



UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Trabajo de Fin de Máster en I.A. avanzada: fundamentos, métodos y aplicaciones

# **SEGMENTACIÓN DE CONTORNOS CIRCULARES A PARTIR DE MEDICIONES TOMADAS CON LÁSER**

MIGUEL ÁNGEL MUÑOZ BAÑÓN

Dirigido por: JOSÉ MANUEL CUADRA TRONCOSO

Subdirector: JOSÉ RAMÓN ÁLVAREZ SÁNCHEZ

Curso: 2016-2017: 2ª Convocatoria





# **SEGMENTACIÓN DE CONTORNOS CIRCULARES A PARTIR DE MEDICIONES TOMADAS CON LÁSER**

Trabajo de Fin de Máster

Realizado por: Miguel Ángel Muñoz Bañón

Dirigido por: José Manuel Cuadra Troncoso

Subdirector: José Ramón Álvarez Sánchez

Tribunal calificador

Presidente: D/D<sup>a</sup>.

Secretario: D/D<sup>a</sup>.

Vocal: D/D<sup>a</sup>.

Fecha de lectura y defensa: 02/09/2017

Calificación:



# Resumen

En este trabajo se va a desarrollar un método de segmentación de scans laser con el objetivo de poder estimar circunferencias que puedan aparecer en dichas observaciones. En el trabajo previo "Improving area center robot navigation using a novel range scan segmentation method ", publicado en 2011, se utiliza el filtro de Kalman extendido (EKF) para estimar segmentos rectilíneos. Este método, equivalente a un método de mínimos cuadrados ponderados no lineales, se extiende en el presente trabajo para calcular las ecuaciones de los segmentos circulares en coordenadas polares. Este proceso se divide en tres bloques: La segmentación de todo el scan láser para diferenciar los diferentes segmentos. La obtención de los parámetros iniciales de las circunferencias encontradas, que servirán como inicializaciones para el filtro de Kalman. Y, finalmente, la estimación de los parámetros de la circunferencia. También se describirán métodos para distinguir las rectas de los círculos segmentados, así como la detección final de los extremos de cada segmento durante la estimación, utilizando herramientas propias de los modelos de regresión clásicos, como la detección de valores atípicos (outliers). Durante el desarrollo de este método surgen problemas de proximidad a la indeterminación en las matrices de covarianza. En este documento se expondrá la aplicación de la regularización de Tikhonov para solventar este problema. El EKF, al ser un proceso recursivo, nos permite la repetición de la estimación para mejorar los resultados. Proponemos un método para la corrección de los parámetros iniciales de la circunferencia, para la reestimación, con el fin de solventar problemas derivados de la no linealidad del modelo de la circunferencia.

## Abstract

The method for range scan segmentation described in a previous paper titled "Improving area center robot navigation using a novel range scan segmentation method", by some authors of present paper in 2011, uses an extended Kalman filter (EKF) for estimating straight segments equations in polar coordinates. That method, equivalent to a non-linear weighted least squares method, is extended in present work for estimating circle segments equations in polar coordinates, but only to the first stages of the full method, including acquisition of initial estimation of circles centers and radii to be used as initial values for EKF an the sequential iterative estimation of circle equations using EKF. The new problem of variance matrices being almost ill-conditioned for circle equations is addressed with a Tikhonov regularization, or ridge regression. Also a correction of initial values for estimations is proposed to solve the added problems found in circle equations estimation.

# Índice general

<b>1. Introducción general y objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación y objetivos . . . . .	1
1.2. Estructura de la memoria . . . . .	2
<b>2. Estado del arte</b>	<b>5</b>
2.1. Planteamiento del problema . . . . .	5
2.2. <i>Scale-space</i> . . . . .	6
2.2.1. Formulación teórica . . . . .	6
2.2.2. Discretización . . . . .	7
2.2.3. Árbol de intervalos . . . . .	8
2.3. Procedimientos de estimación . . . . .	8
2.3.1. El método de regresión clásico . . . . .	8
2.3.1.1. Mínimos cuadrados ordinarios (MCO) . . . . .	9
2.3.1.2. Modelos no lineales . . . . .	10
2.3.2. Filtros de Kalman . . . . .	11
<b>3. EKF para la estimación de círculos</b>	<b>13</b>
3.1. Introducción . . . . .	13
3.2. Estimación de círculos . . . . .	13
3.3. La regularización de Tikhonov . . . . .	17
3.4. Corrección de la estimación para reestimar . . . . .	20
<b>4. Clustering mediante scale-space</b>	<b>23</b>
4.1. Introducción . . . . .	23
4.2. Curvas de nivel . . . . .	23
4.3. Árboles de intervalos . . . . .	25
<b>5. Extracción de círculos en scan láser</b>	<b>27</b>
5.1. Introducción . . . . .	27
5.2. Inicialización del EKF . . . . .	28

---

5.3. Distinción entre segmentos . . . . .	30
5.4. Detección de los extremos del círculo . . . . .	32
5.4.1. El procedimiento bilateral . . . . .	32
5.4.2. Detección de break points . . . . .	33
5.4.3. Mezcla de segmentos, solapes y huecos . . . . .	34
<b>6. Resultados experimentales</b>	<b>37</b>
6.1. Descripción de los experimentos . . . . .	37
6.2. Resultados . . . . .	37
<b>7. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>39</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	39
7.2. Trabajos futuros . . . . .	39



# Nomenclatura

EKF Filtro de Kalman Extendido, página 5

GN Algoritmo de Gauss-Newton, página 10

$I_n$  Matriz identidad de orden  $n$ , página 9

MCO Mínimos Cuadrados Ordinarios, página 9

MCONL Mínimos Cuadrados Ordinarios No Lineales, página 10

$SCR$  Suma de cuadrados residual, página 8



# Índice de figuras

3.1. Círculo en coordenadas polares y rectangulares . . . . .	15
3.2. Corrección de la estimación . . . . .	21
4.1. Ejemplo de scan con semillas . . . . .	24
4.2. Curvas de nivel para la primera y segunda derivada . . . . .	24
4.3. Árboles de intervalos . . . . .	25
5.1. Diagrama de bloques . . . . .	27
5.2. Ejemplo de inicialización . . . . .	30
5.3. Scan laser representando mundo . . . . .	31
5.4. Estimación del ruido en el modelo del círculo . . . . .	31
5.5. Estimación del ruido en el modelo de la recta . . . . .	32
5.6. Detección de break points . . . . .	34
5.7. Estimación a partir de un scan láser . . . . .	35



# Índice de tablas

6.1. Tabla de errores para el mundo 1, círculo 1. . . . .	38
6.2. Tabla de errores para el mundo 1, círculo 2a. . . . .	38
6.3. Tabla de errores para el mundo 1, círculo 2b. . . . .	38



# Capítulo 1

## Introducción general y objetivos

### 1.1. Motivación y objetivos

Algunos entornos adecuados para robots móviles incluyen, además de las paredes rectas habituales, objetos cilíndricos como obstáculos. Algunos ejemplos de objetos cilíndricos que nos podemos encontrar en un entorno, podrían ser: columnas, farolas, árboles, etc. Esto nos permite generar una abstracción de todos estos obstáculos con un modelo de circunferencia. El modelado del entorno puede permitir trabajar a más alto nivel a la hora de implementar algoritmos de navegación o mapeado. A fin de mejorar la técnica SLAM (Simultaneous Localization and Mapping) en tales entornos, el método para extraer segmentos rectilíneos de un scan láser descrito por Cuadra et al. Cuadra Troncoso et al. (2011) se puede ampliar para extraer también segmentos circulares. La forma más extendida para crear mapas en SLAM es la de rejilla (grid-based), que divide el mapa en celdas, y asigna una probabilidad a cada una de ellas de que exista un obstáculo en ese punto. Esta metodología acarrea como consecuencia una necesidad de recursos computacionales, así como de memoria, para la realización de mapas de cierto tamaño, dependiendo la calidad siempre de la resolución de dichas rejillas. Por otra parte, las tareas de localización y de mapeo bajarían al nivel de abstracción de celda, lo cual es demasiado bajo para un algoritmo de estas características. Con el método de modelado del entorno que proponemos, se pretende mejorar sustancialmente los problemas de memoria asociados a las rejillas, además de darnos un nivel de abstracción más alto, que, incluso, permitiría la inclusión de clasificadores para la detección de obstáculos en el entorno.

El método original para extraer segmentos rectilíneos de un scan láser consta de varias etapas: agrupación de segmentos, estimación de valores iniciales, EKF filtro de Kalman la estimación secuencial de segmentos y la fusión de segmentos similares. Se ha aplicado con éxito Santosjuanes et al. (2013); Troncoso et al. (2015) para SLAM online.

La fase de clustering agrupa las medidas láser adyacentes en segmentos separados por esquinas o saltos significativos entre dos mediciones adyacentes. La fase de clustering la implementamos utilizando la teoría scale-space Lindeberg (1990) para proporcionar una representación de varias

escalas de la señal de exploración formada por versiones suavizadas de esa señal. El procedimiento de árbol de intervalos Witkin (1984) se utiliza para seleccionar las escalas naturales (más significativas) para representar el mundo detectado por el láser.

Las semillas para la estimación de valores iniciales de EKF se extraen de conjuntos de medidas de cada núcleo de los segmentos agrupados en la fase descrita en el párrafo anterior. El método no utiliza todos los segmentos porque podrían tener extremos borrosos. Para segmentos rectos, la estimación inicial se obtiene utilizando la mediana repetida Siegel (1982). Este método es aplicable solamente para los modelos lineales, pero este no es el caso con los círculos. En este trabajo hemos realizado una variante aplicada a círculos que describiremos con más detalles en la sección 5.2.

La estimación secuencial de segmentos EKF se ejecuta utilizando coordenadas polares como un método de Gauss-Newton. En el caso de modelos lineales esta estimación es equivalente a una regresión lineal Peña (1985), por lo que el conjunto de herramientas de regresión están disponibles para usar. Una de estas herramientas es especialmente útil para detectar extremos de segmentos: la detección de outliers t-test Johnston and DiNardo's (1996). Sin embargo utilizaremos este procedimiento con el EKF debido a su carácter secuencial. Puntualizaremos mejor este hecho en el capítulo 3. En el caso de las circunferencias, realizamos una aproximación lineal del modelo, con lo cual disponemos de las herramientas anteriormente mencionadas. Esta aproximación al modelo lineal acarrea una serie de problemas que no encontramos en el caso de la aproximación al modelo lineal de una recta en coordenadas polares. Describiremos esto con más detalle en el capítulo 3.

La fusión de segmentos similares se propone realizar mediante el test de Chow Johnston (1984), en el que se combinan segmentos con ecuaciones similares. Para incluir los segmentos circulares, como un primer enfoque, consideraremos convexos los segmentos de los círculos desde el punto de vista de un observador situado en el exterior del objeto circular.

## 1.2. Estructura de la memoria

La memoria de esta proyecto se estructura en los siguientes capítulos:

1. Introducción general y objetivos
2. Estado del arte
3. EKF para la estimación de círculos
4. Clustering mediante scale-space
5. Extracción de círculos en scan láser
6. Resultados experimentales
7. Conclusiones y trabajos futuros



Esta memoria se divide básicamente en tres bloques fundamentales, los cuales se exponen en los capítulos de 3 a 5. En primer lugar, en el capítulo EKF para la estimación de círculos se describe el proceso de estimación de circunferencias aisladas, es decir, asumiendo que conocemos en qué puntos de las observaciones láser se encuentran los extremos de dicha circunferencia. Aquí se comenta el modelo la aproximación al modelo lineal y los problemas que ello acarrea. En esa sección se verá todo el algoritmo de implementación del EKF, y se comentarán cálculos que serán de utilidad en secciones posteriores.

En el capítulo Clustering mediante scale-space, se describe el método utilizado para la agrupación de segmentos, de los cuales obtenemos una serie de semillas que nos serán de utilidad para la inicialización del EKF. En esta sección se comentarán métodos para el filtrado en caso de observaciones ruidosas que podrían dar lugar a la obtención de segmentos erróneos.

En el capítulo Extracción de círculos en scan láser, se describe el procedimiento para aplicar el EKF descrito en el capítulo 2, sobre un scan de medidas de rango completo, disponiendo previamente de las semillas obtenidas del proceso descrito en el capítulo anterior. Este procedimiento implica la distinción entre segmentos rectilíneos o circulares. Además el procedimiento debe detectar los break points que indicarían el fin del proceso en ese punto.

Finalmente se comentan una serie de conclusiones así como posibles líneas de investigación futuras.



# Capítulo 2

## Estado del arte

### 2.1. Planteamiento del problema

Si quisieramos representar el entorno por el que nos movemos, con un robot móvil, dibujaríamos una versión simplificada, o de más alto nivel, del mismo. Por ejemplo, para una pared irregular, trazaríamos una recta para representarla. Lo mismo puede ocurrir con formas circulares, por ejemplo, para dibujar un ciprés en un plano de dos dimensiones, dibujaríamos una circunferencia. El nivel de detalle que queramos emplear vendrá determinado por la tarea a realizar con dicho plano. Si se dispone de mediciones de rango láser y se intenta construir un determinado modelo geométrico a partir de ellas, nos encontramos con la cuestión del error de dichas mediciones con respecto al modelo. A parte del error propio del sensor láser, denominaremos error intrínseco de la superficie, al error propio de los materiales que conforman las superficies que van a dar forma al entorno. Por ejemplo un seto tiene una forma irregular en detalle, pero a alto nivel, podríamos trazar una recta para describirlo. Lo mismo ocurre con las forma circulares.

El problema de la segmentación y el modelado de un entorno a través de un conjunto de muestras de rango, podemos dividirlo en dos fases fundamentales Forsyth and Ponce (2003). Por un lado distinción de qué puntos son los que pertenecen a cada segmento, y por otro, la estimación de los parámetros que definen dichos segmentos, ya sean segmentos rectilíneos o circulares. En el primer caso utilizaremos lo que llamaremos detección de break points, lo que definirá los puntos donde se encuentran los extremos de los segmentos, pudiendo así distinguir entre unos y otros. Por otra parte, la estimación la realizaremos a través de métodos de regresión utilizando el filtro de Kalman extendido EKF. Los motivos para la utilización del EKF, es el hecho de que es un procedimiento secuencial, aunque veremos esto con más detalle en 3. Para facilitar la elección de los puntos donde realizar las estimaciones, así como facilitar la detección de extremos, se aplicará un procedimiento de *clustering* previo a la extracción.

La detección de círculos en aplicaciones de navegación y mapeo de robots, en la actualidad, es de gran interés. En un escaneado láser 2D, los círculos pueden representar: postes, columnas redondas,

árboles, personas, bobinas grandes, etc. Los métodos para la detección de círculos y la segmentación utilizan una gran variedad de técnicas. En el trabajo de Premebida and Nunes (2005), se puede encontrar una comparación entre varios métodos usando la segmentación basada en puntos (PDBS) y la segmentación basada en filtros de Kalman. Recientemente, en Zhou et al. (2016) se ha usado la PDBS mejorada con ajustes polinómicos y support vector machine (SVM) para la clasificación final. La transformada de Hough aplicada a círculos (CHT) ha sido utilizada extensamente. En Press and Austin (2004) compararon varios enfoques utilizando CHT para la detección de polos. En Aschoff and Spiecker (2004) emplean CHT seguido de una búsqueda de parámetros del círculo y en Huang et al. (2010) utilizan CHT y el random sample consensus (RANSAC). El clasificador de refuerzo adaptativo (AdaBoost) ha sido utilizado por Arras et al. (2007). En Xavier et al. (2005) emplean el método recursivo de ajuste de línea denominado variación de ángulo inscrito. La estimación de máxima verosimilitud para encontrar los parámetros del círculo es utilizada por Inoue et al. (2011). La estimación de mínimos cuadrados utilizando el algoritmo de Levenberg-Marquardt es utilizada por Teixidó et al. (2012) y por Wasik et al. (2015). El método basado en curvatura es empleado por Vázquez-Martín et al. (2009).

## 2.2. *Scale-space*

La teoría *scale-space* Witkin (1984) consiste en la convolución de una señal  $f(x)$ , de una dimensión, con núcleos gaussianos de varianza  $t$ . Esta convolución realiza un filtro paso-bajo, eliminando las componentes frecuenciales más altas de la señal, produciendo así una versión más suavizada de la misma. Estas convoluciones se realizan en diferentes valores de crecientes de la varianza  $t$ . Al aumentar la varianza de los núcleos gaussianos, la señal  $f(x)$  se suaviza cada vez en mayor medida. De este proceso se obtiene una señal  $F(x, t)$  bidimensional. En esta superficie los cambios de la señal aparecen como ceros de las primeras derivadas de  $F$ ,  $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}$ , máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Como se justificará en la sección 3.2, en este trabajo trataremos con la representación en coordenadas polares de medidas de rango, lo cual implica que la señal es unidimensional  $\rho = f(\varphi)$ .

Comentamos a continuación esta teoría matemática del *scale-space*, principalmente desarrollada por los trabajos de Lindeberg (1990, 1991, 1992, 1993, 1997).

### 2.2.1. **Formulación teórica**

Podemos definir como la representación *scale-space* lineal de  $f(x)$  como:  $F(x, t) = T(u; t) \star f(x)$ , siendo  $t > 0$  el parámetro de escala y  $T(u; t)$  los núcleos de convolución que filtrarán paso-bajo la señal unidimensional propuesta. Al incrementarse  $t$  se van produciendo versiones cada vez más filtradas de  $f$ . Estas versiones van extendiéndose en una segunda dimensión, haciendo que esta señal termine siendo una superficie (ver figura 4.2). Cuando los núcleos de convolución son gaussianos

$T(u; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right)$ ,  $t$  sería la varianza. Como consecuencia de esto último, podemos especificar una serie de propiedades:

1. Linealidad:  $T_t(af + bg) = aT_t(f) + bT_t(g)$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f$  y  $g$  son funciones reales.
2. Invariancia frente a traslaciones: si  $S_a$  designa al operador traslación,  $S_a(f(x)) = f(x - a)$ , se tiene que  $T_t(S_a(f)) = S_a(T_t(f))$ .
3. Estructura de semigrupo:  $T(u; t_1) * T(u; t_2) = T(u; t_1 + t_2)$ , que lleva asociada la propiedad de suavización en cascada,  $F(x, t_2) = T(u; t_2 - t_1) * F(x, t_1)$ .
4. Existencia de generador infinitesimal  $A$ :  $\frac{\partial F(x;t)}{\partial t} = (AF)(x; t)$
5. No creación de extremos locales, esta propiedad solo se da en una dimensión.
6. No se realizan los extremos locales  $\frac{\partial F(x;t)}{\partial t} \leq 0$  en los máximos espaciales y  $\frac{\partial F(x;t)}{\partial t} \geq 0$  en los mínimos espaciales, esta propiedad se da en cualquier número de dimensiones.
7. Simetría rotacional: existe una función  $h$  tal que  $T(u; t) = h(u^2; t)$ .
8. Invariancia de escala:  $\hat{T}(\omega_u; t) = \hat{h}\left(\frac{\omega_u}{h(t)}\right)$ , donde  $\hat{T}$  es la transformada de Fourier de  $T$ ,  $h$  es cierta función y  $\hat{h}$  su transformada.
9. Positividad.  $T(x; t) \geq 0$
10. Normalización:  $\int_{-\infty}^{\infty} T(u; t) dt = 1$ .

Una de las propiedades más interesantes, es la 5, ya que esta, nos asegura que no aparecerán nuevos extremos a escalas inferiores que no estén ya presentes en escalas superiores. También nos asegura que las propiedades localizadas en una escala determinada, podrán seguirse hasta escalas inferiores. Dado que el problema de encontrar extremos equivale al de hallar las curvas de nivel cero (*zero-crossing*) de  $\frac{\partial^k F(x;t)}{\partial t^k}$ , se tendrá que todas estas curvas han de comenzar y terminar en el nivel inferior.

### 2.2.2. Discretización

Hemos definido en la sección 2.2.1, de forma analítica, la representación scale-space. Pero en el presente trabajo, se pretende implementar esta representación para una aplicación real, lo que implica tener que trasladar estos conceptos al nivel de programación, y por lo tanto, a la representación discreta. No debemos confundir la representación discreta de núcleos gaussianos, con el muestreo de los mismos.

La expresión de la superficie  $F$  como convolución discreta vendrá dada por

$$F(x_n, t) = T(m; t) * f(x_n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T(m, t) f(x_n - m) \quad (2.1)$$

$T(m, t)$  son los análogos discretos de los núcleos gaussianos:

$$T(m, t) = e^{-\alpha t} I_m(\alpha t) = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + m + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m} \quad (2.2)$$

donde  $I_m(t)$  representa las funciones modificadas de Bessel de orden entero  $m$  y  $\alpha \geq 0$ , se puede hacer  $\alpha = 1$  sin pérdida de generalidad.

Otra cuestión es el necesario truncamiento del sumatorio de la convolución para hacerlo computable, de manera que el cálculo efectivo se realiza así:

$$F(x_n, t) = T * f = \sum_{m=-M}^M T(m, t) f(x_n - m)$$

$M$  suele tomarse como  $M = \lceil c\sqrt{t} \rceil + 1$ , o  $M = \lfloor c\sqrt{t} \rfloor$  si  $c\sqrt{t}$  es entero,  $\lceil \cdot \rceil$  denota la parte entera, con  $c$  entre 3 y 6, estos valores corresponden a probabilidades superiores a 0,999. Denominaremos a  $M$  como la semi-amplitud del núcleo.

Otras aproximaciones, que ya no cumplen todas las propiedades deseadas son posibles como: núcleos gaussianos muestreados, filtros cuya función de transferencia aproxima a la de  $T(m, t)$  o aproximaciones por pirámides Lindeberg and Bretzner (2003).

### 2.2.3. Árbol de intervalos

Una vez que la señal está representada con diferentes escalas, debemos elegir cuales son las curvas que describen las características invariantes a escala más significativas. Esta elección de características la realizaremos a través de árboles de intervalos Witkin (1984). Este procedimiento consiste en seleccionar las curvas de nivel, que comienzan y terminan en la base, en un rectángulo. El tamaño de este rectángulo vendrá dado por la anchura que marca el inicio y el fin de la curva, así como del nivel superior al que llega la curva. Podemos ver un ejemplo más claro de esto en 4.3.

## 2.3. Procedimientos de estimación

### 2.3.1. El método de regresión clásico

La siguiente relación definiría un modelo clásico de regresión:

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (2.3)$$

Siendo  $\beta$  un vector de  $k$  parámetros y  $\varepsilon$  una perturbación aleatoria normal (gaussiana). Esto hace que la  $y$  sea, por lo tanto, una función estocástica. Consideraremos  $X$  como un conjunto de variables deterministas.

Lo que se pretende, con el método de regresión es determinar una serie de parámetros  $\beta$  a partir de una serie de  $n$  observaciones de  $y$  y  $X$  para que hagan mínima la suma de los cuadrados de los errores (suma de cuadrados residual  $SCR$ ) cometidos en la estimación. Precisando, la expresión vectorial de la ecuación (2.3) con los tamaños matriciales queda:

$$y_{n \times 1} = X_{n \times k} \beta_{k \times 1} + \varepsilon_{n \times 1} \quad (2.4)$$

en este caso tendremos que  $\varepsilon \sim N(0_{n \times 1}, Q_{n \times n})$  con matriz de varianzas y covarianzas,  $Q$ , definida positiva y pediremos que  $\text{rang}(X) = k$ , así  $X'X$  será invertible.

### 2.3.1.1. Mínimos cuadrados ordinarios (MCO)

Si denominamos  $\hat{\beta}$  al estimador de  $\beta$ , obtendremos la expresión de los estimadores de los valores de  $y$ ,  $\hat{y}$ , y a partir de ella la de los errores de estimación  $e$ .

$$\begin{aligned} \hat{y} &= X\hat{\beta} \\ e &= y - \hat{y} \\ &= y - X\hat{\beta} \end{aligned} \quad (2.5)$$

La expresión de  $SCR$  queda

$$SCR = \sum_{i=1}^n e_i^2 = e'e = y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

derivando con respecto a  $\hat{\beta}$  e igualando a 0 se obtiene la expresión del estimador mínimo cuadrático ordinario (MCO):

$$\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'y \quad (2.6)$$

y por lo tanto queda

$$SCR = y'y - \beta'X'y$$

Bajo las hipótesis del teorema de Gauss-Markov (perturbaciones normales, de media cero, homocedásticas e incorreladas, o sea que  $Q = \sigma^2 I_n$ , donde  $\sigma^2$  es la varianza constante de las perturbaciones e  $I_n$  la matriz identidad de orden  $n$ ), se tiene que los estimadores MCO son lineales, insesgados y de mínima varianza. La expresión de su varianza es

$$\text{var}(\hat{\beta}_{MCO}) = \Sigma_{MCO} = \sigma^2(X'X)^{-1} \quad (2.7)$$

La estimación insesgada  $\hat{\sigma}^2$  de la varianza de la perturbación es,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n - k} \quad (2.8)$$

y la distribución de probabilidad asociada a ella es una  $\chi^2$  de Pearson con  $n - k$  grados de libertad,

$$\frac{e'e}{\sigma^2} = \frac{(n - k)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - k) \quad (2.9)$$

La estimación insesgada de la varianza de los estimadores es por lo tanto:

$$\hat{v}ar(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\Sigma}_{MCO} = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} \quad (2.10)$$

Con estos resultados se puede construir un test sobre las predicciones realizadas por el modelo comparándolas con los valores realmente observados. Así si  $X_{n+1}$  representa el vector con las nuevas observaciones de las variables  $X$  e  $y_{n+1}$  la nueva observación de  $y$ , el modelo que representa la relación entre estas observaciones es:

$$y_{n+1} = X'_{n+1}\beta + \varepsilon_{n+1}$$

donde  $\varepsilon_{n+1} \sim N(0, \sigma^2)$  y está incorrelada con  $\varepsilon$ .

En estas condiciones el error cometido en la predicción de  $Y_{n+1}$ , es

$$e_{n+1} = y_{n+1} - X'_{n+1}\hat{\beta}$$

y la distribución de probabilidad asociada es una  $t$  de Student con  $n - k$  grados de libertad:

$$\frac{e_{n+1}}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + X'_{n+1}(X'X)^{-1}X_{n+1}}} \sim t(n - k) \quad (2.11)$$

### 2.3.1.2. Modelos no lineales

En el presente trabajo vamos a tratar con funciones no lineales, aplicando el método de Gauss-Newton. Mostramos entonces el modelo de regresión para expresiones no lineales:

$$y = h(X; \beta) + \varepsilon \quad (2.12)$$

Para aproximar el modelo no lineal a un modelo lineal, calculamos el jacobiano de  $h$ ,  $J = \frac{\partial h(X; \beta)}{\partial \beta}$ , que ocupará el lugar de la matriz  $X$  en las ecuaciones (2.6), (2.7), (2.10) y (2.11). Por ejemplo de la ecuación (2.6) obtendríamos una fórmula para el estimador no lineal (MCONL)

$$\hat{\beta}_{MCONL} = (J'J)^{-1}J'y \quad (2.13)$$

El método de Gauss-Newton (GN) necesita arrancar con unos valores iniciales como cualquier otro basado en aproximaciones, y suele iterarse varias veces hasta alcanzar la precisión deseada o superar



un límite de iteraciones.

### 2.3.2. Filtros de Kalman

Vamos a definir primero lo que se denominan filtros gaussianos Thrun et al. (2005), donde la distribución de probabilidad que se obtiene como resultado, viene dada por:

$$P(x) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right\} \quad (2.14)$$

Que es una distribución normal multivariante de media  $\mu$  y covarianza  $\Sigma$ . La técnica más utilizada para la implementación de filtros gaussianos es el filtro de Kalman. En este procedimiento la probabilidad condicional  $P(x_t|x_{t-1}, u_t)$  se define como una función lineal:

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t \quad (2.15)$$

Donde  $\varepsilon_t$  es ruido gaussiano aditivo de media  $\mu = 0$ , y covarianza  $R_t$ . Si sustituimos entonces  $\varepsilon_t$  en el modelo de ruido gaussiano especificado en 2.14, tenemos que:

$$P(x_t|x_{t-1}, u_t) = \det(2\pi R_t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)^T R_t^{-1}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)\right\} \quad (2.16)$$

Donde la media es  $\mu = A_t x_{t-1} + B_t u_t$ , y la matriz de covarianza es  $R_t$ . Para la predicción de las observaciones tenemos que:

$$z_t = C_t x_t + \delta_t \quad (2.17)$$

Y por lo tanto:

$$P(z_t|x_t) = \det(2\pi Q_t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_t - C_t x_t)^T Q_t^{-1}(z_t - C_t x_t)\right\} \quad (2.18)$$

En este caso la media es  $\mu = C_t x_t$ , y la covarianza  $Q_t$ .

Con las ecuaciones escritas en esta sección vemos que este es un modelo en espacio de estados lineal. Para realizar la aproximación del modelo no lineal al modelo lineal, que sería la variante EKF, realizaríamos el mismo procedimiento que el descrito en la sección 2.3.1.2.



# Capítulo 3

## EKF para la estimación de círculos

### 3.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar la estimación de circunferencias mediante el método de regresión no lineal gauss-newton, utilizando el filtro de Kalman extendido EKF. Las motivaciones para emplear el EKF, radican en que este es un proceso secuencial, que nos permitirá, como veremos más en detalle en la sección 5.3, detectar los extremos de los segmentos circulares, así como de los rectilíneos, dependiendo del modelo que apliquemos (ver 5.3). El modelo que utilizaremos será no lineal, y en coordenadas polares. Veremos en este capítulo las motivaciones para el uso de esta representación de la información sensorial. Veremos como hemos normalizado el procedimiento para que este sea independiente del ruido, aunque, evidentemente, un aumento del mismo conllevaría un empeoramiento en los resultados obtenidos. También realizaremos una estimación del ruido, y obtendremos la suma de residuos cuadrados que será muy útil a la hora de detectar los extremos de la circunferencia, aunque este asunto lo veremos con más detalle en el capítulo 5. Finalmente analizaremos los problemas derivados de la linealización del modelo, así como de la necesidad de realizar reestimaciones mediante previa corrección de parámetros. Cabe destacar, que los problemas que analizaremos en esta sección se dan para el caso de segmentos circulares. En Cuadra Troncoso et al. (2011), aunque se utilizó un modelo no lineal aproximado a un modelo lineal de la recta en coordenadas polares, no se dieron las dificultades que describiremos durante este capítulo.

### 3.2. Estimación de círculos

Como hemos comentado en la introducción, surge la necesidad de aplicar un proceso secuencial para la estimación de los segmentos en un conjunto de medidas de rango. Esta estructura secuencial permite que podamos modelar el problema como un sistema dinámico, ya que tendríamos un estado actual, y una matriz de estado que definiría la transición al estado siguiente, así como un modelo de observación dependiente de esta matriz de estado. La formulación para la estimación recursiva de

modelos lineales está tomada de Peña (1985). Las ecuaciones de estado que describen un sistema dinámico son las siguientes:

$$s_t = A_t s_{t-1} + B_t u_t + \delta_t \quad (3.1)$$

$$y_t = C_t s_t + \varepsilon_t \quad (3.2)$$

donde  $A_t$ ,  $B_t$  y  $C_t$  son matrices conocidas de tamaños  $k \times k$ ,  $k \times m$  y  $p \times k$ , respectivamente, siendo  $k$ ,  $m$  y  $p$  los tamaños de los vectores  $s_t$ ,  $u_t$  e  $y_t$ , respectivamente. Las perturbaciones aleatorias tienen las siguientes distribuciones de probabilidad,  $\delta_t \sim N(0, R_t)$  y  $\varepsilon_t \sim N(0, Q_t)$ . Dado que el proceso es recursivo hará falta conocer el estado inicial  $s_0$ . Aunque en el caso de la ecuación de un recta en coordenadas polares, el modelo, también sería no lineal, este modelo lineal puede adaptarse para la estimación de segmentos rectilíneos representados en coordenadas cartesianas con resultados satisfactorios Cuadra Troncoso et al. (2011). Sin embargo, en el caso del presente trabajo, no podemos adaptar nuestro problema a estas ecuaciones de estado, ya que las ecuaciones que describen una circunferencia, ya sea representada en coordenadas rectangulares o polares, son no lineales. Existe para este caso, la posibilidad de realizar una aproximación al modelo lineal. Esta es la variante del filtro de Kalman a la que se denomina Filtro de Kalman Extendido (EKF). Llegados a este punto, tenemos que elegir entre las dos representaciones para generar nuestro modelo, nombradas anteriormente: a través de la representación de las observaciones en coordenadas cartesianas, o la misma en coordenadas polares.

La representación más natural de las observaciones de un sensor de rango, es la representación en coordenadas polares, ya que dichas observaciones se tomar de forma radial. Esta ordenación natural hace que las variables  $\varphi$  y  $r$  sean independientes, y, en consecuencia, disponemos de una señal unidimensional  $r = f(\varphi)$ . Existe una transformación geométrica utilizando el teorema de pitágoras  $x^2 + y^2 = r^2$ , que aporta una representación en coordenada rectangulares equivalente a la representación en polares. Sin embargo, al realizar esta transformación perdemos la propiedad de disponer de variables independientes, y, por lo tanto, en este caso no tendríamos de una señal unidimensional  $y = g(x)$  en el sentido estricto de la palabra. Además la variable  $x$ , al ser función de  $r$ , pierde la ordenación natural y se convierte en una variable estocástica haciendo que las posibles estimaciones estén sesgadas. Por todas estas razones consideramos más adecuada la representación en coordenadas polares para el modelo de ecuación de observación, que veremos más adelante en las ecuaciones de estado no lineales.

La ecuación en coordenadas polares  $(\varphi, r)$  para un círculo sería la siguiente:

$$r = \rho \cos(\varphi - \theta) \pm \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2(\varphi - \theta)} \quad \alpha_1 < \varphi - \theta < \alpha_2 \quad (3.3)$$

Siendo  $R$  el radio, y  $\rho$  y  $\theta$  las coordenadas polares centrales,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los ángulos formados

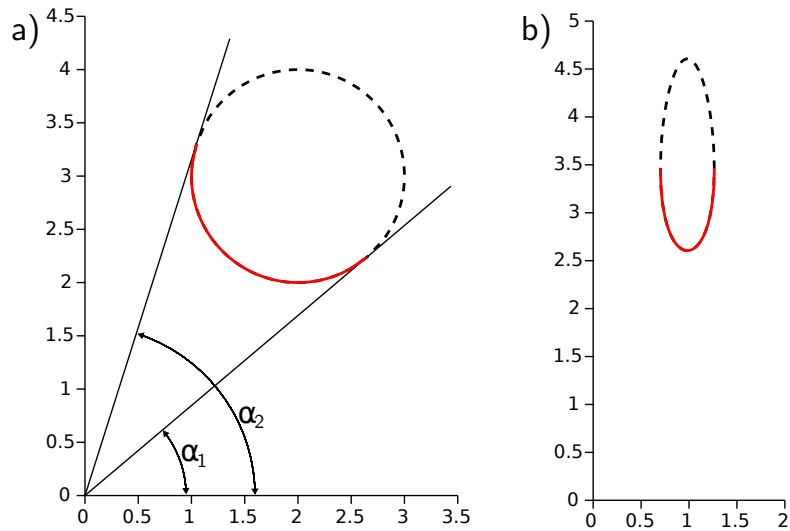


Figura 3.1: Círculo en coordenadas rectangulares que no contiene el origen del plano, en a), y el mismo en coordenadas polares en b). La parte convexa (rojo) es la vista por el robot.

por las tangentes del círculo que pasan por el origen. El signo  $-$  genera la parte convexa, y  $+$  la cóncava (ver 3.1). En este trabajo nos interesa la parte convexa, debido a que es la forma circular que más a menudo nos vamos a encontrar en un entorno real, como, por ejemplo, columnas, farolas, o árboles. Si el círculo contiene el origen de las coordenadas, entonces  $\alpha_1 = -\pi$ ,  $\alpha_2 = \pi$ , y ambos signos describen la misma curva.

Siguiendo la formulación, antes mencionada, dada por Peña (1985) para un modelo lineal: el espacio de estados del filtro de Kalman sería el vector de parámetros  $\beta = (\rho, \theta, R)^\top$ , que describen la circunferencia. En este caso no tenemos acciones de control  $u$  que definan la transición entre estados. Por otra parte la ecuación de observación representa el modelo no lineal para la  $n$ -ésima observación para variables dependientes e independientes. Así, las ecuaciones de estado para el modelo del EKF Thrun et al. (2005) pueden ser escritas para nuestro modelo no lineal de la siguiente manera:

$$s_n = g(u_n, s_{n-1}) + \delta_n \implies \beta_n = \beta_{n-1} \quad (3.4)$$

$$y_n = h(s_n) + \varepsilon_n \implies r_n = \rho_n \cos(\varphi_n - \theta_n) - \sqrt{R_n^2 - \rho_n^2 \sin^2(\varphi_n - \theta_n)} + \varepsilon_n \quad (3.5)$$

En la parte izquierda vemos las ecuaciones de estado generales para un sistema dinámico no lineal. Y en la derecha la adaptación a nuestro modelo de circunferencia. Donde  $\delta_n \sim N(0, S_n)$  y  $\varepsilon_n \sim N(0, Q_n)$  son perturbaciones gaussianas que definen la incertidumbre del sistema, con media  $\mu_n = 0$ , y covarianza  $S_n$ , y  $Q_n$ . En nuestro caso, no tenemos ruido en la ecuación de estado, ya que como vemos en (3.4) solo se describen los parámetros que definen el círculo. Entonces  $\delta_n = 0$

---

**Algoritmo 3.1** Regresión no lineal usando el filtro de Kalman.

---

**EKF\_polar**( $r_n, \varphi_n; \beta_{n-1}, P_{n-1}, RSS_{n-1}$ ),

valores iniciales  $\beta_0, P_0$ , y  $RSS_0 = 0$

- 1: Actualizamos  $H_n$  con los valores de  $\varphi_n$  y  $\beta_{n-1}$
  - 2:  $H_n \leftarrow \text{real}(H_n)$
  - 3:  $a_n \leftarrow 1 + H_n^T P_{n-1} H_n$
  - 4:  $K_n \leftarrow P_{n-1} H_n a_n^{-1}$
  - 5:  $e_n \leftarrow r_n - \text{real}(h(\varphi_n; \beta_{n-1}))$
  - 6:  $\beta_n \leftarrow \beta_{n-1} + K_n e_n$
  - 7:  $P_n \leftarrow (P_{n-1}^{-1} + H_n^T H_n + \lambda I_k)^{-1}$
  - 8:  $RSS_n \leftarrow RSS_{n-1} + \frac{(e_n)^2}{a_n}$
  - 9: **return return**  $\beta_n, P_n, RSS_n$
- 

y por tanto  $S_n = 0$ . En nuestro sistema, la incertidumbre procedería del propio sensor de medidas de rango. Nuestro modelo de ruido para el sensor verdría descrito por:  $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$  siendo  $\sigma^2$  la varianza desconocida de dicho ruido en las obresvaciones. Bajo las condiciones de formulación dadas anteriormente, como resultado, obtendremos una estimación de los parámetros de la circunferencia, descritos por una distribución de probabilidad condicionada por las observaciones  $N(\beta_n, P_n)$ . Donde la media de esta distribución son los parámetros estimados  $\beta_n$  en la iteración  $n$ . Y donde  $P_n$  describe la matriz de covarianza para dicha distribución multivariante. Si normalizamos la matriz de covarianza  $P_n$  con la varianza del ruido  $\sigma^2$  como  $\frac{P_n}{\sigma^2}$  (a partir de ahora  $P_n$ ), las ecuaciones del algoritmo se simplificarán y serán independientes de  $\sigma^2$ , y por lo tanto  $Q_n = 1$ . Como hemos comentado anteriormente, el modelo en espacio de estados que utilizamos es no lineal, y el filtro de Kalman es un procedimiento para funciones lineales. En la variante EKF realizamos una aproximación al modelo lineal de las funciones  $g(\rho, \theta, R) = I_3 \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ R \end{pmatrix}$  y  $h(r)$ . Esta linealización la realizaremos obteniendo sus matrices jacobianas como:  $G_n = \left( \frac{\partial g(u_n, s_{n-1})}{\partial s_{n-1}} \right)$  y  $H_n = \left( \frac{\partial h(s_n)}{\partial s_n} \right)$ . En nuestro caso  $G_n = I_3$ , y:

$$H_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \rho} \\ \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r}{\partial R} \end{pmatrix}_{\beta_{n-1}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_n - \theta_{n-1}) + \frac{\rho_{n-1} \sin^2(\varphi_n - \theta_{n-1})}{\sqrt{R_{n-1}^2 - \rho_{n-1}^2 \sin^2(\varphi_n - \theta_{n-1})}} \\ -\rho_{n-1} \sin(\varphi_n - \theta_{n-1}) - \frac{\rho_{n-1} \sin(\varphi_n - \theta_{n-1}) \cos(\varphi_n - \theta_{n-1})}{\sqrt{R_{n-1}^2 - \rho_{n-1}^2 \sin^2(\varphi_n - \theta_{n-1})}} \\ -\frac{R_{n-1}}{\sqrt{R_{n-1}^2 - \rho_{n-1}^2 \sin^2(\varphi_n - \theta_{n-1})}} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Vemos en el algoritmo 3.1 la descripción del procedimiento de regresión utilizando el EKF. Como entradas a este aplgoritmo, tenemos las observaciones realizadas por el sensor de rango, representadas por  $r_n = f(\varphi_n)$ , y  $\varphi_n$ . Por otra parte tenemos la estimación en la iteración anterior  $n - 1$ , especificada por los parámetros estimados  $\beta_{n-1}$ , por la matriz de covarianza  $P_{n-1}$ , y la

suma de residuos cuadrados  $RSS_{n-1}$ . Comentaremos más adelante las motivaciones de realizar el cálculo de  $RSS$ . Observese que este procedimiento, al ser secuencial, necesitamos de valores iniciales. Comentaremos más adelante también este hecho. Vemos en los puntos 1 y 2, como actualizamos la matriz Jacobiana  $H_n$  mostrada en (3.6). En los pasos 3 y 4, se calcula lo que se denomina la ganancia de Kalman  $K_n$ , que definirá en qué grado se aplicará una corrección en la estimación. En el paso 5 se calcula el error entre las observaciones, y la estimación de las observaciones en función de los parámetros estimados. Este error, junto con la ganancia de Kalman, se aplican en el paso 6 para corregir la nueva estimación con respecto a la estimación anterior. En el paso 7 se actualiza la matriz de covarianza. El sumando  $\lambda I$  que vemos en este cálculo, es la regularización de Tikhonov Tikhonov et al. (1998), que describiremos con más detalle en la sección 3.3. En el paso 8 se calcula  $RSS$  para la iteración  $n$ . Finalmente, el algoritmo 3.1 devuelve la estimación actual, la matriz de covarianza actual, y la suma de residuos cuadrados.

El algoritmo EKF para la regresión no lineal, se aplica a un grupo extraído en la fase de clustering (ver capítulo 4) insertando cada punto procedente de cada muestra obtenida con el sensor de rango con el procedimiento mostrado en el algoritmo 3.1, descrito anteriormente. Como ya hemos comentado, al ser un proceso secuencial, necesitaremos obtener, previamente, los valores iniciales  $\beta_0$  y  $P_0$ . Estos se calculan como se explica, con detalle, en la sección 5.2. El algoritmo, como ya hemos visto, también calcula la suma de cuadrados residuales,  $RSS$ , de forma secuencial con complejidad  $O(n)$ , ver el algoritmo 3.1 línea 8, con un valor inicial  $RSS_0 = 0$ .  $RSS$  se utiliza para calcular el coeficiente de determinación. Se podría utilizar también en el test de Chow Johnston and DiNardo's (1996) para la unión de segmentos similares. Aunque en este trabajo no hemos llegado a implementar este test, sí que se propondrá para futuras investigaciones. Sin embargo sí que utilizamos  $RSS$  para la estimación de la varianza del ruido  $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{RSS_n}{n-k}$ , siendo  $k$  el número de parámetros del modelo, y  $n$  en índice de la muestra  $n$ -ésima. Esta estimación del ruido del sensor, que, recordemos, nos es desconocido en el inicio del procedimiento, se utiliza para la detección de valores atípicos t-test (ver (3.7)) que nos será muy útil para la futura detección de los extremos de la circunferencia. Describiremos esto con más detalle en la sección 5.4. Por otra parte la estimación de la varianza del ruido también nos ayudará en la distinción de segmentos, entre circulares y rectilíneos. Veremos este tema más a fondo en la sección 5.3. Es interesante mencionar que, debido a la naturaleza no lineal de la modelo de regresión, los contrastes de hipótesis tienen un carácter asintótico.

$$t_{exp,n} = \frac{e_{n/n-1}}{\hat{\sigma}_{n-1} \sqrt{1 + \underbrace{H_n^T P_{n-1} H_n}_{a_n}}} \sim t(n-1-k) \quad (3.7)$$

### 3.3. La regularización de Tikhonov

Tras realizar difernetes esperimentos para la esimación de circunfernecias, hemos observado que las matrices de covarianza  $P_n$ , en varios de estos experimentos, están muy próximas a la indetermina-

ción. Observamos que este hecho ocurre debido a que el determinante de  $H_n^T H_n$ , se encuentra muy proximo a 0, haciendo que su inversa esté proxima a la indeterminación. Este caso de ill-conditioned, también ocurre cuando los autovalores de  $H_n^T H_n$  presentan grandes diferencias entre sí. Este problema surge, en modelos de regresión, ante la existencia de relaciones aproximadamente lineales entre los regresores de dicho modelo. Consecuencia de esto, como observamos en nuestros experimentos, los estimadores obtenidos y la precisión de éstos se ven seriamente afectados. Esta correlación entre las variables del modelo de estimación se llama multicolinealidad Mansfield and Helms (1982). La multicolinealidad entre los predictores de un modelo de regresión es un problema muy frecuente. Existen diferentes procedimientos para su diagnóstico, pero, sin embargo, no es una situación que tenga un fácil tratamiento, excepto cuando se haya producido por el uso de datos u observaciones erróneas, en cuyo caso se puede resolver omitiéndolas. La posibilidad de introducir nuevos datos, o de seleccionar otro subgrupo de predictores quizá sea la mejor solución, pero en la mayoría de las ocasiones, como en el presente trabajo, no es posible, dada la situación experimental. Existen, sin embargo, algunos métodos alternativos que permiten utilizar la información original y que posibilitan seguir explicando un porcentaje similar o mayor de la variabilidad de la variable respuesta. En esta línea, abordamos aquí, la regularización de Tikhonov Tikhonov et al. (1998), también conocida como ridge-regression Johnston (1984). En primer lugar, mostramos el cálculo de la matriz de covarianza en condiciones normales para la  $n$ -ésima iteración:

$$P_n = \left( P_{n-1}^{-1} + H_n^T H_n \right)^{-1} \quad (3.8)$$

Observe, que en caso de la matriz de covarianza en el instante  $n = 0$  no existiría la matriz de covarianza anterior, ya que este es un sistema causal. Entonces:

$$P_0 = \left( H_0^T H_0 \right)^{-1} \quad (3.9)$$

Como ya hemos nombrado con anterioridad, el determinante de  $H_0^T H_0$ , se encuentra muy proximo a 0, con lo cual  $P_0$  estaría proximo a la indeterminación. Este problema ill-conditioned, se irá propagando en cada iteración  $n$ . Como vemos en (3.8), para el calculo de  $P_1$ , tendríamos la influencia de  $P_0$ , y así sucesivamente. Para la aplicación de la regularización de Tikhonov, aplicamos una suma de una matriz identidad de tamaño  $k \times k$ , siendo  $k$  el tamaño del vector de parámetros  $\beta$ , ponderada por un factor  $\lambda$ . Vemos a continuación como quedaría el cálculo de la matriz de covarianza en la  $n$ -ésima iteración aplicando la regularización de tikhonov:

$$P_n = \left( P_{n-1}^{-1} + H_n^T H_n + \lambda I_k \right)^{-1} \quad (3.10)$$

Siendo entonces el caso de la matriz de covarianza inicial aplicando la regularización de Tikhonov:

$$P_0 = \left( H_0^T H_0 + \lambda I_k \right)^{-1} \quad (3.11)$$



Finalmente para aplicar la regularización tendremos que escoger el valor de  $\lambda$  que produzca mejores resultados. En Li et al. (2014), se proponen varios métodos basados en el error cuadrático medio MSE, para el cálculo de  $\lambda$  en cada iteración  $n$ . Los dos métodos con los que se obtienen mejores resultados en Li et al. (2014) serían:

$$\lambda_n = \frac{1}{[\prod_{i=1}^k (\hat{\alpha}_n^i)]^{\frac{1}{k}}} \quad (3.12)$$

$$\lambda_n = \text{Median}_{1 \leq i \leq k} \left| \frac{1}{(\hat{\alpha}_n^i)^2} \right| \quad (3.13)$$

Donde  $\hat{\alpha}_n^i$  son los parámetros canónicos y se obtienen:

$$\hat{\alpha}_n = \Lambda_n^{-1} U_n^T (P_{n-1}^{-1} \beta_{n-1} + H_n^T r_n) = (\hat{\alpha}_n^1, \dots, \hat{\alpha}_n^k)^T \quad (3.14)$$

$U_n$  Es la matriz ortogonal de (3.8), y  $\Lambda_n$ , una matriz diagonal formada por los valores propios:

$$\Lambda_n = U_n^T (P_{n-1}^{-1} + H_n^T H_n) U_n \quad (3.15)$$

Aplicamos para nuestras estimaciones los métodos descritos en (3.12) y en (3.13). Sin embargo los resultados de la estimaciones finales no reflejan una mejoría con el cálculo este cálculo de  $\lambda$  para cada iteración. Por otro lado, para  $P_0$  hemos probado, de manera experimental, algunos valores para  $\lambda$  comprendidos entre 0,1 y 100, obteniendo mejores resultados con  $\lambda = 10$ . Para la regularización de la matriz de covarianza durante el procedimiento,  $P_n$ , también hemos probado valores para lambda entre 0,1 y 100, observando mejores resultados empleando  $\lambda = 1/n$ , Esto se debe a que conforme avanza el procedimiento más nos alejamos del peor caso, que es el caso inicial, y, por lo tanto aplicaremos la regularización cada vez en menor medida, es decir, de manera inversamente proporcional a la iteración n-ésima. En la sección 6.2 mostramos el contraste de resultados entre las estimaciones en el caso de no aplicar la regularización de Tikhonov, en el caso de aplicarla solamente en la matriz de covarianza inicial, y en el caso de aplicarla en todo el procedimiento. El problema que hemos descrito en esta sección solamente nos ha aparecido para el caso de la circunferencia. El caso del modelo para la recta en coordenadas polares, también sería una aproximación al modelo lineal, sin embargo, estos problemas no han aparecido, y, tanto la matriz de covarianza inicial, como la misma en la n-ésima iteración, se han podido calcular sin problemas en Cuadra Troncoso et al. (2011) sin necesidad de aplicar la regularización de Tikhonov.

Por otra parte, el cálculo de la matriz jacobiana conlleva dos cuestiones. En primer lugar, la presencia de cuadrados en las raíces puede producir números complejos se traducen en errores computacionales a la hora de implementar el algoritmo. En este caso utilizamos solamente la parte real de las matrices jacobianas. Hemos probado usando módulos complejos, pero se obtienen peores resultados. En segundo lugar, la diferencia  $\varphi_n - \theta_{n-1}$  tiene que ser calculada, para evitar la determinación de ángulos erróneos en las matrices Jacobianas, siguiendo la dirección del giro más corto que lleva

un valor sobre el otro:

$$\varphi_n - \theta_{n-1} = \begin{cases} \varphi_n - \theta_{n-1} + \pi & \text{if } \varphi_n - \theta_{n-1} \leq -\frac{\pi}{2} \\ \varphi_n - \theta_{n-1} - \pi & \text{if } \varphi_n - \theta_{n-1} \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.16)$$

### 3.4. Corrección de la estimación para reestimar

Como consecuencia de los problemas descritos en la sección anterior (3.3), las estimaciones no entrarían dentro de los límites esperados en términos de errores cometidos. Con el objetivo de mejorar los resultados, hemos decidido, ya que los métodos de regresión lo permiten, reestimar de nuevo los parámetros, utilizando como parámetros iniciales los obtenidos en la estimación anterior. Describiremos a continuación este procedimiento con más detalles, así como la corrección de estos parámetros estimados. Queremos puntualizar que en el caso de la estimación de la recta en coordenadas polares, debido a que no aparecieron los problemas mencionados, no fue necesario la reestimación, ya que con una única estimación se obtuvieron resultados satisfactorios.

El algoritmo EKF, al ser un procedimiento recursivo, se ejecuta iterativamente para mejorar la estimación. Especialmente, si el ángulo formado por la semilla, visto desde el centro del círculo, es pequeño. Mejoramos de esta manera grandes imprecisiones sobre las estimaciones mediante la siguiente corrección de la estimación. Sea  $(\rho_0^k, \theta_0^k, R_0^k)$  los valores iniciales de las estimaciones para la iteración  $k$ , obtenidos de la última estimación en la iteración  $k - 1$ ; entonces las fórmulas de corrección son (véase la figura 3.2):  $\hat{R}_0^k = \frac{d_1 + d_2}{2}$ ,  $\hat{\rho}_0^k = \rho_0^k - R_0^k + \hat{R}_0^k$ , y  $\hat{\theta}_0^k = \theta_0^k + \arcsin \frac{d_2 - d_1}{2\rho_0^k}$ , siendo  $d_1$  y  $d_2$  las distancias para  $(\rho_0^k, \theta_0^k)$  para los segmentos finales. Cuando las imprecisiones son pequeñas, estas correcciones tienden a empeorar la estimación de EKF, por lo que es mejor no aplicarlas. Para ello, comparamos  $RSS_k$  en la iteración  $k$ , con  $RSS_{k-1}$ , y si  $RSS_{k-1} < RSS_k$ , entonces, usaremos  $(\rho_0^k, \theta_0^k, R_0^k)$  para repetir la iteración  $k$ . A partir de este momento la corrección nunca se vuelve a aplicar. Las iteraciones se realizan hasta que alcanzan un número predeterminado o  $RSS_{k-1} < RSS_k$  para cualquier  $k$ .

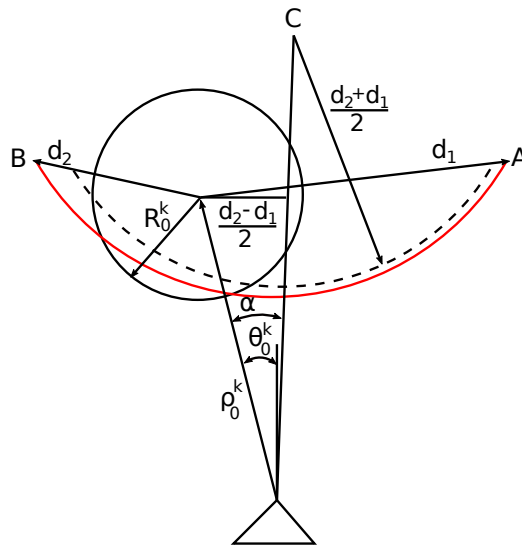


Figura 3.2: Corrección de estimación: A y B son los extremos de los puntos reales de arco utilizados en las iteraciones. El círculo pequeño es el círculo inexactamente estimado después de la iteración  $k - 1$ . C es el centro correcto con coordenadas  $(\hat{\rho}_0^k, \hat{\theta}_0^k)$   $\hat{\theta}_0^k = \theta_0^k + \alpha$ , siendo  $\alpha = \arcsin \frac{d_2 - d_1}{2\rho_0^k} < 0$ , y  $\hat{\rho}_0^k = \rho_0^k - R_0^k + \hat{R}_0^k$ , y siendo  $\hat{R}_0^k = \frac{d_1 + d_2}{2}$  el nuevo radio del círculo corregido mostrado en línea discontinua.



# Capítulo 4

## Clustering mediante scale-space

### 4.1. Introducción

Como vimos en el capítulo 3, necesitaremos calcular los parámetros iniciales del EKF. Este proceso se describe en detalle en la sección 5.2, donde vemos la necesidad de disponer de algunos puntos semilla para realizar los cálculos en dicha inicialización. La correcta elección de estos puntos es crítica a la hora de inicializar el filtro, y, por lo tanto, para la obtención de estimaciones finales satisfactorias. Para la obtención de estos puntos vamos a aplicar un procedimiento de clustering llamado scale-space (ver subsección 2.2).

Como ya hemos comentado en la sección 3.2, utilizaremos coordenadas polares, ya que esta es una representación unidimensional  $\rho = f(\varphi)$ . Sin embargo, como se justificó en 3.2, su contrapartida en coordenadas rectangulares  $y = g(x)$ , no es estrictamente unidimensional, ya que para cada valor de  $y$ , podemos tener varios valores de  $x$ .

La teoría scale-space proporciona una representación a escala múltiple de una señal formada por versiones suavizadas de ella misma. El suavizado se realiza convolucionando la señal con núcleos gaussianos con distintos valores de varianza (parámetro de escala). Las características se encuentran normalmente como extremos o puntos de inflexión de la señal, por lo que se representan como curvas de nivel de cruce cero en la representación de scale-space. El procedimiento de árbol de intervalos de Witkin (1984) asocia un rectángulo a cada curva y define un criterio de estabilidad para los rectángulos. Los rectángulos más estables definen las escalas naturales.

### 4.2. Curvas de nivel

En el trabajo previo Cuadra Troncoso et al. (2011) este procedimiento se aplicó a mundos compuestos de segmentos rectos. En el presente trabajo se ha aplicado el mismo procedimiento a mundos compuestos de segmentos rectos y circulares, ver figura 4.1 derecha e izquierda. Los bordes de los segmentos son extremos y puntos de inflexión de la curva, por lo que se pueden usar

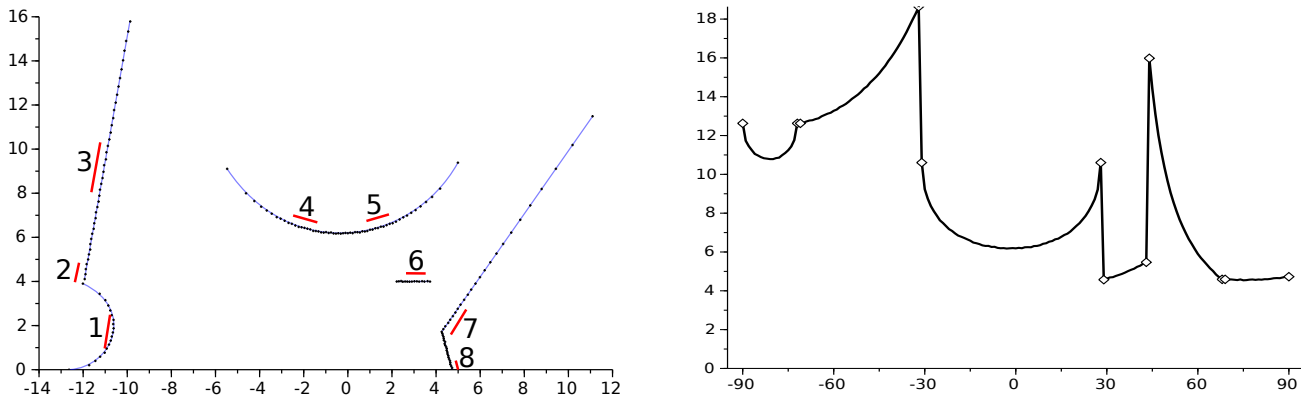


Figure 4.1: En la izquierda vemos un scan láser representado en coordenadas rectangulares, y en la derecha, en coordenadas polares. Las áreas numeradas y marcadas en rojo (derecha) son las semillas resultantes para la inicialización del EKF. El círculo central y la línea más recta a la izquierda tienen dos semillas, pero esta cuestión se resolvería en la etapa de fusión (ver sección 5.4.3).

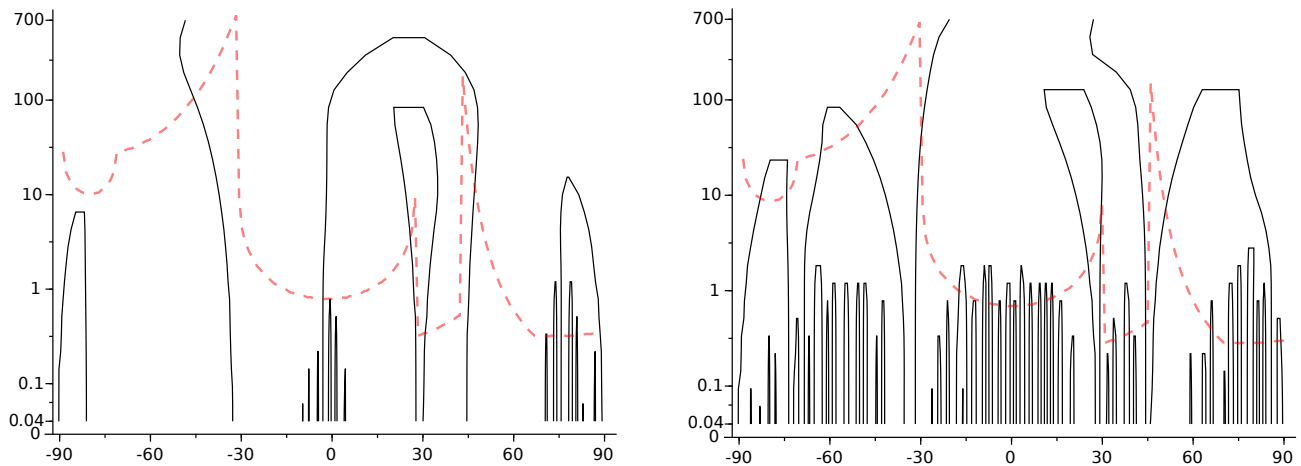


Figure 4.2: Curvas de nivel primeras derivadas (izquierda), y segundas (derecha). La exploración en coordenadas polares se ha superpuesto en ambas imágenes.

las primeras y segundas derivadas para encontrarlas. Las curvas de nivel de cruce por cero para la primera y segunda derivada de la superficie del espacio de escala se muestran en la figura 4.2 derecha e izquierda. Especialmente para la segunda derivada, el ruido produce muchas curvas. Estas curvas podrían ampliar las características del entorno de bajo nivel, lo que daría lugar a una representación del mundo demasiado fragmentada. Una selección adecuada de los niveles de escala, especialmente el nivel más bajo podría eliminar eventualmente la mayoría de las pequeñas curvas. El ruido se elimina aplicando el mismo procedimiento de filtrado utilizado en el trabajo anterior Cuadra Troncoso et al. (2011).

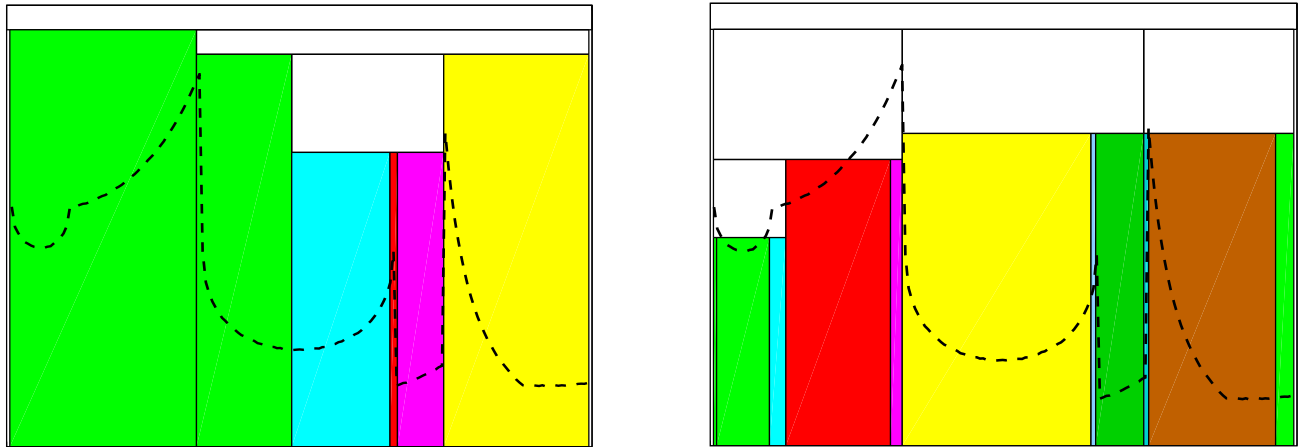


Figure 4.3: Los rectángulos coloreados muestran características estables encontradas a partir de curvas de nivel, y después de filtrar, para las primeras derivadas (izquierda) y segundas (derecha). La exploración en coordenadas polares se ha superpuesto en ambas imágenes.

### 4.3. Árboles de intervalos

Después del filtrado, se realiza el procedimiento de árbol de intervalos para encontrar las características del entorno más estables. Los resultados se muestran en la figura 4.3 derecha e izquierda. Las localizaciones de las características descubiertas usando ambas derivadas tienen que ser combinadas. Las características cercanas se mezclan en una y los grupos de medidas faltantes se están teniendo en cuenta usando sus extremos como rasgos. Los valores faltantes aislados se interpolan y los grupos se sustituyen por valores convenientes. Finalmente, las características descubiertas se consideran como extremos difusos de segmentos, luego se extraen conjuntos de medidas consecutivas de cada núcleo de segmentos para obtener las semillas para la estimación de valores iniciales de EKF.

En algunos casos, podría no aparecer ningún segmento, como se muestra en Cuadra Troncoso et al. (2011), esta situación producirá un grupo de puntos que no se estimarían en el EKF. En este caso se estimará un nuevo segmento por cada agujero.





# Capítulo 5

## Extracción de círculos en scan láser

### 5.1. Introducción

En el capítulo 3 hemos vistos el procedimiento para la estimación de una circunferencia mediante el EKF, el cual, es un caso ideal, ya que en este considerábamos una circunferencia en la que conocíamos, a priori, los extremos de la misma. El objetivo de este trabajo es implementar esta idea en aplicaciones reales, es decir, a un conjunto de medidas que provengan de un sensor láser de un vehículo en movimiento. En este caso real, encontraremos diferentes obstáculos que deseamos modelar, por lo tanto, tendremos que detectar cuales son los puntos extremos de cada una de las circunferencias que encontremos en un scan laser. En esta sección vamos a ver cómo aplicar el procedimiento descrito en un conjunto de medidas de rango, el cual contendrá, tanto segmentos circulares, como rectilíneos. Para la realización de este procedimiento, dispondremos de las semillas calculadas durante la fase descrita en el capítulo 4 (ver figura 5.1). En primer lugar indicaremos el método utilizado para inicializar los parámetros para el EKF, y, a continuación, describiremos la detección del tipo de segmento, así como los extremos de los mismos.

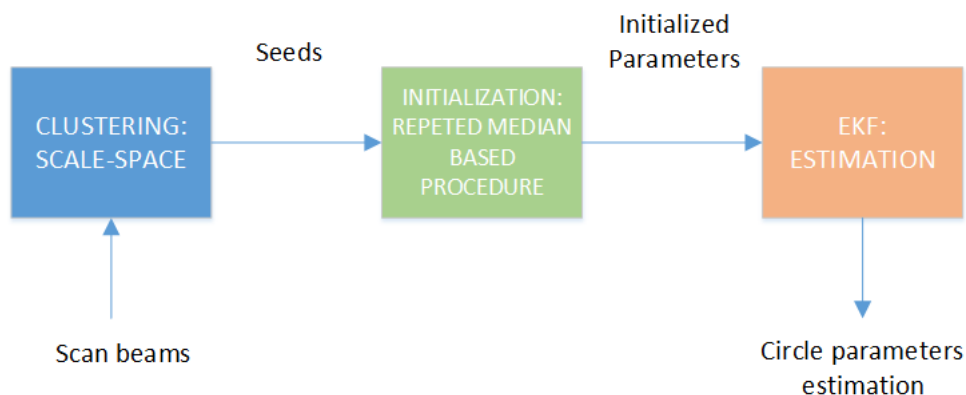


Figure 5.1: Diagrama de bloques para el modelado del entorno descrito en este trabajo.

## 5.2. Inicialización del EKF

Como vimos en la sección 3.2, el EKF es un procedimiento recursivo, lo cual implica que, para el caso  $n = 0$ , debemos introducir (como en todo sistema dinámico) condiciones iniciales. Las condiciones iniciales debemos calcularlas previamente. Para el caso de la suma de residuos cuadrados  $RSS_0 = 0$ , ya que este será un valor acumulativo. Los parámetros de la circunferencia iniciales debemos calcularlos con algún procedimiento previo, no secuencial, utilizando las semillas que hemos obtenido en la fase anterior (ver figura 5.1). La matriz de covarianza inicial, se calculará utilizando los parámetros iniciales. Describimos a continuación, con más detalle, todo el proceso de inicialización del EKF.

Para el caso de segmentos rectilíneos, la inicialización de EKF se realiza utilizando el procedimiento de la mediana repetida, pero este procedimiento, solo es adecuado para modelos lineales, lo cual no nos sirve para el caso de segmentos circulares. Para los círculos, se ha desarrollado entonces un procedimiento simple, ligeramente inspirado en el procedimiento de la mediana repetida, que, tras varios experimentos, hemos considerado adecuado para la inicialización del filtro.

Aunque, por las razones comentadas en la sección 3.2, el procedimiento se realiza en coordenadas polares, el cálculo de los parámetros iniciales lo realizaremos en coordenadas cartesianas. Esta decisión se debe a causas de simplicidad en los cálculos. Después de realizar este proceso, una vez obtenidos los parámetros iniciales, es sencillo convertirlos a coordenadas polares para introducirlos en nuestro modelo.

Mostramos a continuación la ecuación de una circunferencia en coordenadas rectangulares:

$$r^2 = (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 \quad (5.1)$$

Donde  $a$ ,  $b$ , y  $r$ , son los parámetros a calcular.  $a$  y  $b$  es el centro de la circunferencia, y  $r$  el radio de la misma. Como vemos, tenemos tres parámetros, por lo tanto, para obtenerlos, necesitaremos tres ecuaciones. Consideremos ahora los puntos recibidos como semillas previamente obtenidas en la fase anterior. Escogiendo entonces tres puntos de entre estos,  $p_1 = (x_1, y_1)$ ,  $p_2 = (x_2, y_2)$ , y  $p_3 = (x_3, y_3)$ , tendríamos:

$$r^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 \quad (5.2)$$

$$r^2 = (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 \quad (5.3)$$

$$r^2 = (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 \quad (5.4)$$

Ahora ya tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas, por lo que, finalmente, podemos obtener los parámetros de la circunferencia que pasa por  $p_1$ ,  $p_2$ , y  $p_3$ , como especificamos a continuación:

$$a = \frac{(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2)(y_2 - y_3) - (x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2)(y_2 - y_1)}{2((x_3 - x_2)(y_2 - y_1) - (x_1 - x_2)(y_2 - y_3))} \quad (5.5)$$

$$b = \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + 2a(x_1 - x_2)}{2(y_2 - y_1)} \quad (5.6)$$

$$r = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 + b)^2} \quad (5.7)$$

Estos parámetros, como hemos comentados pertenecerían a una circunferencia que pasaría por lo puntos especificados, sin embargo, la señal de la que provienen las muestras, al ser una señal ruidosa, no nos garantiza que estos parámetros coincidan con los de la circunferencia que describe el conjunto de semillas. Por este motivo repetimos los cálculos mostrados en 5.5, 5.6, y 5.7, para distintos puntos con el siguiente orden: primero, central y último, de grupos de puntos consecutivos de una ventana en movimiento. Pasando por todos los puntos de la semilla. Se repite este proceso para sucesivos números impares de puntos en la ventana en movimiento comenzando desde un tamaño de tres, hasta alcanzar el tamaño del conjunto de semillas completo. Luego, se calculan las medianas de las coordenadas centrales y los radios, ponderados. Estos pesos se calculan como el cociente entero entre el tamaño del grupo de puntos dividido por dos. Esta ponderación hace que consideremos más fiable los cálculos con medidas más separadas espacialmente, ya que estas dan una mayor seguridad a la hora de distinguir la circunferencia que pasa por ellas. Los valores correspondientes a centros que consideramos fuera del círculo, o que posean un radio extremadamente grande, se descartan antes de realizar la mediana. Una vez finalizado el proceso, los parámetros correspondientes al centro del círculo se convierten en coordenadas polares  $(\rho_0, \theta_0)$ , y junto con el radio estimado  $R_0$ , se utilizan para los valores iniciales del EKF  $\beta_0 = (\rho_0, \theta_0, R_0)^T$ . Como vimos en la sección 3.2, para la linealización del modelo para el EKF, calcularemos el Jacobiano utilizando los parámetros de la circunferencia. En esta caso, como ya tenemos los parámetros iniciales  $\beta_0$ , calcularíamos el Jacobiano inicial  $H_0$  como se especificó en 3.6. Entonces la matriz de covarianza inicial se calcula como  $P_0 = (H_0^T H_0 + \lambda I_k)^{-1}$ . En el cálculo de esta matriz de covarianza, surgen problemas derivados de la aproximación lineal del modelo. Con el objetivo de subsanar este inconveniente, se aplica la regularización de Tikhonov: el sumando  $\lambda I_k$ , siendo  $k = 3$ , el número de parámetros del modelo. Vea la sección 3.3 para más detalles sobre esto.

Este proceso no es tan robusto como el procedimiento de la mediana repetida para segmentos rectilíneos, y la precisión de estimación inicial depende, en gran medida, del ángulo formado por la semilla vista desde el centro del círculo. Cuanto mayor sea el ángulo, mayor será la precisión. En la sección 6.2 vemos los errores cometidos por esta inicialización. Vemos en la figura 5.2 un ejemplo de la circunferencia obtenida a partir de nueve puntos semilla. Vemos que no se ajusta del todo a estos puntos, sin embargo nos sirve para la inicialización del EKF, siendo este el encargado de estimar la circunferencia que se adapte a estos puntos.

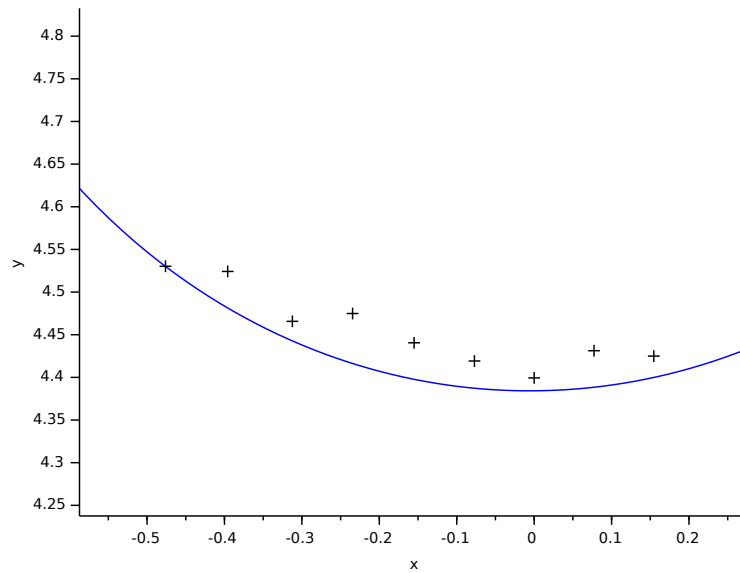


Figure 5.2: Las cruces representarían puntos semilla obtenidos de la fase de clustering. La línea marcada en azul representa la circunferencia obtenida de aplicar la variante de la mediana repetida descrita en esta sección 5.2.

### 5.3. Distinción entre segmentos

Como vemos en la figura 5.3, cuando iniciamos el proceso de estimación, no podemos distinguir a qué tipo de segmento pertenecen las semillas, si circular, o rectilíneo. Para distinguirlos observamos la evolución de la estimación de la desviación del ruido  $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{RSS_n}{n-k}}$ . En condiciones normales este valor será alto en el inicio de la estimación y se aproximará a un valor cercano a la desviación típica asociada a la incertidumbre del sensor al final de la misma. Por lo tanto consideramos que si estamos intentando estimar un tipo de segmento erróneo, esta estimación del ruido crecerá.

Sin embargo, como observamos en la figura 5.4, si intentamos estimar una recta con el modelo del círculo, sí que observamos que el ruido sigue descendiendo durante el proceso. Esto se debe a que obtenemos una estimación de un círculo de gran magnitud, en el cual la recta sería un pequeño segmento del mismo que se adaptaría a la recta. Este problema a la hora de distinguir círculos y rectas, podría subsanarse, en gran medida, limitando el tamaño de los radios de las circunferencias a estimar.

El caso contrario al descrito anteriormente, sería en de estimar con el modelo de la recta un segmento circular (ver figura 5.5). Este caso es más favorable, ya que no existe manera de adaptar una recta a un segmento con forma circular sin obtener unos errores muy por encima de los esperados. En el caso de estimar un segmento perteneciente a una circunferencia de gran tamaño con respecto al segmento en cuestión, quizá sí se conseguiría adaptar una recta con un error dentro de los valores esperados, pero en este escenario consideraríamos entonces que ese segmento es rectilíneo.

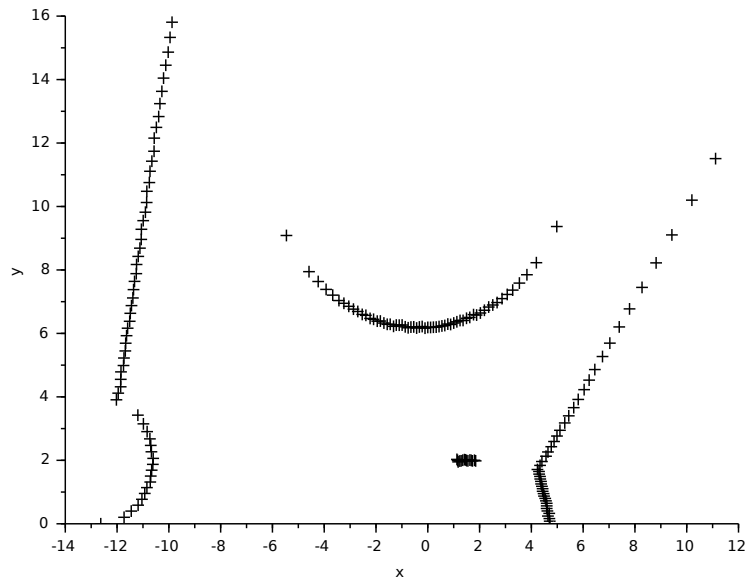


Figure 5.3: Cada cruz representa una medida de rango láser para un mundo dado. Vemos que en este caso distinguimos tanto rectas, como círculos.

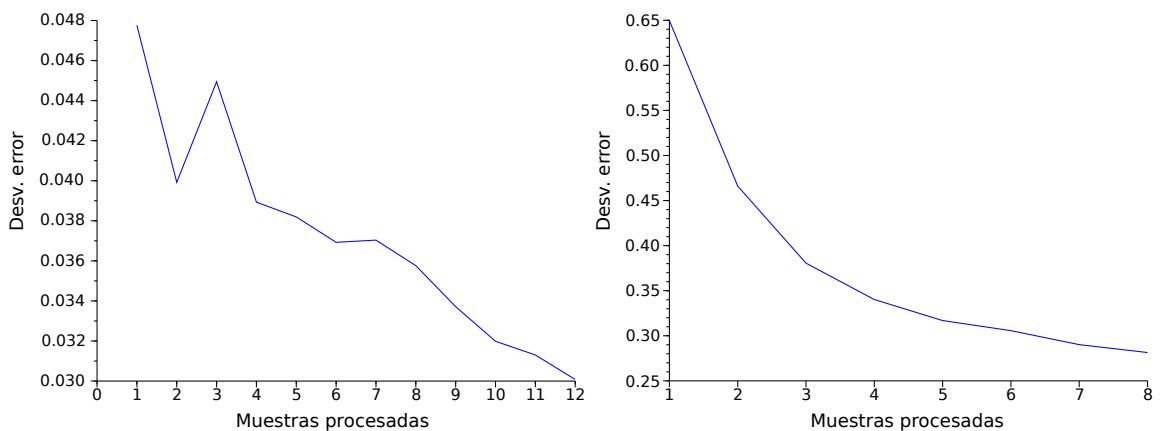


Figure 5.4: En la izquierda, vemos la evolución de la estimación del ruido de un segmento circular aplicando el modelo del círculo. En la derecha vemos la misma información, pero para un segmento rectilíneo. En este último caso la circunferencia se adapta a una con un radio muy grande.

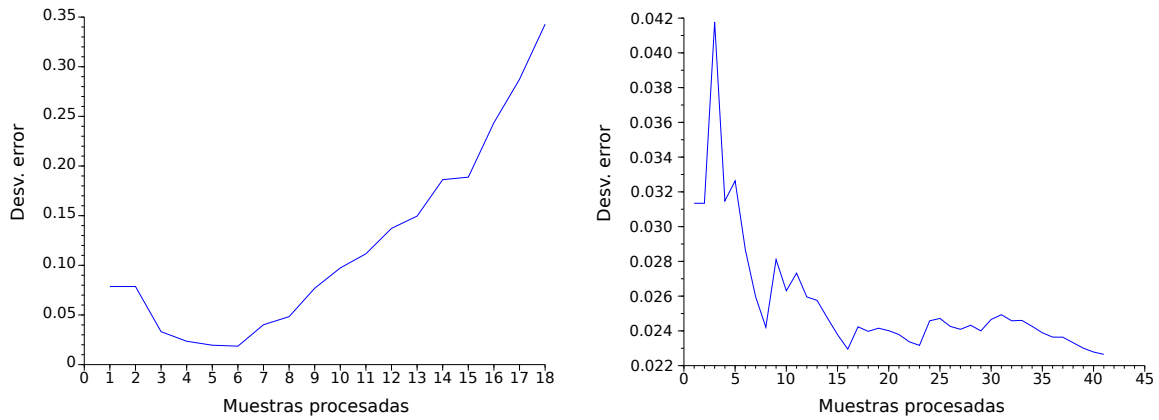


Figure 5.5: En la izquierda, vemos la evolución de la estimación del ruido de un segmento circular aplicando el modelo de la recta. Vemos como el ruido crece. En la derecha vemos la misma información, pero para un segmento rectilíneo.

Tras realizar diferentes experimentos, consideramos que este es un método favorable para la distinción entre segmentos de distinto tipo. El procedimiento sería el siguiente: considerando un conjunto de puntos semilla, realizaríamos la inicialización del EKF, y la estimación con el modelo de la recta descrito en Cuadra Troncoso et al. (2011). Si tras finalizar el procedimiento, la estimación del ruido no se encuentra dentro de unos valores esperados en función de la incertidumbre asociada al sensor utilizado, consideraremos que se trata de un segmento circular, y aplicaremos el mismo procedimiento, pero esta vez con el modelo de circunferencia descrito en las secciones 5.2, y 3.2.

## 5.4. Detección de los extremos del círculo

En esta sección vamos a definir los criterios utilizados para detectar los extremos de los círculos. En primer lugar, definiremos el procedimiento bilateral para la estimación. A continuación describiremos el método utilizado para la búsqueda de break points, que serán los que nos aporten información sobre los puntos donde se encuentran los extremos de la circunferencia. En este punto vamos a considerar que ya sabemos que el segmento con el que trabajamos será un segmento circular, además de disponer de un conjunto de semillas obtenido de la fase de clustering.

### 5.4.1. El procedimiento bilateral

Hasta ahora no hemos considerado la posición en la que tendremos la semilla con respecto al segmento a estimar. En el caso de realizar el procedimiento para un conjunto de medidas de rango láser real, no dispondremos de esta información. Por lo tanto debemos de decidir que secuencia elegir a la hora de procesar las muestras del scan láser a partir de las semillas obtenidas. En un primer momento se hicieron experimentos empezando el procedimiento desde el punto de un extremo de la semilla hacia el otro, y continuando hasta que se dieran las condiciones de break point (sección 5.4.2),

para después continuar, empezando por el otro extremo de la semilla, en sentido contrario, hasta alcanzar la condición de break point en este extremo. Con este procedimiento se consiguió identificar los extremos de los círculos contenidos en diferentes scans láser, pero a nivel de programación, se consideró que la información se almacenaba de manera poco homogénea, ya que la evolución de los parámetros estimados, así como de la matriz de covarianza, y la estimación del ruido quedaba almacenada en dos estructuras de datos distintas.

Se ha considerado entonces emplear el procedimiento bilateral, en el cual vamos añadiendo muestras alternativamente de cada lado de la semilla en cada iteración del EKF. Este procedimiento se realiza hasta que se alcanza un break point en un sentido, a partir de aquí se realiza la estimación solamente en el sentido contrario hasta que se alcanza el break point en el otro extremo. En este caso además de solventar los problemas comentados a nivel de programación, conseguimos, incluso una mejora de los resultados, ya que los puntos que se introducen están cada vez más equiespaciados, y eso ayuda a distinguir mejor el segmento. Por otra parte en una regresión no hay nada que impida que los puntos utilizados estén alternados, y no sean consecutivos.

### 5.4.2. Detección de break points

Llamamos break points a los puntos que marcan los extremos de cada segmento en un scan láser. Veremos en esta subsección como detectarlos durante el proceso de estimación de segmentos circulares.

Como se comentó en la sección 2.3.1.1, la distribución de probabilidad asociada a los métodos de regresión es una  $t$  de Student, lo cual es válido aplicando el EKF. Esto nos permite el uso de un test de valores anómalos, a los cuales llamaremos outliers. Este test consiste en comparar la  $t$  de Student experimental en la  $n$ -ésima iteración (ver 5.8), con la distribución  $t(n - 1 - k)$ .

$$t_{exp,n} = \frac{e_{n/n-1}}{\hat{\sigma}_{n-1} \sqrt{\underbrace{1 + H_n^T P_{n-1} H_n}_{a_n}}} \quad (5.8)$$

Llegados a este punto, tenemos que definir cuales van a ser las condiciones que impondremos para considerar que hemos detectado un break point. Debemos de tener en cuenta previamente, que es posible que encontremos outliers propios de la señal que no se deban al extremo del segmento, estos outliers propios del segmento pueden darse debido al propio ruido de la señal, que en algún punto genere un cambio brusco que produzca resultados anómalos en la estimación. Por esta cuestión vamos a considerar que hemos encontrado un break point en el caso de encontrar dos outliers contenidos en una ventana de tres muestras.

Las otras condiciones para la detección de break points, son, por un lado, la de llegar a algún punto de un grupo de semillas de un segmento adyacente. De este modo evitamos un solape excesivo entre segmentos. Por otro lado consideraremos break points al inicio, y al fin del propio scan láser.

También consideraremos un break point cuando en la estimación del ruido  $\sigma$ , se produzca un salto

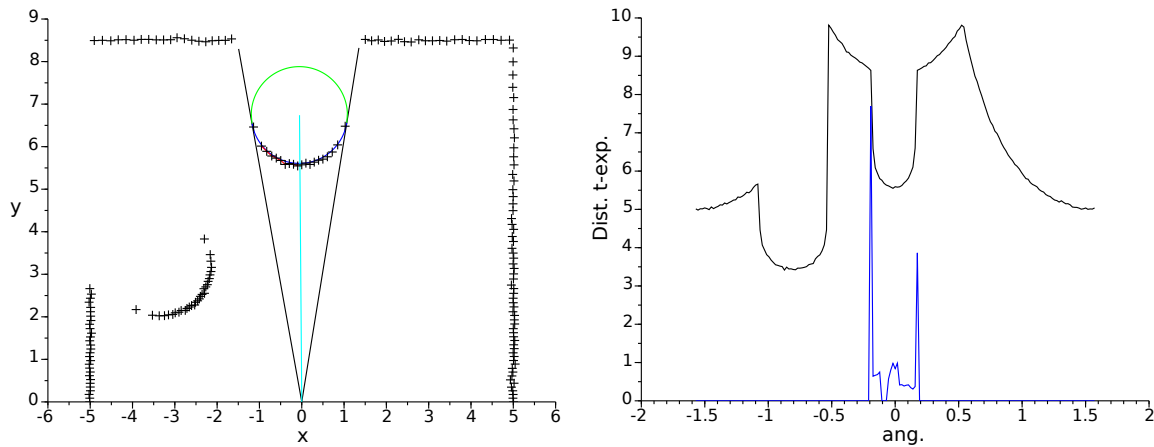


Figure 5.6: En la izquierda, vemos, representadas con cruces las muestras que conforman un scan láser con ruido aditivo  $\sigma = 0,02$ . La línea azul muestra la parte convexa de la circunferencia estimada mediante el procedimiento del EKF, mientras que la verde muestra la parte cóncava. Las líneas negras marcan las rectas tangentes a la circunferencia estimada que pasan por el origen. La línea cian marca el centro de la misma. En la derecha, vemos, en negro, las muestras del mismo scan láser representadas en coordenadas polares. En azul podemos ver la evolución de la  $t_{exp,n}$ . Vemos como en los extremos de la circunferencia estimada aparecen picos, que en este caso, han sido detectados como outliers.

demasiado brusco, que marcaría que estamos estimando algo desconocido dado nuestro modelo de circunferencia con parte de una estimación ya realizada. Esta condición la imponemos debido a que como consecuencia de los problemas de la linealización del modelo, tenemos que repetir  $p$  veces todo el proceso de estimación (ver sección 3.4), por lo tanto, en algunos casos aislados, dependiendo de la posición del segmento circular con sus adyacentes, los break points no se detectaron correctamente en las primeras repeticiones del proceso de estimación. Al imponer esta última restricción, estos problemas se solventaron.

En la figura 5.6, vemos un ejemplo de estimación de segmento circular detectando los break points en los extremos del mismo.

### 5.4.3. Mezcla de segmentos, solapes y huecos

Dadas las condiciones para la detección de break points especificadas en la sección anterior, tenemos que tener en cuenta que al estar trabajando con señales ruidosas, cabe la posibilidad de no detectarlos en el punto exacto. Por lo tanto pueden aparecer solapes entre segmentos adyacentes. Otro problema que puede surgir derivado de la misma razón, es que queden huecos sin modelar en el scan, que no pertenecen a fuera de rango. Podemos ver un ejemplo de este hecho en la figura 5.7 derecha, en la parte superior izquierda, vemos un hueco en la esquina que forman dos segmentos rectilíneos estimados, que no existe en las medidas de rango obtenidas por el láser (ver figura 5.7 izquierda). Este problema se abordará en futuras investigaciones.

Por otra parte, tenemos casos en los que en un mismo segmento tenemos dos grupos de semillas,



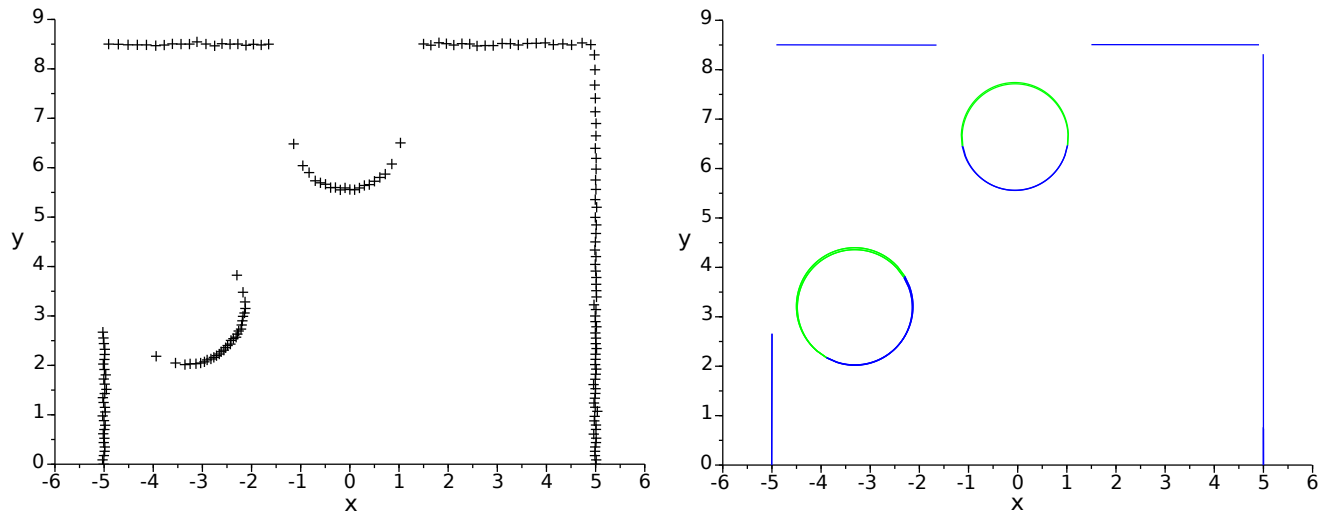


Figure 5.7: En la izquierda tenemos un ejemplo de mundo escaneado con un sensor de rango, en el que cada punto representa una muestra de dicho sensor. En la derecha vemos un conjunto de segmentos, representados en azul, estimados a partir de las medidas de rango mostradas en la izquierda. En la posición de las circunferencias mostradas se encuentran dos estimaciones superpuestas. Se ha representado en verde la parte cóncava de las circunferencias estimadas

lo que daría lugar a dos procedimientos de estimación para un mismo segmento. Dado que esta estimación se realizaría sobre las mismas muestras, se obtendría dos segmentos similares. Esta cuestión se abordará también en futuras investigaciones. Proponemos para ello la implementación del test de Chow Johnston and DiNardo's (1996). Vemos un ejemplo de esto en la figura 5.7 derecha, donde el grosor que se aprecia en las circunferencias estimadas se debe a que se han estimado dos muy similares en la misma posición.



# Capítulo 6

## Resultados experimentales

### 6.1. Descripción de los experimentos

Para la validación del algoritmo descrito en este trabajo, hemos realizado experimentos sobre dos mundos distintos. Por un lado, al que llamaremos mundo 1 (M1), que es el mostrado en la figura 5.3. Por otro lado, el que llamaremos mundo 2 (M2), que es el mostrado en la figura 5.6. Estos mundos los hemos generado de manera artificial. Para hacer los experimentos más realistas hemos añadido ruido aditivo gaussiano de  $\sigma = 0,02$  a los segmentos, para simular la incertidumbre del sensor láser que percibiría los mundos generados. Este ruido suele ser el más común en los sensores láser utilizados en robótica. En el M1, tenemos dos círculos, C1 y C2. Sin embargo en C2 obtenemos dos semillas, por lo tanto llamaremos a cada una de las estimaciones realizadas para esta circunferencia, C2a, y C2b. En el caso de M2, tenemos dos círculos, C1 y C2, y en cada uno de ellos tenemos dos grupos de semillas. Por lo tanto a las estimaciones las llamaremos C1a, C1b, C2a, y C2b. Cada estimación se realiza con nueve semillas obtenidas del proceso de clustering definido en el capítulo 4. El procedimiento de estimación se realiza de manera iterativa 20 veces para cada grupo de semillas, y, para poder obtener las estadísticas de errores, se realizan 500 experimentos. Las estadísticas de errores de estos experimentos se muestra en la sección siguiente (6.2).

### 6.2. Resultados

Errores		mean	median	std. dev.	min.	max.
M1-C1-Init	$\Delta\theta_0$	0.10671	0.08946	0.08527	0.00032	0.52414
	$\Delta\rho_0$	0.07335	0.06497	0.05092	0.00021	0.28153
	$\Delta R$	0.06906	0.06140	0.04907	0.00034	0.27388
M1-C1-Est	$\Delta\theta_0^k$	0.01218	0.10724	0.03543	0.00007	0.01052
	$\Delta\rho_0^k$	0.02252	0.01460	0.02440	0.00017	0.14992
	$\Delta R^k$	0.01621	0.01056	0.01676	0.00002	0.11023

Table 6.1: En este caso tanto en las estimaciones como las inicializaciones, se obtienen buenos resultados, ya que la circunferencia estimada, al estar alejada, se distingue mejor.

Errores		media	mediana	std. dev.	min.	max.
M1-C2a-Init	$\Delta\theta_0$	1.06134	0.99516	0.58392	0.00064	3.34063
	$\Delta\rho_0$	0.99610	0.99626	0.01640	0.92813	1.03930
	$\Delta R$	0.96495	0.96791	0.01222	0.89552	0.98386
M1-C2a-Est	$\Delta\theta_0^k$	0.43340	0.30684	1.24088	0.00014	26.6360
	$\Delta\rho_0^k$	0.16870	0.16473	0.11334	0.00063	0.84788
	$\Delta R^k$	0.15469	0.14953	0.10931	0.00035	0.90484

Table 6.2: En este caso el círculo está más próximo y es de mayor tamaño, por lo tanto obtenemos peores resultados.

Errors		mean	median	std. dev.	min.	max.
M1-C2b-Init	$\Delta\theta_0$	1.06134	0.99516	0.58392	0.00064	3.34063
	$\Delta\rho_0$	0.99610	0.99626	0.01640	0.92813	1.03930
	$\Delta R$	0.96495	0.96791	0.01222	0.89552	0.98386
M1-C2b-Est	$\Delta\theta_0^k$	0.02916	0.00619	0.08146	0.00001	0.77115
	$\Delta\rho_0^k$	0.06353	0.04244	0.06179	0.00022	0.26890
	$\Delta R^k$	0.05442	0.0353	0.05644	0.00003	0.25701

Table 6.3: Este círculo es el mismo que el anterior, los resultados son similares.

# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajos futuros

### 7.1. Conclusiones

Se ha conseguido implementar el procedimiento del Filtro de Kalman Extendido EKF, para la aplicación del método Gauss-Newton para la estimación de segmentos circulares, pudiendo distinguir entre estos, y los segmentos rectilíneos. Aunque en este caso, han surgido diferentes problemas con la linealización del modelo, han podido mitigarse en gran medida gracias a herramientas como la regularización de Tikhonov. También la posibilidad que ofrece este método recursivo de repetir el procedimiento, nos ha permitido poder mejorar los resultados. Creemos que con este método pueden abordarse técnicas, tanto de SLAM, como de navegación reactiva, aportando una representación de más alto nivel que las que se suelen utilizar en dichas técnicas.

### 7.2. Trabajos futuros

Como futuros trabajos se pretende Resolver el problema de la unión de los segmentos similares, así como de la resolución del problema de los solapes y los huecos descrito en la sección 5.4.3.

Otra línea interesante a seguir, sería la variante de estimación para ruido heterocedástico, es decir, ruido de varianza no constante. Este tipo de ruido puede encontrarse, tanto intrínseco en los materiales del entorno, como en los propios sensores láser, que dependan de la distancia.

También otra línea interesante sería la aplicación de este algoritmo de segmentación en técnicas, tanto de SLAM, como de navegación reactiva.



# Bibliografía

- Arras, K. O., Mozos, Ó. M., and Burgard, W. (2007). Using Boosted Features for the Detection of People in 2D Range Data. In *ICRA*.
- Aschoff, T. and Spiecker, H. (2004). Algorithms for the Automatic Detection of Trees in Laser Scanner Data. In *Laser-Scanners for Forest and Landscape Assessment*, volume 26, pages 71–75.
- Cuadra Troncoso, J. M., Álvarez-Sánchez, J. R., de la Paz Lopez, F., and Fernández-Caballero, A. (2011). Improving Area Center Robot Navigation Using a Novel Range Scan Segmentation Method. In *Foundations on Natural and Artificial Computation*, volume 6686 of *LNCS*, pages 233–245.
- Forsyth, D. A. and Ponce, J. (2003). *Computer Vision: A Modern Approach*. Prentice Hall.
- Huang, X., Sasaki, T., Hashimoto, H., and Inoue, F. (2010). Circle detection and fitting using laser range finder for positioning system. In *ICCAS 2010 - International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 1366–1370. IEEE.
- Inoue, F., Sasaki, T., Huang, X., and Hashimoto, H. (2011). Development of position measurement system for construction pile using laser range finder. In *Proceedings of the 28th International Symposium on Automation and Robotics in Construction, ISARC 2011*, pages 574–580.
- Johnston, J. (1984). *Econometric Methods*. McGraw Hill, 3rd edition.
- Johnston, J. and DiNardo's, J. (1996). *Econometric Methods*. McGraw-Hill/Irwin, 4th edition.
- Li, Y., Gui, Q., Gu, Y., Han, S., and Du, K. (2014). Ridge-Type Kalman Filter and Its Algorithm. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 13:852–862.
- Lindeberg, T. (1990). Scale-Space for Discrete Signals. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12:234–254.
- Lindeberg, T. (1991). Discrete scale-space theory and the scale-space primal sketch.
- Lindeberg, T. (1992). Scale-space for N-dimensional discrete signals. In *Proc. NATO ARW on Shape in Picture, Driebergen*, pages 7–11.

- Lindeberg, T. (1993). Discrete derivative approximations with scale-space properties: A basis for low-level feature extraction. *J. Math. Imaging Vision*, pages 349–376.
- Lindeberg, T. (1997). *On the axiomatic foundations of linear scale-space: Combining semi-group structure with causality vs. scale invariance*, chapter 6, pages 75–98. Gaussian Scale-Space Theory: Proc. PhD School on Scale-Space Theory. Kluwer Academic Publishers/Springer,.
- Lindeberg, T. and Bretzner, L. (2003). Real-time scale selection in hybrid multi-scale representations. In *Proceedings of the 4th international conference on Scale space methods in computer vision, Scale Space'03*, pages 148–163, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag.
- Mansfield, E. R. and Helms, B. P. (1982). Detecting multicollinearity. *The American Statistician*, 36(3a):158–160.
- Peña, D. (1985). On internal robustification of Plackett-Kalman algorithm for recursive estimation of regression linear models. *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa (in spanish)*, 36(1):93–106.
- Premebida, C. and Nunes, U. (2005). Segmentation and geometric primitives extraction from 2D laser range data for mobile robot applications. *Robotica*.
- Press, S. and Austin, D. (2004). Approaches to Pole Detection using Ranged Laser Data. In *Australian Conference on Robotics and Automation*. Australian Robotics and Automation Association.
- Santosjuanes, I. N., Troncoso, J. M. C., de la Paz López, F., and Prieto, R. A. (2013). Improved Polar Scan-Matching Using an Advanced Line Segmentation Algorithm. In *Natural and Artificial Computation in Engineering and Medical Applications*, volume 7931 of LNCS, pages 32–44.
- Siegel, A. F. (1982). Robust Regression Using Repeated Medians. *Biometrika*, 69(1):pp. 242–244.
- Teixidó, M., Pallejà, T., Font, D., Tresanchez, M., Moreno, J., and Palacín, J. (2012). Two-Dimensional Radial Laser Scanning for Circular Marker Detection and External Mobile Robot Tracking. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 12(12):16482–16497.
- Thrun, S., Burgard, W., and Fox, D. (2005). *Probabilistic Robotics*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Tikhonov, A. N., Leonov, A. S., and Yagola, A. G. (1998). *Nonlinear ill-posed problems*. London : Chapman & Hall.
- Troncoso, J. M. C., Álvarez-Sánchez, J. R., Santosjuanes, I. N., de la Paz López, F., and Prieto, R. A. (2015). Consistent robot localization using Polar Scan Matching based on Kalman Segmentation. *Robotics and Autonomous Systems*, 63, Part 2:219–225. Cognition-oriented Advanced Robotic Systems.



- Vázquez-Martín, R., Núñez, P., Bandera, A., and Sandoval, F. (2009). Curvature-based environment description for robot navigation using laser range sensors. *Sensors*, 9(8):5894–5918.
- Wasik, A., Ventura, R. M. M., Pereira, J. N., Lima, P. U., and Martinoli, A. (2015). Lidar-Based Relative Position Estimation and Tracking for Multi-robot Systems. In *Robot 2015: Second Iberian Robotics Conference - Advances in Robotics, Lisbon, Portugal, 19-21 November 2015, Volume 1*, pages 3–16.
- Witkin, A. (1984). Scale-space filtering: A new approach to multi-scale description. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '84.*, volume 9, pages 150–153.
- Xavier, J., Pacheco, M., Castro, D., Ruano, A., and Nunes, U. (2005). Fast Line, Arc/Circle and Leg Detection from Laser Scan Data in a Player Driver. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3930–3935.
- Zhou, X., Wang, Y., Zhu, Q., and Miao, Z. (2016). Circular Object Detection in Polar Coordinates for 2D LIDAR Data. In *Pattern Recognition - 7th Chinese Conference, CCPR 2016, Chengdu, China, November 5-7, 2016, Proceedings, Part I*, pages 65–78.

