UNED
Facultad de Ciencias
Máster en Matemáticas Avanzadas
Trabajo de Fin de Máster

Algunos teoremas fundamentales de las topologías débiles

Autor: Diego Antonio Charbonnier Tramuja

Tutor: Prof. Dr. José Leandro de María González

Barcelona, febrero de 2011

Contenidos

Introducción

El presente documento lo entrego como trabajo final en el Máster de Matemáticas Avanzadas de la UNED, correspondiente a la opción Análisis Matemático.

Cuando se da a conocer la oferta de posibles trabajos finales, veo como continuación natural de los cursos de Análisis Funcional y de Operadores en Espacios de Banach el tema propuesto por el Prof. Dr. José Leandro de María.

Comienzo el trabajo con una introducción a los espacios de Banach y la presentación de los teoremas básicos del análisis funcional. A continuación me refiero a la topología de la norma como la topología fuerte, en el sentido de que, para que de toda sucesión acotada pueda extraerse una subsucesión convergente es necesario y suficiente que la dimensión del espacio sea finita. Esta contrariedad origina el estudio de otras topologías que generen más compactos, que evidentemente deberán ser menos finas que la de la norma. Fundamentalmente en este trabajo haré referencia a la topología débil y a la topología débil estrella. Es claro que si la dimensión del espacio es finita, las topología fuerte, la débil y la débil estrella son equivalentes, por lo que en adelante, para que sea de interés consideraré espacios de dimensión infinita

La topología débil se puede definir en cualquier espacio vectorial normado, resultando con esta topología un espacio vectorial localmente convexo y Hausdorff, pero si la dimensión del espacio no es finita, no será metrizable, con lo que en estos casos, la topología fuerte es estrictamente más fina que la topología débil.

La topología débil estrella solo se define para espacios duales, pero sorprendentemente con ella obtenemos el teorema de Alaoglu que nos permite asegurar que la bola unitaria cerrada de dicho espacio es compacta con la topología débil estrella. Otro resultado notable es el teorema de Goldstine, que demuestra que si E es un espacio vectorial normado entonces E es denso en E'' con la topología débil estrella.

Probablemente el teorema de Eberlein-$\breve{S}$mulian sea el centro de este trabajo, ya que nos permite asegurar que un conjunto es débilmente compacto si y solo si es débilmente compacto por sucesiones. En los espacios métricos es conocida la equivalencia entre los conceptos de compacidad y de sucesionalmente compacto, pero lo sorprendente del teorema de Eberlein-$\breve{S}$mulian es que esta equivalencia se hace sabiendo que el espacio en cuestión con la topología débil no es metrizable.

Históricamente el desarollo de estos conceptos comienza a principios del siglo veinte y es Hilbert, según Dieudonné en su "History of functional analysis" el que introduce el concepto de "convergencia débil" en 1906: *For the development of Functional Analysis, the most important concepts introduced by Hilbert were what he calls "continuity" and "complete continuity", which correspond to what will later be called the "strong" and "weak" topologies on Hilbert space.*

De igual manera los trabajos de Šmulian y de Eberlein tienen lugar en períodos donde la noción de compacidad en los espacios topológicos tal cual la utilizamos hoy en día, estaba en desarrollo. En 1940 Šmulian establece que si E es un espacio topológico dotado con la topología débil y A un subconjunto de él, entonces A es relativamente numerablemente compacto si y solo si A es relativamente secuencialmente compacto, luego en 1947, Eberlein prueba la equivalencia entre relativamente compacto y relativamente numerablemente compacto. En este trabajo se comentará directamente la equivalencia entre relativamente compacto y secuencialmente compacto para un subconjunto A de un espacio topológico E munido con la topología débil.

Finalmente como aplicación de los conceptos vistos anteriormente se presentan algunos resultados sobre operadores
débilmente compactos, especialmente la propiedad de factorización a través de espacios reflexivos.

Breve historia del Análisis Funcional Los espacios normados fueron introducidos en la segunda decada del siglo XX. No fué un hecho aislado, porque paralelamente se desarrollaban teorías más generales como eran los espacios vectoriales topológicos y otras más concretas como la de los espacios de Hilbert. Por supuesto unas y otras iban influyendose entre sí, la teoría de espacios de Hilbert fué una inagotable fuente de sugerencias y definiciones que los espacios normados recogieron y ampliaron afinándolas. Lógicamente importantes matemáticos hacían artículos con repercusión en varias teorías a la vez.

Ya desde el origen del Cálculo Infinitesimal se vió la necesidad para el tratamiento de algunos problemas el paso de lo finito a lo infinito. El cálculo en diferencias dio lugar a su paso a lo infinito con el cálculo infinitesimal. A mediados del siglo XVIII las semejanzas entre el Álgebra Lineal y los problemas del Cálculo Diferencial se manifiestan en el estudio de la ecuación de las cuerdas vibrantes. Daniel Bernoulli tiene dos ideas que serán reiterativas en el tratamiento de los problemas funcionales con origen en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

La primera es considerar la oscilación de una cuerda como el limite de la oscilación de n masas puntuales en la cuerda vibrante.

La segunda es que la oscilación general se puede descomponer como la suma

$$\sum a_n \varphi_n(x,t)$$

de las oscilaciones propias $\varphi_n(x,t)$.

Pero lo fundamental es que tanto las ecuaciones diferenciales, como las integrales

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

y

$$J = \int_a^b K(x,y)u(x)dx$$

se empezaron a considerar como operadores definidos en espacios de funciones con valores en espacios de funciones. Muchos de ellos tenían propiedades lineales con lo cual eran una generalización de las trasformaciones lineales.

Bernhard Riemann (1826-1866) en su tesis ya hablaba de colecciones de funciones formando un conjunto conexo y cerrado.

Ascoli y Arzela intentaron extender la teoría de conjuntos de Cantor a conjuntos de funciones que consideraban como puntos. Hadamard en el Primer Congreso Internacional de Matemáticos de 1897 sugirió que se tratasen como conjuntos de puntos ciertas colecciones de curvas a efectos de utilizarlas como dominios de definición de los operadores para utlizar métodos análogos al análisis matemático y del álgebra lineal.

El mayor esfuerzo por construir una teoría abstracta de los espacios de funciones lo hizo Maurice Fréchet (1878-1973) en su tesis doctoral de 1906, en la que introdujo los espacios métricos, asi como los operadores lineales y (esto está relacionado con nuestro trabajo) denominó “extremal” a los conjuntos secuencialmente compactos y “compactos” a los relativamente secuencialmente compactos.

Las métricas en los espacios de funciones que hoy conocemos como norma del supremo y de la integral también se definieron en los trabajos de Fréchet, así como la métrica (denominada de Fréchet) en los espacios de sucesiones. Otros de los logros de este matemático francés fué la definición de continuidad y diferenciabilidad de un funcional, lo que hoy conocemos como derivada de Fréchet.

En 1906 E.H.Moore comenzó a extraer de la teoría de las ecuaciones lineales con un número finito de incognitas la teoría para infinitas incognitas, y a sus estudios los denominó Análisis General con una introducción axiomática.

Los estudios de Hilbert sobre las ecuaciones integrales se basaban en el desarrollo de las funciones por su serie de Fourier, pero Hilbert no asoció los coeficientes de Fourier a puntos de un espacio infinito dimensional. Quien lo hizo fué Schmidt fundamentando desde el caso de dimensión finita al infinito las desigualdades de Bessel y la fórmula de Schwarz. En 1907 tanto Schmidt como Fréchet anunciaron que la geometría del espacio L^2era identica a los espacios de Hilbert. A partir de aquí ya se hace evidente el paralelismo entre los espacios de Hilbert y los espacios de funciones. Hilbert en su espacio axiomatizado se ve en la necesidad de introducir dos tipos de convergencia distintos: los que corresponden a nuestra convergencia débil y fuerte.

Otra aproximación a los espacios abstractos la inició Riesz, aproximadamente en 1918, aunque la definición completa es de Banach que junto con Hahn y Helly trabajaron sabiendo que las normas podrían no tener un producto escalar asociado. La mayor generalidad llevaba a estudiar más espacios pero se perdía la ortogonalidad y por tanto la posibilidad de asegurar la existencia y localización de puntos próximos.

Banach introdujo la definición de operador lineal continuo y estudio la ecuación

$$x + hF(x) = y$$

donde x e y son funciones de un espacio, F un operador lineal continuo y h un escalar. Encontró una solución

$$x = y + \sum(-1)^n h^n F^{(n)}(y)$$

donde $F^{(n)} = F(F^{(n-1)})$,generalizando el método de Volterra de resolución de las ecuacioens integrales.

En 1927 Hahn enunció el Teorema de Hahn y en 1929 Banach independiente lo enunció y demostró el teorema que pasó a llamarse de Hahn-Banach. Entre ambos construyen toda la teoría de dualidad y de operadores y sus traspuestos. Hubo muchas aportaciones de Helly y Minkowski. Steinhaus y Saks se preocupan por las cuestiones de “categoría” lo quedesemboca en el enunciado de los teoremas de Grafico Cerrado y Babach-Steinhaus, dejando construidas las bases que fundamentan la teoría.

Todos estos avances pudieron ser formalizados y estructurados por los avances de la Topología General entre 1930 y 1940, afinados por el uso de J. von Neumann en 1935 de los espacios localmente convexos y de los conjuntos acotados, que consiguieron espectaculares resultados en los trabajos de Mackey.

Una de las aplicaciones más potentes es la Teoría de Distribuciones de Schwartz donde los espacios localemte convexos y sus duales es fundamental en la resolución de ecuaciones funcionales.

Cada teorema siguiente tiene una historia de una investigación detrás y eso superaría los límites de esta pequeña introducción.

1. Espacios de Banach

1.1. Algunas consideraciones previas

Los espacios vectoriales considerados serán siempre sobre el cuerpo de los reales o sobre el cuerpo de los complejos y representaremos por $\mathbb{K}$ a cualquiera de ellos.

Definición Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, diremos que la aplicación $p : E \to \mathbb{R}^+$es una seminorma sobre E si verifica:
$i)$ para todo $x, y \in E$ $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
$ii)$ para todo $x \in E$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$
Si además para todo $x \in E$ con $x \neq 0$ se cumple que $p(x) > 0$ diremos entonces que p es una norma sobre E.

Lema 1.1.1 Si p es una seminorma sobre E y x e y son dos vectores cualesquiera de E, entonces $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$
La demostración surge en forma inmediata utilizando la propiedad $i)$ de la definición de seminorma.

Teorema 1.1.2 Una función $p : E \to \mathbb{R}^+$ es una seminorma en E si y sólo si $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ para todo $x \in E$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y el conjunto $\{x \in E : p(x) \leq 1\}$ es convexo.

Demostración Supongamos que $C_p = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$ sea convexo y sean x e y dos vectores cualesquiera de E consideremos los números a y b tales que $a = p(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ y $b = p(y) + \frac{\varepsilon}{2}$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Consideremos los vectores $x_1 = a^{-1}x$ y $y_1 = b^{-1}y$, se cumple que $p(x_1) < 1$ y $p(y_1) < 1$ entonces

$$z = \frac{a}{a+b}x_1 + \frac{b}{a+b}y_1$$

pertenece a C_p, es decir que $p(z) \leq 1$, pero entonces como puedo escribir $z = (a+b)^{-1}(x+y)$ deducimos que $p(x+y) \leq a+b$. Finalmente obtenemos

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) + \varepsilon$$

y recordando que el ε es arbitrario obtenemos

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

Lema 1.1.3 Si p y q son dos seminormas sobre E y a y b dos números reales positivos tales que $p(x) < a$ implica $q(x) \leq b$, entonces $aq(x) \leq bp(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración Supongamos que el lema es falso, entonces existe un $w \in E$ para el que se cumple

$$aq(w) > bp(w)$$

sea $t > 0$ tal que

$$aq(w) > t > bp(w)$$

el vector $(\frac{ab}{t})w$ cumple que

$$p((\frac{ab}{t})w) = ap(\frac{bw}{t}) < a$$

y también

$$q((\frac{ab}{t})w) = bq(\frac{aw}{t}) > b$$

lo cual es una contradicción.

Teorema 1.1.4 Sea E un espacio vectorial y sea $A \subset E$ un subconjunto absolutamente convexo y absorbente. Entonces existe una única seminorma p tal que $\{x \in E : p(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E : p(x) \leq 1\}$

Demostración La unicidad surge de aplicar el lema 1.1.3 ya que si suponemos que existen dos normas p y q que cumplen

$$\{x \in E : p(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E : p(x) \leq 1\}$$

y

$$\{x \in E : q(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E : q(x) \leq 1\}$$

entonces para todo x tal que $p(x) < 1$ se cumple que $x \in A$ que a su vez significa que $q(x) \leq 1$ con lo que debe ser $q(z) \leq p(z)$ para todo $z \in E$. De igual manera se prueba que $p(z) \leq q(z)$ para todo $z \in E$, lo que finalmente implica que $p = q$.

Para demostrar la última parte, consideremos como seminorma el funcional de Minkowski (o calibrador) del conjunto A

$$p_A(x) = inf\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda A\}$$

Como A es equilibrado, se tiene que para todo $\lambda > 0$ $0 \in \lambda A$, lo que significa que $p_A(0) = 0$. Entonces si $t = 0$ resulta que $p_A(tx) = p_A(0) = 0 = |t|\, p_A(x)$. Si suponemos ahora que $t \neq 0$ entonces $\frac{\lambda}{t}A$ para $\lambda > 0$ coincide con $\frac{\lambda}{|t|}A$ por ser A equilibrado, por consiguiente se tiene que $p_A(tx) = inf\{\lambda > 0 :\ tx \in \lambda A\} = inf\{\lambda > 0 :\ x \in \frac{\lambda}{t}A\} = inf\{\lambda > 0 :\ x \in \frac{\lambda}{|t|}A\} = |t|\, inf\{\frac{\lambda}{|t|} > 0 :\ x \in \frac{\lambda}{|t|}A\} = |t|\, p_A(x)$.

Sean ahora x e y dos vectores cualesquiera de E y consideremos dos números reales positivos λ y μ tales que $x \in \lambda A$ e $y \in \mu A$. Entonces

$$x + y \in \lambda A + \mu A$$

y como A es convexo, se tiene

$$x + y \in (\lambda + \mu)A$$

y por consiguiente

$$p_A(x + y) \leq \lambda + \mu$$

de lo anterior sigue que

$$p_A(x + y) \leq inf\{\lambda > 0 :\ x \in \lambda A\} + inf\{\mu > 0 :\ x \in \mu A\} = p_A(x) + p_A(y)$$

Supongamos ahora que $w \in E$ verifica que $p_A(w) < 1$ entonces existe un real t tal que $0 < t < 1$ para el que vale $w \in tA$ pero como A es equilibrado, resulta que $tA \subset A$, finalmente $z \in A$, luego vale

$$\{x \in E :\ p(x) < 1\} \subset A$$

Para probar la otra implicación, consideremos $y \in A$, de acuerdo a la definición de p_A se tiene que $p_A(y) \leq 1$ y por tanto

$$A \subset \{x \in E :\ p(x) \leq 1\}$$

Sea E un E.V.T.

Definición 1 Un subconjunto A de E se dice completo si y sólo si todo filtro de Cauchy en A converge a un punto x de A.

Definición 2 Diremos que $A \subset M$ es secuencialmente completo si y sólo si cada sucesión de Cauchy en A converge a un límite en A.

Evidentemente si $A \subset E$ es completo, entonces es secuencialmente completo, pero la proposición recíproca es en general falsa. Existe sin embargo una importante clase de E.V.T., los llamados espacios metrizables para los que sí vale el recíproco.

Definición 3 Un E.V.T. E se dice metrizable si su topología puede definirse por una distancia.

Teorema 1.1.5 Sea E un E.V.T.metrizable y sea A un subconjunto secuencialemente completo de E, entonces A es completo.

Demostración Como E es metrizable, existe una base numerable de entornos del origen de E, sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicha base. Debemos probar que cualquier filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en A, converge en A. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n \in \mathcal{F}$ tal que $M_n - M_n \subset U_n$. Para cada n considero el conjunto $M_1 \bigcap M_2 \bigcap M_3 \ldots \bigcap M_n$ que no es vacío porque los $M_i \in \mathcal{F}$, por lo que puedo elegir para cada $n \in \mathbb{N}$ un x_n en dicho conjunto. Es obvio que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y entonces converge a un punto x de A. Debemos probar entonces que el filtro $\mathcal{F}$ converge a x. Dado U_n, existe U_k tal que $M_k + M_k \subset U_n$, sea entonces $h \in \mathbb{N}$ con $h \geq k$ de forma que $x_h \in U_k + x$. Como $x_h \in M_k$, vale

$$M_k - M_k \subset U_k \text{ entonces } M_k - x_k \subset U_k \text{ con lo que } M_k \subset x_{h+}U_k$$

finalmente

$$M_k \subset x + U_k + U_k \subset x + U_n$$

Definición 4 Un E.V.T. se dice de Banach si es normado y completo.

Es decir que si $(E, \|.\|)$ es un E.V.T. normado, para probar que es un espacio de Banach, debería probar que es completo, pero como todo espacio normado es metrizable y teniendo en cuenta el teorema 1.1.5, es suficiente con probar que es secuencialmente completo.

Ejemplo 1 Sea E un E.V.T. normado y de dimensión finita. Sabemos que todo E.V.T. Hausdorff de dimensión finita es completo y como E es normado,entonces es Hausdorff. Es decir que si E es un E.V.T. normado y de dimensión finita entonces es un espacio de Banach.

Comentario De acuerdo al Teorema de Riesz, estos son los únicos espacios de Banach localmente compactos.

Ejemplo 2 Sea E el espacio de las funciones continuas en un compacto K, al que notaremos por $C(K)$. Dotemos a $C(K)$ con la norma del supremo

$$\text{para todo } f \in C(K), \; \|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

Consideremos en $C(K)$ la sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se cumple que para cada $x \in K$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ lo que significa que tiene límite, al que llamaré $f(x)$. De lo anterior se deduce que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una cierta función f en K. Probemos entonces que la convergencia es uniforme.

Como para todo $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}, \; m, n \geq N(\varepsilon)$

$$\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces

$$\sup |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada $x \in K$ elijo $r_x \geq N(\varepsilon)$ de forma que $|f_n(x) - f_{r_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces para cada $n \geq N(\varepsilon)$ y para cada $x \in K$ se tiene que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{r_x}(x)| + |f_{r_x}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

entonces

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N(\varepsilon)$$

lo que finalmente significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ de forma que para todo $n \in \mathbb{N}, \; n \geq N(\varepsilon)$

$$|f - f_n| \leq \varepsilon$$

o sea que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f , lo que implica la continuidad de f , entonces $f \in C(K)$ con lo que $C(K)$ es sucesionalmente completo lo que hace de $C(K)$ un espacio de Banach.

Ejemplo 3 Sea E el espacio ℓ_p con $1 \leq p < +\infty$. Sea $x^n = (x_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy con la norma $\|x\|_p = (\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p}$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geq N(\varepsilon)$ se tiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left|x_m^n - x_m^k\right|^p < \varepsilon^p \qquad (1)$$

de lo anterior se deduce que para todo $n, k \geq N(\varepsilon)$ se cumple $\left|x_m^n - x_m^k\right| < \varepsilon$ lo que significa que cada sucesión $(x_m^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y como $\mathbb{C}$ es completo, existe $\underset{n\to+\infty}{lím} x_m^n$ al que llamaremos x_m. Parece entonces natural considerar como candidato a $lím\, x^n$ la sucesión $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Utilizando la expresión (1) obtenemos para cada $q \in \mathbb{N}$ y para n y k suficientemente grandes

$$\sum_{m=1}^{q} \left|x_m^n - x_m^k\right|^p < \varepsilon^p$$

hagamos tender k a infinito con lo que $\sum_{m=1}^{q} |x_m^n - x_m|^p < \varepsilon^p$ y ahora haciendo que $q \to +\infty$ obtenemos que $\sum_{m=1}^{\infty} |x_m^n - x_m|^p < \varepsilon^p$ lo que significa que a partir de un n conveniente se cumple

$$\|x^n - x\|_p < \varepsilon^p$$

entonces $x^n \to x$.

Finalmente queda por probar que $x \in \ell_p$. Sabemos que para todo $q \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{m=1}^{q} |x_m|^p = \underset{n\to+\infty}{lím} \sum_{m=1}^{q} |x_m^n|^p \leq sup \, \|x^n\|_p^p < M < +\infty$$

con lo que $x \in \ell_p$ y finalmente se tiene que ℓ_p con $1 \leq p < +\infty$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 4 Sea E el espacio ℓ_∞ consideremos como en el ejemplo anterior una sucesión de Cauchy en ℓ_∞, dotado con la norma $\|x\| = sup\{|x_i|\,, \ i \in \mathbb{N}\}$. Sea $x^n = (x_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ dicha sucesión, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geq N(\varepsilon)$ se tiene

$$\left\|x^n - x^k\right\|_\infty = \underset{m\in\mathbb{N}}{sup} \left|x_m^n - x_m^k\right| < \varepsilon$$

lo que significa que para cada m natural vale $\left|x_m^n - x_m^k\right| < \varepsilon$ para todo $n, k \geq N(\varepsilon)$, entonces $(x_m^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$, entonces converge. Sea $x_m$su límite, definamos $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y probemos que $x \in \ell_\infty$. Como para cada m natural vale

$$|x_m| \leq |x_m - x_m^n| + |x_m^n| \leq 1 + \|x^n\|_\infty$$

y como x^n es de Cauchy, está acotada, por lo que existe $M < +\infty$ tal que $\|x^n\|_\infty < M$, entonces $|x_m| < M + 1 < +\infty$, lo que significa que $x \in \ell_\infty$.

Probemos ahora que $x^n \to x$. Sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n, k \in \mathbb{N},\ \ n, k \geq N(\varepsilon)\ \ \left\|x^n - x^k\right\|_\infty < \varepsilon$ entonces $\left|x_m^n - x_m^k\right| < \varepsilon$ para todo $m \in \mathbb{N}$, hagamos ahora tender k a más infinito con lo que obtenemos para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $n \geq N(\varepsilon)$

$$|x_m^n - x_m| < \varepsilon$$

lo que en definitiva significa que $\|x^n - x\|_\infty \to 0$.

Comentario Como un subconjunto cerrado de un E.V.T. completo es completo, entonces si probamos que los subespacios c y c_0 son cerrados en ℓ_∞ entonces c y $c_0$son también espacios de Banach.

Ejemplo 5 Sea E un espacio de Banach dotado con una norma p, y sea M un subespacio vectorial cerrado de E, consideremos el espacio cociente E/M y la aplicación canónica $\varphi : E \to E/M$ de forma que $\varphi(x) = [x]$; definamos $\|.\|' : E/M \to \mathbb{R}$ de manera

$$\|[x]\|' = \underset{\varphi(x)=[x]}{inf} \{p(x)\} = dist(x, M)$$

Probemos que $\|.\|'$ es una norma:

$i)$ de acuerdo a la definición $\|[x]\|' \geq 0$ para todo $[x] \in E/M$.

$ii)$ como p es una norma, vale que $p(kx) = |k|\, p(x)$ para todo $k \in \mathbb{K}$, $x \in E$, entonces $\|k\,[x]\|' = \|[kx]\|' = inf\{p(kx + m) : m \in M\}$. Supongamos primero que $k \neq 0$, entonces $inf\{p(kx + m) : m \in M\} = inf\{p(k(x + \frac{m}{k})) : m \in M\} = |k|\, inf\{p(x + m) : m \in M\} = |k|\, \|[x]\|'$ para todo $k \in \mathbb{K}, [x] \in E/M$. Si $k = 0$ el resultado es evidente.

$iii)$ Dados ahora $[x]$ y $[y]$, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces de acuerdo con la definición existien x e $y \in E$ para los que vale que $p(x) \leq \|[x]\|' + \varepsilon$ y que

$p(y) \leq \|[y]\|' + \varepsilon$ y entonces

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \leq \|[x]\|' + \|[y]\|' + 2\varepsilon$$

y como el ε es arbitrario, se tiene que

$$\|[x] + [y]\|' = inf\{p(x+y)\} \leq \|[x]\|' + \|[y]\|'$$

iv) si $[x] = 0$ entonces $x \in M = \overline{M}$, con lo que $\|[x]\|' = 0$ y si $\|[x]\|' = dist(x, M) = 0$ se tiene que $x \in M = \overline{M}$.

Probemos ahora que E/M es completo. De lo visto arriba, deducimos que E/M es metrizable, entonces por el teorema 1.1.5, alcanza con probar que toda sucesión de Cauchy es convergente. Sea $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E/M, entonces existe una subsucesión $([x_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$ para la que

$$\left\| \left[x_{n_{k+1}}\right] - [x_{n_k}] \right\|' < \frac{1}{2^{k+1}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ es decir que

$$\left\| \left[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right] \right\|' < \frac{1}{2^{k+1}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ con lo que existirá $y_{n_{k+1}} \in \left[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right]$ de forma que

$$\left\| y_{n_{k+1}} \right\| < \left\| \left[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right] \right\|' + \varepsilon$$

lo que implica

$$\left\| y_{n_{k+1}} \right\| < \frac{1}{2^k}$$

Probemos que a partir de lo anterior es posible construir inductivamente una sucesión de representantes que sea de Cauchy. Elijamos $z_1 \in [x_{n_1}]$ en forma arbitraria y sean $z_r = x_{n_1} + \sum_{\nu=2}^{r} y_\nu \in [x_{n_r}]$ para todo $r \geq 2$ con lo que $(z_r)_{r\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E por tanto debe converger a un $z \in E$. Como φ es continua y $(z_r)_{r\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $([x_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$, que por hipótesis es de Cauchy, entonces $([x_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$ debe converger a $[z]$ con lo que finalmente $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge en E/M. De lo anterior resulta que si E es completo y M es cerrado, entonces $(E/M, \|.\|')$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 6 Probemos ahora que si E un E.V.T. normado,entonces E' dual de E es un espacio de Banach. Supongo que E' está dotado con la norma $\|.\|$ definida como

$$\|x'\| = \underset{x\in E}{ínf}\{C \in \mathbb{R}^+ : |x'(x)| \leq C\,\|x\|\}$$

Al igual que en los ejemplos anteriores probemos que E' es secuencialmente completo. Sea $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E' , entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq N(\varepsilon)$

$$\|x'_n - x'_m\| < \varepsilon$$

pero como $x'_n - x'_m \in E'$ entonces vale para todo $x \in E$ y para todo $n, m \geq N(\varepsilon)$

$$|x'_n(x) - x'_m(x)| \leq \|x'_n - x'_m\|\,\|x\| < \varepsilon\,\|x\|$$

lo que significa que la sucesión $(x'_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ y como $\mathbb{C}$ es completo, esta sucesión converge a algún número complejo al que representaremos por $x'(x)$.

Lo anterior define una función $x' : E \to \mathbb{C}$. Probaremos primero que dicha función es lineal y luego que también es continua. Como x'_n converge puntualmente a x', es posible -dado $x \in E$ y para un $\varepsilon > 0$ arbitrario- encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que valga $\left|x'_{n_1}(x) - x'(x)\right| < \varepsilon/3$. De igual manera dado $y \in E$ es posible encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que $\left|x'_{n_2}(y) - x'(y)\right| < \varepsilon/3$. Finalmente sea $n_3 \in \mathbb{N}$ para el que se cumple $\left|x'_{n_3}(x+y) - x'(x+y)\right| < \varepsilon/3$. Tomemos ahora $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = máx\{n_1, n_2, n_3\}$, entonces $|x'(x+y) - x'(x) - x'(y)| =$

$$|x'(x+y) - x'_n(x+y) + x'_n(x+y) - x'(x) - x'(y)| \leq$$

$$|x'(x+y) - x'_n(x+y)| + |x'_n(x) - x'(x)| + |x'_n(y) - x'(y)| < \varepsilon$$

y como el ε es arbitrario, concluimos que $x'(x+y) = x'(x) + x'(y)$; con un argumento similar se prueba que $x'(\lambda x) = |\lambda|\,x'(x)$ para todo $x \in E$ y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Probemos ahora que x'es continua. Elijamos un natural $N(1)$ suficientemente grande tal que se cumpla que para todo $n \geq N(1)$, $\left\|x'_n - x'_{N(1)}\right\| < 1$ lo que implica para todo $x \in E$, $\left|x'_n(x) - x'_{N(1)}(x)\right| < \|x\|$. Sean ahora

$\varepsilon > 0$ y x arbitrarios, sabemos que existe un natural $n \geq N(1)$ para el que vale $|x'_n(x) - x'(x)| < \varepsilon$, entonces

$$|x'(x)| < |x'_n(x)| + \varepsilon < \left|x'_{N(1)}(x)\right| + \|x\| + \varepsilon \leq (\left\|x'_{N(1)}\right\| + 1)\,\|x\| + \varepsilon$$

y como el ε es arbitrario concluimos

$$|x'(x)| \leq (\left\|x'_{N(1)}\right\| + 1)\,\|x\|$$

lo que implica la continuidad de x'.

Compleción

Teorema 1.1.6 Sea $(E, \|.\|)$ un E.V.T. normado,entonces existe $\widehat{E}$, E.V.T. normado y completo y una aplicación lineal $r : E \to \widehat{E}$ de forma tal que se cumplen:

i) $\|r(x)\|_{\widehat{E}} = \|x\|_E$ para todo x de E (r es una isometría).

ii) la imagen de E por r es densa en $\widehat{E}$ ($\overline{r(E)} = \widehat{E}$).

Demostración Sea $\mathcal{P}$ el espacio vectorial de las sucesiones de Cauchy en $E : \mathcal{P} = \{\overline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } x_n \in E,\ (x_n) \text{ de Cauchy}\}$.

Dotemos a $\mathcal{P}$ de una seminorma p definida de la siguiente manera: $p(\overline{x}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|$. Sea $N = \{\overline{x} : p(\overline{x}) = 0\}$, es decir que N es el subespacio de la sucesiones que convergen a 0. Como N es cerrado entonces p define una norma $\widehat{p}$ sobre el espacio cociente $\widehat{E} = \mathcal{P}/N$ que resulta tener la misma expresión que la norma p

$$\widehat{p}([\overline{x}]) = \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|$$

para cualquier representante $\overline{x}$ de su clase de equivalencia $[\overline{x}] = \overline{x} + N \in \mathcal{P}/N$. Entonces la aplicación lineal r la definimos como

$$r : E \to \widehat{E} \text{ de forma que } r(x) = [\overline{x}]$$

donde $\overline{x}$ es la sucesión constante $\overline{x} = (x, x, \ldots, x, \ldots)$ que por supuesto es de Cauchy y además $p([\overline{x}]) = \|x\|$.

Probemos ahora que $r(E)$ es denso en $\widehat{E}$. Sea $\overline{x} = (x_n) \in \mathcal{P}$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N(\varepsilon)$. Definamos $\overline{x}_n = (x_n, x_n, \ldots x_n, \ldots)$ como una sucesión constante, es decir que $r(x_n) = [\overline{x}_n]$. Deducimos entonces que para todo $n \geq N(\varepsilon)$ se cumple que

$$p([\overline{x}] - [\overline{x}_n]) = p(\overline{x} - \overline{x}_n) \leq \varepsilon$$

Para probar que $\widehat{E}$ es un espacio completo consideremos en él la sucesión de Cauchy $\left(\left[\overline{x}^{(n)}\right]\right)$. Sabemos que

$$p\left(\left[\overline{x}^{(n)}\right] - \left[\overline{x}^{(m)}\right]\right) = p\left(\overline{x}^{(n)} - \overline{x}^{(m)}\right) \to 0$$

para $n, m \to +\infty$. Tomemos una sucesión de reales $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tienda a cero y $x_n \in E$ tal que $p\left(\overline{x}^{(n)} - r(x_n)\right) < \varepsilon_n$ cosa que siempre podemos hacer porque acabamos de demostrar que $r(E)$ es denso en $\widehat{E}$. Entonces $\overline{x}^0 = (x_n)$ es una sucesión de Cauchy en E porque

$$\|x_n - x_m\| = p(r(x_n) - r(x_m)) \leq p(r(x_n) - \overline{x}^{(n)}) + p(\overline{x}^{(n)} - \overline{x}^{(m)}) + p(\overline{x}^{(m)} - r(x_m))$$

que tiende a cero para $n, m \to +\infty$. Entonces $\overline{x}^0 = (x_n)$ es un elemento de $\mathcal{P}$ y además se cumple que $[\overline{x}^0] = lím \left[\overline{x}^{(n)}\right]$, porque

$$p\left(\left[\overline{x}^{(0)}\right] - \left[\overline{x}^{(n)}\right]\right) = p\left(\overline{x}^{(n)} - \overline{x}^{(0)}\right) \leq p\left(\overline{x}^{(n)} - r(x_n)\right) + p\left(r(x_n) - \overline{x}^{(0)}\right)$$

que tiende a cero cuando $n \to +\infty$.

Comentario El Teorema que sigue nos permite asegurar que *en cierto sentido* el espacio compleción $\widehat{E}$ de E es único.

Teorema 1.1.7 Sean E, X_1 y X_2, E.V.T. normados y de forma queX_1 y X_2 son completos. Además sea $T_i : E \to X_i$ una isometría sobre un subespacio denso en X_i para $i = 1, 2$. Entonces la isometría natural $T_2 \circ T_1^{-1} : T_1 E \to T_2 E$ puede extenderse a una isometría entre X_1 y X_2.

Demostración Para cada $y \in X_1$ consideremos la sucesión $x_n \in E$ tal que $T_1 x_n \to y$, esto es siempre posible porque $T_1 E$ es denso en X_1. Consideremos la sucesión $T_2 x_n \in X_2$, que es una sucesión de Cauchy en X_2 porque

$$\|T_2 x_n - T_2 x_m\| = \|x_n - x_m\| = \|T_1 x_n - T_1 x_m\|$$

Definamos ahora el operador $T : X_1 \to X_2$ de forma que $Ty = z$ siendo $z = lím T_2 x_n$. Veamos que el operador está bien definido porque si w_n es otra sucesión en E tal que $T_1 w_n \to y$ entonces $T_2 w_n \to z$ ya que

$$\|T_2(w_n - x_n)\| = \|w_n - x_n\| = \|T_1 w_n - T_1 x_n\|$$

y $\|T_1(w_n - x_n)\|$ converge a cero porque $\|T_1(w_n - x_n)\| \leq \|T_1 w_n - y\| + \|y - T_1 x_n\|$.

Finalmente mostremos que $Im(T) = X_2$. Por la continuidad de la norma podemos escribir

$$\|y\| = l\acute{\imath}m\, \|T_1 x_n\| = l\acute{\imath}m\, \|T_2 x_n\| = \|Ty\|$$

entonces si consideramos un $z \in X_2$ podemos encontrar una sucesión $x_n \in E$ de forma tal que $l\acute{\imath}m T_2 x_n = z$ y considerar el elemento $y \in X_1$ que cumple $y = l\acute{\imath}m T_1 x_n$. Obviamente $Ty = z$.

2. Teoremas fundamentales

2.1. Teorema de Hahn - Banach

El teorema de Hahn-Banach nos permite asegurar que cualquier funcional definida en un subespacio de un E.V.T. y dominada por una seminorma, puede extenderse a un funcional lineal definido en todo el E.V.T. y que continúe dominada por la seminorma. Veamos primero el teorema para el caso real y luego para el caso complejo.

En la demostración utilizaremos el conocido Lema de Zorn que enunciaré a continuación:

Lema de Zorn Todo conjunto no vacío, ordenado e inductivo admite un elemento maximal.

Teorema 2.1.1 (Hahn-Banach caso real) Sea E un E.V.T. real y $p : E \to \mathbb{R}$ una seminorma. Sea M un subespacio vectorial de E. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal para el que se cumple que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$, entonces f puede extenderse a $F \in E'$ de forma que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in M$ y para el que $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración Consideremos el conjunto $P = \{g : g \in (D(g)')$ para algún subespacio $D(g)$ de E, con $D(g) \supset M,\ g|M = f,\ |g(x)| \leqslant p(x)$ para todo $x \in D(g)\}$

Podemos asegurar que P no es vacío porque $f \in P$. Hagamos de P un conjunto parcialmente ordenado definiendo un orden de la siguiente manera: dados g_1 y g_2 diremos que $g_2 \succeq g_1$ cuando g_2 sea una extensión de g_1, es decir

$$(g_2 \succeq g_1) \longleftrightarrow (D(g_2) \supset D(g_1) \text{ y } g_2 \text{ extiende a } g_1)$$

Por otra parte P es inductivo: sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado que lo representaremos por $Q = (g_i)_{i \in I}$. Definamos

$$D(g) = \bigcup_{i \in I} D(g_i) \text{ y } g(x) = g_i(x) \text{ si } x \in D(g_i)$$

Se comprueba que g está bien definida, que $g \in P$ y que es una cota superior de Q. Aplicando el lema de Zorn podemos asegurar que existe un elemento maximal en P, al que llamaremos F. Para probar el teorema deberíamos probar que $D(F) = E$. De no ser así, debería ser $D(F) \neq E$ con lo que existiría un $y \in E - D(F)$. Definamos $D(F_1) = D(F) + [y]$ y $F_1 \in D(F_1)'$ por $F_1(x + ty) = F(x) + t\alpha$ $(t \in \mathbb{R})$ de forma tal que determinaremos la constante α para que se cumpla que $F_1 \in P$ con lo que llegaríamos a una contradicción. Entonces se debería cumplir

$$F(x) + t\alpha \leq p(x + ty) \quad \text{para todo } x \in D(F), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

que evidentemente se verifica para $t = 0$; si $t > 0$, como p es una seminorma y F es lineal y $D(F)$ es un subespacio vectorial , probar lo anterior es equivalente a probar

$$F(\frac{x}{t}) + \alpha \leq p(\frac{x}{t} + y) \quad \text{para todo } x \in D(F)$$

y en el caso $t < 0$

$$F(\frac{x}{t}) - \alpha \leq p(\frac{x}{t} - y) \quad \text{para todo } x \in D(F)$$

Resumiendo se debería cumplir

$$\begin{cases} F(z) + \alpha \leq p(z + y) & \text{para todo } z \in D(F) \\ F(z) - \alpha \leq p(z - y) & \text{para todo } z \in D(F) \end{cases}$$

está claro entonces que debemos elegir α de forma tal que cumpla

$$\underset{z \in D(F)}{sup} \{F(z) - p(z - y)\} \leq \alpha \leq \underset{z \in D(F)}{inf} \{p(z + y) - F(z)\}$$

Lo anterior es posible porque se cumple

$$F(x) + F(z) \leq p(x + z) \leq p(x) + p(z) \quad \text{para todo } x, z \in E$$

entonces

$$F(z) - p(z - y) \leq p(x + y) - F(x)$$

para todo $x \in D(F)$, para todo $z \in D(F)$.

Concluimos finalmente que F está mayorada por $F_1 \in P$ y que $F \neq F_1$ lo que contradice el hecho de que F era maximal. Entonces debe ser $D(F) = E$.

Teorema 2.1.2 (Hahn-Banach caso complejo)

Sea E un E.V.T. complejo y $p: E \to \mathbb{R}$ una seminorma. Sea M un subespacio vectorial de E. Si $f: M \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal para el que se cumple que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$, entonces f puede extenderse a $F \in E'$ de forma que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in M$ y para el que $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Previamente veamos el siguiente Lema.

Lema 2.1.3 Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Supongamos que $F = f + ig$ es un funcional lineal en E. Entonces para todo $x \in E$, $F(x) = f(x) - if(ix)$ y $f: E \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{R} -$ lineal. Recíprocamente, si $f: E \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$-lineal, entonces $F(x) = f(x) - if(ix)$ es un funcional $\mathbb{C}$-lineal en E.

Demostración del Lema Resulta evidente que f y g son funcionales $\mathbb{R}$-lineales. Por otro lado $F(ix) = iF(x)$ implica que $f(ix) + ig(ix) = if(x) - g(x)$ con lo que $f(ix) = -g(x)$ y entonces $F(x) = f(x) - if(ix)$. Recíprocamente vemos que $F(ix) = f(ix) - if(i^2x) = f(ix) + if(x) = i(-if(ix) + f(x)) = iF(x)$.

Demostración del Teorema 2.1.2 Supongamos que E es un espacio vectorial complejo. Sea $g = \mathcal{R}f$ la parte real de f, entonces considerando a E como un espacio vectorial real, g es un funcional lineal, con lo que se obtiene

$$|g(x)| \leq |f(x)| \leq p(x) \text{ para todo } x \in M$$

Por el teorema 2.1.1 existe un funcional lineal real G en E que extiende a g para el que se cumple $|G(x)| \leq p(x)$. Sea $F(x) = G(x) - iG(ix)$, entonces $F \in E'$ y extiende G y además se cumple, si escribimos $F(x) = |F(x)| e^{i\theta}$ que

$$|F(x)| = e^{-i\theta} F(x) = F(e^{-i\theta} x) = \mathcal{R}F(e^{-i\theta} x) = G(e^{-i\theta} x) \leq p(e^{-i\theta} x) = p(x)$$

con lo que finalmente queda probado el teorema.

Veamos ahora las formas geométricas del teorema de Hahn - Banach, especialmente útiles en la separación de convexos. Utilizaremos sin demostrarlos el lema 2.1.3 y el teorema 2.1.4

Lema 2.1.3 Sea E un E.V.T. , $C \subset E$ un abierto, convexo y no vacío y $x_0 \notin C$.Entonces existe $x' \in E'$ tal que $\langle x', x\rangle < \langle x', x_0\rangle$ para todo $x \in C$. Es decir que el hiperplano de ecuación $\langle x', x\rangle = \langle x', x_0\rangle$separa $\{x_0\}$ de C en sentido amplio.

Teorema 2.1.4 (primera forma geométrica del Teorema de Hahn - Banach) Sea E un E.V.T. y sean A y B dos subconjuntos de E no vacíos, convexos y disjuntos. Si A es abierto, entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en sentido amplio.

Teorema 2.1.5 (segunda forma geométrica del Teorema de Hahn - Banach) Sea E un E.V.T. localmente convexo y sean A y B dos subconjuntos de E no vacíos, convexos y disjuntos. Si A es compacto y B es cerrado, entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en sentido estricto.

Demostración Como B es cerrado y $A \subset E - B$, entonces para cada $a \in A$ existe U_a, entorno del origen de E de manera que $(a + U_a) \bigcap B = \emptyset$ sea entonces V_a entorno del origen de E tal que $V_a + V_a \subset U_a$ y consideremos el recubrimiento $\bigcup_{a \in A}(a + V_a)$ de A. Como A es compacto, sean $a_1, a_2, \ldots\, a_p$puntos de A de manera que $A \subset \bigcup_{i=1}^{i=p}(a_i + V_{a_i})$ y definamos $V = \bigcap_{i=1}^{i=p} V_{a_i}$. Entonces si $x \in (A + V)$, debe existir un i tal que $x \in a_i + V_{a_i} + V \subset a_i + V_{a_i} + V_{a_i} \subset a_i + U_{a_i} \subset E - B$, entonces $(A+V) \bigcap B = \emptyset$ y como $(A+V)$ es un abierto, convexo y disjunto de B, por el teorema anterior existe $x' \in E'$ diferente de la idénticamente nula, para la que vale

$$\langle x', a\rangle + \langle x', v\rangle \leq \langle x', b\rangle \quad \text{para} \quad \text{todo} \;\; a \in A,\, b \in B \text{ y } v \in V$$

entonces existe $v \in V$ para el que $\langle x', v\rangle > 0$, con lo que vale la tesis.

2.2. Aplicaciones del teorema de Hahn-Banach

Corolario 2.2.1 Sea E un E.V.T. normado y sea M un subespacio vectorial de E. Si $y' \in M'$, entonces existe $x' \in E'$ tal que x' extiende y' y

$$\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{|\langle x', x\rangle| : x \in E\} = \|y'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{|\langle y', x\rangle| : x \in M\}$$

es decir que la norma de la extensión es igual a la norma del funcional lineal original.

Demostración Definamos una seminorma p en E de la siguiente manera $p(x) = \|x\| \|y'\|$. Entonces $|\langle y', x\rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe un funcional lineal x' que extiende y', de forma que $|\langle x', x\rangle| \leq p(x) = \|x\| \|y'\|$ para todo $x \in E$ lo que significa que $\|x'\| \leq \|y'\|$. Pero como obviamente $\|y'\| \leq \|x'\|$, entonces vale la igualdad.

Corolario 2.2.2 Sea E un E.V.T. normado y $x_0 \in E$, entonces existe $x' \in E'$ tal que $\|x'\| = 1$ tal que $\langle x', x_0\rangle = \|x_0\|$.

Demostración Si $x_0 = 0$, el teorema estaría probado. En cualquier otro caso definimos un funcional lineal y' en el subespacio generado por x_0 : $span(x_0) = \{\lambda x_0,\ \lambda \in K\}$ por $\langle y', \lambda x_0\rangle = \lambda \|x_0\|$, con lo que podemos escribir que para todo $x \in span(x_0)$ se tiene $|\langle y', x\rangle| = \|x\|$, por el teorema de Hahn-Banach podemos extender y' a todo el espacio E, de manera que su extensión x' verifique $|\langle x', z\rangle| \leq \|z\|$ para todo $z \in E$. Este último resultado implica que $\|x'\| \leq 1$ y como $|\langle x', x_0\rangle| = \|x_0\|$ debe ser $\|x'\| = 1$.

Corolario 2.2.3 Sea E un espacio de Banach y $M \subset E$ un subespacio cerrado de E. Si $x_0 \notin M$, entonces existe $f \in E'$ tal que $\|f\| = 1$, $f(x) = 0$ para todo $x \in M$ y $f(x_0) = dist(x_0, M)$.

Demostración Pongamos $d = dist(x_0, M)$ y sea Z el subespacio de E generado por $M \bigcup \{x_0\}$y definamos sobre Z el funcional lineal g de manera que $g(x + tx_0) = t.d$ para todo $x \in M$ y $t \in \mathbb{K}$. Se tiene entonces que $g|_M = 0$ y $g(x_0) = d$. Consideremos ahora $u = x + tx_0$ con $x \in M$ y t un escalara distinto de cero, entonces podemos escribir

$$|g(u)| = |t|\, d = \frac{|t|\, \|u\|\, d}{\|u\|} = \frac{|t|\, \|u\|\, d}{\|x + tx_0\|} =$$

$$\frac{\|u\|\, d}{\left\|x_0 - (\frac{x}{t})\right\|} \leq \frac{\|u\|\, d}{d} = \|u\|$$

lo que significa que $g \in Z'$ y que $\|g\| \leq 1$.

Por otra parte, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $\|x_n - x_0\| \to d$ y si escribimos $d = |g(x_n) - g(x_0)| \leq \|g\| \|x_n - x_0\|$ y pasamos al límite cuando $n \to +\infty$ obtenemos que $d \leq \|g\|\, d$ de lo que se sigue que $\|g\| = 1$. Por el corolario 2.2.1 sea f la extensión de g en E con la misma norma.

Corolario 2.2.4 Sea F un subespacio de E, si $\overline{F} \neq E$ entonces existe $f \in E'$ diferente de la idénticamente nula, para la que vale que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$.

Demostración Sea $x_0 \in E$, tal que $x_0 \notin \overline{F}$, utilizando el corolario anterior, existe $f \in E'$, tal que $\|f\| = 1$ lo que implica que f no es la idénticamente nula (además $f(x_0) = dist(x_0, \overline{F}) \neq 0$) y de forma que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$.

Los siguientes teoremas son fundamentales como herramientas básicas en la teoría de espacios normados. Se han hecho generalizaciones en E.V.T. estudiando las propiedades que tiene que tener el espacio para que se cumplan. Así aparecen los espacios tonelados, bornologicos, etc...

2.3. Teorema de la aplicación abierta

Veamos primeramente algunos resultados que serán de utilidad en los teoremas que siguen.

En contexto absolutamente topológico a principios del siglo XX surge la necesidad de medir "el tamaño" de ciertos conjuntos, y hay intentos como los que exponemos brevemente a continuación y otros que formalizan la teoría de la medida de forma paralela. Matemáticos como Baire, Borel, Lebesgue, entre otros se involucran en este proyecto que dio a lugar a varias lineas de investigación y a descubrimientos como la teoría de la integral.

Definición Sea E un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset E$ se dice denso en ninguna parte si su clausura tiene interior vacío.

Teorema 2.3.1 Sea E un espacio topológico, si $A \subset E$ es denso en ninguna parte, entonces para cada abierto $B \subset E$ existe un abierto $B_1 \subset B$ de forma tal que $B_1 \bigcap A = \emptyset$.

Demostración Como B es abierto entonces $B - \overline{A} \neq \emptyset$ porque de lo contrario $B \subset \overline{A}$ y $\overline{A}$ contendría puntos interiores. El conjunto $B - \overline{A}$ es abierto, por lo que existe un abierto $B_1 \subset B - \overline{A}$ y de aquí se sigue que $B_1 \bigcap A = \emptyset$.

Definición Un subconjunto $A \subset E$ se dice de primera categoría si A es unión contable de subconjuntos densos en ninguna parte. Un subconjunto $D \subset E$ es de segunda categoría si no es de primera categoría. Se dice que un espacio topológico E es de Baire si cada abierto no vacío de E es de segunda categoría.

Lema 2.3.2 Sea E un espacio métrico completo y A un abierto no vacío de él. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de abiertos de E de forma que para todo $n \in \mathbb{N}$ $A_n \subset A$ *y* A_n densos en A. Entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso en A.

Demostración Como se trata de probar que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso en A, consi - deremos un abierto cualquiera W de E incluido en A y tratemos de probar que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \bigcap W \neq \emptyset$. Sea d la distancia definida en E y llamemos $B_0(x,r)$ a la bola abierta centrada en x y de radio r, es decir $B_0(x,r) = \{y \in E : \ d(x,y) < r\}$. Entonces es claro que $\overline{B_0}(x,r) \subset B(x,r) = \{y \in E : \ d(x,y) \leq r\}$.

Como A_1 es denso en A, entonces $A_1 \bigcap W$ es un abierto no vacío, con lo que existen $x_1 \in A$ y $0 < r_1 < 1$ tales que $\overline{B_0}(x_1, r_1) \subset A_1 \bigcap W$. Supongamos que hemos construido dos sucesiones $x_1, \ldots, x_n$ en A y $r_1, \ldots, r_n$ con $0 < r_k < \frac{1}{k}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ de manera que

$$\overline{B_0}(x_k, r_k) \subset A_k \bigcap \overline{B_0}(x_{k-1}, r_{k-1}) \ \text{ para todo } \ k = 2, \ldots, n$$

Entonces $A_{n+1} \bigcap B_0(x_n, r_n)$ es un abierto no vacío ya que A_{n+1} es denso y entonces contiene a una bola $\overline{B_0}(x_{n+1}, r_{n+1})$ cuyo radio r_{n+1} puede elegirse menor que $\frac{1}{n+1}$.

Ahora es evidente que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, ya que si $i, j > n \geq 1$, como tanto x_i como x_j pertenecen a la bola $\overline{B_0}(x_n, r_n)$ que a su vez está incluida en $\overline{B_0}(x_n, \frac{1}{n})$, vale entonces que $d(x_i, x_j) \leq \frac{2}{n}$. Pero como E es completo, la sucesión debe converger a un punto x, pero entonces como $\{(x_k)_{k\geq n}\} \subset \overline{B_0}(x_n, r_n)$, x debe pertenecer a $\overline{B_0}(x_n, r_n)$ para todo n con lo que x pertenece a todos los A_n y también a W.

De lo anterior obtenemos una propiedad general de los espacios métricos completos y en concreto de los espacios de Banach.

Teorema 2.3.3 Si E es un espacio métrico completo, entonces E es de Baire.

Demostración Supongamos que el teorema es falso, entonces sea $A \subset E$ un abierto no vacío que es de primera categoría, por lo que es posible encontrar una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos densos en ninguna parte de E de manera que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Sea $\overline{B}_n$ la clausura de cada B_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Como por hipótesis $\overset{\circ}{\overline{B}_n} = \emptyset$, si $D_n = (\overline{B}_n)^c$ entonces $D_n \bigcap A = A_n$ es un abierto de E denso en A porque si $z \in A$ y $z \in D_n$ entonces $z \in A_n$ lo que significa que $z \in \overset{\circ}{A}_n$, en el caso en el que $z \in A$ y $z \notin D_n$ entonces $z \in \overline{B}_n$ pero como $\overset{\circ}{\overline{B}_n} = \emptyset$, para todo entorno del origen U de E se cumple que $(z + U) \not\subset \overline{B}_n$ lo que significa que $(z+U) \bigcap (\overline{B}_n)^c \neq \emptyset$ o sea $(z+U) \bigcap D_n \neq \emptyset$ y finalmente $z \in \overline{A}_n$ con lo que $\overline{A}_n \supset A$.

Por otro lado como

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

se cumple que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

lo que contradice el lema anterior.

Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T : E \to F$ un operador lineal continuo y sobreyectivo, entonces T es abierto.

Teorema 2.3.4 (de la aplicación abierta) Sean E y F dos espacios de Banach y T un operador lineal continuo y sobreyectivo, $T : E \to F$. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que

$$T(B_E) \supset cB_F$$

Observación: Lo anterior implica que T transforma abiertos de E en abiertos de F, porque si suponemos que U es un abierto de E, sea $y_0 \in T(U)$ con lo que entonces existe $x_0 \in U$ tal que $T(x_0) = y_0$. Como U es abierto, existe $r > 0$ tal que $x_0 + rB_E \subset U$ entonces se tiene que

$$y_0 + rT(B_E) \subset T(U)$$

entonces del Teorema de la aplicación abierta se deduce

$$rT(B_E) \supset rcB_F$$

entonces

$$y_0 + rcB_F \subset T(U)$$

con lo que $T(U)$ es un abierto de F.

Lema previo 2.3.5 Sea $T : E \to F$ un operador lineal y sobreyectivo, entonces existe una constante $c > 0$ tal que, $\overline{T(B)} \supset 2cB$.

Demostración del lema Sea $X_n = n\overline{T(B)}$, como T es sobreyectivo $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = F$, entonces por el lema de Baire existe n_0 tal que $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$. De lo anterior resulta que $\overset{\circ}{\overline{T(B)}} \neq \emptyset$. Sean $c > 0$ e $y_0 \in F$ tales que

$$B(y_0, 4c) \subset \overset{\circ}{\overline{T(B)}} \qquad (1)$$

En particular $y_0 \in \overset{\circ}{\overline{T(B)}}$, y por simetría se tiene $-y_0 \in \overset{\circ}{\overline{T(B)}}$. Sumando (1) con esta última expresión resulta $B(0, 4c) \subset \overline{T(B)} + \overline{T(B)}$. Finalmente como $\overline{T(B)}$ es convexo, se tiene $\overline{T(B)} + \overline{T(B)} = 2\overline{T(B)}$ con lo que queda demostrado el lema.

Demostración del teorema de la aplicación abierta Sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo que verifica

$$\overline{T(B)} \supset 2cB \quad (2)$$

para algún $c > 0$, probaré que entonces

$$T(B) \supset cB$$

con lo que habré probado que T es abierto.

Sea $y \in F$ fijo, con $\|y\| < c$. Para probarlo, hallaremos $x \in E$ tal que

$$\|x\| < 1 \text{ y } Tx = y$$

de (2) se sabe que

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } z \in E \ con \ \|z\| < \frac{1}{2} \ y \ \|y - Tz\| < \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = \frac{c}{2}$ se obtiene $z_1 \in E$ con $\|z_1\| < \frac{1}{2}$ y $\|y - Tz_1\| < \frac{c}{2}$. Aplicando el mismo procedimiento con $y - Tz_1$(en lugar de y) y con $\varepsilon = \frac{c}{4}$, se obtiene un $z_2 \in E$ tal que $\|z_2\| < \frac{1}{4}$ y $\|(y - Tz_1) - Tz_2\| < \frac{c}{4}$. Continuando este razonamiento se construye por inducción una sucesión (z_n) tal que $\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ y $\|(y - T(z_1 + z_2 + \ldots + z_n\| < \frac{c}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *con* $x_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ es de Cauchy, entonces $x_n \to x$ con $\|x\| < 1$ e $y = Tx$ ya que T es continuo.

Corolario 2.3.6 (Teorema de la aplicación inversa) Sean E y F dos espacios de Banach y $T : E \to F$ un operador lineal continuo y biyectivo. Entonces T^{-1}es continuo.

Demostración Del teorema de la aplicación abierta se deduce que si $x \in E$ y es tal que $\|T(x)\| < c$, entonces se verifica que $\|x\| < 1$, por tanto utilizando el lema 1.1.3 se tiene que

$$\|x\| \leq \frac{1}{c} \|T(x)\|$$

para todo $x \in E$ lo que significa que T^{-1} es continua.

Corolario 2.3.7 Sea G un espacio de Banach con cada una de las dos normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$. Supongamos además que existe una constante $k \geq 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq k \|x\|_1 \text{ para todo } x \in G$$

Entonces existe una constante $c > 0$ para la que

$$\|x\|_1 \leq c \|x\|_2 \text{ para todo } x \in G$$

o sea que las dos normas son equivalentes.

Demostración Llamemos $E = (G, \|.\|_1)$ y $F = (G, \|.\|_2)$ y sea T la identidad, entonces utilizando el Corolario anterior se obtiene el resultado indicado.

Comentario Una anécdota es que muchos de los conjuntos con los que tratamos de forma habitual en Análisis Matemático son muy "pequeños" topológicamente.

Desde que Newton introdujo la diferenciabilidad en el siglo XVIII hasta finales del siglo XIX los matemáticos pensaban que el que una función no fuese derivable era extraño o anecdótico, a pesar de que Bolzano en 1834 había dado un ejemplo de una función real que no era diferenciable en ningún punto. Fué considerado como una peculiaridad. En 1931 Banach probó que el conjunto de las funciones que tenían derivada en algún punto era un conjunto de primera categoría en las funciones continuas, o sea que era un conjunto muy pequeño dentro del espacio$C\,[0,1]$.

2.4. Teorema del gráfico cerrado

Teorema 2.4.1 (gráfico cerrado) Sean E y F espacios de Banach. Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Supongamos que la gráfica de T, $G(T)$, es cerrada en $E \times F$. Entonces T es continuo.

Comentario Naturalmente el recíproco es verdadero ya que toda aplicación continua (lineal o no) tiene gráfica cerrada.

Demostración Consideremos en E dos normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ definidas de la siguiente manera

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F \quad y \quad \|x\|_2 = \|x\|_E$$

Como $E \times F$ es completo y $G(T) \subset E \times F$ es cerrado, entonces $(E, \|.\|_1)$ es un espacio de Banach, porque si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(E, \|.\|_1)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_1 = \|x_n - x_m\|_E + \|Tx_n - Tx_m\|_F < \varepsilon \text{ para todo } n, m \geq N(\varepsilon)$$

de lo anterior se deduce que $\|x_n - x_m\|_E < \varepsilon$ y $\|Tx_n - Tx_m\|_F < \varepsilon$ y como E y F son completos, debe existir $x \in E$ e $y \in F$ para los que $x_n \to x$ e

$Tx_n \to y$. Como G(T) es cerrado se deduce que $y = T(x)$ y entonces

$$\|x_n - x\|_1 = \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - Tx\| < \varepsilon$$

para n suficientemente grande. Finalmente como $(E, \|.\|_1)$ y $(E, \|.\|_2)$ son espacios de Banach y como obviamente $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, en consecuencia utilizando el corolario 2.3.7 podemos asegurar que estas dos normas son equivalentes, por lo que existe un $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2$ con lo que finalmente se obtiene $\|Tx\|_F \leq c\,\|x\|_E$ lo que implica la continuidad de T.

2.5. Teorema de la acotación uniforme.

Este teorema es esencial para el adecuado desarrollo de las topología débiles, que tienen buenas propiedades gracias al resultado conocido como teorema de Banach-Steinhaus o teorema de Acotación Uniforme, fué probado por Hahn (1922), Banach (1922), Hildebrant (1923) y Banach y Steinhaus (1927).

Teorema 2.5.1 Sean E y F dos espacios de Banach, y una familia de operadores lineales y continuos $\Im = \{T_i : \ T_i \in L(E,F), \text{ con } i \in I\}$, si para cada $x \in E$ el conjunto $\{\|T_i x\|\,;\, i \in I\}$ es acotado, entonces el conjunto $\{\|T_i\|\,;\, i \in I\}$ es también acotado.

Dicho de otro modo, existe una constante c tal que $\|T_i x\| \leq c\,\|x\|$ para todo $x \in E$ y para todo $i \in I$.

Demostración Para cada entero $n \geq 1$ sea $X_n = \{x{\in}E\text{: para todo } i \in I,\ \|T_i x\| \leq n\}$ de forma que X_n es cerrado y se tiene

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E$$

resulta del lema de Baire que existe $n_0 \geq 1$ de forma que $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$. Sean $x_0 \in E$ y $r > 0$ tales que $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$. Se tiene entonces

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0 \text{ para todo } i \in I, \text{ para todo } z \in B_E$$

de lo anterior resulta

$$r\,\|T_i\|_{L(E,F)} \leq n_0 + \|T_i x_0\|$$

con lo que se demuestra el teorema.

Corolario 2.5.2 Sea G un espacio de Banach y sea A un subconjunto de G. Supongamos que para todo $x' \in G'$ el conjunto $x'(A) = \{\langle x', a\rangle\,,\ \ a \in A\}$ es acotado en $\mathbb{R}$. Entonces A es acotado.

Demostración Apliquemos el teorema anterior llamando $E = G'$, $F = \mathbb{R}$ e $I = A$. Entonces para cada $a \in A$ ponemos

$$T_a(x') = \langle x', a\rangle \quad x' \in E = G'$$

de forma que como $\{\langle x', a\rangle\,,\ \ a \in A\}$ es acotado, se cumple que

$$\{|T_a(x')| : a \in A\}$$

es acotado para todo$x' \in E$ entonces por el teorema anterior, existe una constante c para la que

$$|\langle x', a\rangle| \leq c\,\|x'\|$$

para todo $x' \in G'$ y para todo $a \in A$ lo que significa que

$$\|a\| \leq c \ \text{ para } \ \text{todo } \ a \in A$$

3. Topologías débiles

La topología de la norma en E tiene una gran cantidad de abiertos y eso es una ventaja porque supone que hay una gran cantidad de funciones continuas definidas en el espacio. Pero como contrapartida tiene, lógicamente pocos compactos, de hecho la bola cerrada unidad no es compacta salvo que el espacio sea de dimensión finita. Por tanto el teroema de Heine-Borel no es aplicable a las funciones reales continuas definidas en el espacio E.

Si dotamos a E de una topología más débil entonces conseguiríamos más compactos pero perderíamos funciones continuas, pero si las funciones perdidas no fuesen muy importantes y permaneciesen continuas, por ejemplo los funcionales reales dado que muchas de las propiedades en el caso finito se obtienen a través del dual, podríamos asegurar muchos de los resultados para el caso infinito.

Por tanto el esquema que vamos a seguir es el siguiente:

1. En E de Banach definiremos la topología inicial para los funcionales reales continuos de E con la norma. Esto nos asegura que al menos los funcionales lineales continuos para la norma son continuos para esta topología, que denominamos débil $\sigma(E, E')$.

2. Estudiar que relación mantienen ambas topologías, indudablemente la de la norma debería de tener más cerrados que la débil. En el caso de dimensión finita son iguales y en el de infinita la de la norma es estrictamente más fina. Pero los cerrados convexos son los mismos, entre otros los subespacios vectoriales cerrados.

3. Los espacios duales E' del espacio E con la norma y la débil coinciden y le llamamos E'.

4. En E' podemos definir una topología fuerte, de la norma y otra a través de E, que denominamos $\sigma(E', E)$ o *-débil, además de la débil $\sigma(E', E'')$ propiamente dicha obtenida como anteriormente se ha expuesto ya queE' es normado.

5. En E'' repetimos el proceso, que en principio es indefinido.

6. Estudiamos las propiedades de los conjuntos en las topologías que van surgiendo.

Los resultados son espectaculares con lo cual la teoría de dualidad se ha convertido en la herramienta básica de los espacios normados.

3.1. Topología débil $\sigma(E,E')$

Definición: Sea E un espacio de Banach. La topología débil en E se define como la topología menos fina de E que hace continuas todas las aplicaciones $x' \in E'$. Es decir que se trata de la topología engendrada por la familia $\Lambda = \{x'^{-1}(U),\ x' \in E' \text{ y } U \text{ abierto de } \mathbb{K}\}$, que no es otra que la formada por uniones cualesquiera de intersecciones finitas de elementos de Λ. En otras palabras, los abiertos de esta topología se obtienen al considerar

$$\bigcup_{\text{arbitr}} \bigcap_{\text{finit}} (x')^{-1}(U)$$

donde U es un abierto de $\mathbb{K}$ y $x' \in E'$. La notaremos por $\sigma(E,E')$.

Teorema 3.1.1 Sea $x_0 \in E$, los conjuntos de la forma

$$V = \{x \in E :\ |\langle x'_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ \text{ para } \ \text{todo } \ i \in I\}$$

con I finito y $\varepsilon > 0$ constituyen una base de entornos de x_0 para la topología $\sigma(E,E')$.

Demostración Los conjuntos $U_{i,\varepsilon} = (\langle x'_i, x_0\rangle - \varepsilon, \langle x'_i, x_0\rangle + \varepsilon)$ son evidentemente abiertos de $\mathbb{R}$ y por tanto $\bigcap_{i\in I}(x'_i)^{-1}(U_{i,\varepsilon})$ es un abierto para la topología $\sigma(E,E')$, pero como $V = \bigcap_{i\in I}(x'_i)^{-1}(U_{i,\varepsilon})$ resulta que los V son abiertos para la topología $\sigma(E,E')$.

Recíprocamente sea B un entorno de x_0 en $\sigma(E,E')$, entonces existe un entorno W de x_0, $W \subset B$ de la forma $W = \bigcap_{i\in I}(x'_i)^{-1}(U_i)$ con I finito y U_i entornos en $\mathbb{R}$ de $\langle x'_i, x_0\rangle$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\langle x'_i, x_0\rangle - \varepsilon, \langle x'_i, x_0\rangle + \varepsilon) \subset U_i$ para todo $i \in I$, por consiguiente $x_0 \in V \subset W \subset B$.

Notación Escribiremos $V_{\varepsilon; x'_1,\ldots,x'_n}(x_0) = \{x \in E :\ |\langle x'_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ \ i = 1,2,\ldots,n\}$.

Observación A pesar de que la topología débil es menos fina que la topología de la norma, produce los mismos funcionales lineales continuos. Para verlo supongamos que E es un espacio normado y que f es un funcional lineal continuo para la topología $\sigma(E,E')$, entonces $U = \{x \in E : |\langle f, x\rangle| <$

$1\}$ es un entorno de 0 para la topología débil, se sigue entonces que U contiene un entorno de la forma $V_{\varepsilon;x'_1,\dots,x'_n}(0)$, como evidentemente se cumple

$$\bigcap_{i=1}^{i=n} Ker(x'_i) \subset V_{\varepsilon;x'_1,\dots,x'_n}(0)$$

y como f es lineal entonces si $z \in \bigcap_{i=1}^{i=n} Ker(x'_i)$ entonces $z \in U$, lo que se traduce en que $|\langle f, z\rangle| < 1$ de donde $|\langle f, \lambda z\rangle| < 1$ con λ tan grande como se quiera, entonces $\langle f, z\rangle = 0$.

De lo anterior se deduce entonces que

$$\bigcap_{i=1}^{i=n} Ker(x'_i) \subset Ker(f)$$

lo que nos permite asegurar[1] que f es combinación lineal de los $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ o sea que $f \in E'$.

El siguiente teorema, aunque no explica la convergencia en toda su generalidad, pues exigiría el uso de redes, es fundamental en la teoría de distribuciones de Schwartz, y nos da el método operativo de las topologías débiles para las aplicaciones a las ecuaciones de la Física. Los espacios de distribuciones son duales de espacios LF, que se han estudiado en el curso de master de espacios vectoriales topológicos, pero por las características de estos espacios se reducen a la aplicación de un teorema de este tipo.

Teorema 3.1.2 Sea E un E.V.T. y (x_n) una sucesión en E. Entonces se cumple que

i) $\left(x_n \underset{\sigma(E,E')}{\rightarrow} x\right) \leftrightarrow (\langle x', x_n\rangle \rightarrow \langle x', x\rangle \;\text{ para todo }\; x' \in E')$

ii) Si $\left(x_n \underset{\sigma(E,E')}{\rightarrow} x\right)$ entonces $(\|x_n\|)$ está acotada y $\|x\| \leq lím\,inf\; \|x_n\|$

iii) Si $\left(x_n \underset{\sigma(E,E')}{\rightarrow} x\right)$ y si $x'_n \underset{\|\cdot\|_{E'}}{\rightarrow} x'$ entonces $\langle x'_n, x_n\rangle \rightarrow \langle x', x\rangle$

Demostración *i)* Si $\left(x_n \underset{\sigma(E,E')}{\rightarrow} x\right) \rightarrow (\langle x', x_n\rangle \rightarrow \langle x', x\rangle \;\text{ para todo }\; x' \in E')$ porque por la definición de $\sigma(E, E')$ todos los funcionales lineales x' son

[1] se puede ver una demostración de esta afirmación en J. B. Conway (A.1.4, pág. 375)

continuos. Recíprocamente si dado $V_{\varepsilon,x'_1,x'_2,\ldots x'_p}(x)$ para cada $x'_i \in E'$ con $i = 1, 2, \ldots p$ se cumple que $\langle x'_i, x_n\rangle \to \langle x'_i, x\rangle$ lo que significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $N_i(\varepsilon)$ tal que para todo $n \geq N_i(\varepsilon)$

$$|\langle x'_i, x_n - x\rangle| < \varepsilon$$

tomemos ahora $N(\varepsilon) = máx\{N_i(\varepsilon)\}$, entonces para todo $n \geq N(\varepsilon)$, $x_n \in V_{\varepsilon,x'_1,x'_2,\ldots x'_p}(x)$ lo que significa que $x_n \underset{\sigma(E,E')}{\to} x$.

$ii)$ Si utilizamos el corolario 2.5.2 del teorema de la acotación uniforme, bastaría con probar que para todo$x' \in E'$ el conjunto $\{\langle x', x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotado. Por la parte $i)$ la sucesión $\langle x', x_n\rangle \to \langle x', x\rangle$por tanto está acotada, con lo que entonces $\{x_x\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotado en E lo que significa que $(\|x_n\|)$ está acotada en E.

Sea ahora $x' \in E'$ entonces

$$|\langle x', x_n\rangle| \leq \|x'\|\,\|x_n\|$$

y pasando al límite

$$|\langle x', x\rangle| \leq \|x'\|\, lím\, inf\ \|x_n\|$$

finalmente

$$\|x\| = \sup_{\|x'\|\leq 1} |\langle x', x\rangle| \leq lím\, inf\ \|x_n\|$$

$iii)$ Podemos escribir

$$|\langle x'_n, x_n\rangle - \langle x', x\rangle| \leq |\langle x'_n - x', x_n\rangle| + |\langle x', x_n - x\rangle| \leq$$

$$\|x'_n - x'\|\,\|x_n\| + |\langle x', x_n - x\rangle|$$

y el resultado sigue de aplicar $i)$ y $ii)$.

Teorema 3.1.3 Sea E de dimensión finita, entonces la topología débil y la topología de la norma coinciden.

Demostración Evidentemente la topología débil es menos fina que la topología usual. Deberíamos probar entonces que todo abierto en la topología fuerte (de la norma) es abierto en la topología débil. Consideremos entonces un vector x_0 de E y sea U un entorno de x_0 en la topología fuerte, debemos construir un entorno V de x_0 en la topología $\sigma(E,E')$ de forma que $V \subset U$. Eso es equivalente a hallar un subconjunto finito $\{x'_1,\ldots,x'_p\}$ de E' y un $\varepsilon > 0$ de forma que

$$V_{\varepsilon;x'_1,\ldots,x'_p}(x_0) = \{x \in E : \ |\langle x'_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ \ i = 1,2,\ldots,p\} \subset U$$

Supongamos que $B(x_0,r) = \{x \in E : \ \|x - x_0\| < r\} \subset U$, como E es de dimensión finita, puedo elegir una base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ con $\|e_i\| = 1, \ \forall i = 1,\ldots,n$. Entonces dado $x \in E$ se tiene $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ entonces los n funcionales lineales e'_i de forma que $\langle e'_i, x\rangle = x_i$ son continuos en E por tratarse de la proyección de x sobre cada vector de la base, con lo que $e'_i \in E' \ \ i = 1,\ldots n$. Se tiene entonces

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle e'_i, x - x_0\rangle| < n\varepsilon$$

para todo $x \in V$. Elijamos entonces los $x'_i = e'_i$ y $\varepsilon = \frac{r}{n}$ para obtener finalmente que $V \subset U$

El siguiente teorema, aplicación del teorema de separación de Hahn-Banach nos facilita muchos resultados soslayando el uso de redes. Además nos proporciona el anunciado resultado de la coincidencia de los cerrados convexos en ambas topologías, y también la equivalencia entre la continuidad débil y en norma de los operadores lineales.

Teorema 3.1.4 Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado E, en el que están definidas dos topologías localmente convexas τ_1 y τ_2. Si $(E,\tau_1)' = (E,\tau_2)'$ entonces A es cerrado para la topología τ_1 si y solo si es cerrado para la topología τ_2.

Demostración Supongamos que A es cerrado para la topología τ_1y sea $x_0 \notin A$, entonces si consideramos el compacto $\{x_0\}$, por el teorema 2.1.5

existe un funcional lineal x' continuo para la topología τ_1 y $\varepsilon > 0$ de forma que

$$\langle x', x_0 \rangle > \langle x', y \rangle + \varepsilon \text{ para todo } y \in A$$

Entonces $\varepsilon < |\langle x', x_0 \rangle - \langle x', y \rangle|$ para todo $y \in A$ y como por hipótesis x' es continua en (E, τ_2), entonces $U = \{z \in E : |x', z| < \varepsilon\}$ es un entorno del origen para la topología τ_2. De lo anterior se deduce que $(x_0 + U) \bigcap A = \emptyset$, lo que significa que A es cerrado para la topologia τ_2. Repitiendo el razonamiento anterior, cambiando τ_1 por τ_2 y τ_2 por τ_1 queda demostrado el teorema.

Corolario 3.1.5 Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado E, entonces la clausura de A en la topología de la norma coincide con la clausura de A en la topología débil.

Demostación De acuerdo a la observación hecha al principio, la topología débil produce los mismos funcionales lineales continuos que la topología fuerte, entonces el corolario se demuestra por aplicación directa del teorema 3.1.4.

Corolario 3.1.6 Si (x_n)es una sucesión en el espacio de Banach E, para la cual se cumple $x_n \underset{\sigma(E,E')}{\rightarrow} 0$, entonces existe una sucesión (y_n) formada por combinaciones convexas de los términos de (x_n) de manera que $\text{lím} \|y_n\| = 0$.

Demostración Sea $K = \langle x_n \rangle$ la envoltura convexa de $\{x_n\}$, con lo que estamos en la hipótesis del Teorema anterior. Como $0 \in \overline{K}^{\sigma(E,E')}$ entonces $0 \in \overline{K}^{\|\cdot\|}$con lo que se cumple $\text{lím} \|y_n\| = 0$.

Corolario 3.1.7 Si F es un subespacio vectorial del espacio de Banach E, entonces $\overline{F}^{\sigma(E,E')} = \overline{F}^{\|\cdot\|}$.

Demostración Es inmediato porque F es convexo.

Corolario 3.1.8 Si K es un subconjunto convexo de un espacio de Banach E, entonces K es fuertemente cerrado si y solo si es débilmente cerrado.

Demostración Como la topología débil es menos fina que la de la norma, si K es cerrado para la topología débil, entonces lo es también para la topología fuerte. Supongamos ahora que K es cerrado para la topología de la norma, entonces

$$K = \overline{K}^{\|\cdot\|} = \overline{K}^{\sigma(E,E')}$$

entonces $K = \overline{K}^{\sigma(E,E')}$ lo que significa que K es cerrado para la topología débil.

Lema 3.1.9 Supongamos que E es de dimensión infinita y sea $\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\} \in E'$, entonces es posible determinar un $y_0 \in E$, con $y_0 \neq 0$ de forma que $\langle x'_i, y_0\rangle = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración Si un tal y_0 no existiese la aplicación $\psi : E \to \mathbb{R}^n$ definida como $\psi(z) = (\langle x'_i, z\rangle)_{1\leq i\leq n}$ sería inyectiva y ψ sería un isomorfismo de E sobre $\psi(E)$, lo que significaría que la $dim\, E \leq n$ lo que es una contradicción.

Comentario Si E es de dimensión infinita, entonces la topología $\sigma(E, E')$ es estrictamente menos fina que la topología inducida por la norma. Para probarlo, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo Sea $S = \{x \in E : \ \|x\| = 1\}$, probemos que

$$\overline{S}^{\sigma(E,E')} = \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\}$$

con lo que S no es cerrado en la topología débil. Tomemos $x_0 \in E$ con $\|x_0\| < 1$, comprobemos que $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(E,E')}$. Dado un entorno V de x_0 en $\sigma(E, E')$, probemos que entonces $V \bigcap S \neq \emptyset$. Sea

$$V_{\varepsilon;x'_1,\ldots,x'_n}(x_0) = \{x \in E : \ |\langle x'_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

con $\varepsilon > 0$ y $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \in E'$

Fijemos $y_0 \in E$, $y_0 \neq 0$ tal que

$$\langle x'_i, y_0\rangle = 0 \ \text{ para } \ \text{todo } \ i = 1, 2, \ldots, n$$

La función $g(t) = \|x_0 + ty_0\|$ es continua en $[0, +\infty)$ con

$$g(0) < 1 \quad y \quad \lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$$

con lo que existe $t_0 > 0$ tal que $\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$. Por consiguiente $x_0 + t_0 y_0 \in V \bigcap S$, entonces

$$S \subset \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\} \subset \overline{S}^{\sigma(E,E')}$$

y como $\{x \in E : \ \|x\| \leq 1\}$ es cerrado en $\sigma(E, E')$ por serlo en la topología fuerte (corolario 3.1.8), queda probado que S no es cerrado.

Lema 3.1.10 Sean E y F espacios de Banach y sea una aplicación $\varphi : E \to F$. Entonces φ es continua para la topología $\sigma(F, F')$ si y solo si para todo $y' \in F'$, $y' \circ \varphi$ es continua en E.

Demostración Si φ es continua de E en $(F, \sigma(F, F')$ como por definición todo $y' \in F'$es continuo para $(F, \sigma(F, F')$, entonces por composición para todo $y' \in F'$, $y' \circ \varphi$ es continua en E. Recíprocamente supongamos que $y' \circ \varphi$ es continua en E para todo $y' \in F'$, entonces debo probar que φ es continua de E en $(F, \sigma(F, F')$, o lo que es equivalente, probar que $\varphi^{-1}(U)$ es un abierto de E para todo abierto U de $\sigma(F, F')$, pero como sabemos que U es de la forma

$$U = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} (y'_i)^{-1}(W_i)$$

dónde cada I_j es finito, $y'_i \in F'$ y W_i es un abierto de $\mathbb{R}$. Se tiene entonces

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} (y'_i \circ \varphi)^{-1}(W_i)$$

que evidentemente es un abierto porque cada $y'_i \circ \varphi$ es continua.

Teorema 3.1.11 Sean E y F dos espacios de Banach y T una aplicación lineal de E en F. Entonces T es continua de $(E, \|.\|)$ en $(F, \|.\|)$ si y solo si es continua de $(E, \sigma(E, E'))$ en $(F, \sigma(F, F'))$.

Demostración Supongamos primero que T es continua de $(E, \|.\|)$ en $(F, \|.\|)$. Para todo $y' \in F'$ se tiene que $y' \circ T \in E'$ con lo que es continua para la topología $\sigma(E, E')$. Utilizando el lema anterior obtenemos que T es continua de $(E, \sigma(E, E'))$ en $(F, \sigma(F, F'))$.

Recíprocamente, supongamos que T es continua de $(E, \sigma(E, E'))$ en $(F, \sigma(F, F'))$ entonces $T(B_E)$ es débilmente acotado en F. Consideremos ahora a $T(B_E)$ como un subconjunto de F'' es decir trabajemos con $J(T(B_E))$, entonces para todo $y' \in F'$ tendremos que $J(T(B_E))(y')$ es acotado para cada $x \in B_E$ y entonces por el teorema de la acotación uniforme, tendremos que $J(T(B_E))$ es un subconjunto de F'' acotado en norma. Finalmente como $T(B_E) \subset F$ y la inyección $J : F \to F''$ es una isometría resulta que $T(B_E)$ está acotado en norma en F, lo que significa que T es continua de $(E, \|.\|)$ en $(F, \|.\|)$. Introducimos ahora una topología en el dual aún menor que la

débil, que denominamos débil estrella $\sigma(E', E)$ que se justifica en el Teorema de Alaoglu-Bourbaki que asegura que en ella la bola cerrada en el dual es compacta. Además el dual de$(E', \sigma(E', E))$ es precisamente E.

3.2. Topología débil $\star\sigma(E', E)$

Sea E un espacio de Banach y sea E' su dual, dotado con la norma

$$\|x'\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \{|\langle x', x\rangle|\}$$

y sea E'' su bidual, es decir el dual de E' dotado con la norma

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\| \leq 1}} \{|\langle \xi, x'\rangle|\}$$

Definición Podemos definir una inyección canónica $J : E \to E''$ definida de la siguiente manera: a cada x de E le asignamos el funcional $J(x)$ de E'' definido por

$$J(x) : E' \to \mathbb{K}$$

de forma que asigna a cada x' el elemento $\langle J(x), x'\rangle = \langle x', x\rangle$ para cada $x \in E$ y para cada $x' \in E'$.

De la definición se deduce que J es lineal y que es una isometría. En efecto

$$\|J(x)\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} \{|\langle J(x), x'\rangle|\} = \sup_{\|x'\| \leq 1} \{|\langle x', x\rangle|\} = \|x\|$$

Puede ocurrir que J no sea sobreyectiva, en el caso en el que si lo sea, diremos que E es reflexivo. Con la ayuda de J podemos identificar E con un subespacio de E''.

Con lo visto hasta el momento podemos identificar sobre E' dos topologías:

$i)$ la topología fuerte, inducida por la norma de E'

$ii)$la topología débil $\sigma(E', E'')$

Definamos ahora una tercer topología en E': la topología débil $\star$ que la representaremos por $\sigma(E', E)$.

Definición Para cada $x \in E$ consideremos la aplicación $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ definida por $x' \to \varphi_x(x') = \langle x', x\rangle$. La topología débil $\star$ es la topología menos fina sobre E' que hace continuas a todas las aplicaciones $(\varphi_x)_{x\in E}$. Como $E \subset E''$, resulta claro que la topología $\sigma(E', E)$ es menos fina que la topología $\sigma(E', E'')$. Presentando entonces las tres topologías vistas para E' diríamos que $\sigma(E', E)$ es menos fina que $\sigma(E', E'')$ que a su vez es menos fina que la topología fuerte.

Teorema 3.2.1 Sea $x'_0 \in E'$. La familia de conjuntos de la forma

$$V = \{x' \in E' : \ |\langle x' - x'_0, x_i\rangle| < \varepsilon \text{ para todo } i \in I\}$$

con I finito y $\varepsilon > 0$ constituyen una base de entornos de x'_0 para la topología $\sigma(E', E)$.

En forma similar a lo hecho en la topología débil, la notación que utilizaremos será $V_{\varepsilon;x_1,\ldots,x_n}(x'_0) = \{x' \in E' : \ |\langle x' - x'_0, x\rangle| < \varepsilon \ \ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración Similar a la del Teorema 3.1.1

Teorema 3.2.2 (Alaoglu) Sea E un espacio normado, entonces el conjunto $B_{E'} = \{x' \in E' : \ \|x'\| \leq 1\}$ es compacto en la topología débil $\star$ $\sigma(E', E)$.

Demostración Observemos primero que la bola unitaria $B_{E'}$ no es un entorno del origen en $\sigma(E', E)$, porque de serlo existiría un entorno $V_{\varepsilon;x_1,x_2,\ldots,x_n}(0)$ con los $x_i \in B_E$ y con $\varepsilon < 1$, tal que $x' \in V_{\varepsilon;x_1,x_2,\ldots,x_n}(0) \subset B_{E'}$ como los x_i son finitos, existe $z \in B_E$ de forma tal que $z \neq x_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y para el que $|x'(z)| > 1 + \varepsilon$, entonces $\|x'\| > 1$ con lo que $x' \notin B_{E'}$, se concluye pues que$B_{E'}$ no es un entorno del origen para la topología $\sigma(E', E)$.

Identifiquemos ahora E' con un subconjunto del producto $\mathbb{K}^E$ asociando a cada $x' \in E'$el conjunto de sus imágenes $\{x'(x) : \; x \in E\}$. Podemos identificar la topología $\sigma(E', E)$ con la topología producto en $\mathbb{K}^E$, es decir que la bola unitaria de E' será un subconjunto del producto

$$I = \prod_{x \in E} \{\lambda \in \mathbb{K} : \; |\lambda| \leq \|x\|\}$$

que es un producto de compactos y por tanto por el Teorema de Tychonoff es compacto. Debemos probar ahora que $B_{E'}$ es cerrada en$I$.

Para x, $y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, consideremos las funciones $\varphi_{x,y}(\xi) = \xi(x)+\xi(y)-\xi(x+y)$ y $\psi_{x,\lambda}(\xi) = \xi(\lambda x)-\lambda\xi(x)$ con $\xi \in \mathbb{K}^E$. Estas funciones son continuas en $\mathbb{K}^E$, ya que $\pi_z : \mathbb{K}^E \to \mathbb{K}$ de forma que $\pi_z(\xi) = \xi(z)$ es continua en $\mathbb{K}^E$ por tratarse de una proyección y puede escribirse $\varphi_{x,y}(\xi) = \pi_x(\xi)+\pi_y(\xi)-\pi_{x+y}(\xi)$ y $\psi_{x,\lambda}(\xi) = \pi_{\lambda x}(\xi) - \lambda\pi_x(\xi)$, y

$$B_{E'} = \bigcap_{x,y \in E} \varphi_{x,y}^{-1}(\{0\}) \bigcap \bigcap_{\substack{x \in E \\ \lambda \in \mathbb{K}}} \psi_{x,\lambda}^{-1}(\{0\})$$

que es un subconjunto cerrado de I.

3.3. Topología débil $\star$ acotada: $b\sigma(E', E)$

Definición Sea E un espacio de Banach, la topología débil estrella acotada[2] se define como la topología más fina que coincide con la topología débil estrella $\sigma(E', E)$ en cada conjunto $rB_{E'} = \{x' : x' \in E', \|x'\| \leq r\}$. Es decir que un conjunto $O \subset E'$ es un abierto en la topología $b\sigma(E', E)$ si y solo si $O \bigcap rB_{E'}$ es un subconjunto relativamente abierto de $rB_{E'}$ para $\sigma(E', E)$ para todo $r \geq 0$ y un conjunto $C \subset E'$ es cerrado en la topología $b\sigma(E', E)$ si y solo si $C \bigcap rB_{E'}$ es cerrado en $\sigma(E', E)$ para todo $r \geq 0$.

Teorema 3.3.1 Sea E un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ una sucesión tal que $x_n \to 0$. Un sistema fundamental de entornos del origen para la topología $b\sigma(E', E)$ es el formado por los conjuntos

$$V_A = \{x' : |x'(x)| < 1, \; x \in A\}$$

donde $A = \{x_n : \; n \in \mathbb{N}\}$.

[2]en inglés: *bounded weak $\star$ topology*

Demostración Sea $B_{E'}$ la bola unitaria en E' y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ con $x_n \to 0$ y $A = \{x_i\}$, entonces

$$\{x' : |x'(x)| < 1, \;\; x \in A\} \bigcap rB_{E'} = \{x' : |x'(x)| < 1, \;\; x \in A_1\} \bigcap rB_{E'}$$

donde A_1 es el conjunto finito de elementos de A para los cuales $\|x\| \geq \frac{1}{r}$. O sea que hemos encontrado un entorno del origen para la topología $\sigma(E', E)$que hace que $V_A \bigcap rB_{E'}$ sea relativamente abierto en $rB_{E'}$.

Sea ahora U un entorno abierto del origen para la topología $b\sigma(E', E)$, entonces según la definición dada arriba, existe un conjunto finito $A_1 \subset E$ tal que[3] $A_1^0 \bigcap B_{E'} \subset U$

Supongamos que para cada entero n definimos un conjunto finito $A_n \subset E$ de forma tal que $A_n^0 \bigcap nB_{E'} \subset U$. Mostremos entonces que existe un conjunto finito B_n de E tal que cada elemento de él tiene norma menor o igual a $1/n$ y tal que se cumple

$$(A_n \bigcup B_n)^0 \bigcap (n+1)B_{E'} \subset U$$

Porque si así no fuera entonces para cualquier conjunto B finito de E y tal que la norma de cada uno de sus elementos es menor o igual que $1/n$ se tendría que la familia $(A_n \bigcup B)^0 \bigcap (n+1)B_{E'} \bigcap U^c$ tiene intersección finita propia . Como U^ces $b\sigma(E', E)$ cerrado, todos esos conjuntos son $\sigma(E', E)$ cerrados y como además $(n+1)B_{E'}$ es $\sigma(E', E)$ compacto por el Teorema de Alaoglu, se sigue entonces que existe $x' \in (n+1)B_{E'} \bigcap U^c \bigcap A_n^0$ que cumple que $|x'(x)| \leq 1$ para todo $x \in E$ con $\|x\| \leq 1/n$. De lo anterior se deduce que $\|x'\| \leq n$ lo que significa que $x' \in nB_{E'} \bigcap A_n^0 \bigcap U^c$ contradiciendo el hecho de que $nB_{E'} \bigcap A_n^0 \subset U$. Definiendo entonces $A_{n+1} = A_n \bigcup B_n$ queda establecida en forma inductiva una sucesión de conjuntos finitos $A_n \subset E$ para los que vale $A_n^0 \bigcap nB_{E'} \subset U$ y tal que cualquier sucesión construida con los elementos de $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$ es una sucesión de elementos de E que tiende a cero, de lo anterior deducimos que

$$\{x' : x' \in E', \; |x'(x)| < 1, \; x \in A\}$$

es un conjunto de la forma indicada, contenido en U

[3] Recordemos que si $M \subset E$, definimos el conjunto polar de M como $M^0 = \{x' \in E' : |x'(x)| \leq 1, \;\; x \in M\}$

Notación Sea $x' \in E'$, un entorno de x' en la topología $b\sigma(E', E)$, lo representaremos como

$$V_{(x_n)}(x') = \{z' \in E' : |(z' - x')(x_n)| < 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

siendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ y con $x_n \to 0$.

Corolario 3.3.2 Sea E un espacio de Banach, entonces E' con la topología $b\sigma(E', E)$ es un E.V.T. localmente convexo.

Demostración Para probar que E' dotado con la topología $b\sigma(E', E)$ es un E.V.T. deberemos probar la continuidad para las funciones

$$\begin{cases} + : E' \times E' \to E' \text{ tal que} & (x', y') \to x' + y' \\ . : \mathbb{K} \times E' \to E' \text{ tal que} & (\alpha, x') \to \alpha.x' \end{cases}$$

Supongamos que U es un entorno de $x' + y'$ entonces por el teorema anterior existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ y con $x_n \to 0$ tal que $V_{(x_n)}(x' + y') \subset U$, de la convergencia de x_n a 0 se tiene que $2x_n \to 0$ con lo que podemos considerar los entornos

$$V_{(2x_n)}(x') = \{z' \in E' : |(z' - x')(2x_n)| < 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

y

$$V_{(2x_n)}(y') = \{w' \in E' : |(w' - y')(2x_n)| < 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

evidentemente se cumple

$$V_{(2x_n)}(x') + V_{(2x_n)}(y') \subset V_{(x_n)}(x' + y')$$

ya que si $z' \in V_{(2x_n)}(x')$ y $w' \in V_{(2x_n)}(y')$ se tiene que

$$|(z' + w' - x' - y')(x_n)| \leq |(z' - x')(x_n)| + |(w' - y')(x_n)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

lo que significa que $z' + w' \in V_{(x_n)}(x' + y')$. Hagamos algo similar para el producto, sea W un entorno de $\alpha.x'$ con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x' \in E'$ entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ y con $x_n \to 0$ tal que $V_{(x_n)}(\alpha.x') \subset W$, interesa determinar un entorno$E(\alpha,\varepsilon) \subset \mathbb{K}$ de α y un entorno $V_{(a_n)}(x') \subset E'$ de x' de forma que para todo $r \in E(\alpha,\varepsilon)$ y para todo $w' \in V_{(a_n)}(x')$ se tenga que $r.w' \in V_{(x_n)}(\alpha.x')$, para ello deberá cumplirse $|(r.w' - \alpha.x')(x_n)| < 1$ pero

$$|(r.w' - \alpha.x')(x_n)| = |\alpha(w' - x')(x_n) + (r.w' - \alpha.w')(x_n)| \leq$$

$$|\alpha|\,|(w' - x')(x_n)| + |r - \alpha|\,|w'(x_n)|$$

y alcanzaría con que cada uno de los términos fuese menor que $\frac{1}{2}$. Pongamos entonces $a_n = 2.\,|\alpha|\,.x_n$ que evidentemente converge a cero. Se tiene entonces que como $w' \in V_{(2|\alpha|x_n)}(x')$ entonces el primer término es menor que $\frac{1}{2}$. Como $w'(x_n) \to 0$ entonces está acotada, con lo que existe $M \in \mathbb{K}$ para el que vale $|w'(x_n)| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, elijamos ahora ε de manera que $\varepsilon < \frac{1}{2M}$, entonces se cumple que

$$|r - \alpha|\,|w'(x_n)| < \varepsilon.M = \frac{1}{2}$$

lo que demuestra que $r.w' \in V_{(x_n)}(\alpha.x')$.

Se trata ahora de probar que los entornos del origen definidos en el teorema anterior son convexos.

Dado $V_{(x_n)}(0)$ con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ y $x_n \to 0$, consideremos en él, dos elementos cualesquiera x' y z' y un escalar α tal que $0 \leq \alpha \leq 1$, se trata de probar que el elemento $w' \in E'$ definido como $w' = \alpha x' + (1-\alpha)z'$ también pertenece al entorno $V_{(x_n)}(0)$. En efecto, como

$$|w'(x_n)| = |(\alpha x' + (1-\alpha)z')\,(x_n)| \leq |\alpha x'(x_n)| + |(1-\alpha)z'(x_n)| =$$

$$\alpha\,|x'(x_n)| + (1-\alpha)\,|z'(x_n)| < 1$$

entonces $w' \in V_{(x_n)}(0)$.

Teorema 3.3.3 Sea E un espacio de Banach, entonces un funcional lineal en E' es continuo para la topología $\sigma(E',E)$ si y solo si es continuo para la topología $b\sigma(E',E)$. Es decir que el dual de E' respecto de la topología débil estrella es el mismo que respecto de la topología débil estrella acotada.

Demostración Como por definición la topología $b\sigma(E',E)$ es más fina que la topología $\sigma(E',E)$ entonces todo funcional lineal en E' continuo para esta última lo será también para la primera.

Recíprocamente supongamos que $f : E' \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal $b\sigma(E', E)$-continuo, lo que significa que debe existir una sucesión en $(x_n) \subset E$ que tienda a cero de manera que

$$|f(x')| < 1 \text{ para todo } x' \in E' \text{ con } |x'(x_n)| < 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Definamos $T : E' \to c_0$ de manera que $T(x') = (x'(x_n))$ claramente es lineal y acotado. Definamos ahora el funcional $h : T(E') \to \mathbb{K}$, de la siguiente manera: $h(T(x')) = f(x')$, evidentemente es lineal y acotado. Probemos que el funcional h está bien definido. Es claro que si $x'(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(x') = 0$, porque también valdría que dado $k \in \mathbb{N}$ $x'(kx_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpliría entonces en particular que $|x'(kx_n)| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo que implica que

$$|f(kx')| < 1 \text{ implica que } |f(x')| = 0$$

Entonces si $T(x') = T(y')$ debería ser $x'(x_n) = y'(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ que lo podríamos escribir como $(x' - y')(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(x' - y') = 0$ para obtener finalmente $f(x') = f(y')$.

Por el corolario 2.2.1 del teorema de Hahn - Banach existe $g \in c_0'$ de manera que su restricción a $T(E')$ coincide con h. Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ el elemento de $\ell_1 = c_0'$ representante de g, entonces para cada $x' \in E'$ se tiene que

$$f(x') = h(T(x')) = g(x'(x_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x'(x_i) = x' \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \right)$$

donde la convergencia de la serie está asegurada porque E es completo. Se sigue entonces que f tiene la forma

$$f(x') = x'(x) \text{ con } x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in E$$

Entonces f está en la imagen de E en E'' por la inyección natural J , con lo que es $\sigma(E', E)$-continuo.

Corolario 3.3.4 Sea E un espacio de Banach y sea $f : E' \to \mathbb{K}$, entonces f es continuo para la topología $\sigma(E', E)$ si y solo si la restricción de f a $B_{E'}$ es continua con respecto a la topología inducida por $\sigma(E', E)$ en $B_{E'}$.

Demostración Si f es continuo para la topología $\sigma(E', E)$, entonces su restricción a $B_{E'}$ es continua con respecto a la topología inducida por $\sigma(E', E)$ en $B_{E'}$. Recíprocamente supongamos que la restricción de f a $B_{E'}$ es continua con respecto a la topología inducida por $\sigma(E', E)$ en $B_{E'}$. Como $B_{E'}$ es cerrado para la topología $\sigma(E', E)$ en E' también lo es $ker\, f \bigcap B_{E'}$ para la topología inducida por $\sigma(E', E)$ en $B_{E'}$entonces $ker\, f \bigcap B_{E'}$es cerrado para $\sigma(E', E)$. Entonces para todo $r > 0$ se tiene que

$$ker\, f \bigcap rB_{E'} = r(ker\, f \bigcap B_{E'})$$

que es cerrado para la topologia $\sigma(E', E)$ y esto significa que $ker\, f$ es cerrado para la topología $b\sigma(E', E)$ por tanto f es continuo para la topología débil estrella acotada y por el teorema anterior es continuo para la topología $\sigma(E', E)$.

Teorema 3.3.5 (Krein-Smulian) Sea B un espacio de Banach y K un subconjunto convexo de E', entonces K es cerrado para la topología $\sigma(E', E)$ si y solo si es cerrado para la topología $b\sigma(E', E)$.

Demostración Por el teorema 3.3.3 $(E', \sigma(E', E))$ y $(E', b\sigma(E', E)$ definen los mismos funcionales lineales continuos, entonces por el teorema 3.1.4 los conjuntos convexos serán cerrados para la primera si y solo si los son para la segunda.

3.4. Espacios reflexivos

Definición Sea E un espacio de Banach y sea J la inyección canónica de E en E''. Diremos que E es reflexivo si $J(E) = E''$. Cuando E es reflexivo con ayuda del isomorfismo J podemos identificar implícitamente E con E''.

Teorema 3.4.1 Sea E un espacio de Banach. Entonces E es reflexivo si y sólo si B_E es compacto en la topología $\sigma(E, E')$.

Demostración Si suponemos que E es reflexivo, entonces de acuerdo con la definición

$$J(B_E) = B_{E''}$$

y como sabemos que $J : E \to E'$ es un homeomorfismo entonces B_E con la topología $\sigma(E, E')$ es homeomorfo a $B_{E''}$ con la topología $\sigma(E'', E')$ y como por el teorema de Alaoglu $B_{E''}$ es un compacto para la topología $\sigma(E'', E')$, se concluye queB_E es compacto con la topología $\sigma(E, E')$.

Para probar el recíproco, veamos primero el siguiente teorema

Teorema 3.4.2 (Goldstine) Sea E un espacio de Banach, $J(B_E)$ es denso en $B_{E''}$ en la topología $\sigma(E'', E')$

Demostración Consideremos $x'' \in E''$ de forma que $x'' \notin \overline{J(B_E)}^{\sigma(E'',E')}$, entonces como $J(B_E)$ es convexo y cerrado para la topología $\sigma(E'', E')$, existe $x' \in E'$ (recordemos que E' es el dual de E'' para la topología $\sigma(E'', E')$), de forma tal que se verifica

$$sup\{\langle x', y''\rangle : y'' \in \overline{J(B_E)}^{\sigma(E'',E')}\} < \langle x', x''\rangle$$

como podemos suponer que $\|x'\| = 1 = \sup\limits_{y'' \in \overline{J(B_E)}^{\sigma(E'',E')}} \{|x'(y'')|\}$, entonces la expresión de la izquierda es al menos 1, lo que obliga a que

$$\|x''\| > 1$$

De lo anterior se sigue que $B_{E''} \subset \overline{J(B_E)}^{\sigma(E'',E')}$.

Estamos en condiciones ahora de probar la suficiencia del teorema 3.3.1, supongamos ahora que B_E es compacto en la topología $\sigma(E, E')$, entonces $J(B_E)$ es compacto en la topología $\sigma(E'', E')$ y aplicando el teorema de Goldstine, se tiene que $J(B_E) = \overline{J(B_E)} = B_{E''}$.

Teorema 3.4.3 Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea $M \subset E$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces M dotado de la norma inducida por E es reflexivo.

Demostración Por el corolario 3.1.6 deducimos que M es cerrado también para $\sigma(E, E')$, entonces B_M es cerrado para la topología inducida por $\sigma(E, E')$ en M que por otra parte coincide con la topología $\sigma(M, M')$, entonces B_M es compacto para la topología $\sigma(E, E')$ o sea que es compacto para $\sigma(M, M')$, con lo que M es reflexivo.

Corolario 3.4.4 Sea E un espacio de Banach. Se cumple que E es reflexivo si y solo si E' es reflexivo.

Demostración Si E es reflexivo las topologías sobre E', $\sigma(E', E)$ y $\sigma(E', E'')$ coinciden , entonces como por el teorema de Alaoglu $B_{E'}$ es compacta para la topología $\sigma(E', E)$, entonces se tiene que $B_{E'}$ es compacta para la topología $\sigma(E', E'')$ lo que se traduce -utilizando el teorema 3.4.1- en que E' es reflexivo.

Si suponemos ahora que E' es reflexivo, de la parte anterior deducimos entonces que E'' es reflexivo y como $J(E)$ es un subespacio cerrado de E'', del teorema 3.4.3 deducimos que $J(E)$ es reflexivo, por consiguiente E es reflexivo.

Otra herramienta imprescindible en el estudio de los espacios de Banach es la separabilidad, pues muchos de los espacios habituales lo son. Además esta propiedad está relacionada con la metrizabilidad de la bola cerrada unidad de E' con la topología $\sigma(E', E)$.

3.5. Espacios separables

Definición Sea E un espacio métrico. Se dice que E es separable si existe un subconjunto $H \subset E$ numerable y denso.

Teorema 3.5.1 Sea E un espacio métrico separable y sea F un subconjunto de E . Entonces F es separable.

Demostración Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión densa en E y sea $(\frac{1}{m})_{m\in\mathbb{N}}$. Defino $u_{m,n}$ como un elemento cualquiera de $B(z_n, \frac{1}{m}) \bigcap F$ cuando esta intersección es distinta del conjunto vacío y sea $u_{m,n} = 0$ cuando $B(z_n, \frac{1}{m}) \bigcap F = \emptyset$. La sucesión doble $(u_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ es numerable y densa en F, con lo que F es separable.

Teorema 3.5.2 Sea E un espacio de Banach tal que E' es separable. Entonces E es separable.

Demostración Sea $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión numerable y densa en E' . Como

$$\|x'_n\| = \sup_{x\in B_E} \langle x'_n, x\rangle$$

entonces para cada n existe $x_n \in E$ con $\|x_n\| = 1$ y para el que se cumple $\langle x'_n, x_n\rangle \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|$.

Sea L_0 el espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ generado por los $\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$. Sea ahora L es espacio vectorial real generado por los mismos puntos, entonces como L_0 es un subconjunto denso de L, bastaría con probar que L es denso en E.

Tomemos un funcional $x' \in E'$ tal que $\langle x', x\rangle = 0$ para todo $x \in L$, demostremos entonces que x' es idénticamente nulo. Como por hipótesis $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es densa en E', dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\|x' - x'_n\| < \varepsilon$, entonces

$$\frac{1}{2}\|x'_n\| \leq \langle x'_n, x_n\rangle = \langle x'_n - x', x_n\rangle + \langle x', x_n\rangle \leq \varepsilon$$

Se tiene entonces

$$\|x'\| \leq \|x' - x'_n\| + \|x'_n\| < 3\varepsilon$$

con lo que $x' = 0$ y entonces L es denso en E.
Nota: La inversa no es cierta, por ejemplo c_o y l_∞.

Corolario 3.5.3 Sea E un espacio de Banach. Entonces E es reflexivo y separable si y solo si E'es reflexivo y separable.

Demostración Del corolario 3.4.4 y del teorema anterior podemos asegurar que si E' es reflexivo y separable, entonces E es reflexivo y separable. Recíprocamente, si E es reflexivo y separable, entonces $E'' = J(E)$ es reflexivo y separable, de donde E'es reflexivo y separable.

Teorema 3.5.4 Sea E un espacio de Banach separable. Entonces $B_{E'}$ es metrizable para la topología $\sigma(E', E)$. Recíprocamente, si $B_{E'}$ es metrizable para la topología $\sigma(E', E)$, entonces E es separable.

Demostración Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en B_E de forma que $\{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ sea denso en B_E (cosa que siempre es posible por el teorema 3.5.1).

Para todo par x', $y' \in B_{E'}$, definimos

$$d(x', y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle x' - y', x_n\rangle|$$

Evidentemente d es una métrica. Habría que probar ahora que sobre $B_{E'}$, la topología asociada a d coincide con la topología $\sigma(E', E)$. Probemos primero que la topología asociada a d es más fina que la topología $\sigma(E', E)$. Sea entonces $x'_0 \in B_{E'}$ y sea $V_{\varepsilon;y_1,y_2,\ldots,y_k}(x'_0)$ un entorno de x'_0 en $\sigma(E', E)$. Hay que probar entonces que existe un $r > 0$ de forma tal que

$$U = \{x' \in B_{E'} : \, d(x', x'_0) < r\} \subset V_{\varepsilon;y_1,y_2,\ldots,y_k}(x'_0)$$

Podemos suponer que en la definición de

$$V_{\varepsilon;y_1,y_2,\ldots,y_k}(x'_0) = \{x' \in B_{E'} : |\langle x' - x'_0, y_i\rangle| < \varepsilon \ \text{ para } \ \text{todo } \ i = 1, 2, \ldots k\}$$

los y_i pertenecen a la bola unitaria de E para todo $i = 1, 2, \ldots k$. Entonces como la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es densa en B_E, para cada i se puede encontrar un natural n_i de manera que $\|y_i - x_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Fijemos $r > 0$ tal que $2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ y demostremos que $U \subset V$. Si $x' \in U$ entonces $d(x', x'_0) < r$, se tiene entonces

$$\frac{1}{2^{n_i}} |\langle x' - x'_0, x_{n_i}\rangle| < r \ \text{ para } \ \text{todo } \ i = 1, 2, \ldots, k$$

y entonces

$$|\langle x' - x'_0, y_i\rangle| = |\langle x' - x'_0, y_i - x_{n_i}\rangle + \langle x' - x'_0, x_{n_i}\rangle| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, porque

$$|\langle x' - x'_0, y_i - x_{n_i}\rangle| \leq \|x' - x'_0\| \, \|y_i - x_{n_i}\| < 2.\frac{\varepsilon}{4}$$

entonces $x' \in V$.

Probemos ahora que la topología $\sigma(E', E)$ es más fina que la generada por d. Como antes sea $x'_0 \in B_{E'}$ y sea U un entorno de x'_0 para la topología generada por d. Se trata de probar que existe $V_{\varepsilon;y_1,y_2,\ldots,y_k}(x'_0)$ entorno de x'_0 para $\sigma(E',E)$, en $B_{E'}$ de forma que

$$V_{\varepsilon;y_1,y_2,\ldots,y_k}(x'_0) \subset U = \{x' \in B_{E'} : d(x',x'_0) < r\}$$

Elijamos V de la forma

$$V_{\varepsilon;y_1,y_2,\ldots,y_k}(x'_0) = \{x' \in B_{E'} : |\langle x' - x'_0, x_i\rangle| < \varepsilon \ \text{ para } \ \text{todo } \ i = 1,2,\ldots k\}$$

y determinemos k y ε para que $V \subset U$. Sea por tanto $x' \in V$, se tiene entonces $d(x',x'_0) = \sum\limits_{n=1}^{n=k} \frac{1}{2^n} |\langle x' - x'_0, x_n\rangle| + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle x' - x'_0, x_n\rangle| < \varepsilon + 2 \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}}$, se trata entonces de elegir $\varepsilon < \frac{r}{2}$ y k suficientemente grande para que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$.

Recíprocamente, supongamos que $B_{E'}$ es metrizable para $\sigma(E',E)$, demostremos que entonces E es separable. Sea $U_n = \left\{x' \in B_{E'} : d(x',0) < \frac{1}{n}\right\}$ y sea V_n un entorno de 0 en $\sigma(E',E)$, de forma tal que se cumpla $V_n \subset U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con V_n de la forma

$$V_n = V_{\varepsilon_n;I_n}(0) = \{x' \in B_{E'} : |\langle x', x\rangle| < \varepsilon_n, \ \text{ para } \ \text{todo } \ x \in I_n\}$$

con I_n un subconjunto finito de E. Sea $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, que es numerable. Por otro lado se cumple

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = 0 \ \text{ entonces } \ \langle x', x\rangle = 0\, \forall x \in F \ \rightarrow x' = 0$$

con lo que F es denso en E y el espacio E es separable.

4. Teorema de Eberlein-Šmulian

4.1. Introducción

Del Teorema de Alaoglu sabemos que en un espacio vectorial normado $(E, \|.\|)$ todo subconjunto cerrado para la topología $\sigma(E', E)$ y acotado de E es compacto para la topología débil estrella.

Intentemos ahora caracterizar los subconjuntos compactos de E para la topología $\sigma(E, E')$. Sea $K \subset E$ un subconjunto compacto para la topología débil y sea $x' \in E'$, sabemos que x' es débilmente continuo, entonces $x'(K)$ es un compacto en el cuerpo de escalares. Se sigue entonces que $x'(K)$ está acotado y como esto vale para todo $x' \in E'$, por el Teorema de la acotación uniforme, entonces K es un subconjunto acotado de E. Además como K es débilmente compacto, entonces es débilmente cerrado y por tanto es cerrado en norma. Es decir que los subconjuntos de E débilmente compactos son cerrados en norma y acotados en norma.

Veamos que el recíproco no es cierto, con lo que la condición anterior no caracteriza a los compactos de la topología débil de un espacio vectorial normado.

Ejemplo Consideremos B_{c_0}, si fuera débilmente compacto, cada sucesión en B_{c_0} debería tener un punto de aglomeración en B_{c_0} para la topología $\sigma(E, E')$. Consideremos la sucesión γ_n definida por $\gamma_n = e_1 + \ldots + e_n$ donde e_k es el k-ésimo vector unitario en c_0. La norma del supremo en c_0 nos da que $\|\gamma_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Cuáles son los posibles puntos de aglomeración para la topología $\sigma(E, E')$ de la sucesión (γ_n)? Supongamos que $\lambda \in B_{c_0}$ es un punto de aglomeración de (γ_n) para la topología débil. Entonces para cada $x' \in {c_0}'$, $(x'(\gamma_n))$ tiene a $x'(\lambda)$ como un punto de aglomeración; esto es que los valores de $x'(\gamma_n)$ están tan cerca de $x'(\lambda)$ como uno quiera. Tomemos como funcional lineal, la proyección k-ésima ${e_k}'$. Notemos que ${e_k}'(\gamma_n) = 1$ para todo $n \geq k$, entonces ${e_k}'(\lambda) = 1$. Lo anterior vale para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lambda = (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \notin c_0$ por lo tanto B_{c_0} no es compacto para la topología $\sigma(E, E')$.

Ejercicio previo (Von Neumann) *La topología débil no tiene por qué ser secuencial.*

Sea A el subconjunto de ℓ_2 que consiste en el conjunto de vectores de la forma $\{x_{mn}/1 \leq m < n < +\infty\}$ cuya m-ésima coordenada es uno y la n-ésima coordenada es m, siendo ceros las otras coordenadas. Mostrar que el origen pertenece a la clausura de A para la topología débil, pero ninguna sucesión de elementos de A converge débilmente a cero.

Podemos representar un elemento genérico de A como

$$(0, \ldots, 0, \overset{m}{1}, 0, \ldots, 0, \overset{n}{m}, 0, \ldots)$$

. Para probar que $0 \in \overline{A}^{\sigma(\ell_2, \ell_2')}$ debemos probar que para todo entorno de cero $V_{\varepsilon, x_1', x_2', \ldots, x_p'}(0)$ en la topología $\sigma(\ell_2, \ell_2')$ se cumple que

$$V_{\varepsilon, x_1', x_2', \ldots, x_p'}(0) \bigcap A \neq \emptyset$$

Sabemos que para todo $x\,'_i \in \ell_2'$ $(i = 1, \ldots, p)$ existe $a^i = (a_k^i)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2'$ de forma que para todo $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2$ se tiene

$$x\,'_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k a_k^i = \left\langle x, a^i \right\rangle \text{ para todo } i = 1, \ldots, p$$

Entonces para un elemento genérico de A se tiene

$$|x\,'_i(e_m + me_n)| = \left|a_m^i + m a_n^i\right| \leq \left|a_m^i\right| + m \left|a_n^i\right|$$

y como se tiene que $\underset{k \to +\infty}{lím} a_k^i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, p$ es posible entonces elegir primero $m = m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de forma tal que

$$\left|a_{m_\varepsilon}^i\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } i = 1, \ldots, p$$

a continuación es posible elegir $n = n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ con $n_\varepsilon > m_\varepsilon$ de forma que

$$m_\varepsilon \left|a_{n_\varepsilon}^i\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } i = 1, \ldots, p$$

De lo anterior se deduce entonces que

$$x_{m_\varepsilon n_\varepsilon} \in V_{\varepsilon, x_1', x_2', \ldots, x_p'}(0) \bigcap A$$

entonces $0 \in \overline{A}^{\sigma(\ell_2, \ell_2')}$. Probemos ahora que ninguna sucesión incluida en A converge débilmente a 0. Supongamos por el contrario que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ es una sucesión tal que $x_k \underset{\sigma(\ell_2,\ell_2')}{\rightarrow} 0$ siendo $x_k = e_{m_k} + m_k e_{n_k}$, $1 \leq m < n < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, lo que significa que también $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, que a su vez se traduce en la existencia de una subsucesión convergente: $(m_{k_t})_{k_t\in\mathbb{N}}$, pero entonces existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $t \geq t_0$ debe ser $m_{k_t} = M \in \mathbb{N}$ constante. Como $x_{k_t} \underset{\sigma(\ell_2,\ell_2')}{\rightarrow} 0$ debe ser $x'(x_{k_t}) \rightarrow 0$ para todo $x' \in \ell_2'$ en particular para $x' = e_M$, pero en cambio resulta que

$$\langle e_M, x_{k_t}\rangle = \left\langle e_M, e_{m_{k_t}} + m_{k_t} e_{n_{k_t}}\right\rangle = \langle e_M, e_M\rangle + M\left\langle e_M, e_{n_{k_t}}\right\rangle = 1$$

para todo $t \geq t_0$ lo que es una contradicción.

Aunque la topología débil de un E.V.T. de Banach E de dimensión infinita no es metrizable , el siguiente teorema permite, para los subconjuntos débilmente compactos de E, observar propiedades similares a las de los compactos de los espacios metrizables.

Previamente recordemos algunas definiciones:

i) $A \subset E$ es relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.

ii) $A \subset E$ es secuencialmente compacto si cada sucesión en A tiene una subsucesión convergente en A.

iii) $A \subset E$ es relativamente secuencialmente compacto si cada sucesión en A tiene una subsucesión convergente en E.

4.2. Teorema de Eberlein-Šmulian

Ejemplo previo: Sea $A = B_{c_0} \subset c_0$, de acuerdo a lo visto en el primer ejemplo, A no es débilmente compacto. Sea $a_n = (1, 1, \ldots, \overset{n}{1}, 0, \ldots)$ evidentemente $a_n \in A$ porque $\|a_n\| = sup\{\left|a_n^{(i)}\right| : i \in \mathbb{N}\} = 1$. Sean $F = (1, 1, \ldots) \in \ell_\infty = c_0''$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $g_n = (0, 0, \ldots, \underset{n}{1}, 0, \ldots)$, $g_n \in \ell_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\|g_n\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|g_n^{(i)}\right| = 1$ y además $dist(F, J(c_0) = 1$. De lo anterior se cumple

i) $F(g_n) = 1$

ii) $g_n(a_j) = 0$ si $j < n$

iii) $g_n(a_j) = 1$ si $j \geq n$

mostremos que entonces (a_n) no puede tener una subsucesión débilmente convergente.

Si (a_{n_k}) fuese una subsucesión débilmente convergente a a entonces existiría una sucesión de combinaciones convexas de forma que convergería en norma a a con lo que es posible encontrar un término de la sucesión que diste de a en norma menor que $1/4$ por ejemplo, es decir

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k} - a \right\| < \frac{1}{4}$$

para algún $\sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k}$, pero si $n > n_q$ utilizando la parte $ii)$ se tiene que $\left| g_n(\sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k}) \right| = \left| \sum_{k=p}^{q} \alpha_k g_n(a_{n_k}) \right| = 0$. De lo anterior se deduce entonces que

$$|g_n(a)| \leq \left| g_n \left(a - \sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k} \right) \right| + \left| g_n \left(\sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k} \right) \right| \leq$$

$$\|g_n\| \left\| a - \sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k} \right\| + 0 < \frac{1}{4}$$

Pero por $iii)$ $g_n(a_{n_k}) = 1$ para todo $n_k > n$ con lo que pasando al límite $g_n(\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k}) = 1$ con lo que $g_n(a) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con lo que obtenemos una contradicción.

Entonces suponiendo que A es relativamente secuencialmente compacto para la topología débil, es posible construír una sucesión para la que ninguna subsucesión sea débilmente convergente. Contradicción.

Lema previo 4.2.1 Un subconjunto $A \subset E$ es relativamente débilmente compacto si y solo si es acotado y $\overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')} \subset J(E)$.

Demostración Como $J : E \to E''$ es un homeomorfismo entre E y $J(E)$ cuando consideramos a E con la topología $\sigma(E, E')$ y E'' con la topología $\sigma(E'', E')$, se tiene

$$J(\overline{A}^{\sigma(E,E')}) = \overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')} \bigcap J(E)$$

y entonces si suponemos que A es relativamente débilmente compacto entonces $J(\overline{A}^{\sigma(E,E')})$ es un compacto para la topología $\sigma(E'', E')$ que contiene a $J(A)$ entonces vale

$$\overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')} \subset \overline{J(\overline{A}^{\sigma(E,E')})}^{\sigma(E'',E')} = J(\overline{A}^{\sigma(E,E')}) \subset J(E)$$

con lo que se tiene

$$\overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')} \subset J(E)$$

Para demostrar la acotación de A, veamos que si $\overline{A}^{\sigma(E,E')}$ es compacto para la topología débil, entonces $\overline{A}^{\sigma(E,E')}$ es acotado, con lo que también lo será A.

Recíprocamente si suponemos ahora que $\overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')} \subset J(E)$, como A es acotado entonces $J(A)$ lo es y también $\overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')}$ y utilizando el teorema de Alaoglu, tenemos que $B_{E''}$ es compacto para la topología $\sigma(E'', E')$ y como $\overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')}$ es cerrado para esa topología, deducimos que $\overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')}$ es compacto para la topología $\sigma(E'', E')$ o sea que $J(A)$ es relativamente compacto para la topología $\sigma(E'', E')$, lo que nos permite asegurar que A es relativamente compacto para la topología débil.

Teorema 4.2.2 (Eberlein-Šmulian) Sea E un espacio de Banach y sea A un subconjunto de E. Entonces A es relativamente débilmente compacto si y solo si es relativamente secuencialmente compacto para la topología débil. En particular un subconjunto de un espacio de Banach es débilmente compacto si y solo si es débilmente secuencialmente compacto.

Demostración Sea $A \subset E$ relativamente compacto para la topología $\sigma(E, E')$ en E y consideremos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ (supongo que $a_p \neq a_q \ si \ p \neq q$). Sea $V = \overline{span}\{a_n\}$ la clausura del subespacio real generado por el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es decir el conjunto de las combinaciones lineales finitas de elementos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con coeficientes reales. Veamos que V es un espacio separable de E. En efecto podemos considerar $V_0 = span_{\mathbb{Q}}\{a_n\}$, el espacio vectorial generado por los elemento de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pero con coeficientes racionales, evidentemente V_0 es numerable y denso en V, con lo que efectivamente V es separable.

Determinemos ahora una sucesión $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ de forma tal que si $x \in V$ y $x'_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$, o sea que $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto total. Para hacerlo podemos considerar en V una sucesión densa, sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dicha sucesión y usando el teorema de Hahn - Banach (teorema 2.2.2) podemos obtener $x'_n \in E'$ de forma tal que $\|x'_n\| = 1$ y que $x'_n(v_n) = \|v_n\|$. Para probar que el conjunto de los funcionales lineales $x'_n \in E'$ así obtenidos, forman un conjunto total, supongamos que para $x \in V$ se cumple que $x'_n(x) = 0$, entonces como (v_n) es denso en V, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y como por construcción

$$\|v_{n_0}\| = x'_{n_0}(v_{n_0}) = x'_{n_0}(v_{n_0} - x) + x'_{n_0}(x) \leq \left\|x'_{n_0}\right\| \|v_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

porque $x'_{n_0}(x) = 0$ y $\left\|x'_{n_0}\right\| = 1$. Entonces

$$\|x\| \leq \|v_{n_0} - x\| + \|v_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces $\|x\| < \varepsilon$ y como el ε es arbitrario, $\|x\| = 0$ lo que implica que $x = 0$ lo que prueba finalmente que $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es total.

Veamos ahora que es posible extraer de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión, a la representaremos como $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para la que el $\underset{k\to+\infty}{\textit{lím}}\, x'_n(a_{n_k})$ exista para cada $n \in \mathbb{N}$. Como A es acotado entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ es acotado, con lo que también $\{x'_1(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado en $\mathbb{K}$, entonces existe $(a_n^{(1)})$ tal que $(a_n^{(1)}) \subset (a_n)$ y para la que se cumple que existe

$$\underset{n\to+\infty}{\textit{lím}}\, x'_1(a_n^{(1)})$$

De igual manera, el conjunto $\left\{x'_2(a_n^{(1)})\right\}$ es acotado, con lo que existe una subsucesión $(a_n^{(2)})$ tal que $(a_n) \supset (a_n^{(1)}) \supset (a_n^{(2)})$ para la que también existe

$$\underset{n\to+\infty}{\textit{lím}}\, x'_2(a_n^{(2)})$$

continuando con este razonamiento obtenemos

$$(a_n) \supset (a_n^{(1)}) \supset (a_n^{(2)}) \supset \ldots \supset (a_n^{(j)}) \supset \ldots$$

cumpliéndose que para todo $j \in \mathbb{N}$ existe

$$\underset{n\to+\infty}{\textit{lím}}\, x'_j(a_n^{(j)})$$

Construyamos la sucesión diagonal $(a_i^{(i)})$ a la que por ser una subsucesión de (a_n) llamaré (a_{n_k}), entonces se cumple que

$$\underset{k\to+\infty}{\textit{lím}}\, x'_n(a_{n_k}) \text{ existe para todo } n \in \mathbb{N}$$

Como A es relativamente débilmente compacto, la sucesión (a_{n_k}) tiene al menos un punto de acumulación para la topología $\sigma(E, E')$ en E al que llamaremos $\overline{y}$, entonces se cumple que

$$x'_n(\overline{y}) = \underset{k \to +\infty}{\textit{lím}} x'_n(a_{n_k})$$

Ahora bien, como V es cerrado en norma, entonces es débilmente cerrado con lo que $\overline{y} \in V$ lo que lo hace único, ya que si $\overline{z}$ fuese otro punto de acumulación de (a_{n_k}) para el que $x'_n(\overline{z}) = \underset{k \to +\infty}{\textit{lím}} x'_n(a_{n_k})$ entonces $x'_n(\overline{y}) = x'_n(\overline{z})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$es total en V, se tiene que $\overline{z} = \overline{y}$.

Quedaría por probar que entonces que

$$a_{n_k} \underset{\sigma(E,E')}{\longrightarrow} \overline{y}$$

lo que es equivalente a probar (teorema 3.1.2) que $x'(a_{n_k}) \to x'(\overline{y})$ para todo $x' \in E'$. Si así no fuera entonces existiría $x'_0 \in E'$ para el que

$$x'_0(a_{n_{k_s}}) \to \alpha \neq x'_0(\overline{y})$$

entonces existiría un punto de acumulación de la sucesión $(a_{n_{k_s}})_{s\in\mathbb{N}}$ que también sería de acumulación para $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ en la topología débil, diferente de $\overline{y}$, lo que sería una contradicción, por tanto se cumple

$$(a_{n_k}) \underset{\sigma(E,E')}{\longrightarrow} \overline{y}$$

Para probar la condición suficiente supongamos que $A \subset E$ es relativamente secuencialmente compacto para la topología $\sigma(E, E')$ pero no es relativamente débilmente compacto entonces por el lema anterior o A no es acotado o $\overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')} \not\subset J(E)$. El primer caso no puede darse porque si A no es acotado, como los acotados en norma coinciden con los débilmente acotados, tampoco lo sería en la topología débil, pero esto último significa que existe un $x' \in E'$ para el que $x'(A)$ no está acotado, con lo que puedo determinar una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ para la que

$$|x'(a_n)| \geq n \ \text{ para } \ \text{todo } \ n \in \mathbb{N}$$

pero como A es relativamente secuencialmente compacto para la topología $\sigma(E, E')$ puedo extraer de (a_n) una subsucesión (a_{n_k}) convergente, pero entonces también lo sería $x'(a_{n_k})$ con lo que obtenemos una contradicción. Para la segunda posibilidad, tratemos de construir una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para la que ninguna subsucesión sea débilmente convergente.

Usando el lema anterior, existe $F \in \overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')} - J(E)$ y entonces sea $\theta = dist(F, J(E)) > 0$. Construyamos las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_{E'}$ de forma tal que verifiquen las siguientes condiciones:

i) $F(g_n) > \frac{3}{4}\theta$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) $|g_n(a_j)| < \frac{1}{4}\theta$ si $j < n, \ \ j \in \mathbb{N}$

iii) $g_n(a_j) > \frac{3}{4}\theta$ si $j \geq n, \ \ j \in \mathbb{N}$

Mostremos que bajo estas condiciones, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede tener una subsucesión débilmente convergente, porque si por el contrario existiera $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ verificando que $(a_{n_k}) \underset{\sigma(E,E')}{\rightarrow} a$ por el corolario 3.1.6 existiría una sucesión de combinaciones convexas de $\{a_{n_k}\}$ de forma que convergería a a en norma, con lo que entonces existe un elemento de ella que dista de a menos que $\frac{1}{4}\theta$, es decir que existe

$$\sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k} \ \text{ tal que } \ \left\| \sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k} - a \right\| < \frac{1}{4}\theta$$

Tomemos $n > n_q$ entonces por *ii)* se tiene que $|g_n(a_{n_k})| < \frac{1}{4}\theta \ \ si \ \ n > n_k$, con lo que vale

$$\left| g_n(\sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k}) \right| = \left| \sum_{k=p}^{q} \alpha_k g_n(a_{n_k}) \right| < \sum_{k=p}^{q} |\alpha_k| \frac{1}{4}\theta = \frac{1}{4}\theta$$

Las expresiones anteriores nos permitirán probar que $|g_n(a)| < \frac{1}{2}\theta$, porque podemos escribir

$$|g_n(a)| \leq \left| g_n\left(a - \sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k} \right) \right| + \left| g_n\left(\sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k} \right) \right| \leq$$

$$\|g_n\| \left\| a - \sum_{k=p}^{q} \alpha_k a_{n_k} \right\| + \frac{1}{4}\theta < \frac{1}{2}\theta$$

Por otro lado como por *iii)* $g_n(a_{n_k}) > \frac{3}{4}\theta$ para todo $n_k > n$, entonces pasando al límite

$$g_n(\text{lím}\, a_{n_k}) \geq \frac{3}{4}\theta$$

o sea que tenemos

$$g_n(a) \geq \frac{3}{4}\theta \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

lo que es una contradicción con la acotación obtenida arriba para $|g_n(a)|$.

Proceso de construcción de las sucesiones (a_n) y (g_n). Como θ se definió como la distancia de F a $J(E)$ se cumple entonces que $\|F\| \geq \theta$ y como $\|F\| = \sup_{x' \in B_{E'}} |F(x')|$ entonces debe existir $g_1 \in B_{E'}$ de forma tal que cumpla que $F(g_1) > \frac{3}{4}\theta$, la condición *i)* para $n = 1$. Además como $F \in \overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')}$ se tiene que prefijado ε es posible encontrar $a_1 \in A$ de forma tal que $|F(g_1) - J_{a_1}(g_1)| < \varepsilon$ o sea que $|F(g_1) - g_1(a_1)| < \varepsilon$ de donde se obtiene que $|g_1(a_1)| > |F(g_1)| - \varepsilon$ lo que significa que si al principio elegimos convenientemente el ε se puede encontrar $a_1 \in A$ que haga $|g_1(a_1)| > \frac{3}{4}\theta$ o sea que se cumple la condición *iii)* para $j = n = 1$.

Supongamos ahora que hemos encontrado los conjuntos $\{a_i : i = 1, \ldots, n\}$ y $\{g_i : i = 1, \ldots, n\}$ que verifican las condiciones *i)*, *ii)*, y *iii)*, entonces por el corolario 2.2.3 del Teorema de Hahn - Banach podemos determinar un funcional lineal φ con $\varphi \in E'''$ que verifique que $\varphi(a_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ y que $\varphi(F) > \frac{3}{4}\theta$ y $\|\varphi\| = 1$. Entonces utilizando el teorema 3.3.2 (Goldstine) podemos hallar $g_{n+1} \in B_{E'}$ de forma que cumpla con las condiciones *i)* y *ii)* a continuación elegimos $a_{n+1} \in A$ que aproxime F por $g_1, \ldots, g_{n+1}$ que haga que se cumpla también la condición *iii)*. Veamos esto con más detalle.

El teorema de Goldstine aplicado a la bola unitaria $B_{E'}$ nos asegura que ella es densa en la bola unitaria $B_{E'''}$ o sea que se cumple

$$\overline{J(B_{E'})}^{\sigma(E''',E'')} \supset B_{E'''}$$

entonces como $\varphi \in B_{E'''}$ se cumple que para todo entorno de φ para la topología $\sigma(E''', E'')$, su intersección con $J(B_{E'})$ no es vacía.
Tomemos en particular el entorno $V_{\varepsilon,a_1,a_2,\ldots,a_n,F}(\varphi) = \{\xi \in E''' : |(\varphi - \xi)(a_1)| < \varepsilon, |(\varphi - \xi)(a_2)| < \varepsilon, \ldots |(\varphi - \xi)(a_n)| < \varepsilon, |(\varphi - \xi)(F)| < \varepsilon\}$
entonces debe existir $g_{n+1} \in B_{E'}$ de forma que $J_{g_{n+1}} \in V_{\varepsilon,a_1,a_2,\ldots,a_n,F}(\varphi)$ lo que equivale a afirmar que para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumple que

$$\left|\varphi(J_{a_i}) - J_{g_{n+1}}(J_{a_i})\right| < \varepsilon$$

y como por construcción $\varphi(J_{a_i}) = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ se obtiene que

$$|g_{n+1}(a_i)| = |J_{a_i}(g_{n+1})| = \left|J_{g_{n+1}}(J_{a_i})\right| < \varepsilon$$

además debe cumplirse que

$$\left|(\varphi - J_{g_{n+1}})(F)\right| < \varepsilon$$

entonces

$$|F(g_{n+1})| > |\varphi(F)| - \varepsilon$$

finalmente eligiendo ε de forma que $\varepsilon < mín\{\frac{\theta}{4}, \frac{1}{2}(|\varphi(F)| - \frac{3}{4}\theta)\}$ se verifican las siguientes condiciones

$$|g_{n+1}(a_i)| < \frac{\theta}{4} \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$|F(g_{n+1})| > \frac{3}{4}\theta$$

lo que se traduce en el hecho de que se cumplen las condiciones i) y ii).

Finalmente puedo determinar a_{n+1} recordando que $F \in \overline{J(A)}^{\sigma(E'',E')}$ entonces

$$V_{\varepsilon,g_1,g_2,\ldots,g_{n+1}}(F) \bigcap J(A) \neq \emptyset$$

con lo que existe $a_{n+1} \in A$ de forma tal que $J_{a_{n+1}} \in J(A)$ cumple que $\left|(F - J_{a_{n+1}})(g_i)\right| < \varepsilon$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n+1$ que a su vez se puede escribir como

$$|F(g_i) - g_i(a_{n+1})| < \varepsilon$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n+1$ y operando

$$|g_i(a_{n+1})| > |F(g_i)| - \varepsilon$$

y de nuevo eligiendo convenientemente ε se puede lograr que

$$|g_i(a_{n+1})| > \frac{3}{4}\theta$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n+1$, con lo que también se cumple la condición iii).

4.3. Operadores débilmente compactos

Como aplicación del Teorema de Eberlein - $\breve{S}$mulian, a los operadores débilmente compacto veremos en particular que en un espacio reflexivo es posible factorizarlos y a partir de ahí estudiaremos algunas propiedades.

Definición Dado el operador $T : E \to F$ se dice que es débilmente compacto si el conjunto $T(B_E)$ es relativamente débilmente compacto. Del Teorema de Eberlein- $\breve{S}$mulian se deduce que lo anterior es equivalente a que para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_E$ la sucesión $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión débilmente convergente.

Supongamos que E es un espacio de Banach reflexivo, entonces por el teorema 3.4.1 deberá ser B_E compacto en la topología débil y como T es continuo, entonces $T(B_E)$ será débilmente compacto. Supongamos ahora que F es reflexivo, entonces B_F será débilmente compacto, por otro lado como B_E es cerrado en norma será también cerrado para la topología $\sigma(E, E')$, con lo que $T(B_E)$ es débilmente cerrado y acotado con lo que será compacto para la topología $\sigma(F, F')$. En conclusión si E o F es reflexivo, entonces T es un operador débilmente compacto.

La intensión es ahora probar que un operador débilmente compacto puede factorizarse a través de un espacio reflexivo, previamente veamos dos lemas que nos serán útiles para demostrarlo.

Lema 4.3.1 Sea F un espacio de Banach y sea $W \subset F$ un subconjunto acotado y absolutamente convexo. Para $n \geq 1$ definamos

$$U_n = 2^n W + 2^{-n} B_F$$

y sea entonces p_n el funcional de Minkowski asociado a U_n. Entonces p_n es una norma equivalente a $\|.\|$.

Demostración Es evidente que

$$2^{-n} B_F \subset U_n$$

con lo que si consideramos un $y \in F$ tal que $\|y\| \leq 1$ entonces $2^{-n} y \in U_n$ entonces $p_n(y) \leq 2^n$ y aplicando el lema 1.1.3 se tiene que $p_n(y) \leq 2^n \|y\|$. Por otro lado como W es acotado entonces U_n también debe serlo, sea entonces

$M > sup\{\|y\| : y \in U_n\}$, entonces si $p_n(y) < 1$ se tiene que $y \in U_n$ de dónde $\|y\| < M$ y entonces valdrá que $\|y\| \leq Mp_n(y)$. En resumen, se tiene que

$$M^{-1} \|y\| \leq p_n(y) \leq 2^n \|y\|$$

lo que significa que p_n es una norma equivalente a $\|.\|$.

Lema 4.3.2 Sea F un espacio de Banach y sean W, U_n y p_n como en el lema anterior.Para cada $y \in F$ definamos $|||y||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n(y)^2\right)^{1/2}$ y sea entonces $R = \{y \in F : |||y||| < +\infty\}$. Entonces se cumple que
a) $W \subset B_R = \{y \in R : |||y||| \leq 1\}$
b) $(R, |||.|||)$ es un espacio de Banach y la inclusión canónica $j : R \to F$ es continua.
c) $j'' : R'' \to F''$ es inyectiva y $(j'')^{-1}(F) = R$
d) R es reflexivo si y solo si $\overline{W}$ es débilmente compacta.

Demostración *a*) Sea $w \in W$, entonces $2^n W \subset U_n$. Se cumple entonces que $1 \geq p_n(2^n w) = 2^n p_n(w)$, con lo que $p_n(w) \leq 2^{-n}$, de esto último deducimos que

$$|||w|||^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n})^2 < 1 \textit{ implica que } w \in B_R$$

b) Sea $F_n = (F, p_n)$, entonces de acuerdo al Lema anterior F_n es un espacio de Banach isomorfo a $(F, \|.\|)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $Z = \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n\right)_2$ [4]y definamos $\varphi : R \to Z$ como $\varphi(y) = (j(y), j(y), \ldots)$, entonces φ es una isometría, que evidentemente no es sobreyectiva ya que la imagen de φ será $\varphi(R) = \{z \in Z : z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ con } z_n = z_1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$ que es un subespacio cerrado del espacio de Banach Z, con lo que $\varphi(R)$ es de Banach y finalmente el propio R por ser isométrico a un espacio de Banach, también lo será.

Sea ahora π_1 la proyección de Z sobre su primer coordenada, entonces podemos escribir la inclusión canónica $j : R \to F$ como la composición de φ con π_1, $j = \pi_1.\varphi$ y como tanto φ como π_1 son continuos, resulta que j es continuo.

[4]Representaremos como $\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n\right)_2$el espacio vectorial normado de las sucesiones $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}},\ z_n \in F_n$ tales que $\sum (p_n(z_n))^2 < +\infty$, con la norma $\|z\| = \left(\sum (p_n(z_n))^2\right)^{1/2}$.

c) Como $((\sum_{n=1}^{\infty} F_n)_2)'' = (\sum_{n=1}^{\infty} F_n{}'')_2$ se tiene entonces que si $y'' \in R''$, vale que $\varphi''(y'') = (j''(y''), j''(y''), \ldots) \in (\sum_{n=1}^{\infty} F_n{}'')_2$ por lo que podemos escribir $\varphi'' : R'' \to Z''$. Como φ es una isometría y además $Im(\varphi)$ es un conjunto cerrado, entonces φ'' es inyectiva de dónde se deduce que j'' es inyectiva. Si ahora $y'' \in (j'')^{-1}(J_F(F))$, entonces $j''(y'') \in J_F(F)$ así que $\varphi''(y'') = (j''(y''), j''(y''), \ldots) \in \varphi(R) \subset Z$ sea entonces $\varphi''(y'') = x_0$. Ahora tomemos una red $(y_i)_i$ en R tal que $\|y_i\| \leq \|y''\|$ para todo i y de modo que $J(y_i) \underset{\sigma(R'',R')}{\to} y''$ cosa que es posible por el teorema de Goldstine, pero entonces $\varphi''(J(y_i)) \underset{\sigma(Z'',Z')}{\to} \varphi''(y'')$, pero también observemos que $\varphi''(y_i) = \varphi(y_i)$ para cada i y que como $\varphi''(y'') = x_0$ entonces $\varphi(y_i) \underset{\sigma(Z,Z')}{\to} x_0$ y como la $Im(\varphi)$ es cerrada entonces $x_0 \in Im(\varphi)$ Tomemos ahora $y \in R$ con $\varphi(y) = x_0$ entonces $\varphi''(y'' - y) = 0$ y como φ'' es inyectiva, $y'' = y \in R$.
d) Con un argumento similar al utilizado en la demostración del teorema de Alaoglu, se tiene que $j''(B_{R''}) = \overline{j(B_R)}^{\sigma(F'',F')}$. Pongamos $C = j(B_R)$ y supongamos que $\overline{W}$ es débilmente compacta. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, cada uno de los conjuntos $2^n\overline{W} + 2^{-n}B_{F''}$ contiene a B_R y cada uno es cerrado para la topología $\sigma(F'', F')$, lo que significa que cada uno debe contener $\overline{B_R}^{\sigma(F'',F')}$, es decir cada uno contiene a $j''(B_{R''})$, pero ahora

$$j''(B_{R''}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(2^n\overline{W} + 2^{-n}B_{F''}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(2^nF + 2^{-n}B_{F''}) = F$$

y por la parte anterior $R'' \subset (j'')^{-1}(F) = R$, con lo que R es reflexivo.

Recíprocamente, sea R reflexivo, entonces B_R es débilmente compacta, lo que significa que $j(B_R)$ es débilmente compacta en F y entonces por la parte a) $\overline{W}$ es débilmente compacto.

Teorema 4.3.3 Si E y F son espacios de Banach, un operador $T : E \to F$ es débilmente compacto si y solo si T puede factorizarse a través de un espacio reflexivo, es decir existe un espacio reflexivo R y dos operadores α y β, con $\alpha : E \to R$ y $\beta : R \to F$ de forma que $T = \beta\alpha$.

Demostración Como la condición necesaria es evidente, pasemos a probar la condición suficiente, para ello supongamos que T es débilmente compacto, y sea $W = T(B_E)$ y definamos R como en el lema anterior y por la parte d)

R es reflexivo y sea también $\beta : R \to F$ la inclusión canónica. Evidentemente si $x \in B_E$ entonces $T(x) \in W$, con lo que $2^n T(x) \in U_n$, entonces $1 \geq p_n(2^n T(x)) = 2^n p_n(T(x))$ de lo que se deduce que $p_n(T(x)) \leq 2^{-n}$ para todo $x \in B_E$. Es decir que si consideramos $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$, $|||T(x)|||^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(p_n(T(x)))^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} = 1/3$, entonces $\alpha : E \to R$ definido por $\alpha(x) = T(x)$ es un operador acotado con $\|\alpha\| \leq 2$ y claramente $T = \beta\alpha$.

Teorema 4.3.4 Si E y F son espacios de Banach y $T : E \to F$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) T es débilmente compacto.

b) $T''(E'') \subset F$.

c) T' es débilmente compacto.

Demostración *a*) $\to$ *b*): De acuerdo al Teorema anterior, sea R reflexivo, $\beta : R \to F$ y $\alpha : E \to R$ de manera que $T = \beta\alpha$. Entonces $T'' = \beta''\alpha''$, pero $\beta'' : R \to F''$, entonces $\beta'' = \beta$, eso implica que $T'' = \beta\alpha''$ y entonces $Im(T'') \subset Im(\beta) \subset F$.

b) $\to$ *a*): Por el Teorema de Alaoglu y por la continuidad de T'' con las topologías débiles estrella se tiene que $T''(B_{E''})$ es compacto para la topología $\sigma(F'', F')$. De acuerdo a nuestra hipótesis se tiene que $T''(B_{E''})$ es compacto para la topología $\sigma(F, F')$ con lo que $T(B_E) \subset T''(B_{E''})$ y debe tener clausura débilmente compacta.

c) $\to$ *a*): Sea L un espacio reflexivo, $C : F' \to L$, y $D : L \to E'$ de forma que $T' = DC$, entonces $T'' = C'D'$, con $D' = E'' \to L'$ y $C' = L' \to F''$. Pongamos $R = \overline{D'(E)}$ y $\alpha = D'|E$, entonces $\alpha : E \to R$ y R es reflexivo. Sea ahora $\beta = C'|R$, entonces $\beta : R \to F''$, pero entonces si $x \in E$, $\beta\alpha(x) = C'D'(x) = T''(x) = T(x) \in F$, entonces $\beta : R \to F$ y claramente $T = \beta\alpha$.

a) $\to$ *c*) Si T es débilmente compacto entonces existen R reflexivo, $\beta : R \to F$ y $\alpha : E \to R$ de manera que $T = \beta\alpha$. Pero entonces como $T' = \alpha'\beta'$ y R' es reflexivo (corolario 3.3.4) por el teorema 4.3.3 resulta que T' es débilmente compacto.

5. Bibliografía consultada

Beauzamy, B.: *Introduction to Banach spaces and their geometry.* North-Holland, Amsterdam, 1982.

Beauzamy, B.: *Introduction to operator theory and invariant subspaces.* North-Holland, Amsterdam, 1988.

Brézis, H.: *Análisis funcional, teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1984.

Bourbaki, N.: *Espaces vectoriels topologiques.* Springer-Verlag, Berlin, 2007.

Conway, J.: *A course in functional analysis.* Springer-Verlag, New York, 1973.

Day, M. M.: *Normed Linear Spaces*, third edition; Springer-Verlag, Berlin, 1973.

Diestel, J.: *Sequences and series in Banach spaces.* Springer-Verlag, New York, 1984.

Diestel, J.: *Geometry of Banach spaces.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1975.

Dieudonné, J.: *History of functional analysis.* North-Holland, Amsterdam, 1981.

Dunford, N., Schwartz, J.: *Linear Operators, part I: General theory.* Interscience, New York, 1958.

Eberlein, W.F.: *On weak compactness of sets in normed linear spaces I.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 33 (1947), 51-53.

Edwards, R. E.: *Functional Analysis, theory and applications.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

Floret, K.: *Weakly compact sets.* Springer-Verlag, Berlin, 1980.

Horvath, J.: *Topological vector spaces and distributions.* Addison-Wesley, 1966.

Kolmogorov, A. N. y Fomin, S. V.: *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* Mir, Moscú, 1972.

Köthe, G.: *Topological vector spaces I.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L.: *Classical Banach spaces I.* Springer-Verlag, New York, 1977.

Megginson, R.: *An introduction to Banach space theory.* Springer-Verlag, New York, 1998.

Morrison, T.: *Functional analysis, an introduction to Banach space theory.* Wiley-Interscience Publication, New York, 2001.

Rudin, W.: *Functional analysis.* McGraw-Hill, New York, 1973.

Schaefer, H. H.: *Topological vector sapaces.* Macmillan, New York, 1966.

Swartz, C.: *An introduction to functional analysis.* Marcel Dekker, New York, 1992.
Trêves, F.: *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Academics Press, New York, 1967.
Valdivia, M.: *Análisis matemático V.* UNED, Madrid, 1988.
Wilansky, A.: *Modern methods in topological vector spaces.* McGraw-Hill, New York, 1978.
Whitley,R.: *An elementary proof of the Eberlein-Šmulian theorem*, Math. Annalen 172 (1967), 116-118
Wojtaszczyk, P.: *Banach spaces for analysts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
Yosida, K.: *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1980.

6. Símbolos utilizados

E'	dual topológico de E
E''	bidual de E
σ	topología débil definida en E: $\sigma(E, E')$
$\sigma*$	topología débil estrella definida en E': $\sigma(E', E)$
$[x]$	clase de equivalencia del elemento x
$\|\cdot\|$	norma definida en un espacio vectorial
$\langle x', x\rangle$	$x'(x)$
$span(A)$	subespacio vectorial generado por el conjunto A
$\overline{A}$	clausura del conjunto A
$\overline{A}^{\tau}$	clausura del conjunto A en la topología τ
$\preceq$	orden parcial
$\mathcal{R}f$	parte real de la función f
$\mathring{A}$	interior del conjunto A
A^c	conjunto complementario del A
B_E	bola unitaria cerrada de E
$B_0(x, r)$	bola abierta centrada en x y de radio r
$b\sigma*$	topología débil estrella acotada: $b\sigma(E', E)$
M^0	conjunto polar de M
T'	traspuesto del operador T
E/M	espacio cociente del espacio vectorial E módulo el subespacio M
$L(E, F)$	espacio de las aplicaciones continuas de E en F
$E.V.T.$	espacio vectorial topológico
ℓ_∞	espacio de las sucesiones acotadas
c	espacio de las sucesiones convergentes
c_0	espacio de las sucesiones que convergen a 0
ℓ_p	espacio de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfacen $(\sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\|^p)^{1/p} < +\infty$ con $1 \leq p < +\infty$
J	inyección canónica de E en E''