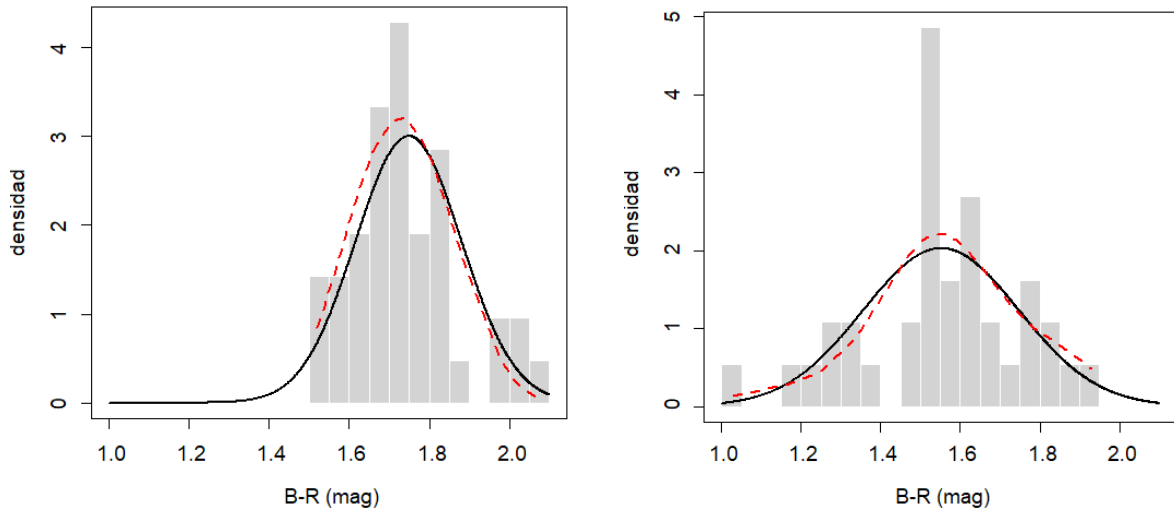


Figura 5.4: Histogramas para los índices de color $B-R$ de los objetos clásicos fríos (izquierda) y calientes (derecha). Las curvas de color negro muestran estimaciones suavizadas de la distribución, mientras que la discontinua roja muestra los perfiles de las distribuciones teniendo en cuenta la influencia entre datos cercanos y sus errores. Base de datos utilizada: catálogo $J/A+A/577/A35$ de Vizier.

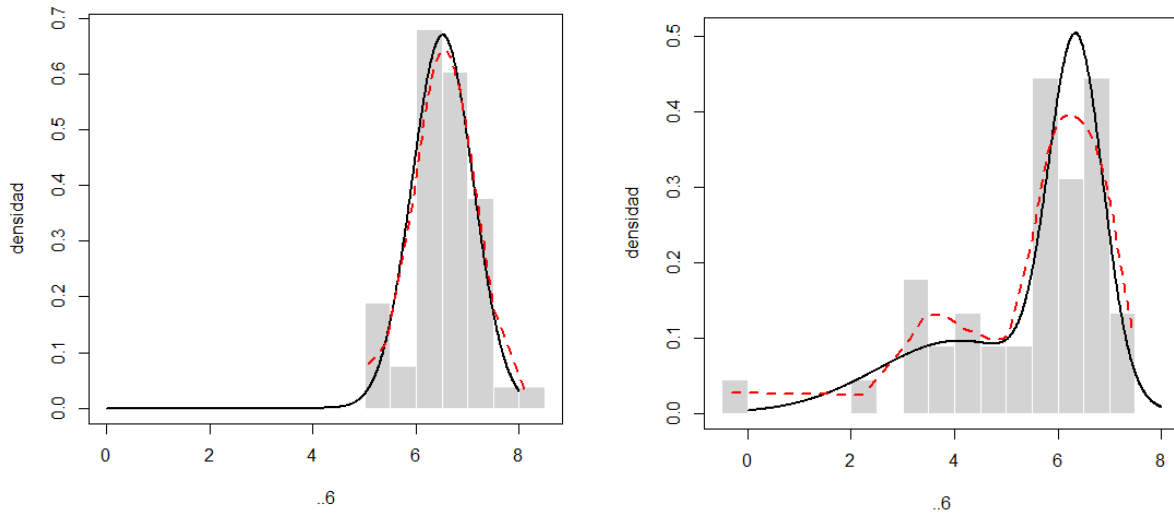


Figura 5.5: Histogramas para la magnitud absoluta en el rojo H_R de los objetos clásicos fríos (izquierda) y calientes (derecha). Las curvas de color negro muestran estimaciones suavizadas de la distribución, mientras que la discontinua roja muestra los perfiles de las distribuciones teniendo en cuenta la influencia entre datos cercanos y sus errores. Base de datos utilizada: catálogo $J/A+A/577/A35$ de Vizier.

Se ha comprobado si las distribuciones del índice de color $B-R$ y magnitud absoluta H_R de las dos poblaciones *clásicas* son similares mediante el contraste de Wilcoxon-Mann-Whitney (WMW) y el test de Kolmogorov-Smirnov (KS), utilizando técnicas *bootstrap* y teniendo en cuenta los errores de los parámetros. En ambas pruebas se rechaza la hipótesis nula de igualdad de distribuciones, según se muestra en la tabla 5.2.

	WMW	KS
B-R	p=0.00024: NC=3.68 σ (0.98)	p<0.002: NC=3.11 σ (0.81)
H _R	p=0.00027: NC=3.64 σ (0.97)	p<0.001: NC=3.31 σ (0.83)

Tabla 5.2: Test de Wilcoxon-Mann-Whitney y de Kolmogorov-Smirnov entre las distribuciones de los objetos fríos y calientes para el índice de color B-R y la magnitud absoluta en el rojo H_R (entre paréntesis se da la potencia del contraste en cada caso). Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

Partiendo de una clasificación de los objetos *clásicos* basada en la utilización parámetros orbitales hemos encontrado diferencias entre parámetros físicos que justifican la separación de ambos grupos. Los resultados obtenidos en los test presentan diferencias significativas: en los *fríos* existe un mayor número de cuerpos con colores más rojos y de menor tamaño (¿irradiación sobre objetos helados lo suficientemente alejados del Sol y con menor alteración de sus superficies por impactos?), además de presentar una mayor homogeneidad en sus distribuciones. Todo parece indicar que ambos grupos, *fríos* y *calientes* habrían tenido procesos de formación diferentes. Además, estos argumentos son compatibles con la hipótesis de que los objetos *clásicos fríos* pudieran haberse formado en la región que ocupan actualmente, de forma que podrían considerarse reliquias de la formación del sistema solar.

Hemos comprobado la marcada correlación entre índices de color, sobre todo el índice B-R, y la inclinación de la órbita de los objetos *clásicos*. Si consideramos ahora la correlación de forma separada para ambos grupos, comprobamos que los *fríos* no presentan correlación (B-R)_i, mientras que en los *calientes* sí que se mantiene, tal como se muestra en la tabla 5.3.

	clásicos	fríos	calientes
$\rho^{(B-R)_i}$	-0.50 ^{+0.10} _{-0.09} (p=2 · 10 ⁻⁶)**	-0.08 ^{+0.17} _{-0.17} (p=0.62)	-0.59 ^{+0.13} _{-0.10} (p=0.00011)**

Tabla 5.3: Coeficientes de correlación $\rho_{-\sigma}^{+\sigma}$ para los objetos clásicos. Los dos asteriscos a la derecha de los valores indican resultados significativos a nivel de 3 σ después de la corrección FDR. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

Teniendo en cuenta los resultados de la tabla 5.3, dada la ausencia de correlación entre B-R e *i* en los objetos *fríos* y una correlación moderada entre estos parámetros en los objetos *calientes* se ha definido la siguiente función:

$$\begin{cases} (B - R) = 1.748 \text{ mag} & \text{si } i < 5^\circ \\ (B - R) = -0.0172 i + 1.806 \text{ mag} & \text{si } i \geq 5^\circ \end{cases}$$

La figura 5.6 representa este modelo⁴¹ para la relación entre el color B-R y la inclinación de la órbita *i* de los objetos *clásicos*

En este trabajo se ha seguido la clasificación usual de objetos *clásicos* utilizando el valor de 5° de inclinación como la frontera entre objetos *fríos* y *calientes*. Sin embargo, diversos

⁴¹Este modelo se ha tomado de Peixinho (2008). En nuestro caso la recta de regresión de la figura 5.6 para la distribución B-R de los objetos *calientes* ha sido obtenida mediante métodos robustos, incluyendo los términos de error, con la función *rlm* del paquete {MASS} de R.

estudios desplazan esta frontera hasta inclinaciones mayores, como por ejemplo en Peixinho (2008), donde se estima una frontera de separación de 12° en vez de 5° .

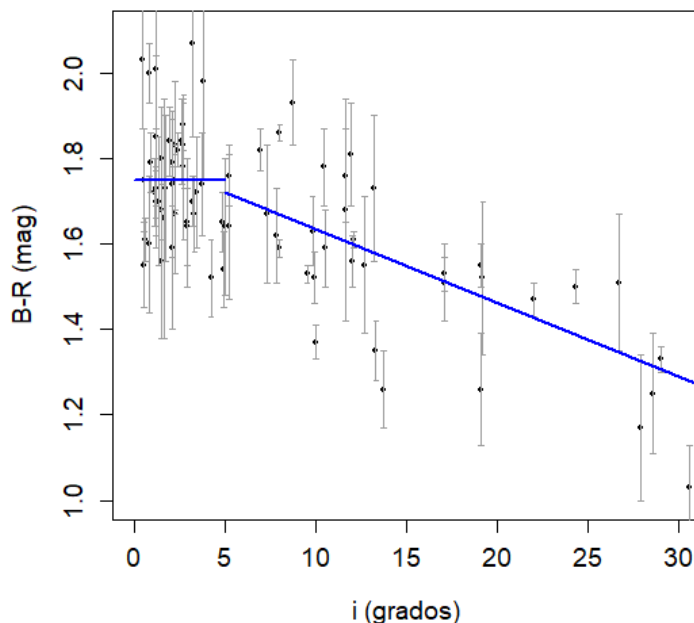


Figura 5.6: Modelo para el índice de color $B-R$ de los objetos clásicos en función de la inclinación de la órbita i . La recta horizontal se ha calculado con el estimador de Huber y corresponde a los objetos fríos, y la recta de regresión a los calientes. Base de datos utilizada: catálogo $J/A+A/577/A35$ de Vizier.

5.3. Comparación con otras poblaciones transteptunianas.

Como hemos comprobado, el rasgo característico de los objetos *clásicos* en su conjunto es la correlación entre índices de color y la inclinación de la órbita, y por otro lado, la correlación entre la distancia del perihelio y de nuevo la inclinación.

La tabla 5.4 muestra las correlaciones entre inclinación e índices de color $B-R$, magnitudes absolutas H_R y distancia del perihelio q de las diversas familias transneptunianas⁴² (en la tabla A.6 del anexo se muestran correlaciones entre inclinación y otros índices de color). En general, los objetos *clásicos* destacan por tener las mayores correlaciones con mayor nivel de confianza. Respecto a la distancia del perihelio q no se ha encontrado correlación con la inclinación en ninguna otra población.

En la tabla 5.5 se detallan los estimadores de Huber del índice de color $B-R$ y la magnitud absoluta en el rojo H_R de las diferentes poblaciones transneptunianas y de los centauros. Los objetos clásicos *fríos* (cCKBO) destacan por su mayor homogeneidad (valor más pequeño de NMAD), tanto en índice de color $B-R$ como en magnitud absoluta H_R , y por tener los colores más rojos de entre todos los transneptunianos. Todo ello parece compatible con la hipótesis de que los objetos *fríos* podrían haber tenido un proceso de formación similar en conjunto, lo suficientemente alejados del Sol para adquirir colores que tienden al rojo, y que habrían sufrido menos alteraciones que los objetos de las otras familias.

⁴²En los análisis de las diversas poblaciones transneptunianas se han eliminado los objetos retrógrados, es decir, objetos con un valor de inclinación de la órbita mayor de 90° , y los pertenecientes a la familia Haumea, tal como se ha hecho en Peixinho, Delsanti y Doressoundiram (2015).

	Clásicos	Centauros	Plutinos	Otros res.	sdo	sdkbo
$\rho_{(B-R)i}$	$-0.50^{+0.10}_{-0.09}$ (p=2 10 ⁻⁶)** 79	$-0.30^{+0.20}_{-0.18}$ (p=0.11) 29	$-0.30^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.041) 45	$-0.26^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.033) 67	$-0.10^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.48) 54	$-0.46^{+0.23}_{-0.18}$ (p=0.036) 20
$\rho_{H_R i}$	$0.32^{+0.09}_{-0.10}$ (p=0.0013)* 98	$-0.28^{+0.18}_{-0.16}$ (p=0.12) 32	$-0.23^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.12) 48	$-0.09^{+0.14}_{-0.13}$ (p=0.44) 70	$-0.06^{+0.14}_{-0.13}$ (p=0.66) 55	$-0.17^{+0.28}_{-0.26}$ (p=0.50) 17
ρ_{iq}	$-0.47^{+0.09}_{-0.08}$ (p< 10 ⁻⁶)** 117	$-0.10^{+0.21}_{-0.20}$ (p=0.60) 32	$0.01^{+0.16}_{-0.16}$ (p=0.94) 49	$-0.11^{+0.13}_{-0.12}$ (p=0.34) 71	$0.07^{+0.15}_{-0.15}$ (p=0.59) 60	$0.23^{+0.21}_{-0.24}$ (p=0.28) 22

Tabla 5.4: Coeficientes de correlación $\rho_{-\sigma}^{+\sigma}$ para centauros y distintos grupos transneptunianos. Uno y dos asteriscos a la derecha del p-valor indican resultados significativos a nivel de 2.5σ y 3σ respectivamente, después de la corrección FDR. La cifra en la parte inferior derecha de cada celda señala en número de objetos implicados en cada test. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

	B-R (mag)	H _R (mag)
<i>clásicos</i>	1.66 ± 0.21	6.26 ± 0.73
<i>clásicos fríos</i>	1.74 ± 0.16	6.54 ± 0.54
<i>clásicos calientes</i>	1.56 ± 0.21	5.68 ± 1.15
Centauros	1.40 ± 0.28	9.39 ± 1.42
Plutinos	1.46 ± 0.36	6.77 ± 1.30
Otros res.	1.59 ± 0.30	6.89 ± 0.78
SDO	1.42 ± 0.28	6.76 ± 1.22
SDKBO	1.44 ± 0.17	5.66 ± 1.45

Tabla 5.5: Estimadores de Huber y NMAD ($T_n \pm \sigma_{NMAD}$) de las diversas familias transneptunianas para los parámetros B-R y H_R. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier

Diversos autores han destacado el carácter bimodal de los colores de los centauros (Peixinho *et al.* 2012; Tegler *et al.* 2016). Para comprobar la posibilidad de bimodalidad en el índice de color B-R de los centauros realizamos un test *dip*⁴³ utilizando remuestreos *bootstrap* y teniendo en cuenta los errores de los parámetros. Obtenemos un valor del estadístico de contraste D=0.089, que una vez interpolado por tablas arroja un p-valor=0.052 (1.94σ) y además con una potencia del contraste inferior a 0.8. Con una muestra algo mayor (con 61 centauros), en Tegler *et al.* (2016) se obtiene un resultado aún menos concluyente, con un p-valor=0.19 (1.31σ), por lo que no se puede descartar la hipótesis nula de unimodalidad. En su estudio se estima que la eficacia del test *dip* viene condicionada por varios factores, como el número de objetos, la separación de los posibles picos, su anchura y la fracción de objetos asociados a cada pico. Propone otro tipo de prueba para estudiar la distribución de objetos centauros utilizando la función de R *densityMclust*, del paquete {mclust}, basada en el *Gaussian Mixture Model* o GMM, método que ajusta una distribución a un mínimo número

⁴³Con R, mediante la función *dip* del paquete {diptest}.

de distribuciones normales usando el método *expectatio-maximization* (Scrucca *et al.*, 2016).

Del ajuste GMM al índice de color B-R de los centauros del catálogo J/A+A/577/A35 se obtienen, como resultado, dos distribuciones normales tales que $N(1.19, 0.09)$ y $N(1.83, 0.09)$ (*mag*), y que se muestran en la figura 5.7. El pico de la izquierda presenta colores más alejados del rojo, con valores del estimador de Huber para la inclinación de la órbita tales que $T_n = 16.7 \pm 7.4$ grados, mientras que el pico de la derecha, que presenta colores más rojos según la escala del índice B-R de la figura, presenta un valor para la inclinación de $T_n = 11.9 \pm 10.7$ grados; los objetos con colores más cercanos al rojo presentan menores inclinaciones, aunque hay que tener en cuenta que los estimadores presentan grandes dispersiones en las inclinaciones según los valores NMAD.

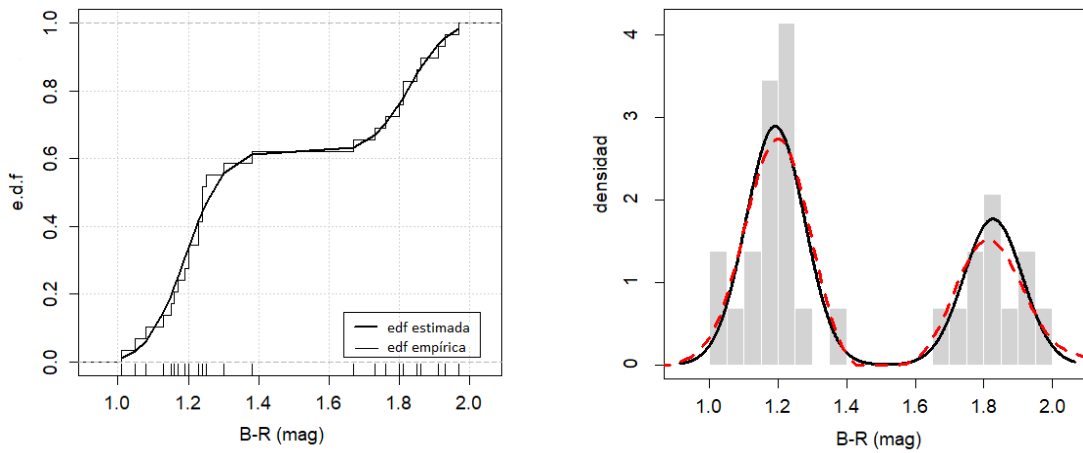


Figura 5.7: Izquierda: cdf estimada y empírica para el índice de color B-R de los centauros. Derecha: Histograma del índice B-R de los centauros. La curva negra continua muestra el ajuste GMM a los datos, donde los dos picos tienen distribuciones normales. La curva roja discontinua muestra el ajuste suavizado teniendo en cuenta los errores. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de VizieR.

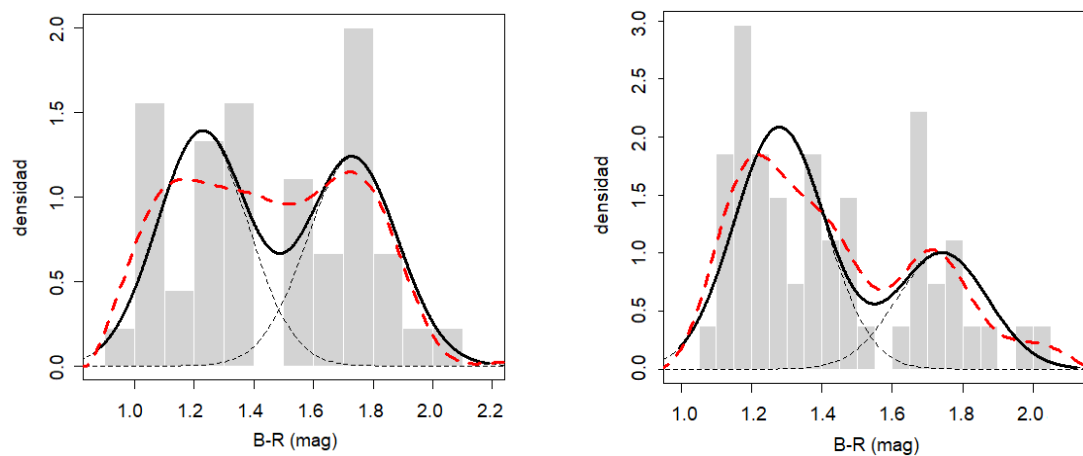


Figura 5.8: Histograma del índice B-R de los plutinos (izquierda) y objetos SDO (derecha). Las curvas negras continuas muestran el ajuste GMM a los datos. Las curvas negras discontinuas muestran las dos distribuciones normales estimadas en cada caso. Las curvas rojas discontinuas muestran el ajuste suavizado teniendo en cuenta los errores. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de VizieR.

Dado que los centauros provienen de la población KBO y que se piensa que habrían mantenido sus inclinaciones originales, es posible que exista un reflejo de esta bimodalidad en los demás transneptunianos (Marsset *et al.*, 2019). La familia de los plutinos y objetos SDO también muestran, por medio del ajuste GMM, cierta bimodalidad en el color B-R, aunque con las distribuciones normales más cercanas entre sí (figura 5.8).

En el caso de los plutinos las dos distribuciones normales del índice de color B-R son $N(1.23, 0.15)$ y $N(1.73, 0.15)$ (*mag*), con estimadores para las inclinaciones $T_n = 12.52 \pm 9.93$ y $T_n = 9.29 \pm 6.67$ grados, respectivamente. En el caso de los SDO, el índice de color B-R presenta las distribuciones $N(1.28, 0.13)$ y $N(1.74, 0.13)$ (*mag*), con estimadores para la inclinación de $T_n = 16.0 \pm 9.9$ y $T_n = 12.3 \pm 13.1$ grados. Como en el caso de los centauros, las distribuciones con objetos con colores más rojos tienen menores inclinaciones en promedio, aunque con grandes dispersiones para la inclinación según los valores NMAD. La figura 5.9 muestra el conjunto de transneptunianos sin incluir los objetos clásicos ni los centauros. Obtenemos mediante el ajuste GMM dos distribuciones normales del índice de color B-R, $N(1.31, 0.16)$ y $N(1.75, 0.16)$ (*mag*), con valores del estimador de Huber para la inclinación de $T_n = 14.1 \pm 10.1$ y $T_n = 8.2 \pm 5.9$ grados, respectivamente. De nuevo la distribución que como media tiene colores más rojos presenta menores inclinaciones de las órbitas de los objetos. El test de correlación al mismo grupo de objetos representado en la figura 5.9 ofrece un valor de $\rho_{(B-R)_i} = -0.31$ ($p \approx 4 \cdot 10^{-6}$)**. Por otro lado, aplicando la misma técnica al color B-R de los objetos *clásicos* solo se obtiene un pico de distribución.

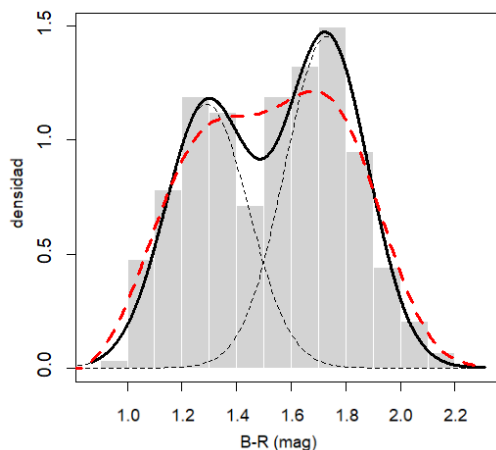


Figura 5.9: Histograma del índice B-R de los objetos transneptunianos (se han excluido del grupo los objetos clásicos y los centauros). La curva negra continua muestra el ajuste GMM a los datos, donde los dos picos tienen distribuciones normales. La curva roja discontinua muestra el ajuste suavizado teniendo en cuenta los errores. Base de datos utilizadas: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

6. Comportamiento dinámico: Simulaciones.

Como se ha señalado en la introducción, no existe solución analítica para problemas de más de dos cuerpos, por lo que el problema de N cuerpos solo se puede aproximar numéricamente (Murray and Dermott, 1999). En esta sección vamos a utilizar integradores numéricos para simular la dinámica de algunos objetos transneptunianos representativos de sus grupos, de forma que en cada simulación se introducirán 6 cuerpos: el Sol, los planetas Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno y un TNO. Este último se trata como una partícula sin masa dado que esta es despreciable respecto a la de los planetas gigantes. Con la finalidad de que se puedan reproducir exactamente las simulaciones, estas se inician con fecha de 1 de enero de 2021 a las

00:00 horas⁴⁴. Como paso de integración se toma un valor de 50 días. Como se ha indicado, utilizamos el integrador simpléctico WHFast del *software* REBOUND. Pero antes de analizar las simulaciones tenemos que introducir algunos parámetros orbitales más, aquellos que sitúan un objeto dentro de una órbita elíptica en función del tiempo.

6.1. Órbitas elípticas.

El sistema más elemental a la hora de analizar órbitas es el problema de dos cuerpos: por ejemplo, un objeto de masa m que orbita alrededor del Sol con vector posición \vec{r} y que está sujeto a una fuerza dada por la ley universal de Newton:

$$\vec{F} = G \frac{mM_S}{r^3} \vec{r} \quad (35)$$

La solución de esta ecuación para una órbita elíptica⁴⁵ en coordenadas polares viene dada por:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (36)$$

donde ν es la **anomalía verdadera**, que es el ángulo recorrido por un objeto en una órbita elíptica a partir de su perihelio (punto P de la figura 6.1). a y e son el semieje mayor y la excentricidad, respectivamente. La ecuación (29), introducida en la sección 3.2 y que determina la distancia al perihelio, proviene de la ecuación (36) cuando $\nu = 0$. Tomando el valor $\nu = 180^\circ$ obtenemos la distancia del afelio (punto más lejano al Sol de un objeto).

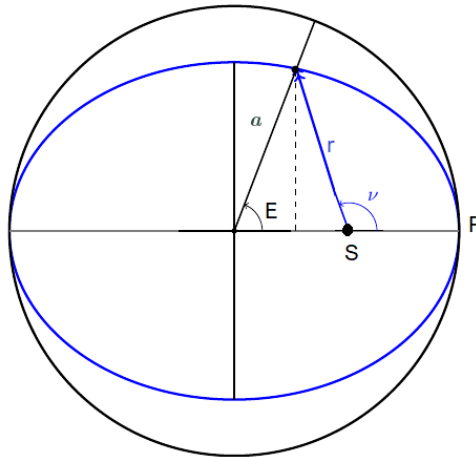


Figura 6.1: Órbita elíptica circunscrita en una circunferencia auxiliar de radio igual al semieje mayor a que define la anomalía excéntrica E. El vector \vec{r} señala el objeto menor con origen en el Sol (punto S), y forma un ángulo ν con el eje mayor. Este ángulo se denomina anomalía verdadera.

La anomalía verdadera ν no varía linealmente con el tiempo (la velocidad del objeto es máxima en el perihelio y mínima en el afelio), por lo que resulta interesante introducir

⁴⁴A través del *software* REBOUND se importan los datos necesarios desde base de datos de objetos del sistema solar *NASA Horizons*.

⁴⁵Por la primera ley de Kepler las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de sus focos. Todos los objetos menores que estudiamos en este trabajo tienen órbitas elípticas.

un parámetro orbital con dependencia explícita y lineal del tiempo. Este parámetro es la **anomalía media** M , que es la porción del *período orbital* P determinada por el tiempo transcurrido Δt desde el paso del objeto por su perihelio hasta un momento dado:

$$M = n_M \Delta t \quad (37)$$

donde n_M es el denominado **movimiento medio**, que es el promedio de la velocidad angular y es constante para cada objeto:

$$n_M = \frac{2\pi}{P} \quad (38)$$

siendo P el período orbital.

La anomalía media M no determina la posición real del objeto en la elipse, de forma que no tiene una interpretación geométrica sencilla. No obstante, cuando el objeto se encuentra en el perihelio tenemos que $M=\nu=0$, y cuando se encuentra en el afelio $M=\nu=180^\circ$. La anomalía media M se relaciona con otro parámetro orbital, la **anomalía excéntrica** E , parámetro con interpretación geométrica más evidente (figura 6.1), mediante la ecuación de Kepler:

$$E - M = e \operatorname{sen} E \quad (39)$$

Por último, otro parámetro referido al movimiento de los objetos a través de la órbita es la **longitud media** λ , definida por:

$$\lambda = M + \bar{\omega} \quad (40)$$

donde **longitud del perihelio** $\bar{\omega}$ se define como la suma de dos ángulos ya introducidos anteriormente, el argumento del perihelio ω y la longitud del nodo ascendente Ω :

$$\bar{\omega} = \omega + \Omega \quad (41)$$

Aquí hay que tener en cuenta que ω y Ω no se encuentran en el mismo plano a no ser que la inclinación de la órbita sea igual a cero (figura 3.1)

6.2. Resonancias de movimiento medio (MMR).

El primer paso para la clasificación de los objetos transneptunianos es identificar las resonancias. Hay que tener en cuenta que el algoritmo de Lykawa y Mukai, que hemos tratado en la sección 4.2, ha de ejecutarse por el orden indicado, donde la identificación de los objetos clásicos ocupa el último lugar.

Las ecuaciones de movimiento de un objeto menor sujeto a la acción gravitatoria del Sol y a perturbaciones producidas por un planeta (pasamos ahora a tratar un problema de tres cuerpos) se pueden expresar como la suma de dos partes: la primera describe la órbita kepleriana del objeto menor sujeto a la atracción del sol y que ya hemos tratado, y la segunda, la **función perturbadora** \mathcal{R} , introduce términos debidos a las perturbaciones inducidas por el planeta en la órbita del objeto menor. En nuestro caso ese segundo término estará referido concretamente al planeta Neptuno y al objeto transneptuniano⁴⁶. La aceleración del cuerpo menor debida a las perturbaciones se obtiene a partir de la función perturbadora

⁴⁶Aquí hay que resaltar que el integrador en las simulaciones evalúa los efectos gravitatorios combinados del Sol y de los cuatro planetas gigantes sobre el TNO. Los análisis de esta sección se utilizan exclusivamente para comprobar la resonancia de movimiento medio entre un objeto menor y un planeta, ambos orbitando alrededor del Sol.

\mathcal{R} , expresada esta como infinitas sumas de cosenos de unos tipos especiales de ángulos denominados **ángulos de resonancia**, ϕ , de forma que (Murray and Dermott, 1999):

$$\mathcal{R} = G m' \sum_z S(a, a', e, e', i, i') \cos \phi \quad (42)$$

donde a , e e i son los parámetros del planeta, mientras que a' , e' , i' y m' corresponden al objeto menor, siendo G la constante de gravitación universal.

El ángulo de resonancia ϕ es una suma lineal de longitudes medias λ , longitudes del nodo ascendente Ω y longitudes del perihelio $\bar{\omega}$ del planeta y del objeto menor:

$$\phi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \Omega' + j_4 \Omega + j_5 \bar{\omega}' + j_6 \bar{\omega} \quad (43)$$

donde se cumple la condición de D'Alémbert (Murray and Dermott, 1999):

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0 \quad (44)$$

siendo los j_i números enteros.

Dos cuerpos en movimiento alrededor del Sol, con órbitas circulares y coplanarias y en resonancia MMR entre ellos, verifican:

$$\frac{n'}{n} = \frac{r}{r+s} \quad (45)$$

siendo n , n' , r y s números enteros. En el caso en el que $e = 0$, $e' \neq 0$ y $\dot{\omega}' \neq 0$, si se satisface la relación de resonancia:

$$(r+s)n' - rn - s\dot{\omega}' = 0 \quad (46)$$

el ángulo resonante queda (Murray and Dermott, 1999):

$$\phi = (r+s)\lambda' - r\lambda - s\bar{\omega}' \quad (47)$$

que es la ecuación (43) con $j_1 = r+s$, $j_2 = -r$, $j_5 = -s$ y $j_3 = j_4 = j_6 = 0$.

Cuando el planeta y el objeto menor se encuentran en conjunción⁴⁷, entonces tenemos que $\lambda' = \lambda$, que sustituido en la ecuación (47) queda:

$$\phi_{conj.} = q(\lambda' - \bar{\omega}') = qM' \quad (48)$$

De esta forma, ϕ lo podemos interpretar como la medida del desplazamiento del ángulo de conjunción desde el perihelio del TNO⁴⁸. Cuando ϕ libra (oscila en el tiempo), significa que el ángulo de conjunción varía muy lentamente alrededor de un valor constante en sucesivas conjunciones con Neptuno. La libración de ϕ se considera como prueba de la resonancia del objeto menor con el planeta (p. ej. Chiang *et al.*, 2003).

⁴⁷En nuestro caso, Neptuno y el objeto están alineados con el Sol, quedando el planeta en medio.

⁴⁸Es decir, la longitud de conjunción, que es el ángulo comprendido entre la línea que une el Sol con el perihelio del TNO y la línea que une el Sol y los dos objetos durante la conjunción de estos últimos.

El semieje mayor de un objeto resonante se puede aproximar por medio de:

$$a = a_P \left(\frac{r+s}{s} \right)^{2/3} \quad (49)$$

donde a_P es el semieje mayor del planeta con el que existe la resonancia MMR.

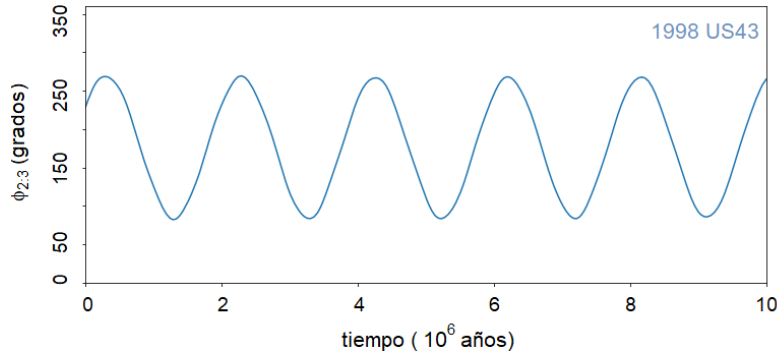


Figura 6.2: Ángulo de resonancia $\phi_{2:3}$ del plutino 1998 US43 (91205). Base de datos utilizada: NASA Horizons.

En la figura 6.2 se muestra el ángulo de resonancia del plutino 1998 US43 (91205). Como se ha indicado, los **plutinos** son objetos con resonancia de movimiento medio 2:3 con Neptuno. Al objeto 1998 US43 le corresponde entonces en la ecuación (45) unos valores de $r = 2$ y $s = 1$. De esta forma, por cada dos órbitas completas alrededor del Sol efectuadas por el plutino, Neptuno realiza tres. Los plutinos tienen un valor aproximado de semieje mayor, calculado a partir de la ecuación (49), de $a \approx 39.5$ UA. El ángulo de resonancia de los plutinos, de acuerdo con (47), es:

$$\phi_{2:3} = 3\lambda - 2\lambda_N - \bar{\omega} \quad (50)$$

donde el subíndice N se refiere a Neptuno. Como resultado de la simulación para el objeto 1998 US43 se obtiene un ángulo de resonancia con un valor medio de $\langle \phi_{2:3} \rangle \approx 180^\circ$, y que libra en el tiempo con un período aproximado de 20000 años (figura 6.2). El semieje mayor y la excentricidad del plutino 1998 US43 permanecen estables en promedio durante todo el período de integración, que es de 10^7 años (figura 6.3, izquierda). La inclinación de la órbita de este objeto oscila con una amplitud de 4° y con un período mucho mayor que el orbital.

Los objetos con resonancia de movimiento medio 2:5 con Neptuno adoptan unos valores de $r = 3$ y $s = 2$. Según la ecuación (49) los encontramos con un valor de semieje mayor de $a \approx 55.44$ UA. El ángulo de resonancia, de acuerdo con (47), es:

$$\phi_{2:5} = 5\lambda - 2\lambda_N - 3\bar{\omega} \quad (51)$$

La simulación del ángulo de resonancia del objeto 2003 UY117 (143707) se muestra en la figura 6.4. El ángulo de resonancia de este objeto libra alrededor de un valor medio de $\phi \approx 180^\circ$ con un período aproximado de 24600 años.

El semieje mayor, la excentricidad y la inclinación de su órbita se muestran en la figura 6.3, en la parte derecha.

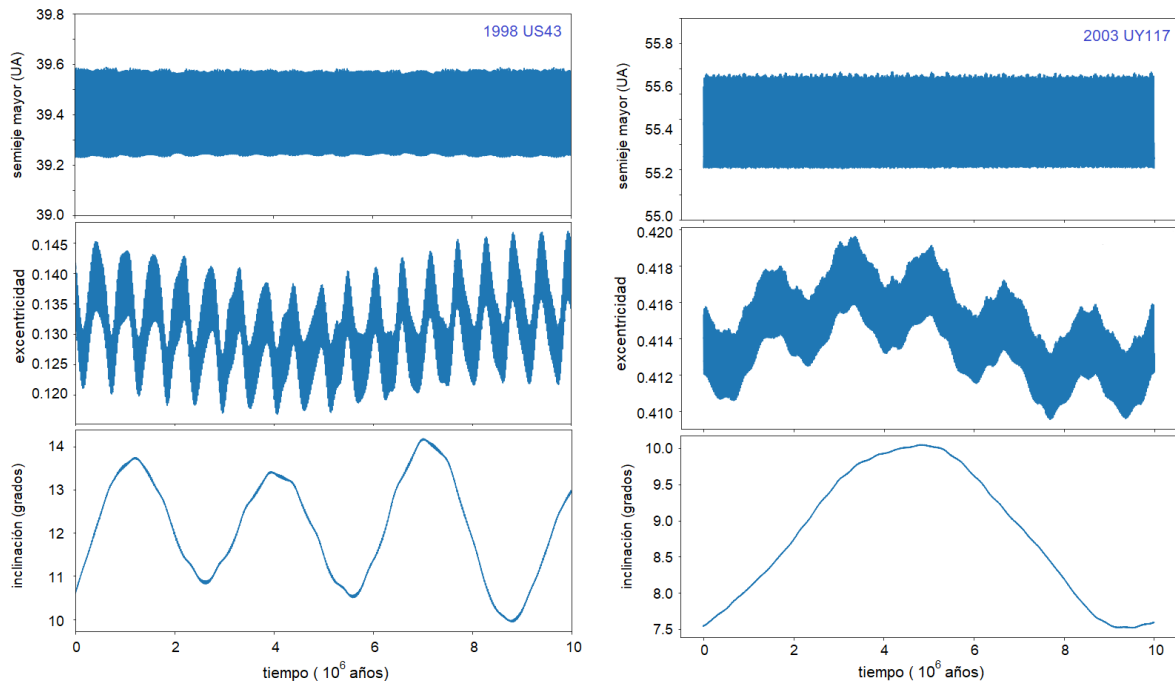


Figura 6.3: Semieje mayor, excentricidad e inclinación de la órbita en función del tiempo de los objetos en resonancia con Neptuno 1998 US43 (MMR 2:3, izquierda) y 2003 UY117 (MMR 2:5, derecha). Base de datos utilizada: NASA Horizons.

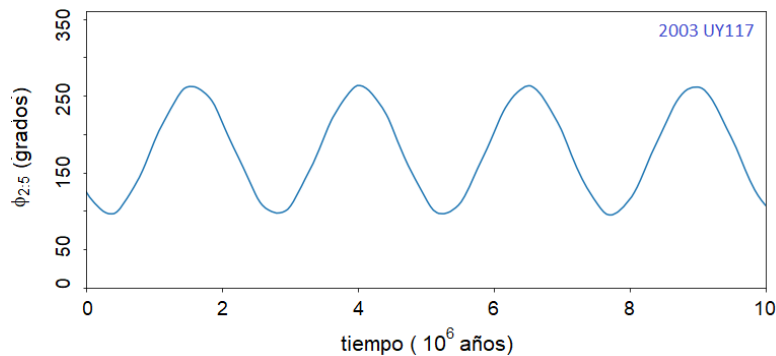


Figura 6.4: Ángulo de resonancia $\phi_{2:5}$ del objeto 2003 UY117 (143707). Base de datos utilizada: NASA Horizons.

El hecho de que en los dos ejemplos mostrados la libración del ángulo de resonancia esté centrada en 180° no es casual. Ese punto se corresponde con el afelio de los dos objetos menores, en cada caso. En un modelo simplificado de tres cuerpos, con el Sol, un planeta con una órbita circular y un objeto menor con una órbita exterior elíptica, ambas coplanarias, el desequilibrio entre las fuerzas tangenciales poco antes y poco después de alcanzar el planeta la posición de conjunción sobre el objeto menor hace que las sucesivas conjunciones se produzcan cada vez más próximas al afelio del objeto menor. Si las conjunciones se produjeran exactamente en el perihelio o en el afelio, debido a la simetría del problema no existiría desequilibrio entre las fuerzas tangenciales en el transcurso de la conjunción. El modelo tiene entonces un punto de equilibrio estable en el afelio del objeto menor, mientras que el perihelio resulta ser un punto de equilibrio inestable. No obstante, si la conjunción se produce siempre en el afelio del objeto menor, las fuerzas radiales entre este y el planeta provocan el movimiento

retrógrado del afelio, mientras que por otro lado, las fuerzas de marea entre el planeta y el Sol modifican la órbita del primero de forma que a su vez hace que varíe la excentricidad de la órbita del cuerpo menor (Peale, 1976). Estas fuerzas sacan al objeto del punto de equilibrio estable, que es la conjunción en el afelio, de forma que se producen las oscilaciones alrededor de este punto.

En general, en la búsqueda de objetos resonantes se van introduciendo valores para r y s en la ecuación (47) y se integra numéricamente la órbita del objeto menor con la finalidad de averiguar si existe libración en algún ángulo de resonancia.

6.3. Órbitas caóticas e inestables.

Las órbitas caóticas son muy susceptibles a las condiciones iniciales, de forma que pequeños cambios iniciales derivan en grandes cambios en los estados finales en largos periodos de tiempo. Estas diferencias infinitesimales iniciales crecen exponencialmente en función del tiempo, de forma que siendo d la distancia entre dos órbitas en el espacio de fases (con seis componentes: tres de posición y tres de velocidad), tenemos que:

$$d = d_0 e^{\gamma(t-t_0)} \quad (52)$$

donde d_0 es la distancia inicial y γ es el **exponente característico de Lyapunov**, que se puede obtener mediante integraciones numéricas teniendo en cuenta que (Murray and Dermott, 1999):

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(d/d_0)}{t - t_0} \quad (53)$$

En órbitas caóticas γ tiende a tener un valor positivo, mientras que si la órbita es cuasi-periódica tenemos que $d \approx d_0$. El **tiempo de Lyapunov**, t_{lyp} , es el intervalo de tiempo que toma el desplazamiento en crecer un factor e , y viene dado por:

$$t_{lyp} = \frac{1}{\gamma_{max}} \quad (54)$$

Las órbitas con tiempos de Lyapunov cortos son consideradas más caóticas que aquellas con tiempos de Lyapunov más largos, luego t_{lyp} puede utilizarse como indicador de cómo de caótica es una órbita. Como indicador de órbitas caóticas vamos a utilizar el parámetro **MEGNO** (*Mean Exponential Growth of Nearby Orbits*), basado en el tiempo de Lyapunov, cuyo valor promediado en el tiempo es (Wood, 2019):

$$\langle Y \rangle = t \frac{\gamma_{max}}{2} \quad (55)$$

El parámetro $\langle Y \rangle$ es adimensional, y en el límite $t \rightarrow \infty$, $\langle Y \rangle$ se aproxima asintóticamente a 2 para órbitas cuasiperiódicas, y diverge rápidamente para aquellos valores que se alejan de 2 (Wood, 2019). Este parámetro lo calculamos con ayuda del *software* REBOUND.

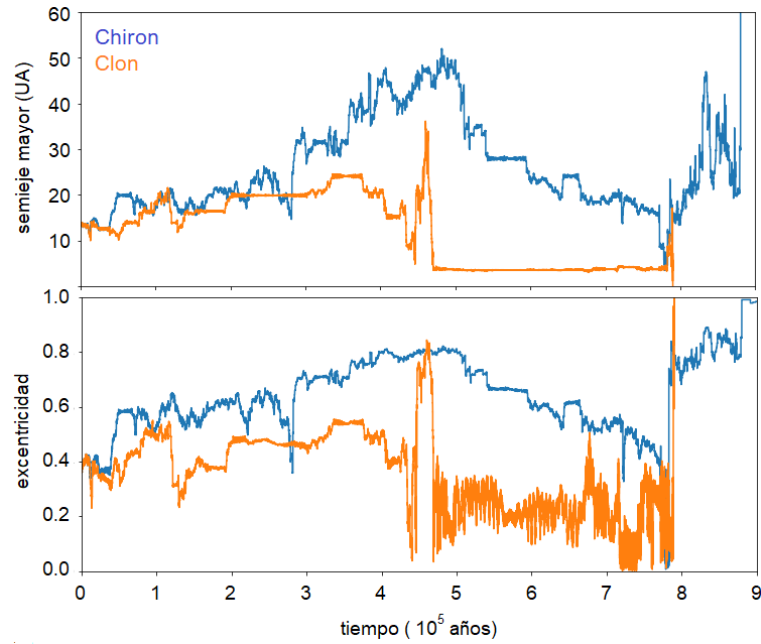


Figura 6.5: Semieje mayor, excentricidad e inclinación de la órbita en función del tiempo del centauro Chirón y de un clon suyo, con una diferencia en su coordenada inicial x_0 de aproximadamente 1.5 cm. Ambos objetos, en la simulación, tienen masa cero. Base de datos utilizada: NASA Horizons.

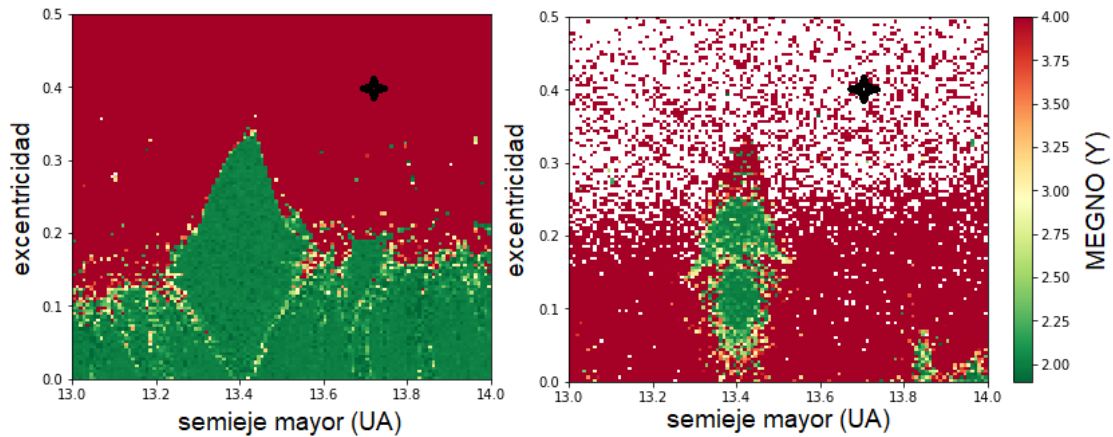


Figura 6.6: Resultados del parámetro MEGNO para un total de 14400 simulaciones de 10^4 años (izquierda) y 10^5 años (derecha) para valores del semieje mayor y de la excentricidad del centauro Chirón. Las zonas verdes indican órbitas estables, mientras que las rojas señalan órbitas caóticas. Las zonas blancas se corresponden con simulaciones no finalizadas. Base de datos utilizada: NASA Horizons.

Como se ha indicado, se piensa los centauros son objetos que abandonaron recientemente el cinturón de Kuiper (de ahí que se suelen estudiar junto a los objetos transneptunianos) y que se caracterizan por cruzar las órbitas de los planetas gigantes. Debido a esta circunstancia, estos objetos están sujetos a interacciones no lineales, de forma que desarrollan órbitas caóticas de vidas cortas que pueden finalizar colapsando hacia el sol, hacia algún planeta e incluso escapar del sistema solar. El carácter caótico de algunas de las órbitas de los objetos

centauros queda patente en la integración de las órbitas de Chirón y de un clon que se diferencia del original en su coordenada inicial x_0 en aproximadamente 1.5 cm (figura 6.5). Como resultado de la integración, el clon, después de una aparente órbita estable de duración cercana a 300000 años colapsa hacia el Sol ($a = 0$ y $e = 1$), mientras que Chirón parece alejarse del astro. Si en la simulación hubiéramos excluido los planetas gigantes, introduciendo solo el Sol y los dos objetos menores, las órbitas de estos últimos serían completamente estables e indistinguibles una de la otra durante toda la integración.

La figura 6.6 (izquierda) muestra los valores del parámetro $\langle Y \rangle$, para un conjunto de 14400 simulaciones de 10^4 años, de diversos valores del semieje mayor a y de la excentricidad e , entre los que se encuentran los del centauro Chirón, indicados con una estrella negra situada en zona roja que señala su órbita caótica. En la figura de la derecha, con una integración de un período mayor (10^5 años), se observa una reducción considerable de la zona estable (en verde). Los recuadros blancos indican simulaciones de órbitas no finalizadas.

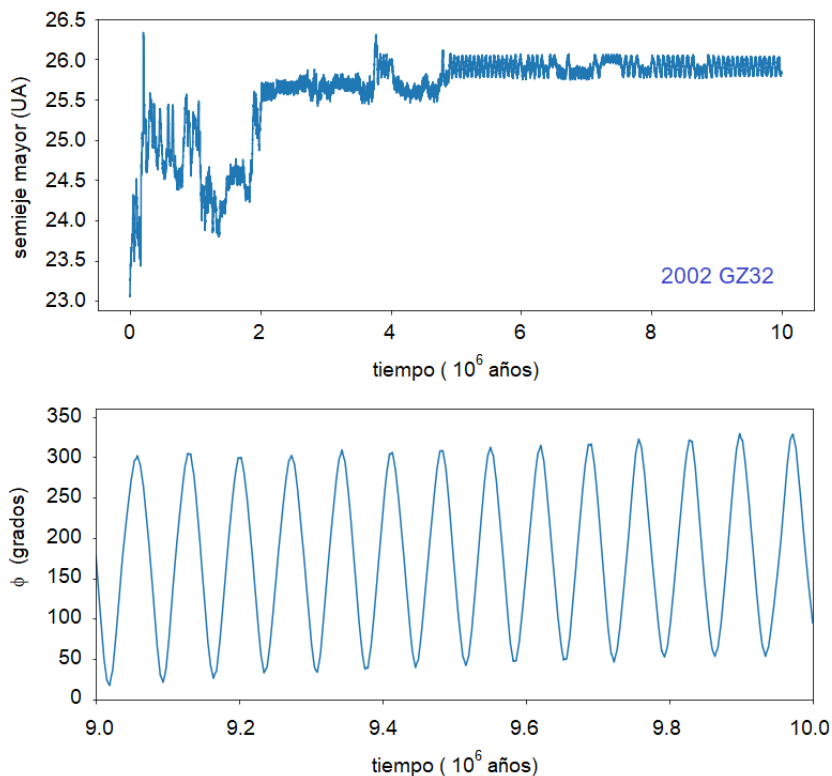


Figura 6.7: Semieje mayor a en función del tiempo del objeto centauro 2002 GZ32 (95626), en la parte superior, y ángulo de resonancia ϕ en el período determinado (debajo). Base de datos utilizada: NASA Horizons.

Otro ejemplo de centauro lo tenemos en el objeto 2002 GZ32 (95626). En la figura 6.7 (arriba) se observan inestabilidades alternadas con períodos de cierta estabilidad. Al final de la simulación, la órbita parece devenir en estable debido a que el centauro se ha situado en la zona de resonancia 4:5 del planeta Neptuno, algo que confirma la libración del ángulo de resonancia $\phi_{4:5}$ de la figura 6.7 (abajo), en el período seleccionado que va desde $0.9 \cdot 10^7$ hasta 10^7 años.

Las simulaciones realizadas con los **objetos del disco disperso** dan como resultado figuras similares (6.8 y 6.9). Estas órbitas caóticas o inestables son debidas a que los objetos del disco disperso o SDO son susceptibles de ser perturbados por su aproximación a la órbita

de Neptuno.

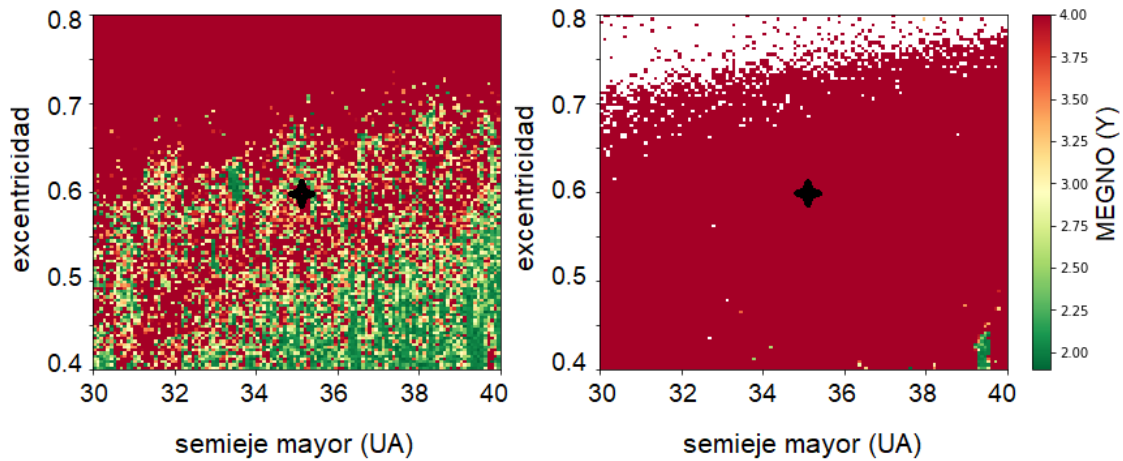


Figura 6.8: Resultados del parámetro MEGNO para un total de 14400 simulaciones de 10^4 años (izquierda) y 10^5 años (derecha) para valores del semieje mayor y de la excentricidad del objeto de disco disperso 2000 QB243 (87555). Las zonas verdes indican órbitas estables, mientras que las rojas señalan órbitas caóticas. Las zonas blancas se corresponden con simulaciones no finalizadas. El punto negro señala la zona de órbita del objeto. Base de datos utilizada: NASA Horizons.

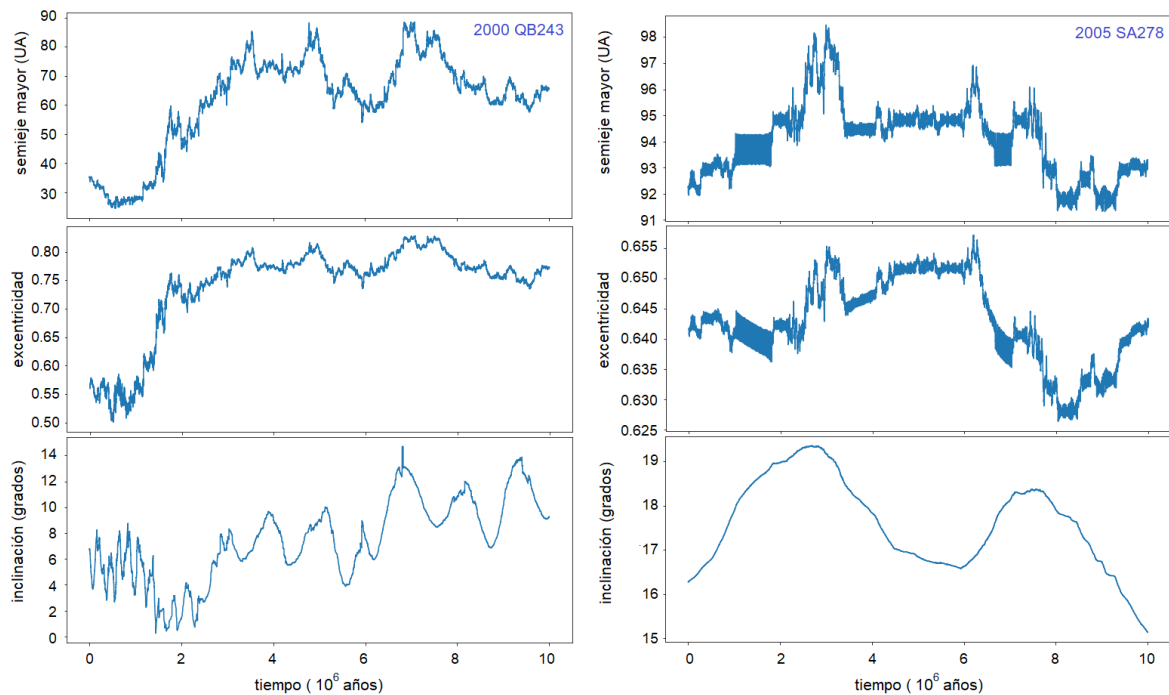


Figura 6.9: Izquierda: Resultados de la simulación del semieje mayor, excentricidad e inclinación en función del tiempo del objeto de disco disperso 2000 QB243 (87555) Derecha: Resultados del objeto de disco disperso 2005 SA278 (145474). Base de datos utilizada: NASA Horizons.

6.4. Órbitas estables.

En general, los objetos *clásicos* se caracterizan por valores pequeños de excentricidad ($e < 0.22$ en el catálogo J/A+A/577/A35) e inclinaciones bajas en el caso de los *clásicos fríos* ($0^\circ < i < 5^\circ$) y moderadas en los *clásicos calientes* ($5^\circ < i < 32^\circ$) en el mismo catálogo. Ambas familias, *fríos* y *calientes*, mantienen órbitas estables dado que sus distancias del perihelio ($q > 37$ UA) son mucho mayores que la distancia media de Neptuno al Sol ($a \approx 30.1$ UA), de forma que se ven poco perturbadas por la acción gravitatoria de este planeta.

A pesar de esa estabilidad, las órbitas de los objetos *clásicos* sí que se ven ligeramente perturbadas por la acción gravitatoria de los planetas gigantes, produciéndose oscilaciones lentas en su excentricidad e inclinación, con periodos mucho mayores que los orbitales. Por ejemplo, en la figura 6.10, en la parte izquierda, observamos que la oscilación de la excentricidad del objeto *clásico frío* 1992 QB1 tiene un período aproximado de $4 \cdot 10^6$ años, mientras que el período orbital de este objeto es de 292.77 años. Por otro lado, la inclinación de la órbita presenta un período aproximado de oscilación de $3 \cdot 10^6$ años. La longitud del perihelio $\bar{\omega}$ y la longitud del nodo ascendente Ω muestran circulaciones, que son cambios continuos en sus valores (figura 6.10) siendo este un rasgo característico de estos objetos. En estos casos, en los que un objeto menor no es fuertemente perturbado por un planeta o no está cerca de una zona de resonancia, la variación en la precesión se acopla con la longitud del perihelio $\bar{\omega}$, mientras que la inclinación de la órbita se acopla con la longitud del nodo ascendente Ω (Morbidelli & Levison, 2014).

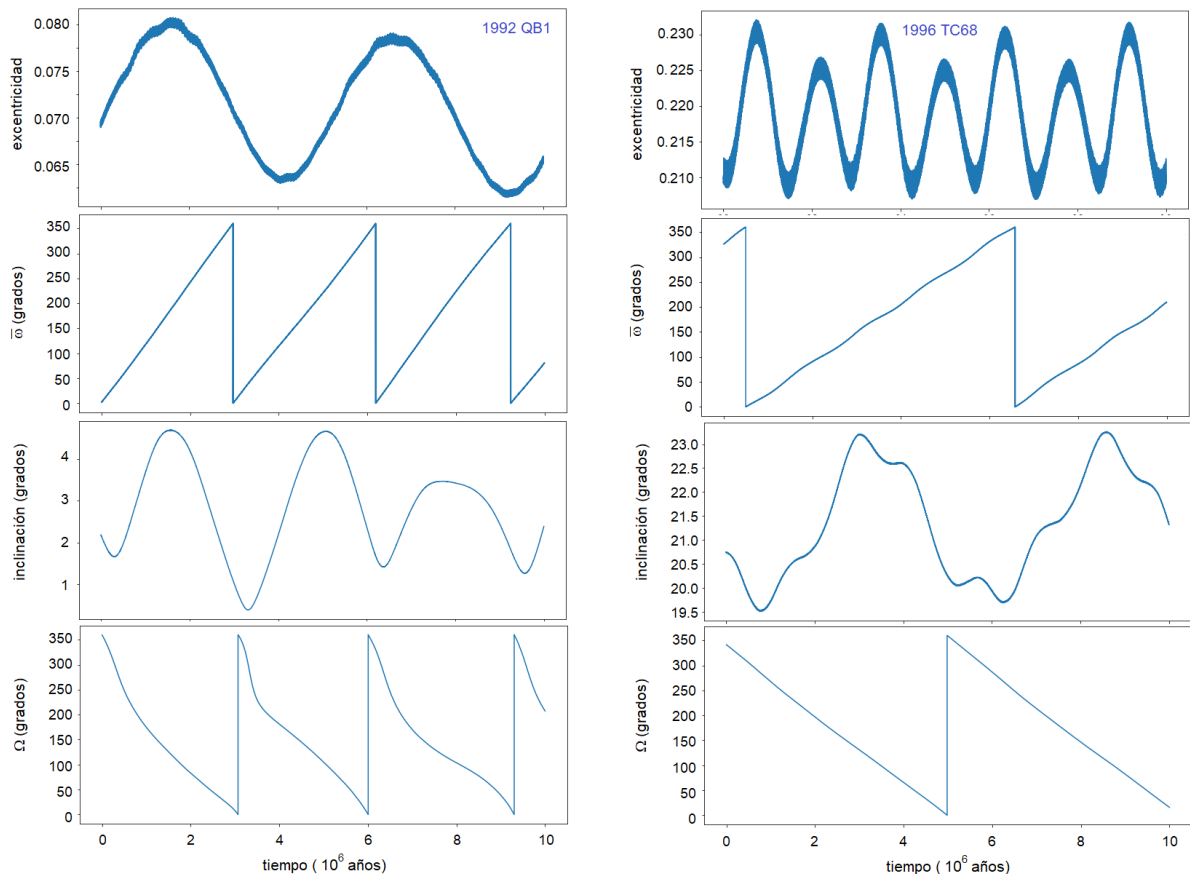


Figura 6.10: Izquierda: simulación de la evolución de la excentricidad e , la longitud del perihelio $\bar{\omega}$, la inclinación i y la longitud del nodo ascendente Ω en función del tiempo de la órbita del objeto clásico frío 1992 QB1 (15760, Albión). Derecha: simulación correspondiente al objeto clásico caliente 1996 TC68 (523601). Base de datos utilizada: NASA Horizons.

El período orbital del objeto *clásico caliente* 1996 TC68 es de 327.30 años, también mucho menor que los períodos de oscilación de la excentricidad y de la inclinación de su órbita (figura 6.10 derecha).

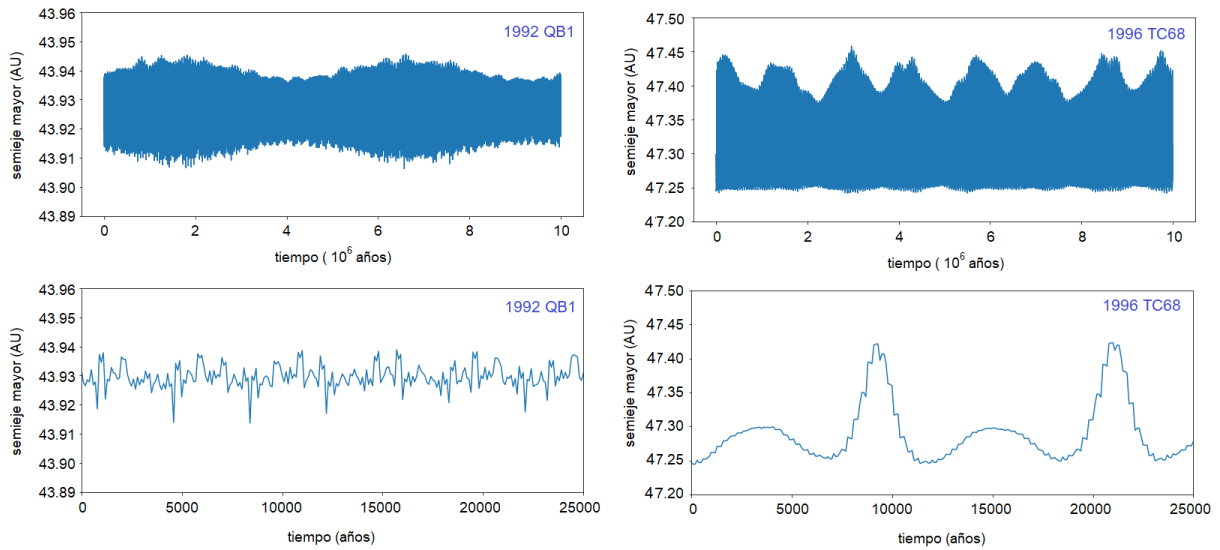


Figura 6.11: Izquierda: simulación de la evolución de la distancia media a en función del tiempo de la órbita del objeto clásico frío 1992 QB1 (15760, Albión). Derecha: simulación correspondiente al objeto clásico caliente 1996 TC68 (523601). Base de datos utilizada: NASA Horizons.

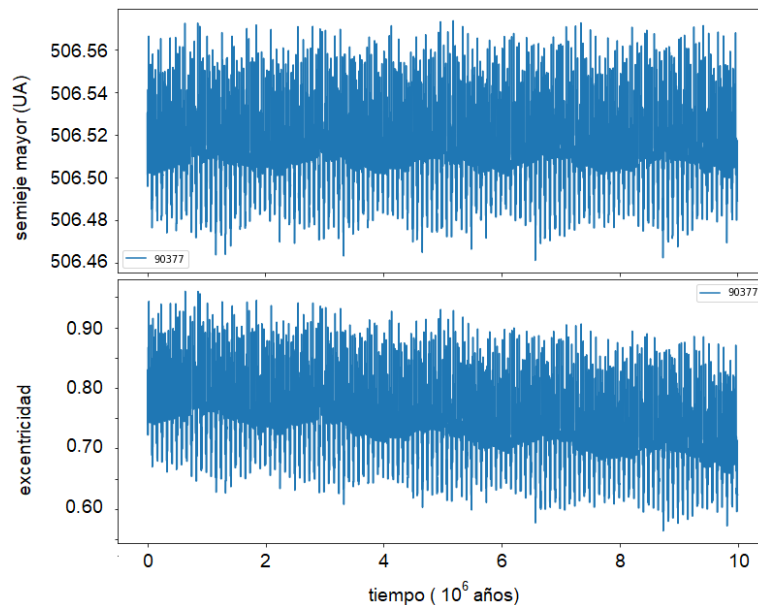


Figura 6.12: Resultados de la simulación del semieje mayor y excentricidad en función del tiempo para el objeto 2003 VB12 (90377, Sedna). Base de datos utilizada: NASA Horizons.

La figura 6.11 muestra el semieje mayor y su variación en el tiempo de los dos mismos objetos *clásicos* de la figura 6.10: el objeto *frío* 1992 QB1 (izquierda) y el *caliente* 1996 TC68 (derecha). En los dos ejemplos se verifica que, en promedio, durante la simulación de 10^7

años, sus semiejes mayores permanecen estables. Las figuras inferiores muestran el detalle de los primeros 25000 años de simulación en cada caso.

La figura 6.12 muestra el semieje mayor y excentricidad en función del tiempo del objeto 2003 VB12 (90377, Sedna). Su distancia media al Sol mostrada en la figura es de alrededor de 506.5 UA, mientras que su período orbital sería aproximadamente 11163 años. La órbita de este objeto se muestra estable, ya su distancia del perihelio es de 76.22 UA, y por lo tanto está lo suficientemente alejado de la órbita de Neptuno de forma que no sufre perturbaciones importantes en su órbita. Los *objetos separados* o DKBOs (Sedna pertenece a este grupo) muestran estabilidad en sus órbitas debido a que, según vemos en la clasificación de Lykawa y Mukai, se clasifican teniendo en cuenta que sus distancias del perihelio han de ser superiores a 40 UA, mientras que sus distancias medias van más allá de los 48 UA.

7. Conclusiones.

Los objetos *clásicos* del cinturón de Kuiper presentan correlaciones significativas entre la inclinación de la órbita y colores, e inclinación y los tamaños, de forma que menores inclinaciones se corresponden con una tendencia a colores más rojos y tamaños más pequeños. Por otro lado, se observa correlación entre la inclinación i y la distancia del perihelio q , algo que no se da en ninguna otra familia transneptuniana. No se han encontrado correlaciones significativas entre la distancia media al Sol y ningún parámetro físico de estos objetos.

La inclinación de la órbita es por tanto el parámetro orbital más destacable de los test de correlación de los objetos *clásicos*. Los test realizados sobre las poblaciones *clásicas* muestran distribuciones diferentes respecto al color B-R y al tamaño de los objetos: entre los *clásicos fríos*, con menores inclinaciones, abundan más los objetos con colores que tienden al rojo y que además presentan menor tamaño (con distribuciones más homogéneas) que los del grupo de los *clásicos calientes*. Estas diferencias pueden suponer procesos de formación distintos para ambos grupos. En concreto, los objetos clásicos *fríos* destacan entre todas las familias transneptunianas por su mayor homogeneidad y por tener los colores más rojos en promedio. Todo ello, sumado a los resultados de las simulaciones realizadas en las que se observa la estabilidad de sus órbitas, parece compatible con la hipótesis de que los objetos *fríos* podrían haber tenido un proceso de formación similar en conjunto, lo suficientemente alejados del Sol para adquirir colores que tiendan al rojo, y que a su vez habrían sufrido menos alteraciones que los demás objetos de las diversas familias, de forma que pudieran haberse formado en la región que ocupan actualmente.

En los *centauros*, que muestran órbitas inestables y caóticas, se encuentra cierta bimodalidad en sus colores, en la que se asocian bajas inclinaciones con colores más rojos. Los *plutinos* y los *objetos del disco disperso* muestran también este efecto aunque menos pronunciado. Esta asociación entre color e inclinación podría ser extensiva a otras familias de objetos transneptunianos. Analizando muestreos mayores, esta última cuestión sería la continuación natural de este trabajo. Queda también pendiente el estudio de la correlación entre la distancia del perihelio e inclinación de la órbita de los objetos *clásicos* del cinturón de Kuiper. Esta correlación, si no es debida a algún sesgo en las observaciones, podría proporcionar alguna clave importante en el estudio de los *clásicos*, ya que solo se ha observado en estos objetos. Otro punto de interés, y que no se ha tratado en este trabajo, es el de los objetos binarios o incluso sistemas múltiples, y sus características y proporción con respecto a los sistemas simples de las diversas familias transneptunianas.

Referencias.

- Aumann, H. H., Gillett, F. C., Beichman, C. A., De Jong, T., Houck, J. R., Low, F. J., ... & Wesselius, P. R. (1984). Discovery of a shell around Alpha Lyrae. *The Astrophysical Journal*, 278, L23-L27.
- Bellio, R., & Ventura, L. (2005). An introduction to robust estimation with R functions. *Proceedings of 1st International Work*, 1(5), 1-57.
- Benjamini, Y., & Hochberg, Y. (1995). Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing. *Journal of the Royal statistical society: series B (Methodological)*, 57(1), 289-300.
- Bouvier, A., & Wadhwa, M. (2010). The age of the Solar System redefined by the oldest Pb–Pb age of a meteoritic inclusion. *Nature geoscience*, 3(9), 637-641.
- Brown, M. E., Barkume, K. M., Ragozzine, D., & Schaller, E. L. (2007). A collisional family of icy objects in the Kuiper belt. *Nature*, 446(7133), 294-296.
- Brown, M. E. (2012). The compositions of Kuiper belt objects. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 40, 467-494.
- Chiang, E. I., Jordan, A. B., Millis, R. L., Buie, M. W., Wasserman, L. H., Elliot, J. L., ... & Wagner, R. M. (2003). Resonance occupation in the Kuiper belt: Case examples of the 5: 2 and Trojan resonances. *The Astronomical Journal*, 126(1), 430.
- Dones, L., Weissman, P. R., Levison, H. F., & Duncan, M. J. (2004). Oort cloud formation and dynamics. *Comets II*, 1, 153-174.
- Doressoundiram, A., Peixinho, N., De Bergh, C., Fornasier, S., Thebault, P., Barucci, M. A., & Veillet, C. (2002). The color distribution in the Edgeworth-Kuiper belt. *The Astronomical Journal*, 124(4), 2279.
- Feigelson, E. D., & Babu, G. J. (2012). *Modern statistical methods for astronomy: with R applications*. Cambridge University Press.
- García Pérez, A. (2010). *Estadística básica con R*. Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- García Pérez, A. (2005). *Métodos avanzados de estadística aplicada. Métodos robustos y de remuestreo*. Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Gladman, B., Marsden, B. G., & VanLaerhoven, C. (2008). Nomenclature in the outer Solar System. *The Solar System Beyond Neptune*, 43.
- Hartmann, W. K., & Davis, D. R. (1975). Satellite-sized planetesimals and lunar origin. *Icarus*, 24(4), 504-515.
- Hartigan, J. A., & Hartigan, P. M. (1985). The dip test of unimodality. *Annals of statistics*, 13(1), 70-84.
- Hudson, R. L., Palumbo, M. E., Strazzulla, G., Moore, M. H., Cooper, J. F., & Sturmer, S. J. (2008). Laboratory studies of the chemistry of transneptunian object surface materials. *The Solar System Beyond Neptune*, 507-523.
- Jewitt, D., & Luu, J. (1993). Discovery of the candidate Kuiper belt object 1992 QB 1. *Nature*,

- 362(6422), 730-732.
- Levy, K. J., & Narula, S. C. (1978). Testing hypotheses concerning partial correlations: Some methods and discussion. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, 215-218.
- Luu, J., & Jewitt, D. (1996). Color diversity among the Centaurs and Kuiper belt objects. *The Astronomical Journal*, 112, 2310.
- Luu, J. X., Jewitt, D. C., & Trujillo, C. (2000). Water ice in 2060 Chiron and its implications for Centaurs and Kuiper belt objects. *The Astrophysical Journal Letters*, 531(2), L151.
- Lykawka, P. S., & Mukai, T. (2008). An outer planet beyond Pluto and the origin of the trans-Neptunian belt architecture. *The Astronomical Journal*, 135(4), 1161.
- Marsset, M., Fraser, W. C., Pike, R. E., Bannister, M. T., Schwamb, M. E., Volk, K., ... & Wang, S. Y. (2019). Col-OSSOS: Color and Inclination Are Correlated throughout the Kuiper Belt. *The Astronomical Journal*, 157(3), 94.
- Murray, C. D., & Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge university press.
- Morbidelli, A., & Levison, H. F. (2014). Kuiper Belt: dynamics. In *Encyclopedia of the Solar System* (pp. 925-939). Elsevier.
- Morbidelli, A., Levison, H. F., & Gomes, R. (2008). The dynamical structure of the Kuiper belt and its primordial origin. *The solar system beyond Neptune*, 275-292
- Morbidelli, A., & Nesvorný, D. (2020). Kuiper belt: formation and evolution. *The Trans-Neptunian Solar System*, 25-59.
- Mumby, P. J. (2002). Statistical power of non-parametric tests: A quick guide for designing sampling strategies. *Marine pollution bulletin*, 44(1), 85-87.
- Peale, S. J. (1976). Orbital resonances in the solar system. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 14(1), 215-246.
- Peixinho, N., Lacerda, P., & Jewitt, D. (2008). Color-inclination relation of the classical Kuiper belt objects. *The Astronomical Journal*, 136(5), 1837.
- Peixinho, N., Delsanti, A., Guilbert-Lepoutre, A., Gafeira, R., & Lacerda, P. (2012). The bimodal colors of Centaurs and small Kuiper belt objects. *Astronomy & Astrophysics*, 546, A86.
- Peixinho, N., Delsanti, A., & Doressoundiram, A. (2015). Reanalyzing the visible colors of Centaurs and KBOs: what is there and what we might be missing. *Astronomy & Astrophysics*, 577, A35.
- R Core Team (2020). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- Rein, H., & Tamayo, D. (2015). WHFast: A fast and unbiased implementation of a symplectic Wisdom-Holman integrator for long-term gravitational simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 452(1), 376-388.
- Schramm, D. N., & Clayton, R. N. (1978). Did a supernova trigger the formation of the solar system? *Scientific American*, 239(4), 124-139.
- Scrucca, L., Fop, M., Murphy, T. B., & Raftery, A. E. (2016). *mclust 5: clustering, classification and density estimation using Gaussian finite mixture models*. *The R journal*, 8(1), 289.

- Spearman C. (1904). The proof and measurement of association between two things. *American Journal of Psychology*, 15 (1): 72–101
- Stern, S. A. (2002). Evidence for a collisional mechanism affecting Kuiper belt object colors. *The Astronomical Journal*, 124(4), 2297
- Student. (1908). The probable error of a mean. *Biometrika*, 1-25.
- Tegler, S. C., Romanishin, W., & GJ Consolmagno, S. J. (2016). Two color populations of Kuiper belt and Centaur objects and the smaller orbital inclinations of red Centaur objects. *The Astronomical Journal*, 152(6), 210.
- Wood, J. (2019). *The dynamics of small solar system bodies*. Springer.

Apéndice A Tablas.

Nota: En la tablas, un asterisco a la derecha del p-valor en cada caso muestra que el resultado es significativo a un nivel de 2.5σ , mientras que dos asteriscos muestran un resultado significativo a nivel de 3σ , ambos después del ajuste FDR cada uno a su nivel de significancia.

	e	i	q	Ω	ω	v_c	T_N
a	$0.57^{+0.07}_{-0.08}$ ($p < 10^{-6}$)**	$0.03^{+0.10}_{-0.10}$ ($p=0.76$)	$0.07^{+0.10}_{-0.10}$ ($p=0.45$)	$-0.01^{+0.09}_{-0.09}$ ($p=0.88$)	$-0.03^{+0.10}_{-0.10}$ ($p=0.71$)	$0.23^{+0.10}_{-0.10}$ ($p=0.013$)	$0.32^{+0.10}_{-0.11}$ ($p=0.00036$)**
e		$0.35^{+0.08}_{-0.09}$ ($p=0.00011$)**	$-0.71^{+0.05}_{-0.05}$ ($p < 10^{-6}$)**	$0.03^{+0.09}_{-0.09}$ ($p=0.71$)	$0.02^{+0.09}_{-0.09}$ ($p=0.81$)	$0.67^{+0.06}_{-0.07}$ ($p < 10^{-6}$)**	$-0.18^{+0.10}_{-0.09}$ ($p=0.054$)
i			$-0.47^{+0.09}_{-0.08}$ ($p < 10^{-6}$)**	$0.21^{+0.09}_{-0.10}$ ($p=0.022$)	$-0.01^{+0.10}_{-0.10}$ ($p=0.93$)	$0.86^{+0.03}_{-0.04}$ ($p < 10^{-6}$)**	$-0.79^{+0.06}_{-0.05}$ ($p < 10^{-6}$)**
q				$-0.07^{+0.09}_{-0.09}$ ($p=0.44$)	$-0.04^{+0.09}_{-0.09}$ ($p=0.69$)	$-0.71^{+0.07}_{-0.06}$ ($p < 10^{-6}$)**	$0.54^{+0.07}_{-0.08}$ ($p < 10^{-6}$)**
Ω					$0.11^{+0.10}_{-0.10}$ ($p=0.23$)	$0.20^{+0.09}_{-0.10}$ ($p=0.031$)	$-0.22^{+0.09}_{-0.09}$ ($p=0.015$)
ω						$-0.01^{+0.09}_{-0.10}$ ($p=0.91$)	$-0.02^{+0.10}_{-0.10}$ ($p=0.85$)
v_c							$-0.69^{+0.07}_{-0.06}$ ($p < 10^{-6}$)**

Tabla A.1: Coeficientes de correlación $\rho_{-}^{+\sigma}$ entre parámetros orbitales de los objetos clásicos. La muestra contiene $n = 117$ objetos. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

	a	e	i	q
ρ_{ae}			$0.60^{+0.08}_{-0.09}$ ($p < 10^{-6}$)**	$0.89^{+0.02}_{-0.03}$ ($p < 10^{-6}$)**
ρ_{ei}	$0.41^{+0.10}_{-0.10}$ ($p=5 \cdot 10^{-6}$)**			$0.02^{+0.10}_{-0.10}$ ($p=0.84$)
ρ_{eq}	$-0.92^{+0.02}_{-0.02}$ ($p < 10^{-6}$)**		$-0.67^{+0.06}_{-0.06}$ ($p < 10^{-6}$)**	
ρ_{iq}	$-0.48^{+0.09}_{-0.08}$ ($p < 10^{-6}$)**	$-0.34^{+0.10}_{-0.09}$ ($p=0.00016$)**		

Tabla A.2: Coeficientes de correlación parciales $\rho_{-}^{+\sigma}$ entre parámetros orbitales de los objetos clásicos. La muestra contiene $n = 117$ objetos. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

	a	e	i	q	Ω	ω	v_c	T_N
B-V (78)	$-0.19^{+0.12}_{-0.11}$ (p=0.095)	$-0.31^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.0060)	$-0.40^{+0.11}_{-0.10}$ (p=0.00027)**	$0.29^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.010)	$-0.07^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.53)	$-0.01^{+0.13}_{-0.12}$ (p=0.92)	$-0.44^{+0.10}_{-0.09}$ ($p = 5 \cdot 10^{-5}$)**	$0.36^{+0.11}_{-0.12}$ (p=0.0012)*
V-R (97)	$0.00^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.97)	$-0.10^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.31)	$-0.36^{+0.10}_{-0.09}$ (p=0.00033)**	$0.24^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.017)	$-0.02^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.83)	$0.04^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.73)	$-0.36^{+0.09}_{-0.09}$ (p=0.00030)**	$0.38^{+0.09}_{-0.10}$ ($p=9 \cdot 10^{-5}$)**
R-I (76)	$-0.12^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.30)	$-0.06^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.62)	$-0.10^{+0.12}_{-0.11}$ (p=0.40)	$0.05^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.65)	$0.07^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.53)	$0.01^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.91)	$-0.10^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.37)	$0.05^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.69)
B-I (53)	$-0.22^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.10)	$-0.37^{+0.13}_{-0.12}$ (p=0.0061)	$-0.41^{+0.13}_{-0.12}$ (p=0.0020)*	$0.36^{+0.12}_{-0.13}$ (p=0.0081)	$0.05^{+0.14}_{-0.14}$ (p=0.72)	$0.07^{+0.14}_{-0.15}$ (p=0.61)	$-0.47^{+0.12}_{-0.11}$ (p=0.00035)**	$0.36^{+0.12}_{-0.14}$ (p=0.0081)
V-I (98)	$-0.04^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.66)	$-0.05^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.65)	$-0.23^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.020)	$0.12^{+0.10}_{-0.11}$ (p=0.25)	$-0.06^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.54)	$-0.03^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.74)	$-0.23^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.023)	$0.26^{+0.10}_{-0.11}$ (p=0.0086)
B-R (79)	$-0.11^{+0.13}_{-0.12}$ (p=0.31)	$-0.30^{+0.11}_{-0.10}$ (p=0.0078)	$-0.50^{+0.10}_{-0.09}$ ($p=2 \cdot 10^{-6}$)**	$0.36^{+0.10}_{-0.11}$ (p=0.0011)*	$-0.06^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.58)	$0.02^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.85)	$-0.53^{+0.09}_{-0.08}$ ($p < 10^{-6}$)**	$0.50^{+0.09}_{-0.10}$ ($p=2 \cdot 10^{-6}$)**
H_R (98)	$-0.02^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.84)	$-0.12^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.25)	$-0.32^{+0.10}_{-0.09}$ (p=0.0013)*	$0.15^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.14)	$-0.17^{+0.10}_{-0.09}$ (p=0.091)	$-0.06^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.56)	$-0.31^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.0018)*	$0.34^{+0.09}_{-0.10}$ (p=0.00047)*

Tabla A.3: Coeficientes de correlación $\rho_{-\sigma}^{+\sigma}$ entre la magnitudes físicas (índices de color y magnitud absoluta H_R) y diversos parámetros orbitales de los objetos clásicos. En la primera columna se indica el número de objetos con datos completos utilizado. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

	B-V (n=74)	V-R (93)	R-I (74)	B-I (51)	V-I (81)	B-R (74)
H_R	$0.12^{+0.11}_{-0.12}$ (p=0.33)	$0.11^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.28)	$0.03^{+0.13}_{-0.13}$ (p=0.80)	$0.11^{+0.15}_{-0.16}$ (p=0.45)	$0.13^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.26)	$0.16^{+0.11}_{-0.12}$ (p=0.16)

Tabla A.4: Coeficientes de correlación $\rho_{-\sigma}^{+\sigma}$ entre la magnitud absoluta en el rojo H_R y e índices de color de los objetos clásicos. En la primera fila, entre paréntesis, se indica el número de objetos con datos completos utilizado en cada caso. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

	i	q	v_c	T_N
$\rho(B-V)e.$ (78)	$-0.15^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.19)	$-0.16^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.17)	$0.00^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.99)	$-0.23^{+0.11}_{-0.10}$ (p=0.044)
$\rho(B-V)i.$ (78)		$-0.31^{+0.13}_{-0.11}$ (p=0.0062)	$0.01^{+0.13}_{-0.13}$ (p=0.96)	$-0.19^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.093)
$\rho(B-V)q.$ (78)	$0.12^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.31)		$-0.01^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.94)	$0.12^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.30)
$\rho(B-V)v_c.$ (78)	$-0.21^{+0.12}_{-0.11}$ (p=0.069)	$-0.35^{+0.12}_{-0.11}$ (p=0.0020)*		$-0.28^{+0.11}_{-0.10}$ (p=0.014)
$\rho(B-V)T_N.$ (78)	$0.05^{+0.13}_{-0.13}$ (p=0.68)	$0.25^{+0.12}_{-0.13}$ (p=0.028)	$0.04^{+0.13}_{-0.13}$ (p=0.75)	
$\rho(V-R)i.$ (97)		$-0.29^{+0.11}_{-0.10}$ (p=0.0046)	$-0.10^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.34)	$-0.07^{+0.11}_{-0.10}$ (p=0.49)
$\rho(V-R)q.$ (97)	$0.10^{+0.10}_{-0.11}$ (p=0.34)		$0.01^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.96)	$0.06^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.56)
$\rho(V-R)v_c.$ (97)	$-0.01^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.33)	$-0.27^{+0.11}_{-0.10}$ (p=0.0076)		$-0.12^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.24)
$\rho(V-R)T_N.$ (97)	$0.17^{+0.10}_{-0.11}$ (p=0.089)	$0.31^{+0.10}_{-0.11}$ (p=0.0017)*	$0.19^{+0.11}_{-0.11}$ (p=.056)	
$\rho(B-I)e.$ (53)	$-0.22^{+0.13}_{-0.13}$ (p=0.12)	$-0.17^{+0.16}_{-0.15}$ (p=0.23)	$-0.07^{+0.13}_{-0.13}$ (p=0.63)	$-0.28^{+0.14}_{-0.13}$ (p=0.043)
$\rho(B-I)i.$ (53)		$-0.29^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.037)	$0.06^{+0.16}_{-0.16}$ (p=0.69)	$-0.22^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.12)
$\rho(B-I)q.$ (53)	$0.19^{+0.13}_{-0.14}$ (p=0.17)		$0.05^{+0.15}_{-0.15}$ (p=0.72)	$0.20^{+0.13}_{-0.14}$ (p=0.15)
$\rho(B-I)v_c.$ (53)	$-0.26^{+0.14}_{-0.13}$ (p=0.060)	$-0.33^{+0.14}_{-0.13}$ (p= 0.016)		$-0.33^{+0.13}_{-0.12}$ (p=0.017)
$\rho(B-I)T_N.$ (53)	$0.03^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.86)	$0.20^{+0.14}_{-0.15}$ (p=0.14)	$-0.03^{+0.14}_{-0.14}$ (p=0.81)	
$\rho(B-R)e.$ (79)	$-0.08^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.49)	$-0.07^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.53)	$0.13^{+0.10}_{-0.11}$ (p=0.26)	$-0.18^{+0.11}_{-0.11}$ (p=0.11)
$\rho(B-R)i.$ (79)		$-0.40^{+0.12}_{-0.11}$ (p=0.00024)**	$-0.06^{+0.13}_{-0.13}$ (p=0.59)	$-0.17^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.12)
$\rho(B-R)q.$ (79)	$0.14^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.21)		$0.00^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.99)	$0.11^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.34)
$\rho(B-R)v_c.$ (79)	$-0.20^{+0.12}_{-0.11}$ (p=0.072)	$-0.42^{+0.12}_{-0.11}$ (p=0.00013)**		$-0.26^{+0.12}_{-0.11}$ (p=0.019)
$\rho(B-R)T_N.$ (79)	$0.17^{+0.12}_{-0.13}$ (p=0.14)	$0.39^{+0.11}_{-0.12}$ (p=0.00038)**	$0.18^{+0.12}_{-0.13}$ (p=0.12)	
$\rho(H_R)i.$ (98)		$-0.29^{+0.10}_{-0.09}$ (p=0.0044)	$-0.11^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.30)	$-0.06^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.56)
$\rho(H_R)q.$ (98)	$0.00^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.99)		$-0.09^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.40)	$-0.04^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.73)
$\rho(H_R)v_c.$ (98)	$-0.06^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.55)	$-0.28^{+0.10}_{-0.10}$ (0.0045)		$-0.08^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.41)
$\rho(H_R)T_N.$ (98)	$0.15^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.15)	$0.32^{+0.09}_{-0.10}$ (p=0.0015)*	$0.18^{+0.10}_{-0.10}$ (p=0.078)	

Tabla A.5: Coeficientes de correlación parciales $\rho_{-\sigma}^{+\sigma}$ entre diversos parámetros, orbitales y físicos, de los objetos clásicos. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

	Centauros	Plutinos	Otros res.	sdo	sdkbo
$\rho_{(B-V)i}$	$-0.32^{+0.22}_{-0.19}$ (p=0.10) 26	$-0.27^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.070) 45	$-0.26^{+0.12}_{-0.11}$ (p=0.033) 67	$-0.13^{+0.15}_{-0.15}$ (p=0.36) 53	$-0.34^{+0.24}_{-0.20}$ (p=0.13) 20
$\rho_{(V-R)i}$	$-0.15^{+0.20}_{-0.19}$ (p=0.42) 31	$-0.25^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.083) 49	$-0.16^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.19) 71	$-0.17^{+0.14}_{-0.04}$ (p=0.21) 56	$-0.39^{+0.23}_{-0.19}$ (p=0.070) 21
$\rho_{(R-I)i}$	$-0.17^{+0.20}_{-0.19}$ (p=0.37) 28	$0.01^{+0.15}_{-0.15}$ (p=0.94) 42	$-0.09^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.48) 68	$-0.11^{+0.16}_{-0.16}$ (p=0.46) 45	$-0.25^{+0.24}_{-0.21}$ (p=0.26) 21
$\rho_{(B-I)i}$	$-0.21^{+0.24}_{-0.22}$ (p=0.36) 19	$-0.26^{+0.18}_{-0.16}$ (p=0.13) 34	$-0.21^{+0.13}_{-0.12}$ (p=0.094) 62	$-0.08^{+0.18}_{-0.18}$ (p=0.60) 42	$-0.42^{+0.26}_{-0.20}$ (p=0.072) 18
$\rho_{(V-I)i}$	$-0.09^{+0.20}_{-0.19}$ (p=0.64) 28	$-0.13^{+0.15}_{-0.15}$ (p=0.41) 43	$-0.11^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.37) 68	$-0.18^{+0.15}_{-0.15}$ (p=0.20) 49	$-0.45^{+0.23}_{-0.18}$ (p=0.030)* 22
$\rho_{(B-R)i}$	$-0.30^{+0.20}_{-0.18}$ (p=0.11) 29	$-0.30^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.041) 45	$-0.26^{+0.12}_{-0.12}$ (p=0.033) 67	$-0.10^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.48) 54	$-0.46^{+0.23}_{-0.18}$ (p=0.036) 20
ρ_{HRi}	$-0.28^{+0.18}_{-0.16}$ (p=0.12) 32	$-0.23^{+0.15}_{-0.14}$ (p=0.12) 48	$-0.09^{+0.14}_{-0.13}$ (p=0.44) 70	$-0.06^{+0.14}_{-0.13}$ (p=0.66) 55	$-0.17^{+0.28}_{-0.26}$ (p=0.50) 17

Tabla A.6: Coeficientes de correlación $\rho_{-\sigma}^{+\sigma}$ de diversos parámetros de objetos centauros y transneptunianos. El número de objetos implicados en cada test se muestra a la derecha del p-valor en cada celda. Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

	p	$p_{2.5\sigma}$	$p_{3\sigma}$		p	$p_{2.5\sigma}$	$p_{3\sigma}$
$\rho_{eq.a}$	$2 \cdot 10^{-47}$	$5 \cdot 10^{-45}$	$5 \cdot 10^{-45}$	$\rho_{(B-R)i}$	0.00011	0.0011	0.0011
$\rho_{ae.q}$	$2 \cdot 10^{-39}$	$2 \cdot 10^{-37}$	$2 \cdot 10^{-37}$	ρ_{ei}	0.00011	0.0011	0.0011
ρ_{ivc}	$3 \cdot 10^{-35}$	$2 \cdot 10^{-33}$	$2 \cdot 10^{-33}$	$\rho_{(B-R)v_c.q}$	0.00013	0.0012	0.0012
ρ_{iT_N}	$3 \cdot 10^{-26}$	10^{-24}	10^{-24}	$\rho_{iq.e}$	0.00016	0.0014	0.0014
ρ_{eq}	$2 \cdot 10^{-19}$	$8 \cdot 10^{-18}$	$8 \cdot 10^{-18}$	$\rho_{(B-R)i.q}$	0.00024	0.0021	0.0021
ρ_{qv_c}	$6 \cdot 10^{-19}$	$2 \cdot 10^{-17}$	$2 \cdot 10^{-17}$	$\rho_{(B-V)i}$	0.00027	0.0022	0.0022
ρ_{vT_N}	$8 \cdot 10^{-18}$	$2 \cdot 10^{-16}$	$2 \cdot 10^{-16}$	$\rho_{(V-R)v_c}$	0.00031	0.0024	0.0024
$\rho_{eq.i}$	$2 \cdot 10^{-16}$	$6 \cdot 10^{-15}$	$6 \cdot 10^{-15}$	$\rho_{(V-R)i}$	0.00033	0.0025	0.0025
ρ_{evc}	$3 \cdot 10^{-16}$	$6 \cdot 10^{-15}$	$6 \cdot 10^{-15}$	$\rho_{(B-I)v_c}$	0.00035	0.0025	0.0025
$\rho_{ae.i}$	$6 \cdot 10^{-13}$	10^{-11}	10^{-11}	ρ_{aT_N}	0.00036	0.0025	0.0025
ρ_{ae}	10^{-11}	$2 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$\rho_{(B-R)T_N.q}$	0.00038	0.0026	0.0026
ρ_{qT_N}	$2 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$\rho_{H_R T_N}$	0.00047	0.0031	-
$\rho_{iq.a}$	$6 \cdot 10^{-8}$	10^{-6}	10^{-6}	$\rho_{(B-R)q}$	0.0011	0.0071	-
ρ_{iq}	$7 \cdot 10^{-8}$	10^{-6}	10^{-6}	$\rho_{(B-V)T_N}$	0.0012	0.0071	-
$\rho_{(B-R)v_c}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$\rho_{H_R i}$	0.0013	0.0078	-
$\rho_{(B-R)i}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$\rho_{(H_R)T_N.q}$	0.0015	0.0089	-
$\rho_{(B-R)T_N}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$\rho_{(V-R)T_N.q}$	0.0017	0.010	-
$\rho_{(B-R)i}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$\rho_{H_R v_c}$	0.0018	0.010	-
$\rho_{ei.a}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$\rho_{(B-V)v_c.q}$	0.0019	0.010	-
$\rho_{(B-V)v_c}$	$5 \cdot 10^{-5}$	0.00053	0.00053	$\rho_{(B-I)i}$	0.0020	0.011	-
$\rho_{(V-R)T_N}$	$9 \cdot 10^{-5}$	0.00096	0.00096	-	-	-	-

Tabla A.7: Ajuste FDR: se muestran solo los resultados significativos a 2.5σ y 3σ . Base de datos utilizada: catálogo J/A+A/577/A35 de Vizier.

Apéndice B Funciones de R.

Correlaciones.

```

sigma=1
cl=(2*(pnorm(sigma)-.5))

  attach(v_clas)
clasi<-data.frame(B.R,TN,e_B.R,Vc,a,e,i,q)#
detach(v_clas)

clasi<-clasi[complete.cases(clasi), ]
attach(clasi)

cor.mu.sigma <- function(df, n) {
  df1 = df[n,]
  x <- rnorm(nrow(df1), mean = df1$B.R, sd =df1$e_B.R)
  y <- df1$Vc
  res <- cor.test(rank(x),rank(y))
  c(stat = 0.5*log((1+res$estimate)/(1-res$estimate)),statistic=res$statistic,
    p.value=res$p.value)
}
set.seed(123)
boot.cor.mu.sigma = boot(clasi, cor.mu.sigma, R = 10000)
boot.ci(boot.cor.mu.sigma, type = c("perc"),conf=cl)
#-----
plot(boot.cor.mu.sigma, index=1)#la línea discontinua vertical indica t0
windows(7,7)
plot(boot.cor.mu.sigma, index=2)
windows(7,7)
plot(boot.cor.mu.sigma, index=3)
#-----
epi<-mean(boot.cor.mu.sigma$t[,1])
rho<-round(tanh(epi),2)
statistic<-mean(boot.cor.mu.sigma$t[,2])
p.value<-median(boot.cor.mu.sigma$t[,3])
p_value<-2*(1-pt(abs(statistic),length(clasi$q)-2))#abs por bilateral P{|t|>statistic}
#-----

max<-round(abs(tanh(mean(boot.cor.mu.sigma$t[,1]))-tanh(boot.ci(boot.cor.mu.sigma,
  type = c("perc"),conf=cl)$percent[5])),2)
min<-round(abs(tanh(mean(boot.cor.mu.sigma$t[,1]))-tanh(boot.ci(boot.cor.mu.sigma,
  type = c("perc"),conf=cl)$percent[4])),2)

data.frame(rho,max,min,statistic,p.value,p_value)
detach(clasi)
#-----
#-----
sigma=1
cl=(2*(pnorm(sigma)-.5))

```

```

attach(v_clas)
clasi<-data.frame(HR,TN,e_HR,Vc,a,e,i,q)#
detach(v_clas)
clasi<-clasi[complete.cases(clasi), ]
attach(clasi)
cor.mu.sigma <- function(df, n) {
  df = df[n,]
  x <- rnorm(nrow(df), mean = df$HR, sd = df$e_HR)
  y <- df$i
  z <- df$TN
  res <- pcor.test(rank(x), rank(y),rank(z))
  c(stat = 0.5*log((1+res$estimate)/(1-res$estimate)),statistic=res$statistic,
    p.value=res$p.value)
}
set.seed(123)
boot.cor.mu.sigma = boot(clasi, cor.mu.sigma, R = 10000)
boot.ci(boot.cor.mu.sigma, type = c("perc"),conf=cl)
#-----
plot(boot.cor.mu.sigma, index=1)#la línea discontinua vertical indica t0
windows(7,7)
plot(boot.cor.mu.sigma, index=2)
windows(7,7)
plot(boot.cor.mu.sigma, index=3)
#-----
epi<-mean(boot.cor.mu.sigma$t[,1])
rho<-round(tanh(epi),2)
statistic<-mean(boot.cor.mu.sigma$t[,2])
p.value<-median(boot.cor.mu.sigma$t[,3])
p_value<-2*(1-pt(abs(statistic),length(clasi$q)-2))#abs por ser bilateral P{|t|>statistic}
#-----

max<-round(abs(tanh(mean(boot.cor.mu.sigma$t[,1]))) - tanh(boot.ci(boot.cor.mu.sigma,
  type = c("perc"),conf=cl)$percent[5])),2)
min<-round(abs(tanh(mean(boot.cor.mu.sigma$t[,1]))) - tanh(boot.ci(boot.cor.mu.sigma,
  type = c("perc"),conf=cl)$percent[4])),2)

data.frame(rho,max,min,statistic,p.value,p_value)
detach(clasi)

```

Huber y NMAD

```

c1=(2*(pnorm(3)-.5))#el valor sigma va dentro de pnorm()
attach(cclas)
huber.sigma <- function(df, n) {
  df1 = df[n,]
  x <- rnorm(nrow(df1), mean = df1$B.R, sd = df1$e_B.R)
  res <- huber(x)#FALSE para quitar los warnings
  c(huber = res$mu,nmad=res$s)
}
set.seed(123)
boot.huber.sigma = boot(cclas, huber.sigma, R = 10000)
boot.huber.sigma
per1<-boot.ci(boot.huber.sigma,index=1, type = c("perc"),conf=c1)
per2<-boot.ci(boot.huber.sigma,index=2, type = c("perc"),conf=c1)
plot(boot.huber.sigma, index=1)#la línea discontinua vertical indica t0
windows(7,7)
plot(boot.huber.sigma, index=2)

huber_b<-mean(boot.huber.sigma$t[,1])
nmad_b<-mean(boot.huber.sigma$t[,2])

max_h<-round(abs(huber_b-per1$percen[5]),2)
min_h<-round(abs(huber_b-per1$percen[4]),2)
max_s<-round(abs(nmad_b-per2$percen[5]),2)
min_s<-round(abs(nmad_b-per2$percen[4]),2)

data.frame(huber_b,max_h,min_h)
data.frame(nmad_b,max_s,min_s)
detach(cclas)

```

Contraste de Wilcoxon-Mann-Whitney

```

library(boot)
#-----datos-----
attach(v_clas)
v_clasB.R<-data.frame(B.R,e_B.R,gclass)
detach(v_clas)
v_clasB.R<-v_clasB.R[complete.cases(v_clasB.R), ]
m<-length(subset(v_clasB.R,v_clasB.R$gclass=="cclas")$B.R)
n<-length(subset(v_clasB.R,v_clasB.R$gclass=="hclas")$B.R)
attach(v_clasB.R)
#-----bootstrap-----
willcox <- function(df, n) {
  df = df[n,]
  x <- rnorm(nrow(df), mean = df$B.R, sd = df$e_B.R)
  y <- df$gclass
  res<-wilcox.test(x~y)
  c(statistic=res$statistic,p.value=res$p.value)
}
set.seed(123)
boot.willcox = boot(v_clas, willcox, R = 10000)
detach(v_clasB.R)
#-----figuras-----
plot(boot.willcox, index=1)#la línea discontinua vertical indica t0
windows(7,7)
plot(boot.willcox, index=2)
#-----estadístico y p-valor-----
statistic<-mean(boot.willcox$t[,1])
p.value<-median(boot.willcox$t[,2])
Z<-(statistic-(m*n/2))/sqrt(m*n*(m+n+1)/12)
p_value<-2*(1-pnorm(Z))
sigma<-qnorm((((1-p_value)/2)+.5))
data.frame(m+n,m-n)
#-----potencia del contraste-----
pwr<-sum(boot.willcox$t[,2]< .05)/10000
#-----resultados-----
data.frame(statistic,p.value,p_value,sigma,pwr)

```

Contraste Kolmogorov-Smirnov.

```

library(boot)
sigma=3.31#se reajusta con el resultado para verificar potencia
alpha<-1-(2*(pnorm(sigma)-.5))

#-----datos-----
m<-length(cclas[complete.cases(cclas$HR), ]$q)
n<-length(hclas[complete.cases(hclas$HR), ]$q)
data1<-v_clas[complete.cases(v_clas$HR), ]
attach(data1)
data<-data.frame(HR,e_HR)
detach(data1)
attach(data)
#-----bootstrap-----
ks.sigma <- function(df, n) {
  m<-length(cclas[complete.cases(cclas$HR), ]$q)
  n<-length(hclas[complete.cases(hclas$HR), ]$q)
  r<-m+1
  s<-m+n
  df1 = data
  x <- rnorm(m, mean = df1$HR[1:m], sd =df1$e_HR[1:m])
  y <- rnorm(37, mean = df1$HR[r:s], sd =df1$e_HR[r:s])
  res <- ks.test(x,y)
  c(statistic=res$statistic,p.value=res$p.value)
}
set.seed(123)
boot.ks.sigma = boot(data, ks.sigma, R = 10000)
#-----figuras-----
plot(boot.ks.sigma, index=1)#la línea discontinua vertical indica t0
windows(7,7)
plot(boot.ks.sigma, index=2)
#-----
summary(boot.ks.sigma$t[,1])#estadístico
summary(boot.ks.sigma$t[,2])#p-valor
#-----
c<-sqrt(-log(alpha/2)*0.5)
m_oo1<-c*sqrt((m+n)/(m*n))<mean(boot.ks.sigma$t[,1])#si TRUE es significativo p<alpha
median<-median(boot.ks.sigma$t[,2])#mediana de los p-valores. Solo para comparar
#lanzar primero kssig (otra forma de cálculo p-valor)
ks_sig<-kssig(42,37,mean(boot.ks.sigma$t[,1]))
#-----
sigma<-qnorm(((1-alpha)/2)+.5)
sigma_<-round(sigma,2)
pwr<-sum(boot.ks.sigma$t[,2]< alpha)/10000#solo si es significativo i.e. m_oo1 TRUE
data.frame(m_oo1,sigma_,median,ks_sig,pwr)
detach(data)

```

Test DIP.

```
library(boot)
library(diptest)
data(qDiptab)
#-----datos-----
attach(cent)
data1<-data.frame(B.R,e_B.R)
detach(cent)
data<-data1[complete.cases(data1$B.R), ]
attach(data)
#-----bootstrap-----
dip.sigma <- function(df, n) {
  df1 = data
  x <- rnorm(length(df1$B.R), mean = df1$B.R, sd =df1$e_B.R)
  cent<- dip.test(x)
  c(Statistic=cent$Statistic,p.value=cent$p.value)
}
set.seed(123)
boot.dip.sigma = boot(data, dip.sigma, R = 10000)
#-----figuras-----
plot(boot.dip.sigma, index=1)#la línea discontinua vertical indica t0
windows(7,7)
plot(boot.dip.sigma, index=2)
#-----cálculo de p-valor-----
D<-mean(boot.dip.sigma$t[,1])#estadístico de contraste
dnqd <- dimnames(qDiptab)#tabla para obtener p-valor
n <- length(data$B.R)
dnqd#se interpola el estadístico en la tabla para obtener el p-valor
#-----
detach(data)
#-----potencia del contraste-----
pwr<-sum(boot.dip.sigma$t[,2]< 0.05)/10000
```


Apéndice C Funciones de REBOUND.

Objeto 1992 QB1, figuras 6.11 y 6.10 (izquierda).

```
In [1]: import rebound
import numpy as np
sim = rebound.Simulation()
sim.units = ('AU', 'yr', 'Msun')
sim.add(["Sun", "Jupiter", "Saturn", "Uranus", "Neptune", "1992 QB1"],
date="2021-01-01 00:00")
import random
random.seed(123)

In [2]: for orbit in sim.calculate_orbits():
print(orbit)

In [3]: sim.integrator = "whfast"
sim.dt = 0.1368925 #50 días en años
sim.move_to_com()

In [4]: Nout = 100000#posiciones que se guardan
tmax = 1.e7#tiempo de integracion
x = np.zeros((Nplanets,Nout))
semi = np.zeros((Nplanets,Nout))
ecc = np.zeros((Nplanets,Nout))
inc = np.zeros((Nplanets,Nout))
peri = np.zeros((Nplanets,Nout))
ome = np.zeros((Nplanets,Nout))
Ome = np.zeros((Nplanets,Nout))

times = np.linspace(0.,tmax,Nout)
ps = sim.particles

for i,time in enumerate(times):
sim.integrate(time)

os = sim.calculate_orbits()
for j in range(Nplanets):
x[j][i] = ps[j+1].x
semi[j][i] = os[j].a
ecc[j][i] = os[j].e
inc[j][i] = os[j].inc
ome[j][i] = os[j].omega
Ome[j][i] = os[j].Omega

In [5]: %matplotlib inline
labels = ["Jupiter", "Saturn", "Uranus", "Neptune", "1992 QB1"]
import matplotlib.pyplot as plt
fig = plt.figure(figsize=(12,5))
ax = plt.subplot(111)
plt.plot(times,semi[4],label=labels[4])
ax.set_ylim([43.89,43.96])
ax.set_xlabel("Time (yrs)")
ax.set_ylabel("Semi-major")
plt.legend();
```

```
In [6]: fig = plt.figure(figsize=(12,5))
ax = plt.subplot(111)
plt.plot(times,semi[4],label=labels[4])
ax.set_xlim([0,20000])
ax.set_xlabel("Time (yrs)")
ax.set_ylabel("Semi-major")
plt.legend();
```

```
In [7]: fig = plt.figure(figsize=(12,5))
ax = plt.subplot(111)
plt.plot(times,ecc[4],label=labels[4])
ax.set_ylim([0,.1])
ax.set_xlabel("Time (yrs)")
ax.set_ylabel("Ecc")
plt.legend();
```

```
In [8]: def zeroTo360(val):
while val < 0:
    val += 2*np.pi
while val > 2*np.pi:
    val -= 2*np.pi
return val*180/np.pi
```

```
In [9]: incli = [zeroTo360(inc[4][i]) for i in range(Nout)]
fig = plt.figure(figsize=(12,5))
ax = plt.subplot(111)
plt.plot(times,incli,label=labels[4])
ax.set_ylim([0,5])
ax.set_xlabel("Time (yrs)")
ax.set_ylabel("Inc")
plt.legend();
```

```
In [10]: peri = [zeroTo360(ome[4][i]+Ome[4][i]) for i in range(Nout)]
fig = plt.figure(figsize=(12,5))
ax = plt.subplot(111)
ax.plot(times,peri,label=labels[4])
ax.set_xlabel("time (yrs)")
ax.set_ylabel("$\hat{\omega}$")
plt.legend();
```

```
In [11]: Omeg = [zeroTo360(Ome[4][i]) for i in range(Nout)]
fig = plt.figure(figsize=(12,5))
labels = ["Jupiter", "Saturn", "Uranus", "Neptune", "1992 QB1"]
ax = plt.subplot(111)
ax.plot(times,Omeg,label=labels[4])
ax.set_xlabel("time (yrs)")
ax.set_ylabel("$\Omega$")
plt.legend();
```

Objeto 2000 QB243. Parámetro MEGNO. Figura 6.8 (izquierda).

```

In [1]: def simulation(par):
    a, e = par # unpack parameters
    sim = rebound.Simulation()
    sim.integrator = "whfast"
    sim.ri_whfast.safe_mode = 0
    sim.dt = 0.1368925*2.*np.pi#The integration timestep
    sun = rebound.Particle(m=1.)
    sim.add(sun)
    jupiter = sim.add(primary=sun,m=0.000954,a=5.20372800746,e=0.0485966759911,
        inc=0.0227518079171,Omega=1.75434851158,omega=-1.51150886666,f=-1.17390163188)
    saturn = sim.add(primary=sun,m=0.000285885672722,a=9.53969948602,e=0.0549602692869,
        inc=0.0434236755171,Omega=1.98273338563,omega=-0.367169157552,f=-2.60414869432)
    uranus = sim.add(primary=sun,m=4.36624373583e-05,a=19.1926531915,e=0.047236207227,
        inc=0.013475013434,Omega=1.29170459976,omega=1.69131652051,f=-2.30076252447)
    neptune = sim.add(primary=sun,m=5.15138377263e-05,a=30.07545332,e=0.00873873538056,
        inc=0.0308971749379,Omega=2.30006411451,omega=-1.52635959436,f=-0.949069077748)
    objec = sim.add(primary=sun,m=0.0,a=a,e=e,inc=0.118308327938,Omega=-0.521208305382,
        omega=-1.3185260414,f=2.04975320896)
    sim.move_to_com()
    sim.init_megno()
    try:
        sim.integrate(1e4*2.*np.pi, exact_finish_time=0)
        megno = sim.calculate_megno()
        return megno
    except rebound.Escape:
        return 10.

In [2]: import rebound
import numpy as np
simulation((34.885550192,0.562767133685))

In [3]: Ngrid = 120
par_a = np.linspace(30.0,40.0,Ngrid)
par_e = np.linspace(0.4,0.8,Ngrid)
parameters = []
for e in par_e:
    for a in par_a:
        parameters.append((a,e))
from rebound.interruptible_pool import InterruptiblePool
pool = InterruptiblePool()
results = pool.map(simulation,parameters)

```

```
In [4]: results2d = np.array(results).reshape(Ngrid,Ngrid)
        %matplotlib inline
        import matplotlib.pyplot as plt
        fig = plt.figure(figsize=(7,5))
        ax = plt.subplot(111)
        extent = [min(par_a),max(par_a),min(par_e),max(par_e)]
        ax.set_xlim(extent[0],extent[1])
        ax.set_xlabel("semi-major axis $a$")
        ax.set_ylim(extent[2],extent[3])
        ax.set_ylabel("eccentricity $e$")
        im = ax.imshow(results2d, interpolation="none", vmin=1.9, vmax=4, cmap="RdYlGn_r",
            origin="lower", aspect='auto', extent=extent)
        cb = plt.colorbar(im, ax=ax)
        cb.set_label("MEGNO $\langle Y \rangle$")
```

