TEORÍAS DE LAS PROBABILIDADES Y SU CONCEPTUALIZACIÓN EN LA TEORÍA DE LAS CATEGORÍAS.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/\ker(f) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Alumno: Luis Carballo Gil

Tutor: Jesús Zamora Bonilla.

TRABAJO FIN DE MÁSTER.

Máster en filosofía teórica y práctica: Especialidad en Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia. (U.N.E.D.)

A todos mis profesores de la UNED; para los que han sido, los que son, y los que serán. En particular: al tutor de este trabajo, por su confianza en mí (por darme libertad, así que toda carencia es mía) y también por sus consejos. A Francisco Tugores (maestro, amigo. Matemático. Sonetista de espíritu.)

También a Ángeles profesora de la asignatura de Química en la USC. Amiga paciente y querida. Profesora dedicada.

Sin las matemáticas no se penetra hasta el fondo de la filosofía; sin la filosofía no se llega al fondo de las matemáticas; sin las dos no se ve el fondo de nada.

(Frase atribuida a Leibniz, aunque no estamos seguros de su autoría)

RESUMEN.

En el presente trabajo pretendemos relacionar la teoría de la probabilidad (TP) con la teoría de las categorías (TC). Desde luego no de un modo absoluto -sería difícil con las condiciones del trabajo.

Antes se hace un breve repaso por ambas teorías. Aunque la esencia del trabajo se concreta en la última parte, que exhibe el título. Se intentará dar una visión matemática y filosófica.

ABSTRACT.

In the present work we intend to relate the probability theory (TP) with the categoty theory (TC). Certainly not in absolute way, but in part. Before doing so, a brief review of both teories is made although the essence of the work is specified in the last part, as the title shows. It will try to give a mathematical and philosophical view.

ÍNDICE.

1. PREFACIO.

Si no aparece la palabra filosofía en el título (filosofía de la probabilidad) es por dos motivos principales[1]. El primero, es que ya el hecho de decir teorías de la probabilidades, sugiere su filosofía. Y esto se puede ver en la mayoría de los libros matemáticos que tratan el tema.

[1] Mientras que la teoría de las categorías no es necesario esta advertencia, puesto que esta teoría, la tratamos de una forma más matemática (sin renuncias).

Algunos, comienzan sobre consideraciones sobre el azar, los juegos; cuando no, sobre el concepto mismo de probabilidad a lo largo de la historia científica de la teoría.

Nosotros iremos más lejos, porque lo que generalmente no se dice, salvo en libros muy específicos de matemáticas y filosofía y viceversa[2], es que hay distintos tipos de probabilidad, con sus consecuencias respectivas. Y aunque daremos un panorama general, no podemos referirnos a todas ellas. Así, de un modo genérico, hablaremos de las probabilidades objetivas y subjetivas. Incluyendo aquí, la bayesiana y, parte de la teoría de la decisión (TD). Por otro lado, el segundo motivo, es que no renunciamos a una cierta visión matemática. No debemos olvidar que la *Estadística*[3], está formada por la estadística descriptiva, cálculo de probabilidades y estadística inferencial (García, 2010, p.37). Y, por tanto, a nuestro juicio es más provechoso que no se den como cosas separadas. Por lo demás, el trabajo se centra en relacionar dos teorías matemáticas -lo que significa que excluir lo matemático es imposible- con una densidad filosófica[4] evidente, pero, al fin y al cabo, teorías matemáticas. Además, hemos de introducir una tercera teoría, que es la teoría de la medida, que no sólo sirve de enlace para las otras dos, sino que nos ayudará a conocer mejor la TP.

La visión matemática puede resultar reducida (entre otras cosas, p.ej., hablamos de teorías de la probabilidad no de cálculo de probabilidades, aunque se toque el tema) pero si fuésemos rigurosos y precisos, ahogaríamos el trabajo en definiciones, teoremas (también en lo correspondiente en la TC). Para subsanar en parte esta carencia; vamos a utilizar dos apéndices, uno para la TP y otro para el de la TC: al que nos referiremos como [1] y [2], respectivamente.

Habrá sugerencias, comentarios y ramales que se abrirán, pero que –algunos- no se desarrollarán, por las propias limitaciones del trabajo. Sin embargo, creemos que esas sugerencias, son provechosas y fructíferas, aunque no se desarrollen. Puesto que marcan un camino, recorta lindes, deja entrever las profundidades a las que nos asomamos. Un ejemplo lo tenemos en la teoría de la información. Y esto es así, porque la teoría de la información está relacionada con la probabilidad –se ve v.gr., en la entropía de Shannon- y mucho más común es la relación de la probabilidad con la física (aunque no sea el ámbito del trabajo) y, aún, la TC.

Con todo, nuestro interés se reúne en el ámbito filosófico y en menor medida –no despreciable, quizás- matemático. Para algunos matemáticos puede resultar peregrino hablar de las diversas

[2] Pongamos a un De Finetti, a un Savage, a un Ramsey, a un Russell, a un Carnap, etc.

[3] Aunque no siempre fue así <<Las dos ciencias, probabilidad y estadística, se desarrollaban independientemente. Un ejemplo ilustrativo lo tenemos en la carta que el estadístico Ludwig Huygens escribía en 1669 a su hermano el probabilista Cristian: <<*He estado construyendo una tabla para mostrar cuánto tiempo tiene de vida la gente de una edad dada... Según mis cálculos tu vivirás alrededor de 56 años y medio y yo sobre 55*>>>> (Gutierrez, 1992, p.123)

[4] Véase el ejemplo en TC, que probablemente, será la parte que se conozca menos <<La teoría de categorías desafía de dos maneras, que no son necesariamente excluyentes entre sí. Por un lado, es ciertamente tarea de la filosofía clarificar el estatus epistemológico y ontológico general de las categorías y los métodos categóricos, tanto en la práctica de las matemáticas como en el paisaje fundacional. Por otro lado, los filósofos y los lógicos filosóficos pueden emplear la teoría de categorías y a la lógica categórica para explorar problemas filosóficos y lógicos>> (Marquis, 2021).

interpretaciones[5] (en sentido filosófico) que se le den a la probabilidad[6]. Al fin y al cabo, partiendo de las bases axiomáticas <<nada cambia cuando se parte de otra interpretación[7]>> (Gutiérrez, 1992, p.62). Pero aún los más puristas deben aceptar que minusvalorar la interpretación, va en detrimento de la propia teoría, cuando no la anula, pues una TP puede diferenciarse de otras –de hecho, así sucede- en su interpretación, incluso, de los propios axiomas[8]. Ítem más, renegar de las distintas apreciaciones, empobrece (si han nacido nuevas ramas de las matemáticas y, la TP es una prueba de ello, es porque se han planteado nuevas coyunturas. Las vemos desde Pascal a Kolmogorov, pasando por Laplace –valga el itinerario- la disciplina y no deja que crezca y, por otro lado, los propios matemáticos son intérpretes sin saberlo, en la mayoría de los casos. En otros casos sí: p.ej., Émile Borel[9]en su libro *Las probabilidades de la vida*, afirma lo que él llama ley de la probabilidad: <<*Los acontecimientos cuya probabilidad es suficientemente escasa, nunca se producen; o por lo menos, en todas las circunstancias, deben ser tratados como imposibles*[10]>>. No podemos aceptar, que un suceso altamente improbable, sea determinado como un suceso imposible[11]. Pero dejemos, en este caso nuestras opiniones a un lado, pues nos basta mencionar el título del libro de David Hand *The improbability principle.* En este libro, del que hacemos menciones más adelante, se nos dice lo contrario. El subtítulo es: *porqué las coincidencias, milagros y eventos raros ocurren todos los días*[12].

[5] Mucho peor de estilos, como hace Javier de Lorenzo en su libro *Introducción al estilo matemático.*
También es cierto, que la introducción de la teoría de la medida relacionada con la teoría de la probabilidad, por ser más formalizada, piensan que son menos filosófica. Esto es falso, pues la LÓGICA, es una disciplina filosófica, no matemática. La Lógica matemática, es una subdisciplina de la LÓGICA, lo mismo que la intucionista.

[6] Lo mismo pudieran pensar los filósofos, que ven en algunos matemáticos, ciegos inútiles, cuyo hacer, se limita a dar clases y de cuando en cuando hacer recopilatorios de los verdaderos matemáticos, que son los que se arriesgan, interpretan, en definitiva: crean matemáticas.

[7] Esto no es del todo cierto. Véase en [1], apartado primero.

[8] Aunque en este caso, lo que denominamos interpretación no sea estrictamente lo mismo, aunque sí filosófico, quizás más cercano a la lógica matemática y/o a la teoría de la prueba. P.ej., la axiomática más aceptada es la de Kolmogorov. Sin embargo, esta axiomática no estuvo –ni está- exenta de crítica y se dieron otras axiomatizaciones. P.ej. <<KAWADA (en 1943) construye una fundamentación del tipo de la de KOLMOGOROV, pero sin utilizar el concepto de evento, de primera intención; pues la multivocidad del mismo le resulta ser inconveniente. Parte, en cambio de la noción primitiva de la variable estocástica. Pues éstas reconocen una relación de orden parcial [teoría de retículos], KAWADA se sirve de la teoría de los reticulados vectoriales completados en espacios lineales, o <<dominios de probabilidad>>.
Si estos espacios fuesen medibles o integrables, ya estaríamos en la teoría de KOLMOGOROV [recordar que a Kolmogorov, se sirve de la teoría de conjuntos como modelo y que Tornier, le rebate el axioma 6 [1], por no ser intuitivo ni necesario]>> (Bustos, 1955).

[9] Matemático de primer orden y especialista en probabilidad. Baste decir que las sigmas álgebras que suelen ser álgebras, llamadas de Borel.

[10] Cursiva nuestra. <<Sucesos improbables e imposibles: Si lanzamos una moneda un número infinito de veces, podemos preguntarnos por la probabilidad de obtener una sucesión infinita de caras. Dicho evento se diferencia de manera fundamental de otros, como obtener una cara o una cruz al mismo tiempo: el primero resulta muy improbable, pero el segundo resulta imposible. Sin embargo, la teoría clásica asigna una probabilidad nula. ¿Es por ello una teoría incompleta? << Pérez, 2013>>

[11] A menudo no se suele mencionar (también se deberá tener en cuenta cuando se lea el ejemplo propuesto en la hipótesis del continuo y la probabilidad) la ley <<cero-uno>> [1]. ¿En este caso podría aplicarse tal Ley? Deberían cumplirse las hipótesis como es lógico, pero esto aplicado a la “vida”, es muy complejo.

[12] La cursiva es nuestra.

Sin embargo, si hay alguna persona que duda de esta propuesta, y sólo se convencería de ello, de un modo pragmático -que tenga sentido la interpretación bayesiana, o sea, subjetivista y no objetiva[13]- basta poner dos ejemplos: el primero sobre Alan Turing y la máquina Enigma[14]: <<...Turing lograría inventar un método manual para reducir el volumen de cálculos que tenían que efectuar los bombes. **El hallazgo** consistía en un sistema **bayesiano** que requería la colaboración de un elevado número de personas...[15]>> (Bertsch, 2012, p.127). El segundo caso, citado en el mismo libro, pág. 401:

> << Gracias a algunos precursores como Robert Schlaifer y Howard Raiffa, los bayesianos serían la fuerza preponderante en el ámbito de los estudios empresariales y la economía teórica, mientras que los departamentos de estadística estaban dominados por los frecuentistas -técnicos que preferían centrarse en grupos de datos con escasas incógnitas a volcarse en el examen de hechos que implicaran el manejo de un gran número de ellas>>.

El ámbito a tratar es amplio. Lo vemos en TP, pero sumamos la TC. En ésta última, algunos no ven tanto, una teoría de fundamentación de las matemáticas -aunque también los hay- como la teoría de conjuntos, sino relacionada (que a nada que nos pongamos espléndidos, podríamos relacionar lo dicho, con la fundamentación) con la teoría de tipos o el sistema de Fraenkel-Neumann- Bernays (Kus' and Showron, 2019)[16].

Puede que este trabajo defraude a filósofos y matemáticos -o peor aún, defraude a todo lector- porque para los unos es demasiado matemático y para otros demasiado filosófico -para el resto es una basura y punto. Esperamos que ello no suceda, porque no creyendo que debiera existir la diferenciación entre ciencias y letras (la filosofía es una muestra viva de ello, no sólo como disciplina sino por la propia vida y formación de los filósofos, fuera ya ésta reglada o autodidacta, académica o de "buhardilla"), pero si creyésemos por un momento en tal distinción, en ese breve instante, diríamos que las matemáticas son las ciencias más de letras –axiomas, álgebra, topología- y la filosofía, las letras más de ciencias- baste la espacialidad de este trabajo. Para el tercer grupo de lectores, esperamos que algo en limpio puedan sacar, aunque sólo sea, como no deben hacerse las cosas. Aunque honestamente, creemos, que algo positivo puede sacarse.

Nota: Todas las traducciones son nuestras.

---

[13] Pues objetiva debe ser la ciencia matemática. Aprovechemos esto para decir, que cuando se habla de subjetivismo, no estamos hablando en sentido filosófico, en tanto que, el subjetivismo sea un idealismo. Siendo el caso, que muchos matemáticos son platonistas, y no cabe, a nuestro mayor idealismo. Para ser honestos, nuestro "ideal" de las matemáticas es el de Lakatos junto con el de Hilary Putnam y Quine, junto con cierto aristotelismo referido a la abstracción. Creemos que somos bastante específicos para los filósofos que sepan de lo que hablamos.

[14] Máquina de códigos que usaban los alemanes, y cuyos primeros trabajos sobre ella, no fueron los ingleses, sino los polacos.

[15] La negrita es nuestra.

[16] Esto lo veremos más adelante. No obstante, la TC tiene un" cierto aire de familia" con la teoría de conjuntos. De hecho, se suele partir de la segunda para explicar la primera.

2. INTRODUCCIÓN.

El trabajo se divide en tres partes, que parecen obvias: la primera, sobre la teoría de la probabilidad; la segunda, sobre la teoría de las categorías y, por último, la tercera; la unión de ambas. Ayudados por la teoría de la medida: porque es imposible anudar, probabilidad con categorías, sin pasar por espacios medibles.

Divisiones:

En la primera parte, trataremos de contestar entre otras consideraciones, a las preguntas: ¿cuáles son las teorías de la probabilidad más significativas? Y daremos unas pinceladas sobre ellas ¿Es la teoría subjetiva de la probabilidad lo suficientemente fructífera, tanto para el matemático como para el filósofo, para tenerlas, de un modo estricto[17] en cuenta? ¿Por qué está tan presente la teoría de la decisión? ¿Qué importan las creencias en probabilidad? Por último, en este apartado daremos razones por las que, a nuestro juicio, las probabilidades son interesantes introducirlas en las categorías y sus problemáticas más evidentes para nosotros.

Una vez que hayamos desarrollado la primera parte, hablaremos sobre la TC ¿Qué importancia se le pueden atribuir a las categorías, tanto en las matemáticas cómo en la filosofía? ¿Qué ventajas tiene la TC frente a la teoría de conjuntos? ¿Cómo podemos acercarnos desde esta teoría hacia la TP? Esta segunda parte, será autocontenida, es decir, quién no sepa nada de dicha teoría, procuraremos dar la información suficiente para entender las afirmaciones del trabajo. En el apartado **3.2** se dará algunas justificaciones de elección del tema.

Por último, la tercera parte, es como conceptualizar ambas teorías. Intentando 'anudar' una en otra, incluyendo la probabilidad subjetiva[18] ¿Cómo podemos relacionar la TC con la probabilidad? ¿Qué relación podemos establecer con la lógica intucionista (en contra posición de la lógica clásica o lógica, que nosotros llamamos del sentido común[19]) y la probabilidad?, etc. Lo interesante del trabajo, además de las ideas propias, es el propio enfoque del tema -que,

[17] Con estricto queremos decir, que formen parte del corpus matemático y filosófico. Con Corpus, queremos decir, no tanto una bibliografía extensa, sino, sustancial. Y con sustancial -podríamos dar nuestra versión matemática: es un axioma- pero queremos decir, lo suficientemente relevante para las teorías de las que hablamos. Y con relevantes volveríamos a sustancial. Salvo, que, relevante, tiene un sentido propio e histórico ¿Ambos subjetivos? Seguramente. Pero no por ello irrelevantes.
En este pie de página, que creemos que viene al caso, una experiencia personal: un profesor de matemáticas, en un examen nos dijo...” parad, en algún momento, tendréis que dar sin demostración un teorema, o partir de un axioma”.
Que os cuenten el chiste: en un tren van un matemático, un físico y un informático...

[18] La teoría de categorías es una teoría altamente formal y abstracta. Por ello, introducir la probabilidad subjetiva, podría ser difícil, aunque, altamente interesante.

[19] La lógica clásica o de lo que llamamos del sentido común, es aquella que tiene los tres principios básicos: principio de no contradicción, principio de identidad y el tercio excluso. Somos aprendices de la lógica paraconsistente, que en este trabajo no viene al caso, pero queremos decir, que somos conscientes de la riqueza de la lógica, para no añorar la pobreza de nuestra “realidad”.

no siendo original ni novedosa, es reciente- y se concentra en esta tercera parte, sin obviar las dos anteriores y, sobre todo, la segunda.

3. PARTE PRIMERA.

3.1 Panorama general sobre las diversas interpretaciones de la teoría de la probabilidad.

No vamos a entrar aquí en un debate sobre lo que es una teoría y sus interpretaciones[20], porque no es el tema del trabajo. Supondremos como la sugerencia de Max Black (1970), según el cual <<*ninguna definición de probabilidad es posible o necesaria*>> (Citado en Gutiérrez 1992, p.160). Y, hablamos de teorías, sobre todo referente a la probabilidad, como teorías ya dadas. Podemos entrar en sus conceptos, en sus métodos. Pero no discutimos, el estatus de Teoría [ver referencia pie de pág. 6, así como el pie de pág. 8[21]].

Antes de comenzar con las diversas teorías, debemos aclarar, que generalmente utilizamos mal tanto el concepto de probabilidad, como el de probabilidades, cuando con este plural, vinculamos, inconscientemente –acaso- con una teoría de la probabilidad. Por supuesto, esta vinculación es espontánea y sin fundamento[22]. Pongamos dos ejemplos. El primero: en una discusión entre amigos, uno de ellos afirma que las preguntas de un examen de una asignatura de tal o cual grado; los temas de la asignatura tienen las mismas probabilidades de aparecer. Esto es, desde luego, falso. Porque cada profesor tiene sus sesgos (sesgo de disponibilidad, v.gr.). Así, por ejemplo, en un examen de anatomía, no es lo mismo que las preguntas las realice un podólogo que un neurólogo. Puesto que, el podólogo tenderá[23] a preguntar más, sobre la anatomía del pie que el neurólogo. Otro ejemplo que podemos mencionar, mucho más" trabajado" es el *problema de Linda* que propuso Kahneman (con su colega Amos) en su libro *Pensar lento, pensar despacio* donde se pretende introducir la heurística, así como los juicios de probabilidad y su relación con la lógica. Una joven, Linda, estudiante de filosofía, brillante, treintañera, ...Los investigadores hacen una serie de ítems, para acabar en los aditamentos problemáticos. Así, se preguntan: ¿parece Linda más una cajera de banco o una cajera de banco militante feminista? (de hecho, los primeros ítems se manipularon para que, a la mayoría de las personas, les cuadrase mejor la historia de ser cajera y feminista). Sin embargo, refiriéndonos a la pregunta antedicha y, analizado desde los juicios de probabilidad, la mayoría de las personas se equivocan: [la teoría que se toma como modelo es la teoría de conjuntos, algo en lo que Kahneman, no profundiza, pero lo deja claro a nuestro juicio, cuando habla de los diagramas de Venn], que una cajera de banco sea feminista, es menos probable que sea una cajera de banco. En primer lugar, porque el conjunto de cajeras de banco y feministas está contenido en el conjunto de cajeras de banco. Es decir, que, si A está incluido en B, entonces $P(A) \leq P(B)$. Pero, además, y principalmente, l ...a probabilidad de que dos sucesos ocurran

[20] Esto es, sobre epistemología. De hecho, la epistemología subyace en parte del texto.
[21] Todo lo dicho en ese artículo, no refuta, en absoluto el teorema central del límite, entre otras cosas, porque la varianza de un número infinito de lanzamientos, en los que todos salga cara, es nula. Valdría también que fuese infinita, pero en este caso concreto, la varianza es cero. Supongamos, v.gr., la función degenerada tipo *delta de Dirac.*
[22] No desarrollaremos estas ideas, porque aquí sí, estaríamos inflando el trabajo innecesariamente. Quede, sin embargo, el remite al artículo de Hertwing and Gigerenzer (1999), para mayor comprensión y profundización en el tema.
[23] Aclararemos ese "tenderá" más adelante.

no puede ser nunca mayor que la probabilidad de que cada uno ocurra individualmente[24]. Esto último, es también conocido como la *falacia de la conjunción* (Conjunction Fallacy). Esta falla inferencial tiene graves repercusiones dependiendo a qué campos se aplique (Hertwig and Gigerenzer, 1999)[25].

Pues bien, vayamos aclarando estas y otras consideraciones, describiendo los tipos de probabilidad, que nosotros consideramos más relevantes, haciendo hincapié al final, en la probabilidad subjetiva. En este primer apartado, daremos un breve resumen. Más pormenorizado, será el siguiente, porque en él, se darán aportaciones que nos ayuden ya, en el colofón del trabajo. Esto es, en la última parte del trabajo. Por ejemplo, aquí no hablaremos de espacios métricos: conceptos imprescindibles a nuestro juicio para relacionar TP y TC.

Iremos poco a poco, pero aumentando la complejidad, según vayamos avanzando.

3.1.1 Probabilidad frecuentista

La teoría frecuentista de la probabilidad tiene un arraigo en la teoría de Laplace[26], aunque bien es cierto, que la teoría frecuentista moderna, es más compleja que la de Laplace. Ahora bien, los cimientos, por decirlo así, del frecuentismo, apenas han cambiado desde Laplace[27]. El principal, que sigue siendo definición -incluso con ciertas variantes, como veremos, para otras teoría- es el primer principio:

> << (…) *Primer principio*
>
> El primero de estos principios es la definición misma de probabilidad que, como hemos visto, es la razón entre el número de casos favorables y el de todos los casos posibles.
>
> *Segundo principio.*
>
> Pero esto supone que los distintos casos son igualmente posibles [equiprobables diríamos hoy]. Si no lo son, habrá que determinar primero sus posibilidades respectivas, cuya justa valoración constituye uno de los puntos más delicados de la teoría del azar >> (Laplace, 1985, p. 31).

---

[24] <<...porque si las posibilidades de <<Linda es cajera de banco y una activista del movimiento feminista>> fueran mayores que las posibilidades de <<Linda es cajera de banco>>, esto violaría nuestra primera ley de probabilidades, y una de las más básicas: la probabilidad de que dos sucesos ocurren no puede ser nunca mayor que la probabilidad de que cada uno ocurra individualmente ¿Por qué no? Simple aritmética: las posibilidades de que el suceso A ocurra son las mismas de que las posibilidades de que el suceso A y el B ocurran, más la posibilidad de que el suceso A ocurra y el suceso B no ocurra>> (Mlodinov, 2008, p.33)

[25] En este artículo se habla de inferencia semántica (semantics inference) y del significado de frecuencia, además de otros contenidos. El artículo es digno de interés.

[26] En su famosos libro: *Ensayo filosófico sobre probabilidades.*

[27] <<LAPLACE ha afirmado muchas cosas sobre la probabilidad. No menos de once conceptos diferentes, a veces incompatibles, hemos hallado en sus *Ensayos*. Ocurrió que uno de esos conceptos –por su poder operacional- tuvo más fortuna que los otros. Enunciado más concreta y explícitamente, devino la definición <<clásica>> usada hasta por POINCARÉ; a saber <<la relación entre número de casos favorables y número total de casos igualmente posibles>>. O <<igualmente probables>>; porque lo probable no es más que la normalización de lo posible.
La petición de principio es fatal, aclara POINCARÉ.>> (Bustos, 1955). <<Podemos no tener en cuenta las objeciones lógicas que se han planteado frente a tal definición, tales como la que <<igualmente posibles>> es otra manera de expresar <<igualmente probables>>>> (Popper, 2008, p.175).

Las teorías frecuentistas están incluidas –abusando del término, a nuestro juicio- en el grupo de teorías objetivas empíricas[28]. Puesto que esto último, en general, siguiere que el azar forma parte de la naturaleza de un modo intrínseco. Si bien, esto último puede interesar a los físicos y a los filósofos (qué cosa no les causa curiosidad a los filósofos), pues cabe plantearse un modo *ex ante* de experimentar y un modo *ex post* después de la experimentación[29] y que no tiene una relación directa, en la probabilidad bayesiana, con la probabilidad a priori o la probabilidad a posteriori. En fin, que este estudio sobre la ontología de la probabilidad no lo haremos.

En todo caso, las interpretaciones frecuenciales, vienen por centrarse en las frecuencias:

> Las teorías de la probabilidad basadas en las frecuencias pueden contemplar, o no, experiencias repetidas, pueden definir probabilidades directamente, como límites de esas frecuencias (tal es el caso de von Mises[30]) o pueden introducirlas axiomáticamente (como hacen Kolmogorov, Cramér, y Frechet, por citar los nombres más importantes). (Guierrez, 1992, p. 180).

En la interpretación susodicha, podemos distinguir dos clases: la primera basada en una clase finita de datos y la segunda en una sucesión infinita de frecuencias. En este último caso, es el más interesante, pues en los experimentos sugieren que las frecuencias relativas de datos, se va estabilizando cuanto mayor sean las pruebas experimentales

(i) En muchos fenómenos importantes, y hechos de la vida, las frecuencias relativas parecen converger o estabilizarse, cuando los fenómenos o hechos se repiten suficientemente y son abandonados a la libre intervención del azar: esta convergencia es un hecho empírico y un sorprendente ejemplo de orden en el caos.
(ii) La aparente convergencia empírica, sugiere la hipótesis de convergencia extrapolada a resultados de experimentos no ejecutados aún [se aclara aquí, lo que decíamos más arriba

---

[28] ¿Por qué un abuso de los términos? Porque empirista reduce la teoría estadística (entiéndase este ejemplo en el conjunto, de que la teoría de la probabilidad es una parte –y teóricamente no menor- de la Estadística) a una especie de cubilete, que la" **mano invisible**" [rememorando a Smith] mueve al ritmo de alguna ley de la naturaleza. Alguien dirá, y con razón: la ley de los grandes números es una ley empírica... ¿Cierto?: A medias. Por el teorema central del límite [<<la formalización de la relación entre frecuencia relativa y probabilidad según Bernoulli, y en expresión de Borel, es P $|\lim n\text{-->}\infty\ (1/n\ \Sigma_{i=1}^{n}\ X_i\ )=p|=1$ donde las X_i sólo pueden tomar los valores 1 y 0 (Gutierrez, 1992)>>] que es la base de la ley de los grandes números, no se puede sostener con una varianza nula. Es decir, como cualquier lógico sabe, un teorema se cumple, siempre y cuando se cumplan las condiciones que hacen cierto al teorema. Y si lanzamos una moneda una infinidad de veces, es improbable que salga siempre cara, pero no imposible. (Pérez, 2013).

Para comprenderlo mejor, un breve apunte: <<Vamos a aumentar el tamaño del experimento hasta 1.000 lanzamientos. Se trata ahora de que salga entre 490 y 510 caras, lo cual sucede en un 50% de los casos. Con 10.000 lanzamientos, **el intervalo aceptable** se sitúa entre 4.900 y 5.100, y el éxito nos acompaña en más del 95% de los casos. Con un millón de lanzamientos, la familia Romanov recuperará su poder absoluto en Rusia antes de que la proporción de caras caiga fuera del intervalo entre el 49% y el 51%>> (Haigh,2008, p.24)

[29] Como nuestro interés no es el de hablar de las propiedades" propias", valga la reiteración, de las teorías, no desarrollamos estos conceptos. Decir si acaso, que uno se fija más en la estructura del azar y el otro, en la observación. Aunque esto es problemático, porque separar una cosa de la otra, entraríamos en terrenos metafísicos de largo alcance.

[30] <<Su teoría fue la primera donde el principio de estabilización de frecuencias estadísticas se realizó a nivel matemático. De hecho, este principio se usó como definición de probabilidad. Recordamos las principales nociones de la teoría frecuencial de la probabilidad [169-171] de Richard von Mises (1919]. Esta teoría se basa en la noción de colectivo>> (Krennikov, 2009, p. 4). Hablaremos del concepto colectivo de R. von Mises en el texto.

> sobre los experimentos antes de y después de], y, en consecuencia, la interpretación de la probabilidad como límite frecuencial, valorada por las frecuencias relativas de los datos. (Ibidem, p.182)

3.1.2 Frecuencialismo en Richard von Mises.

Uno de los teóricos del frecuencialismo fue el hermano de Ludwig von Mises, Richard. Para él, la probabilidad es una doctrina de origen empírico <<cuyo objeto (análogo al de la estadística) es describir ciertos fenómenos naturales particulares: los fenómenos masa>> (Bustos, 1955, p.6). Éste introdujo el concepto de colectivo [1] [apartado 4], para estudiar la convergencia de sucesiones [ver pie de página 27, la expresión de Borel] de pruebas en el conjunto de frecuencias. Éstas, tenían fuertes restricciones, v.gr., la ley fuerte de los grandes números, donde pasamos del experimento a una esperanza de que las frecuencias relativas serán estables. Mises introdujo dos supuestos para el estudio del colectivo: la aleatoriedad y la convergencia (la teoría se fundamenta en dos axiomas principales, el axioma de convergencia o axioma del límite y el axioma de aleatoriedad o llamado <<a veces, <<el principio de exclusión de los sistemas de jugar>>>> (Popper, 2008)).

Para una formulación más precisa de aleatoriedad, Mises introduce <<selección local de una subsucesión [ver en [1] apartado 4]>> como parte de otra sucesión[31]. El concepto de colectivo es básico en las teorías de Mises <<*como una larga sucesión de observaciones o pruebas experimentales. Cada una de las cuales conduce a un resultado numérico definido, que cumple estas dos condiciones: existencias de límite de frecuencias y aleatoriedad*>> (Citado en Gutierrez, 1992, p.187). Los enunciados de probabilidad están conectados con fenómenos de agregación, más que la idea de hecho o sucesos individuales.

3.1.3 Probabilidad como propensión.

Uno de los pensadores que plantearon la probabilidad como propensión fue Popper. Aunque podemos ver sus antecedentes en

> Los trabajos de Pierce, Cramér y Hempel. Escudriñando en la historia y asimilando <<proclividad>> a propensión, encontramos el <<*aequae proclives*>>, o la raíz latina <<*facile*>>, en el memorándum de Galileo, en los libros de Cardano y Huygens, y en el tratado sobre utilidad de Daniel Bernouilli.
>
> Pierce escribía (...) <<*El enunciado significa que el dado tiene un cierto <<Would-be>>...análogo a algún hábito que un hombre puede tener*>> (Citado en Gutierrez, 1992, p. 210).

Popper lo plantea como una disposición, una <<*propensión física*>>. Popper, al igual que Mises, concibe la probabilidad como una interpretación objetiva (empírica).

[31] Para verlo de un modo más matemático, diríamos, que no estamos hablando de un **recubrimiento** -como se entiende en análisis matemático, topología o métrica- puesto que el colectivo de Mises es una idealización infinita de una muestra finita. Los recubrimientos, para decirlo brevemente, son la unión de elementos de una colección de subconjuntos de A, p.ej., cuya unión está contenida en el conjunto mayor; X, p.ej.

Popper está muy interesado en los fundamentos de la probabilidad; basta ver su libro *La lógica de la investigación científica* donde dedica, un apartado extenso a la probabilidad de modo directo y en otros apartados del libro de un modo indirecto. Valga el ejemplo de un epígrafe: Probabilidad de una hipótesis y probabilidad de eventos: crítica de la lógica probabilitaria. Sin embargo, Popper está más interesado en la relación entre probabilidad y experiencia y, de hecho, de los autores que hemos mencionado (quedan muchísimos obviamente[32]), el aplica esa idea de probabilidad a la mecánica cuántica. Asimismo, en su interpretación probabilística, rondan ideas sobre el determinismo e el indeterminismo

> Hoy comprendo por qué tantos deterministas, e incluso exdeterministas, que creen en el carácter determinista de la física clásica, creen seriamente en una interpretación subjetiva de la probabilidad: es de algún modo, *la única posibilidad razonable* que pueden aceptar; porque las probabilidades físicas objetivas son incompatibles con el determinismo; y , si la física clásica es determinista, tiene que ser incompatible con una interpretación objetiva de la mecánica estadística clásica (Popper,2011, p. 125)

3.1.4 Probabilidad lógica.

La probabilidad lógica es una interpretación que relaciona dos enunciados, bajo la idea del azar subjetivo[33]. La probabilidad lógica viene de modo directo -quizás simplificado- de las teorías clásicas, en particular de Bernouilli y Laplace, como se verá en el siguiente ejemplo:

> *Cualquier interpretación de la probabilidad tiene derecho al título de teoría lógica si su autor sostiene que un enunciado de probabilidad básico, de la forma <<la probabilidad de P, sobre S, es p>>, es verdadero a priori* (Citado en Gutierrez, 1992)

Otro ejemplo de lo que podríamos señalar de error de razonamiento lógico[34]

> Debemos al erudito victoriano Francis Galton (…). Si lanzan tres monedas iguales al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres caras o tres cruces? Consideremos un razonamiento carente de sentido como el siguiente: Por lo menos dos de las tres monedas han de dar el mismo resultado, ya sea dos caras o dos cruces. La tercera moneda tiene la misma probabilidad de salir cara o cruz, con lo cual la mitad de las veces saldrá como las otras dos y la mitad saldrá distinta. Por consiguiente, la probabilidad de que las tres sean iguales es de la mitad.
>
> Para detectar el error (…) se requiere un enfoque lógico [para resumir], si tomamos los resultados {CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, +++} (…). La probabilidad de que las tres monedas caigan del mismo lado es de dos de ocho o, lo que es lo mismo, un cuarto.

---

[32] Cabe aclarar, que hemos citado a Kolmogorov y, éste, trató la probabilidad cuántica de un modo formal: <<We consider now Kolmogorov's (ensemble-frequency) interpretation of 'quantum probabilities'. If we use the abstract measure-theoretical formalism, then we migh identify some probabilities related to different probability spaces>> (Khrennikov, 2009, p. 54).

[33] No lo ponemos en el apartado de probabilidad subjetiva, porque es una teoría suficientemente compleja, como para aseverar que tiene solo y claramente, una interpretación subjetiva, de hecho, algunos la toman como probabilidad objetiva, basada en la consecuencia lógica. Aquí es donde viene la crítica de Ramsey con su creencia parcial. Por no hablar de la probabilidad lógica e inferencia inductiva

[34] Aunque este ejemplo no es estrictamente una referencia a la probabilidad lógica, es un buen ejemplo donde el razonamiento es importante.

En general, diremos, que esta probabilidad está considerada en relación con la evidencia y un conjunto de conocimientos. Podemos ver, que esto no es exclusivo, puesto que Kolmogorov y otros, escribían lo siguiente en su libro *La matemática: su contenido, métodos y significado, vol.2*

> ...bajo las cuales algún suceso de interés para nosotros ocurrirá, o no ocurrirá, pero en ambos casos con certeza; estas condiciones se pueden expresar en una de las formas siguientes:
>
> 1. Si un sistema (un conjunto o colección) de condiciones S se realiza, entonces el suceso A ocurre con certeza;
>
> 2. Si un sistema de condiciones S se realiza, entonces el suceso A no puede ocurrir.
>
> En el primer caso, el suceso A, con respecto al sistema de condiciones S, se dice que es un suceso <<cierto>> o <<necesario>>, y en el segundo, un suceso <<imposible>> …

Fue Keynes (Leibniz antes ya propuso <<una *escala continua de los <<valores de verdad>>* y la *<<aceptación de la probabilidad como una rama de la lógica>>>>*) quien plantea que las proposiciones –enunciado de probabilidad lógica, cuando evaluamos con consideraciones de probabilidad, cuando una segunda proposición dada, la relación de evidencia con la primera- primarias, dice él; debe haber una conexión entre dichas proposiciones. Una vez fijado el contenido en dichas proposiciones, son cuestiones de significado, y no de hecho <<Por eso, preferimos llamar a esa relación, de naturaleza inferencial, *<<argumento>>* cuya *<<conclusividad>>* se encarga de medir la probabilidad lógica>>. Para ver esto más claro, es bueno citar aquí las explicaciones de Ramsey

> El Sr. Keynes da cuenta de esto suponiendo que, entre cualesquiera dos proposiciones, tomadas como premisa y conclusión, se da una relación; y que si, en cualquier caso, dado la relación de la creencia completa en la premisa es de grado α, deberíamos, si fuésemos racionales, proceder a una creencia de grado α en la conclusión. (Ramsey,2005, p. 255)

El propio Ramsey fue muy crítico con las ideas de Keynes (fue un subjetivista de la probabilidad). Ramsey en *Verdad y probabilidad* (1926) plantea sus tesis, sumamente interesantes para nosotros, sobre la creencia parcial, que él desarrolla con una pulcritud filosófica, a nuestro parecer, brillante (queremos decir, que intenta no dejar ningún vacío en sus reflexiones). En Ramsey pivota el grado de creencia y hace un esfuerzo para poder medirla. Después de hablar de Einstein sobre intervalos de tiempo, Ramsey dice: <<Trataré de argumentar más tarde que el grado de una creencia es exactamente como un intervalo de tiempo>> (Ramsey, 2008, p. 263). En *Probabilidad y creencia parcial* (1929), clarifica las posiciones del artículo de 1926.

Observación: Somos conscientes que, al hablar de probabilidad lógica, deberíamos mencionar la lógica inductiva –al menos- por su importancia con este tipo de probabilidad. Sin embargo, no es tema de este trabajo. Ocurrirá, sin embargo, que sí hablaremos de lógica categorial y lógica intucionista, en los apartados posteriores. Pero ello se debe a que nos es difícil explicar –o se entienden mejor las explicaciones- si recurrimos a estas lógicas para hablar de TC. Algo, creemos, que no sucede en el caso antes citado. En todo caso, este trabajo pretende ser una visión de un paisaje más que un mapa de carreteras.

3.1.5. Probabilidad negativa

La probabilidad negativa fue propuesta por Dirac y Feymann, -propuesta por el primero, desarrollada por el segundo- en física cuántica. Si la traemos aquí a colación, es porque la mayoría de las probabilidades tienen como expresión los reales entre cero y uno, cosa que no ocurre aquí. Pero, además, con la introducción de la teoría de la medida se diluye ciertas problemáticas filosóficas, pero no en este caso, al menos, en la filosofía que más nos interesa a nosotros, que es la de la filosofía de la práctica matemática. Desde luego, también problemas ontológicos, entre otros, que en ciertas distribuciones las probabilidades negativas son inobservables. Asimismo, también nos plantea otros problemas: podemos tratar en la "realidad" menos algo de cosas (¿cómo la nube de probabilidad puede ser negativa? Sin olvidar, que Dirac, postuló la antimateria)[35]. Desde luego, podemos poner trabas a que existan menos cuatro coches, pero no, a que tengamos en nuestra cuenta bancaria menos trescientos euros. Por lo que, podemos dar acomodo a este tipo de probabilidades sin que surjan impedimentos lógicos. Lo que redunda a su vez, en la metodología (práctica).[36]

3.1.6 Breve revisión sobre las teorías subjetivas, bayesianas, de la evidencia, y teoría de la decisión, etc.

Nos preguntábamos en la introducción si las teorías subjetivas[37] eran fructíferas y si tienen un aporte sustancial a las matemáticas. Desde luego esto es subjetivo y no somos los indicados para contestar, pues ni somos matemáticos, ni filósofos de la matemática. Sin embargo, nos atrevemos a decir, que desde luego no son una nota al pie de página en los libros –en este caso de probabilidad-, sino que son muchos los matemáticos que han debatido y profundizado en el tema ¿Qué hay controversias? Sí. Pero incluso en las teorías más matematizadas y/o objetivas también las hay.

Cabe también preguntarse, por qué metemos en este capítulo la teoría bayesiana si ésta puede interpretarse tanto de un modo objetivo, como una extensión de la probabilidad lógica o de un modo subjetivo como opinión dada de un individuo o individuos. La respuesta es que, como quiera que sea la teoría bayesiana una teoría conocida, no es mayoritaria en los primeros cursos del grado de matemáticas. Sí lo es el teorema de Bayes, pero no la extensión de éste. Lo que queremos decir, es que, en el capítulo anterior dimos un breve repaso sobre las teorías más

[35] <<El propio Dirac diagnosticó correctamente la fuente de esos de esos estados adicionales del electrón: además de los estados del electrón con energía positiva, existen dos estados con energía negativa, y no sólo para el electrón sino parta cualquier partícula cuántica, puesto que su ecuación de ondas relativistas deberá formularse teniendo en cuenta la definición de energía relativista:
$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ o bien

$E = \pm\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$
¿Qué hacer con las soluciones negativas? Dirac contestó:
*Uno soluciona la dificultad en la teoría clásica simplemente excluyendo de modo arbitrario las soluciones de energía negativa. Pero uno no puede hacer esto en la teoría cuántica puesto que, en general, una perturbación puede causar una transición de un estado con energía positiva a un estado con energía negativa>> (*Baselga, 2008, pp.63-64).

[36] Las referencias en la Wikipedia, tanto en español como en inglés son sumamente útiles.
[37] Aquí nos referimos también, a las teorías del título, como la de la evidencia o de Dempster-Shafer, y otas.

conocidas, en éste, serán las más minoritarias, desde nuestra experiencia. No hablamos de cursos de máster en estadística, donde el temario puede ser variado. Pero en los cursos de grado, v.gr., el del grado de matemáticas de la UNED, tiene una asignatura titulada *Estadística Básica*, dos de cálculo de probabilidades: *Cálculo de Probabilidades I y II* y, por supuesto, otras dos asignaturas dedicadas a la teoría de la decisión y la teoría de juegos. En ninguna de ellas se desarrolla o tiene un capítulo la bibliografía la teoría bayesiana. Siendo, a nuestro juicio importante, como ejemplificábamos en el prefacio y, teniendo un nuevo predicamento en los ensayos clínicos[38] y en filosofía de la medicina y ética, estudiamos p.ej., por David Teira[39].

Daremos una primera aproximación a que se entiende por probabilidad subjetiva

> El concepto de probabilidad subjetiva, llamada también personal por algunos autores, abandona el criterio del grado de confirmación como grado de creencia objetiva y racional, expresando, por el contra, el grado de confirmación como grado de creencia real de una persona, tal y como lo manifestaría en una apuesta de juego (Mateos-Aparicio, 1985, p. 129).

Esta probabilidad, goza de buena salud, hay axiomáticas desde De Finetti, a Koopman, pasando por Savage, Suppes, etc. Hablaremos de los dos autores principales a nuestro juicio y en cierto modo precursores o los que más han desarrollado estas teorías: De Finetti y Savage. Sin perjuicio de mencionar a otros de un modo menos concreto.

Así, hablando de De Finetti:

> Bruno de Finetti [1906-1985], es unánimemente considerado como una de las figuras más relevantes en la estadística del siglo XX. Desde nuestro punto de vista, sus aportaciones más trascendentales para el desarrollo de la estadística contemporánea han sido (i) la formalización del concepto de probabilidad como *grado de creencia*, que permite un tratamiento riguroso del concepto de probabilidad que se deduce a partir de la teoría de la decisión; (ii) el concepto de *intercambiabilidad* que, a través de los *teoremas de representación*, permite integrar en un paradigma unificado los conceptos estadísticos frecuencialistas asociados a modelos paramétricos con el concepto de probabilidad como grado de creencia; y (iii) el desarrollo de las *funciones de evaluación*, que permite calibrar la asignación de probabilidades y, en particular, contrastar la idoneidad de un modelo probabilístico. (Bernardo, 1997)

La cita anterior ya nos adelanta una aproximación a las ideas de De Finetti que, en un principio pueden resultar paradójicas cuando Robert F. Nau, afirma citando al estadístico <<De Finetti estaba en lo cierto: la probabilidad no existe>> (Nau, 2001). Esta afirmación provocadora, pronto cobra sentido, cuando a lo que se refiere Finetti es que <<aquí sólo la probabilidad

[38] Ver las conferencias del profesor David Teira:
https://www.youtube.com/watch?v=M70luozR6hc
https://www.youtube.com/watch?v=k33yJ-KJyTM

[39] Además, en el artículo de Marta García Alonso y David Teira Serrano: <<Hoy, sin embargo, se están proponiendo ensayos clínicos apoyados sobre una concepción **subjetiva de la probabilidad**, en la que, con independencia del diseño experimental, basados nuestras conclusiones en la revisión bayesiana de nuestras probabilidades a *priori* (grados de creencia) a la vista de los datos.>> [la negrita es nuestra]. (García and Teira, 2006)

subjetiva existe>> (De Finetti, 2017, p. 4). Aunque De Finetti no estaba sólo -y su visión fue aceptada- fue en cierta medida precursor de la teoría de la utilidad[40] y TD

> La teoría subjetiva de la probabilidad, que ahora es ampliamente aceptada como la visión moderna, se atribuye conjuntamente a De Finetti (1928/1937), Ramsey (1926/1931) y Savage (1954). Ramsey y De Finetti desarrollaron sus teorías de manera independiente y Savage luego sintetizó su trabajo incorporando características de la utilidad esperada de von Neumann y Morgenstern (1944/1947) (Nau, 2001)

Para De Finetti, inscrito en la tradición del positivismo lógico, sus definiciones son operativas. <<En particular la definición de probabilidad $P_i(E \mid H)$ es el *máximo* precio que el individuo *i* estaría dispuesto a pagar por un ticket de una 'rifa', jugada en las condiciones H, en la que obtendría un premio unidad si, y solamente si, E tiene lugar>> (Bernardo, 1997). Esta interpretación que da el autor, con respecto al juego, es coherente con su visión de la probabilidad como precio <<De Finetti usó 'Pr' para referirse indistintamente a Probabilidad, Precio y Precisión y los trató como etiquetas alternativas para un solo concepto[41]>> (Nau, 2001).

En lo referente a Savage, muy próximo a De Finetti[42] y, muy cerca a la teoría de la decisión, su postura es personalista e introduce tres conceptos principales: <<en términos de "estados del mundo" preferencia entre "actos" y "consecuencias" de esos actos[43]>> (Shapiro, 1956) y eventos que es un conjunto de estados (Savage, 1972, p.7). Estos conceptos los plantea Savage, después de discutir sobre lógica e introducir una idea idealizada de persona (The person) dentro de una teoría del comportamiento para las decisiones <<Estoy a punto de construir una teoría muy idealizada del comportamiento de una persona "racional" con respecto a las decisones>> (Savage, 1972). El primer teorema de Savage en el libro referido, es un teorema utilizado de forma ordinaria en la teoría de la decisión. Se dice generalmente, que la relación de preferencia es transitiva o que la relación de preferencia es de orden. De hecho, Savage postula esto <<P1 La relación $\leq$ es una simple relación entre actos>> (Ibidem, p.18). En cuanto al primer teorema y su relevancia, en sus palabras:

> THEOREM 1 Si F es un conjunto finito de actos, y existe f y h en F tal que para todo g en F
>
> $$f \leq g \leq h.$$
>
> El teorema 1 es especialmente relevantes para la aplicación de la teoría de la decisión, porque interpreto que la teoría implica que, si F es finito, la persona decidirá sobre un

[40] La rama de la teoría de la decisión que estudia las funciones de utilidad es la teoría de utilidad
[41] Es común aún hoy utilizar términos como lotería, premio, pérdida, etc.

[42] De hecho, en su libro *The foundations of statistics* sus agradecimientos son para De Finetti y curiosamente, también para Carnap, entre otros muchos.
[43] <<Decir que se va a tomar una decisión, es decir que se va a elegir o decidir uno de dos o más actos. Al decidir sobre un acto, se deben tener en cuenta los posibles estados del mundo y, también, las consecuencias implícitas en cada acto para cada posible estado del mundo. Una consecuencia es cualquier cosa que le pueda pasar a la persona>> (Savage, 1972, p.13)

> acto h en F al que no se exige ningún otro acto en F, la existencia de al menos uno de tales h está garantizado por el teorema.

Savage desarrolla de una forma axiomática (basándose en la teoría de conjuntos) y con consideraciones filosóficas (sobre racionalidad, pesimismo y otras reflexiones).

La teoría de la evidencia o de Dempster-Shafer, introduce dos conceptos, si bien uno de ellos, el de creencia (belief) ya estaba incardinado en otras teorías, en grado de creencias, etc. su desarrollo matemático es más preciso. El otro concepto, que se vincula con el anterior es el plausabilidad. Así, la creencia es menor o igual a la plausabilidad (belief ≤ plausability). Esto parece bastante intuitivo, por poner un caso extremo, mi creencia en dios será menor o igual a su plausabilidad. Sea esta la que sea. Dicho de otro modo, menos preciso, mi creencia estará condicionada por su plausabilidad. De nuevo, esa esta la que sea. En todo caso, lo que se pretende con la teoría es formular estos conceptos y sus relaciones, amén de otros. Plausabilidad (Pl) aquí, es el grado de verosimilitud y, esta se define como: $\forall$ A tal que A $\in$ P (θ) : Pl(A) = 1 – D (A)= $\Sigma_{X \cap A \neq \emptyset}$ μ (X). Donde D (A)= Bel (¬A) que es el grado de duda. El grado de creencia (llamada a veces función masa) por tanto, se escribe Bel (A) (Salas y Sanz). Asimismo, se define la función de creencia bayesiana (bayesian belief function) y la función de creencia formalizada ([1] apartado cinco).

La teoría subjetiva de la probabilidad es mucho más amplia de lo que aquí se sugiere, pues hay una amplia axiomatización, v.gr.: axiomatización de Koopman (1940), de Anscombe y Aumann (1963), Scott (1964), Fishburn (1967), Suppes (1974), French (1982), etc. (Mateo-Aparicio, 1985).

Ya hemos introducido el teorema de Bayes, de una forma simple, sin embargo, el desarrollo de la teoría bayesiana es mucho más compleja. Por ejemplo, hay que introducir la integral de lebesgue[44] (que definimos en [1] apartado seis, de la forma más sencilla con un ejemplo. Y esto lo hacemos, porque quien vea esas notaciones sabrá de un modo "conceptual" de lo que se habla, aunque no lo sepa calcular. Este tampoco ha sido nuestro propósito -el cálculo decimos) y otras consideraciones que también son relevantes en la teoría de la decisión.

El caso del bayesianismo también es interesante desde la filosofía de la ciencia:

> El paradigma bayesiano es un medio natural de implementar el método científico donde la distribución a priori representa sus creencias iniciales acerca del modelo, usted recoge los datos adecuados, y la distribución posterior representa sus creencias actualizadas después de ver los datos. (Correa y Barrera, 2018).

En cuanto a la teoría de la decisión incluye funciones de ganancia o pérdida y se le atribuye una extensión de la teoría de juegos cuando uno de los jugadores es la naturaleza (estados de naturaleza). El otro jugador es el decisor con un conjunto de acciones. La teoría de la decisión se tiene tan en cuenta, porque sus formulaciones han hecho tener una visión matematizada,

[44] Que además tiene mucha importancia en la teoría de la medida. En particular la medida de lebesgue que también definimos de una forma sencilla en [1] apartado seis

pero menos platonista de la probabilidad y el estudio del comportamiento humano y empresarial.

3.2 Problemáticas de las teorías de la probabilidad y justificación del uso de las categorías.

Mencionábamos arriba el libro de David Hand *El principio de improbabilidad* (*The improbability principle*) que se confrontaba con la idea de Borel de lo que es muy improbable no sucede o para ser más prudentes no debe tenerse en cuenta o debe rechazarse. Pero qué sucede si lo aplicamos al grado de creencia es elevado. Supongamos, que el coche accidentado es igual al de mis padres y que, el lugar del accidente es un trayecto que mis padres hacen a menudo. Si algún conductor lo identifica y transmite a mis amigos que mis padres están heridos (no es descabellado pensar una situación así, de hecho, viví algo parecido) y estos lo toman como cierto, así me lo transmiten. Vuelvo a casa y me encuentro a mis padres. Con esta evidencia, mi creencia de que mis padres están ilesos pasa de una creencia ínfima a una certeza. Vemos que estoy mezclando teorías de probabilidades y esto resulta capcioso, pero lo pongo como ejemplo para visualizar lo que queremos decir. Algo parecido plantea Ramsey en su crítica a Keynes[45] [ver en **3.1.4.** cita de Ransey]. Aquí podemos plantearnos si la probabilidad es algo propio de la naturaleza o está en nuestras cabezas <<Debemos, por tanto, intentar desarrollar un método puramente psicológico de medir la creencia>> (Ramsey, 2005, p.262). Esto es algo que se le critica a las teorías subjetivistas, pues apelan a la psicología de las personas y, por tanto, en cierto modo, también a la cultura y, por tanto, a la época en que vivimos, dónde vivimos y cómo vivimos (se intenta superar estas carencias diciendo que tratamos con personas racionales)[46]. Pero no pretendemos aquí dar respuesta a estas preguntas ni tampoco, si el azar o las probabilidades tienen un carácter objetivo o subjetivo, o si desde un punto de vista ontológico es de tal o cual manera. Ni tampoco hacer una arqueología como plantea Mauricio Suárez o Ian Hacking en libros como *El surgimiento de la probabilidad* o *Domesticando el azar*. El primero más histórico el segundo más filosófico. Tampoco es analizar de un modo profundo la relación de probabilidad objetiva o subjetiva de un modo netamente filosófico y mucho menos aclarar sus consecuencias ontológicas (se da un breve repaso por las principales teorías a modo de fotografía) aplicadas a la física o la filosofía de las matemáticas. Nuestro propósito es metodológico de un modo indirecto. Esto no quita para hablar del subjetivismo y objetivismo, pues <<los aspectos ’objetivo’ y ’subjetivo’ de la probabilidad se encuentran de manera fundamental (ver Gelman y Henning (2017)) así como mi respuesta Suárez (2017b) para una descripción de tal fusión en la práctica>> (Suárez, 2020). Esto último que dice Suarez, es en parte lo que queremos hacer, no como él lo hace, más profundo en sus revelaciones filosóficas e históricas. En nuestro caso, es recurrir a las categorías para formalizar en parte y conceptualizar las distintas divergencias de la probabilidad. Por supuesto que podríamos tomar otros caminos y, profundizar mucho más tanto en TP como en la TC, pero esto sería más extenso. La manera como trata Suárez el problema,

[45] <<Pero si, el Sr. Keynes mantiene estas cosas no siempre pueden expresarse mediante números, entonces no podemos darle a su enunciado de que el grado de creencia de uno es el mismo que el grado de creencia del otro una interpretación tan simple, sino que debemos suponer que él quiere decir sólo que hay una correspondencia uno-a-uno entre las relaciones de probabilidad y los grados de creencia que ellas justifican>> (Ramsey, 2005, p. 255-256)

[46] <<Sin embargo, no hay nada de arbitrario en eta ”subjetividad”>> (Suárez, 2020)

siendo mucho más explícito y desarrollado, además de las ideas propias y como trata <<el método tripartito>>, y sus consideraciones sobre si las probabilidades objetivas y subjetivas puedan ser "subsumidas" o no, unas en otras. Nuestro interés es otro, si bien, hay algunas coincidencias que hemos expuesto arriba que coinciden superficialmente por lo dicho por Suárez.

No creemos que este objetivo sea inútil, puesto que la formalización, v.gr. en teoría de conjuntos ha tenido éxito probado en la filosofía: por poner dos ejemplos de filósofos en el idioma español, tenemos a Mario Bunge, que hace ternas y cuaternas en sus *Semánticas,* por ejemplo, y Jesús Mosterín en sus *Conceptos* utiliza particiones de conjuntos, relaciones de equivalencia[47], etc. Y puestos a mencionar y a presumir del pensamiento patrio (Bunge patrio en el idioma) también citar a José Ferreirós, estudioso de la teoría de conjuntos y teoría avanzada de conjuntos, así como el conocimiento matemático y la interacción práctica (*Mathematical knowlege and the interplay of practices*), de las que nos sentimos más próximos[48]. De hecho, podemos justificar nuestra perspectiva en al libro antedicho de Ferreirós. Por ejemplo, la utilización de diagramas <<diagramas conmutativos que son fundamentales en la teoría de categorías del siglo XX>>, o <<tematizando>> a través de teorías matemáticas. Pero tampoco, desarrollamos esto, porque sería un trato general de las matemáticas.

4. SEGUNDA PARTE.

Aclaración: Nos hemos esforzado en buscar en la bibliografía (no podemos leer toda la existente) las notaciones más intuitivas y menos aparatosas, así como las definiciones más claras y menos pomposas. Asimismo, estamos con Zalamea (Zalamea, 2009) que la filosofía de las matemáticas no debe excluir las matemáticas avanzadas (la teoría de categorías, si bien en su formulación inicial es simple, se vuelve muy elaborada y farragosa al profundizar en ella y dependiendo en que rama se aplique). Queremos decir, que a menudo (el ejemplo de Wittgenstein que proporciona Zalamea es bueno) se hablan de proposiciones matemáticas de 2+2=4 o las clases visto de una forma conjuntista como Quine (estamos reduciéndolo mucho) o de otros objetos matemáticos, etc. P.ej., esto se parece cuando hablamos de la teoría de conjuntos ingenua vs teoría avanzada de conjuntos. Un buen ejemplo, lo volvemos a tener en Ferreirós, cuando trata los transfinitos o cardinales inaccesibles, que poco tienen que ver, o al menos las explicaciones deben ser más sesudas, que preguntarse por la entidad de los números naturales. Esto visto de un modo ontológico y epistemológico. No profundizaremos en las matemáticas y la filosofía de las categorías (sería propio de una tesis, creemos) sino que, por la vía de los hechos, tratamos, en cierta medida estas cuestiones del "hacer" matemático como lo planteaba Javier de Lorenzo[49]. Pareciese que este trabajo es el trabajo del no. Porque nos pasamos parte de él, diciendo lo que no vamos a hacer, pero humildemente creemos que esto

[47] No solo él, por citar otro libro fundamental, *Fundamentos de la filosofía de la ciencia* de José A. Díaz y C. Ulises.

[48] *New perspective on mathematical practices.* Bart Van Kerkhove.
The philosophy of mathematical practice. Edited by Paolo Mancosu, etc.

[49] En su libro *Filosofía de la matemática fin de siglo XX.* Valladolid. Universidad de Valladolid.

sería injusto, porque, aunque no resaltemos lo que sí hacemos, algo se hace y en las directrices que modestamente hemos marcado. Y, podríamos no decir nada, pero como tenemos la aspiración, quizás idealizada y no probada, de que todo debe justificarse, por claridad, método y honestidad (nos hemos puesto un tanto estupendos que escribía Valle-Inclán).

4.1. Categorías y filosofía de las matemáticas.

Ya nos hemos pronunciado sobre la filosofía de las matemáticas que a nosotros más nos interesa, que es la filosofía de la práctica matemática (Imre Lakatos, fue <<una fuerte reacción>> (Mancosu, 2016) a la filosofía basada en los fundamentos y, creemos que su libro *Pruebas y refutaciones,* donde en forma de dialogo los alumnos van proponiendo soluciones a problemas sobre poliedros, etc., fue un gran acierto para la nueva filosofía de la práctica matemática, pero no se menciona en el artículo antes citado un libro de 1966, de George Polya, *Matemática y razonamiento plausible,* tan importante como el de Lakatos y mucho anterior a libros de esta temática, como el de Kitcher, *The nature of mathematics knowlwdge*, de 1984) que no tiene porqué anular la reflexión sobre los objetos matemáticos o sobre los fundamentos[50]. La TC nos proporciona un buen marco y un cambio de perspectiva frente, por ejemplo, a la teoría de conjuntos. Un ejemplo: en teoría de conjuntos, para relacionar a dos conjuntos tenemos, entre otras cosas, las aplicaciones. P.ej., una aplicación f: X -> ℝ,” relaciona” un conjunto X con el conjunto de los reales. En categorías tenemos el funtor [ver en [2] apartado dos] (no decimos que sean equivalentes), así F: **Top ->Top, [**ver en [2] apartado siete] que quiere decir que F” relaciona "a las dos categorías, en este caso de espacios topológicos con sus morfismos: todas las funciones continuas entre ellos. Esto no es exclusivo de las matemáticas. Un lingüista no trata igual a un sustantivo que aun verbo y sus relaciones con la oración son distintas. Por ello, cuando hablamos de dominio y codominio en las categorías [ver en [2] apartado uno], no deben verse como se trata en funciones.

Mencionábamos arriba, el cambio de perspectiva y los objetos matemáticos, que es donde más se ha fijado la filosofía "clásica" de las matemáticas (de Leibniz a Quine, por poner un intervalo concreto al azar de la memoria). Así, la TC da una visión externa en contra de una visión más interna (de los elementos) de la teoría de conjuntos:

> <<Existe una disputa en filosofía, que se remonta al menos a Leibniz sobre si es posible concebir el mundo como una red de relaciones y relaciones entre relaciones con el rol de objetos, entre los cuales estas relaciones se mantienen, enteramente eliminadas. La teoría de categorías parece ser la teoría matemática correcta para aclarar las posibilidades conceptuales a este respecto. En esta teoría, los objetos adquieren su identidad ya sea por definición, cuando al definir categorías postulamos la existencia de objetos o formalmente por la existencia de morfismo de identidad. Mostramos que es perfectamente posible deshacerse de la identidad de los objetos por definición, pero la identidad formal de los objetos permanece como elemento esencial de la teoría. Esto se puede lograr definiendo categorías exclusivamente en términos de morfismos y morfismos de identidad (sin objetos, u objetos libres, categóricos) y de forma análoga, definiendo la teoría de categorías enteramente en términos de funtores y funtores de

[50] P.ej., nuevas perspectivas como en *Homotopy type theory: Univalent foundations of mathematics.*

identidad (teoría de categorías sin categorías o libre de categorías [category free category]. Eliminados los objetos y las categorías nos centramos en la "filosofía de las flechas" (…)

Esta perspectiva elucida (elucides) un contraste entre "la ontología de conjuntos" y la "ontología categórica"…>> (Heller, 2016).

Hemos dicho que no nos interesa aquí la ontología, pero debemos hacer un breve comentario al artículo susodicho. En primer lugar, hablar de contrastes ontológicos es problemático, porque podríamos adscribir, con ciertas reticencias si se quiere, a ambas teorías en el estructuralismo matemático (de hecho, no Bourbakista, porque en los É*léments* no aparece un libro sobre categorías, aunque no deja de ser reseñable, que uno de los que más impulsaron esta teoría, fue uno de sus miembros más ínclitos y más inconformista[51], Alexander Grotendick) porque los morfismos son, de hecho, otras estructuras matemáticas, pero estructuras. Cuando Heller habla en su artículo de prescindir de todo objeto e incluso de la categoría misma, puede verse como una postura ontológica pero también práctica <<*la comprensión conceptual surge de la interacción de los diferentes estructuras y los recursos cognitivos involucrados*>> (Ferreirós,[52] 2016, p.102). Ahora, justificando la idea del estructuralismo y con cierta apelación a la lógica

Así, parece que el sentido no determina la referencia en un contexto categórico. Es difícil resistir la tentación de pensar que la teoría de categorías encarna una forma de estructuralismo que describe los objetos matemáticos como estructuras[53].

Por supuesto que nuestra pretensión es afirmar nuestra postura, aunque nunca hemos dicho de las categorías no sirvan para un estudio ontológico, epistemológico y, aunque algunos se resistan, se podría aplicar a los fundamentos (creemos que falta mucho desarrollo para llegar al nivel de la fundamentación conjuntista y todo el desarrollo en cada rama de la matemática) nosotros nos aplicamos a la práctica o metodológico-epistemológico

<<La afirmación aquí es que la teoría de categorías te permite ver y comprender lo que hace posibles ciertas construcciones y resultados, de la misma manera que la física, por ejemplo, te hace comprender por qué los edificios pueden mantenerse en pie y otros no. De hecho, los universales que Lawvere tiene en mente son las flechas universales de la teoría de categorías>> (Marquis, 1995).

Ya Putnam planteaba una matemática sin objetos (como en categorías hace Heller):

...su versión modal de las matemáticas -de Putnam- sin objetos, considera que la matemática se hace *empírica* en el sentido de que está permitido plantear alternativas en ella, y considera que el tratamiento fundacional en matemática es tan provechoso como la concepción fundacionalista del conocimiento empírico, llegando a decir casi que es insostenible la distinción matemático-empírico (Otero, 1991).

---

[51] Se autoexilió a una aldea, donde además de seguir trabajando en matemáticas, escribió un libro filosófico, entre autobiográfico y reflexivo: *Las cosechas y las siembras.*

[52] No hay que menospreciar al filósofo de las matemáticas, Javier de Lorenzo, que, en su obra, especifica el" hacer" matemático (lo hemos mencionado en este trabajo) y, al menos, desde la falacia de evidencia anecdótica, podemos decir, que él, nos ha llevado a la filosofía de la práctica matemática. Es decir, que sin fundamentar nada, describimos cierto itinerario intelectual, salvaguardándonos de los filósofos más estrictos.

[53] Marquis, Jean-Pierre, "Category Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.*

Nosotros planteamos desde el marco filosófico antedicho, un punto de vista distinto del que se ha dado, que no vamos a desarrollar aquí, pero valga el ejemplo: los espacios de Hilbert no los "ve" igual un matemático que un físico, ni trabaja del mismo modo con ellos. La topología[54] se está utilizando en biología y la teoría de grupos en química. Pero lo que interpreta un químico, con la rotación de moléculas de los cristales, que cumplen las condiciones de grupo, v.gr. Pero con eso no trabaja un matemático, aunque pueda imaginarse en su desarrollo cuerpos rotando, como un triángulo distinguiendo los vértices. Aquí se podría mencionar como objeto de estudio la propia abstracción, queremos decir cuando se aplica a las matemáticas, porque si lo tomamos como una generalización mayor en los conceptos –cosa discutible- la TC sería más abstracta que la teoría de conjuntos. Por lo demás, y unido a la abstracción, podría ser de interés el razonamiento abducivo, del que el trabajo de la filósofa Atocha Aliseda es interesante, con su libro traducido *La lógica como herramienta de la razón. Razonamiento ampliativo en la creatividad, la cognición y la inferencia,* así como el trabajo de Gregory Chaitin, aplicando las matemáticas a la biología (metabiología lo llama él). Más que eso, identifica la evolución biológica con la creatividad matemática en su libro *Demostrando a Darwin.* Valgan estas sugerencias.

4.2 Introducción a la teoría de las categorías.

Aclaración: cuando hablemos de conjuntos nos referiremos a sus relaciones como funciones o aplicaciones. En cambio, con las categorías diremos mapeos.

Si son ciertas las palabras de Laudan, en su más famoso libro *El progreso y sus problemas* de que es

> ...un enorme error pensar que el progreso científico y la racionalidad consisten solamente en la resolución de problemas empíricos. Hay un segundo tipo de actividad de resolución de problemas que ha sido *al menos tan importante* para el desarrollo de la ciencia como la resolución de problemas empíricos. Este último tipo de problemas, a los que llamaré *problemas conceptuales.*

Si son ciertas –decíamos- para las ciencias lo son aún más para la ciencia matemática[55]. Los primeros en introducir conceptos nuevos que fueron luego introducidos en la TC, fueron Eilenberg y Mac Lane, que llamaron a su teoría de equivalencias naturales (luego veremos, v.gr., el concepto de transformación natural, pero vemos que hay cierta cohesión en los términos)

> Fue solo después de algún tiempo de desarrollo que se llegó a un corpus de conceptos, métodos y resultados que merecen el nombre de teoría (que va más allá de la "teoría de las equivalencias naturales" en el sentido de Eilenberg y Mac Lane). Por ejemplo, la introducción de funtor adjunto fue importante ya que generá preguntas no triviales para ser respondidas dentro de la teoría (a saber, ¿cuáles son las condiciones para que el funtor dado tenga un adjunto? y similares (Krömer, 2007, p. xvi)

[54] Los matemáticos definen espacios y tienen su propio desarrollo, como la topología algebraica y tratan cuestiones como la homología [ver [2] apartado seis] y cohomología.

[55] Incluso en algunos problemas prácticos, como lo podemos ver en el concepto de límite y su aritmetización con Cauchy, Abel, Weirstrass, etc. Con ello no queremos decir, que no haya en la matemática otros problemas.

Aquellos mismos, introdujeron los conceptos de categoría, funtor y transformación natural durante los primeros años de 1940, con el objetivo de resolver problemas conceptuales en topología algebraica (Krömer, 2007). La combinación de talentos, por un lado el algebraico de Mac Lane y por el otro, el topológico de Eienberg (Kuś and Skowron, 2019, p.2) lo hicieron posible.

> en la primavera de 1941, Michigan me invitó a dar una serie de cinco o seis conferencias, así que hablé de extensiones de grupo. Este era un tema en el que había trabajado un poco y surgió de mi trabajo anterior sobre valoraciones con [O.F.G.] Schilling, había calculado una extensión de grupo particular para solenoides p-ádicos. Eilenberg estuvo en la audiencia, excepto en la última conferencia y le hizo dar la última conferencia antes de tiempo. Luego dijo: "Bueno, ahora ese cálculo huele a algo que hacemos en topología, en un artículo de [Norman] Steenrod". Así que nos quedamos despiertos toda la noche tratando de averiguar cuál era la conexión y descubrimos una. Escribimos nuestro primer artículo conjunto sobre extensiones de grupo en homología, que explotó precisamente esa conexión. Dio la casualidad de que este era un momento en que las técnicas algebraicas más sofisticadas estaban entrando en la topología algebraica. Sammy sabía mucho más que yo sobre el trasfondo topológico, pero yo sabía sobre las técnicas algebraicas y tenía práctica en cálculos algebraicos elaborados. Así que nuestros talentos encajaron juntos. Así fue como comenzó nuestra colaboración. Y así continuó durante quince artículos importantes. (Citado en Kuś and Skowron, p.2)

La teoría fue desarrollando en los años 50 y 60 y <<volviéndose una importante estructura conceptual en muchas áreas de la investigación matemática como la topología algebraica [como veíamos arriba] y la geometría algebraica>> (Kröner, 2007, p. xxi).

Por tanto;

> La teoría de categorías, al igual que la teoría de conjuntos y a diferencia de la topología algebraica, despertó el interés de los filósofos desde un principio. Ya en el artículo clásico[10, p.247[56]] hay comentarios sobre los fundamentos de la teoría de categorías (¡pero aún no los fundamentos de las matemáticas!), en particular hay referencias a una teoría de tipos no ramificada o al Fraenkel-von Neuman -Sistema de Bermays- (...)

Pero si bien, en la crisis de los fundamentos, los filósofos y lógicos (no es ningún reproche, hicieron su trabajo) se quedaron en la teoría básica de conjuntos y álgebra conjuntista, así como en el estudio de los objetos matemáticos (conjuntos, clases, proposiciones, etc.) y problemas como el de Benacerraf <<En 1965 Benacerraf elaboró una crítica centrada en el problema del reduccionismo logicista y, consecuentemente, una crítica a la concepción fregeana>> (Lorenzo, 2000,p.31-32) no dieron con un análisis a la matemática más avanzada, como así pretende la filosofía de la práctica. Sabemos que estamos haciendo un reduccionismo estúpido puesto que se hicieron más contribuciones (entre otras lógicas, como los estudios de la lógica de primer orden o las grandes aportaciones de Gödel -caso aparte-, y las aportaciones a la teoría de la verdad. Que seríamos imbéciles si las desdeñáramos) pero creemos que en lo esencial esto es cierto: el no prestar más atención a los avances matemáticos (cosa que nosotros tampoco

[56] The general theory natural equivalences.
https://www.ams.org/journals/tran/1945-058-00/S0002-9947-1945-0013131-6/S0002-9947-1945-0013131-6.pdf

haremos aquí, en este caso sí que desborda el interés de este trabajo). Sin menospreciar a nadie (somos admiradores de Quince, v.gr., nuestro TFG, verso sobre la lógica de éste). En fin, en todo caso no nos parece descabelladas las palabras –desde luego no estamos tan escandalizados como deja entrever- de Fernando Zalamea:

> (…) *la matemática moderna* (mediados del siglo XIX-mediados del siglo XX) y, *a fortiori,* a los avances de la *matemática contemporánea* (mediados del siglo XX-hoy), logra obviarse detrás de la supuesta invariabilidad ontológica y epistemológica de la disciplina. El dejar deliberadamente de observar el panorama (técnico, temático, creativo) de la disciplina es una situación que podría considerarse *escandalosa* en la filosofía de otras disciplinas científicas [una filosofía de la física que no tenga en cuenta los avances técnicos de la física sería impensable], pero en la filosofía de las matemáticas parece poder sobrellevarse con taxativa seguridad y sin el menor pudor.
>
> Dos grandes extrapolaciones –a nuestro modo de ver equivocados, como intentamos demostrarlo a lo largo del ensayo- sostienen la idea, ubicua en filosofía de las matemáticas, de que es *innecesario* observar los avances en curso de la disciplina. Por un lado, se considera que los objetos y los métodos de las *matemáticas elementales* y de las *matemáticas avanzadas* no difieren esencialmente entre sí (…)
>
> (Zalamea, 2009, p.22) [No solo hay que culpar de esto a los filósofos, sino también a los matemáticos que hacen filosofía, a nuestro juicio]

Llevando esto a nuestro tema en categorías tiene que ver, creemos, con el propio nacimiento de la teoría (como hemos dicho nace en el seno de la topología y geometría algebraica, distinto periplo -mucho más largo y arduo- que la teoría de conjuntos).

Hagamos un pequeño paréntesis para ir introduciendo ya algunos esquemas de la teoría. Para ello, en primer lugar nos referiremos al maravilloso libro *Matemáticas conceptuales* de Lawvere y Schannel (LS), el cual, con minuciosidad nos va introduciendo de un modo casi quirúrgico -en todo caso cirugía no invasiva- los temas de las categorías, desde los niveles más superficiales a los más profundos. Si bien, uno se maravilla de la perspectiva de la simplicidad, pero a la vez, del cambio de registro, como se maravilló Hobbes, la primera vez que vio los *Elementos* de Euclides.

Vamos a resolver el primer ejercicio del libro, para luego volver sobre él. Creemos que esto es más didáctico. Se nos pide combinar dos objetos para encontrar un tercero con ciertas restricciones. Veamos, podemos relacionar –se nos ocurre- lo siguiente:

$10 \rightarrow 5$ Lo que queremos representar aquí, es que 10 divido entre 5

$\downarrow$ da 2, y 10 dividido entre 2, da 5. Es decir, la división entera

2 (con resto cero). Esto es, $10 \rightarrow (5*2)$. Esto se cumple para

todos los números naturales. Por tanto, podemos escribir $a \rightarrow b$

$\searrow$

c.

Ahora bien, estas flechas que aún no podemos llamarlas morfismos representan la división entera, y a la vez la multiplicación. a= b*c, de donde se sigue que a/b=c y que a/c=b. La división es la operación inversa de la multiplicación. Ahora podemos preguntarnos, ¿se cumplirá para otros objetos el esquema, si las flechas cumplen la condición anterior, de que una operación sea la inversa de la otra? Téngase en cuenta, que como venimos diciendo, en categorías lo que importa son los morfismos (las flechas), no tanto los objetos. Por ello, hay que tener cuidado. Supongamos que ahora en vez de números naturales tenemos funciones, y aún más, funciones Riemann integrales (para no introducir las de Lebesgue [ver [1] apartado seis]). Como sabemos, que la integral (hablamos de las indefinidas, para mayor simplicidad) es la inversa de la derivada ¿podemos aplicar el esquema anterior? La respuesta es que depende[57]. Podríamos hacer un artificio y ampliar el contenido de las flechas, pero no se adaptaría bien. Porque, al integrar una función f(x) buscamos aquellas funciones F(x) que al ser derivadas nos dé f(x) (F'(x)=f(x)) y, llamamos a F(x) su primitiva. Ahora bien, si una función tiene primitiva, entonces tiene infinitas primitivas, esto es, [F'(x) + constante] = F(x)+0 = f(x). Lo que queremos mostrar aquí, es el cuidado[58] que hay que tener con la generalización, la utilización de objetos y la utilización de los morfismos. Algo que se adapta bien al esquema anterior es la relación lógica de la conjunción. Así si tenemos que A: Pedro tiene el pelo corto y Pedro tiene el pelo verde. Y decimos que B: Pedro tiene el pelo corto, y C: Pedro tiene el pelo verde. Entonces, A→ (B ^ C). A→ B

↓

C

En el libro se plantea el problema de Galileo y el vuelo de un ave de la siguiente manera (que como en nuestro ejemplo

> Galileo comprendió que un movimiento es más que un camino. El movimiento de un ave contiene, para cada instante, la posición del ave en ese instante; para registrarlo se necesita una película, más que una fotografía de exposición prolongada. Decimos que el movimiento es un "morfismo" (o una "función") del tiempo al espacio. (…).

[57] De hecho, podemos escribir $f(x) \to F'(x) + C$. Pero el esquema no es el mismo.

$$\downarrow$$
$$f(x)$$

Tiene la misma forma, pero no podemos cambiarlos, pero antes teníamos a,b,c y ahora tenemos, a,b. Todo esto hay que tenerlo en cuenta.

[58] <<En general, para especificar completamente una categoría debo especificar qué son los *objetos,* qué son los *morfismos,* qué objeta es el *dominio de cada morfismo,* qué objeto es el *codominio de cada morfismo,* qué morfismo es la *identidad de cada objeto* y qué morfismo es la composición de cualesquiera dos morfismos "compatibles" -seis cosas por especificar. **Es claro que no puede hacerse de manera arbitraria**>> (Lawvere and Schanuel, 2002, p.164)

Esquemáticamente: $\boxed{\text{TIEMPO}} \longrightarrow \boxed{\text{ESPACIO}}$.

Arriba utilizamos de manera intuitiva las flechas, de igual modo que podemos implementar una flecha imaginando <<que el sol cae de manera vertical; para cada punto en el espacio obtendremos un punto de sombra en el plano horizontal>>. Si hemos insistido en establecer ciertas diferencias entre diagrama, esquema, etc., es porque cuando se avanza en la teoría estos conceptos también se definen. Un diagrama es << 1.Un diagrama en una categoría **A** es un funtor D: **I**→ **A** con codominio **A**. El dominio, **I**, es llamado el **esquema**[59] (scheme) del diagrama. 2. Un diagrama con un pequeño esquema (small scheme) o finito, se dice que es pequeño o finito>> (Adámek et al. 2004, p.193)

Otro concepto importantísimo es el concepto de haz[60], introducido por Grothendieck. Éste, en su artículo *algebra homológica*

> ...explora el uso efectivo de la teoría de categorías en la matemática y, según Mac Lane el fundador de la teoría emerge entonces "la noción de teoría de categorías como un tema propio de estudio" bajo la influencia de Grothendieck. (Zalamea, 2019)

Pues bien, el concepto fue usado, también por Grothendieck, para topología y geometría algebraica, pero la introducción de Grothendieck en categorías abelianas, los hizo más destacables. De este concepto básico, se siguen desarrollos complicados, como las fibraciones.<< En topología un fibrado (o haz fibrado) es una función continúa suprayectiva π de un espacio topológico E en otro espacio topológico B, satisfaciendo otra condición que lo hace particularmente simple localmente>>. [ver en [2] apartado siete para ver una lista breve de categorías clasificadas].

Para una visión más completa con sus particularidades filosóficas conviene acudir a especialistas

> la noción de *haz*, [sheaf en inglés. En algunos países latinoamericanos lo denominan gavillas] sobre la cual Grothendieck se refiere así en *Cosechas y siembras*: "(...) la idea novadora esencial fue aquella de haz (...) Fue esa la idea maestra de una transformación profunda en nuestra aproximación de los espacios de todo tipo, y con seguridad una de las ideas más cruciales aparecidas a lo largo del siglo". Los haces, inventados por Jean Leray en un campo de concentración, en 1942, constituyen de hecho la noción matemática más simple posible para poder hablar de transferencias y obstrucciones entre lo local y lo global. Un haz consiste de dos espacios topológicos, un espacio alto que se proyecta sobre un espacio bajo, de tal manera que el alto se vea *desplegado* sobre el bajo, o el bajo se encuentre *plegado desde* el alto (esto se asegura postulando que la proyección es un homeomorfismo local). El entendimiento del haz se reduce a comprender su comportamiento *vertical* (estudio de las preimágenes de un *punto* en el

[59] Podría traducirse por plano, pero hemos preferido traducirlo como esquema, para evitar errores con otras ramas de las matemáticas, como la geometría.

[60] Ver:
https://www.youtube.com/watch?v=bkg4XfEPgZo&t=40s

espacio bajo, denominadas *fibras*) y su comportamiento *horizontal (*estudio de las preimágenes de una *vecindad* en el espacio bajo, denominadas *secciones*). El problema básico consiste entonces en preguntarse cuándo es posible (o imposible) pegar distintas secciones *locales (*sobre vecindades acotadas) para llegar a una sección *global (*sobre todo el espacio, o, al menos, una parte amplia del mismo). Los haces ocurren por doquier: en variable compleja, geometría diferencial, topología, grupos y anillos, conjuntos ordenados, categorías. Los *haces coherentes* de Serre (1955) fueron en particular una gran inspiración para Grothendieck: la idea consiste en *iterar*la noción de haz, y tomar un haz de módulos sobre un haz de anillos, donde todas las conexiones son lo más *suaves* posibles (módulos de tipo finito sobre las fibras, núcleos de tipo finito para los morfismos entre las fibras) (Zalamea, 2019).

Ahora veremos un ejemplo más avanzado, con el teorema del punto fijo de Brouwer. Veamos cómo se enuncia en topología[61] y luego como lo enuncian LS y un ejemplo clarificador.

<< **(8.14) Teorema del punto fijo de Brouwer.** Toda aplicación de B^n en sí mismo tiene, por lo menos, un punto fijo.>> [Desde luego no son equivalentes, porque aquí estamos en espacios superiores y LS, lo afirman para un intervalo, pero enuncian que, si una función *f* verifica ciertas propiedades, entonces existe un punto x_0 tal que $f(x_0) = x_0$, es decir, un *punto fijo* de la función. En realidad, la medida del intervalo se puede generalizar en una bola, en este caso cerrada (contiene los extremos).]

Ahora el libro de LS.

<<Comencemos enunciando los teoremas de Brouwer y tratando de ver si nuestra intuición sobre morfismos continuos los hace parecer posibles. Primero describiremos los *teoremas de del punto fijo de Brouwer.*

(1) *Sea I un segmento de línea, incluyendo los extremos (I por Intervalo) y suponga que* $f: I \to I$ *es un endomorfismo* [un morfismo para el que el dominio y el codominio son el mismo objeto] continuo. *Entonces este morfismo debe tener un punto fijo: un punto x en I para el cual f(x)=x.*

Ejemplo.

Supongamos que I es un intervalo de tiempo y que R es un intervalo de camino, digamos la carretera de Oaxaca a Puebla. Supongan que dos automóviles circulan por este camino. El primer automóvil viaja a velocidad constante de Oaxaca a Puebla, de manera que su movimiento está descrito por $I \to^{\mu} \to R$ (μ por movimiento "uniforme"). Mientras tanto, el segundo auto comienza en cualquier lugar de la carretera y se mueve erráticamente, quizás estacionándose por un rato, regresando después en el sentido en el que llegó y terminando su recorrido en cualquier lugar del camino. Denotemos el movimiento de este segundo auto mediante $I \to^{m} \to R$. Ahora bien, μ es un morfismo invertible, así es que obtenemos un morfismo $R \to^{\mu^{-1}} \to I$ $y\, sea\, I \to I$ el morfismo compuesto $f = \mu^{-1} \circ m$. El teorema de Brouwer nos dice que debe existir un tiempo t

[61] *Topología Básica.* Armstrong, A. M. Editorial Reverté, S.A.

en I en el cual f(t)=t; esto es, $\mu^{-1}mt = t$; por lo que $mt = \mu t$, que dice que hay un tiempo t en el cual los dos automóviles están en el mismo punto de la carretera. Esto no parece sorprendente: si el primer auto de Oaxaca a Puebla y el segundo siempre está en la carretera, entonces, por supuesto, el primer auto debe encontrarse con el segundo en algún momento.

El siguiente teorema es similar pero acerca de un disco [es mucho más intuitivo que el de bola], en lugar de un intervalo y lo encuentro mucho menos obvio.

(2) Sean D un disco cerrado (la figura plana que consiste de todos los puntos dentro de una circunferencia incluyendo la frontera [si pensamos en una circunferencia, la frontera sería la línea de la circunferencia] *y f un endomorfismo de D. Entonces f tiene un punto fijo.*

Ejemplo.

Rotar el disco un cierto ángulo nos da un endomorfismo continuo del disco; f podría ser el proceso "girar 90 grados" [pensemos en un círculo flechas en el interior]. ALICIA: ¿Qué tal el centro? !Exacto¡ Ése es un punto fijo. Para este morfismo fue fácil ver que tiene un punto fijo, pero para otros morfismos puede no ser tan fácil; aun así, el teorema dice que, porque f es continua, tiene al menos un punto fijo. Este teorema me parece mucho más sorprendente que el anterior. (pp. 118-119).

Cerramos paréntesis.

Pero la TC tiene más extensibilidad o potencia[62] (se puede generalizar a más ámbitos, este es el sentido que le damos a extensibilidad y potencia) que la de conjuntos (aunque los conjuntos se han extendido, a veces de forma incorrecta –otras no-, para hacer en filosofía con ternas, cuaternas, etc., v.gr., en semántica o como ya vimos en filosofía de la ciencia). P.ej., cuando Quine en *La relatividad ontológica y otros ensayos* en su artículo *Objetos proposicionales* habla de *sentencia eterna*, pero Quine no repara que tan eterna puede ser –y metafórica-: la recta es un conjunto de puntos alineados que “Juventud divino Tesoro/ te vas para no volver”, porque lo que Rubén Darío expresa, de forma poética, es que *el ser humano envejece.* Pero aquí la TC también nos da herramientas para este estudio (que en el capítulo de la TP y TC veremos aplicado a nuestro caso, con la probabilidad subjetiva. Esto es una introducción muy válida, a nuestro juicio y sumamente didáctica, ya no sólo para nuestro caso, que también, sino para una visión más panorámica, aunque se hable de procesos epistémicos y poéticos)

> Creemos que explorar la relevancia de la teoría de categorías para el proceso epistémico y poético de la teoría puede proporcionarnos una perspectiva algo diferente, sobre el papel de la teoría, a la que surge cuando se considera en relación con las matemáticas, lógica, física e informática. En particular, esto es una consecuencia del énfasis puesto en la interrelación del proceso epistémico y poético, que, según nuestro mejor conocimiento, rara vez se advierte o analiza. (Luback, J. en Kus’ and Skowron, 2019, p.46)

[62] <<esto demuestra, por así decirlo, el poder conceptual y el potencial TC, que parecen haber sido previstos por los padres fundadores de la teoría en su artículo seminal [1]>> (Lubacks en Kuś and Skowron, 2019). El artículo seminal es Eilenberg & MacLane (1945).

Asimismo, podríamos plantearnos el estudio de la abstracción que mencionamos arriba, con la filosofía del proceso (process philosophy), que, al menos, nominalmente rememora la idea de la práctica matemática. Lo que se intenta es la búsqueda de procesos donde se puedan describir e interpretar cambios tanto en las entidades como en los fenómenos. Tales cambios deben ser observables y distinguirse de algún modo. Esas características distinguibles el autor del anterior artículo, lo llamará *estados de un proceso. É*stos pueden considerarse como una sucesión de estados en momentos de tiempo, tanto discretos como continuos. Necesitaríamos entonces, distinguir algún momento especial del tiempo y asociarlo con algunas condiciones, especiales tanto internas como externas, del proceso. Ello **conceptualiza** la dinámica del proceso. Las características dinámicas de un proceso, que pase de un estado a otro, siguen un patrón (pattern), el cuál es considerado como algo estático dentro del proceso. Lo dicho puede verse en los conceptos de la filosofía clásica, por ejemplo, las potencias y actualizaciones de Aristóteles. Con la idea anterior podemos organizar el esqueleto conceptual de los procesos dinámicos y estáticos de los procesos epistémicos y poéticos (ya hemos dicho que esto nos interesa para entender mejor los intereses subjetivos, creencias, elecciones, etc.). Primero hay que introducir y aclarar términos. Un patrón estático (PP) <<da como resultado una sucesión dada de transformaciones de estado, denominándose como actualización de proceso (PA)>> (Ibidem). Ahora bien, si no se supone ninguna acción exógena o <<intervención divina>> entonces un (PP) provoca un (PA) como efecto de alguna intervención humana, directa o indirecta. Y esta intervención se denomina animación de un proceso (AP). Dicho de otro modo, el (PA) resulta de (PP), como efecto del (AP), o (PP) --- > (PA) y, ---- es (AP) (este esquema no aparece en el artículo, lo hemos escrito nosotros para una visualización mejor de lo dicho). La animación, esto es, (AP) será el nexo entre lo dinámico y estático de los procesos epistémicos y poéticos. Se centran primero –en el artículo citado- en el proceso poético. La actualización de un proceso, pueden dividirse en dos fases: la fase del diseño y la fase de implementación (términos sacados de la ingeniería]. La fase de la implementación es donde la descripción (fase de diseño) se convierte en objeto. Acertado es a nuestro juicio -aunque suene a teología- el ejemplo <<las palabras se vuelven carne>>. Antes de como explican el proceso poético, hay que aclarar, que utilizan los términos griegos *episteme* y *poiesis*. Aunque no los consideran con su significado original, no nos queda claro cuáles son sus definiciones precisas. De hecho, no las dan. << sin embargo, hemos optado por emplearlos porque no hemos encontrado una alternativa mejor, especialmente en lo que se refiere al término poiesis (de modo que estaría a la par con la mejor establecida episteme)>>. No entraremos a definir ni episteme ni poiesis, porque son términos bien conocidos en la literatura filosófica[63]. No obstante, dejamos un pie de página.

OP- *descripción* de objetos de la poiesis, i.e. de lo que se va a implenentar.

[63] https://plato.stanford.edu/entries/episteme-techne/

PO- *descripción* de como la implementación de objetos es percibido (directa o indirectamente con la algo de observación y/o ayudas experimentales.

QC- *descripción* de los criterios evaluativos y cualitativos del proceso poética, pertenecientes a OP y PO y a la relación requerida entre OP y PO.

No se asume ninguna forma particular de las descripciones, ya que la forma puede depender, y en realidad lo hace, del tipo de objeto de la poesía y de la metodología del diseño adoptado.

El OP juega el papel de una prescripción para el objeto de la poiesis.

PO sirve como punto de referencia con respecto al cual se evalúa el objeto implementado utilizando criterios de control de calidad (es decir, la evaluación es indirecta)

La transformación de estado del proceso se interpreta como el cambio de OP, PO y QC: individualmente, por pares o los tres juntos.

Cuando se inicia el proceso de diseño, la PO está vacía (no contiene información) hasta que se implementa el objeto diseñado. Las transformaciones de OP en este intervalo de tiempo (por ejemplo, agregar, en efecto, nuevos aspectos y detalles a la descripción) se evalúan con respecto a criterios cuyo papel es monitorear las características requeridas de OP de acuerdo con algún paradigma metodológico predefinido; dichos criterios forman un subconjunto de QC, denominado en adelante QC de diseño (d-QC). Los criterios de control de calidad también están activos cuando la orden de compra no está vacía.

El resto del QC pertenecen a la relación requerida de OP y PO, que para un proceso poético establece algunos, preferimos interpretaciones de qué tan bien el objeto implementado satisface el OP, es decir, la prescripción. El último criterio se denominará satisfacción- poética -OC (satisfaccion-poetic - OC) (s-OC).

El OP se construye durante la evaluación del proceso junto con la actividad de evaluar el objeto que se implementa (como resultado intermedio y/o final de la implementación). En algunos dominios de aplicación de procesos poéticos (y también procesos epistémicos), la actividad de evaluación se refiere en términos de prueba (activa y pasiva) verificación y validación.

Estas descripciones, se iteran, para esclarecer los procesos. Creemos, que esto no formaliza como un poeta, crea un poema, su fase más creativa (aunque nos refiriéramos a la poiesis como creatividad). Ahora, que puede conceptualizar el proceso y/o las partes, sí. De hecho, no es ajeno a ello el autor del artículo.

...teniendo esto en cuenta, para la practicidad de TC sea aplicable los constituyentes no formalizados de OP, PO y QC deben distinguirse, al menos, de los tipos y aspectos que puedan formalizarse. Otro problema es que algunos aspectos diversos de los artefactos (artefacts) pueden requerir un lenguaje y una forma de formalización diferentes: p.ej., los aspectos físicos y funcionales que no pueden unificarse en un formalismo común y uniforme. En este caso, el formalismo TC deberá aplicarse por separado a cada aspecto.

Durante la transición de un proceso poético de estado, la prescripción OP de la entidad designada sufre transformaciones consecutivas e.g.;

$OP_1 \to\to_1\to OP_2 \to\to_2\to OP_3 \to\to_3\to\to \cdots$ ¿Las versiones consecutivas de OP describen la misma entidad? Este es un caso especial de la cuestión de la identidad, que tiene una larga tradición en la filosofía. si todos los instantes de OP_i son expresados como categorías y las flechas son funciones (morfismos), entonces la respuesta a la cuestión podría ser como sigue: lo que se conserva en la secuencia son algunas características estructurales determinados por OP_i y el tipo de mapeo entre ellos determinado por $\to\to_i\to\to$. La respuesta se refiere solo a las características estructurales de las entidades diseñadas; por lo que la siguiente pregunta podría ser: ¿es suficiente la preservación de las características estructurales para una respuesta positiva a la pregunta de identidad? Bueno, la respuesta puede depender del tipo de entidad que se diseña. Consideremos, p.ej., entidades que son comunes en la tecnología de la información y la comunicación: es decir, objetos que son composición de software y hardware. El componente de software determina las funcionalidades de la entidad, mientras que el hardware es el componente que habita la animación de la funcionalidad. Muchos aspectos de la funcionalidad pueden expresarse en términos de relaciones estructurales entre morfismos específicos de una categoría. Por lo tanto, la pregunta de identidad puede potencialmente responderse positivamente con respecto a la funcionalidad con la ayuda de una conceptualización en TC. (…)

En cuanto a los procesos epistémicos las relaciones son similares. Pueden interpretarse como hipótesis en teoría de modelos, conjunto de sentencias, etc. dependiendo a los procesos a los que pertenezcan. No insistiremos más en ello, puesto que nuestro interés era mostrar un ejemplo de cómo conceptualizar algunos procesos donde intervienen procesos subjetivos, con la intención que hemos reiterado arriba. Desde luego, pensamos nosotros, las categorías no pueden sustituir ni describir de un modo preciso la vida mental de una persona y *a fortiori* de un artista. No porque los artistas sean superiores –o quizás en cierto modo sí lo sean- sino porque cómo podemos precisar la ideación de una metáfora poética (porque metáforas las hacemos todos los días, es más, recordando a Ortega, el lenguaje es una gran metáfora, algo que suscribimos) si ni siquiera es algo que se pueda enseñar, o incluso a menudo, el propio artista no puede precisar de dónde saca sus creaciones. Pero queda claro, como podemos implementar la TC, no sólo a las matemáticas, y en ello, hemos puesto el énfasis, aunque no sea algo automático ni sencillo. Puesto que hay muchas valoraciones que hacer, tanto de tipo filosófico como técnico. En el mismo libro Wójtowicz[64], donde plantea algo que ya dejábamos entrever arriba, que las categorías teóricas, no pueden explicar fenómenos físicos (y para nosotros los mentales son físicos, aunque distintos del movimiento de un péndulo, por decir algo) para él, tiene sentido en niveles más abstractos de la matemática. Y, por ello mismo, contribuye a la comprensión -su estudio- de la TC en física y en otras ciencias. Él, no niega su influencia en física, habla de explicación de fenómeno físico, que es distinto. El problema es todavía más general y, a nuestro juicio, una pregunta filosófica de primer orden, que ya se preguntaba Einstein y dejaba la pregunta a los filósofos (aunque en distinta formulación) y es que <<si hay alguna explicación matemática en la ciencia, es decir, si son las matemáticas las que proporcionan el poder explicativo>>. Si bien es cierto, que el autor se centra en la teoría

[64] <<Capítulo 3 ¿Existen categorías teóricas que expliquen los fenómenos físicos?

cuántica de topos [ver en [2] apartado ocho] (topos quantum theory) [en plural de Topos en inglés es Topoi o Toposes].

Ahora, nos volvemos a encontrar en la explicación de arriba en cierta postura ontológica, de la que hemos prescindiendo por demasiado compleja en favor de la metodológica- epistemológica. Si bien es cierto, que el artículo de Luback plantea problemas ontológicos, como identidad (también lógicos), "hacer carne de las palabras", nos parece, y en cierto modo él también lo hace, pues no da una respuesta completa sobre el tema, que puede prescindirse de ese aspecto y, sin embargo, sacar conclusiones valiosas. Y siguiendo esta justificación; también uno de los mejores filósofos (según Zalamea) contemporáneos, Lautman, a pesar de ser un platonismo matemático, no fue ajeno a la práctica <<Para Lautman, "las nociones" y las "ideas" se sitúan en un nivel "superior", donde el intelecto puede imaginar la *posibilidad de una problemática,* que, sin embargo, solo adquiere su sentido al encarnar inmediatamente en las matemáticas reales>> (Zalamea, 2009). Lautman, también plantea una idea original sobre la lógica matemática, <<la lógica requiere una matemática para existir>>, cosa discutible. Lo que queremos decir, con todo ello, es que no es imprescindible, y que podemos prescindir de ella sin quitarle interés -al menos totalmente- al trabajo.

4.3 . Breve introducción a la teoría de la medida y algunos conceptos esenciales.

Daremos un breve introducción a la teoría de la medida y proponer definiciones que serán imprescindibles para comprender la tercera y última parte del trabajo. Haremos una breve introducción histórica para entender al gunas ideas matemáticas que subyacen a ésta.

Los primeros trabajos en sobre la teoría de la medida fue la generalización de la integral, con la integral de lebesgue [Ver en [1] apartado seis]. El estudio de conjuntos de puntos de discontinuidad de funciones, planteó el problema de cómo medir la extensión o <<longitud>> de esos conjuntos, porque la extensión de dichas discontinuidades es lo de determina la integrabilidad de la función [Ver en [1] apartado seis, la medida de Lebesgue]

La teoría del contenido, y más tarde la teoría de la medida, fueron introducidas precisamente para extender la idea de longitud a conjuntos de puntos que no sean simples intervalos a la recta usual.

El concepto de contenido se basa en la siguiente idea: considérenos, un conjunto E de puntos distribuidos de alguna manera sobre el intervalo [a, b]. En términos un poco imprecisos por el momento, supongamos que es posible encerrar o recubrir estos puntos mediante subintervalos pequeños de [a, b] de manera que los puntos de E sean o bien interiores a uno de los intervalos o en el peor de los casos uno de los extremos. Reduzcamos las longitudes de estos subintervalos cada vez más, añadiendo otros si es necesario para seguir recubriendo los puntos de E, a la vez que reducimos la suma de las longitudes de todos ellos. Al extremo inferior de las sumas de estos subintervalos que recubren los puntos de E se llama el contenido (exterior) de E. Esta formulación un poco vaga no es la del concepto adoptado finalmente de manera definitiva, pero nos puede servir para entender lo que estaban intentando hacer los matemáticos.

Una definición de contenido (exterior) fue dada por du Bois- Reymond en su obra *Die allgemeine Funktionentheorie* (1982), por Axel Harnack (1951-1888) en su *Die Elemente der*

> *Differential-und Intergralrechnung* (1881), por Otto Stolz y por Cantor. Stolz y Cantor extendieron además la noción de contenido a conjuntos de dos y de más dimensiones utilizando rectángulos, paralelepípedos, etc. en lugar de intervalos. (Kline, 2012, pp. 1373-1374)

La utilización de contenido, no fue lo satisfactoria que se hubiese esperado, pero reveló, no obstante otro tipo de problemas, como la existencia de conjuntos no densos en ninguna parte[65] <<(es decir, contenidos en un intervalo pero no densos en ninguno de sus intervalos>> (Ibidem) de contenido positivo y, lo que fue más importante, que las funciones de tales conjuntos no eran integrales en el sentido de Riemann. Aún con todo, muchos matemáticos pensaron que la integral de Riemann no se podía generalizar. Un paso importante, fue dado por Peano, que introduce las nociones de contenido interior y exterior (también en teoría de medida, medida exterior e interior) de una región. Para Peano, el valor del área de una región era, cuando le región interior –o extremo superior de la región dada- y el exterior – o extremo inferior de todas las áreas de la región- coincidan. Peano, no se aleja de la manera de pensar de Riemann, aunque su trabajo es distinto. Luego Jordan dio un empuje sustancial a la teoría. Otro matemático (vayamos avanzado) Borel, hizo hallazgo en la teoría de la medida -así la llamó él-, trabajando con conjuntos de puntos en que convergen series que representan funciones de variable compleja. Pero fue Lebesgue, basándose en las ideas de los anteriores el que formuló la idea de medida e integral que hoy conocemos

> La generalización de la idea de medida e integral de que se considera hoy como definitiva se debe a Henri Lebesgue (1875-1941), discípulo de Borel y más tarde profesor del Collége de France. Sigueindo las ideas de Borel y también de Jordan y Peano, presentó por primera vez sus propias ideas sobre la medida y la integral en su tesis <<Intégrale, longuer, aire>>. Su obra vino a reemplazar todas las creaciones del siglo XIX y, en particular, mejoró la teoría de la medida de Borel.
>
> La teoría de integración de Lebesgue se basa en su definición de medida de conjuntos de puntos, y ambas ideas se aplican a conjuntos del espacio n-dimensional. **Como ejemplo**[66] , nos limitaremos al caso unidimensional. Sea E un conjunto de puntos contenidos en el intervalo [a, b]. Los puntos de E pueden encerrarse como puntos interiores de una familia finita *o infinita numerable* de intervalos d1, d2,… contenidos en [a, b.]. (Los extremos de [a, b] pueden considerarse, en su caso, como extremos de algún di.) Puede demostrarse que la familia de intervalos {di} se puede sustituir por otra formada por los intervalos $\delta 1,\ \delta 2, \dots$ no rampantes tales que todo punto de E o es punto interior de uno de estos intervalos o el extremo común de dos intervalos adyacentes. (Ibidem).

Hasta aquí, creemos que queda –ciertamente escasa- suficiente para entender la historia de la teoría de media. No obstante, fue el gran Kolmogorov, el que refinó para la teoría de probabilidades.

Vamos a lo sustancial, la definición de espacios medibles y álgebras ($\sigma -$ á lg $e\ bra$).

<<**Definición.** Llamamos anillo Ω , a una colección no vacía $\mathcal{A} \subset \wp(\Omega)$, para que:

[65] Un conjunto es denso en ninguna parte, si para un subconjunto A de un espacio topológico X, el interior de su clausura es vacío.

[66] negrita nuestra.

$$A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B,\ A \setminus B \in \mathcal{A}$$

Lo cual implica que $A \cap B \in \mathcal{A}$. Observemos que $\phi = A \setminus A \in \mathcal{A}$ pero Ω no está necesariamente en $\mathcal{A}$. Llamaremos á*lgebra* a un anillo $\mathcal{A}$ para el que $\Omega \in \mathcal{A}$ y por tanto cerrada por paso al complementario y por uniones o intersecciones finitas.

Llamaremos $\sigma -$ álgebra a una álgebra $\mathcal{A}$ cerrada para uniones numerables, por lo tanto con las siguientes propiedades:

a)$\Omega \in \mathcal{A}$

b) Si $A \in \mathcal{A}\ entonces\ A^c \in \mathcal{A}$

c) Si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}\ entonces\ \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

[Un ejemplo trivial de sigma álgebra es la partes del conjunto de Ω , que es la mayor sigma álgebra de Ω . Otro ejemplo, $\{\phi, \Omega\}$, que es la menor sigma álgebra de Ω].

(…)

Definición: Llamaremos *espacios medibles* al par $(\Omega, \mathcal{A})$, donde Ω es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una $\sigma -$ álgebra de Ω y *conjuntos medibles* a los elementos de $\mathcal{A}$.

Definición: Diremos que una aplicación entre espacios medibles $F\colon (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, es una aplicación medible, si $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\ para\ todo\ B \in \mathcal{A}_2,\ es\ decir\ F^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$.>>

(Apuntes, 2018).

Téngase en cuenta, que la teoría de la medida que hemos dado es moderna y compleja. Sin embargo, el hecho de la medida viene desde *el papiro de Moscú* de 1800 a.c. donde se calcula, dep.ej., el volumen del tronco de una pirámide.

<<**Definición.** Llamaremos *espacio de medida* a toda terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ donde μ es una medida sobre la $\sigma -$ álgebra $\mathcal{A}$ de Ω .>> (Ibidem). [Ver en [2] apartado siete **Mes]**.

4.4 Categorías e Intuicionismo.

La teoría de categorías y *a fortiori* los topos [ver en [2] apartado ocho] se "sustenta" en la lógica intuicionista.

En primer lugar, la lógica intuicionista es la lógica adecuada a los topos (reiteramos[67]). La lógica intuicionista es constructivista y, de un modo ingenuo, podríamos definirla como la lógica, que para conjuntos infinitos, no acepta el principio de tercio excluso[68]. Y como consecuencia, para las demostraciones de conjuntos infinitos, no aceptaría la demostración por

[67] https://www.youtube.com/watch?v=bkg4XfEPgZo

[68] <<CLAS. Gracias. Estoy seguro de que ha estado trabajando sobre esa diversión suya, el rechazo del tercio excluso y todas esas cosas. Nunca he comprendido por qué podríamos fiarnos de la lógica en todo lo demás, pero no en las matemáticas.
IN. (…) exige una forma distinta de la lógica, a saber, la construcción mental matemática [L.E.J. Brouwer, 1908]; y la razón es que, en matemáticas, desde el comienzo mismo tratamos de lo infinito, mientras que la lógica corriente está hecha para razonar acerca de colecciones finitas>> (Heyting, 1976).

reducción al absurdo (el condicional lo ponemos por el modo ingenuo en el que hablamos y no desarrollamos, p.ej., las álgebras de Heyting, así como el estudio de Gödel, sobre la lógica intuicionista y, también por la cautela, de que lo que estamos haciendo no es un estudio lógico[69], como sí lo hace Gödel, en *Una interpretación del cálculo conectivo intuicionista*[70]. Y como somos respetuosos con la disciplina, no queremos afirmar nada que no sea cierto o que pueda generar algún malentendido, por falta de explicación o negligencia propia).

La propia idea del intucionismo está vinculado, según Zalamea, a una nueva filosofía de la matemática, que recordemos el llama *sintética*, que incluye lo que venimos diciendo (nosotros no estamos de acuerdo con esa filosofía sintética porque nos causa varias dudas, siguiendo a Quine, la diferenciación entre analítico y sintético. Aunque sí nos sentimos inclinados en muchas de sus posturas, llevadas a la filosofía de la práctica matemática):

> Las disociaciones y las exclusiones clásicas (del tipo *o...o...*, al estilo del dilema de Benacerraf [15] han hecho excesivo e innecesario daño en la filosofía de las matemáticas, y es tiempo de empezar a superarlos. Para ello, contamos ya con al menos tres grandes tendencias dentro de las matemáticas contemporáneas -donde se rechazan los posicionamientos binarios y donde se abren perspectivas de continuidad entre redes diversas- que merecen empezar a ser seriamente consideradas en la reflexión filosófica: (i) la comprensión de lo "positivo" (clásico, conmutativo, lineal, elemental, estructurado, etc.) como *límite* de mediaciones "negativas" (intucionismo, no conmutativo, no linealidad, no elemental, cuantización, etc.); (ii) la teoría de haces, con sus manejos continuos de coherencia y pegamiento entre lo local y lo global; (iii) la teoría matemática de *categorías* con sus manejos de diferenciación y reintegración entre lo particular y lo universal. (Zalamea, 2009, p.159)

En todo caso, la justificación de este apartado, vendría ser la utilización de la lógica intucionista, y por tanto: <<Un resultado de Caicedo[71] demuestra que la *lógica clásica es una fibra "genérica" de un haz de estructuras de primer orden no es más que un límite adecuado de la lógica intucionista en las fibras "reales" del haz.* Esta notable situación muestra que las construcciones de lo clásico y lo positivo como "idealizaciones límite" exhibidas (...) reflejan también, exactamente de la misma manera, en el ámbito de la lógica>> (Ibidem). La lógica de Caicedo es una <<*franja intermedia*>> entre modelos de Kripke y topos de Grothendieck.

Por supuesto:

> El intucionismo solo acepta los sistemas formales como herramientas imperfectas para la descripción y la comunicación. deja abierta la posibilidad de que sus deliberaciones intuitivas algún día revelen principios de razonamiento aún inauditos. Según Heyting, "en prionciopio es

---

[69] <<Respecto al sistema H de la lógica conectiva intucionista construido por A. Heiting valen los siguientes teoremas:
I. No hay modelo alguno con un número finfito de elementos (valores veritativos) que satisfaga todas y solas las fórmulas deducibles en H (es decir, donde todas y solas estas fórmulas reciban el valores señalados en cualquier asignación de valores del modelo a las variables)
II. Entre H y el sistema A de la lógica conectiva usual se encuentran infinitos sistemas, es decir, hay una sucesión monótona decreciente de sistemas, tales que todos ellos incluyen H y están incluidos en A.
La prueba resulta de los siguientes hechos (…)>> (Gödel, 1989).

[70] Gödel, K. (1989). *Obras completas.* Introducción y traducción de Jesús Mosterín. Madrid. Alianza Editorial.

[71] Xavier Caicedo. "Lógica de los haces de estructuras". *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* XIX (74) (1995), 569-585

> imposible establecer un sistema formal que sea equivalente a las matemáticas intucionistas...Nunca se puede probar con rigor matemático que el sistema de axiomas realmente abarque todos los métodos válidos de demostración" (Goldblatt, 1984, 178).

Esto no significa que no mejore y que los resultados no sean relevantes, sobra decir.

5. TERCERA PARTE.

5.1 Introducción.

La teoría de probabilidad se ha expandido para abarcar ejemplos tan diversos de procesos estocásticos como la teoría de la codificación, las matemáticas actuales, el modelo biológico y físico y la teoría de la decisión. Un uso particular que ha ganado prominencia en los últimas décadas con la creencia centralidad de las computadoras (el programa Haskell está basado en el lenguaje de teoría de categorías) en la sociedad moderna es el uso de la TP como una herramienta para la toma de decisión racional automatizada y el descubrimiento de conocimiento. En términos generales, la mayoría de la información procesada por la mente humana trata con cierto grado de incertidumbre y, aunque la teoría de la lógica discreta se ha desarrollado ampliamente una sólida comprensión del razonamiento estocástico eficiente y efectivo es en cierto modo ilusorio. Dichos estudios están profundamente conectadas con el avance de la inteligencia artificial y los campos de la lógica formal y la informática teórica. El lenguaje y las construcciones de la teoría de categorías han demostrado ser útiles para unificar campos de estudios dispares (Orion, 2014). Asimismo, se ha utilizado para el estudio de la cognición humana, lo que nos vendría bien para el estudio de la teoría de la decisión y las habilidades cognitivas que se puedan realizar. Por ejemplo, en casos de inferencia, aún en los casos más básicos, como para el análisis de la computación para la revolución cognitiva, computacionalismo[72] (Phillips and Wilson, 2010).

Como se podrá entender fácilmente, el grado de formalización y notación es netamente matemático. Sin embargo, no creemos que se aporte mucho con una formulación engorrosa y una notación que embarulle (aunque en este caso en particular la notación suele ser más clarificadora, pero se necesita conocer la notación y los conceptos) más cuando nos apoyamos en los apéndices. En ellos se encuentran todos los conceptos para la comprensión, al menos somera, de todos los términos del texto y, en particular, el de este apartado. Por tanto, aunque no explicitemos el apartado del apéndice del concepto, es casi seguro que se encuentra en alguno de ellos.

5.2 Probabilidad y categorías.

[72] No se quiere decir, que, con la TC, se cierre de la controversia cerebro vs máquina. En todo caso, y siguiendo las propuestas de Penrose sobre la utilización de los teoremas de Gödel, para demostrar que el cerebro no es computacional. Asimismo, se podrían utilizar ciertas propuestas de la TC y la teoría de topos, con la lógica intucionista para éste propósito.

Las categorías tienen la ventaja que son matemáticas y la matemática de la metamatemática (siendo honestos, esto también podría atribuirse, en cierto modo, a la teoría avanzada de conjuntos, pero ésta menos expresiva), lo cual hace de las categorías un lenguaje apropiado para, en este caso, acercarnos de forma distinta a la probabilidad y, por otro lado, la utilización de categorías ya se viene dando para simplificar, aunar o generalizar procesos de la lógica tomando los cuantificadores como funtores adjuntos. Y lo más interesante para nosotros

> Este para de "cuantificadores como adjuntos" se puede aplicar a la categoría de Kleisi de la mónada de Giry [ver en [2], apartado cinco], denotado por Meast [ver en [2] apartado cinco y siete], cuyos objetos son espacios medibles y las flechas X->Y son funciones medibles X->T asignando una medida de probabilidad en Y para cada x∈ X. Al conceptualizar los cuantificadores como adjuntos, los cuantificadores existenciales y universales deterministas se amplían para incluir el no determinismo.

Lo que plantea un análisis filosófico distinto, al unir conceptualmente los cuantificadores probabilísticos con los deterministas, convirtiendo categorías **Mes** en Mest y aplicando los mapeos convenientes. Por supuesto esto no es automático, hay que hacer ciertos encajes, pero pueden definirse sin ningún problema, aunque sea complejo por la cantidad de teoría requerida. Por ejemplo:

<<**Mapa determinista y no determinista** Todo mapeo mesurable en la categoría de espacios mesurables $X \to^{f} \to Y \; in \; Meas$ puede ser regenerado como el morfismo

$Meast \quad X \to^{\delta_f} \to Y \; en \; Meast$ definida por la medida de dirac (o un punto)

$\delta_f(x)[B] = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \; sii \; f(x) \in B \\ 0 \; en \; otro \; caso \end{smallmatrix} \right\}$ Así, δ_f asigna a x la medida de dirac en Y que se concentra en f(x).>> (Sturtz, 2012).

Lo que queremos decir, y creemos que es palpable, aunque no se entiendan los conceptos del todo y uno sólo se pueda entrever lo que se sugiere; es la fructífera esfera de las categorías y, como traslada los problemas filosóficos y/o metamatemáticos. Nos parece, que de un modo natural, plantea la filosofía de la práctica matemática, como ideación (génesis y proceso). Lo dicho arriba, puede inscribirse en la probabilidad objetiva. Esto es, en la probabilidad sobre la naturaleza; que no quiere decir, que el estudio categórico, fulmine, por poner por caso, a las *estructuras disipativas* de Ilya Priogine. La filosofía, sigue latente, pero su revelación es más nítida. O por mejor decir, la conceptualización, mejora. Y si mejoran los conceptos, clarifican las hipótesis. Y si se clarifican las hipótesis, las tesis serán menos problemáticas.

En fin, siguiendo el discurso del trabajo, debemos mencionar la influencia de las categorías sobre la probabilidad subjetiva y bayesiana. Mencionamos arriba, tanto el trabajo de David Teira como sus vídeos, donde nos hablaba, de una nueva interpretación en análisis de medicamentos, con la estadística bayesiana. Un breve ejemplo a este respecto, aunque el mapeo se puede generalizar, es el siguiente

> Consideremos el problema de mapear el riesgo de una enfermedad [se analizan datos sobre la incidencia del cáncer de labio en Escocia] de utilizando una serie de conteos regionales de casos observados y esperados e información sobre factores de riesgo potenciales. Para analizar este problema desde un punto de vista bayesiano, proponemos una metodología que extiende un

modelo de partición espacial al incluir información de covariables categóricas. Tal extensión permite detectar conglomerados en la variación residual que refleja más covariables posiblemente no observadas. La metodología se implementa por medio de salto reversible de cadenas de Markov en el método Monte Carlo. Se presenta una aplicación para ilustrar y comparar extensiones propuestas con un modelo de partición puramente espacial (Gudici, et al. 1999).

Para entender una mónada T [ver en [2] apartado cinco] en cualquier categoría, es conveniente entender sus T-álgebras. No nos vamos a extender, pero como venimos diciendo el trabajo es filosófico y matemático. En ambos caso, de forma no especializada y, por tanto, creemos necesario esta aclaración. No es sencillo, en general, encontrar estas T-álgebras. La descripción dada por Eilenberg-Moore. Su definición fue descriptiva y no constructiva.

Un esquema para tener una representación útil de T-álgebras es encontrar una subcategoría densa de T-álgebras y reconocer que los objetos y morfismos en esa subcategoría puede ser vista también como una estructura diferente. De ese modo la subcategoría, llamada Ω ,es una subcategoría de otra categoría $\mathcal{R}$, y cuando es una subcategoría densa en $\mathcal{R}$ y consistente de objeto categóricamente compacto [en $\mathcal{R}$], entonces Ω es llamada subcategoría densa compacta de $\mathcal{R}$.

Recordemos, que un objeto A en una categoría $\mathcal{R}$ es llamada *categóricamente compacta* si tenemos (1) $\mathcal{R}(A, colimD) = colim_i\ \mathcal{R}(A, D_i)$ para todo diagrama filtrado $D: I \to$ $\to \mathcal{R}$ tal que colimit existe. [ver en [2] apartado nueve].

En todo caso, como ya hemos dicho, el volumen de conceptos, definiciones, etc., es abrumadora para un trabajo de estas características y tampoco –seguimos estudiando- nosotros la conocemos al detalle y en su auténtica profundidad. Asimismo, también hemos expuesto en al capítulo **4.2** la manera de utilizar las categorías como **conceptualización** de “procesos subjetivos”.

Si continuamos con estas explicaciones, deberíamos introducir más literatura de las categorías y, más formalizaciones; las cuales son mucho más complejas. El desarrollo en la filosofía de las matemáticas, no es el tema del trabajo y, creemos, que hemos satisfecho las preguntas de la introducción y, pensamos, que hemos respetado y satisfecho el título del trabajo.

Nosotros mismos, necesitaríamos más horas de estudio (cosa que haremos, no quepa duda) para entender las nuevas propuestas. Puede que el trabajo, parezca que se cercena, creemos que no, pero puede parecerlo. En todo caso, por lo dicho anteriormente, lo terminamos aquí.

[1]. APÉNDICE SOBRE PROBABILIDAD.

Las traducciones son nuestras.

1.INTERPRETACIÓN ELEMENTAL DEL TEOREMA DE BAYES.

<<Regla de Bayes: Si A y B son dos sucesos, la probabilidad de que A haya ocurrido, supuesto que B ha ocurrido, se puede calcular mediante la fórmula:

P (A|B) = P(A)* [P(B|A) / P(B)] denominada regla de Bayes.

Aparentemente, la regla de Bayes no es más que otra forma de calcular la probabilidad condicionada y, de hecho, así es. Su importancia radica en su interpretación. Para poner de relieve esa interpretación, conviene emplear unos términos peculiares. La probabilidad P(A) se denomina probabilidad previa [en algunos libros, a priori], mientras que P(A|B) se denomina probabilidad posterior [en algunos textos, a posteriori]. Estos términos sugieren el marco en el que se aplica la regla. Se trata de valorar cómo se modifica la probabilidad del suceso A, cuando poseemos una nueva evidencia, la información de que B ha ocurrido. La probabilidad previa, P(A), es el resultado de valorar la probabilidad de que A ocurre, antes de disponer de la nueva evidencia. La probabilidad posterior P(A|B) es el resultado de la nueva evaluación de la probabilidad de que A ocurra, después de disponer la nueva evidencia. La fórmula de Bayes, P(A|B) = P(A)* {P(B|A) / P(A)} [llamaremos al cociente entre llaves factor] muestra que la probabilidad posterior es igual a la probabilidad previa, multiplicada por un factor que valora la nueva evidencia. Analicemos ese factor, el numerador es P(A|B), lo que indica que, si P(B) está fija, cuánto más verosímil sea B supuesto que A ha ocurrido, más verosímil será A, supuesto que B ha ocurrido [supongamos el caso donde el factor sea 1. En ese caso P(A|B) = P(A)]. El denominador es P(B), esto significa que fijo el numerador, cuánto menos probable sea B, más verosimilitud añade a que A haya ocurrido>> (Vélez et al. 2006, p.165).

2. AXIOMÁTICA DE KOLMOGOROV EN BUSTOS (1955).

Si E es el conjunto de eventos α, β, π, … consideremos los subconjuntos de E que llamaremos *eventos fortuitos* caracterizados porque toda clase F de esos subconjuntos de E goza de las siguientes propiedades:

Ax1. F es un <<cuerpo>>; es decir: la suma, producto y diferencia de subconjuntos de F, pertenecen a F.

Ax2. F contiene a E.

Ax3. Si el conjunto A pertenece a F, existe un número P(A), real y no negativo, que se llama probabilidad de A.

Ax4. P(E) = 1.

Ax5. Si A y B no tienen elementos comunes, P(A+B) = P(A) + P(B).

Ax6. Si An contenido en ...A2, contenido en A1 es una sucesión de F tal que la intersección A1*A2*…* An*…= 0, Lim P(A) = 0 si n--->infinito. (El Ax6. Es independiente de los cinco anteriores).

3.LEY <<CERO-UNO>>.

<<**4.4.1. Teorema** Si X1, X2, … son variables aleatorias independientes, y el suceso A está determinado sólo por el comportamiento de los términos infinitamente alejados de

la sucesión X1, X2, … y no depende de los valores X1, X2, …, Xn para todo n finito, entonces: o bien P {A}=0 o bien P {A}= 1.>> (Boss, 2008)

4.” ESTA ES LA NOCIÓN DE COLECTIVO

Consideremos un experimento aleatorio S y denotamos por L= {s1, s2, …,sm} el conjunto de todos los resultados del experimento. Se dice que el conjunto L es el conjunto de etiquetas o el conjunto de atributos. Consideramos L sólo como conjunto finito. Consideremos N realizaciones de S y escribimos xj después de cada realización. Entonces obtenemos la muestra finita:

(3.1) $x= (x1, \ldots, xN)$, $xj \in L$.

Un *colectivo* es una idealización infinita de esta muestra finita:

(3.2) $x= (x1, \ldots, xN, \ldots)$, $xj \in L$,

Para lo cual son válidos los siguientes dos principios de von Mises.

El primero es la estabilización estadística de las frecuencias relaticas de cada atributo $\alpha \in S$ en la secuencia (3.2). Calculamos las frecuencias $V_N (\alpha; x)= n_N (\alpha; x)/ N$ donde $n_N (\alpha ; x)$ es el número de realizaciones de los atributos α en las primeras N pruebas. El principio de estabilización estadística de las frecuencias relativas dice: la frecuencia $V_N (\alpha ; x)$ se acerca aun límite cuando N se acerca al infinito para cada etiqueta $\alpha \in L$. Este límite $\mathbf{P}(\alpha)= \lim V_N (\alpha ; x)$ se dice que es la probabilidad de la etiqueta α en la teoría de frecuencias de la probabilidad. A veces, esta probabilidad se denotará por P (α) (para mostrar una dependencia de colectivo x). (Khrennikov, 2009, p. 5)

5. CREENCIA BAYESIANA

THEOREM 2.9. Una función Bel: $2^\wedge\Theta \rightarrow [0,1]$ es una función de creencia bayesiana si y solo si, existe una función p: $\Theta \rightarrow [0,1]$ tal que

$$\Sigma_{\theta\in\Theta}\, p(\theta) = 1 \qquad \text{y}$$

Bel (A) $=\Sigma_{\theta\in A}\, p(\theta)$ para todo $A \subset \Theta$. (Si Bel es una función de creencia bayesian, entonces la función p es por supuesto única; está dada por $p(\theta) = m(\{\theta\})$.

THEOREM 2.8. Supongamos Bel: $2^{\Theta} \rightarrow [1,0]$ es una función de creencia con superior P*.

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Bel es Bayesiana.

(2) Todos los elementos focales de Bel son singletones [conjunto con un único elemento]

(3) Bel otorga un número de similitud cero a cualquier subconjunto que contenga más de un elemento.

(4) Bel=P*

(5) Bel (A) + Bel (A^C) =1 para todo $A \subset \Theta$. (Shafer, 1976, p. 45)

6. MEDIDA DE LEBESGUE INTEGRAL DE LEBESGUE PARA FUNCIONES SIMPLES MEDIBLES NO NEGATIVAS.

Definición 2.1.1. Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible y s: $A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función simple medible tal que s(x) ≥ 0 $\forall x \in E$. Escribamos S(A)= {a1, …, an} y A_1 = $\{x \in E$: s(x)=a1$\}$. Entonces se define la integral de Lebesgue de s sobre A, $\int_A$ a dm, por el número extendido

$\int_A$ adm= $\Sigma_{i=1}$ai m(Ai).

Ejemplo. Sea E= [-1,1] y sea s: E→ $\mathbb{R}$ la función definida por: s(x)=5 $\forall x \in \left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, s(x)=0 $\forall x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, s(x)= 2 $\forall x \in \left(\frac{1}{2},1\right]$. Por consiguiente, s es una función simple no negativa y medible, y se tiene que:

$\int_{[-1,1]}$ adm= 5*m([-1,-½])+ 0*m((-½,½])+2*m((½ ,1])= 5*½+0*1+2*½ =7/2.

[Los m es una medida [medida de lebesgue que definimos de manera sencilla como: $\mu(s) = \Sigma_k\,(b_k - a_k)$] y se calcula (–½) -(-1)=½ , ½-(-½)=1 y 1-½=½.] (Gatica, 1977, p.45)

[2]. APÉNDICE SOBRE TEORÍA DE LAS CATEGORIAS.

1. DEFINICIÓN DE CATEGORÍA.

<<Una categoría C consiste de

-Una colección *Obj* entidades llamado objectos

-Una colección *Arw* de entidades llamadas flechas (arrows) [llamados de forma más extensa morfismos. Es bueno tenerlo presente porque utilizaremos éstos últimos, en detrimento de flechas]

-dos asignaciones *Arw* $\rightrightarrows^{fuente}_{objetivo}\rightrightarrows$ *Obj* [source: fuente, target: objetivo]

-una asignación *Obj* $\rightarrow^{id}\rightarrow$ *Arw*

-una composición parcial *Arw x Arw* →→ *Arw*

(Simons, 2011)>>.

[Pero esto es incompleto, como ya hemos dicho queremos ser claros y simplificar lo más posible, por ello introducimos otra definición donde se incluye los morfismos, lo que falta en la definición anterior]

<<Una categoría consiste de la IMFORMACIÓN:

(1) OBJETOS
(2) MORFISMOS

(3) Para cada morfismo *f,* un objeto como DOMINIO de *f* y un objeto como CODOMINIO de *f.*
(4) Para cada objeto A un morfismo IDENTIDAD, el cual tiene dominio A y codominio A.
(5) Para cada par de morfismos: $A \to^{f} \to B \to^{g} \to C$ un morfismo compuesto $A \to^{f\ \circ g} \to C$

Sujetos a las siguientes reglas:

(i) LEYES PARA LA IDENTIDAD: si $A \to^{f} \to B\ entonces\ I_B{}^{\circ}f = f\ y\ f^{\circ}I_A = f$
(ii) LEY ASOCIATIVA:

$A \to^{f} \to B \to^{g} \to C \to^{h} \to D,\ entonces\ (h^{\circ}g)^{\circ}f = h^{\circ}(g^{\circ}f)$. Podemos omitir los paréntesis por la ley asociativa.

En los incisos (4) y (5) están escondidas las reglas de CONTABILIDAD. Explícitamente, estas son: -el dominio y codominio de I_A son ambos A.

-$g^{\circ}f$ sólo está definida si el dominio de *g* es el codominio de *f*;

-el dominio de $g^{\circ}f$ es el dominio de *f* y el codominio de $g^{\circ}f$ es el codominio de *g.*>> (Lawvere and Schanuel, 2009)

2. DEFININICIÓN DE FUNTOR Y FUNTOR CONTRAVARIANTE.

<<3.17 DEFINICIÓN: Si **A** y **B** son categorías, entonces un **funtor** [algunos lo llaman functor] F **de A a B** es una función que asigna a cada **A**-objeto A a un **B**-objeto F(A), y a cada **A**-morfismo $A \to^{f} \to A'$un **B-**morfismo $F(A) \to^{F(f)} \to F(A')$ de tal manera que

(1) F preserva la composición; i.e., $F(f^{\circ}g) = F(f)^{\circ}F(g)$
(2) F preserva la identidad de morfismos; i.e., $F(id_A) = id_{F(A)}$ para cada **A**-objeto A.>> (Adámek et al., 2004, p.29-30)

<< DEFINICIÓN 3. un funtor *contravariante T* de una categoría $\mathcal{H}$ en una categoría $\mathcal{L}$ es un par de aplicaciones (anotadas ambas con el mismo símbolo T). La primera, *aplicación de objetos,* transforma los objetos de $\mathcal{H}$ en los de $\mathcal{L}$, y la segunda, *aplicación de morfismos,* aplica los morfismos de $\mathcal{H}$ en los de $\mathcal{L}$, mediante las siguientes condiciones:

1) Si $f \in Hom_{\mathcal{H}}(X,\ Y)$, entonces $T(f) \in Hom_{\mathcal{H}}\big(T(X), T(\ Y)\big)$
2) Si $f \in Hom_{\mathcal{H}}(X,\ Y)$ y $g \in Hom_{\mathcal{L}}(Y,\ Z)$, entonces T(gf)=T(g)T(f).
3) Para todo objeto X de $\mathcal{H}$, $T(I_X) = I_{T(X)}$.

Se dice que el funtor T es contravariante si satisface las siguientes versiones de las condiciones 1) y 2).

1') Si $f \in Hom_{\mathcal{H}}(X,Y)\ entonces\ T(f) \in Hom_{\mathcal{L}}\big(T(Y), T(X)\big)$

2') Si $f \in Hom_{\mathcal{H}}(X,Y)\ y\ g \in Hom_{\mathcal{L}}(Y,Z)\ entonces\ T(gf) = T(f)T(g)$. >>(Keese, 1971, p. 55-56).

4) DEFINICIÓN DE FUNTOR ADJUNTO.

<<Definición 7.1.1.1. Sea B y A categorías. Una *adjunción* entre B y A es un par de funtores

$$L: B \to A \ y \quad R: A \to B$$

Junto con un isomorfismo natural cuyos componentes para cada objecto $A \in Obj(A)$ y $B \in Obj(B)$ es [no confundir objetos con categorías]

$$\alpha_{B,A}: Hom_A(L(B), A) \to^{\cong} \to Hom_B\big(B, R(A)\big)$$

Este morfismo es llamado el *isomorfismo de adjunción* para la (L, R) adjunción y para algún morfismo f: L(B) → A de A [A es la categoría], nos referimos a $\alpha_{B,A}(f): B \to R(A)$ como el adjunto de f.

El funtor L es llamado adjunto izquierdo (adjunto por la izquierda) y el funtor R adjunto derecho (adjunto por la derecha). Nosotros podemos decir que L es el adjunto izquierdo de R o que R es el adjunto dereche de L. A menudo lo denotamos

$$L: B \rightleftarrows A: R$$

>> (Spivak, 2014, p.377).

5. DEFINICIÓN DE MÓNADA Y MÓNADA DE GIRY.

Definición: Una monada (monad) T= $<$ T, η , μ $>$ en una categoría X consiste en un funtor T: X→ X y dos transformaciones naturales $\eta : I_X \to$ T , $\mu: T^{\,2} \to T$ (1)

Que hacen los siguientes diagramas conmutativos [por motivos de escritura pondremos las transformaciones entre paréntesis, en vez de encima de las flechas]

$$\begin{tikzcd} IT \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{IT} \arrow[r, "(\eta T)"] \arrow[d, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & TI \arrow[l, "(\eta T)"'] \arrow[d, equal] \\ \mathrm{T} \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{T} \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{T} \end{tikzcd} \qquad (2)$$

(Mac Lane, 1971, p. 133).

<<La mónada de Giry (Giry 80, siguiendo Lawvere 62) es la mónada en una categoría de espacios adecuados que envía cada espacio adecuado (suitable spaces) X al espacio de medida de probabilidad en X.

Definición. La mónada de Giry se define sobre la categoría de espacios medibles asignando a cada espacio de medida X el espacio de todas las probabilidades sobre X, G(X), dotado (endowed) con la sigma-álgebra generada por el conjunto de todos los mapas evaluados

$$ev_U: G(X) \to\to [0, 1]$$

Enviando un espacio de medida P a P(U), donde U oscila sobre todos los conjuntos medibles de X. La unidad de la mónada envía un punto $x \in X$ a la medida de Dirac en x, δ_x, mientras la multiplicación de las mónadas está definida por la transformación natural

μ_x: $G(G(X)) \to\to [0,\ 1]$ dado por

$$\mu_x(Q)(U) \coloneqq \int_{\{q \in G(X)} ev_U(q)dQ.$$

Esto convierte el endofuntor P en una mónada, y esta es la mónada Giry en un espacio medible tal y como lo definió Lawvere.

[Una forma alternativa es utilizando espacios polacos (Polish spaces) P: Pol → Pol, que no desarrollamos aquí] >> (nLab, Giry monad[73])

6. DEFINICIÓN DE HOMOLOGÍA

<<Definición 2.1 Dada una variedad de dimensión n V y r subvariedades de dimensión p conexas v1, . . ., vr, se dice que existe una *homología* entre ellas, v1+. . .+vr ~ 0, si para algún entero k, el conjunto de k copias de cada subvariedad vi, forma la frontera de otra subvariedad conexa de dimensión (p+1) W de V.

Poincairé entiende por *variedad* el conjunto de ceros de un sistema adecuado de funciones, es decir, es la generalización a dimensiones superiores del concepto de curva en dimensión 1 o superficie en dimensión 2>> (Stadler, 2000).

7. ALGUNAS CLASIFICACIONES DE CATEGORÍAS.

<<Ejemplo 1:

La categoría **Set** de conjuntos

Obj es la clase de todos los conjuntos

hom (A, B) es el conjunto de todas las funciones deA a B [Hom son los morfismos]

La categoría **Mon** de Monoides

Obj es la clase de todos los monoides

hom (A, B) es el conjunto de todos los homomorfismos monoidales (monoid homomorphisms) de A a B

La categoría **Grp** de grupos

Obj es la clase de todos los grupos

[73] https://ncatlab.org/nlab/show/Giry+monad

hom (A, B) es el conjunto de todos los homomorfismos de grupo de A a B

La categoría **AbGrp** de grupos abelianos [grupos conmutativos]

Obj es la clase de todos los grupos abelianos

hom (A, B) es el conjunto de todos los homomorfismos de grupo de A a B

La categoría **Mod**$_R$ de R-módulos, donde R es un anillo

Obj es la clase de todos los R-módulos

Hom (A, B) es el conjunto de todos los R-mapas [funciones] de A a B

La categoría **Vect**$_F$ de espacios vectoriales sobre un cuerpo [también se denomina campo] (field) F

Obj es la clase de todos los espacios vectoriales sobre F

Hom (A, B) es el conjunto de todas las transformaciones lineales de A a B

La categoría **Rng** de anillos

Obj es la clase de anillos (con unidad)

Hom (A, B) es el conjunto de todos los homomorfismos de anillos de A a B

La categoría **Field** de cuerpos (campos)

Obj es la clase de todos los cuerpos (campos)

Hom (A, B) es el conjuto de todos los anillos embebidos (ring embeddings) de A a B

La categoría **Poset** de conjuntos parcialmente ordenados

Obj es la clase de todos los conjuntos parcialmente ordenados

Hom (A, B) es el conjunto de todas las funciones monótonas de A a B. que son las funciones f: P→ Q satisfaciendo $p \leq p \Longrightarrow f(p) \leq f(q)$

La categoría **Rel** de relaciones

Obj es la clase de todos los conjuntos

Hom (A, B) es la relación binaria de A a B, esto es, un subconjunto del producto cartesiano AxB

La categoría **Top** de espacios topológicos

Obj es la clase de todos los espacios topológicos

Hom (A, B) es el conjunto de todas las funciones continuas de A a B

La categoría **SmoothMan** de variedades (manifolds) con mapas suaves (smooth maps)

Obj es la clase de todas las variedades

Hom (A, B) es el conjunto de todos los mapeos suaves de A a B>> (Roman, 2010).

<<Esta construcción básica se puede generalizar a la categoría de espacios medibles **Meas,** de modo que una medida de probabilidad P puede verse como una función $P \in$ **Meas** $(2^{X}, I)$ donde I= [0, 1] dotado de la $\sigma -$ $\acute{a}\lg e\ bra\ de\ Borel\ generada\ por\ los\ intervalos\ abiertos,\ y\ 2^{X} = Meas\ (X, 2)$ donde 2 tiene la sigma- álgebra discreta>> (Sturtz, 2015)

8. DEFINICIÓN DE TOPO.

<<F. W. Lawrence y M. Terney [LN], [TV] introdujeron la definición de topos elementales principalmente en respuesta al sentimiento de que debería ser posible caracterizar una clase de categorías, que se comparten "internamente" en la forma en que esperamos que se comporten los topos de Grothendick, pero que están definidas por axiomas "elementales" que sean independientes de la teoría de conjuntos.

1.11 DEFINICIÓN. Una categoría $\mathcal{E}$ es llamada un (elemental) *topos* si

(i) $\mathcal{E}$ tiene límites finitos (Equivalentemente, $\mathcal{E}$ tiene un pullback y un objecto terminal)

(ii) es un cerrado cartesiano, i.e., para cada objeto X tiene un funtor exponencial $(-)^{x}$: $\mathcal{E} \to\to \mathcal{E}$ el cual es un adjunto derecho para el funtor (-) x X.

(iii) $\mathcal{E}$ tiene un *clasificador de subobjetos*, i.e., un objeto Ω y un morfismo $1 \to^{t}\to \Omega$ (llamado "verdad" (true)) tal que, para cada morfismo $Y \rightarrowtail^{\sigma} \rightarrowtail X$ en $\mathcal{E}$, hay un único ϕ_{σ}: $X \to\to \Omega$ (el mapa clasificatorio de σ) marcado un diagrama pullback

$$
\begin{array}{ccc}
Y & \to\to & 1 \\
\downarrow \sigma & & \downarrow t \\
X & \to^{\phi_{\sigma}}\to & \Omega
\end{array}
$$

>> (Johnstone, 2014).

<<Sea M una clase de morfismos en una categoría **A**. Entonces **A** es llamada un M-**topos** siempre que:

(1) Tiene un M-morfismo parcial
(2) Es cerrada cartesian, y
(3) Es finitamente cocompleta.

Los Mono-topoi son llamados **topoi** y los ExtrMono-topoi son llamados **quasitopoi**>> (Adámek et al., 2019, p.445)

9. DEFINICIÓN DE LÍMITE EN CATEGORÍAS.

<<2.24 Definition (i) definimos un funtor $Lim_{\to}$: **cat** $(\mathcal{E}) \to\to \mathcal{E}$ por lim C= coeq $\left(C_1 \rightrightarrows^{d_0} \rightrightarrows_{d_1} \rightrightarrows\ C_0\right)$ (Notar que el par (d_0, d_1) es reflexivo con la división común i) [common splitting].

(iii) Definimos un funtor $\lim_{\to_c}$: $\mathcal{E}^{c} \to\to \mathcal{E}$ por $\lim_{\to_c}$ (**F** $\to^{\gamma}\to$ **C**) = lim _ → **F**. >>

(Johnstone, 2014).

Bibliografía.

Adámek, J. et al. (2004). *Abstract and concrete catedories. The joy of cats.* New York. Dover Publication, Inc.

Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., et al. (1994). *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Vol.2. Alianza Editorial.

Arregui, F.J. (1998). *Topología.* Madrid. Universidad de Educación a Distancia.

Baselga, M., S. (2008). *Dirac. La belleza matemática.* La matemática en sus personajes 34. Tres Cantos. NIVOLA libros y ediciones.

Bertsch, M.S. (2012). *La teoría que nunca murió. De cómo la regla de Bayes permitió descifrar el código Enigma, perseguir los submarinos rusos y emerger triunfante de dos siglos de controversia.* Barcelona. Crítica.

Boss, V. (2008). *Lecciones de matemáticas. Probabilidad - Información - Estadística.* Moscú. URSS.

Busto, E.H. del (1955). *Las teorías modernas de la probabilidad. La probabilidad y la lógica inductiva en Carnap.* Madrid. Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Borel, É. (1986). *Las probabilidades de la vida.* Barcelona. Orbis.

Correa, M., J.C. y Barrera, C., C.J. (2018). *Introducción a la estadística bayesiana.* Colombia. Fondo Editorial ITM.

De Finetti, B. (2017). *Theory of Probability. A critical Introductory Treatment.* London. Willey.

Eilenberg, S. & MacLane (1945). General theory of natural equivalences. *Trans. Am. Math. Soc.* 58 (2), 231-294.

Ferreirós, J. (2016). Mathematical Knowledge and the interplay of practices. Princeton. Princeton University Press.

García, A.M. and Teira, S.D. (2006). Normas éticas y estadísticas en la justificación de los ensayos clínicos aleatorizados. *Revista Hispanoaméricana de Filosofía. Vol.38.No 113* (Aug. 2006), pp. 39-60.

García, P.A. (2010). *Estadística básica con R.* Madrid. Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Giudici, P., et al. (1999). Modelling categorial covariates in Bayesian disease mapping by partition structures. *Sonderforschungsbereich* 386, Paper 152 April 1999.

Johnstone, T. P. (2014). *Topos theory.* New York. Dover plublications, Inc.

Keesee, W.J. (1971). *Introducción a la topología algebraica.* Madrid. Editorial Alhambra, S.A.

Khrennikov, A. (2009). *Interpretations of Probability.* Second edition. Walter de Gruyter.

Krömer, R. (2007). *Tool and Object. A history and philosophy of category theory.* Alemania. Birkhäuser.

Lorenzo, Javier de (1971). *Introducción al estilo matemático.* Madrid. Tecnos.

Gatica, J.A. (1977). *Introducción a la integral de lebesgue en la recta.* Santiago de Chile. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos. Monografía.

Goldblatt, R. (1984). *Topoi. The categorial analysis of logic.* Amsterdam. Elvesier Science Publishers B.V. 1984.

Gutiérrez, C.S. (1992). *Filosofía de la probabilidad.* Valencia. Tirant lo blanch.

Haigh, J. (2008). *Matemáticas y juegos de azar.* Barcelona. Tusquets editores.

Hand, D. (2015). *The improbability principle.* London. Corgi Books.

Hertwig, R. and Gigerenzer, G. (1999). The 'conjunction fallacy' revisited: How intelligent inferences look like reasoning errors. *Journal of Behavioral decision making.* 12: 275-305.

Heyting, A. (1976). *Introducción al intucionismo.* Madrid. Tecnos.

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático.* Madrid. Alianza Editorial.

Kus', M. and Skowron, B. (2019). *Category theory in physic, mathematics and philosophy.* Springer.

Laplace, P.S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades.* Madrid. Alianza Editorial.

Lawvere, W.F. and Schanuel, H.S. (2009). 2ª edición. *Matemáticas conceptuales. Una primera introducción a categorías.* Traducción: Francisco Marmolejo. CUP.

Lorenzo, J. de (2000). *Filosofías de la matemática fin de siglo XX.* Valladolid. Secretariado de publicaciones e intercambio editorial. Universidad de Valladolid.

Mac Lane, S. (1971). *Categories for the working mathematician.* New York. Springer-Verlag.

Marquis, J.P. (1995). Category Theory and the Foundations of Mathematics: Philosophical Excavations, *Synthese*, 103: 421–447

Mateos-Aparicio, M.G. (1985). *Teoría subjetiva de la probabilidad.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Kurt, G. (1989). *Obras completas.* Interpración y traducción Jesús Mosterin. Madrid. Alianza Editorial.

Kuś, M. and Skowron, B., Editors (2019). *Category theory in Physic, Mathematics, andPhilosophy.* Switzerland. Springer.

Mancosu, P. (2006). Algunas observaciones sobre filosofía de la práctica matemática. *Disputatio. Philosophical research bulletin. Vol. 5 No.6, dic.2016, pp.131-156.*

Mlodinow, L. (2008). *El andar del borracho.* Barcelona. Crítica.

Nau, F. R. (2001). De Finetti was right: probability does not exist. *Theory and Decision.* 51. 89-124, 2001.

Otero, H.M. (1991). De los fundamentos a la práctica matemática. Razones de un cambio sustancial en filosofía de la matemática. *LULL, Vol.14, 1991, 551-560.*

Phillips, S. and Wilson, H.W. (2010). Categorial compositionality: A category theory explanation for the systematicity of human cognition. *PLos Comput Bio 6(7)*: e 1000858. Doi: 10.1371/journal.pcbi.1000858

Pérez, C.A. Eventos posibles de probabilidad cero. El análisis no estándar y la teoría de la probabilidad. *Investigación y Ciencia.* Abril, 2013.

Pérez, C.A. Dardos y conjuntos infinitos. El problema del continuo a la luz de la teoría de la probabilidad. *Investigación y Ciencia.* Abril, 2014.

Popper, K. (2008). *La lógica de la investigación científica. 2ªed.* Tecnos.

Popper, K. (2011). *Teoría cuántica y el cisma en física. Post Scriptum a la lógica de la investigación científica. Vol. III.* Madrid. Tecnos.

Shafer, G. (1976). *A mathematical theory of evidence.* Princenton. Princeton University Press.

Savage, L.J. (1972). The foundations of statistics. New York. Dover publications.

Shapiro, J.M. (1956). The Foundations of Statistc. *Philosophy of science.* Vol.23, No2 (Apr.1956). P.166

Spivak, I. D. (2014). *Category theory for the sciences.* Cambridge. The MIT press.

Stadler, M. M., (2000). *De la homología a la cohomología: teoremas de dualidad* (primera parte). Curso de doctorado, 2006/2007. Profesora Marta Macho Stadler. Universidad del País Vasco, http://www.ehu.es/~mtvmastm

Suárez, M. (2020). *Philosophy of probability and statistical modelling.* Cambrigne Elements: Philosophy of science. Cambrigne. Cambrigne University Press.

Ramsey, P.F. (2008). *Obra Filosófica Completa.* Granada. Editorial Comares.

Roman, S. (2010). *An introduction to the language of category theory.* Switzerland. Birkhäuser.

Russell, B. (1992). *El conocimiento humano.* Barcelona. Planeta- De Agostini.

Vélez, R.I. et al. (2006). *Métodos Estadísticos en Ciencias Sociales.* Madrid. Ediciones Académicas.

Zalamea, F. (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas.* Bogotá. Universidad Nacional de Colombia.

Bibliografía, archivos y videos en internet.

Apuntes (2018). Apuntes de Teoría de la medida. Badajoz, 22 de enero de 2018. Volumen 2.

http://matematicas.unex.es/~ricarfr/librotmed.pdf

Bernardo, J.M. (1997). Bruno de Finetti en la Estadística Contemporánea.

https://www.uv.es/~bernardo/DeFinetti.pdf

Feymann. Negative Probability.

http://cds.cern.ch/record/154856/files/pre-27827.pdf

Heller, M. (2016). Category Free Category theory and Its Philosophical Implications. *Copernicus center for indisciplinary studies ul. Slawkowska* 17, 32-016 *Cracow, Poland.* February 5, 2016. https://arxiv.org/pdf/1602.01759.pdf

Marquis, Jean-Pierre, "Category Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2021 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2021/entries/category-theory/>.

Salas C.M. y Sanz B.P. *Teoría de la evidencia de dempster-sahafer.*

Sturtz, K. (2012). Quantifiers as Adjoints in probability.

https://arxiv.org/abs/1208.2938

*S*turtz, K. (2015). Categorical Probability theory.

https://arxiv.org/abs/1406.6030

https://www.it.uc3m.es/jvillena/irc/practicas/09-10/12mem.pdf

Zalamea, F. Técnicas de la matemática contemporánea para el desarrollo actual de la filosofía.

Fernando Zalamea. 1. Teoría de las categorías

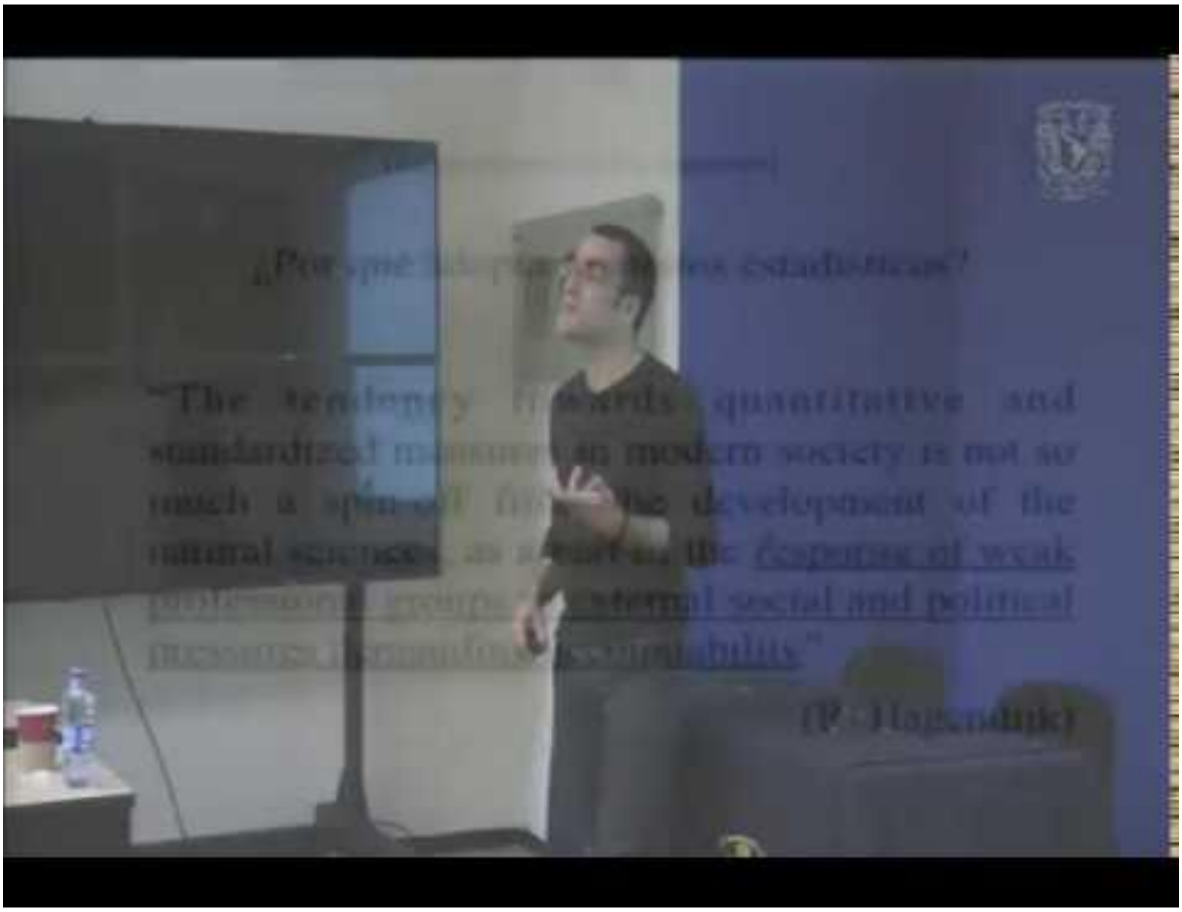
[Fernando Zalamea. 2. Haces y Topos](#)

Zalamea, F. (2019). **Nuevos caminos para la filosofía a partir de la obra matemática de Grothendieck**
https://www.revistaaleph.com.co/index.php/component/k2/item/896-caminos-para-la-filosofia-a-partir-obra-de-grothendieck

Marquis, J.P. (2021), Category Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2021 Edition), Edward N. Zalta ed.) https://plato.stanford.edu./archives/fall2021/entrices/category-theory/

Curso "Ciencia y Ética en los mercados farmacéuticos: Ensayos Clínicos y tráfico de enfermedades" 1

Curso "Ciencia y Ética en los mercados farmacéuticos: Ensayos Clínicos y tráfico de enfermedades" 2


estadísticas?
"The tendency towards quantitative and
standardized in modern society is not so
much a spin-off the development of the
natural sciences, as the response of weak
social and political
(P. Hagendijk)