

# **Influencia de la topología de la red en formación de coaliciones**

**Trabajo de Fin de Master en Física de Sistemas Complejos**

**Autor: Miguel A. Fernandez**

**Tutor: Elka Korutcheva**

**Universidad Nacional de Educación a Distancia**

**Fecha de defensa: 10 de marzo de 2014**

## Contenido

Abstract.....	3
Introducción.....	4
Parte I. Fundamentos .....	8
Modelos magnéticos .....	9
Modelo Blume-Emery-Griffiths .....	9
Deducción del hamiltoniano .....	10
Aproximación de campo molecular.....	11
Analogía sociofísica .....	14
Modelo Blume-Capel .....	15
Punto tricrítico .....	19
Redes Complejas .....	21
Modelo Watts-Strogatz.....	21
Distribución de conectividades.....	23
Modelos de Ising en redes complejas .....	26
Modelos sociofísicos de cooperacion .....	30
Modelo del panorama de energía (Axelrod-Bennett) .....	32
Crítica al modelo AB .....	36
Modelos de Galam.....	37
Modelo Ising.....	37
Crítica al modelo Ising de Galam .....	38
Multimodal .....	39
Modelo de Vidrios de spin .....	41
Parte II. Propuesta .....	43
Substrato .....	44
Análisis de Campo Medio .....	44
Grafo aleatorio.....	49
Watts-Strogatz con reconexiones .....	55
Watts-Strogatz con atajos .....	62
Efecto de los parámetros de control .....	69
Análisis del comportamiento .....	72
Conclusiones.....	88
Direcciones futuras .....	89
Apéndices .....	90
Apéndice 1: Frustración global vs local en el modelo AB .....	92
Apéndice 2: Simulación del modelo de Galam .....	93
Apéndice 3: Método de matriz densidad variacional .....	95
Apéndice 4: Punto tricrítico.....	97
Apéndice 5: Análisis de campo medio del modelo Ising .....	100
Apéndice 6: Descripción de la simulación .....	103
Tabla de Figuras .....	106
Bibliografía.....	107

## **Abstract**

Se presenta un modelo sociofísico de agentes con función de energía tipo Blume-Capel para partículas con tres estados. El sistema está compuesto por una red Watts-Strogatz y se estudia la influencia de su conectividad en la formación de coaliciones de agentes (países, organizaciones, asociaciones, gente agrupada por algún objetivo o idea tal como una opción de voto, preferencia por una de dos marcas comerciales contendientes, etc). Tras deducir el hamiltoniano Blume-Capel y hacer una introducción bibliográfica a los trabajos sociofísicos se propone un modelo analizando dos parámetros de orden: la magnetización, entendida como coalición o posicionamiento con respecto a dos opciones en contienda, y la neutralidad. Las conclusiones analíticas se verifican con una simulación por ordenador.

Palabras clave: Blume-Capel, Sociofísica, Watts-Strogatz, Coaliciones, Small-World, tres estados, modelo de agentes.

## Introducción

Si bien la humanidad ha progresado espectacularmente en nuestro entendimiento de la materia inerte y de los sistemas biológicos, no puede decirse lo mismo de los asuntos humanos. Aun así, el hecho de que se observen tantas regularidades estadísticas en las actividades sociales permite postular la existencia de simplicidad fundamental debajo de una parte del nuestro comportamiento. La Física proporciona un novedoso y eficiente marco de trabajo para analizar la complejidad humana. El comportamiento de los átomos arroja luz sobre ciertas características intrigantes de la sociedad. La democracia, la difusión de opiniones, las guerras, y muchas otras cosas tienen un comportamiento sorprendentemente similar a fluidos y sólidos [1].

Hasta donde sabemos, no existe ningún tratamiento de temas sociológicos similar al que proponemos en este proyecto. La cooperación y, en particular, la formación de coaliciones se ha abordado tradicionalmente recurriendo a teoría de juegos en ambientes políticos y diplomáticos [2], pero sólo muy recientemente se han empezado a aplicar los conceptos de la Física Estadística. No nos consta ningún trabajo que considere la topología de un substrato de red.

En líneas generales, se trata de proponer un modelo sociofísico basado en agentes con la finalidad de entender mejor como se producen los procesos sociales fundamentales. En concreto, perseguimos una teoría que logre predecir o explicar las alineaciones de agentes (pudiendo los agentes ser países, pero también organizaciones, asociaciones, gente agrupada por algún objetivo o idea tal como una opción de voto, preferencia por una de dos marcas comerciales contendientes, etc.). Nuestra propuesta consiste en un modelo de cooperación entre agentes combinando el de Blume-Capel (BC) con unidades o agentes de tres estados caracterizados por el valor de su  $spin^1$ , los modelos sociofísicos de Axelrod-Bennet y Galam, y el de Watts-Strogatz para el estudio de redes complejas. Pretendemos que sea un trabajo multidisciplinar, con métodos tomados de la Mecánica Estadística, utilización de modelos sociofísicos y de redes complejas, y un componente computacional.

Tomamos como punto de partida los modelos sociofísicos basados en el concepto de frustración (Axelrod-Bennett, Galam), que han producido resultados interesantes aplicados a la dinámica social. Por ejemplo –en opinión de sus autores– consiguen predecir en retrospectiva la formación de coaliciones, tales como en el escenario de la Segunda Guerra Mundial, guerras y configuraciones metaestables, como la Guerra Fría. También, entre otras cosas, las coaliciones entre compañías con respecto a las diferentes versiones de UNIX, y la aparición de regiones culturales. Dependiendo del peso o importancia que se asigne a las diversas variables del modelo, pueden llegar a explicar

---

<sup>1</sup> Concepto inspirado en la analogía con partículas que propugnamos

la formación de comunidades dentro de ciudades, la aparición de diversos grupos por fusión de empresas o de fundaciones o incluso la aparición de grupos marginados o colectivos de protesta -como por ejemplo el fenómeno 15M en el contexto español- que surgen del establecimiento de enlaces propiciados por los propios agentes.

Adicionalmente, nuestro modelo utiliza como substrato una red Watts-Strogatz, la cual permite considerar de forma natural la vecindad inmediata entre agentes, y las relaciones estrechas entre agentes alejados (atajos en el modelo WS) entre otras relaciones de tipo distancia. Consideramos igualmente un grafo aleatorio como substrato y trabajaremos con diferentes conectividades (o diluciones, en terminología de redes neuronales).

En modelos sociofísicos anteriores se obtienen resultados interesantes explotando el principio de energía mínima, pero no se consigue modelizar satisfactoriamente la inestabilidad ni la neutralidad. Para ello se han intentado [3] técnicas tales como la introducción de variables Potts que en general añaden complejidad de cálculo sin producir resultados sensiblemente mejores

Los intentos de utilizar elementos de varios estados (Potts) con estados  $\{1..q\}$  fallan a la hora de describir la realidad sin necesidad de ajustes manuales demasiado artificiales. Por su parte, el modelo BC es una variante del modelo BEG (Blume-Emery-Griffiths) de tres estados, que ha producido muchos resultados interesantes en varios campos con mayor simplicidad de cálculo[4,5,6,7,8]. En sintonía con BC, vamos a trabajar con estados  $\{0, \pm 1\}$ , y así seguir considerando la neutralidad sin afectar a la conectividad de la red.

La novedad de este trabajo reside por una parte en el uso de redes BC diluidas para analizar escenarios de cooperación y conflicto entre agentes de diversa índole, pero sobre todo, en la consideración de la topología mediante la inserción de un substrato descrito por el modelo Watts-Strogatz.

Las redes compuestas por elementos de tres estados tipo BEG sólo se han aplicado en sociofísica al estudio de dinámica de opiniones en redes sociales [9], y hasta donde sabemos, nunca se ha considerado la topología del substrato. Sin embargo si se ha estudiado la topología del modelo BEG sobre árboles [10], pero no en contexto sociofísico. Existe un análisis interesante [11] del modelo Blume-Capel utilizando autómatas celulares.

Así pues, el modelo propuesto en este trabajo es un modelo de cooperación entre agentes genéricos basado en tres componentes:

- Modelo Blume-Capel para describir los estados de los agentes y producir una especie de función Hamiltoniana

- Modelo Watts-Strogatz para describir la topología de conexiones entre los agentes
- Modelos sociofísicos basados en frustración tipo Axelrod-Bennett/Galam

Para ver la importancia del sustrato, consideremos un sistema Ising antiferromagnético. En una malla cuadrada es posible llegar a una configuración con todos los spins opuestos, pero en una triangular es imposible que todos los spins estén opuestos a todos sus vecinos y tenemos por tanto frustración, sin un estado único y claro de equilibrio, o sea, un vidrio de spin, con muchas configuraciones de energía similar.

El trabajo empieza con una sección bibliográfica que describe los componentes de nuestro modelo: empezaremos por el comportamiento termodinámico del modelo Blume-Emery-Griffiths, después particularizado en el modelo Blume-Capel, donde estudiaremos analíticamente sus transiciones de fase. Veremos después una introducción a las redes complejas, centrada en el modelo Watts-Strogatz, que será utilizado como sustrato pues permite el tratamiento analítico de una aproximación a una red *Small World*. Una característica de los entornos considerados en este trabajo es su fuerte conexión. Tanto las relaciones humanas como las empresariales o políticas son cada vez más intensas, y ponen en contacto casi directo a agentes que en el pasado eran inconexos.

Incluimos a continuación una panorámica general de modelos sociofísicos, donde se describe la aplicación de conceptos físicos a la sociología, con trabajos pioneros que han dado lugar a la nueva disciplina de la sociofísica.

Finalmente, presentaremos nuestro modelo, empezando por un estudio analítico y acompañando nuestras conclusiones con los resultados de una simulación (modelo basado en agentes), que entendemos también es bastante original. En la bibliografía consultada, salvo muy pocas excepciones algo más frecuentes en el novedoso campo de la sociofísica, no hemos visto un tratamiento computacional “no convencional”, basado en agentes o autómatas celulares.

El trabajo se estructura en dos partes, correspondientes a los fundamentos de nuestro modelo y a la descripción del mismo respectivamente.

Parte I. En primer lugar se abordan los modelos magnéticos de base, después las redes describiendo el modelo Watts-Strogatz, que utilizaremos para el sustrato del nuestro, y la aplicación de modelos magnéticos en entorno sociofísico. Después se estudian algunos modelos de cooperación basados en ideas de mecánica estadística<sup>2</sup> con la intención de describir diferentes aproximaciones del mismo problema.

---

<sup>2</sup> No consideramos una categoría de modelos basados en teoría de juegos

Parte II. Se presenta nuestra propuesta, primero analíticamente y después acompañada los resultados de una simulación computacional basada en agentes.

## **Parte I. Fundamentos**

# Modelos magnéticos

## Modelo Blume-Emery-Griffiths

El modelo Blume-Emery-Griffiths se concibió originalmente [12] para explicar el comportamiento de una mezcla de  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}^3$ , y se ha aplicado desde entonces a microemulsiones, aleaciones de semiconductores, y con particular éxito a definir un tipo de red neuronal que aumenta notablemente la capacidad de almacenamiento respecto a las redes atractoras convencionales. Es un modelo clásico de gas reticular diluido de la familia Ising que ignora la naturaleza clásica de la transición  $\lambda$ , pero que tiene en cuenta el efecto de las impurezas.

El Hamiltoniano se ha deducido por técnicas de Mecánica Estadística tradicional y utilizando la Información Mutua en el contexto de redes neuronales. Ver por ejemplo [12] para el primer enfoque, que seguiremos en esta sección, y [4] [13] para el segundo.

En relación a redes de dos estados, el volumen del espacio de acoplamientos es muy grande, de forma que aumenta sustancialmente el número de mínimos locales, y por tanto configuraciones de equilibrio.

El modelo considera dos especies de átomos

Átomos de una especie:  ${}^3\text{He} \rightarrow S_i = 0$

Átomos de otra especie:  ${}^4\text{He} \rightarrow S_i = \pm 1$

La segunda especie tiene un grado de libertad adicional, lo cual nos origina un parámetro de orden, el promedio térmico del spin total:

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle S_i \rangle \quad (1.1)$$

El número de átomos de cada especie es:

$$N_3 = \sum_{i=1}^N (1 - S_i)^2 \quad (1.2)$$

$$N_4 = \sum_{i=1}^N S_i^2$$

$$x = \frac{\langle N_3 \rangle}{N} \quad (1.3)$$

---

<sup>3</sup> La separación de fases y la transición al estado superfluido del  ${}^4\text{He}$  llamada también  $\lambda$  por la forma de la curva de la capacidad calorífica en función de la temperatura

Para un sistema translacionalmente invariante, tenemos

$$\begin{aligned} M &= \langle S_i \rangle \\ x &= 1 - \langle S_i^2 \rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

Siendo  $\langle S_i \rangle$  la magnetización y  $\langle S_i^2 \rangle$  el momento cuadrupolar medio. Otro parámetro de orden podría ser la concentración de una de las especies ( ${}^3\text{He}$ ), lo cual refleja la posibilidad de separación de fase. Se escoge como segundo parámetro de orden  $1-x$ , siendo  $x$  la concentración de  ${}^3\text{He}$ . Este último corresponde en nuestro modelo sociofísico a la neutralidad o no alineación.

## Deducción del hamiltoniano

Un primer término es

$$H_s = \sum_{i,j} S_i S_j$$

Con el sumatorio extendido a los vecinos inmediatos.

Este término da lugar a una transición de fase de 2º orden en la que aparece una magnetización  $M \neq 0$  a la temperatura  $T_c$ , con  $T_c$  dependiente de la constante de acoplamiento  $J$  y de la concentración de átomos de  ${}^3\text{He}$ . La permanencia de algunos spins igual a 0 (neutrales) significa que un cierto número de los términos  $S_i^2$  son 0, lo que desfavorece la transición y por tanto hace disminuir  $T_c$ .

Si  $N_3 = 0, S_i = \pm 1$  y se recupera el hamiltoniano Ising tradicional.

Debemos incluir adicionalmente un término de interacción:

$$H_I = -k_{33} \sum_{i,j} (1 - S_i^2)(1 - S_j^2) - k_{44} \sum_{i,j} S_i^2 S_j^2 - k_{34} \sum_{i,j} [S_i^2(1 - S_j^2) + S_j^2(1 - S_i^2)] \quad (1.5)$$

En la expresión anterior,  $K_{\alpha\beta}$  es la interacción efectiva entre sitios ocupados por átomos de  ${}^3\text{He}$  y  ${}^4\text{He}$ . Si fuesen iguales, es decir, si lo fuesen las interacciones entre todos los tipos de átomos, esta contribución al hamiltoniano sería constante.

Reorganizando,

$$H_I = -(k_{33} + k_{44} - 2k_{34}) \sum_{i,j} S_i^2 S_j^2 - 2z(k_{34} - k_{33}) \sum_{i=1}^N S_i^2 - zNk_{33} \quad (1.6)$$

Siendo  $z$  el número de vecinos inmediatos en la red.

También necesitamos incorporar el efecto de los potenciales químicos  $\mu_3$  y  $\mu_4$  para contar con las transformaciones de una especie en otra, obteniendo:

$$H = H_S + H_I - \mu_3 N_3 - \mu_4 N_4 \quad (1.7)$$

Que puede reescribirse como

$$H = -J \sum_{i,j} S_i S_j - K \sum_{i,j} S_i^2 S_j^2 + \Delta \sum_i S_i^2 - N(zk_{33} + \mu_3) \quad (1.8)$$

Con

$$K = k_{33} + k_{44} - k_{34}$$

y

$\Delta = \mu_3 - \mu_4 + 2z(k_{33} - k_{34})$ , el término de anisotropía, que define un campo cristalino

El último término es una constante y prescindiremos de él.

## Aproximación de campo molecular

Aplicaremos el método variacional a la matriz densidad para obtener expresiones para los parámetros de orden (ver Apéndice 3: Método de matriz densidad variacional).

La energía libre es

$$F = Tr(\rho H) + \frac{1}{\beta} Tr(\rho \ln \rho) \quad (1.9)$$

Siendo  $\rho$  matriz densidad de prueba aproximada, para la que tomamos un producto de matrices densidades individuales (de un sitio):

$$\rho = \prod_i \rho_i$$

Y entonces, la expresión de la energía libre pasa a ser

$$\frac{F}{N} = -\frac{1}{2} Jz [Tr(\rho_i S_i)]^2 - \frac{1}{2} Kz [Tr(\rho_i S_i^2)]^2 + \Delta Tr(\rho_i S_i^2) + \frac{1}{\beta} Tr(\rho_i \ln \rho_i) \quad (1.10)$$

La función auxiliar para el método de multiplicadores de Lagrange será

$$\frac{F}{N} + \lambda Tr \rho_i$$

Y la restricción

$$\text{Tr} \rho_i = 1$$

Se obtiene

$$\rho_i = \frac{e^{-\beta h}}{\text{Tr} e^{-\beta h}} \quad (1.11)$$

Siendo  $h$  el campo molecular, dado por

$$\begin{aligned} h = & -Jz \left[ \text{Tr}(\rho_i S_i) S_i \right] - Kz \left[ \text{Tr}(\rho_i S_i^2) S_i^2 \right]^2 + \Delta S_i^2 = \\ & -JzMS_i + [\Delta - Kz(1-x)] S_i^2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Utilizando (1.4) llegamos a expresiones para los parámetros de orden del modelo BEG:

$$\begin{aligned} 1-x &= \frac{2ch(\beta JzM)}{\exp\{\beta[\Delta - Kz(1-x)]\} + 2ch(\beta JzM)} \\ M &= \frac{2sh(\beta JzM)}{\exp\{\beta[\Delta - Kz(1-x)]\} + 2ch(\beta JzM)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

En una mezcla,  $x$  está especificado y de las ecuaciones se determinan  $M$  y  $\Delta$ , pero en el contexto que nos interesa en este trabajo, tendremos las constantes de acoplamiento determinadas y tendremos que resolver para  $M$  y  $x$ .

Las soluciones para  $M$  y  $x$  son aquellas que minimizan la energía libre.  $M = 0$  es siempre una solución, en cuyo caso tenemos

$$1-x = \frac{2}{\exp\{\beta[\Delta - K(1-x)]\} + 2} \quad (1.14)$$

Y cuando  $M \ll 0$ , podemos dividir una ecuación entre otra para obtener:

$$1-x = M \coth(\beta JM) \quad (1.15)$$

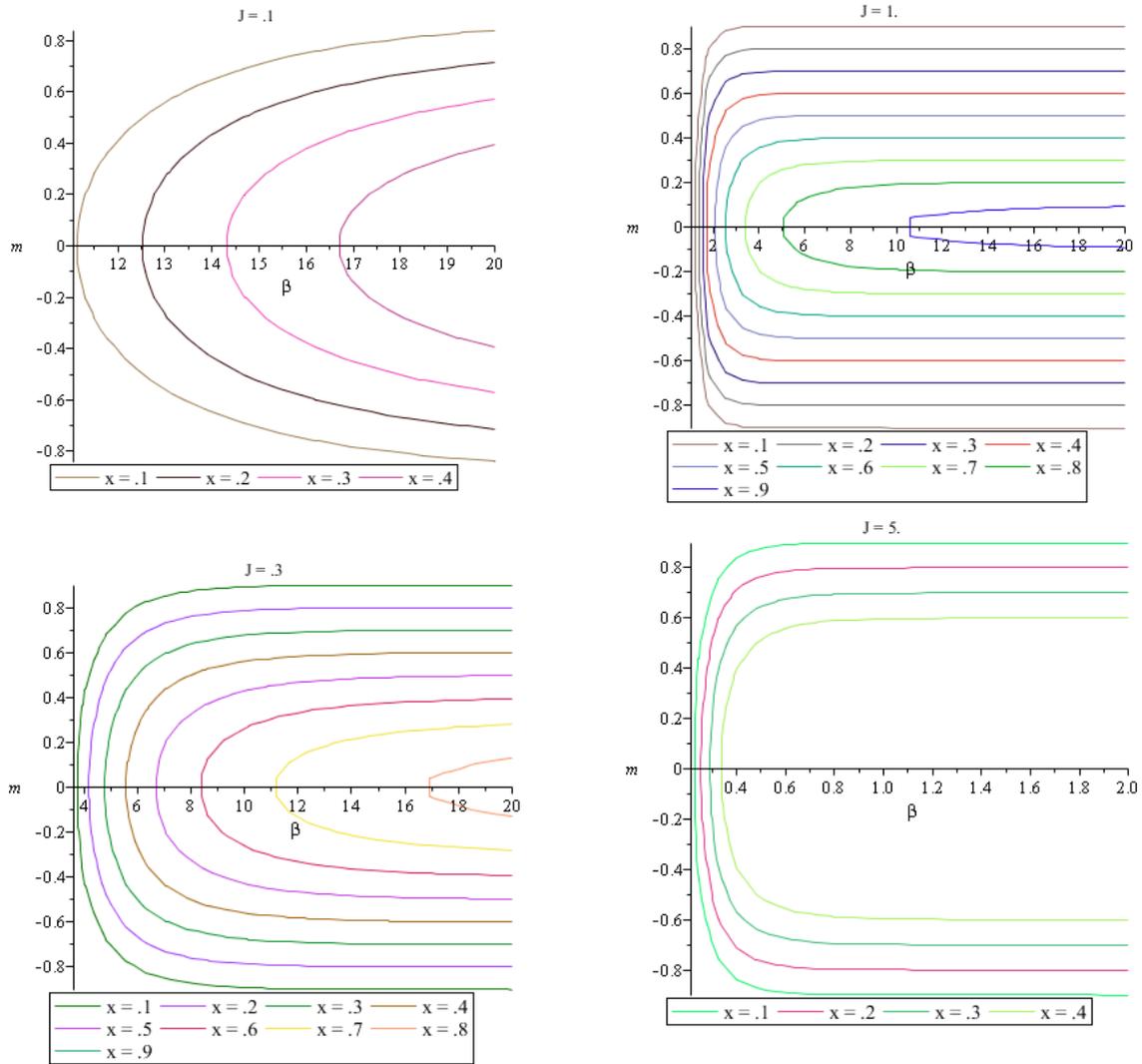


Figura 1: Magnetización vs temperatura a distintos valores de  $x$  y  $J$

En la Figura 1 puede verse que la magnetización crece cuando la temperatura baja, tendiendo asintóticamente a un valor menor cuanto mayor sea la concentración de agentes neutrales. Puede verse una temperatura crítica por debajo de la cual el sistema es ordenado, con un comportamiento ferrodinámico caracterizado por dos posibles valores para la magnetización.

## Analogía sociofísica

En el modelo que propondremos en este trabajo, vamos a describir la formación de coaliciones, tanto en el sentido literal de una coalición, como en la adopción de una de dos opiniones enfrentadas, o bien ausencia de posicionamiento.

La analogía es clara, los átomos son los agentes, y el valor de su spin representa la alineación con una idea o coalición. Los agentes neutrales corresponden al spin 0 (átomos de  $^3\text{He}$  en el modelo original BEG).

El término de anisotropía  $\Delta$  que en el modelo BEG está asociado a los potenciales químicos de transformación de una especie en otra, en el nuestro supone la “energía” asociada al paso de neutralidad a alineación o viceversa. Como esto puede suceder frecuentemente, nos basaremos en una variante del modelo BEG, el modelo Blume-Capel, en adelante BC, que considera este escenario con  $\Delta \neq 0$  y la simplificación  $K = 0$  (ver *Modelo Blume-Emery-Griffiths*)

La solución ordenada se da cuando una de las dos coaliciones prevalece, con lo que hay un valor neto positivo o negativo de la magnetización, que es un parámetro de orden. Hemos visto en el apartado anterior que  $M = 0$  es siempre una solución que minimiza la energía libre, la que en contexto sociofísico corresponde a un perfecto equilibrio entre coaliciones u opiniones. Tanto un valor nulo como uno no nulo de magnetización pueden alcanzarse con diferentes concentraciones de agentes neutrales, de aquí la necesidad de un segundo parámetro de orden.

Otro parámetro de orden es el número de agentes neutrales,  $x$  en el modelo BEG. Como hemos dicho anterioremente, en una mezcla,  $x$  está especificado y de las ecuaciones se determinan  $M$  y  $\Delta$ , pero en el contexto que nos interesa en este trabajo, tendremos las constantes de acoplamiento determinadas y tendremos que resolver para  $M$  y  $x$ .

En nuestro modelo consideramos una temperatura para estudiar la evolución de configuraciones del sistema, entendida sociofísicamente como la asunción de riesgos por parte de un agente, que no toma la opción más favorable desde el punto de vista del coste energético.

## Modelo Blume-Capel

Partiendo del modelo BEG en el contexto en que surgió (mezclas  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ ), si las interacciones entre componentes son equivalentes, el término bicuadrático puede despreciarse y estamos en una versión simplificada conocida como modelo de Blume-Capel. Ver [14,15,16,17].

Será el que utilizemos en nuestra propuesta de modelo sociofísico porque es el modelo tipo Ising diluido más simple que no obstante captura la esencia de competición entre dos mecanismos, uno que favorece el enfrentamiento y otro la neutralidad.

Partimos del hamiltoniano

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j + \Delta \sum_i S_i^2 \quad (2.1)$$

El término con el acoplamiento con el campo cristalino  $\Delta$  está asociado a la energía de creación de “huecos” (moléculas con spin 0), y será positivo o negativo según se favorezca o no la existencia de estos huecos<sup>4</sup>

Ahora, el *ansatz* de campo medio consiste en descomponer el spin de cada sitio  $i$  en la contribución del promedio termodinámico y un término de fluctuación:

$$\begin{aligned} S_i &= \langle S_i \rangle + \delta S_i = m + \delta S_i \\ \delta S_i &= S_i - m \end{aligned} \quad (2.2)$$

Entonces<sup>5</sup>

$$S_i S_j = (m + \delta S_i)(m + \delta S_j) = -m^2 + m(S_i + S_j) + \delta S_i \delta S_j \approx -m^2 + m(S_i + S_j) \quad (2.3)$$

Y el hamiltoniano queda

$$\hat{H}_{MF} = \frac{1}{2} NJm^2 - Jm \sum_i S_i + \Delta \sum_i S_i^2 \quad (2.4)$$

---

<sup>4</sup> Agentes neutrales en nuestro modelo

<sup>5</sup>  $S_i = m + \delta S_i$

$S_j = m + \delta S_j$

$S_i S_j = (m + \delta S_i)(m + \delta S_j) =$

$m^2 + m\delta S_j + m\delta S_i + \delta S_i \delta S_j \approx$

$m^2 + m\delta S_j + m\delta S_i =$

$m^2 + m(S_j - m) + m(S_i - m) =$

$m^2 + mS_j - m^2 + mS_i - m^2 =$

$-m^2 + m(S_i + S_j)$

Donde hemos introducido  $J$  representando la transformada discreta de Fourier de  $J(\vec{R})$  para el vector de onda  $q = 0$ . La función de partición es, pues,

$$\begin{aligned}
Z &= Tr(e^{-\beta \hat{H}_{MF}}) = e^{-\frac{1}{2} \beta N J m^2} \left( \sum_s e^{\beta J m s - \beta \Delta s^2} \right)^N = \\
&= e^{-\frac{1}{2} \beta N J m^2} \left( 1 + e^{\beta J m - \beta \Delta} + e^{-\beta J m - \beta \Delta} \right)^N = \\
&= e^{-\frac{1}{2} \beta N J m^2} \left[ 1 + e^{-\beta \Delta} \left( e^{\beta J m} + e^{-\beta J m} \right) \right]^N = \\
&= e^{-\frac{1}{2} \beta N J m^2} \left[ 1 + 2e^{-\beta \Delta} ch(\beta J m) \right]^N
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Reescalamos la temperatura y la energía de creación de huecos

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{k_B T}{\hat{J}(0)} \\
\delta &= \frac{\Delta}{\hat{J}(0)}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Y tenemos

$$Z = e^{-\frac{1}{2} \beta N J m^2} \left[ 1 + 2e^{-\frac{\delta}{\theta}} ch\left(\frac{m}{\theta}\right) \right]^N \tag{2.7}$$

Con  $F = -k_B T \ln Z$  la energía libre por sitio es

$$f = \frac{F}{NJ} = \frac{1}{2} m^2 - \theta \ln \left[ 1 + 2e^{-\frac{\delta}{\theta}} ch\left(\frac{m}{\theta}\right) \right] \tag{2.8}$$

Minimizando ahora con respecto a  $m$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm} \left( \frac{1}{2} m^2 - \theta \ln \left[ 1 + 2e^{-\frac{\delta}{\theta}} \cosh\left(\frac{m}{\theta}\right) \right] \right) &= 0 \\
m &= \frac{2e^{-\frac{\delta}{\theta}} \sinh\left(\frac{m}{\theta}\right)}{1 + 2e^{-\frac{\delta}{\theta}} \cosh\left(\frac{m}{\theta}\right)}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Mediante un procedimiento análogo, con  $x = 1 - \langle S_i^2 \rangle$ , llegamos a

$$1 - x = \frac{2e^{-\frac{\delta}{\theta}} \cosh\left(\frac{m}{\theta}\right)}{1 + 2e^{-\frac{\delta}{\theta}} \cosh\left(\frac{m}{\theta}\right)} \quad (2.11)$$

En la ecuación para  $m$ ,  $m = 0$  es siempre una solución. Para entender la dependencia con la temperatura de la magnetización obtenida por aproximación de campo medio, en la Figura 2 graficamos el lado derecho de la ecuación anterior comparado con la recta  $m$ :

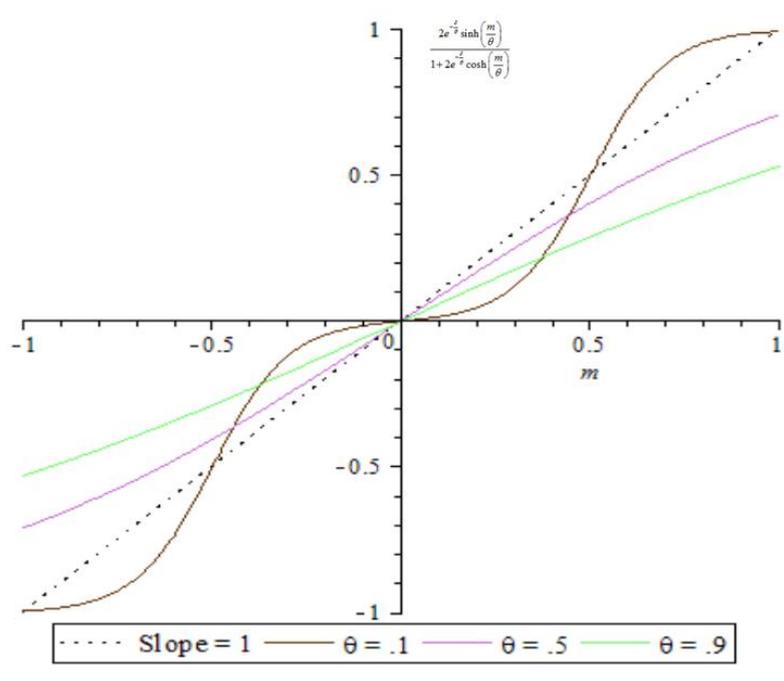


Figura 2. Solución gráfica para la magnetización

Parece claro que para temperaturas ( $\theta$ ) superiores a un cierto valor crítico, la única solución es  $m = 0$ , correspondiente a una fase paramagnética, mientras que para temperaturas inferiores hay dos soluciones aparte de  $m = 0$ .

La temperatura crítica se calcula igualando los gradientes de la recta  $m$  y del lado derecho de (2.10), con lo que se obtiene una ecuación implícita que relaciona la temperatura crítica con la energía de creación de huecos-neutrales:

$$\theta_c = \frac{2}{\exp\left(\frac{\delta}{\theta_c}\right) + 2} \quad (2.12)$$

Sin reescalar sería

$$\beta_c = \frac{e^{\beta_c \Delta} + 2}{2J} \quad (2.13)$$

Las posibles soluciones para el parámetro de orden  $1-x$  pueden verse en la Figura 3:

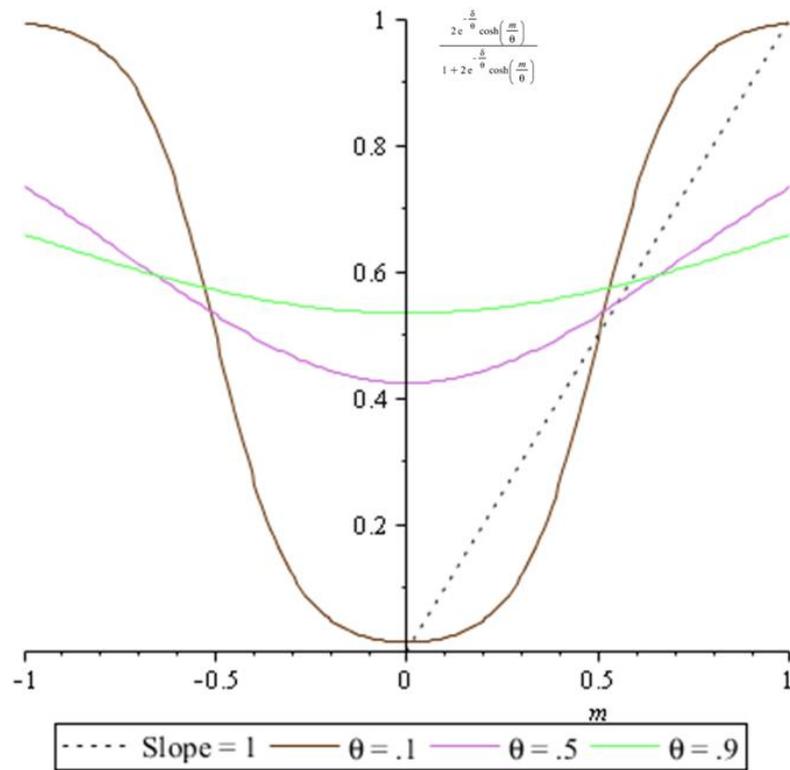


Figura 3: Soluciones para  $1-x$

## Punto tricrítico

Cuando hay uno o más parámetros además de la temperatura que controlan el comportamiento de un sistema, y quizás más de un parámetro de orden, los coeficientes B y C en la expansión de Landau pueden aproximarse a 0 simultáneamente y esto da lugar a nuevos tipos de comportamiento crítico. Estas condiciones se dan en mezclas o aleaciones, como el sistema BEG que nos ocupa. Véase el *Apéndice 4: Punto tricrítico*.

La susodicha expansión de Landau de la energía libre alrededor de la solución desordenada  $m = 0$  es:

$$f(m) = A + Bm^2 + Cm^4 + Dm^6 + \dots \quad (2.14)$$

Como hemos visto en las gráficas anteriores, la energía libre es simétrica respecto a  $m$ , de manera que el desarrollo solo contendrá términos pares.

Ahora, desarrollamos en serie la expresión de la energía libre (2.8)

$$f = -\theta \ln \left( 1 + 2e^{-\frac{2}{\theta}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\theta + 2\theta e^{-\frac{2}{\theta}} - 2e^{-\frac{2}{\theta}}}{\theta \left( 1 + 2e^{-\frac{2}{\theta}} \right)} m^2$$

$$+ \frac{1}{12} \frac{e^{-\frac{2}{\theta}} \left( -1 + 4e^{-\frac{2}{\theta}} \right)}{\theta^3 \left( 1 + 2e^{-\frac{2}{\theta}} \right)^2} m^4 + O(m^6)$$

Y a continuación identificamos términos, obteniendo

$$A = -\theta \ln \left( 1 + 2e^{-\frac{\delta}{\theta}} \right)$$

$$B = \frac{1}{2\theta} \left( \theta - \frac{2}{2 + e^{\frac{\delta}{\theta}}} \right) \quad (2.15)$$

$$C = \frac{1}{12(2 + e^{\frac{\delta}{\theta}})\theta^3} \left( \frac{6}{2 + e^{\frac{\delta}{\theta}}} - 1 \right)$$

La temperatura crítica que ya hemos obtenido antes sale también haciendo  $B = 0$ . Por otra parte, sabemos de la teoría de Landau que cuando se anulan simultáneamente los coeficientes de  $m^2$  y  $m^4$  se da un punto tricrítico. Esto sucede para

$$\theta = \frac{1}{3}, \delta = \frac{2}{3} \ln 2 \quad (2.16)$$

A temperatura 0 podemos ver una transición de primer orden si comparamos las energías de las fases paramagnética y ferromagnética:

$$E_{MF} = \begin{cases} 0, & \text{si } m = 0 \\ \frac{1}{2} - \Delta \\ NJ(0), & \text{si } m = \pm 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Una  $\delta$  grande y negativa impide la creación de agentes neutrales, solo se permiten estados en la región Ising, con  $S_i = \pm 1$ .

A lo largo de la línea que marca la transición de primer orden coexisten dos fases ordenadas (con  $m < 0$  y  $-m < 0$ ) con una fase desordenada ( $m = 0$ ).

El cambio de la línea de segundo orden a primero puede verse en la Figura 4:

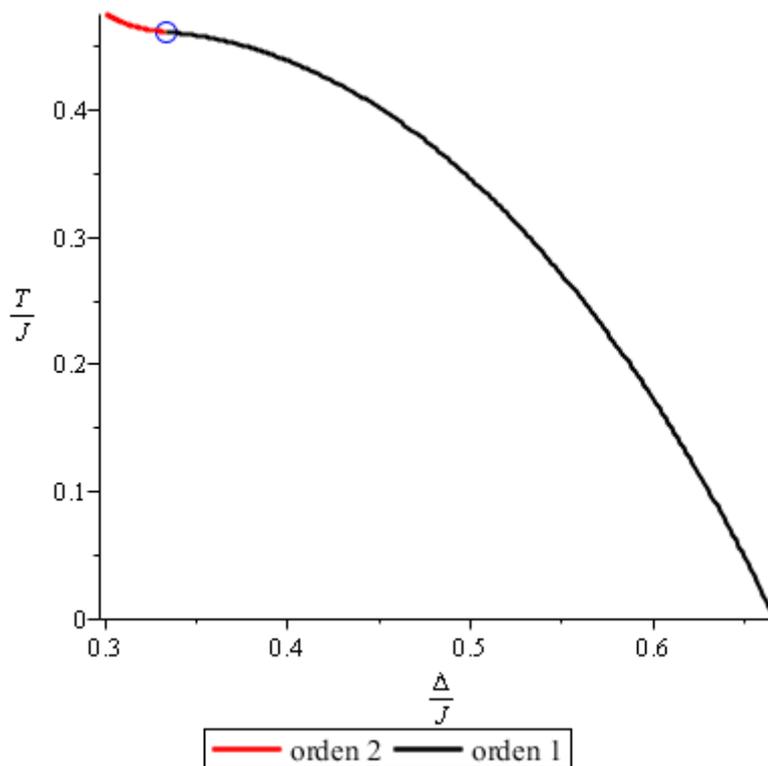


Figura 4. Diagrama de fases para el modelo BC en el plano T- $\Delta$ .

Se marca el punto tricrítico, que esta en  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \ln 2)$

# Redes Complejas

## Modelo Watts-Strogatz

Las redes que no están compuestas por mallas regulares pueden representar mejor sistemas complejos en el mundo real. En particular, redes tipo *Small World* se han estudiado como la mejor forma de describir topologías complejas, las que nos encontramos en las organizaciones económicas y sociales [18,19,20,21,22].

Watts y Strogatz introducen desorden en una malla regular para producir un comportamiento *Small World*. En su modelo, hay una transición de fase en la topología, según la cual la red pasa de un régimen de alta temperatura dominado por la estructura unidimensional de la malla, a un régimen de baja temperatura con un comportamiento tipo campo medio.

La motivación del modelo Watts-Strogatz es que las redes aleatorias ignoran el fenómeno del *clustering* (los elementos conectados a un nodo tienden a su vez a estar conectados entre sí).

La forma de construir una red Watts-Strogatz permite reconciliar las propiedades locales de una malla regular con las globales de una red aleatoria, gracias a la introducción de conexiones de largo alcance en una malla inicialmente regular. En la variante original [23,24], este modelo se construye partiendo de  $N$  nodos ubicados sobre una malla unidimensional, con conexiones a  $z$  vecinos inmediatos, a las que se añaden atajos o reconexiones entre pares seleccionados aleatoriamente con probabilidad  $\phi$ , (ver Figura 5). En la primera de las variantes [24], a la que nos referiremos como variante con reconexiones, mostrada en la Figura 5.a, la reconexión reemplaza a la conexión original, que se elimina. En otra, debida a Newman [25], a la que nos referiremos como variante con atajos, mostrada en la Figura 5.b, se conservan los enlaces originales.

La principal característica del modelo *Small World* de redes es un camino corto entre nodos ( $\sim \frac{\ln N}{\ln K}$ , siendo  $K$  el grado medio) y por un alto grado de clustering, con la distancia característica siguiendo una ley de escala de la forma:

$$l(N, p) \sim \frac{N^{\frac{1}{d}}}{K} f(u(p, K, N)) \quad (3.1)$$

La forma funcional de  $f$  es tal que

$$f(u) = cte(u \ll 1), \frac{\ln u}{u} (u \gg 1) \quad (3.2)$$

Siendo  $\phi$  la probabilidad de reconexión, para una malla en anillo, el camino medio es  $l(\phi=0) = \frac{N}{2K} \gg 1$  y escala linealmente con el tamaño del sistema, mientras que en el límite  $\phi \rightarrow 1$ , en el grafo aleatorio tenemos  $l(\phi=1) = \frac{\ln N}{\ln K}$ , y entre medias cae rápidamente con un aumento de  $\phi$ . En otras palabras, tenemos una transición de malla regular a *Small World*.

Otro parámetro que caracteriza la topología de la red es el coeficiente de *clustering*, que pasa de  $C(\phi=0) = \frac{3(k-2)}{4(k-1)}$  (véase que tiende a  $\frac{3}{4}$ , independientemente del tamaño, si  $k$  es muy grande) a  $C(\phi=1) = \frac{K}{N}$ . El camino medio cae rápidamente, pero no así el coeficiente de clustering, que en la región intermedia es parecido a  $C(0)$  y sólo cae para  $\phi$  relativamente alta, es decir, el típico comportamiento pequeño mundo.

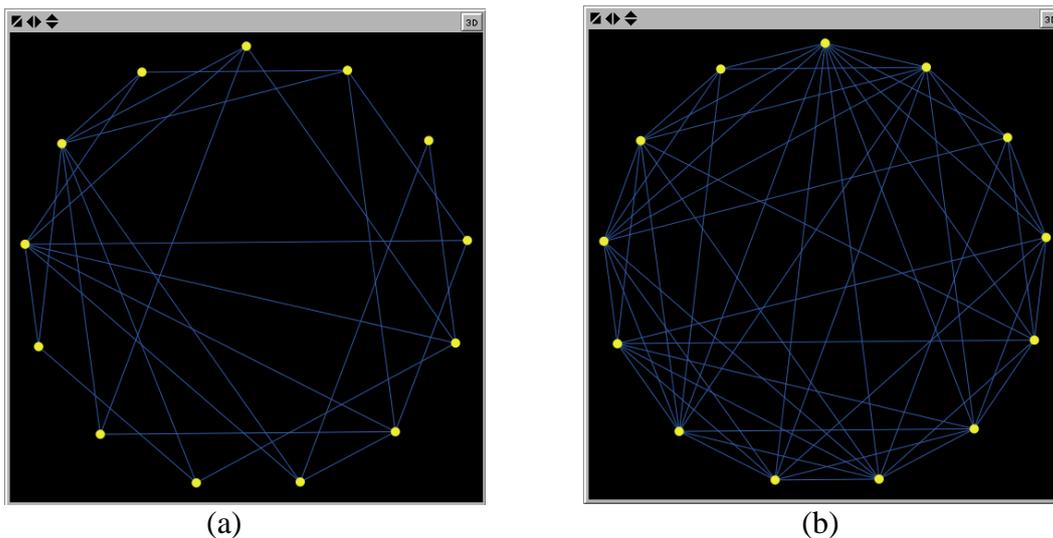


Figura 5. Modelo de Watts-Strogatz.

Red generada con nuestra simulación:

(a) cambiando el enlace original por un atajo.

(b) conservando el enlace original. En ambos casos el número de vecinos inmediatos conectados en la malla original es 4, el número de nodos 13 y la probabilidad de reconexión/atajo respectivamente 0.1

## Distribución de conectividades

Sea  $\phi$  la probabilidad de reconexión. Un valor no nulo de este parámetro introduce desorden en la red, en forma de conectividad no uniforme, a la vez que conserva la conectividad media  $K = 2z$ , siendo  $z$  los niveles de separación de vecinos inmediatos (cada vértice está conectado a  $2z$  vecinos inmediatos:  $z = 2$  implica que se consideran cuatro vecinos inmediatos,  $z = 3$  implica que se consideran 6).

### VARIANTE CON RECONEXIONES

Sea  $P(q)$  la distribución de conectividades. Por construcción, la conectividad media es  $K = 2z$ . Como  $z$  de las  $2z$  conexiones iniciales de un vértice no son afectadas por la construcción del modelo, la conectividad de un vértice  $i$  puede escribirse como  $q_i = z + n_i$ , con  $n_i \geq 0$ . A su vez,  $n_i$  puede dividirse en dos partes:  $n_i^1 \leq z$  enlaces han quedado (con probabilidad  $1 - \phi$ ) y otros  $n_i^2 = n_i - n_i^1$  se han reconectado con el nodo  $i$  con probabilidad  $\phi/N$ . Se obtiene pues

$$P(n_i^1) = \binom{z}{n_i^1} (1 - \phi)^{n_i^1} \phi^{z - n_i^1} \quad (3.3)$$

$$P(n_i^2) = \frac{(z\phi)^{n_i^2}}{n_i^2!} \exp(-\phi z) \quad (3.4)$$

para  $N$  grande

Y finalmente

$$P(q) = \sum_{n=0}^{\min(q-z, z)} \binom{z}{n} (1 - \phi)^n \phi^{z-n} \frac{(2\phi)^{q-z-n}}{(q-z-n)!} \exp(-\phi z) \quad (3.5)$$

La fórmula anterior es válida para  $z \geq 3$

En resumen, la distribución de grados varía entre los siguientes valores:

- Para  $\phi = 0$ ,  $\delta(x - K)$ . En este caso tenemos la malla regular original sin modificaciones, su distribución es una delta de Dirac centrada en el valor medio de la conectividad,  $K = 2z$ . Es decir, todos los nodos tienen la misma conectividad (ver Figura 5)
- Para  $\phi = 1$ , es una distribución de Poisson,  $P(q) = e^{-K} K^q \frac{1}{q!}$ . Estamos en el caso de una red de Erdős-Renyi, la primera utilizada para el estudio de redes

complejas, fácil de tratar pero poco representativa de las redes que aparecen en situaciones reales. La expresión es

- La tercera situación se da para valores intermedios,  $0 < \phi < 1$ , y es, como vimos antes,

$$P(q) = \sum_{n=0}^{\min(q-z, z)} \binom{z}{n} (1-\phi)^n \phi^{z-n} \frac{(2\phi)^{q-z-n}}{(q-z-n)!} \exp(-\phi z) \quad (3.6)$$

Se considera más realista que la de Poisson, y es una de las que consideramos en nuestra simulación, junto a la variante con atajos

### VARIANTE CON ATAJO

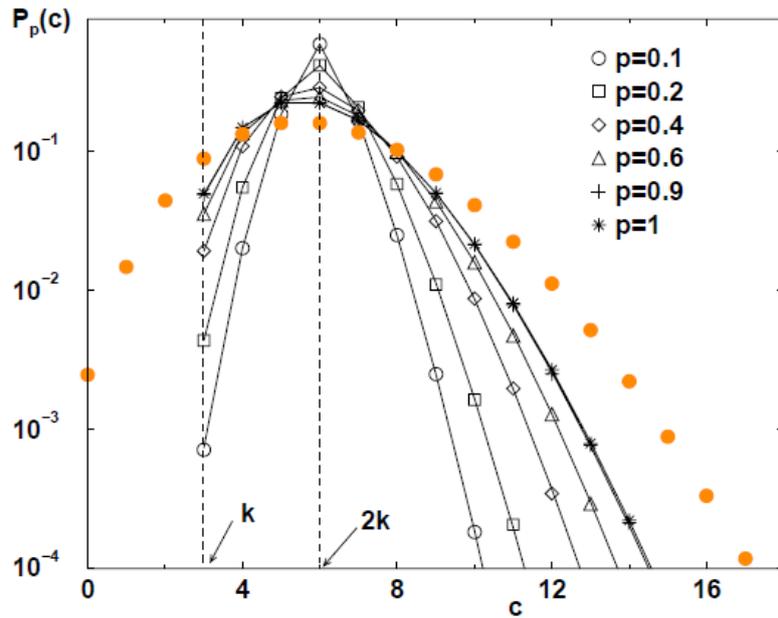
En cuanto a la variante con atajos, en la que se conservan los enlaces originales, el cálculo es más simple. Inicialmente, partimos de un grado  $c = 2z$ , sin atajos, tenemos pues  $nz$  enlaces. Si añadimos un atajo con probabilidad  $\phi$  (recordemos que en esta variante no se eliminan enlaces) hay  $nz\phi$  atajos,  $2nz\phi$  extremos de atajos de los cuales  $2z\phi$  terminan en un nodo dado por término medio. Entonces, el número  $s$  de atajos que acaban en un nodo sigue una distribución de Poisson con media  $2z\phi$ .

$$P(s) = e^{-c\phi} \frac{(c\phi)^s}{s!} \quad (3.7)$$

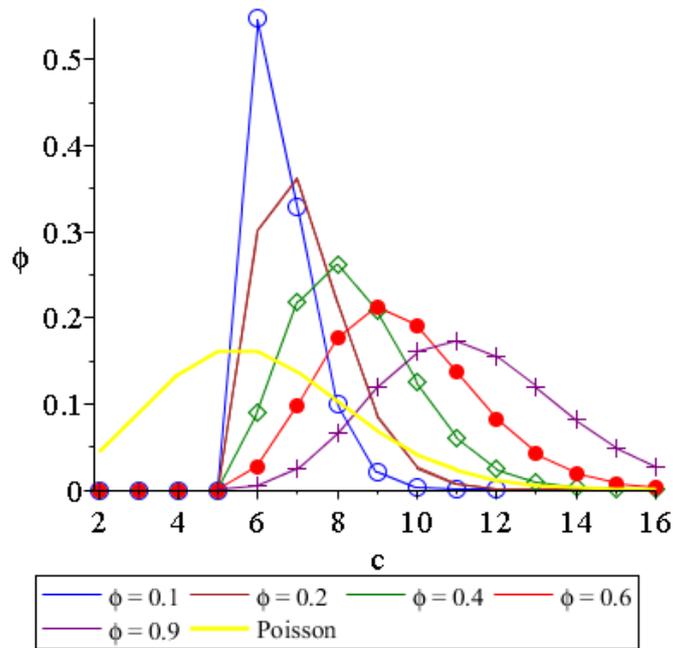
Como el grado de un vértice es  $q = c + s$  la distribución es

$$\begin{aligned} P(q) &= e^{-c\phi} \frac{(c\phi)^{q-c}}{(q-c)!} & q \geq c \\ P(q) &= 0 & q < c \end{aligned} \quad (3.8)$$

En la Figura 6 puede verse gráficamente la distribución de conectividad para ambas variantes. En la variante de reconexión (a), obviamente, el grado muestra una distribución centrada en el grado inicial  $2z$ , dado que no se aumenta el número de enlaces. En (b) por el contrario, para mayor probabilidad de creación de atajos el pico se desplaza a valores mayores con dicha probabilidad, y tiende a parecerse a la distribución de Poisson, desplazada según el grado inicial.



(a)



(b)

Figura 6. Distribución de conectividades

(a) Distribución de conectividades en la variante de reconexiones para  $z = 3$  y varios valores de la probabilidad de reconexión ( $p$  en la figura). Los círculos en naranja representan la distribución de conectividad de una red aleatoria con la misma conectividad media. Figura tomada de [24].

(b) Distribución de conectividades en la variante de atajos para  $z = 3$  y varios valores de la probabilidad de reconexión  $\phi$ . La gráfica amarilla representa la distribución de conectividad de una red aleatoria con la misma conectividad media.

## Modelos de Ising en redes complejas

El modelo de Ising, concebido originalmente para explicar el ferromagnetismo, es extremadamente útil y se ha aplicado en muchos contextos para describir la emergencia espontánea de orden. Es además el punto de partida para otros modelos (como el de Blume-Capel sobre el que gira este trabajo), pues explica en notable acuerdo con la realidad fenómenos tales como las hipótesis de escala y universalidad. En resumen, su importancia radica en que pueden aproximarse muchos sistemas reales.

En nuestro caso, es natural estudiar sistemas consistentes en agentes que interactúan situados sobre una red [26, 29, 30, 31]. Los agentes – spins, osciladores, individuos, países, etc.- ocupan los nodos de una red y los enlaces representan sus interacciones.

Vamos a considerar el siguiente hamiltoniano:

$$H = -\sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j - h \sum_i S_i \quad (4.1)$$

En principio, podríamos esperar que la aproximación de campo medio es válida en este contexto, pues una red compleja es un sistema de infinitas dimensiones. Sin embargo, no necesariamente es válida para una distribución arbitraria  $P(k)$  de conexiones [28], y por otra parte, en el límite termodinámico el sistema está ordenado a cualquier temperatura, comportamiento que no explica la aproximación de campo medio [27].

La magnetización es  $\langle S_i \rangle = m_i$  (en la fase paramagnética los spins cambian de estado con frecuencia y la magnetización es 0) y sea<sup>6</sup>  $T_c \sim z \frac{\bar{J}}{k_B}$  la temperatura crítica que separa la fase paramagnética de la ferromagnética: se rompe el estado ordenado cuando la energía térmica  $k_B T$  excede la energía de acoplamiento de un spin con sus  $z$  vecinos inmediatos  $z\bar{J}$ , siendo  $\bar{J}$  el acoplamiento medio. Las variaciones del valor promedio del spin<sup>7</sup>  $\langle S_i \rangle = m_i(T)$  con la temperatura esencialmente caracterizan el comportamiento cooperativo del sistema.

---

<sup>6</sup> Ver Apéndice 5: Análisis de campo medio del modelo Ising

<sup>7</sup> En este contexto, spin es simplemente una variable asociada a cada nodo de la red que puede adoptar dos valores: +1 y -1

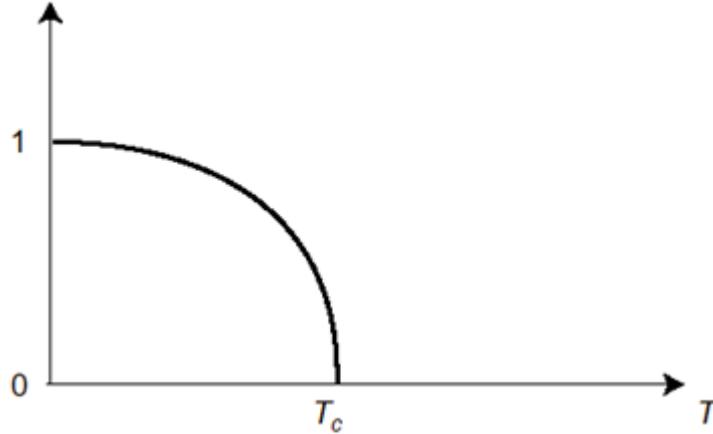


Figura 7: Magnetización espontánea en función de la temperatura en el modelo Ising

Si aplicamos la teoría de campo medio a un grafo totalmente conectado de  $N \rightarrow \infty$  nodos y un campo externo 0, entonces la aproximación de campo medio es exacta, y cada sitio está sometido a un campo:

$$h_i = \sum_{i \neq j} J_{ij} S_j \approx \sum_{i \neq j} J_{ij} m_j \quad (4.2)$$

La aproximación de la derecha es precisamente la aproximación de campo medio, exacta cuando el número de vecinos inmediatos es infinito.

Ahora, para una temperatura dada, la magnetización es el valor esperado  $m = \langle S_i \rangle, \forall i$ , y el Hamiltoniano Ising es  $H = -J \sum_{i \neq j} S_i S_j + h$ .

Si en la expresión anterior nos quedamos con los términos relativos a un nodo  $i$  con spin  $S_i$  nos queda la energía del nodo

$$E_i = H(S_i) = -S_i \left( \sum_j J_{ij} S_j \right) \approx -S_i \sum_j J_{ij} m_j \quad (4.3)$$

Entonces,

$$m_i = \langle S_i \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} S_i P(S_i)}{\sum_{\{S\}} \exp(-\beta E_i)} = \frac{e^{-\beta E_+} - e^{-\beta E_-}}{e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_-}} = th \left( \beta \sum_{i \neq j} J_{ij} m_j \right) \quad (4.4)$$

Y así hemos llegado al equivalente del resultado clásico de la teoría de campo medio para el modelo Ising [14, 30, 31, 32].

Si hacemos ahora  $J_{ij} = \frac{J}{N}$  y se obtiene una temperatura crítica finita en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ . En este caso se obtiene la temperatura crítica  $T_c = \frac{J}{k_B}$  y el momento magnético relativo macroscópico  $m(T) = \sum_i \frac{m_i(T)}{N}$  cerca del punto crítico  $m(T) \propto \sqrt{T_c - T}$ <sup>8</sup>. Sabemos que singularidades de este tipo (la raíz cuadrada es una de las peculiaridades del parámetro de orden en la teoría de campo medio de transiciones de segundo orden) corresponden a una transición de fase continua [29].

La misma singularidad y temperatura críticas se obtienen para grafos aleatorios diluidos. Podemos también aplicar este tratamiento –aproximación de campo medio– a las redes complejas: Supongamos un grafo diluido no correlacionado con una secuencia de grados  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , y hacemos una aproximación de red templada<sup>9</sup> (*annealed*) [26][29] que tiene en cuenta la heterogeneidad de una red compleja y da muy buenos resultados en la región crítica con redes diluidas, como es nuestro caso. Esta aproximación consiste en sustituir la red original por un grafo totalmente conexo ponderado con pesos  $\frac{q_i q_j}{\langle k \rangle N}$  para los enlaces, o dicho de otra forma, por un substrato en el que la suma de acoplamientos para cada nodo tiene el mismo valor  $Jq_i$  que el grafo original.

En esta red, la magnetización de un nodo e

$$m_i = th \left[ \frac{\beta J q_i}{\langle q \rangle N} \sum_j q_j m_j \right] = th(\beta J q_i M) \quad (4.5)$$

Donde el momento magnético ponderado M, definido como  $M = \sum_j \frac{q_j M_j}{\langle q \rangle N}$ , es una solución de la ecuación siguiente:

$$M = \sum_q \frac{q P(q)}{\langle q \rangle} th(\beta J q M) \quad (4.6)$$

Donde  $P(q)$  es la distribución de grados de la red aleatoria original. Es precisamente el momento magnético ponderado el parámetro de orden en este problema.

<sup>8</sup> Ver Apéndice 5: Análisis de campo medio del modelo Ising

<sup>9</sup> Otro enfoque que produce buenos resultados es el de la matriz de transferencia [24]

De esta fórmula podemos obtener una expresión aproximada para la temperatura crítica:

$$k_B T_c = J \frac{\langle q^2 \rangle}{\langle q \rangle} \quad (4.7)$$

Simulaciones numéricas [33] indican que  $T_c(N) \propto \ln(N)$

Vemos que si el segundo momento de la distribución de grados diverge, la temperatura crítica es infinita, por lo que este desarrollo no es aplicable a mallas regulares, aunque sí a redes sin escala.

## Modelos sociofísicos de cooperación

En este apartado de tipo introductorio nos proponemos presentar una clase de modelos sociofísicos y posicionar nuestro trabajo en el campo de la sociofísica. Dada la novedad de esta disciplina nos parece necesaria para contextualizar nuestra propuesta

No vamos a ocuparnos de la multitud de estudios basados en teoría de juegos, sino en la aplicación de técnicas de mecánica estadística a fenómenos sociales. La teoría de juegos busca equilibrios que corresponden a configuraciones estables, pero no consideran la inestabilidad de un sistema en el que sus agentes siempre están persiguiendo su beneficio. Por consiguiente la teoría de juegos no es adecuada para abordar la evolución de un sistema sociofísico.

Históricamente, parece que el primer texto en introducir la aplicación de la física a fenómenos sociales fue el de Lewin [34].

Hemos estudiado varios modelos en la bibliografía disponible que no vamos a incluir en este trabajo por brevedad. Los dos que nos inspiran son el de Axelrod-Bennett (AB) y el de Galam. El primero, pionero en la utilización del concepto físico-estadístico de energía mínima [32, 35] lo utiliza para escoger la configuración más estable e introduce una medida (propensión) que cuantifica qué tan afines son dos agentes. Axelrod y Bennett llegaron teóricamente a determinar las alianzas establecidas entre las 17 naciones europeas implicadas en la Segunda Guerra Mundial, y a las alianzas entre empresas en el establecimiento de normas UNIX<sup>10</sup>. Galam demuestra posteriormente que este modelo no es totalmente consistente con su contenido físico (léase [36] junto con la réplica posterior de Axelrod [37]) y construye otro modelo reformulando el anterior, basado en enlaces y acoplamientos aleatorios [38, 39]. En éste, obtuvo un modelo tipo Ising para *vidrios de spin* combinando vidrios de spin de sitio aleatorio y de enlace aleatorio que si contempla las interacciones incompatibles, y posteriormente lo aplicó [40] a la fragmentación de los estados de la antigua Yugoslavia.

Para resumir, una teoría en este campo, para ser útil debe reunir las siguientes propiedades [35]:

- Debe proporcionar una explicación coherente de por qué unas configuraciones específicas se dan en un sistema real, y no otras
- Debe explicar la dinámica de los procesos reales y el resultado final
- Debe ser lo suficientemente general para aplicarse en muchos campos sociales y políticos

---

<sup>10</sup> Sin embargo, es insuficiente para describir los fenómenos de inestabilidad.

- Debe ser simple y centrarse en los aspectos fundamentales,
- Obviamente, sus predicciones deben ser comprobables

Los modelos considerados lo hacen, pero sin embargo adolecen de algunos problemas:

- Indefinición de la propensión bilateral, que encapsula características sociales pero no dan ninguna forma para obtenerla
- No consideran interacciones de orden mayor a dos originadas por otros estados posibles,
- No consideran la neutralidad.<sup>11</sup>

Hay otra clase de planteamientos interesantes que no consideramos por brevedad, las interacciones a tres, utilizando variables Ising o Potts: Naumis, Samaniego-Steta, del Castillo-Mussot, y Vazquez presentan [3] una novedosa propuesta, una generalización de la aplicación de conceptos de *vidrios de spin* con interacciones de tres elementos.

Según estos modelos, la dinámica de tres cuerpos se acerca más a la realidad: el enemigo de mi enemigo no es necesariamente mi amigo.

La realidad está llena de ejemplos de interacciones en triángulo. Por ejemplo, el efecto del cotilleo sobre la relación entre dos personas, y la mayor eficacia cuando en un artículo científico trabajan más de dos autores.

---

<sup>11</sup> De hecho, la aplicación de AB al problema de la Segunda Guerra Mundial falló por no saber considerar el estado de Portugal

## ***Modelo del panorama de energía (Axelrod-Bennett)***

El siguiente componente de nuestro modelo es –como lo denominan sus autores- el del panorama de energía. La idea consiste básicamente en utilizar una función energética -o de coste- cuyos mínimos corresponden a las configuraciones de equilibrio. Anteriormente hemos deducido cual es la función que utilizaremos en nuestro modelo (el hamiltoniano de Blume-Capel). Ahora veremos la aplicación de esta función en sociofísica.

El modelo de Axelrod-Bennett, en adelante AB, se aplica al estudio de coaliciones entre agentes sociales. Está basado en ideas desarrolladas en el estudio de vidrios de spin [35].

Este modelo se basa fundamentalmente en una analogía: la alineación de spins en un sistema tipo Ising con el posicionamiento (político, económico, ...) de un agente social. En ambos casos, muchos agentes independientes intentan adoptar una orientación que minimiza su frustración en términos de las acciones tomadas por otros agentes y de su propensión a actuar cooperando u oponiéndose con cada uno de los otros. Todo es interdependiente, pero algunas configuraciones colectivas son más estables que otras. En el modelo de Axelrod-Bennett (en adelante AB), cada agente es como una partícula que interactúa con las demás con una fuerza que depende del “tamaño” y la “distancia”. El tamaño considera la importancia relativa del agente y la distancia aquí no tiene un significado necesariamente geográfico.

Se basa en dos suposiciones básicas:

- Cada agente es miope en sus evaluaciones. Es decir, se considera la relación con otro agente independientemente del resto
- Los cambios se producen individualmente, es decir, no hay cambios en bloque. Esta suposición es acertada cuando el beneficio de un cambio es incierto, no se puede establecer una relación directa causa-efecto.

Axelrod y sus colegas definen una especie de “energía” para un conjunto de agentes obtenida sumando las interacciones. Si agentes enfrentados se agrupan en la misma alianza la energía es más alta debido a la repulsión mutua.

Los agentes convergen a la configuración final a través de una serie de pequeños pasos independientes, cada uno de los cuales acerca al sistema un poco a la configuración de equilibrio, en lo que Axelrod y Bennett definen no como un proceso racional de decisión, sino como un intento miope de conseguir una mejora local.

En la configuración de mínima energía ningún agente consigue aumentar la estabilidad cambiando de estado. Esto corresponde a un equilibrio de Nash<sup>12</sup>, y según AB es lo que cabe esperar en la realidad, aunque no implica necesariamente que todos los agentes deban estar satisfechos con la configuración, pues simplemente no pueden mejorar su situación. Al final –según sus autores- este modelo consigue “predecir” las configuraciones más probables, el nivel de insatisfacción con el statu quo y cómo el sistema responderá a cambios en las relaciones entre agentes. Se ha aplicado satisfactoriamente a:

- Coaliciones internacionales
- Alianzas empresariales para establecer normas
- Coaliciones de partidos políticos
- Redes sociales
- Problemas sociales en democracias
- Estructuras organizativas

El modelo comienza con un conjunto de  $n$  agentes (naciones, partidos políticos, etc.) caracterizados por el parámetro tamaño  $s_i > 0$ , un reflejo de la importancia del agente para los demás. Este “tamaño” encapsula potencia industrial o militar, demografía, etc., según lo que es relevante en un caso particular. En una aplicación particular de esta teoría, debemos hacernos las siguientes preguntas:

- ¿Quiénes o qué son los agentes?
- ¿Cuáles son sus “tamaños” *relativos*?
- ¿Qué sabemos respecto a las propensiones entre pares de agentes?
- ¿Cuál ha sido el resultado real, si es que tenemos acceso a él?

Las respuestas dependen del dominio en particular que se investiga. Como ejemplo de aplicación específica, para el valor de  $s_i$  en el estudio de una alianza de naciones puede utilizarse el *National Capabilities Index* tomado del proyecto *Correlates of War*<sup>13</sup>. Por ejemplo, Axelrod [35] analiza el caso de las coaliciones durante la Segunda Guerra Mundial con los siguientes valores de tamaño (porcentajes relativos tomados de datos correspondientes a 1936 del citado índice) para algunos de los agentes principales:

Gran Bretaña (7.45)

---

<sup>12</sup> El equilibrio de Nash, en teoría de juegos, es una situación en la cual todos los jugadores siguen una estrategia que maximiza sus ganancias dadas las estrategias de los otros. Consecuentemente, ningún jugador tiene ningún incentivo para modificar individualmente su estrategia si ningún otro lo hace.

<sup>13</sup> Proyecto creado en 1963 por David J. Singer en la facultad de Ciencias Políticas de la Universidad de Michigan, dedicado a la recolección, publicación y análisis de datos cuantitativos sobre relaciones internacionales con el objetivo de analizar científicamente el fenómeno de la guerra. Es posiblemente el primer esfuerzo serio por estudiar empíricamente las relaciones internacionales. Durante el periodo 2002-2005 fue dirigido por Scott Bennett, uno de los creadores del modelo Axelrod-Bennett. Para más información, ver <http://www.correlatesofwar.org/>

Francia (5.32)  
 Alemania (11.49)  
 Rusia (15.01)

Entre cada par de agentes existe una propensión  $p_{ij} = p_{ji}$  a trabajar juntos. Es  $>0$  y grande si dos agentes tienen buena relación entre ellos, y negativo si hay fuentes de conflictos potenciales. Es simétrica porque no es plausible que un agente tenga un conflicto con otro y que éste no lo sienta también como conflicto.

Una configuración – en el modelo AB – determina la distancia  $d_{ij}$  entre dos agentes. En la versión más simple de la teoría todos los agentes se suponen agrupados en dos coaliciones, de forma que la distancia es 0 si están en la misma y 1 si están en coaliciones distintas. Caben otras definiciones. Por ejemplo, en una estructura organizativa sería el número de niveles que hay que cruzar para llegar a un jefe común.

Ahora, con los conceptos de distancia y propensión definidos, es posible definir una medida de la frustración: que tan bien o mal una configuración satisface las propensiones de un agente a colaborar u oponerse a los otros. Un agente desea “cambiar de bando” si con ello reduce su frustración. Matemáticamente:

$$F_i(X) = \sum_{j \neq i} s_j p_{ij} d_{ij}(X) \quad (5.1)$$

Es claro que un conflicto con un agente pequeño no es tan importante para determinar los posicionamientos como con uno grande. La frustración individual de un agente es menor (con esta definición de distancia) si está en el mismo bando que aquellos otros agentes con los que tiene propensión positiva y distinto de aquellos con los que es negativa. Nótese también que la miopía referida anteriormente está incluida en esta definición de frustración, porque para evaluar la frustración, un agente utiliza las propensiones uno a uno.

El siguiente paso es definir una “energía” de la configuración X como la suma ponderada de las frustraciones:

$$E(X) = \sum_i s_i F_i(X) \quad (5.2)$$

Sustituyendo la definición de frustración se llega a una expresión de la energía de una configuración dada en términos de tamaños, propensiones y distancias:

$$E(X) = \sum_{i,j} s_i s_j p_{ij} d_{ij}(X) \quad (5.3)$$

Con la expresión de la energía es posible construir el panorama (*landscape*) del espacio de fase del sistema.

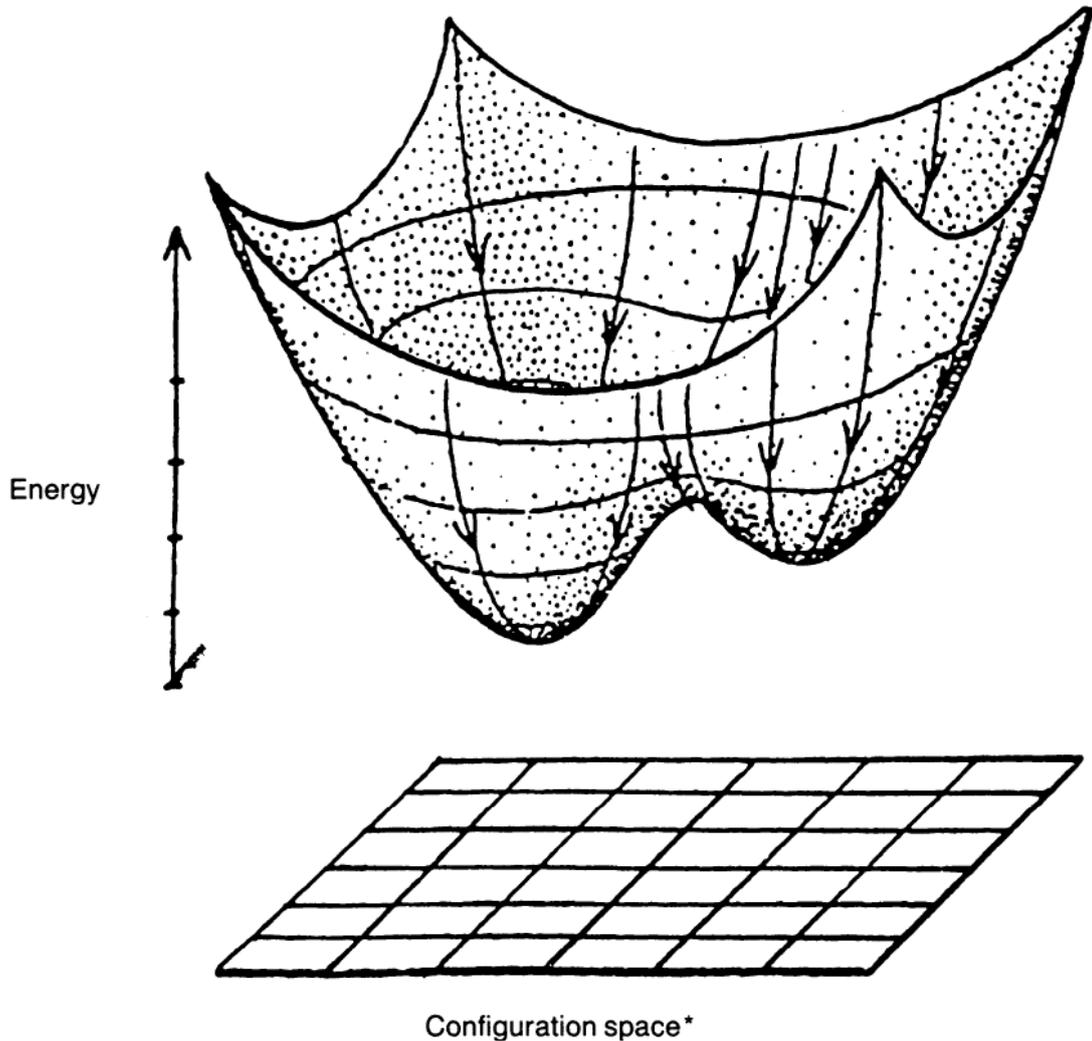


Figura 8: Panorama de energías en modelo AB  
(tomado de Axelrod, [35])

En la Figura 8 podemos ver una representación esquemática del “panorama de energía”, con mínimos locales que corresponden a configuraciones estables. Cuál de ellas es la que se adopta depende de las condiciones iniciales: todas las configuraciones que acaban en un mínimo definen su *cuenca de atracción*. Una consecuencia directa es que no hay ciclos: como cada cambio admisible disminuye la energía, el sistema no puede volver a una configuración previa.

Otra consecuencia es que no puede haber ninguna configuración que satisfaga completamente a todos. Incluso en el mínimo global, la mayoría si no todos los agentes tendrán una frustración no nula. Por ejemplo, si hay tres países todos con antipatía mutua (eg., Israel, Siria, Araba Saudi) cualquier coalición bipolar será frustrante para los enemigos forzados a estar juntos, y análogamente, habrá “amigos” que se encuentren en coaliciones distintas.

La dinámica incremental implica que un agente cambia si disminuye su frustración, pero dada la simetría de las propensiones esto implica que también disminuye la frustración global. Ver demostración en el *Apéndice 1: Frustración global vs local en el modelo AB*

## **Crítica al modelo AB**

En su artículo de 1999 [36] y en el de 1996 [38], Galam identificó inconsistencias fundamentales en el modelo AB, de entre las que destacamos la manera de considerar la frustración: Un sistema frustrado tiene varias configuraciones que minimizan la energía, y por ello no puede estabilizarse, dado que no hay diferencia entre estar en una configuración o en otra. El hecho de que algunas interacciones no sean satisfechas no implica automáticamente frustración (Sin embargo, Axelrod replica en [37] que su definición de frustración no es la frustración como se entiende en mecánica estadística, por ejemplo en el contexto de vidrios de spin). En el modelo AB el desorden sólo se manifiesta en la aparición de dos mínimos de energía. Es lo que se conoce como el modelo Mattis de vidrios de spin, en el que se puede eliminar el desorden con un simple cambio de variables. Galam [36] añade que Axelrod confunde dos modelos asociados a sistemas magnéticos desordenados: el de Mattis (sin frustración) y el de Edwards-Anderson (con frustración), señalando que mientras que el modelo AB corresponde en realidad al de Mattis, todas las conclusiones se refieren a la física de un modelo Edwards-Anderson, o en otras palabras, las conclusiones de AB no pueden extraerse en rigor de su modelo.

## Modelos de Galam

Serge Galam, quien alega en [1] ser el creador de la sociofísica, es prolífico autor de una serie de modelos, alguno de los cuales se esbozan en esta sección.

### Modelo Ising

Esta es la formulación inicial de un modelo de formación de coaliciones por parte de Galam. Después, en artículos posteriores, presentó una serie de refinamientos acercándose más a una descripción adecuada de la realidad.

En la formulación más básica, Galam propone unas propensiones bilaterales  $J_{ij}$  de origen histórico, cultural y económico, tales que:

$$J_{ij} = J_{ji}$$

$J_{ij} > 0$  implica cooperación

$J_{ij} < 0$  implica conflicto

$J_{ij} = 0$  implica indiferencia.

Existen dos coaliciones, A y B, de forma que un estado +1 implica pertenencia a A y un estado -1 pertenencia a B.

El grado de conflicto o cooperación de un agente con todos los demás es

$$E_i = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j \quad (6.1)$$

(siendo  $S_i$  la variable de estado), y el total

$$E(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N S_i E_i \quad (6.2)$$

(con un factor  $1/2$  pues los pares se cuentan dos veces)

Y se llega a una expresión de coste total

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j \quad (6.3)$$

Que es el hamiltoniano de un sistema magnético Ising de enlaces aleatorios.

Partiendo de una configuración inicial dada, la dinámica del sistema está determinada por cambios individuales: un agente cambia si decrece su coste local, de manera que dado un conjunto  $\{J_{ij}\}$  se obtienen los  $\{S_j\}$  minimizando H.

Con esta teoría simple es posible decir qué configuraciones son estables.

Se puede continuar la analogía con el magnetismo representando las interacciones de un agente con los demás por medio de un campo

$$h_i = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j \quad (6.4)$$

De forma que

$$E_j = -S_j h_j \quad (6.5)$$

y

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N E_j \quad (6.6)$$

## Crítica al modelo Ising de Galam

Entre la prolífica producción de modelos distintos por parte de Galam, y aun ciñéndonos exclusivamente a los de formación de coaliciones, hemos experimentado cierta confusión a la hora de categorizarlos y clasificarlos. Por otra parte, en el modelo expuesto –que no descrito formalmente– en el libro de Galam [1], que asociamos al de Ising descrito anteriormente, presenta algunas inconsistencias, detectadas independientemente por el autor de este trabajo y otros [42]. En concreto, aunque dice que no se puede llegar a un mínimo estable, hemos elaborado un programa informático que ejecuta la evolución descrita por Galam y en concreto lo hemos aplicado al ejemplo que se propone en [1] detectando una configuración estable en contra de lo afirmado en [1]. La simulación de dicho ejemplo se expone en el *Apéndice 2: Simulación del modelo de Galam*.

Para apoyar esta objeción, constatamos que en el mundo real sí se alcanzan posiciones de equilibrio, configuraciones más o menos estables que se mantienen mientras no cambian las circunstancias (acoplamientos), y si el éxito de un modelo particular se ha de medir por su habilidad para capturar el comportamiento del mundo real no podemos decir que este modelo, tal como se describe en el texto [1], sea útil para describir el mundo real. En nuestra opinión falta abordar la evolución del sistema, cosa que nos proponemos hacer introduciendo el concepto de temperatura.

## Multimodal

El modelo anterior es bimodal, es decir, solo contempla la existencia de dos coaliciones enfrentadas. Pero en la realidad pueden existir varias, aunque es cierto que estas alianzas múltiples tienden a aliarse entre ellas y actúan como agentes individuales, desembocando al final en dos grupos enfrentados.

Para extender el estudio a este caso y generalizar el modelo bimodal, tenemos en principio varias opciones:

- Modelo de Potts, las variables de estado pueden tomar valores  $1,2,3,\dots,q$  en lugar de simplemente  $+1$  ó  $-1$ . En consecuencia tenemos un grado más de libertad interno
- Modelo de Heisenberg con simetría continua en lugar de discreta. Es decir, las variables de estado son vectores en cualquier dirección, en lugar de arriba o abajo. Por lo demás, la forma del Hamiltoniano es similar a la de Ising, con la salvedad de que se utilizan vectores. Este modelo describe mejor un sistema ferromagnético, pero es muy poco adecuado para su uso en sociofísica.
- Spin XY con simetría planar. Es similar al modelo anterior, pero los spins son vectores unitarios confinados en un plano, aunque siguen residiendo en una malla de dimensión  $d$ . El parámetro de orden es como siempre la magnetización, que ahora tiene dos componentes aunque la dimensionalidad del sistema sea mayor.

Galam, en [1] generaliza el modelo bimodal utilizando variables de Potts de  $q$  estados  $S_i = 1,2,\dots,q$ , tal que en el extremo en el que cada agente forma su propia alianza y  $q = N$ .

Entonces, el paso de bimodal a multimodal equivale a cambiar el producto de las variables de estado por

$$S_i S_j \rightarrow \delta(S_i, S_j)$$

Con lo que la expresión del coste producido por pares de acoplamientos es

$$H_{ij} = -\sum_{i>j}^N G_{ij} \delta(S_i, S_j) = \tag{6.7}$$

- $-G_{ij}$  si  $S_i$  y  $S_j$  están en la misma coalición
- $0$  en otro caso

Donde el acoplamiento  $G_{ij}$  es una variable congelada (que en el modelo bimodal denotábamos por  $J_{ij}$ ), medida cuantitativa de la fuerza del enlace bilateral – o propensión- que es una cantidad positiva si la tendencia es a la cooperación y negativa

en otro caso. Haciendo un paralelismo con el modelo bimodal, allí podía ser  $\pm J_{ij}$  y aquí es  $-G_{ij}$  ó 0.

El aumento en el número de estados (posibles coaliciones) permite reducir la *energía*, como en el ejemplo siguiente:

Supongamos que tenemos tres agentes, tales que  $J_{12} = J_3 = J_{23} = -1$ :

- Con una coalición el mínimo posible es  $E=0$
- Con dos coaliciones el mínimo es -2
- Con tres coaliciones el mínimo es -3

Sin detallar los parámetros este modelo aporta poca información. La clave está en determinar los acoplamientos (propensiones)  $G_{ij}$  en cada caso de aplicación práctica.

Como ejemplo, si quisiéramos modelizar el caso de la exYugoslavia definiríamos los siguientes acoplamientos entre pares de entidades:

$$G_{ij} = \sum_{k,l}^8 q_{ik} q_{jl} w_{kl} \quad (6.8)$$

Donde

- El sumatorio se extiende a los 8 grupos étnicos<sup>14</sup>
- $q_{ik}$  es el porcentaje del grupo étnico k en la entidad i
- $w_{kl}$  es la propensión entre los grupos k y l, tal que si  $k = l$ ,  $w_{kk} = 1$ . Si  $k \neq l$ ,  $w_{kl}$  se calcula como la suma de dos términos, por ejemplo  $w_{kl} = w_{religion}(k,l) + w_{idioma}(k,l)$ . Así pues, el factor religioso es positivo entre pares de grupos étnicos de la misma religión, el de lenguaje entre los serbo-croatas

Galam [26] juega con los parámetros w variándolos numéricamente y examinando los mínimos energéticos, de manera que obtienen los siguientes resultados:

- En el 42.4% de los casos se predice una federación de Serbia, Croacia, Montenegro y Voivodina con los demás independientes
- En el 12.1% de los casos, Serbia, Montenegro y Voivodina con los demás independientes
- En el 10.9% de los casos sólo se federan Serbia y Voivodina

---

<sup>14</sup> Serbo-croatas: serbios, croatas, musulmanes y montenegrinos; Otros eslavos: macedonios y eslovenos, y no eslavos: albanos y húngaros

## Modelo de Vidrios de spin

Los vidrios de spin [41,43] han inspirado multitud de modelos en diversas áreas de la física basados en diferentes implementaciones de *desorden congelado*. En general, pueden ser de dos tipos:

- De enlaces aleatorios (*random bonds*), con efectos de frustración y degeneración infinita del estado base
- De enlaces entre sitios aleatorios (*random site bonds*), sin efectos de frustración.

El modelo de Galam que vamos a considerar *en este apartado* superpone uno de enlaces aleatorios, uno de enlaces entre sitios aleatorios (modelo de Mattis) y uno de campo aleatorio.

En esta implementación existen enlaces históricos forjados con el tiempo, y se añaden *superenlaces* transitorios que neutralizan algunos de los que crean inestabilidad. Los enlaces históricos  $G_{ij}$  son variables aleatorias congeladas (*quenched*). Esto refleja el hecho de que el intercambio con los demás miembros de una alianza reporta beneficios que pueden superar a los generados por relaciones locales.

Se parte de  $N$  agentes y dos coaliciones, A y B. Cada agente tiene un estado  $S_i = \pm 1$  con  $i=1..N$ , tal que  $S_i = +1$  si  $i \in A$  y  $S_i = -1$  si  $i \in B$ .

Cada agente tiene una tendencia natural de atracción/repulsión hacia las coaliciones determinada por intereses culturales, políticos, históricos, etc., en el caso de coaliciones entre países, por aficiones, cultura, raza, etc., en el caso de personas, y por factores tales como afinidad tecnológica e historia previa cuando se trata de empresas:

- $\varepsilon_i = +1$  si  $i$  tiene tendencia a asociarse a A
- $\varepsilon_i = -1$  si  $i$  tiene tendencia a asociarse a B
- $\varepsilon_i = 0$  si  $i$  no tiene ninguna predisposición

Las  $\varepsilon_i$  son variables templadas (*annealed*).

Entonces, una vez que los agentes se unen a una de las alianzas, se establecen nuevas cooperaciones entre los miembros de la misma, y nuevas competiciones con miembros de alianzas diferentes.

Siendo el acoplamiento entre dos agentes  $J_{ij} > 0$ , definimos el acoplamiento efectivo como  $J_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$ , que puede ser  $>0$  o  $<0$  dependiendo de si colaboran (una alianza) o

compiten (distinta alianza). Las constantes  $\{J_{ij}\}$  son dadas, encapsulan el conocimiento del sistema real que se estudia.

En consecuencia, se crea una propensión  $J_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_jS_iS_j$  adicional a la histórica  $G_{ij}$  que sí puede cambiar en el tiempo.

El coste extendido viene dado por:

$$H_{ij} = (G_{ij} + \varepsilon_i\varepsilon_jJ_{ij})S_iS_j \quad (6.9)$$

En lugar de solo  $G_{ij}S_iS_j$ .

Para evaluar el coste o beneficio de la presión asociada a una alineación (eg., económica, militar) y el tamaño o importancia de un agente, se añade el término  $\beta_i h_i S_i$ , donde  $h_i$  es un campo local positivo que tiene en cuenta el tamaño y/o la importancia de un agente y

- $\beta_i = +1$  favorece A
- $\beta_i = -1$  favorece B
- $\beta_i = 0$  no favorece ninguna en particular

De manera que llegamos finalmente a una cantidad que en este contexto juega el papel del hamiltoniano:

$$H_{ij} = (G_{ij} + \varepsilon_i\varepsilon_jJ_{ij})S_iS_j - \beta_i h_i S_i$$

$$H = -\sum_{i>j}^N [G_{ij} + \varepsilon_i\varepsilon_jJ_{ij}]S_iS_j - \sum_{i=1}^N \beta_i h_i S_i \quad (6.10)$$

Siendo el segundo término en la expresión anterior el que corresponde al componente de enlace aleatorio.

La dinámica a temperatura cero, tal como considera Galam, es simple: un agente cambia de coalición si esto decrece su coste local, y dados  $\{J_{ij}\}$  se obtienen  $\{S_i\}$  minimizando H.

Si quisiéramos considerar temperatura distinta de cero, como cuando un agente asume riesgos y elige la coalición asociada con  $S_i = -1$  aunque su campo local sea  $h_i > 0$  habría que minimizar entonces la energía libre  $F = U - TS$  y entonces cabría esperar cambios simultáneos de alianzas. No obstante, Galam no profundiza más en este aspecto.

## **Parte II. Propuesta**

## Substrato

En nuestro modelo, consideramos que los agentes residen en una red Watts-Strogatz, que se utiliza por consiguiente para describir la red substrato. Tiene varias características deseables:

- A diferencia de los modelos de grafos aleatorios tipo Erdős-Renyi es capaz de producir la característica de clustering, necesaria para efectivamente describir una red *Small World*, a la vez que una distancia media corta entre nodos característica de la distancia efectivamente corta entre los agentes sociofísicos en un mundo bien conectado.
- Incluye de forma inherente el concepto de vecindad directa (eg., relación directa tipo familiar entre personas, frontera común en el caso de países) así como otro tipo de vecindad no geográfica pero no menos directa (eg., matrimonios, tratados especiales de cooperación o declaración de hostilidades) por medio de los atajos

## Análisis de Campo Medio

La aproximación de campo medio implica que distribuciones aleatorias de cantidades se representan por sus promedios. Esta aproximación es exacta en el límite de sistemas grandes para una red *Small World*. [18]

Los efectos del tamaño finito sobre la transición de primer orden dependen del volumen del sistema, en general  $L^d$ , en nuestro caso N. En este trabajo no vamos a abordar la región de grandes fluctuaciones, nos quedaremos en el ámbito de validez de la aproximación de campo medio, pero hemos de tener esto en cuenta en la simulación, si se construye un escenario con pocos agentes.

Hemos visto anteriormente (sección *Modelos de Ising en redes complejas*) un análisis de campo medio para grafos totalmente conectados, y una aproximación para redes diluidas, la annealed network approximation, aplicados a un modelo Ising. Vamos a seguir ahora el mismo procedimiento con un modelo Blume-Capel.

Los nodos<sup>15</sup> cambian de estado (spin) más frecuentemente cuando la temperatura es mayor. Definimos la magnetización de un spin como el valor medio del mismo:

$$\langle S_i \rangle = m_i$$

---

<sup>15</sup> En el contexto de redes complejas se utiliza comúnmente la terminología “nodo” que en este trabajo tiene el mismo significado que “sitio” utilizada preferentemente en el contexto de sistemas magnéticos

En un grafo totalmente conectado de  $N$  nodos, con  $N$  grande se tiene que  $|m_i(T)| < 1$  a una temperatura dada. Para obtener  $m_i(t)$  recurrimos a la aproximación de campo medio. Partimos del Hamiltoniano del modelo Blume-Emery-Griffith con la simplificación de Blume-Capel<sup>16</sup> (2.1)

$$H = -\sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j + \Delta \sum_i S_i^2 \quad (7.1)$$

Donde  $J_{ij}$  son las constantes de acoplamiento entre el nodo  $i$  y sus vecinos  $j$ ,  $m_j$  la magnetización de un nodo  $j$  y  $\Delta$  el término de anisotropía.

Si en la expresión anterior nos quedamos con los términos relativos a un nodo  $i$  con spin  $S_i$  nos queda la energía del nodo

$$E_i = H(S_i) = -S_i \left( \sum_j J_{ij} S_j \right) + \Delta S_i^2 \approx -S_i \sum_j J_{ij} m_j + \Delta S_i^2 \quad (7.2)$$

La aproximación de la derecha es precisamente la aproximación de campo medio, exacta cuando el número de vecinos inmediatos es infinito.

Entonces tenemos,

$$m_i = \langle S_i \rangle = \frac{\sum_{\{S\}} S_i P(S_i)}{\sum_{\{S\}} \exp(-\beta E_i)} = \frac{e^{-\beta E_+} - e^{-\beta E_-}}{e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_-}}$$

$$m_i = \frac{\exp\left\{\beta \left[ \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) - \Delta \right]\right\} - \exp\left\{-\beta \left[ \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) + \Delta \right]\right\}}{\exp\left\{\beta \left[ \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) - \Delta \right]\right\} + \exp\left\{-\beta \left[ \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) + \Delta \right]\right\} + 1}$$

$$= \frac{\exp\left\{\beta \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j)\right\} - \exp\left\{-\beta \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j)\right\}}{\exp\left\{\beta \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j)\right\} + \exp\left\{-\beta \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j)\right\} + \exp(\beta \Delta)}$$

Y finalmente

<sup>16</sup> No confundir con el Hamiltoniano del sistema

$$m_i = \frac{2sh \left[ \beta \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) \right]}{e^{\beta \Delta} + 2ch \left[ \beta \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) \right]} \quad (7.3)$$

Véase la similitud formal con (2.10), la magnetización obtenida en el modelo Blume-Capel

Con respecto al parámetro de orden asociado a la neutralidad

$$\begin{aligned} 1-x = \langle S_i^2 \rangle &= \frac{\sum_{\{S\}} S_i^2 P(S_i)}{\sum_{\{S\}} \exp(-\beta E_i)} = \frac{e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_-}}{e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_-}} = \\ &= \frac{\exp \left\{ \beta \left[ \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) - \Delta \right] \right\} + \exp \left\{ -\beta \left[ \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) + \Delta \right] \right\}}{\exp \left\{ \beta \left[ \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) - \Delta \right] \right\} + \exp \left\{ -\beta \left[ \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) + \Delta \right] \right\} + 1} \end{aligned}$$

Y finalmente

$$1-x = \frac{2ch \left[ \beta \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) \right]}{e^{\beta \Delta} + 2ch \left[ \beta \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) \right]} \quad (7.4)$$

Nótese también la similitud con 2.11.

Utilizamos ahora la Annealed Network Approximation (ver sección *Modelos de Ising en redes complejas*). Para ello empezamos por hacer  $J_{ij} = \frac{J}{N}$  y considerar que nuestro modelo reside en un grafo diluido no correlacionado con una secuencia de grados  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , y hacemos una aproximación de red templada<sup>17</sup> (*annealed*) [26][29] que tiene en cuenta la heterogeneidad de una red compleja y da muy buenos resultados en la región crítica con redes diluidas, como es nuestro caso. Esta aproximación consiste en sustituir la red original por un grafo ponderado y totalmente conexo con pesos de

---

<sup>17</sup> Otro posible enfoque consiste en usar la matriz de transferencia [50]

enlaces  $\frac{q_i q_j}{\langle q \rangle N}$ , o dicho de otra forma, por un substrato en el que la suma de acoplamientos para cada nodo tiene el mismo valor  $Jq_i$  que el grafo original.

En esta red, la ecuación 7.3 se convierte en

$$m_i = \frac{2sh \left[ \frac{\beta J q_i}{\langle q \rangle N} \sum_j q_j m_j \right]}{e^{\beta \Delta} + 2ch \left[ \frac{\beta J q_i}{\langle q \rangle N} \sum_j q_j m_j \right]} = \frac{2sh \beta J q_i M}{e^{\beta \Delta} + 2ch [\beta J q_i M]} \quad (7.5)$$

Donde el momento magnético ponderado M, definido como

$$M = \sum_j \frac{q_j M_j}{\langle q \rangle N} \quad (7.6)$$

es una solución de la ecuación siguiente:

$$M = \sum_q \frac{q P(q)}{\langle q \rangle} \frac{2sh \beta J q M}{\exp(\beta \Delta) + 2ch \beta J q M} \quad (7.7)$$

Con  $P(q)$  la distribución de grados de la red aleatoria original. Es precisamente el momento magnético ponderado, no el momento magnético, el que juega el papel de primer parámetro de orden en nuestro problema.

Procedemos análogamente con el otro parámetro de orden usando 7.4:

$$1 - x = \frac{2ch \left[ \beta \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) \right]}{e^{\beta \Delta} + 2ch \left[ \beta \sum_{i \neq j} (J_{ij} m_j) \right]} = \frac{2ch \left[ \frac{\beta J q_i}{\langle q \rangle N} \sum_j q_j m_j \right]}{e^{\beta \Delta} + 2ch \left[ \frac{\beta J q_i}{\langle q \rangle N} \sum_j q_j m_j \right]} = \frac{2ch \beta J q_i M}{e^{\beta \Delta} + 2ch [\beta J q_i M]}$$

Con la misma definición de M (7.6)

Vamos a introducir ahora las siguientes simplificaciones:

1. Sabemos que la distribución de grados tiene un corte. Está lejos de ser una *distribución de cola larga*. Gráficamente, podemos verlo en la Figura 9, obtenidas en la simulación al generar el substrato con diferentes combinaciones de parámetros de control.

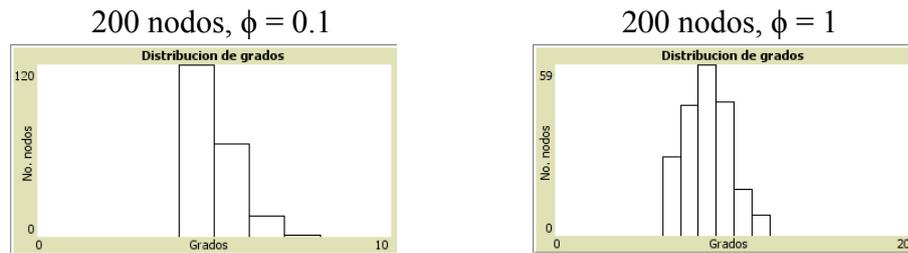


Figura 9: distribución de grados en una red WS.

Diversos ejemplos de red generada con nuestra simulación para valores extremos de la probabilidad de reconexión, utilizando en ambos casos la variante con atajos, que tiene una cola más larga. En el peor de los casos se ve que podemos limitar cómodamente el número de sumandos en nuestra expresión de  $M$ .

En consecuencia, vamos a limitar a 20 términos los términos que aparecen en la expresión anterior para el momento magnético ponderado  $M$ .

2. Las constantes de acoplamiento  $\{Jq_i\}$ , que encapsulan factores tales como el tamaño o importancia de los actores están determinados por la situación real a estudiar. Para el tratamiento informático vamos a suponerlas aleatorias con una distribución normal (cuyo valor esperado y desviación típica serán definibles por el usuario en la simulación). En el tratamiento analítico utilizaremos el valor esperado  $J$ .

## Grafo aleatorio

Uno de los inconvenientes del modelo Watts-Strogatz es la distribución poco realista de grados. Dado que fuera del régimen de malla regular (situación más cercana al contexto real que pretendemos estudiar) esta distribución se aproxima a una de Poisson, en este apartado vamos a utilizarla.

Recordemos que el grado medio puede ser 2 ó 4 en nuestra simulación según la elección del número de vecinos inmediatos que se haga para generar la red WS substrato.

Con las simplificaciones anteriores, el momento magnético ponderado, definido como

$M = \sum_j \frac{q_j M_j}{\langle q \rangle N}$ , es una solución de la ecuación siguiente:

$$M = \sum_{q=1}^{10} \frac{q}{\langle q \rangle} e^{-\langle q \rangle} \langle q \rangle^q \frac{1}{q!} \frac{2sh\beta JqM}{\exp(\beta\Delta) + 2ch\beta JqM} \quad (7.8)$$

Con  $\langle q \rangle = 4$  tenemos:

$$M = \sum_{q=1}^{10} q e^{-4} 4^{q-1} \frac{1}{q!} \frac{2sh\beta JqM}{\exp(\beta\Delta) + 2ch\beta JqM} \quad (7.9)$$

Siendo J el valor esperado de la distribución de las constantes de acoplamiento

Análogamente, para el parámetro de orden que mide la neutralidad (ver sección *Modelo Blume-Capel*), tenemos

$$1 - x = \sum_{q=1}^{10} q e^{-4} 4^{q-1} \frac{1}{q!} \frac{2ch\beta JqM}{\exp(\beta\Delta) + 2ch\beta JqM} \quad (7.10)$$

Si procedemos de forma similar a como se obtuvo (2.13) es decir, igualando pendientes en el origen, obtenemos la temperatura crítica de la misma manera:

$$\frac{1}{\beta_c} = \frac{9.81J}{e^{\beta_c \Delta} + 2} \quad (7.11.a)$$

Con  $\langle q \rangle = 2$

$$\frac{1}{\beta_c} = \frac{5.99J}{e^{\beta_c \Delta} + 2} \quad (7.11.b)$$

Compárese con (2.13). Sobre un sustrato de red tenemos una temperatura crítica mayor, aumentando con el grado medio.

En las Figuras 10(a)-10(f) se representa la magnetización con gráficas obtenidas para diferentes valores de  $\Delta$  y  $J$ , utilizando para  $J$  el valor esperado de una distribución normal de las constantes de acoplamiento, que recordemos son variables aleatorias congeladas.

Se ve claramente en las Figuras 10(d) y 10(e) que  $M = 0$  es siempre una solución, y que hay un valor de corte de  $\Delta$  para el cual es la única. Con esta distribución, la probabilidad de reconexión baja hace también que  $M = 0$  sea la única solución para cualquier valor de  $\Delta$  y de la temperatura. Esto puede interpretarse como que una propensión demasiado elevada a la neutralidad impide la decisión colectiva o la preponderancia de una de las opciones.

Para valores inferiores de  $\Delta$  el comportamiento es el típico de un sistema magnético, existe un cierto valor de  $\beta$  tal que solo admite la solución desordenada  $M = 0$ , mientras que para temperaturas más bajas admite más soluciones. Es decir, si la agitación es grande, sólo es posible el desorden.

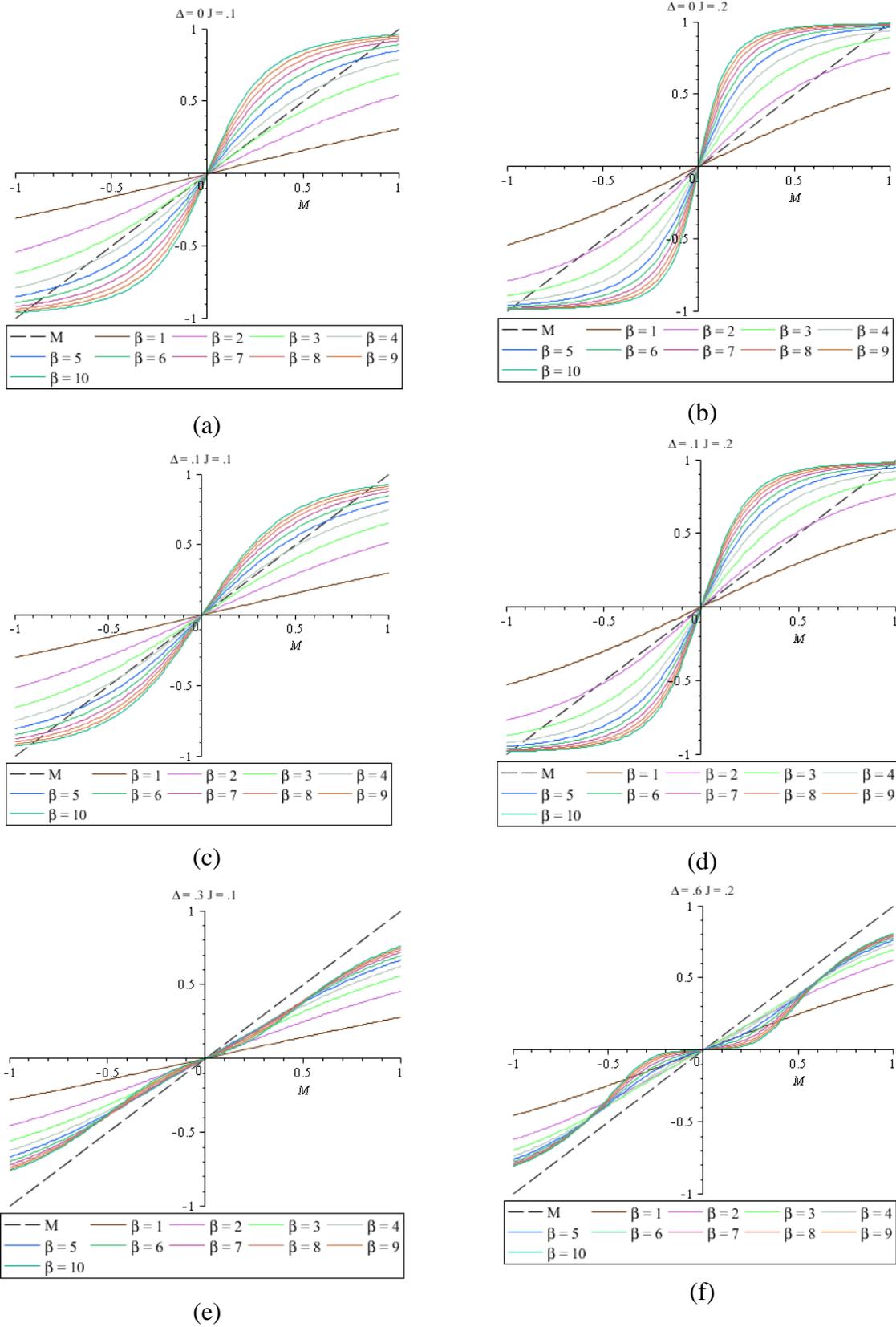
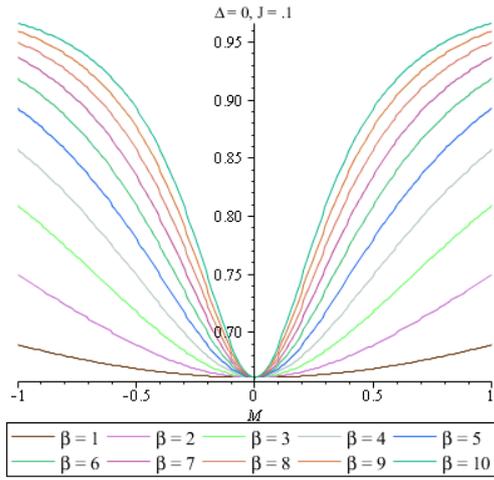


Figura 10: Comportamiento de la magnetización con distribución Poisson. Se representa la magnetización para diversos valores de  $\Delta$  y  $J$ .

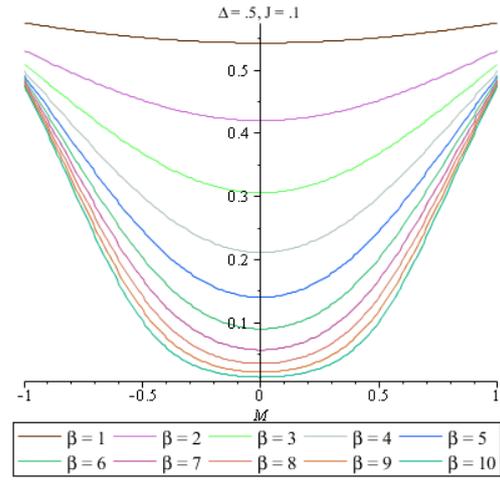
Veamos ahora el comportamiento del parámetro relacionado con la proporción de agentes neutrales. En las Figuras 11(a)-11(f) puede verse que con  $\Delta = 0$ , todas las soluciones de  $1-x$  para  $M = 0$  son nulas a cualquier temperatura, es decir, el desorden comporta únicamente agentes no neutrales. Esto corresponde al desacuerdo máximo, sin ningún agente dispuesto a posicionarse de forma equidistante entre las opciones, como era de esperar si el parámetro asociado a la predisposición por neutralidad es nulo. Lo mismo puede verse en la Figura 12 variando  $\beta$  de manera continua.

Por el contrario, para  $\Delta$  distinta de cero, a temperaturas altas hay una componente de neutrales no nula con magnetización nula. Los neutrales constituyen una parte apreciable.

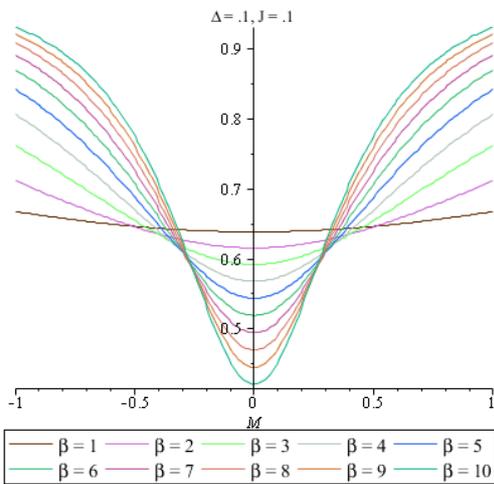
Es interesante ver -Figuras 11(d) y 11(f)- que para valores altos de  $\Delta$  -si  $J$  no es muy grande- la proporción de neutrales permanece aproximadamente constante en todo el rango de valores de magnetización. O sea, la proporción de neutrales es independiente del balance entre las otras opciones. Estos neutrales corresponden a abstención: en política tiene un sentido claro, en otros entornos puede ser falta de interés (por ejemplo, hay gente que simplemente no tiene interés en adquirir una tableta). La abstención en España desde 1933 hasta ahora se ha mantenido entre un 20% y un 30%. Esto parece indicar que el valor correspondiente de  $\Delta$  es alto.



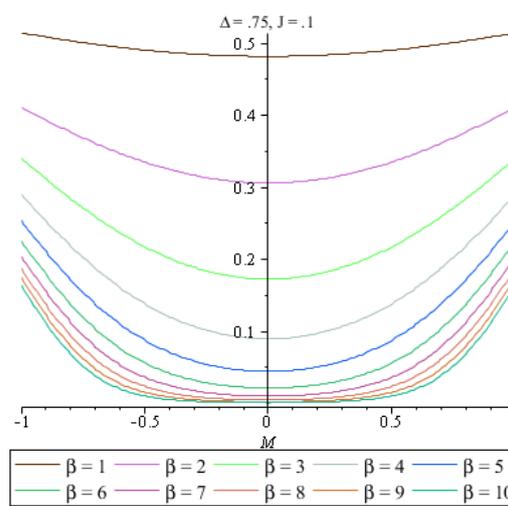
(a)



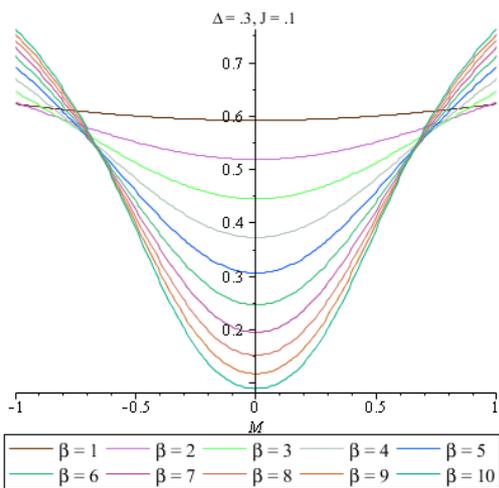
(b)



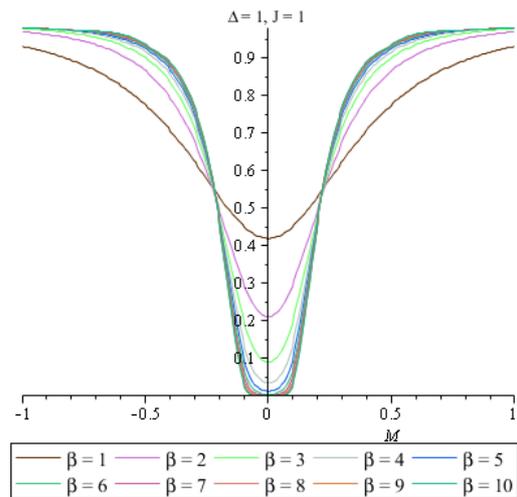
(c)



(d)

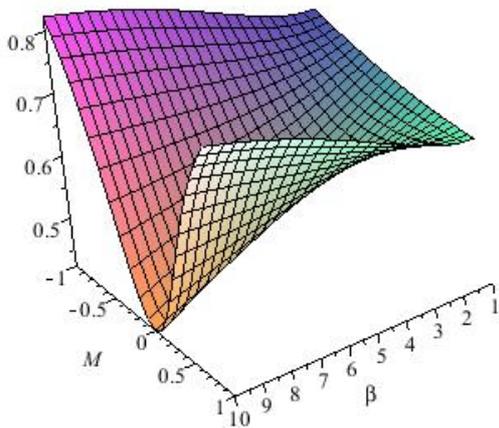


(e)

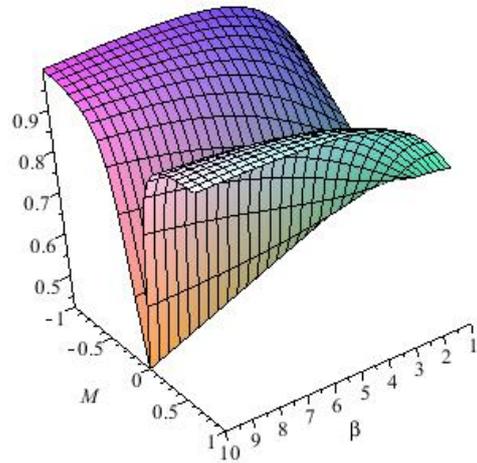


(f)

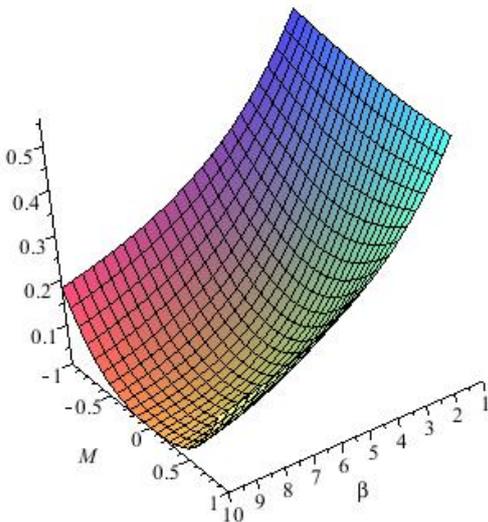
Figura 11: Neutralidad (1-x) para distintos valores de J y  $\Delta$



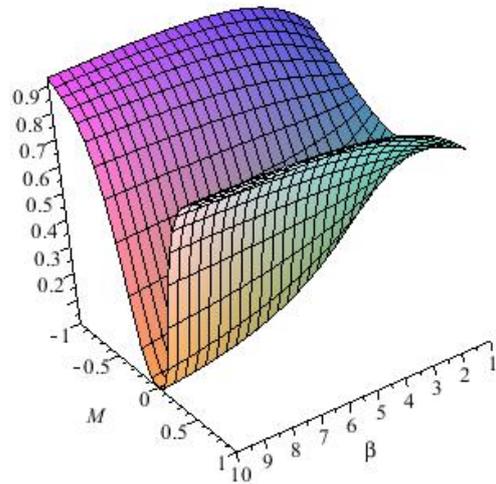
$\Delta = 0.1, J = 0.1$



$\Delta = 0.1, J = 0.5$



$\Delta = 0.5, J = 0.1$



$\Delta = 0.5, J = 0.5$

Figura 12. Neutralidad (1-x) en función de M y  $\beta$  para distintos valores de  $\Delta$  y J

## Watts-Strogatz con reconexiones

La distribución de Watt-Strogatz en el rango medio de la probabilidad de reconexión es:

$$P(q) = \sum_{n=0}^{\min(q-z,z)} \binom{z}{n} (1-\phi)^n \phi^{z-n} \frac{(\phi z)^{q-z-n}}{(q-z-n)!} \exp(-\phi z) \quad (7.12)$$

Y como vamos a trabajar con  $z = 3$ , los parámetros de orden con esta distribución de grados son:

$$M = \sum_{q=3}^{20} \left\{ \frac{q}{6} \left[ \sum_{n=0}^{\min(q-3,3)} \binom{3}{n} (1-\phi)^n \phi^{3-n} \frac{(3\phi)^{q-3-n}}{(q-3-n)!} \exp(-3\phi) \right] \cdot \left[ \frac{2sh\beta JqM}{\exp(\beta\Delta) + 2ch\beta JqM} \right] \right\}$$

$$1-x = \sum_{q=3}^{20} \left\{ \frac{q}{6} \left[ \sum_{n=0}^{\min(q-3,3)} \binom{3}{n} (1-\phi)^n \phi^{3-n} \frac{(3\phi)^{q-3-n}}{(q-3-n)!} \exp(-3\phi) \right] \cdot \left[ \frac{2ch\beta JqM}{\exp(\beta\Delta) + 2ch\beta JqM} \right] \right\} \quad (7.13)$$

Si procedemos de forma similar a como se obtuvo (2.13) es decir, igualando pendientes en el origen, obtenemos para esta distribución de conectividad la temperatura crítica:

$$\frac{C\beta_c J}{e^{\beta_c \Delta} + 2} = 1 \quad (7.14)$$

Siendo  $C$  una constante que depende de la probabilidad de reconexión  $\phi$  según una ley potencial aproximada

$$C = C_0 \phi^\gamma \quad (7.15)$$

Numéricamente se obtiene  $C_0 = 5.9, \gamma = 1.82$ .

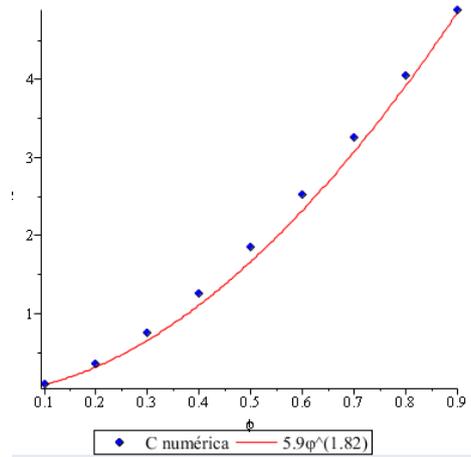
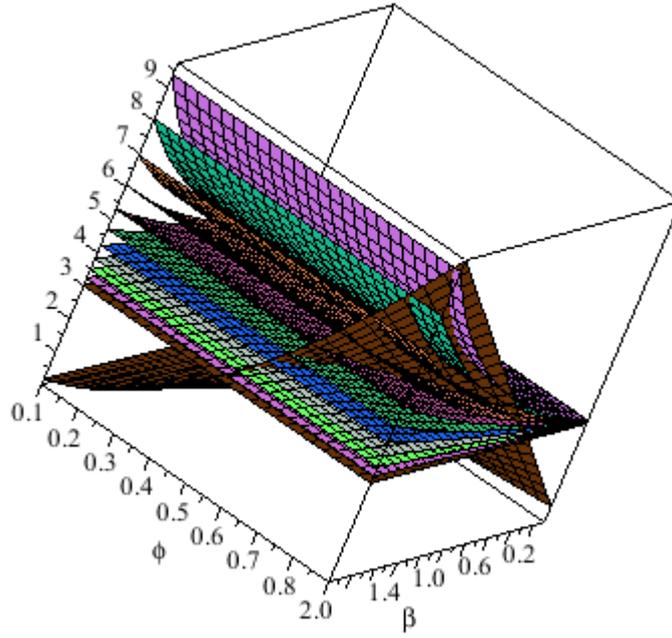
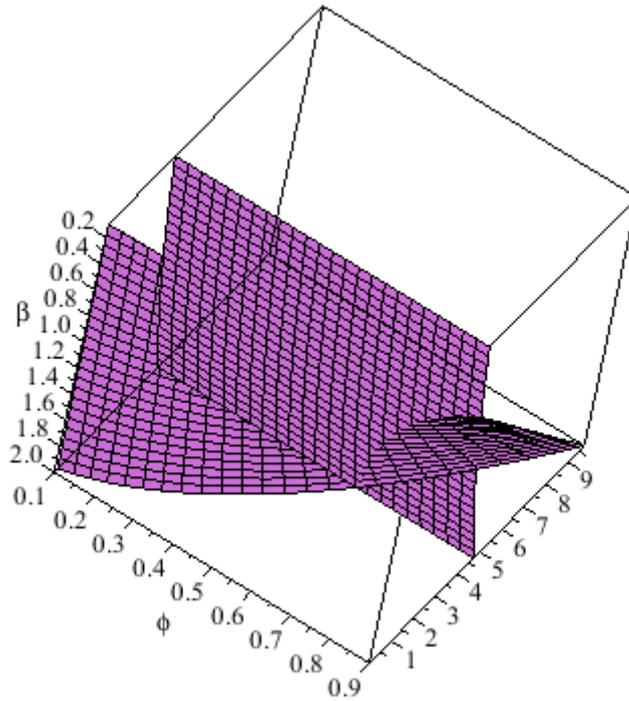


Figura 13. Constante C vs probabilidad de reconexión

Como en el caso de Poisson,  $M = 0$  es siempre una solución, y hay un valor de corte de  $\Delta$  para el cual es la única. Para valores grandes de  $\Delta$  la función exponencial es demasiado abrupta y la ecuación 7.14 no admite soluciones reales mientras que para valores pequeños de  $\Delta$  hay una zona con soluciones reales, más amplia cuanto menor sea  $\Delta$ , y entonces existen temperaturas bajas con magnetización no nula (en la figura 14 se representa la intersección de las superficies del numerador y denominador de 7.14). Para probabilidad de reconexión baja la única solución para la magnetización es 0 si  $J$  tiene valores en torno a 1. Dado que van multiplicadas, obviamente una  $J$  muy grande puede inducir soluciones no nulas, pero no sería realista.



(a)



(b)

Figura 14. Existencia de soluciones para la temperatura crítica

La intersección de las superficies engendradas por el numerador y denominador de 7.15 definen el campo de existencia de una solución para  $\beta$ .

(a) Para  $0.1 \leq \Delta \leq 1$ .

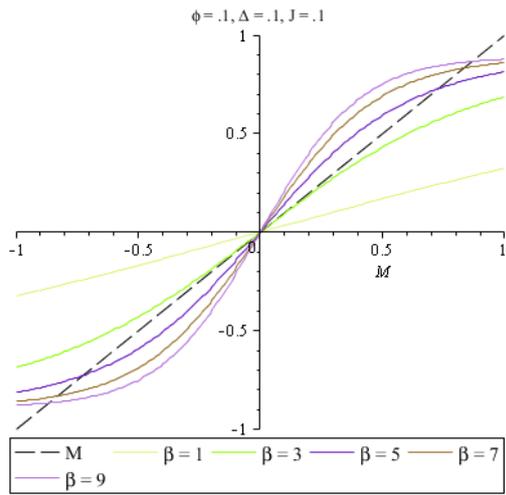
(b)  $\Delta = 0.5$

La existencia de soluciones no nulas para la magnetización puede verse también en las Figuras 15(a)-15(f), que comparan la recta de pendiente unitaria con el lado derecho de la ecuación 7.13 (1) solo hay intersección aparte del origen para determinados valores; es decir,  $M = 0$  es siempre una solución, y hay un valor de corte de  $\Delta$  para el cual es la única a cualquier temperatura. Con esta distribución, la probabilidad de reconexión alta hace también que  $M = 0$  sea la única solución para cualquier valor de  $\Delta$  y de la temperatura. Esto puede verse en la Figura 17, en la que se varía  $\beta$  de manera continua.

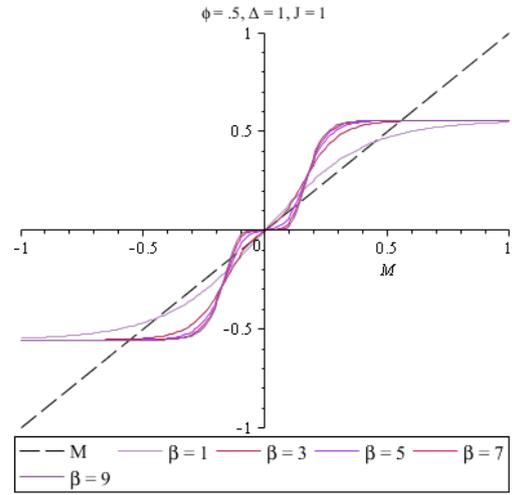
Para valores inferiores de  $\Delta$  existe un cierto valor de  $\beta$  tal que solo admite la solución desordenada  $M = 0$ , mientras que para temperaturas más bajas admite más soluciones. Si la temperatura es alta,  $\Delta$  condiciona la existencia de soluciones ordenadas, que en términos sociofísicos significa el predominio de una de las opciones, o quizás una decisión colectiva.

Respecto al parámetro relacionado con la proporción de agentes neutrales, en las figuras 16(a)-16(f) puede verse que con  $\Delta = 0$ , todas las soluciones de  $1-x$  para  $M = 0$  son nulas a cualquier temperatura, es decir, el desorden comporta únicamente agentes no neutrales. Para  $\Delta$  distinta de cero, a temperaturas altas hay una componente de neutrales no nula con magnetización nula. Es decir, la importancia de los neutrales es comparable a la de cualquiera de las otras opciones.

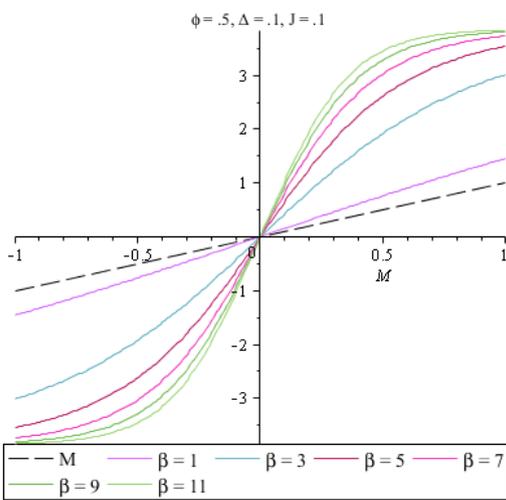
La invariancia frente a  $M$  que observábamos en el grafo aleatorio para valores grandes de  $\Delta$  –ver Figuras 11(d) y 11(f) y compararlas con 16(c) y 16(e)- no se observa en este modelo salvo a temperaturas muy altas y si  $\Delta \gg J$ , y en cambio muestra un pico en  $M = 0$  (recordemos que las figuras representan  $1 - x$ ). O sea, la proporción de neutrales sí depende del balance entre las otras opciones, a polarización más alta, menor neutralidad.



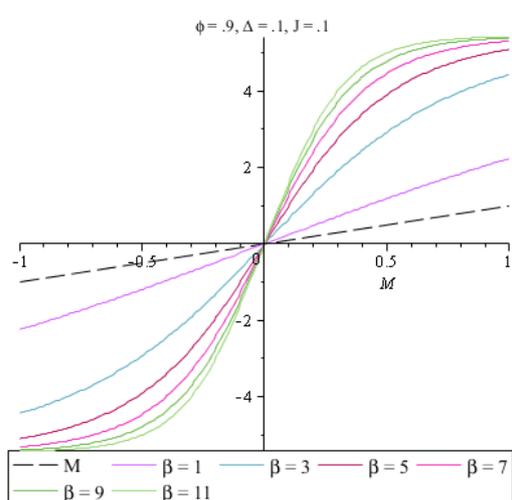
(a)



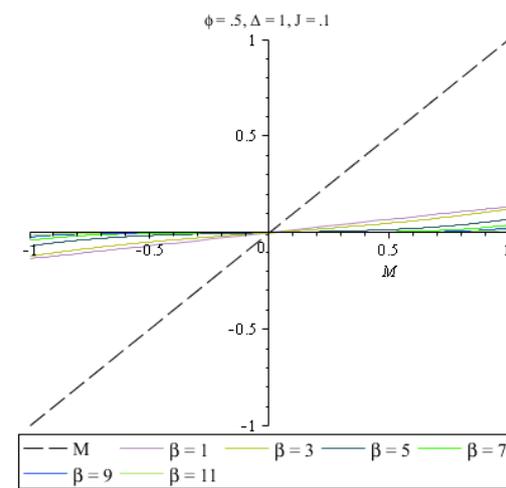
(b)



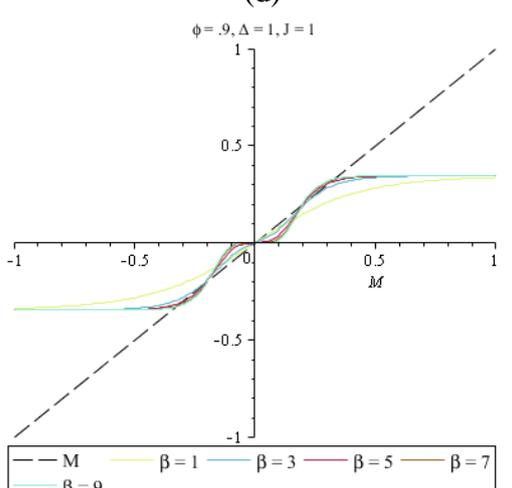
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 15: Magnetización con distribución WS con reconexiones

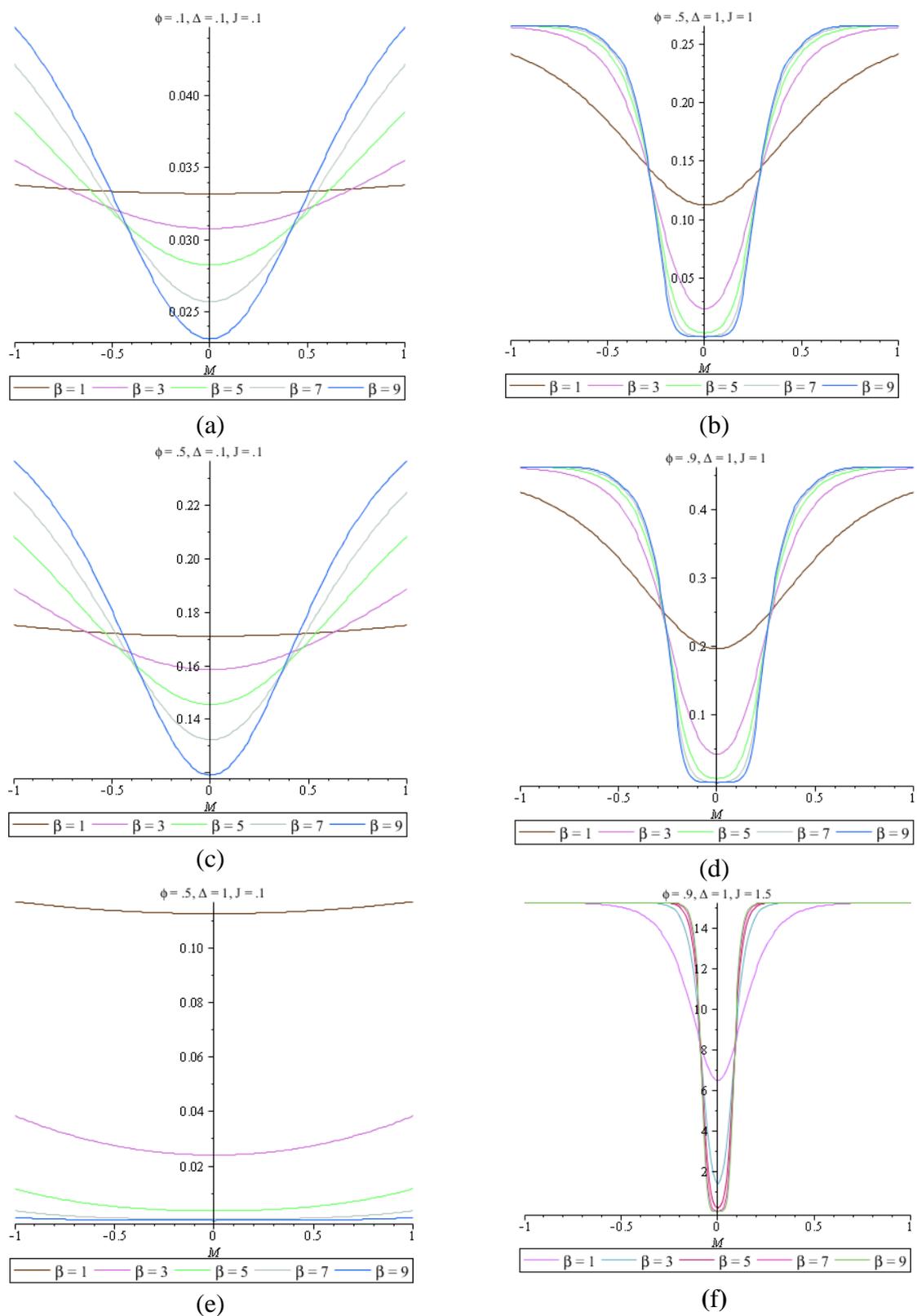
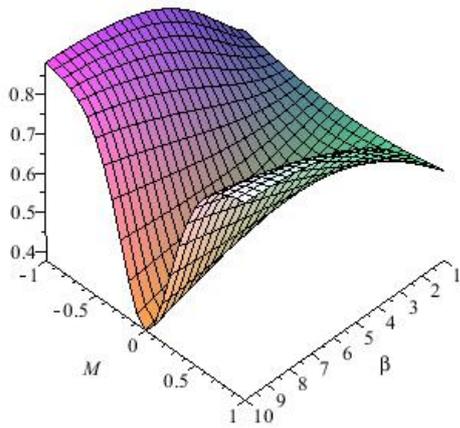
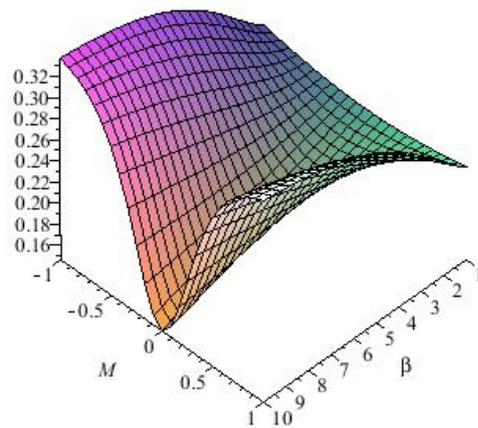


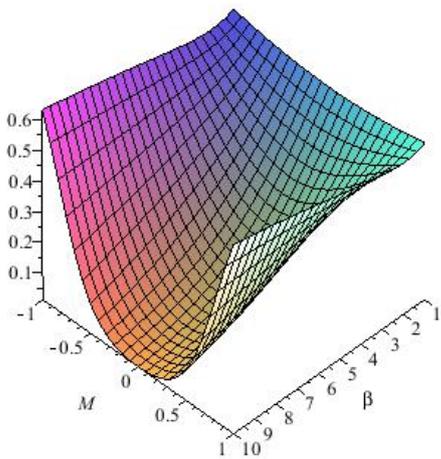
Figura 16: Comportamiento del P.O. relacionado con la neutralidad para distintos valores de  $J$ ,  $\Delta$  y  $\phi$



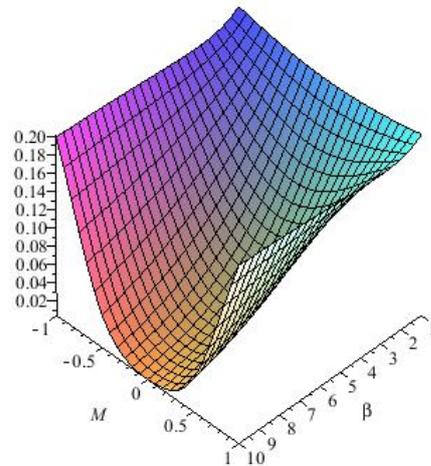
(a)  $\Delta = 0.1, J = 0.1, \phi = 0.1$



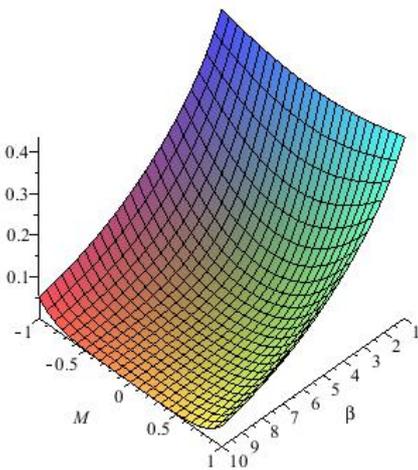
(b)  $\Delta = 0.1, J = 0.1, \phi = 0.9$



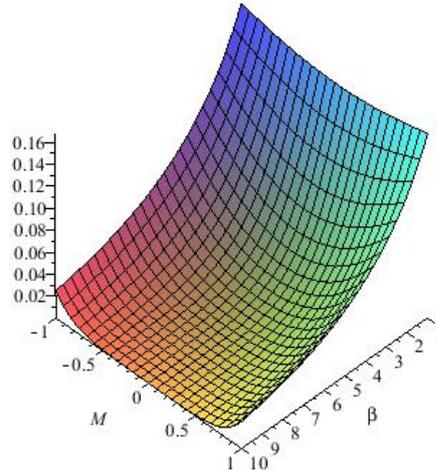
(c)  $\Delta = 0.5, J = 0.1, \phi = 0.1$



(d)  $\Delta = 0.5, J = 0.1, \phi = 0.9$



(e)  $\Delta = 0.9, J = 0.1, \phi = 0.1$



(f)  $\Delta = 0.9, J = 0.1, \phi = 0.9$

Figura 17. Neutralidad  $(1-x)$  en función de  $M$  y  $\beta$  para distintos valores de  $\Delta$  y  $J$ . Nótese la disminución de la neutralidad con el aumento de la probabilidad de reconexión.

## Watts-Strogatz con atajos

Recordemos que la distribución de conectividades en este caso es:

$$\begin{aligned}
 P(q) &= e^{-c\phi} \frac{(c\phi)^{q-c}}{(q-c)!} & q \geq c \\
 P(q) &= 0 & q < c
 \end{aligned}
 \tag{7.16}$$

Siendo  $c$  el grado inicial y  $\langle q \rangle = c + \phi c$  el grado medio. Aplicando la aproximación de red templada, los parámetros de orden son

$$M = \sum_{q=6}^{20} \left\{ \frac{q}{\langle q \rangle} \left[ e^{-c\phi} \frac{(c\phi)^{q-c}}{(q-c)!} \right] \cdot \left[ \frac{2sh\beta JqM}{\exp(\beta\Delta) + 2ch\beta JqM} \right] \right\}
 \tag{7.17}$$

$$1 - x = \sum_{q=6}^{20} \left\{ \frac{q}{\langle q \rangle} \left[ e^{-c\phi} \frac{(c\phi)^{q-c}}{(q-c)!} \right] \cdot \left[ \frac{2ch\beta JqM}{\exp(\beta\Delta) + 2ch\beta JqM} \right] \right\}
 \tag{7.18}$$

Si procedemos de forma similar a como se obtuvo (2.13) es decir, igualando pendientes en el origen, obtenemos para esta distribución de conectividad la temperatura crítica:

$$\frac{C\beta_c J}{e^{\beta_c \Delta} + 2} = 1
 \tag{7.19}$$

Siendo  $C$  una constante que depende de la probabilidad de reconexión  $\phi$  según una dependencia lineal aproximada

$$C = C_0 + \alpha\phi
 \tag{7.20}$$

Numéricamente se obtiene  $C_0 = 12.1, \alpha = 12.9$ .

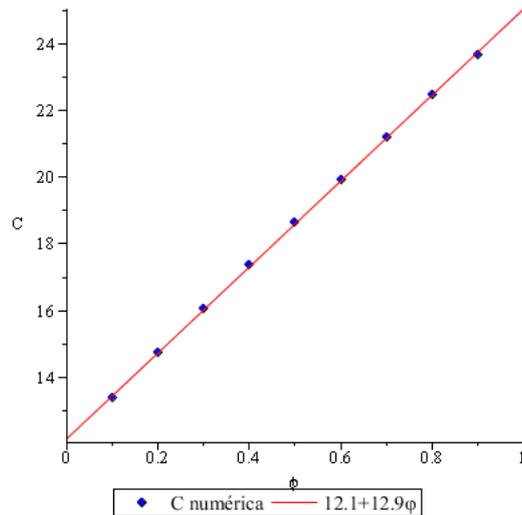
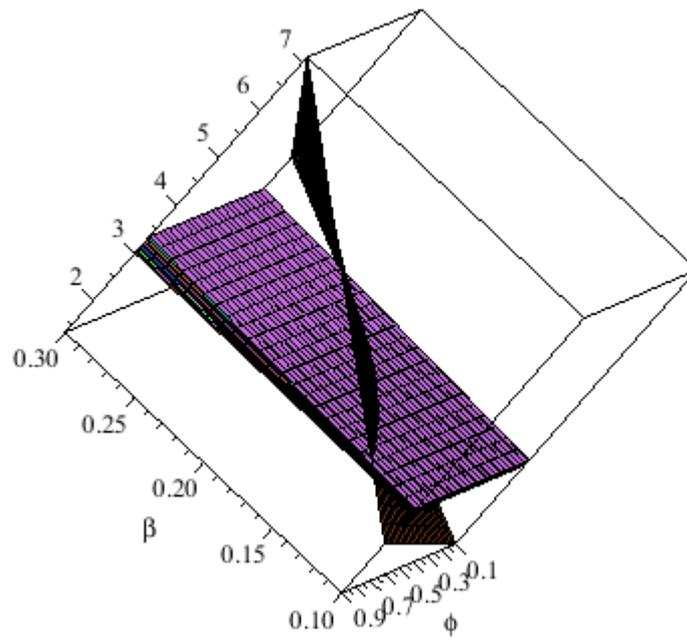
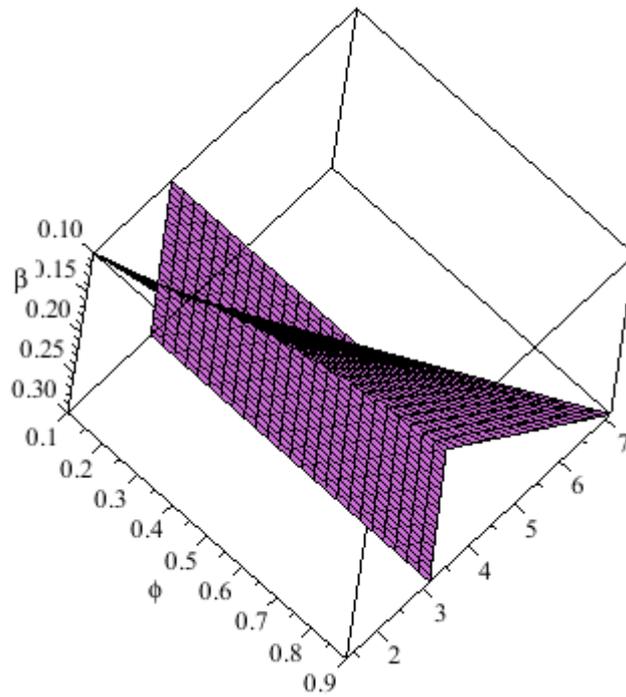


Figura 18. Constante C vs probabilidad de reconexión

Como anteriormente,  $M = 0$  es siempre una solución, y hay un valor de corte de  $\Delta$  para el cual es la única. Para valores grandes de  $\Delta$  la función exponencial es demasiado abrupta y la ecuación 7.19 no admite soluciones reales mientras que para valores pequeños de  $\Delta$  hay una zona con soluciones reales, más amplia cuanto menor sea  $\Delta$ , y entonces existen temperaturas bajas con magnetización no nula (en la Figura 19 se representa la intersección de las superficies del numerador y denominador de 7.19). Para probabilidad de reconexión baja la única solución para la magnetización es 0 si J tiene valores en torno a 1. Dado que van multiplicadas, obviamente una J muy grande puede inducir soluciones no nulas, pero no sería realista.



(a)



(b)

Figura 19. Existencia de soluciones para la temperatura crítica

La intersección de las superficies engendradas por el numerador y denominador de 7.21 definen el campo de existencia de una solución para  $\beta$ .

(a) Para  $0.1 \leq \Delta \leq 1$ .

(b)  $\Delta = 0.5$

La existencia de soluciones no nulas para la magnetización puede verse también en las Figuras 20(a)-20(f), que comparan la recta de pendiente unitaria con el lado derecho de la ecuación 7.19: solo hay intersección aparte del origen para determinados valores; es decir,  $M = 0$  es siempre una solución y hay un valor de corte de  $\Delta$  para el cual es la única a cualquier temperatura. Con esta distribución, la probabilidad de reconexión baja hace también que  $M = 0$  sea la única solución para cualquier valor de  $\Delta$  y de la temperatura. Esto puede verse también en la Figura 22, donde se varía  $\beta$  de manera continua.

Para valores inferiores de  $\Delta$  existe un cierto valor de  $\beta$  tal que solo admite la solución desordenada  $M = 0$ , mientras que para temperaturas más bajas admite más soluciones

Respecto al parámetro relacionado con la proporción de agentes neutrales. En la Figura 21 puede verse que con  $\Delta = 0$ , todas las soluciones de  $1 - x$  para  $M = 0$  son nulas a cualquier temperatura, es decir, el desorden comporta únicamente agentes no neutrales. Esto corresponde al desacuerdo máximo, sin ningún agente dispuesto a posicionarse de forma equidistante entre las opciones, como era de esperar si el parámetro asociado a la predisposición por neutralidad es nulo.

Para  $\Delta$  distinta de cero, a temperaturas altas hay una componente de neutrales no nula con magnetización nula. Si  $J$  no es muy grande para valores altos de  $\Delta$  la proporción de neutrales permanece aproximadamente constante en todo el rango de valores de magnetización.

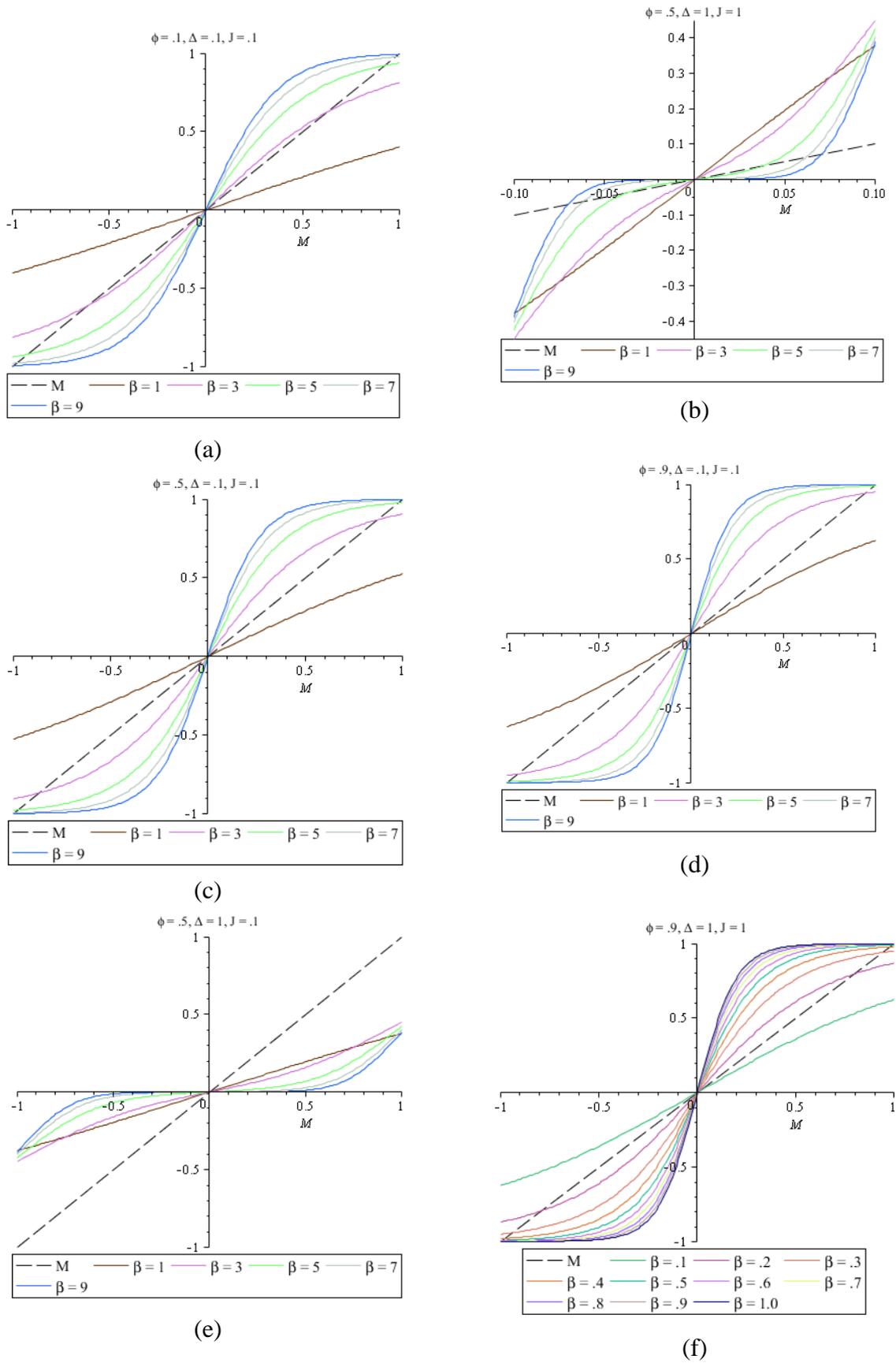
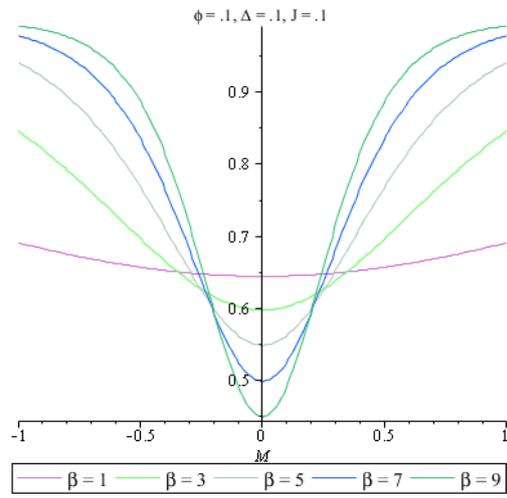
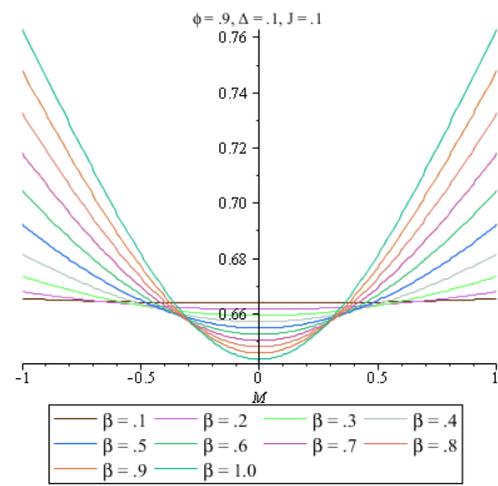


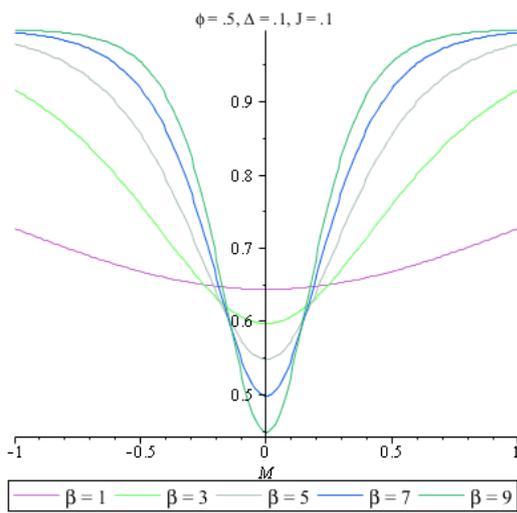
Figura 20: Magnetización con distribución WS con atajos



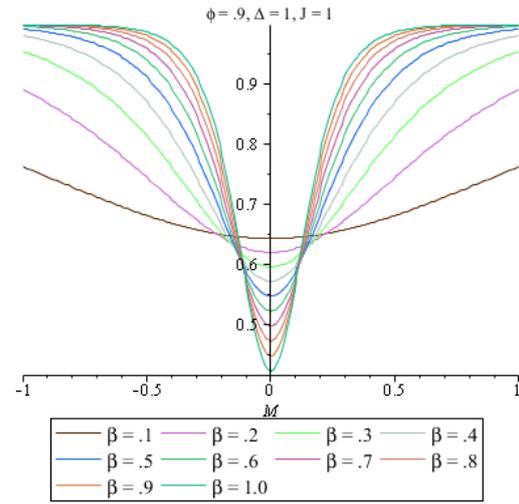
(a)



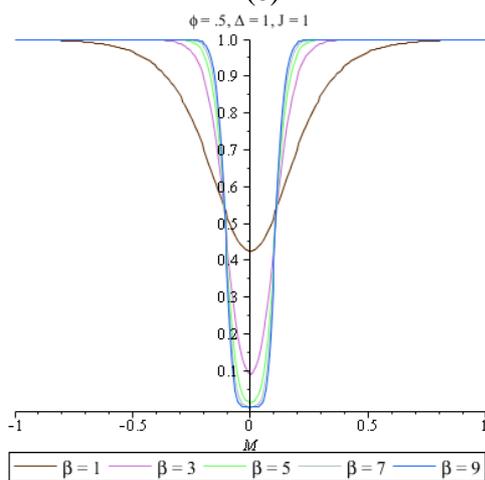
(b)



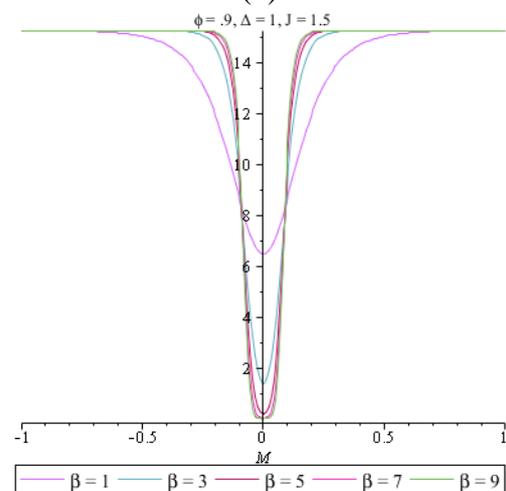
(c)



(d)

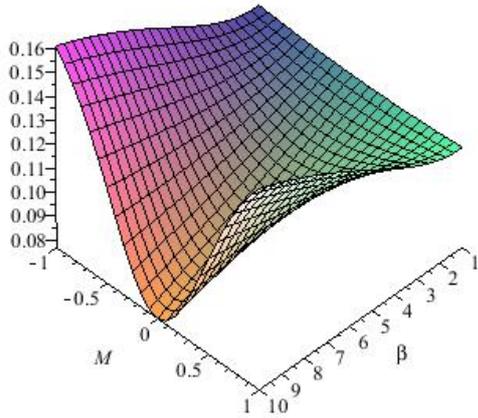


(e)

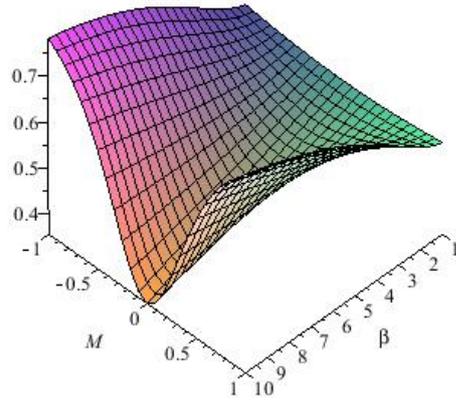


(f)

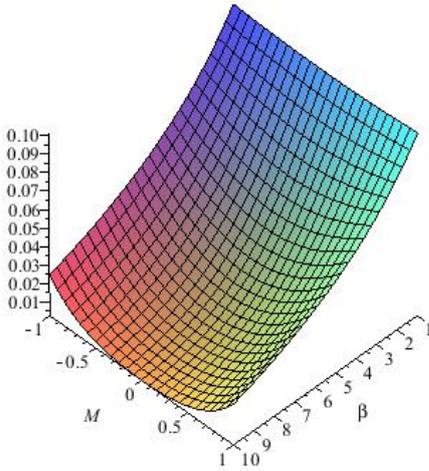
Figura 21: Comportamiento del P.O. relacionado con la neutralidad



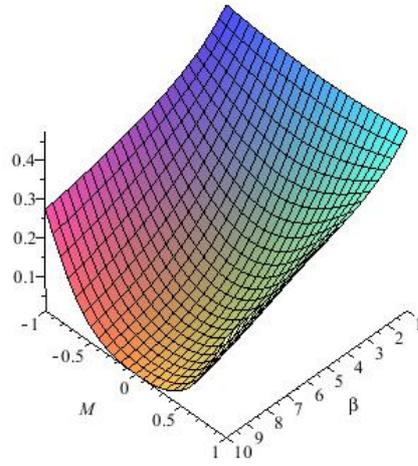
(a)  $\Delta = 0.1, J = 0.1, \phi = 0.1$



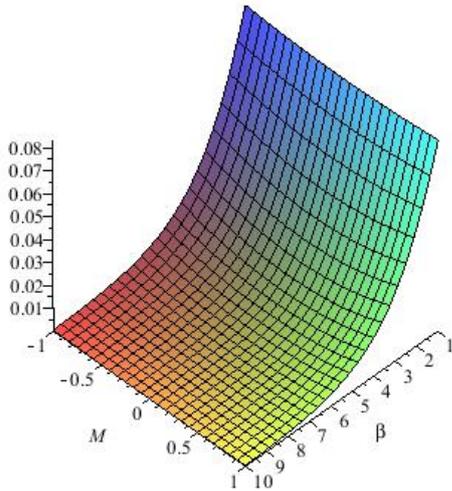
(b)  $\Delta = 0.1, J = 0.1, \phi = 0.9$



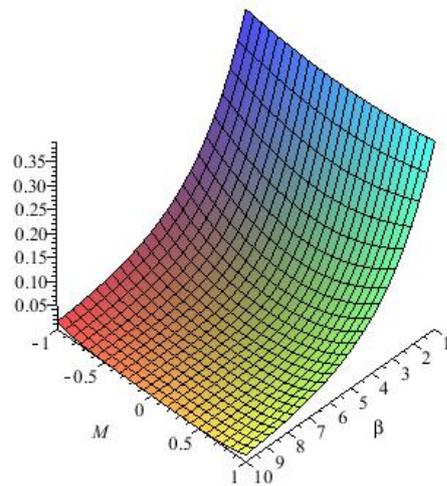
(c)  $\Delta = 0.5, J = 0.1, \phi = 0.1$



(d)  $\Delta = 0.5, J = 0.1, \phi = 0.9$



(e)  $\Delta = 0.9, J = 0.1, \phi = 0.1$



(f)  $\Delta = 0.9, J = 0.1, \phi = 0.9$

Figura 22. Neutralidad ( $1-x$ ) en función de  $M$  y  $\beta$  para distintos valores de  $\Delta$  y  $J$ . Nótese la disminución de la neutralidad con el aumento de la probabilidad de reconexión.

## Efecto de los parámetros de control

La constante de acoplamiento  $J$  define la intensidad local de interacción. Socialmente corresponde básicamente a información, que puede ser en forma de publicidad (caso de opciones comerciales) o transmitida por contacto directo (intercambio de opiniones políticas). En política corresponde a tratos comerciales o diplomáticos.

La probabilidad de reconexión  $\phi$  influye en la intensidad global de interacción aumentando el número de agentes en contacto ( $J_{ij}$  distintas de 0) a través del incremento de conectividad, y por consiguiente, sólo tiene un efecto notable en la variante Watts-Strogatz con atajos. Este efecto se manifiesta con una disminución de la neutralidad notoria en esta variante – ver y casi imperceptible en la de reconexión, como puede verse comparando las Figuras 17(a)-17(f) con 22(a)-22(f). Esto parece indicar que el aislamiento favorece la neutralidad. El efecto de la probabilidad de reconexión  $\phi$ , y por tanto del grado, es únicamente apreciable en los extremos, es decir, para las soluciones de magnetización no nula. En términos sociofísicos, el posicionamiento es más acusado a mayor conectividad. Esto es como decir que la mayor comunicación favorece también la discrepancia.

La llamada constante de anisotropía en el entorno original del modelo BEG,  $\Delta$ , está íntimamente relacionada con la neutralidad y su efecto se manifiesta notoriamente en la temperatura crítica. Para un valor pequeño el sistema tiende a repartirse entre las dos opciones contendientes, pero si  $\Delta$  es demasiado grande no hay posibilidad de consenso en ninguna, y todos los agentes son indiferentes (neutrales).  $\Delta$  puede asimilarse como oposición a las opciones principales en un sistema bipartidista (predilección por opciones minoritarias) o hacia una de dos opiniones en controversia. En coaliciones entre países su significado es obvio: las ventajas de la no alineación superan al posible beneficio de mantener una alianza con una de las opciones en conflicto. En otros entornos, representa las ventajas de la abstención: en el caso de opciones comerciales, el ahorro económico asociado a no comprar nada; en política, la falta de entusiasmo hacia ninguna de las opciones hace que sea preferible hacer cualquier otra cosa el día de la votación.

Resumiendo,  $\Delta$  favorece la neutralidad. Tanto el valor para  $M = 0$  como la anchura de la curva (es decir, la neutralidad para valores no nulos de magnetización) aumentan con  $\Delta$ . El efecto de  $J$  es contrario: disminuye la neutralidad, siendo el efecto más acusado para magnetización no nula. Explicar el efecto de  $\Delta$  es obvio, puesto que este parámetro está relacionado directamente con la neutralidad. Respecto al de  $J$ , la mayor intensidad en las interacciones tiende a favorecer el posicionamiento frente a la no alineación.

La Figura 23 representa la neutralidad (por comodidad visual, en este caso no es su complementaria  $1-x$ ). Claramente aumenta con  $\Delta$ , pero también podemos ver que la probabilidad de reconexión disminuye la neutralidad.

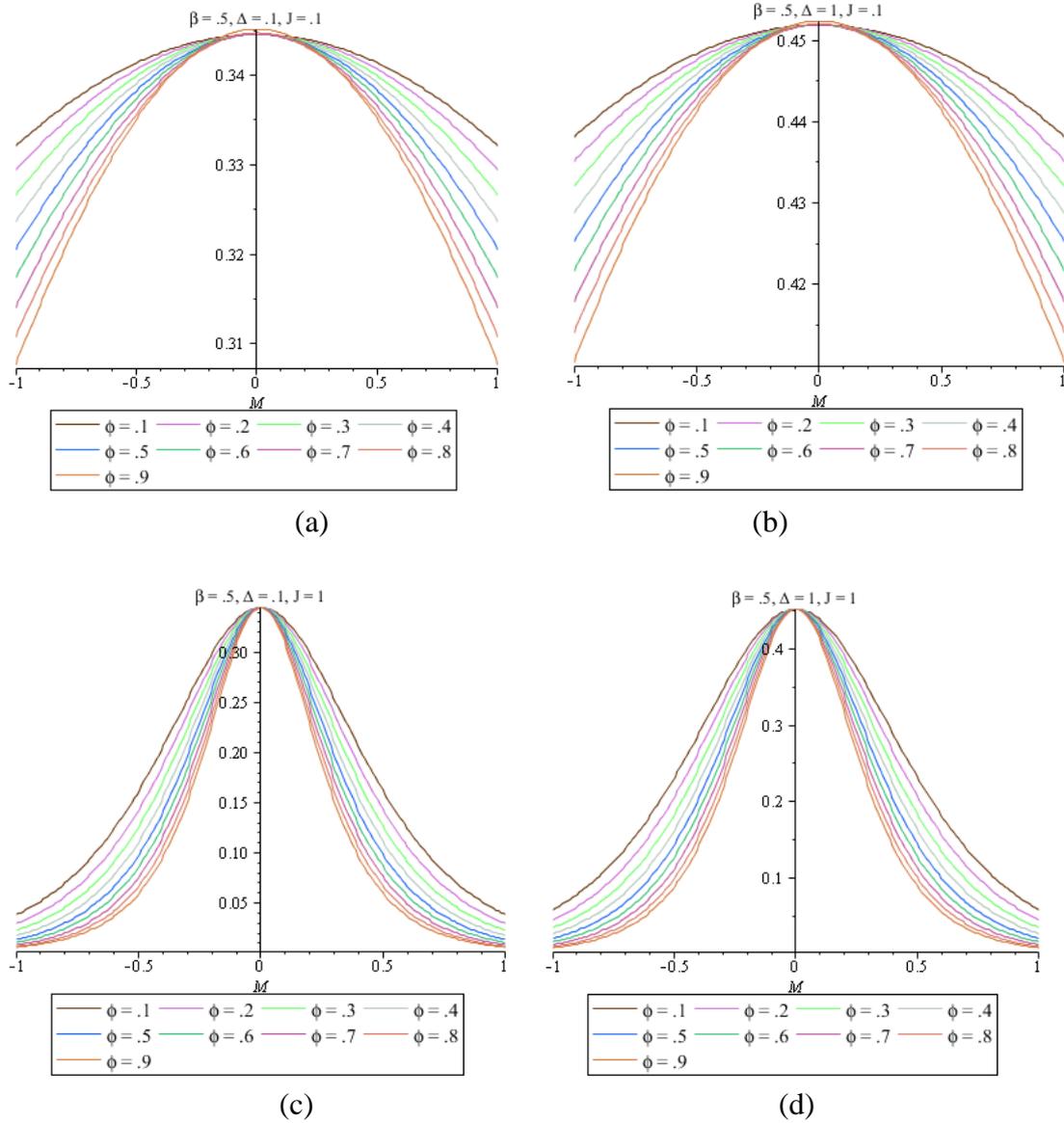


Figura 23. Neutralidad vs  $M$  para distintos valores de  $\Delta$ ,  $J$  y  $\phi$

Vamos a estudiar preferentemente valores positivos de  $\Delta$ , pues con valores negativos los dos términos del Hamiltoniano no compiten y la física es más pobre. Se llega indefectiblemente a situaciones fuertemente polarizadas sin neutralidad, como en la Figura 24. Los agentes con  $\text{spin} = 1$  tienen color azul, y los de  $\text{spin} = -1$ , rojo. Los neutros se marcan en verde, pero no hay ninguno en la figura, que es lo que queremos resaltar.

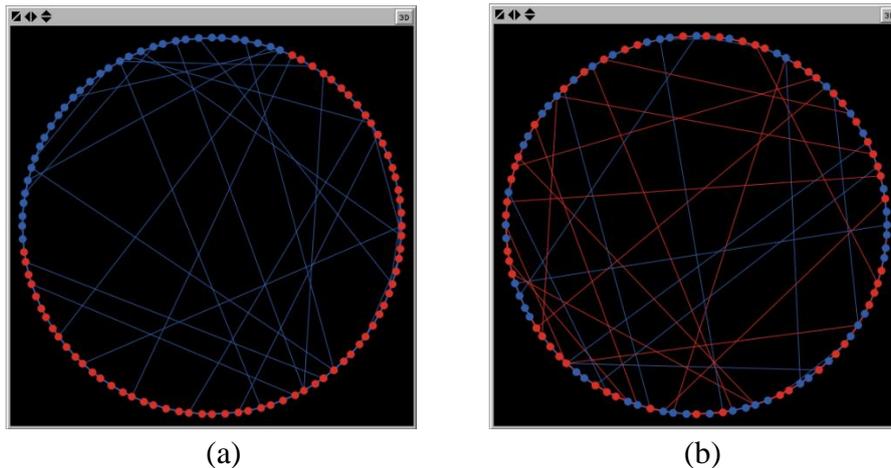


Figura 24. Efecto de  $\Delta < 0$

(a) Todas las  $J$ 's positivas

(b)  $J$ 's distribuidas uniformemente alrededor de 0

Si  $J$  y  $\Delta$  son comparables, y  $\Delta$  es siempre del mismo signo, va a prevalecer el efecto favorecedor de la neutralidad asociado a  $\Delta$ , lo que coincide con la simulación. No olvidemos que  $J$  es el valor esperado de una distribución de variables aleatorias congeladas. En una situación real es más fácil utilizar un valor de  $\Delta$  para ajustar modelos que configurar un conjunto muy numeroso de constantes de acoplamiento.

## Análisis del comportamiento

La Figura 25 representa el comportamiento en el espacio  $J, \Delta$  de la variante con. Se ha obtenido representando la relación entre  $J$  y  $\Delta$  de (7.19), para una temperatura fija y utilizando (7.20), y se ha añadido la recta  $J = \Delta$ . Estas dos líneas marcan cuatro regiones en el espacio de fase  $J$ - $\Delta$ . A la izquierda de la línea azul tenemos una fase desordenada con  $M = 0$  y a la derecha una fase con  $M \neq 0$ . La recta separa, según el valor relativo de  $J$  y  $\Delta$ , regiones con componente apreciable de agentes neutrales de regiones en las que el posicionamiento es muy fuerte y apenas hay neutrales a las temperaturas en las que las fluctuaciones no son importantes.

Cuando  $J$  es lo suficientemente grande, una de las opciones prevalece sobre la otra y la existencia de neutralidad depende del valor de  $\Delta$ , mayor cuanto más baja es la temperatura. Para valores de  $\Delta$  inferiores a dicho umbral, la componente neutral es despreciable

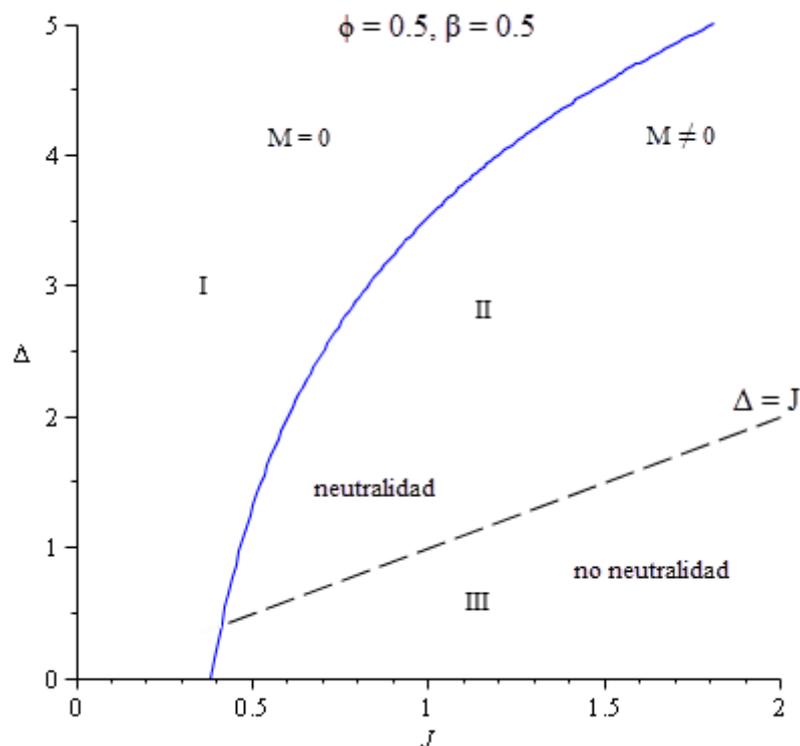
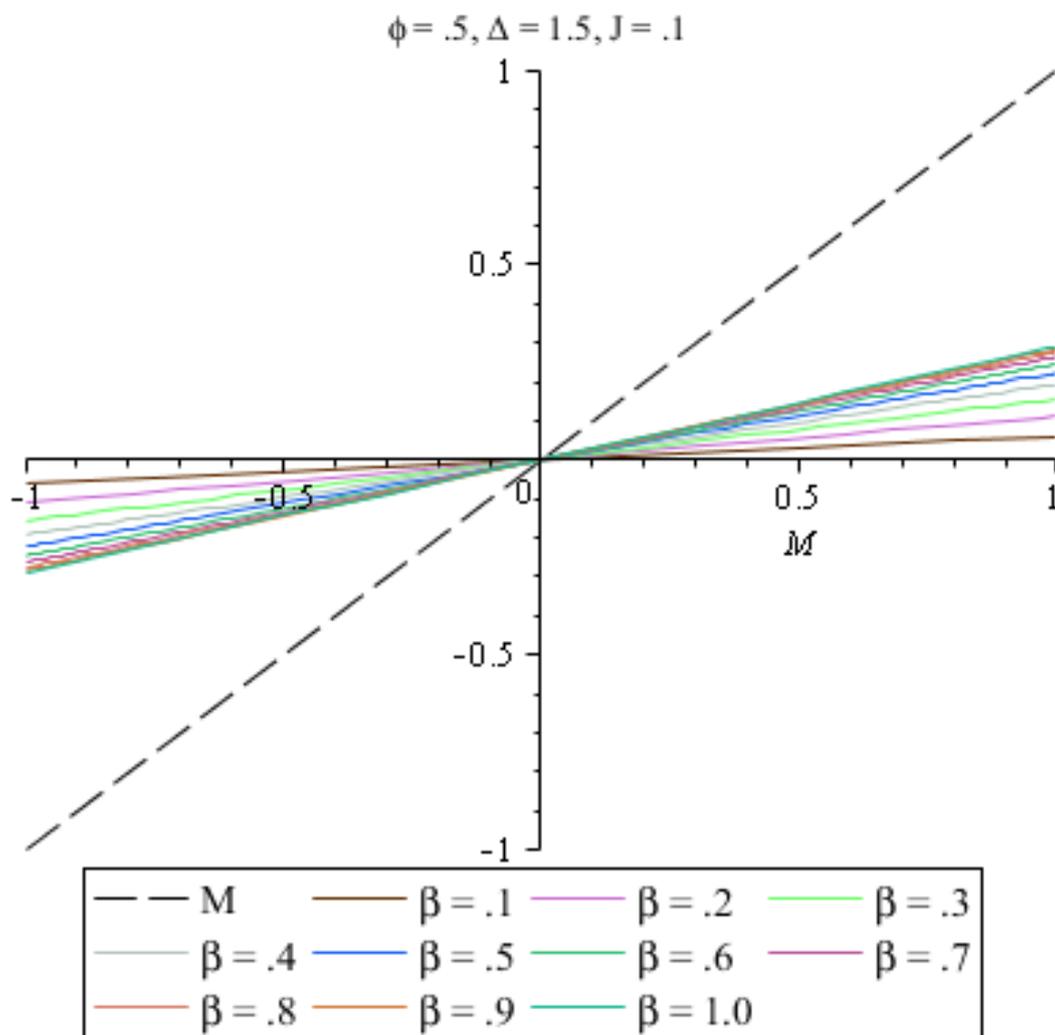


Figura 25.  $\Delta$  vs  $J$  para una temperatura fija.

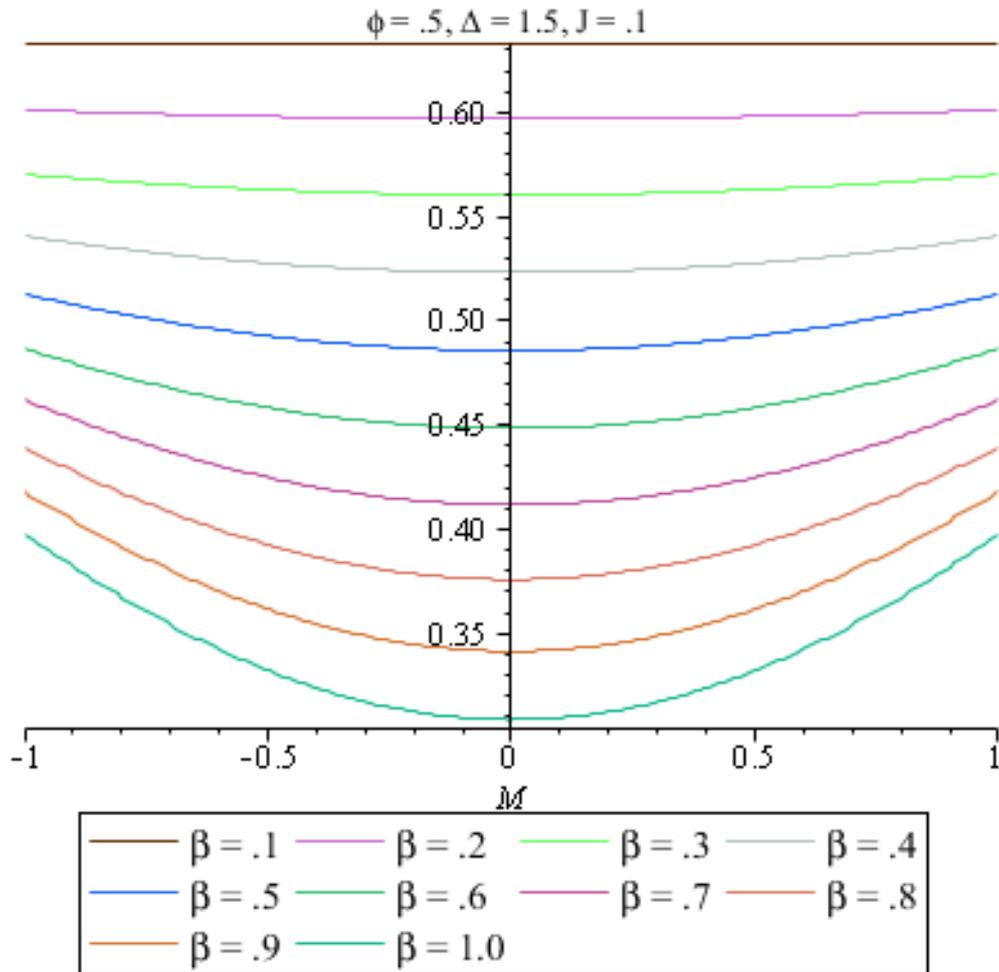
A la izquierda de la línea azul no existen soluciones no nulas para la magnetización.

## REGIÓN I

J pequeña,  $\Delta$  grande. Magnetización nula con neutralidad.



(a)



(b)

Figura 26. Gráficas de M (a) y  $1 - x$  (b) en la Región I

En esta región las opciones en competencia no consiguen entusiasmar a los agentes lo suficiente como para que haya un predominio claro. Debido a la pequeña intensidad de las interacciones en comparación con la propensión a neutralidad, muy pocos agentes deciden posicionarse, y cuando lo hacen es de forma simétrica. En el campo de la política, esta situación responde a una apatía o desencanto general respecto a las opciones disponibles. La abstención es la opción mayoritaria y las opciones principales consiguen pocos apoyos. En el caso de predilección por una de dos opciones comerciales en competencia, el público no decide por una u otra. En los dos casos la interpretación puede ser que el mensaje publicitario no llega al público objetivo. La interacción es insuficiente y las ventajas de la abstención predominan.

El comportamiento simulado puede verse en la Figura 27(a) y (b), obtenida con 6 y 4 vecinos inmediatos respectivamente. Nótese que la menor conectividad hace que se llegue a un estado parecido en menos tiempo.

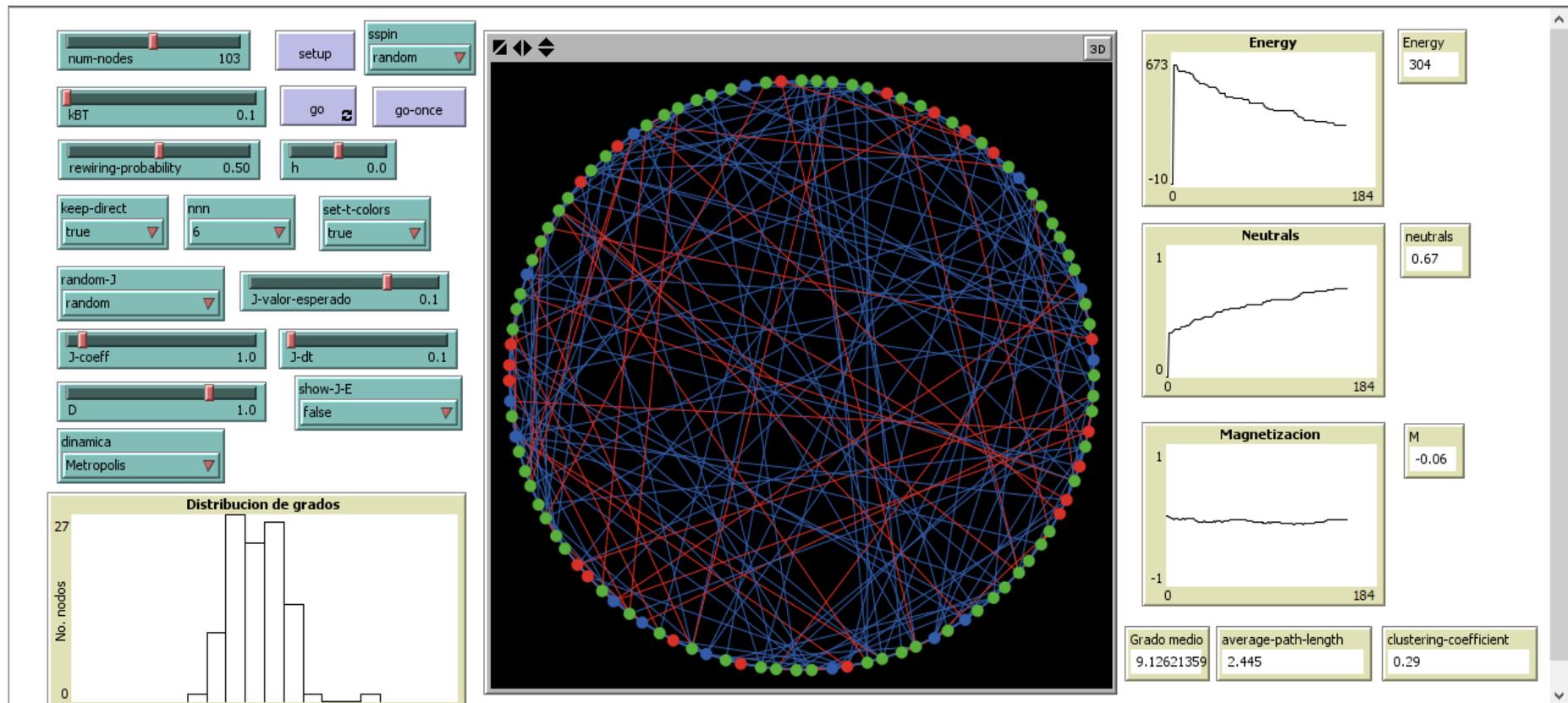


Figura 27(a)

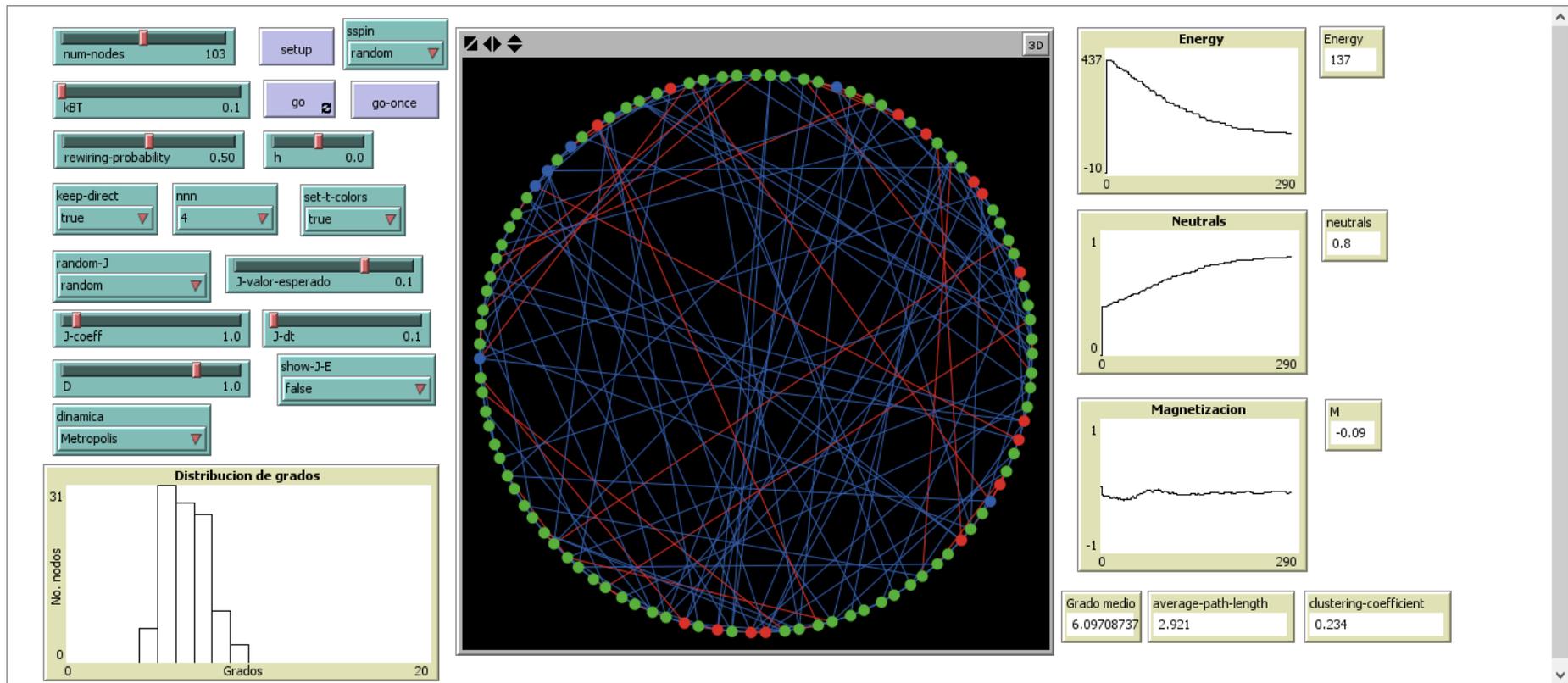


Figura 27(b)

Figura 27.  $J$  pequeña,  $\Delta$  grande

(a)  $k = 3$

(b)  $k = 2$

## REGIÓN II

J grande,  $\Delta > J$ . Puede haber magnetización no nula pero hay predominio de neutralidad.

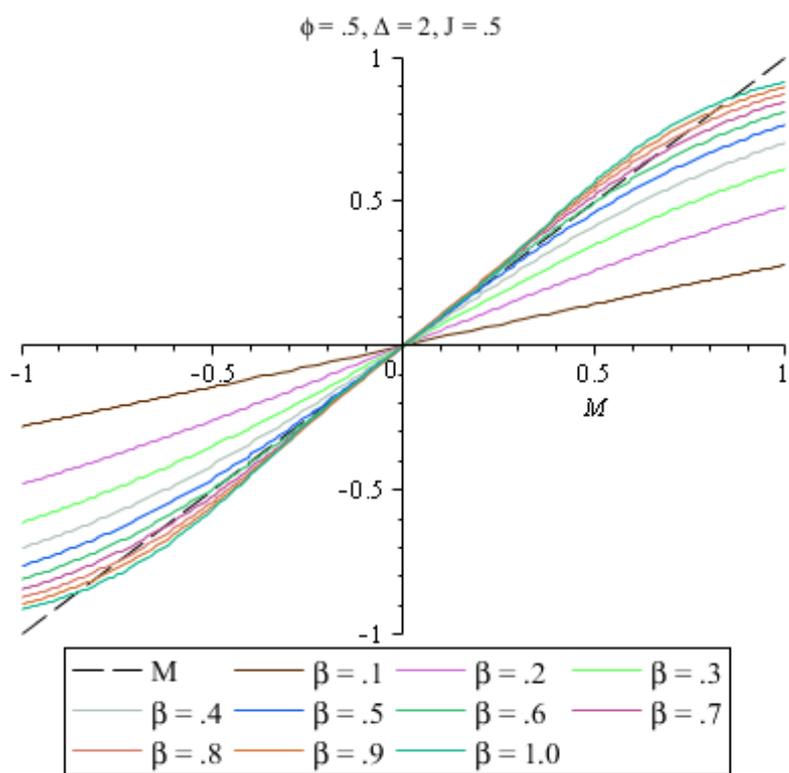


Figura 28(a)

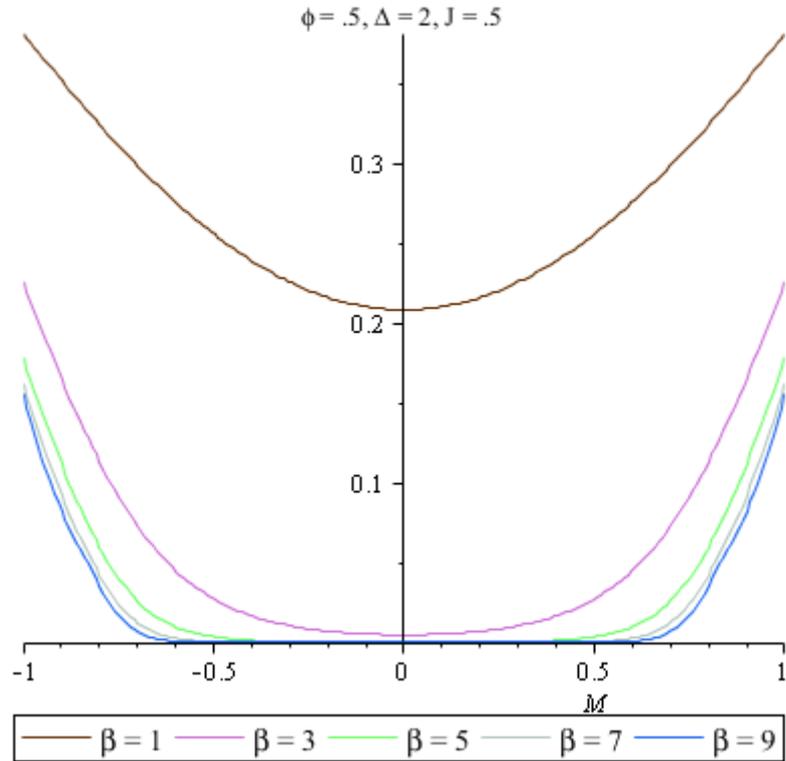


Figura 28(b)

Figura 28. Gráficas de  $M$  (a) y  $1-x$  (b) en la Región II

En esta región la fuerza de las interacciones es lo suficientemente grande como para que una de las opciones haga ver su atractivo, pero una  $\Delta$  grande hace que la neutralidad sea favorecida. Si  $\Delta \gg J$  el estado de equilibrio es el predominio de la neutralidad. En el caso de coaliciones entre países, el efecto –posiblemente económico– de  $J$  (que aquí representa sobre todo el intercambio comercial) hace que merezca la pena tomar partido, excepto para temperaturas bajas (en épocas de crisis es más seguro no tomar partido: no alinearse, no invertir, no gastar).

El comportamiento simulado puede verse en la Figura 29(a) y (b), obtenida con 6 y 4 vecinos inmediatos respectivamente. Nótese que la menor conectividad hace incrementar la componente de neutralidad para la misma magnetización.

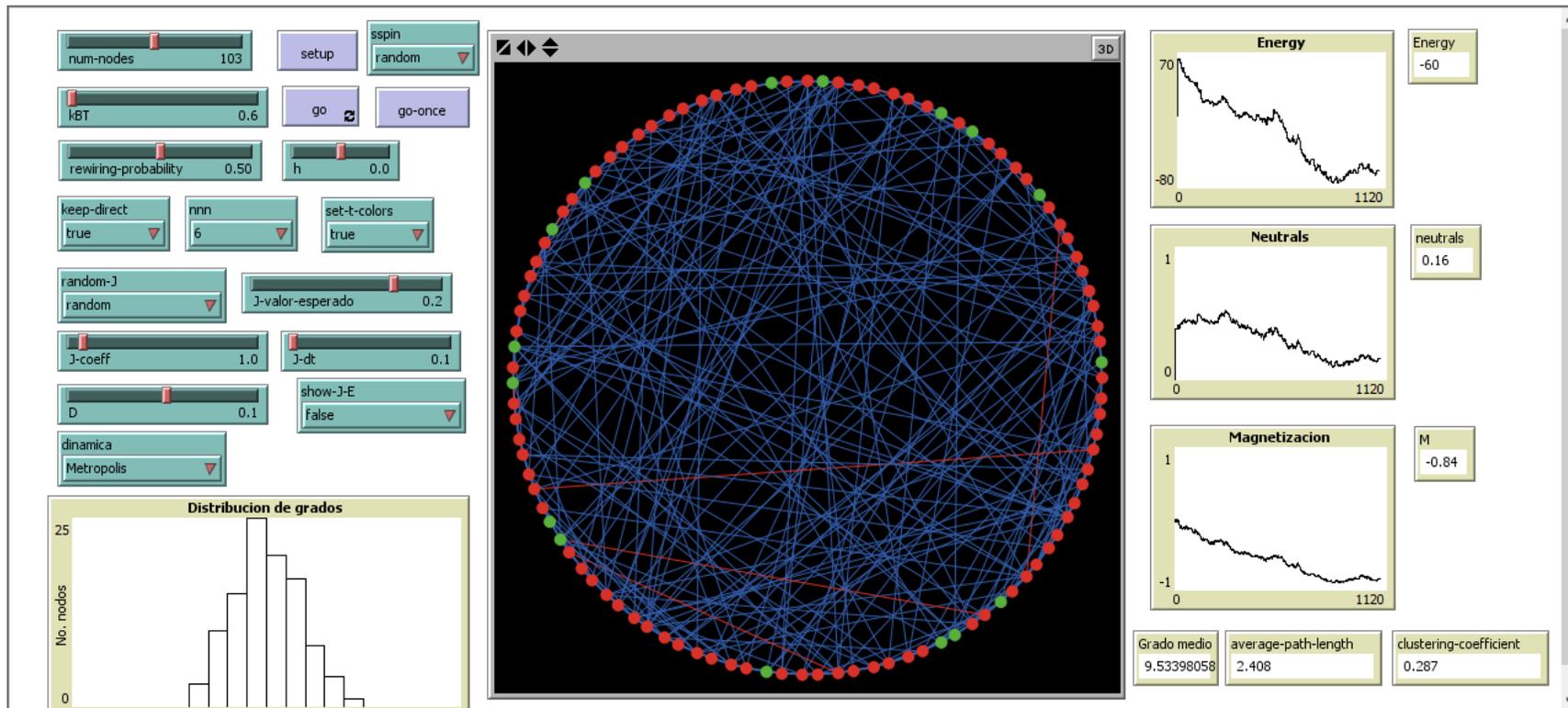


Figura 29(a)

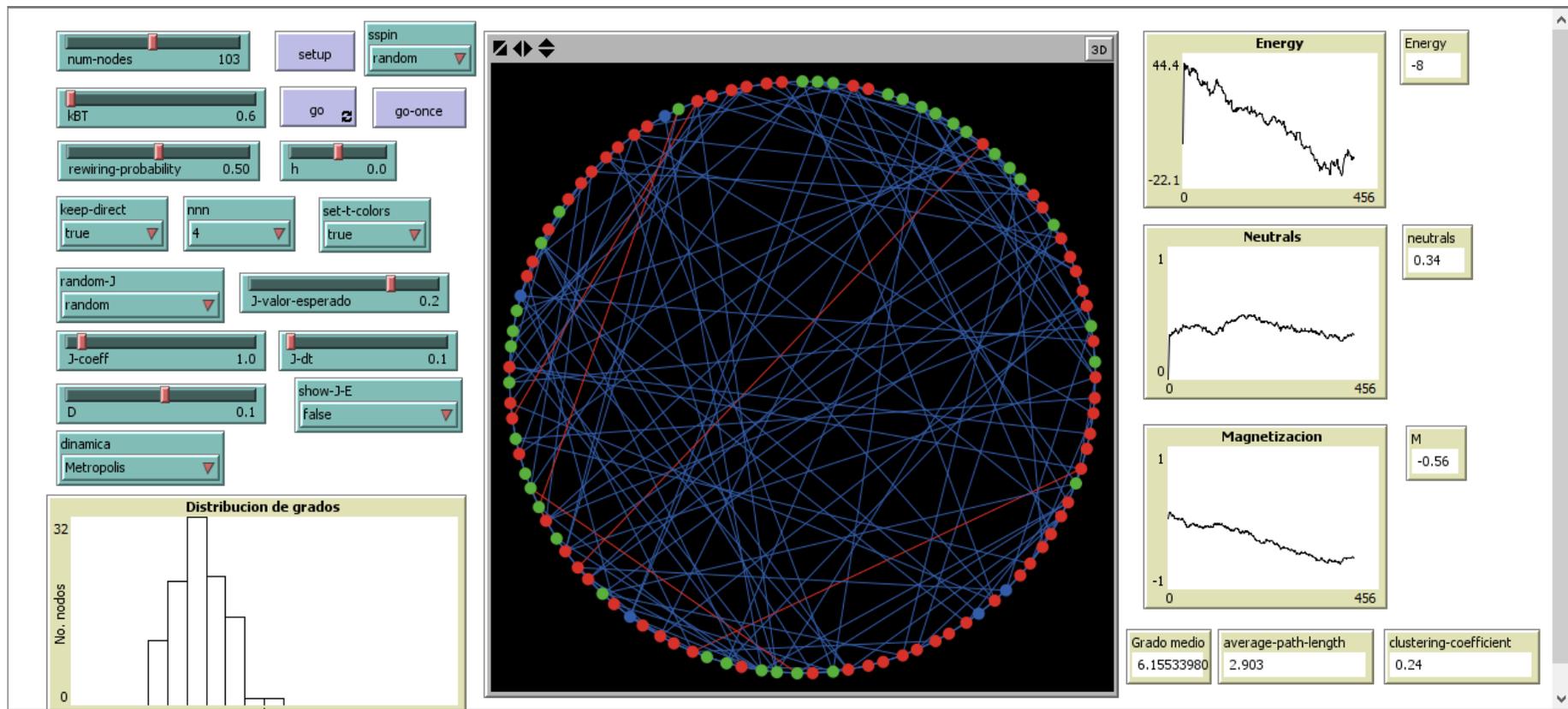


Figura 29(b)

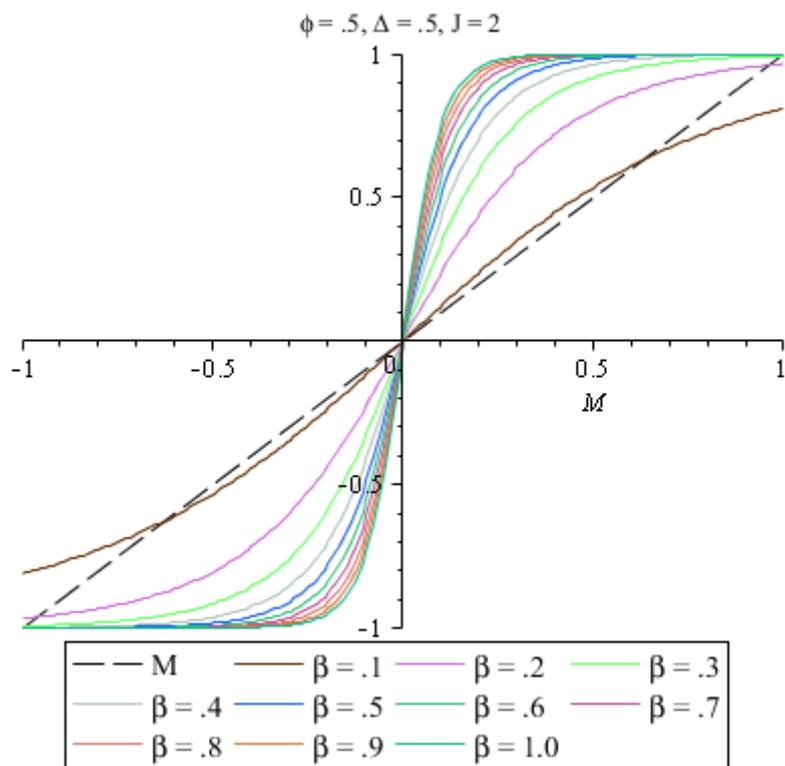
Figura 29.  $J$  grande,  $\Delta > J$

(a)  $k = 3$

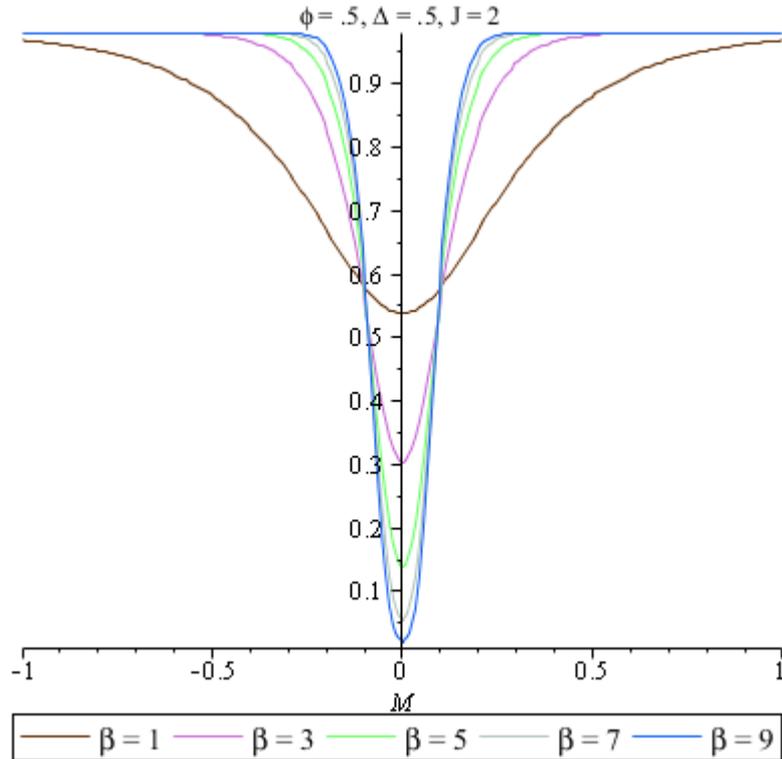
(b)  $k = 2$

### REGIÓN III

J grande,  $\Delta$  pequeña. Magnetización no nula y neutralidad nula.



(a)



(b)

Figura 30. Gráficas de M (a) y 1-x (b) en la Región III

Esta región corresponde al predominio claro de una de las opciones, cuyas ventajas los agentes respectivos perciben con nitidez, de forma que consideran preferible posicionarse claramente. La opción elegida depende básicamente del estado inicial. En la Figura 31 podemos ver estados de equilibrio para diferentes condiciones iniciales. En (a) se parte de un estado con todos los spins = 1, y como ya se encuentra en un estado de equilibrio no evoluciona. Lo mismo puede decirse de (b). En (c) el estado inicial tiene spins aleatorios y evoluciona hacia uno de los equilibrios.

En esta región, y en el caso de las opciones comerciales, una de ellas resulta más atractiva que la otra, y sabe hacer llegar mejor su mensaje. En el caso de las votaciones políticas, uno de los partidos obtiene la mayoría clara.

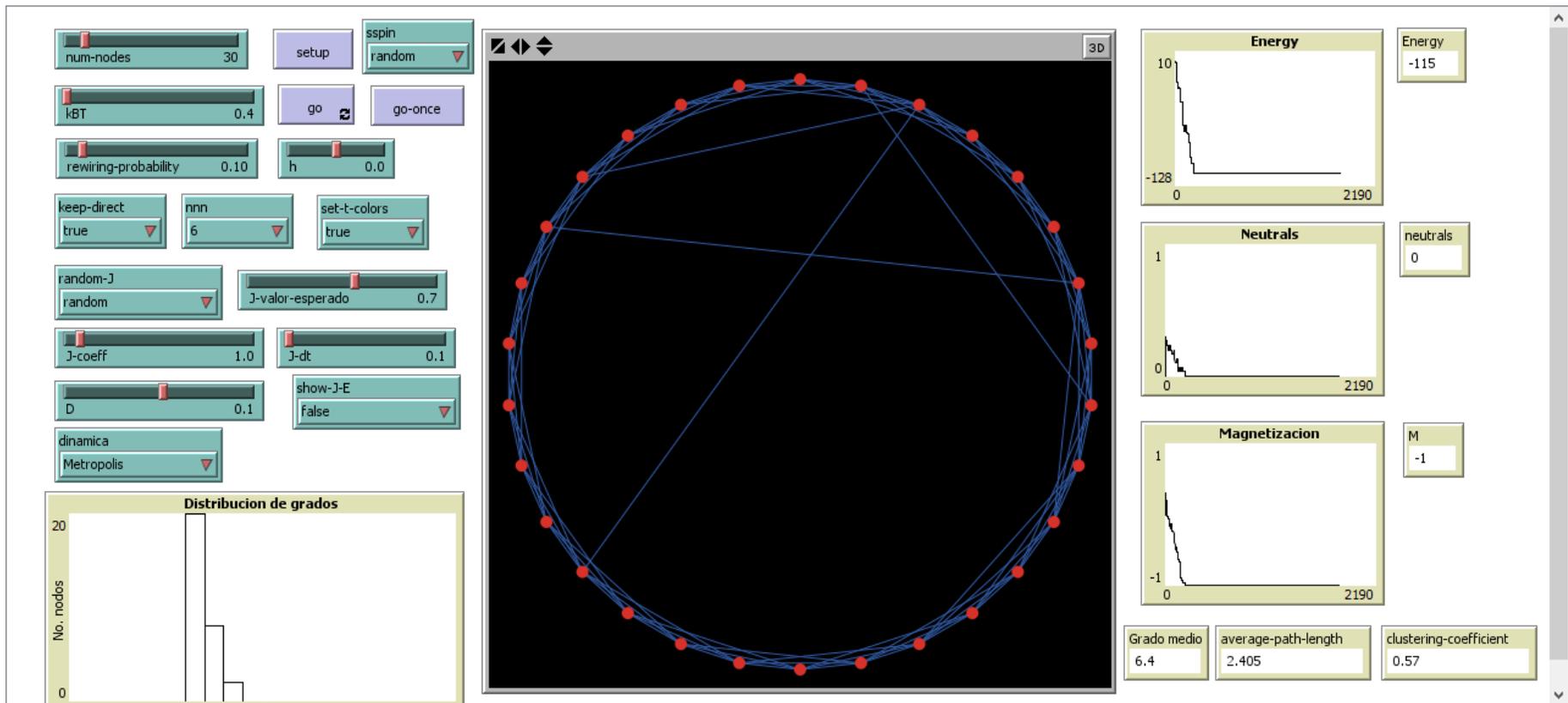


Figura 31(a)

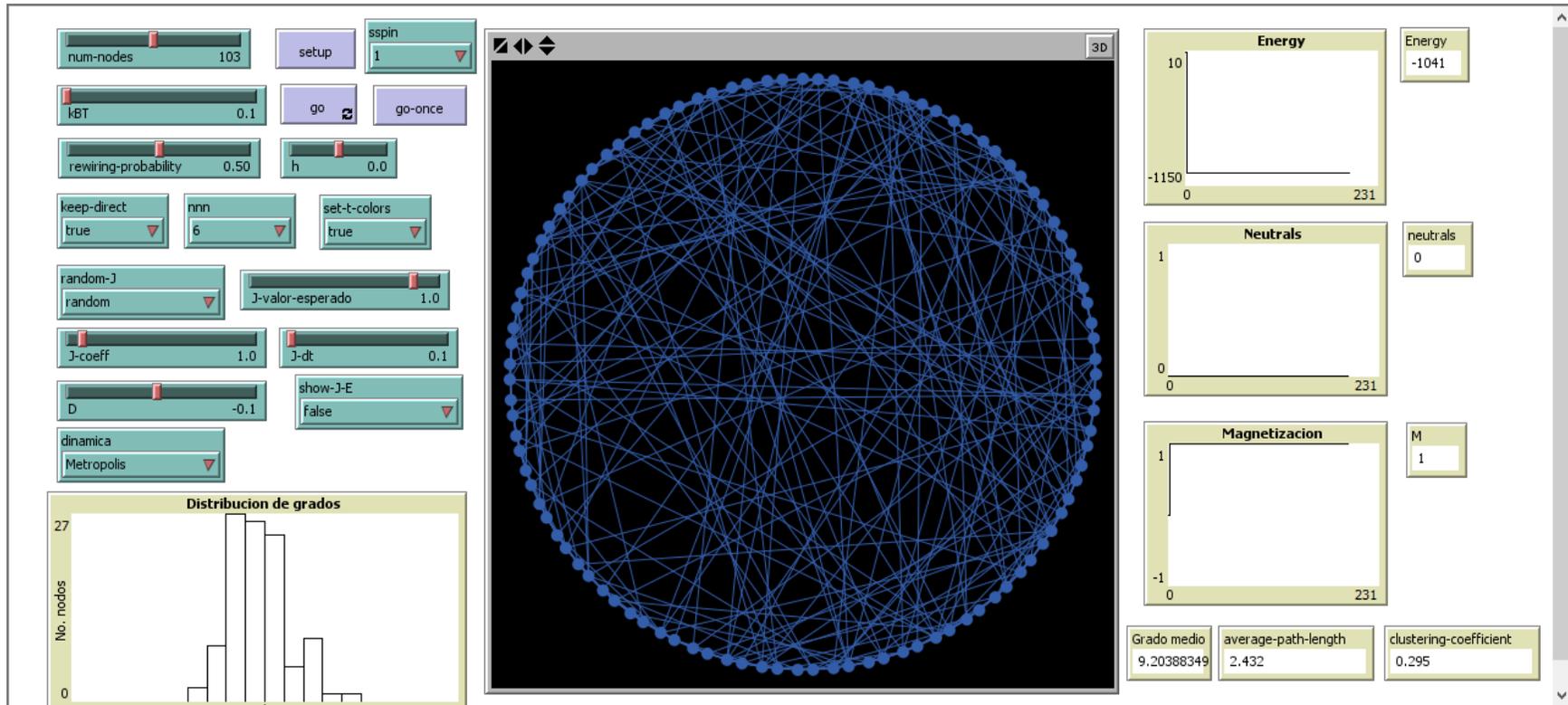


Figura 31(b)

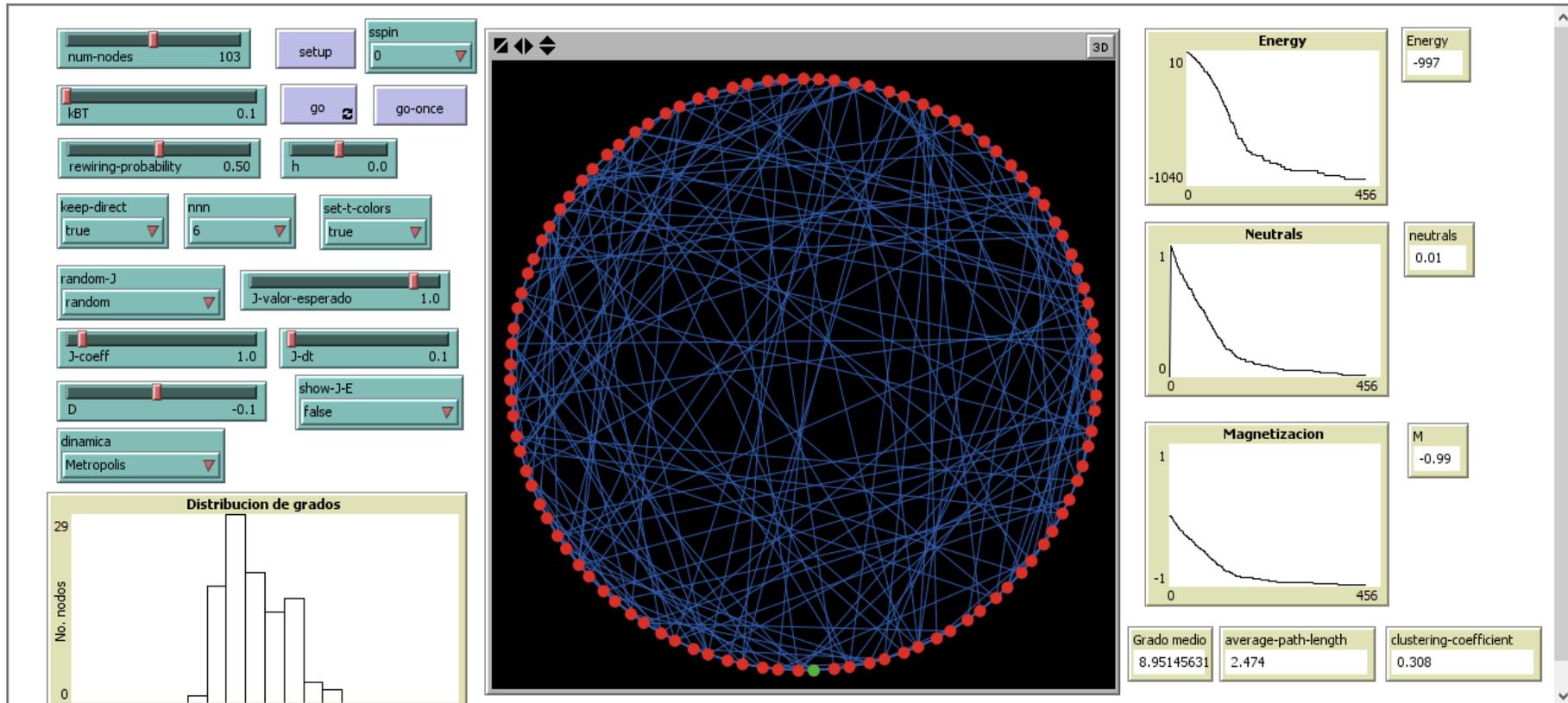
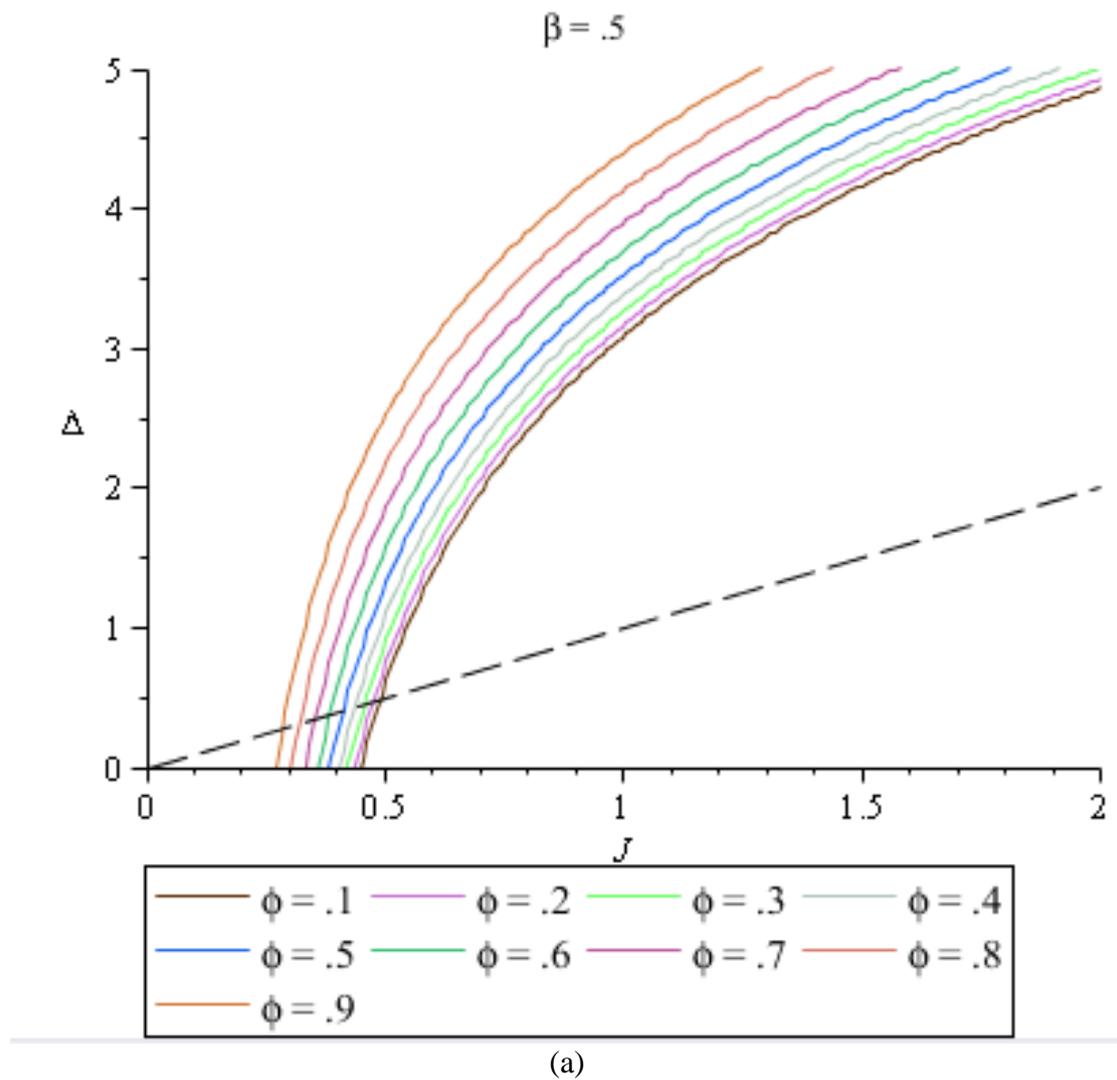


Figura 31(c)

Figura 31.  $J$  grande,  $\Delta > J$

- (a) Estado inicial con magnetización negativa
- (b) Estado inicial con magnetización positiva
- (c) Estado inicial con magnetización neutra

La influencia de la topología de red viene dada sobre todo por el efecto sobre la conectividad de la probabilidad de reconexión  $\phi$ . Un valor grande de  $\phi$  favorece la alineación, pues aumenta la conectividad y por tanto la cantidad de interacciones para un mismo  $J$ . Esto puede verse en la familia de curvas para distintos valores de  $\phi$  de la Figura 32. La Figura 32(a) se obtiene representando la relación entre  $J$  y  $\Delta$  de (7.19), para una temperatura fija y utilizando (7.20); vemos que la fase de magnetización no nula se produce para valores más pequeños de  $J$ . En la Figura 32(b) vemos que las curvas para probabilidad de reconexión más alta están más cerca del eje de abscisas.



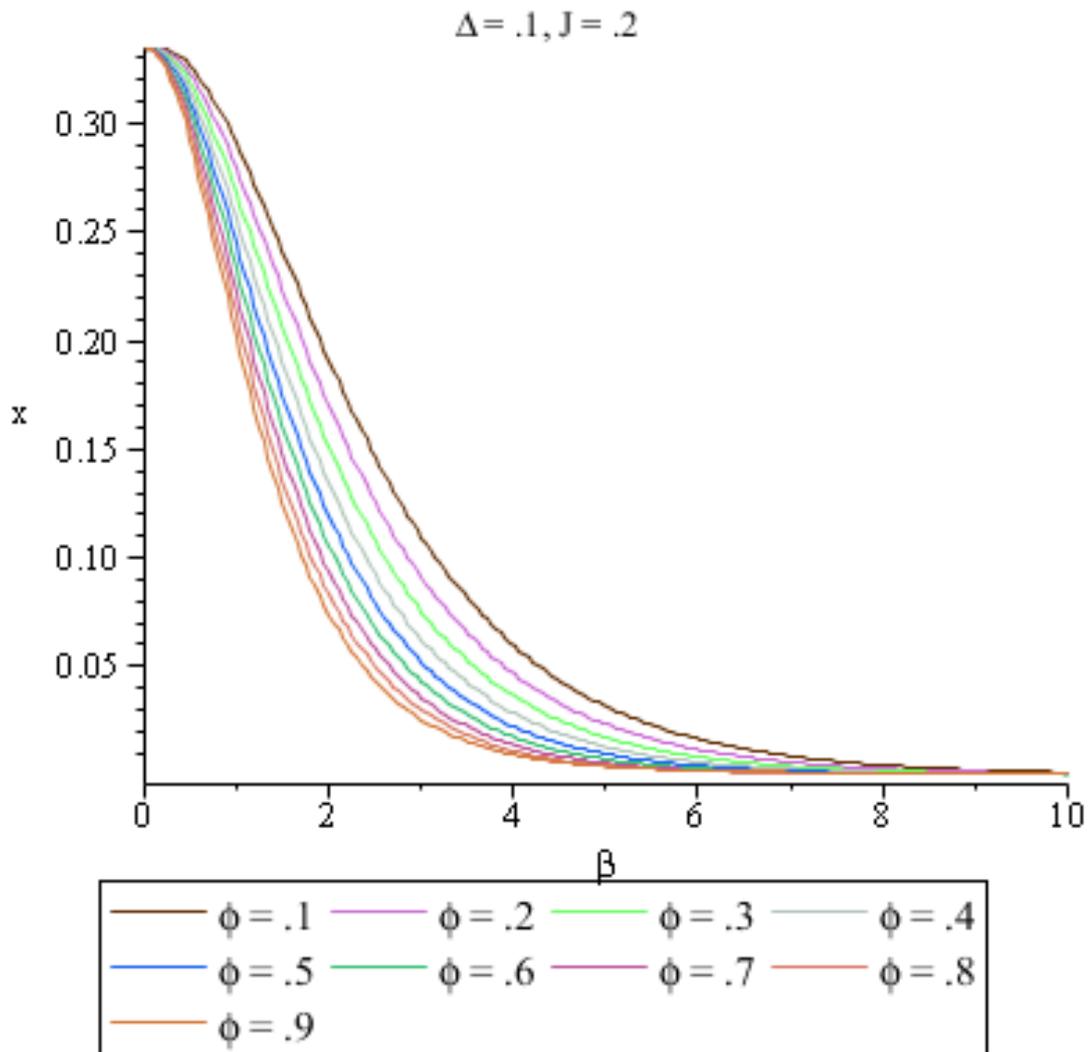


Figura 32. Efecto de la probabilidad de reconexión  $\phi$   
 (a)  $\Delta$  vs  $J$  Manteniendo fija la temperatura  
 (b) Neutralidad vs  $\beta$  manteniendo fijas  $\Delta$  y  $J$

## Conclusiones

La variante con atajos representa mejor un número de redes reales, en las que un agente tiene relaciones estrechas con sus vecinos próximos. Se entiende la proximidad no como relacionada con la topología de red sino en un sentido propio del tipo de sistema que se considere (pensemos en compañeros de trabajo, países colindantes, etc.) y establece vínculos igualmente estrechos con agentes que están alejados de él mismo según este concepto sui generis de distancia. Adicionalmente, el modelo Watts-Strogatz de atajos nos parece más realista. Creemos que es normal establecer nuevas conexiones, pero sólo excepcionalmente estas sustituyan a conexiones más antiguas. Además, en el modelo de reconexiones la conectividad permanece fija y como no podemos apreciar ningún efecto variándola a través de la probabilidad de reconexión, la física en nuestro contexto es más pobre.

En el contexto sociofísico tiene más significado el parámetro de orden relacionado con la neutralidad que la magnetización. En efecto, aparte de saber si estamos en una fase ordenada y desordenada, el valor de la magnetización es menos relevante que conocer la importancia relativa de la neutralidad. En general, la componente neutral es mucho menor en la variante de atajos, para iguales valores de los parámetros de control. Comparar, por ejemplo, Figuras 16(a) y 16(d) con 21 (a) y 21(d); en éstas,  $1 - x$  es uno o dos órdenes de magnitud inferior en la variante de reconexiones.

El comportamiento de la variante de reconexiones es más parecido al grafo aleatorio con distribución de Poisson, al que sabemos que tiende cuando la probabilidad de reconexión es alta. Sin embargo, para probabilidad de reconexión baja, se parecen más la variante de atajos y el grafo aleatorio. Ver Figuras 11(c) y 21(a).

A temperaturas inferiores a la crítica, que es menor en la de atajos, las soluciones no nulas para la magnetización son mayores en la variedad de atajos que en la de reconexiones. La mayor interacción debida a la mayor conectividad implica mayor comunicación e información, en contraposición a indiferencia basada en ignorar las ventajas de una de las opciones.

Una de las conclusiones curiosas de este trabajo es la influencia de los parámetros que determinan la intensidad de interacción -que en muchos contextos se asimila a información<sup>18</sup>- en comparación con variables internas de los agentes. En nuestro modelo no hemos incluido variables internas como pudieran ser el tamaño o la importancia, tal como hacen en otros modelos descritos anteriormente. En el nuestro es más determinante la intensidad y forma de las interacciones que los objetos que interactúan.

---

<sup>18</sup> Desgraciadamente, la coacción es también una forma de interacción

Esto quiere decir que la mayor calidad de una opción comercial no influye tanto como la publicidad o los valores iniciales; el programa de una opción política –según este modelo- es menos importante que la interacción entre las personas que han de votarla, entonces sería más importante la percepción que las ventajas reales de las diferentes opciones.

Por otra parte, el estado ordenado que adopta el sistema (recordemos que en ausencia de campo las soluciones ordenadas son simétricas) depende del estado inicial. Un ejemplo: la disputa entre los estándares VHS y Betamax terminó con la preponderancia clara del primero, cuando el segundo ofrecía indudables ventajas tecnológicas (mayor calidad de imagen y duración de las cintas), seguramente por haber salido ligeramente antes al mercado.

Nuestro modelo parece más adecuado para estudiar la evolución de sistemas sociofísicos que otros descritos en este trabajo, precisamente por incluir la temperatura. Es un hecho que en las situaciones reales los agentes cambian de alianzas, incluso en los ejemplos considerados de forma estática por los modelos citados como referencia (Segunda Guerra Mundial, ex Yugoslavia, etc.), la evolución de las alianzas es tan interesante como el estudio de las posibles soluciones de equilibrio.

Como conclusión, pensamos que las novedades que aporta nuestro modelo son la neutralidad y la dinámica, y por tanto sienta bases para un estudio sociofísico dinámico de situaciones reales. Aunque lo hemos concebido suficientemente general como para aplicarse a sistemas grandes (poblaciones humanas) y pequeños (grupos de países o empresas) el planteamiento basado en variables aleatorias congeladas y teorías de campo medio parece más aplicable al primer caso.

## **Direcciones futuras**

Como futuras líneas de investigación sería interesante estudiar la estabilidad de las coaliciones y la región de grandes fluctuaciones a temperaturas altas. Nos consta que hay épocas convulsas en política y en comercio, cuando un nuevo producto acaba de salir al mercado, en las que la dinámica es más compleja.

Otro aspecto a profundizar es el clustering, tanto en el sentido propio de la palabra (aparición de regiones con características diferenciadas en términos de predominio de una de las alianzas o de la neutralidad) o de la influencia del coeficiente de clustering de la red

## **Apéndices**



## Apéndice 1: Frustración global vs local en el modelo AB

Sean dos configuraciones, X e Y, que difieren únicamente en el posicionamiento del agente k. Es decir, están compuestas por las coaliciones A, A' y B, B' respectivamente:

$$X = \{A', B\}$$

$$Y = \{A, B'\}$$

Donde

$$A' = A \cup \{k\} \text{ y } B' = B \cup \{k\}$$

Para acortar la notación llamaremos  $r_{ij} = s_i s_j p_{ij}$

Tenemos

$$E(X) = \sum_A \sum_{B'} r_{ij} + \sum_B \sum_{A'} r_{ij}$$

dado que  $d_{ij}(X) = 0$  para  $i \in A', j \in A'$  o para  $i \in B, j \in B$  y  $d_{ij}(X) = 1$  para  $i \in A, j \in B'$  o para  $i \in B, j \in A'$

Similarmemente

$$E(Y) = \sum_A \sum_{B'} r_{ij} + \sum_{B'} \sum_A r_{ij}$$

De modo que

$$\begin{aligned} E(X) - E(Y) &= \sum_{A'} \sum_B r_{ij} - \sum_A \sum_{B'} r_{ij} + \sum_B \sum_{A'} r_{ij} - \sum_{B'} \sum_A r_{ij} = \\ &= \sum_{\{k\}} \sum_B r_{ij} - \sum_A \sum_{\{k\}} r_{ij} + \sum_B \sum_{\{k\}} r_{ij} - \sum_{\{k\}} \sum_A r_{ij} \end{aligned}$$

Porque

$$\sum_{A'} \sum_B r_{ij} = \sum_A \sum_B r_{ij} + \sum_{\{k\}} \sum_B r_{ij}$$

Pero

$$\sum_{\{k\}} \sum_B r_{ij} = \sum_B \sum_{\{k\}} r_{ij} \text{ y } \sum_A \sum_{\{k\}} r_{ij} = \sum_{\{k\}} \sum_A r_{ij} \text{ porque } p_{ij} = p_{ji}$$

Y tenemos pues

$$E(X) - E(Y) = 2 \left( \sum_{\{k\}} \sum_B r_{ij} - \sum_{\{k\}} \sum_A r_{ij} \right) = 2 \left( s_k \sum_B s_j p_{kj} - s_k \sum_A s_j p_{kj} \right)$$

luego para dos configuraciones, X e Y, que difieren únicamente en el estado de un agente k,  $E(X) > E(Y)$  si y solo si  $\sum_B s_j p_{kj} > \sum_A s_j p_{kj}$

## Apéndice 2: Simulación del modelo de Galam

Para ilustrar nuestra discrepancia con la aseveración de Galam [1] comentada en el texto hemos construido dos simulaciones:

Simulación 1 – Algoritmo de Metropolis con hamiltoniano mínimo como criterio de estabilidad. Temperatura 0 (es decir, no se acepta un cambio si no supone una disminución del hamiltoniano) tal como prescribe Galam en [1]

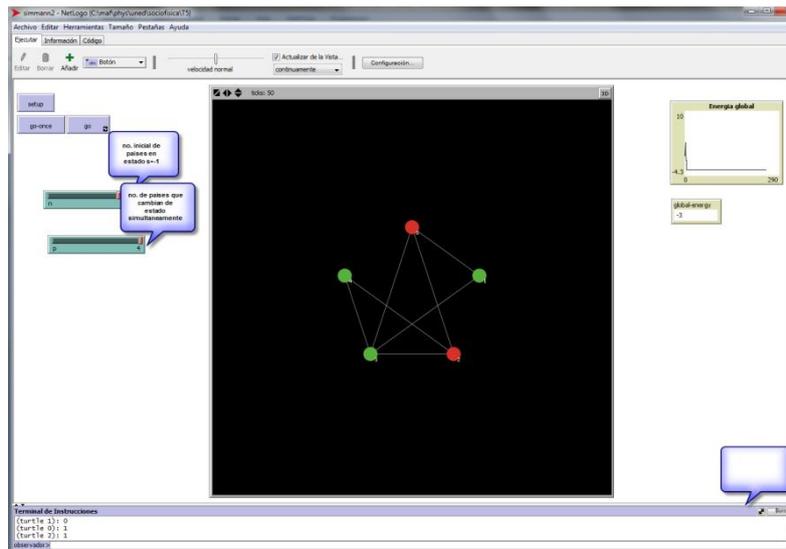


Figura A2.1. Simulación del modelo Galam

Efectuando una batería de simulaciones para  $n=1..4$  y  $p=1..4$ , se encuentra el sistema “estabilizado” en varios mínimos locales: -3 -2 -1 0 1 2.

Este es un comportamiento similar al *desorden congelado* de un vidrio de spin, y el equilibrio alcanzado depende de las condiciones iniciales.

Simulación 2 – En este caso, el criterio para aceptar un cambio es que la energía del país que cambia sea menor que antes.

En primer lugar se realiza la simulación a temperatura 0, es decir, no se acepta un cambio si no supone una disminución del coste o energía del agente.

*Al contrario que lo expuesto en [1] apd. 8.2, con esta simulación se alcanzan estados de equilibrio en los que no puede mejorar la posición de un país.*

Véanse la posiciones de equilibrio que se alcanzan eventualmente, según el valor del parámetro que determina el número de cambios “simultáneos” y de las condiciones iniciales.

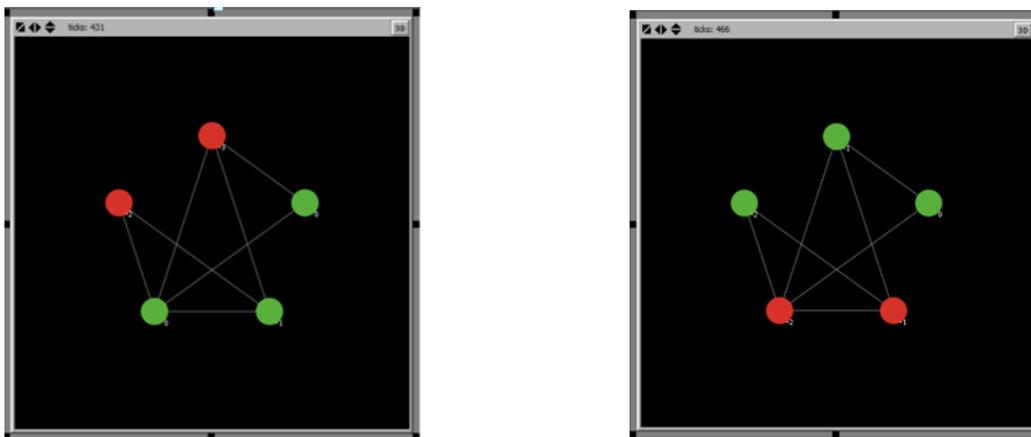


Figura A2.2. Estados de equilibrio en el modelo Galam

El comportamiento es también tipo vidrio de spin.

Sin embargo, si se modificando la dinámica de cambio de estado que pueda considerar temperatura no nula, entendida como una posibilidad no nula de aceptar un cambio que no suponga una mejora de la energía del agente, se obtiene el comportamiento descrito en [1].

### Apéndice 3: Método de matriz densidad variacional

Se parte de un hamiltoniano  $\hat{H}$  del que se construye la energía libre:

$$F = E - TS = \text{Tr}(\rho \hat{H}) + k_B T \text{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (\text{A3.1})$$

Siendo  $\rho$  la matriz densidad.

El problema consiste en hallar los extremos de la energía libre  $F$  considerando las restricciones de  $\rho$ . Supongamos que es diagonal en la base de autoestados de  $\hat{H}$ , es decir, que se cumple

$$\rho = \sum_{\gamma} P_{\gamma} |\gamma\rangle\langle\gamma| \quad (\text{A3.2})$$

Siendo  $P_{\gamma}$  la probabilidad de que el sistema esté en el estado  $|\gamma\rangle$ . Entonces

$$F = \sum_{\gamma} E_{\gamma} P_{\gamma} + k_B T \sum_{\gamma} P_{\gamma} \ln P_{\gamma} \quad (\text{A3.3})$$

De manera que la energía libre es una función del conjunto de probabilidades  $\{P_{\gamma}\}$ . Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange se determinan los extremos de  $F$  considerando como restricción la condición de normalización. La función auxiliar es

$$G(\{P_{\gamma}\}, \lambda) = F(\{P_{\gamma}\}) + \lambda \left( \sum_{\gamma} P_{\gamma} - 1 \right) \quad (\text{A3.4})$$

El resultado es la distribución de Boltzmann

$$P_{\gamma}^{eq} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\gamma}} \quad (\text{A3.5})$$

Donde

$$Z = \sum_{\gamma} e^{-\beta E_{\gamma}} = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}) \quad (\text{A3.6})$$

Es la función de partición, relacionada con  $\lambda$  de la manera siguiente:

$$\lambda = \frac{1}{\beta} (\ln Z - 1) \quad (\text{A3.7})$$

Hasta aquí el cálculo exacto, que pocas veces es resoluble. El método consiste en construir una matriz densidad de prueba que dependa de un conjunto de parámetros variacionales y minimizar respecto a este conjunto.

Si bien las expresiones que se obtienen son aparentemente muy distintas, en realidad esta técnica se puede clasificar también como de campo medio, dado que la matriz densidad variacional corresponde a un campo medio que actúa en cada sitio independientemente.

## Apéndice 4: Punto tricrítico

En mezclas o aleaciones binarias se produce un tipo de punto crítico que no tiene contrapartida en sistemas simples de un solo componente [45,46,47,48]:

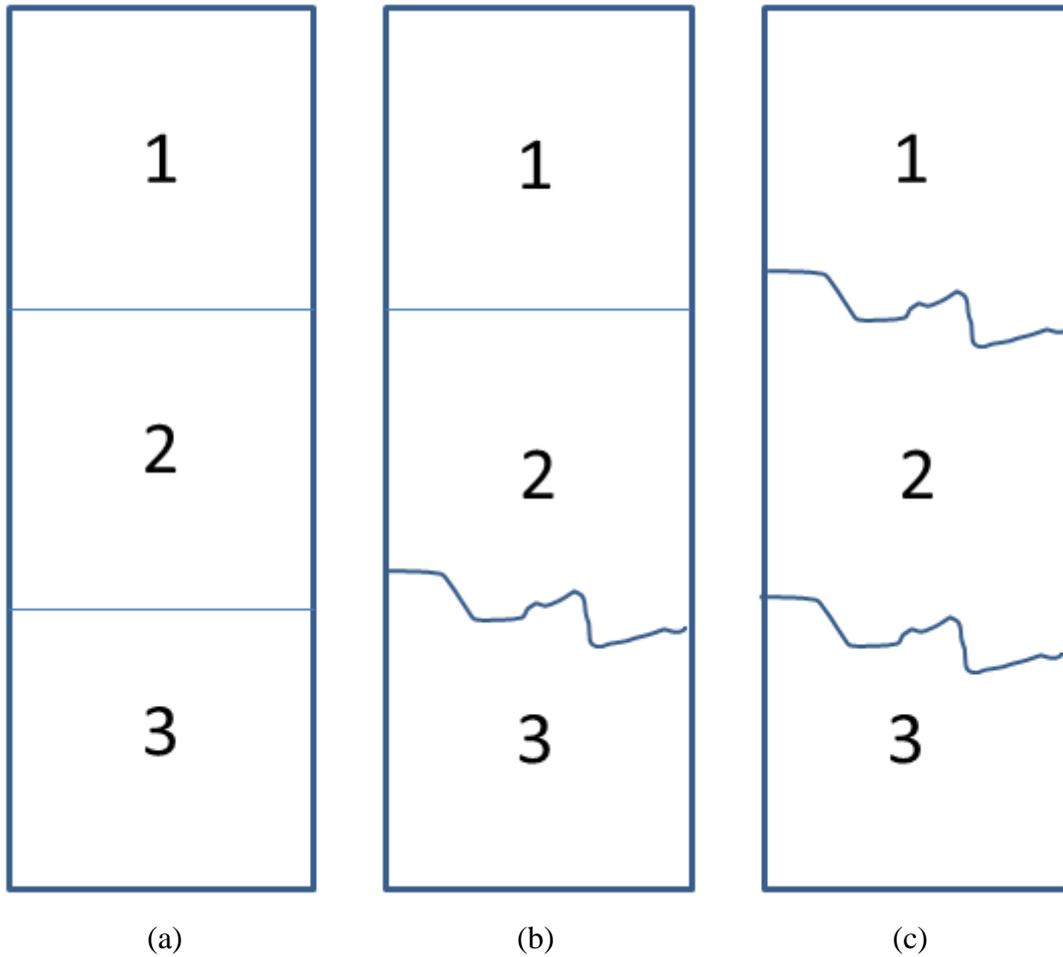


Figura A4.1 Coexistencia de fases en un sistema compuesto.

(a) Coexistencia de tres fases en una mezcla

(b) Coexistencia en un punto final crítico<sup>19</sup>, en el que la superficie de separación de las fases 2 y 3 desaparece o no está bien definida

(c) Coexistencia en un punto tricrítico

Consideremos una expansión genérica de la energía libre de Landau sin campo externo, tal como:

$$f(m) = \frac{1}{2}Am^2 + \frac{1}{4}Bm^4 + \frac{1}{6}Cm^6 \quad (\text{A4.1})$$

<sup>19</sup> Otro tipo de comportamiento crítico en mezclas, no abordado en este trabajo, cuando dos de las fases se hacen idénticas

Por simplicidad (y también por estabilidad), tomamos  $C$  como una constante positiva fija, mientras que  $A$  y  $B$  dependen de  $T$  y  $\Delta$  (reescaladas como  $\theta$  y  $\delta$ ) en nuestro tratamiento del modelo BC. La condición  $A = B = 0$  determina valores críticos de estos parámetros. Vamos a simplificar la notación usando  $t = \frac{\theta - \theta_c}{\theta_c}$  y  $d = \frac{\delta - \delta_c}{\delta_c}$ .

Suponemos además que  $A$  y  $B$  son lineales en  $t$  y  $d$ .

Para hallar los extremos de  $f$ , tenemos:

$$\begin{aligned} f'(m) &= Am + Bm^3 + Cm^5 \\ f''(m) &= A + 3Bm^2 + 5Cm^4 \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

De igualar la primera a 0 tenemos cinco raíces:  $m_0 = 0, \pm m_+, \pm m_-$ , siendo

$$m_{\pm}^2 = \frac{1}{2C} \left( -B \pm \sqrt{B^2 - 4AC} \right) \quad (\text{A4.3})$$

**A < 0**

Como  $f''(0) = A$ ,  $m_0$  es un máximo si  $A < 0$ , en cuyo caso los únicos mínimos posibles son  $\pm m_{\pm}$ . Tenemos

$$f''(m_{\pm}) = \pm \frac{1}{C} \left( \sqrt{B^2 - 4AC} \right) m_{\pm}^2 \quad (\text{A4.4})$$

Es decir,  $m_+$  es un mínimo y  $m_-$  un máximo, con  $m_0^2 = \frac{1}{2C} \left( \sqrt{B^2 - 4AC} - B \right)$

**A > 0**

En esta región  $m_0$  es un mínimo. Si  $A > 0$  y  $B > 0$  me es complejo, y el único mínimo es  $m_0$ , lo que implica que el semieje  $B > 0$  es una transición de segundo orden.

Si  $A > 0$  y  $B < 0$  hay tres mínimos,  $m_0$  y  $\pm m_{\pm}$ . Como  $f(0) = 0$ , los puntos en el eje AB para los que coinciden los tres mínimos cumplen la condición  $f(m_{\pm}) = 0$ , lo cual implica  $m_{\pm}^2 = -\frac{4A}{B}$ , y usando ((A4.3) tenemos la línea de transiciones de primer orden

$$B = -4\sqrt{\frac{AC}{3}} \quad (\text{A4.5})$$

Esquemáticamente, el comportamiento de la energía libre en el espacio de parámetros puede verse en la figura siguiente:

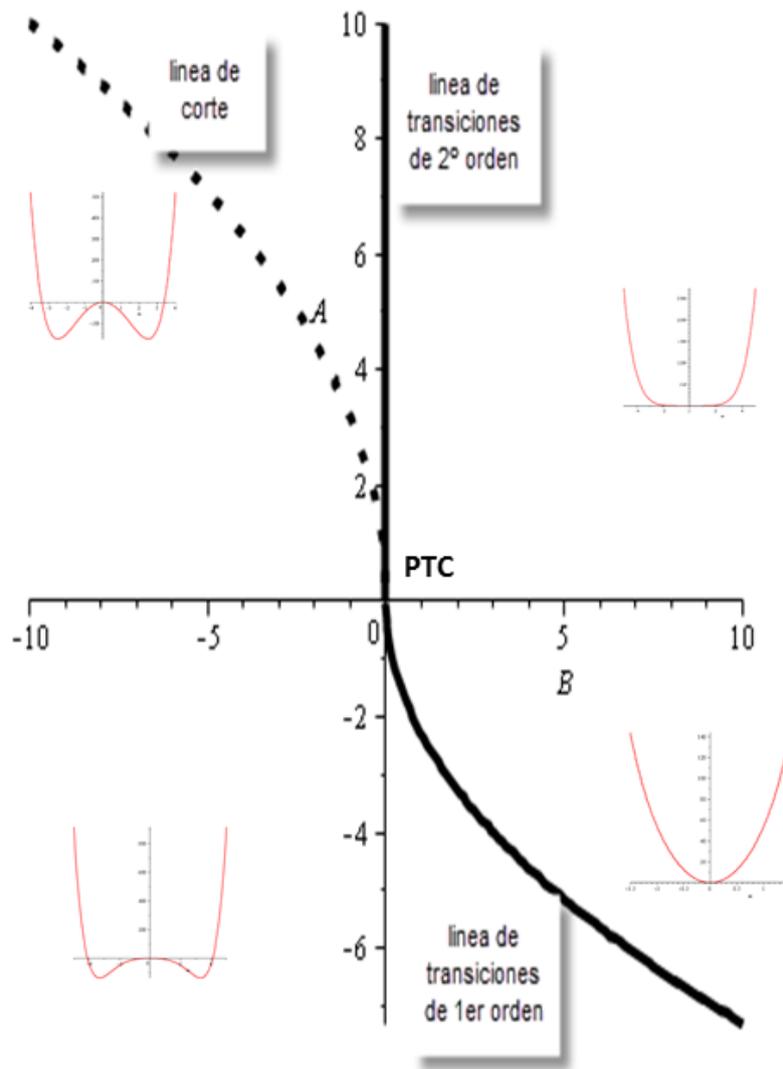


Figura A4.2: Diagrama de fase en el espacio de parámetros  
Se representa la forma de la energía libre en cada región

Cerca del origen, cuando el término en  $m_0^2$  puede despreciarse, predomina el comportamiento tricrítico, difícil de observar para un  $B > 0$  suficientemente grande. Si por el contrario, el término en  $m_0^2$  domina al término en  $m^4$  tenemos una transición tradicional de segundo orden. Los dos comportamientos están separados por una línea de corte, tal que  $\frac{B^2}{C} \ll |A|$ , representada en la figura con trazo discontinuo.

## Apéndice 5: Análisis de campo medio del modelo Ising

La teoría de campo medio es la herramienta básica que se utiliza como primera aproximación para el estudio de un modelo físico en Mecánica Estadística. Vamos aplicarla en este Apéndice al modelo Ising de dos estados.

Cuando un sitio, por ejemplo el 0, cambia de estado, la energía del sistema varía en

$$\Delta H = 2h + 2 \sum_{\{S_{\bar{i}}\}} JS_i = - \left( h + \sum_{\{S_{\bar{i}}\}} JS_i \right) \cdot \Delta S_0 \quad (\text{A5.1})$$

Siendo  $\{s_{\bar{i}}\}$  el conjunto de los vecinos inmediatos de 0 en este caso

Esto sería la misma variación que se obtendría para un material magnético inmerso en un campo

$$h_{ef} = h + \sum_{\{S_{\bar{i}}\}} J \langle S_i \rangle \quad (\text{A5.2})$$

El valor medio del spin para un elemento aislado sometido a un campo externo  $h$  se calcularía de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{1}{z} \sum_{\{S\}} S e^{-\beta S} \\ z &= \sum_{\{S\}} S e^{-\beta S} \\ \langle S \rangle &= th(\beta h) \end{aligned} \quad (\text{A5.3})$$

Y ahora, sustituyendo  $h$  por  $h_{ef}$  :

$$\langle S \rangle = th \left[ \beta \left( h + \sum_{\{S_{\bar{i}}\}} J \langle S_i \rangle \right) \right] \quad (\text{A5.4})$$

Definiendo  $m = \langle S_i \rangle$  tenemos una ecuación trascendente en  $m$ :

$$m = th \left[ \beta (h + zJm) \right] \quad (\text{A5.5})$$

Donde  $z$  es el número de coordinación de la malla (el número de vecinos inmediatos).

Esta ecuación debe resolverse numéricamente, pero es trivial un análisis cuantitativo gráfico:

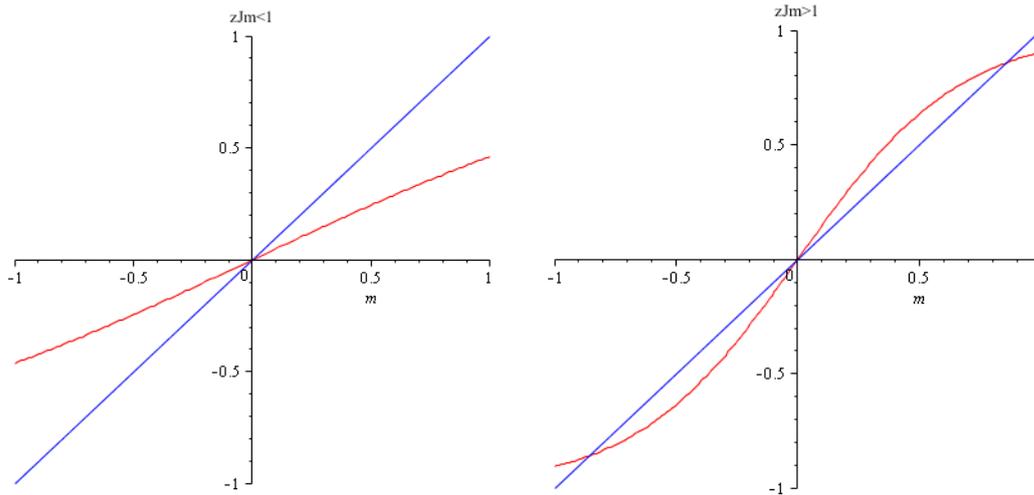


Figura A5.1. Análisis gráfico de la solución de campo medio.

En la figura A5.1 vemos una solución gráfica de la ecuación para la magnetización. Con campo externo distinto 0 hay siempre al menos una solución y a veces tres. Con campo externo nulo existe siempre la solución  $m = 0$ , y si  $\beta J z > 0$  otras dos,  $\pm m_0$ . Es decir, hay una transición de fase con la temperatura. Esta transición es de orden II cuando un nuevo estado de simetría reducida surge continuamente de la fase desordenada (alta temperatura). La fase ordenada tiene una simetría menor (rota). Hay también una transición continua (la magnetización se hace no nula continuamente pero con derivada discontinua) se produce disminuyendo la temperatura por debajo de  $T_c$  con  $H = 0$ , y la transición de orden I con el campo  $H$  cambiando de signo a  $T < T_c$ . La temperatura crítica se obtiene igualando los gradientes en el origen y resulta ser  $T_c = \frac{zJ}{k_B}$

Es también significativa la forma de la energía libre para diferentes valores de la temperatura. En la Figura A5.2 puede verse una familia de curvas para diferentes valores de temperatura y campo externo 0. La simetría del sistema implica la aparición de mínimos (estados estables que corresponden a fase ferromagnética) para magnetización no nula cuando la temperatura es menor que la crítica, o sea, el orden disminuye la energía mínima. El mínimo local para magnetización 0 (fase paramagnética) es inestable por debajo de esta temperatura.

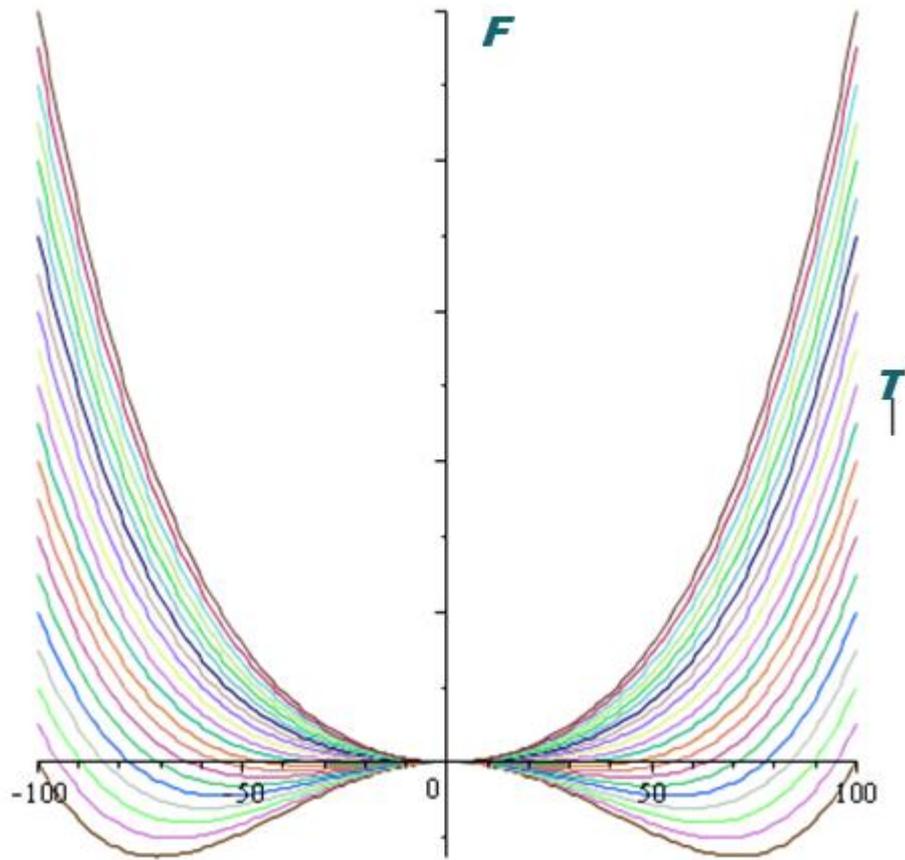


Figura A5.2. Energía libre de campo medio en el modelo Ising.  
Las diferentes curvas corresponden a varias temperaturas

Si nos aproximamos a la temperatura crítica desde abajo, es lícito hacer una expansión de Taylor de la tangente hiperbólica:

$$m_0(T) \approx \beta z J m_0 - \frac{1}{3} (\beta z J)^3 m_0^3 \quad (\text{A5.6})$$

De donde se obtiene<sup>20</sup>

$$m_0(T) \propto \left( \frac{T_c}{T} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A5.7})$$

<sup>20</sup> En contraste con al análisis de redes libres de escala, para las que el exponente crítico va de  $\frac{1}{2}$  a  $\infty$  conforme el exponente de la distribución de grados va de 5 a 3, marcando un aumento del orden de la transición de fase de 2 a  $\infty$

## Apéndice 6: Descripción de la simulación

Vamos a simular un modelo que implementa desorden congelado (*quenched*) en los acoplamientos ferromagnéticos, y el acoplamiento con el campo cristalino constante. Las  $J_{ij}$  son asignadas bajo una distribución de Poisson por el programa. Ver, por ejemplo [49] para este tipo de simulaciones.

El modelo clásico de Ising no tiene una dinámica inherente, de modo que para construir un modelo dinámico tenemos que acoplar los agentes a un “baño térmico” que induzca cambios de estado.

En este contexto,  $\beta$  no está directamente con la temperatura física; es simplemente un sistema que controla el nivel de ruido, o dicho de otra forma, la probabilidad de que se viole una regla determinista de cambio de estado.

Suponemos el proceso de cambio de estado Markoviano, es decir, cada agente conoce únicamente el estado de los demás inmediatamente antes de cambiar y no tiene memoria.

Vamos a implementar en nuestra simulación tres posibles dinámicas, que se eligen mediante un botón de configuración y se implementan mediante los siguientes algoritmos. La dinámica es secuencial, en el sentido de que en todos los casos elegimos aleatoriamente un nodo, aunque un parámetro de configuración interno permite hacerla paralela eligiendo el número de nodos que se escogen simultáneamente para cambiar.

### Yedidia

Algoritmo tomado de [4]

1. Se elige un posible nuevo estado diferente al actual
2. Se calcula la nueva energía
3. Si la diferencia es  $< 0$ , se realiza el cambio
4. En otro caso, se acepta con probabilidad  $P(S_i \rightarrow S'_i) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\Delta E}{k_B T}}}$

### Metropolis

1. Se elige un posible nuevo estado diferente al actual
2. Se calcula la nueva energía
3. Si la diferencia es  $< 0$ , se realiza el cambio
4. En otro caso, se acepta con probabilidad  $P(S_i \rightarrow S'_i) = e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$

## Glauber [44]

1. Se elige un posible nuevo estado diferente al actual
2. Se calcula la nueva energía
3. La probabilidad de cambiar al nuevo estado es  $P(S_i \rightarrow S_i') = \frac{1}{2} (1 + th(\beta h_i S_i'))$ ,  
donde  $h_i = \sum_j J_{ij} S_j$  es el campo efectivo

La implementación es un modelo de agentes construido con Netlogo v 5.0.2, que utiliza un algoritmo de Uri Wilenski para la generación del substrato Watts-Strogatz.

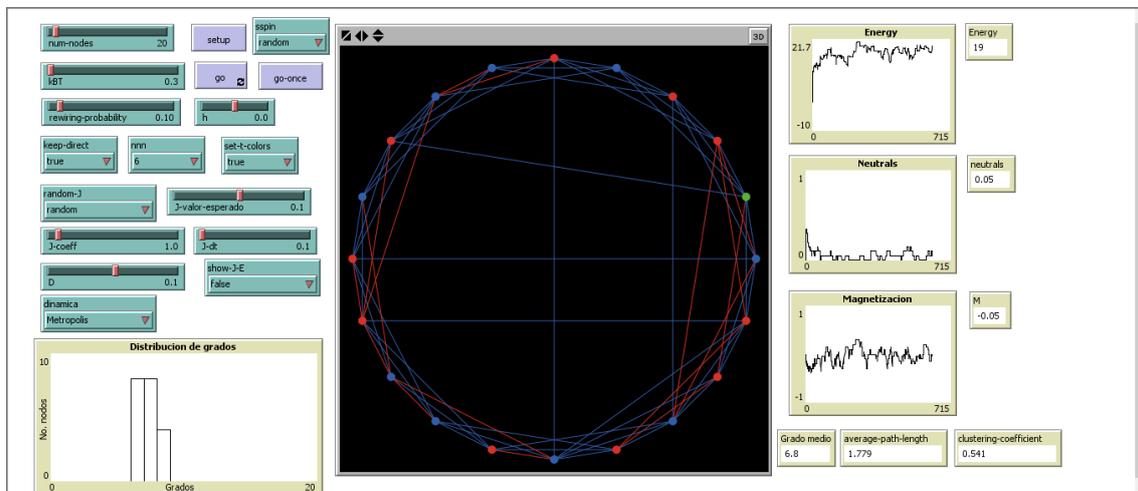


Figura A6.1. Panel de control de la simulación

La utilidad de los componentes es la siguiente:

### num-nodos

Número de nodos para crear la red

### kBT

Especifica la temperatura

### sspin

Valor inicial de los spins, puede ser aleatorio, 0, +1 ó -1

### setup, go, go-once

Comandos de construcción y ejecución

### rewiring-probability

Parámetro  $\phi$

### h

Campo externo

### keep-direct

Eliminar los enlaces reconectados (modelo de reconexiones) o conservarlos (modelos de atajos)

**nnn**

Número de vecinos inmediatos

**set-t-colors**

Distinguir el estado de los agentes con un color o no (verde = neutro, rojo = -1, azul = 1)

**random-J**

Especificar valor aleatorio para las constantes de acoplamiento J, o bien todos los enlaces con 1 ó con -1

**J-valor-esperado, J-dt, J-coeff**

Parámetros que definen la distribución de las constantes de acoplamiento J

**D**

Constante de anisotropía  $\Delta$

**show-J-E**

Mostrar en pantalla los valores de J y de la energía E de los enlaces y los nodos respectivamente.

**Distribución de grados**

Histograma con la distribución producida en cada caso

**Energía, Neutrals y Magnetización**

Gráficas e indicadores de las variables del modelo

**Grado medio, Average-Path-Length y Clustering-Coefficient**

Indicadores de variables del substrato

**dinamica**

Puede tener los valores Glauber, Metropolis o Yedidia. Especifica el algoritmo utilizado para la dinámica de cambio de estado

**Limitaciones**

Por limitaciones de máquina –el tiempo de ejecución es prohibitivo para  $N > 1000$ - trabajamos normalmente con 100 nodos. Esto es aceptable para estudiar el caso de coaliciones entre países (no lo sería en otros casos), pero entonces el efecto de las fluctuaciones es notable.

Por otra parte, el número de agentes no puede ser demasiado pequeño, teniendo en cuenta que trabajamos con 6 vecinos inmediatos debido al rango de aplicación de las fórmulas de la conectividad en el modelo Watts-Strogatz. Lógicamente, tampoco son válidas las aproximaciones de campo medio que se han utilizado a lo largo del trabajo.

## Tabla de Figuras

Figura 1: Magnetización vs temperatura a distintos valores de $x$ y $J$ .....	13
Figura 2. Solución gráfica para la magnetización .....	17
Figura 3: Soluciones para $1-x$ .....	18
Figura 4. Diagrama de fases para el modelo BC en el plano $T-\Delta$ . .....	20
Figura 5. Modelo de Watts-Strogatz.....	22
Figura 6. Distribución de conectividades .....	25
Figura 7: Magnetización espontánea en función de la temperatura en el modelo Ising. 27	
Figura 8: Panorama de energías en modelo AB .....	35
Figura 9: distribución de grados en una red WS. ....	48
Figura 10: Comportamiento de la magnetización con distribución Poisson. ....	51
Figura 11: Neutralidad ( $1-x$ ).....	53
Figura 12. Neutralidad ( $1-x$ ) en función de $M$ y $\beta$ para distintos valores de $\Delta$ y $J$ .....	54
Figura 13. Constante $C$ vs probabilidad de reconexión.....	56
Figura 14. Existencia de soluciones para la temperatura crítica.....	57
Figura 15: Magnetización con distribución WS con reconexiones .....	59
Figura 16: Comportamiento del P.O. ....	60
Figura 17. Neutralidad ( $1-x$ ) en función de $M$ y $\beta$ para distintos valores de $\Delta$ y $J$ .....	61
Figura 18. Constante $C$ vs probabilidad de reconexión.....	63
Figura 19. Existencia de soluciones para la temperatura crítica.....	64
Figura 20: Magnetización con distribución WS con atajos .....	66
Figura 21: Comportamiento del P.O. relacionado con la neutralidad .....	67
Figura 22. Neutralidad ( $1-x$ ) en función de $M$ y $\beta$ para distintos valores de $\Delta$ y $J$ .....	68
Figura 23. Neutralidad vs $M$ para distintos valores de $\Delta$ , $J$ y $\phi$ .....	70
Figura 24. Efecto de $\Delta < 0$ .....	71
Figura 25. $\Delta$ vs $J$ para una temperatura fija. ....	72
Figura 26. Gráficas de $M$ (a) y $1-x$ (b) en la Región I.....	74
Figura 27. $J$ pequeña, $\Delta$ grande .....	76
Figura 28. Gráficas de $M$ (a) y $1-x$ (b) en la Región II.....	78
Figura 29. $J$ grande, $\Delta > J$ .....	80
Figura 30. Gráficas de $M$ (a) y $1-x$ (b) en la Región II.....	82
Figura 31. $J$ grande, $\Delta > J$ .....	85
Figura 32. Efecto de la probabilidad de reconexión $\phi$ .....	87
Figura A2.1. Simulación del modelo Galam .....	93
Figura A2.2. Estados de equilibrio en el modelo Galam.....	94
Figura A4.1 Coexistencia de fases en un sistema compuesto. ....	97
Figura A4.2: Diagrama de fase en el espacio de parámetros.....	99
Figura A5.1. Análisis gráfico de la solución de campo medio.....	101
Figura A5.2. Energía libre de campo medio en el modelo Ising .....	102
Figura A6.1. Panel de control de la simulación.....	104

## Bibliografía

- [1] S. Galam, Sociophysics, a physicist's modelling of psycho-political phenomena. Springer 2012
- [2] T. Antal, P.L. Krapivsky & S. Redner. Social Balance on Networks: The Dynamics of Friendship and Enmity. arXiv:physics/0605183v1 [physics.gen-ph] 21 May 2006
- [3] G.G. Naumis, F. Samaniego-Steta, M. del Castillo-Mussot, G. Vazquez. Three-body interactions in sociophysics and their role in coalition forming. Physica A 379 (2007) 226-234
- [4] J. Busquets. Statistical Mechanics of the Blume-Emery-Griffith Neural Network. Tesis Doctoral
- [5] D. Bollé, R. Erichsen, W.K. Theumann. A layered neural network with three-state neurons optimizing the mutual information. ArXiv:cond-mat/0305587v1 26/may/2003
- [6] J.S. Yedidia. Neural Networks that use three-state neurons. 17/Jan/1089
- [7] D. Bollé J. Busquets. The Blume-Emery-Griffith neural network with synchronous updating and variable dilution. ArXiv:cond-mat/0505326v1 12/may/2005
- [8] D. Bollé, R. Erichsen, D.R.C. Dominguez, Elka Korutcheva, W.K. Theumann. Time evolution of the extremely diluted Blume-Emery-Griffith neural network. ArXiv:cond-mat/0208281v2 14/aug/2002
- [9] Yao-Hui Yang. Blume-Emery-Griffith dynamics in Social Networks. ArXiv:physics.soc-ph/90810.2829v2 14/jun/2013
- [10] N.N. Ganikhodjaev & A.D. Idris. The Blume-Emery-Griffith Model on Cayley Trees and its Phase transitions.
- [11] M. Seferoglu, A. Ozkan & B. Kutlu. First Order Phase Transition in the 3-dimensional Blume-Capel Model on a Cellular Automata. arXiv: cond-mat/0507550v1 [cond-mat.stat-mech] 23 Jul 2005
- [12] M. Blume, J. Emery & R.B. Griffiths. Ising Model for the  $\lambda$  Transition and Phase Separation in Mixtures., Phys.Rev. A, vol 4, no 3, (1971)
- [13] D.R. Dominguez & E. Korutcheva. Three-State Neural Networks: From Mutual Information to the Hamiltonian. arXiv:cond-mat/9912328v1
- [14] M. Plischke & B. Bergersen. Equilibrium Statistical Physics. World Scientific 1994
- [15] P.P. Fernandez, F.W.S. Lima & J.A. Plascak. Blume-Capel model on directed and undirected Small-World Voronoi-Delanney random lattices. arXiv: 1001.2918v1 [cond-mat.stat-mech] 17 Jan 2010
- [16] G. Gulpinar & E. Vatrosecar. Kinetic Blume-Capel Model with Random Diluted single-ion anisotropy. arXiv:1101.1592v2 [cond-mat.stat-mech] 12 Jun 2011

- [17] A. Malakis, A.N.Barker, N.G.Fytas, T.Papakonstantinou. Universality aspects of the  $d=3$  random bond Blume-Capel Model. arXiv:1203.0985v2 [cond-mat.stat-mech] 31 May 2012
- [18] M.E.J. Newman, C.Moore, D.J. Watts. Mean-field solution of the small-world network model. Santa Fe Institute, Sept.1999
- [19] Random Graphs and Watts-Strogatz, Wellesley College, Lecture notes
- [20] M.E.J. Newman & D.J. Watts, Renormalization group analysis of the small-world network model, Santa Fe Institute, Marzo 1999
- [21] M.E.J. Newman. Networks, An Introduction. Oxford, 2010.
- [22] M.Barthelemy & L.A.N. Amaral, “Small-world networks: Evidence for a crossover picture”, Phys.Rev.Lett, 82, 3180-3183 (1999)
- [23] D.J. Watts. Small Worlds, Princeton 1999
- [24] A. Barrat & M. Weigt. On the properties of small-world network models. arXiv:cond-mat/9903411v2 [cond-mat.dis-nn] 25 Aug 1999
- [25] M.E.J. Newman, C.Moore, D.J. Watts, Phys. Rev. Letter 84, 3201,
- [26] S.N. Dorogovtsev, D.A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes. Critical phenomena in complex networks. arXiv:0705.0010v6 [cond-mat.stat-mech] 16 Nov 2007
- [27] S.N. Dorogovtsev, D.A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes. Critical phenomena in networks. arXiv: cond-mat/0204596v2 [cond-mat.stat-mech] 21 Jan 2003
- [28] S.N. Dorogovtsev, D.A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes. Ising Model on Networks with an arbitrary Distribution of Connections. arXiv:cond-mat/0203227v3 [cond-mat.stat-mech] 11 Apr 2002
- [29] S.N.Dorogotsev. Lectures on Complex Networks, Oxford 2010
- [30] N. Goldenfeld. Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group, Addison-Wesley, 1992
- [31] R.J. Baxter. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Dover, 2007.
- [32] J.P. Sethna. Entropy, Order Parameters and Complexity. Oxford, 2006
- [33] A. Aleksiejuk, J.A. Holyst, D. Stauffer. Ferromagnetic Phase Transition in Barabasi-Albert Networks. arXiv:cond-mat/0112312v1 [cond-mat.stat-mech] 17 Dec 2001
- [34] K. Lewin. Field Theory in Social Science. Harper, NY, 1951
- [35] R. Axelrod. The Complexity of Cooperation, agent-based models of competition and collaboration, Princeton 1997
- [36] S.Galam. Comment on ‘A landscape theory of aggregation’, arXiv:cond-mat/9901062v1, 8 Jan 1999
- [37] R. Axelrod&D.S. Bennett. Response to Galam’s comment. British Journal of Political Science, Vol.28, No. 2 (April 1998), pp. 412-414
- [38] S. Galam, Fragmentation vs Stability in Bimodal Coalitions, Physica A 230, 174-88 (1996)
- [39] S. Galam, Spontaneous Coalition forming, Lecture notes in computer science 2493, 2002
- [40] R. Florian & S.Galam. Optimizing conflicts in the formation of strategic alliances. Eur. Phys. JB 16, 189-194 (2000)
- [41] K.H. Fischer & J.A. Hertz, Spin Glasses, Cambridge, 1991

- [42] Ruben Marrero. Trabajo final de la asignatura de Sociofísica, 2013
- [43] D.Peña, H.Correa, C.A. Lozano. The Blume-Emery-Griffiths Spin-Glass Model. Revista Colombiana de Física, 2009
- [44] R. D'Souza. Simulating Glauber Dynamics for the Ising Model. Lecture notes at UC Davis
- [45] C. Bonati. Tricritical points in field theory and statistical mechanics: from Potts models to finite density QCD, en "New frontiers in Lattice Gauge Theory", Florencia, 29/08/2012
- [46] L. Peliti. Statistical Mechanics in a Nutshell. Princeton, 2006.
- [47] D.I. Uzunov. Theory of Critical Phenomena, World Scientific 1993
- [48] J.M. Yeomans. Statistical Mechanics of Phase Transitions, Oxford 1992
- [49] J.H. Miller & S.E. Page. Complex Adaptive Systems, an introduction to computational models of social life. Princeton 2007