

TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

escrito por

JOSE LUIS GONZÁLEZ JUAN

Tutor: Arturo Fernández Arias



Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Educación a Distancia

Trabajo presentado para la obtención del título de
Master Universitario en Matemáticas Avanzadas de la UNED.

Especialidad Análisis Matemático

JUNIO 2017

Abstract en español:

En este trabajo se pretende dar una visión de la importancia de las transformaciones de Möbius o transformaciones fraccionales lineales. Para ello se estudian las transformaciones en el plano complejo ampliado y sus principales características. Con el fin de tener una perspectiva geométrica de la acción de las transformaciones de Möbius se introducen unas redes circulares que según su transformación por ellas establecerán una clasificación de las transformaciones.

Abstract en inglés:

This work is intended to give a vision of the importance of the transformations of Möbius or linear fractional transformations. To this end, we study the transformations in the extended complex plane and its main features. In order to have a geometric perspective of the action of the transformations of Möbius it introduce circular nets that according to its mapping them to establish a classification of the transformations. In order to have a geometric perspective of the action of de Möbius transformations some circular nets are introduced and according the way they are transformed it will be established the classification of the transformations.

Keywords: Transformaciones de Mobius, inversión, circunferencias de Steiner, redes circulares

Contenido

Capítulo 1	Introducción	1
Capítulo 2	Construcción del Grupo de Möbius	2
	2.1. Grupo de Möbius	2
	2.2. Transformaciones particulares	5
	2.3. Inversión	7
Capítulo 3	Propiedades básicas	14
	3.1. Razón simple de tres puntos	14
	3.2. Razón doble de cuatro puntos	15
	3.3. Puntos fijos	21
	3.4. Simetría	22
	3.5. Circunferencias orientadas	32
Capítulo 4	Clasificación de las transformaciones	37
	4.1. Familias de circunferencias	37
	4.2. Clasificación por conjugación o puntos fijos	41
	4.2.1. Transformaciones elípticas	46
	4.2.2. Transformaciones hiperbólicas	48
	4.2.3. Transformaciones loxodrómicas	50
	4.2.4. Transformaciones parabólicas	51
	4.3. Clasificación por la traza	59
Capítulo 5	Conclusiones	62
	Bibliografía	64

Capítulo 1

1. Introducción

En este documento se estudia el concepto de transformación de Mobius así como varios casos particulares de estas transformaciones: Homotecia, traslación, rotación e inversión. Se detiene el estudio en la inversión dada su importancia, comentando las distintas propiedades que tiene este tipo de transformación.

Posteriormente se establecen definiciones como puntos fijos, razón simple de tres números y orientación de circunferencias para llegar a las propiedades fundamentales de las transformaciones de Mobius: Transformación fraccionaria lineal que conserva la razón doble y que dispone de dos puntos fijos como máximo, exceptuando la identidad.

Por último se estudian unas redes de circunferencias o redes circulares que permiten ver con más claridad el efecto de la acción geométrica de las transformaciones de Mobius y atendiendo al número de puntos fijos se establece una clasificación de las transformaciones en sus distintos tipos: Hiperbólica, elíptica, parabólica y loxodrómica. Se comenta también una segunda clasificación de las transformaciones de Mobius según la traza de la matriz que representa cada transformación.

Capítulo 2

2. Construcción del Grupo de Möbius

2.1. Grupo de Möbius

Definición. Decimos que una función de la forma $w = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, con la condición $ad - bc \neq 0$, es una transformación de Möbius.

Imponemos la condición $ad - bc \neq 0$ para que w sea independiente de z , ya que en caso contrario

$$w = \frac{a(z + \frac{b}{a})}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a(z + \frac{b}{a})}{c(z + \frac{b}{a})} = \frac{a}{c}$$

Con esta condición w estará bien definida excepto para el punto $z = -\frac{d}{c}$ para $c \neq 0$, de hecho Tz tiene un polo simple en $-\frac{d}{c}$ y es entera si $c \neq 0$.

Definición: Dada una aplicación $f : D \rightarrow S$, si f es analítica en un dominio D y $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$ entonces f es conforme en D .

Una definición más general nos dice que una aplicación es conforme si conserva los ángulos.

Por tanto las transformaciones de Möbius, $w = \frac{az+b}{cz+d}$, son aplicaciones conformes bien definidas para $z \neq -\frac{d}{c}$ y en $z = -\frac{d}{c}$ tiene un polo simple, siendo entera para $c \neq 0$.

Una transformación de Möbius también recibe el nombre de transformación fraccionaria lineal (LFT en inglés, Linear Fractional Transformation).

Pretendemos realizar una transformación entre los planos ampliados $\hat{C} = \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, para ello se han de tener en cuenta las dos consideraciones siguientes:

1 - Si $c \neq 0$ entonces $w = \infty$ para $z = -\frac{d}{c}$ y $w = \frac{a}{c}$ para $z = \infty$.

2 - Si $c = 0$, $w = \infty$ para $z = \infty$. La transformación

$$Tz = w = \frac{az + b}{cz + d}$$

ampliada con estos valores se denomina transformación fraccionaria lineal (LFT en inglés, Linear Fractional Transformation) o transformación de Möbius, también reciben el nombre de transformaciones homográficas o bilineales y son transformaciones conformes, esto es, conservan los ángulos al pasar de un plano complejo a otro $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Veamos que las transformaciones de Möbius forman un grupo respecto a la composición

La transformación inversa es de Möbius también ya que se adapta a la definición

$$T^{-1}w = z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

luego la función definida por T es biunívoca. Como además se verifica la existencia de la función identidad $w = z$ y la propiedad asociativa $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$, diremos que las transformaciones fraccionarias lineales forman un grupo. Además las transformaciones de Möbius son aplicaciones lineales de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 y son funciones analíticas.

Sea $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$, para otros valores tales que $ad - bc = k \neq 0$ tenemos la transformación

$$z \rightarrow \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{k}}}{\frac{c}{\sqrt{k}}z + \frac{d}{\sqrt{k}}}$$

es una expresión similar a la inicial pero

$$\frac{a}{\sqrt{k}} \frac{d}{\sqrt{k}} - \frac{b}{\sqrt{k}} \frac{c}{\sqrt{k}} = \frac{ad - bc}{k} = 1$$

lo cual indica que todas las transformaciones de Möbius pueden expresarse como como matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc = 1$$

A este grupo de matrices se le denomina $SL(2, \mathbb{C})$, grupo especial lineal de matrices 2×2 con coeficientes complejos y con determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$.

El producto de matrices equivale a la composición de las aplicaciones o transformaciones de Möbius

$$Tz = \frac{az + b}{cz + d} \text{ y } Sz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

definidas por las matrices $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ y por lo tanto ST está definida por

$$ST = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \delta b + \delta d \end{pmatrix}$$

de lo cual

$$(ST)(z) = S(T(z)) = \frac{\alpha \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + \beta}{\gamma \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + \delta} = \frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d}$$

es decir, la composición de transformaciones de Möbius se corresponde con el producto de matrices. Además la transformación definida por $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ verifica

que $T^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ que es una transformación de Möbius; y la matriz identi-

dad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se corresponde con la transformación $z \rightarrow \frac{1z+0}{0z+1} = z$, y llegamos a la conclusión de que el conjunto de transformaciones de Möbius forman un grupo.

2.2. Transformaciones particulares

Vamos a ver los diferentes tipos de transformaciones que nos podemos encontrar, el resto estarán formadas por composiciones de éstas.

- Traslación. Del tipo $w = z + \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{C}$
- Rotación. Expresión $w = kz$ con $k \in \mathbb{C}$, $|k| = 1$
- Homotecia. Expresión $w = kz$ con $k \in \mathbb{R}^+$. Si $k > 1$ se llama dilatación, si $0 < k < 1$ se denomina contracción. Como para todo $k \in \mathbb{C}$ podemos poner $k = |k| \frac{k}{|k|}$ tenemos que cualquier aplicación de la forma $w = kz$, $k \in \mathbb{C}$, podemos escribirla como $w = kz = |k| \frac{k}{|k|} z$ y por tanto es la composición de una rotación seguida de una homotecia.

- Inversión. Del tipo $w = \frac{1}{z}$.

Dada una transformación de Möbius con expresión general $\frac{az+b}{cz+d}$ con $c \neq 0$ y considerando $ad - bc = 1$, escribimos

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c}$$

donde podemos apreciar entonces que una LFT se compone de: Una traslación $z \rightarrow z + \frac{d}{c}$, una inversión $z \rightarrow \frac{1}{z}$, una rotación y una homotecia $z \rightarrow \frac{bc-ad}{c^2}z$, seguida de otra traslación $z \rightarrow z + \frac{a}{c}$.

Definición. *La esfera de Riemann es la esfera unitaria que incluye al punto del infinito* $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / |x| = 1\}$.

Para asociar cada punto del plano complejo con cada punto de S^2 utilizamos el concepto de proyección estereográfica.

Definición. *Proyección estereográfica:* Es un sistema de representación gráfico en el cual se proyecta la superficie de una esfera sobre un plano mediante un conjunto de rectas que pasan por un foco. En nuestro caso asociamos cada punto del plano complejo con cada punto de la esfera de Riemann S^2 de la siguiente manera: Tomamos el plano $x_3 = 0$ como el plano complejo \mathbb{C} y la recta que une o proyecta el polo norte $(0, 0, 1)$ de la esfera de Riemann con cualquier otro punto de ella corta a \mathbb{C} en un único punto.

Una traslación de la esfera de Riemann, movimiento de la esfera de un lugar a otro, supone una traslación en el plano, mover el plano de un lugar a otro.

Un desplazamiento de la esfera a lo largo del eje OX_3 supone una homotecia en el plano complejo.

Una rotación de la esfera sobre el eje OX_3 supone una rotación del plano.

Una rotación de la esfera sobre el eje horizontal OX_1 o OX_2 corresponde a una inversión en el plano complejo

Como

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2(z + \frac{d}{c})} + \frac{a}{c}$$

tenemos que una transformación de Möbius puede entenderse como una proyección estereográfica de \mathbb{C} sobre la esfera de Riemann, seguida de un desplazamiento (traslación), una rotación de ésta (inversión), otro desplazamiento (homotecia) y posteriormente una proyección estereográfica de la esfera sobre el plano.

Estas equivalencias entre los movimientos de la esfera y del plano se aprecian muy bien en el video siguiente realizado por la Universidad de Minnesota, video

galardonado con varios premios dada su magnífica realización:

<https://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY> [12]

Dada la importancia de la inversión vamos a profundizar un poco más en ella.

2.3. Inversión

Vamos a ver que una transformación de este tipo transforma circunferencias en circunferencias o rectas y rectas en rectas o circunferencias. Sea la expresión en el plano z dada por $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$, que representa una circunferencia si $A \neq 0$ o representa una recta si $A = 0$. De la forma de la inversión tenemos $w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w}$; sea $z = x + iy$ y $w = u + iv$, entonces

$$x + iy = \frac{1}{u + iv} \Rightarrow x = \frac{u}{u^2 + v^2}, y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

sustituyendo obtenemos

$$A\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right)^2 + A\left(\frac{-v}{u^2 + v^2}\right)^2 + B\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) + C\left(\frac{-v}{u^2 + v^2}\right) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2}\right) + B\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) + C\left(\frac{-v}{u^2 + v^2}\right) + D = 0 \Rightarrow A\frac{1}{u^2 + v^2} + B\frac{u}{u^2 + v^2} - C\frac{v}{u^2 + v^2} + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0 \Rightarrow A + Bu - Cv + Du^2 + Dv^2 = 0$$

Vamos a ver según los valores de A y D qué es lo que se está manejando en la transformación:

Si	Plano z	Plano w
$A \neq 0, D \neq 0$	Circunferencia que no pasa por el origen	Circunferencia que no pasa por el origen
$A \neq 0, D = 0$	Circunferencia que pasa por el origen	Recta que no pasa por el origen
$A = 0, D \neq 0$	Recta que no pasa por el origen	Circunferencia que pasa por el origen
$A = 0, D = 0$	Recta que pasa por el origen	Recta que pasa por el origen

Se muestran varias inversiones de rectas y circunferencias en las siguientes figuras.

* Sea $w = Tz = \frac{1}{z} \forall z \in \mathbb{C}$, $T(Tz) = z$ y $Tz = z \iff |z| = 1$ (z es la circunferencia unidad)

* Las rectas que pasan por el origen se transforman en rectas que pasan por el origen

* La inversión de la circunferencia unidad $C [(0, 0), 1]$ en el plano z es ella misma en el plano w . Veámoslo, sea una circunferencia en el plano z , definida por la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, con $z = x + iy$, sea la inversión $w = \frac{1}{z} \implies z = \frac{1}{w}$, con $z = x + iy$ y $w = u + iv$, entonces

$$x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$$

y por tanto

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia resulta en la inversión

$$x^2 + y^2 = R^2 \implies \left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2 + v^2}\right)^2 = R^2 \implies$$

$$\implies \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2 = R^2 \iff u^2 + v^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2$$

que es una circunferencia en el plano w centrada en $(0,0)$ y radio $\frac{1}{R}$, $C \left[(0,0), \frac{1}{R} \right]$

como queríamos ver.

* Las circunferencias que pasan por el origen son transformadas en rectas que no pasan por el origen y viceversa. En la Fig. 2-1 las circunferencias 3 y 4 son invertidas en las rectas 3' y 4' respectivamente.

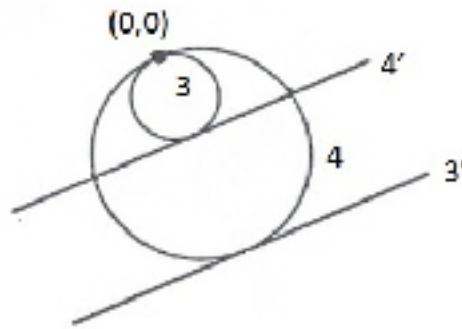


Fig. 2-1

* Si dos circunferencias son tangentes, o una circunferencia y una recta son tangentes, entonces sus imágenes invertidas también lo son. En la Fig. 2-2 la circunferencia 1 es tangente a la circunferencia unidad y a dos rectas que pasan por el origen, por tanto su imagen 1' es también tangente a las imágenes de las dos rectas y a la imagen de la circunferencia unidad.

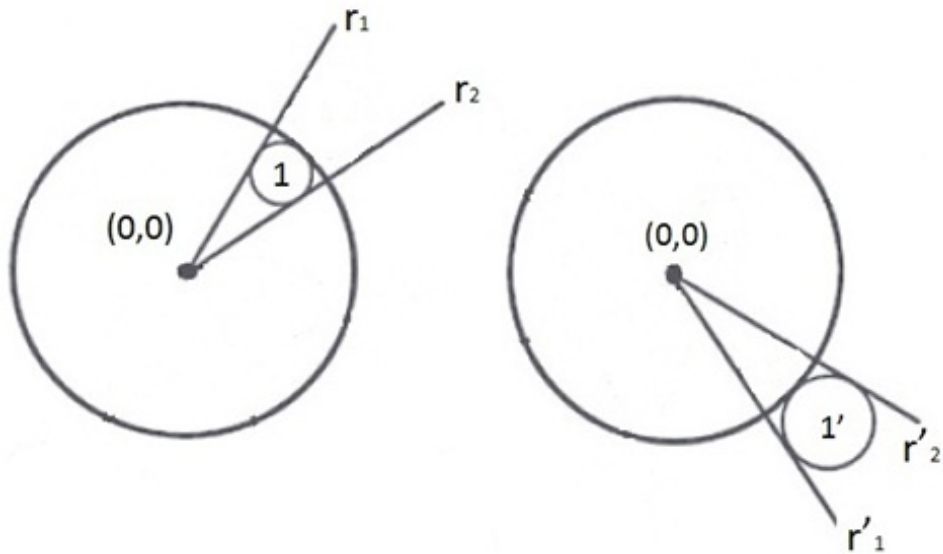


Fig. 2-2

* Una circunferencia es ortogonal a la circunferencia unidad $C [(0, 0), 1]$, si y sólo si, las tangentes en cada punto de corte son perpendiculares y pasan por el centro de las circunferencias. En la Fig. 2-3 la circunferencia 2 corta perpendicularmente a la circunferencia unidad y se invierte en la circunferencia $2'$. Los puntos de intersección de 2 con la circunferencia unidad se sitúan sobre dos rectas tangentes a 2 y que pasan por el origen.

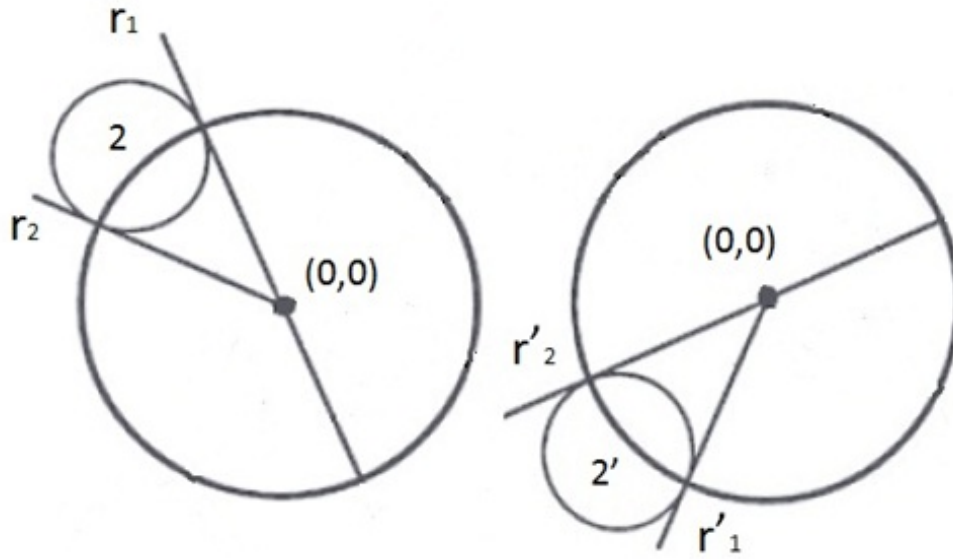


Fig. 2-3

Ejemplos relacionados.

Ejemplo 1. Sea la transformación $w = \frac{z}{z-i}$, determinemos la imagen de la circunferencia $|z| = 1$ en el plano w

Solución. $w = \frac{z}{z-i} \Rightarrow wz - iw - z = 0 \Rightarrow z(w-1) = iw \Rightarrow z = \frac{iw}{w-1}$, como $|z| = 1 \Rightarrow \left| \frac{iw}{w-1} \right| = 1 \Rightarrow |w| = |w-1|$, sustituyendo $w = u + iv$ obtenemos $u^2 + v^2 = (u-1)^2 + v^2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$; y por tanto la imagen de la circunferencia $|z| = 1$ por $w = \frac{z}{z-i}$ es la recta $u = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2. Sea la transformación $w = \frac{z}{z-i}$, determinemos la imagen del semiplano $y \geq 2x$

$$\begin{aligned} \text{Solución. } w = \frac{z}{z-i} &\Rightarrow z = \frac{iw}{w-1} \\ x+iy = \frac{i(u+iv)}{u+iv-1} &= \frac{-v+iu}{(u-1)+iv} = \frac{(-v+iu)[(u-1)-iv]}{(u-1)^2+v^2} = \frac{v+i(u^2+v^2-u)}{(u-1)^2+v^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{v}{(u-1)^2+v^2}, \quad y = \frac{u^2+v^2-u}{(u-1)^2+v^2} \end{aligned}$$

luego la imagen del semiplano $y \geq 2x$ por $w = \frac{z}{z-i}$ es

$$\frac{u^2 + v^2 - u}{(u-1)^2 + v^2} \geq \frac{2v}{(u-1)^2 + v^2} \iff u^2 + v^2 - u - 2v \geq 0$$

vamos a completar cuadrados para hacer

$$u^2 + v^2 - u - 2v = (u-a)^2 + (v-b)^2 \Rightarrow b = 1, a = \frac{1}{2}$$

y finalmente sustituyendo

$$u^2 + v^2 - u - 2v = (u - \frac{1}{2})^2 + (v - 1)^2 - 1 - \frac{1}{4}$$

por lo que $(u - \frac{1}{2})^2 + (v - 1)^2 \geq \frac{5}{4}$ que resulta ser la parte exterior de la circunferencia $C((\frac{1}{2}, 1), \frac{\sqrt{5}}{2})$

Es por esto que cuando hablemos de transformaciones de Möbius utilizaremos el sentido amplio de circunferencia: Circunferencia o recta, no haremos distinciones entre ellas a no ser que se indique de manera implícita.

A continuación expondremos otros ejemplos de lo que hemos visto.

Ejemplo 3. Determinemos la imagen del cuadrado de vértices $a = 1, b = 1 + i, c = i$ y $d = 0$, mediante la aplicación $f(z) = (1 + i)z + 3$

Solución. La aplicación dada transforma el cuadrado anterior de vértices $a = 1, b = 1 + i, c = i$ y $d = 0$ en el cuadrado de vértices $a' = 4 + i, b' = 3 + 2i, c' = 2 + i$ y $d' = 3$. Esta transformación puede ponerse como composición de estas dos: $S \circ T$ con $Tz = (1 + i)z$ y $Sz = Tz + 3$ que son una semejanza y una traslación respectivamente.

$1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ es la semejanza (cambio de escala, mantiene la forma y cambia el tamaño), que es a su vez composición de una homotecia (transformación $w = kz$) de razón $\sqrt{2}$ y de la rotación de centro el origen y ángulo $\frac{\pi}{4}$. Por lo tanto la transformación dada es la composición de una homotecia y una traslación.

Ejemplo 4. Razonar por qué la simetría $z \rightarrow \bar{z}$ no es una transformación de Möbius

Solución. Procederemos por reducción al absurdo, suponemos que $z \rightarrow \bar{z}$ es una transformación de Möbius $\implies \exists a, b, c, d \in \mathbb{C} / \bar{z} = \frac{az+b}{cz+d} \forall z \in \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; si $z \in \mathbb{R} \implies \bar{z} = z$ de manera que z es un punto fijo de la transformación, luego ésta tendría infinitos puntos fijos y esto solamente ocurre cuando $b = c = 0$ y $a = d$. Por tanto $\bar{z} = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az}{d} = z \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ y esto es una contradicción pues $\bar{i} = -i \neq i$.

Capítulo 3

3. Propiedades básicas

3.1. Razón simple de tres puntos

Definición. Sean z_1, z_2 y z_3 tres puntos de plano complejo \mathbb{C} . La razón simple de esos tres puntos representa el cociente entre los dos segmentos en que queda dividido $\overline{z_1 z_2}$ cuando es dividido por z_3 . Representamos la razón simple de z_1, z_2 y z_3 como (z_1, z_2, z_3) y su expresión es $(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$.

Las aplicaciones afines, las que son de la forma $w = az + b$, conservan la razón simple:

$$\begin{aligned} (T(z_1), T(z_2), T(z_3)) &= \frac{T(z_3) - T(z_1)}{T(z_2) - T(z_3)} = \frac{(az_3 + b) - (az_1 + b)}{(az_2 + b) - (az_3 + b)} = \\ &= \frac{az_3 - az_1}{az_2 - az_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} = (z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

Las transformaciones fraccionarias lineales, $w = \frac{az+b}{cz+d}$ no conservan la razón simple como veremos seguidamente. Sea la transformación de Möbius

$Tz = w = \frac{az+b}{cz+d}$, y vamos a suponer que está normalizada para facilitar los cálculos, es decir $ad - bc = 1$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} (T(z_1), T(z_2), T(z_3)) &= \frac{T(z_3) - T(z_1)}{T(z_2) - T(z_3)} = \frac{\frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d}}{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}} = \\ &= \frac{((az_3 + b)(cz_1 + d) - (az_1 + b)(cz_3 + d))(cz_2 + d)(cz_3 + d)}{(cz_3 + d)(cz_1 + d)((az_2 + b)(cz_3 + d) - (az_3 + b)(cz_2 + d))} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(cz_2 + d)acz_1z_3 + adz_3 + bcz_1 + bd - acz_1z_3 - adz_1 - bcz_3 - bd}{(cz_1 + d)acz_2z_3 + adz_2 + bcz_3 + bd - acz_2z_3 - adz_3 - bcz_2 - bd} = \\
&= \frac{(cz_2 + d)z_3(ad - bc) - z_1(ad - bc)}{(cz_1 + d)z_2(ad - bc) - z_3(ad - bc)} =
\end{aligned}$$

como $ad - bc = 1$ obtenemos

$$= \frac{(cz_2 + d)}{(cz_1 + d)} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$$

es decir

$$(T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = \frac{(cz_2 + d)}{(cz_1 + d)} (z_1, z_2, z_3)$$

la razón simple no se conserva por las transformaciones de Möbius.

Sin embargo como en esta última expresión el primer operador, $\frac{cz_2+d}{cz_1+d}$, no depende de z_3 , tendremos que el cociente de dos razones simples sí es conservado:

$$\frac{(T(z_1), T(z_2), T(z_4))}{(T(z_1), T(z_2), T(z_3))} = \frac{(z_1, z_2, z_4)}{(z_1, z_2, z_3)}$$

Una vez definida la razón simple de tres puntos del plano complejo vamos a precisar el concepto de razón doble de cuatro puntos.

3.2. Razón doble de cuatro puntos

Definición. La razón doble de cuatro puntos (*cross ratio* en inglés) distintos de \hat{C} , z_1, z_2, z_3, z_4 , la representamos como (z_1, z_2, z_3, z_4) y la definimos como el cociente de dos razones simples de la siguiente manera

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1, z_2, z_4)}{(z_1, z_2, z_3)}$$

y como sabemos que el cociente de dos razones simples se conserva obtenemos

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \frac{(z_1, z_2, z_4)}{(z_1, z_2, z_3)} = \frac{(T(z_1), T(z_2), T(z_4))}{(T(z_1), T(z_2), T(z_3))} = \\ &= (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (w_1, w_2, w_3, w_4) \end{aligned}$$

obteniendo que *la razón doble es invariante respecto a las transformaciones de Möbius*.

Si z_1, z_2, z_3 son tres puntos distintos del plano complejo ampliado $\hat{C} = \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, existe siempre una transformación fraccionaria lineal que los transforma en $1, 0, \infty$, de manera que si ninguno de los tres es infinito se verifica que $(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = T(z)$. La explicación es la siguiente:

$$T(z_1) = 1, \quad T(z_2) = 0, \quad T(z_3) = \infty$$

$$\begin{aligned} (w, w_1, w_2, w_3) &= (T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = \frac{T(z) - T(z_2)}{T(z) - T(z_3)} \frac{T(z_1) - T(z_3)}{T(z_1) - T(z_2)} = \\ &= \frac{T(z)}{T(z) - T(z_3)} (1 - T(z_3)) = \lim_{T(z_3) \rightarrow \infty} \frac{T(z)}{T(z) - T(z_3)} (1 - T(z_3)) = T(z) = w \end{aligned}$$

Hay varias maneras de expresar la razón doble de cuatro puntos según el orden en que coloquemos los números a evaluar, en este documento se utilizará la expresión del libro de Ahlfors que es una de las más utilizadas y en el que para la razón (z, z_1, z_2, z_3)

entiende que las imágenes de los puntos distintos z_1, z_2, z_3 son $T(z_1) = 1, T(z_2) = 0, T(z_3) = \infty$. Utilizando esta notación se obtiene

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

De esta forma T está bien definida, pues dada otra transformación lineal S que también lleve z_1, z_2, z_3 a $1, 0, \infty$ se tendría

$$ST^{-1}(1) = S(z_1) = 1, ST^{-1}(0) = S(z_2) = 0 \text{ y } ST^{-1}(\infty) = S(z_3) = \infty$$

con lo que $ST^{-1} = Id \implies S = T$.

En el contexto de las transformaciones fraccionarias lineales o de Möbius escribiremos de manera indiferente $T(z)$ y Tz , y suponiendo además que $T(z_1) = 1, T(z_2) = 0, T(z_3) = \infty$.

* T puede escribirse como $Tz = \frac{z-z_2}{z-z_3} \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$, de manera que si z_1, z_2 o z_3 es infinito, Tz se reduce respectivamente a $\frac{z-z_2}{z-z_3}, \frac{z_1-z_3}{z-z_3}$ o $\frac{z-z_2}{z_1-z_2}$.

*Consideremos z, z_1, z_2, z_3 cuatro puntos distintos de \hat{C} , vamos a definir la razón doble de (z, z_1, z_2, z_3) como la imagen de z por la única transformación fraccionaria lineal que lleva z_1, z_2, z_3 a $1, 0, \infty$.

Teorema 3.2.1. *Si z_2, z_3, z_4 son tres puntos distintos de \hat{C} y T es una transformación lineal entonces $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) \forall z_1 \in \hat{C}$.*

Demostración: Sea $Sz = (z, z_2, z_3, z_4)$, si hacemos $M = ST^{-1}$ tenemos $M(Tz_2) = 1, M(Tz_3) = 0, M(Tz_4) = \infty$ y entonces $ST^{-1}z = (z, Tz_2, Tz_3, Tz_4) \forall z \in \hat{C}$ y en concreto si $z = Tz_1$ tenemos el resultado. c.q.d

Teorema 3.2.2. *Si z_2, z_3, z_4 son puntos distintos de \hat{C} y w_2, w_3, w_4 son puntos distintos de \hat{C} entonces existe una única transformación lineal S tal que $Sz_2 = w_2, Sz_3 = w_3$ y $Sz_4 = w_4$.*

Demostración: Si tenemos las transformaciones $Tz = (z, z_2, z_3, z_4)$ y $Mz = (z, w_2, w_3, w_4)$ y escribimos $S = M^{-1}T$ entonces S es la transformación que buscamos

ya que $Sz_2 = M^{-1}T(z_2) = M^{-1}(1) = w_2$, $Sz_3 = M^{-1}T(z_3) = M^{-1}(0) = w_3$ y $Sz_4 = M^{-1}T(z_4) = M^{-1}(\infty) = w_4$, además si R es otra transformación que verifica $Rz_2 = w_2, Rz_3 = w_3$ y $Rz_4 = w_4$ entonces $R^{-1}S$ tiene tres puntos fijos z_2, z_3, z_4 y por tanto $R^{-1}S = Id$, $R = S$. c.q.d

Proposición 3.2.1. Sean z_1, z_2, z_3, z_4 cuatro puntos diferentes de \hat{C} , la razón doble (z_1, z_2, z_3, z_4) es un número real si y sólo si todos los puntos son concíclicos o están alineados.

Demostración: Desde un punto de vista geométrico es lógico ya que

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \implies \arg(z_1, z_2, z_3, z_4) = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

es 0 ó $\pm\pi$, luego los puntos se encuentran en una recta o en una circunferencia. Desde un punto de vista analítico veamoslo: Sea $S : \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ definida por $Sz = (z, z_2, z_3, z_4)$ con $Sz_2 = 1, Sz_3 = 0, Sz_4 = \infty$, entonces $S^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \hat{C} / (z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}\}$. Sea $z = S^{-1}w \implies w = Sz$. Sea

$$Sz = \frac{az + b}{cz + d}, w \in \mathbb{R} \iff w = \bar{w} \iff \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}} \iff$$

$$\iff (a\bar{c} - c\bar{a})|z|^2 + (a\bar{d} - c\bar{b})z + (b\bar{c} - d\bar{a})\bar{z} + (b\bar{d} - d\bar{b}) = 0$$

Si $a\bar{c} - c\bar{a} = 0$ es la ecuación de una recta y si $a\bar{c} - c\bar{a} \neq 0$ se divide la ecuación por $a\bar{c} - c\bar{a}$ resultando $|z|^2 + Az + \bar{A}\bar{z} + B = 0$ que representa la ecuación de una circunferencia, despejando obtenemos $B = -(|z|^2 + Az + \bar{A}\bar{z})$. Entonces

$$|z + \bar{A}|^2 = (z + \bar{A})(\bar{z} + A) = |z|^2 + Az + \bar{A}\bar{z} + |A|^2 = |A|^2 - B$$

por tanto $|z|^2 + Az + \bar{A}\bar{z} + B = |z + \bar{A}|^2 - |A|^2 + B$ que es la ecuación de una circunferencia. c.q.d.

Recordemos que cuando hablamos de transformaciones de Möbius utilizamos el sentido amplio de circunferencia: Circunferencia o recta. Entonces según acabamos de ver una LFT transforma circunferencias en circunferencias.

Sea Γ una circunferencia en $\hat{\mathbb{C}}$, S una LFT, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de Γ y sea $w_j = z_j$ para $j = 2, 3, 4$, podemos asegurar que $S(\Gamma) = \Gamma'$, siendo Γ' otra circunferencia, ya que para cualquier $z \in \hat{\mathbb{C}} \implies (z, z_2, z_3, z_4) = (Sz, w_2, w_3, w_4)$ por el Teorema 3.2.1, y a su vez ese término es igual a (Sz, Sz_2, Sz_3, Sz_4) . Por la proposición anterior si $z \in \Gamma \implies (z, z_2, z_3, z_4)$ y (Sz, w_2, w_3, w_4) son reales, lo que indica que $Sz \in \Gamma'$. c.q.d.

Ejemplos.

Ejemplo 1. Se pretende encontrar una transformación lineal que lleve $0, i, -i$ a $1, -1, 0$

Solución. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C} / ad - bc \neq 0$ y $Sz = \frac{az+b}{cz+d}$ que verifique $S(0) = 1, S(i) = -1$ y $S(-i) = 0$, es decir,

$$S(0) = \frac{b}{d} = 1, S(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = -1 \text{ y } S(-i) = \frac{-ai+b}{-ci+d} = 0$$

obtenemos: $b = d, ai + b = -ci - d, b = ai \implies b = d = ai$ y $2ai = -ci - ai \implies b = d = ai, c = -3a$, luego $S(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+ai}{-3az+i} = \frac{z+i}{-3z+i} \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$

Ejemplo 2. Sea el cuadrilátero con vértices consecutivos z_1, z_2, z_3, z_4 situados sobre una circunferencia. Vamos a comprobar que se verifica la siguiente igualdad:

$$|z_1 - z_3| |z_2 - z_4| = |z_1 - z_2| |z_3 - z_4| + |z_2 - z_3| |z_1 - z_4|$$

Solución. Si alguno de los $z_i, i = 1, 2, 3, 4$ son iguales la igualdad es clara, supongamos por ejemplo $z_2 = z_3$ tenemos $|z_1 - z_2| |z_2 - z_4| = |z_1 - z_2| |z_2 - z_4| + 0$ e incluso para $z_1 = z_4 : |z_1 - z_3| |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2| |z_3 - z_1|$. Si todos los coeficientes son distintos dividimos ambos miembros de la igualdad por $|z_2 - z_3| |z_1 - z_4|$ y se obtiene en función de las razones dobles el siguiente resultado:

$$\frac{|z_1 - z_3| |z_2 - z_4|}{|z_2 - z_3| |z_1 - z_4|} = \frac{|z_1 - z_2| |z_3 - z_4|}{|z_2 - z_3| |z_1 - z_4|} + 1 \Leftrightarrow |(z_1, z_2, z_3, z_4)| = 1 + |(z_1, z_3, z_2, z_4)|$$

Sea T una transformación de Möbius con $Tz_2 = 1, Tz_3 = 0, Tz_4 = \infty$, ponemos $w = Tz_1 = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, entonces $w \in \mathbb{R}$ ya que Tz_1 es concíclico con $1, 0, \infty$ y además $w > 1$ por la ordenación de z_1, z_2, z_3, z_4 . Tenemos entonces $(z_1, z_3, z_2, z_4) = (w, 0, 1, \infty) = w - 1$ resultando finalmente: $1 + |(z_1, z_3, z_2, z_4)| = 1 + |1 - w| = 1 + w - 1 = w = |(z_1, z_2, z_3, z_4)|$, es decir $|(z_1, z_3, z_2, z_4)| = |(z_1, z_2, z_3, z_4)|$ c.q.d. Geométricamente la igualdad del enunciado es el *teorema de Ptolomeo*: El producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico es la suma de los productos de los lados opuestos (Fig. 3-1).

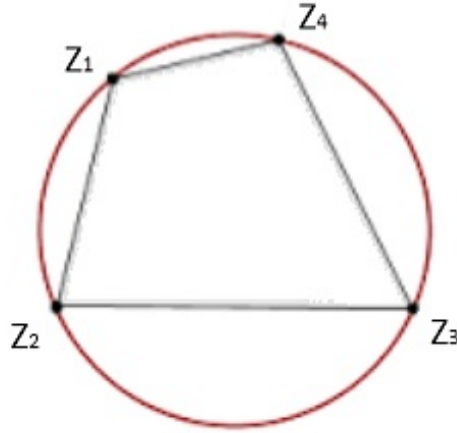


Fig. 3-1. Cuadrilátero cíclico

Propiedades principales de la razón doble:

1. $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a) \forall a \in \mathbb{R}$

Demostración.

$$\begin{aligned} (z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a) &= \frac{(z_1 - a) - (z_3 - a)}{(z_1 - a) - (z_4 - a)} \frac{(z_2 - a) - (z_4 - a)}{(z_2 - a) - (z_3 - a)} = \\ &= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \end{aligned}$$

$$2. (z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4} \right)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4} \right) &= \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4}} \cdot \frac{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_4}}{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}} = \\ &= \frac{\frac{z_3 - z_1}{z_1 z_3} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_2 z_4}}{\frac{z_4 - z_1}{z_1 z_4} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_2 z_3}} = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{z_1 z_2 z_3 z_4} \cdot \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{z_1 z_2 z_3 z_4} = \\ &= \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \end{aligned}$$

$$3. (z_1, z_2, z_3, z_4) = (kz_1, kz_2, kz_3, kz_4) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (kz_1, kz_2, kz_3, kz_4) &= \frac{kz_1 - kz_3}{kz_1 - kz_4} \cdot \frac{kz_2 - kz_4}{kz_2 - kz_3} = \\ &= \frac{k(z_1 - z_3)}{k(z_1 - z_4)} \cdot \frac{k(z_2 - z_4)}{k(z_2 - z_3)} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \end{aligned}$$

3.3. Puntos fijos

Definición. Sea $w = T(z)$ una aplicación cualquiera, se dice que un punto z_1 es un punto fijo de T si $T(z_1) = z_1$.

Para el caso particular de las transformaciones de Möbius tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una transformación de Möbius, es decir, se verifica $ad - bc \neq 0$, y T no es la identidad $\Rightarrow T$ fija a lo más dos puntos.

Demostración. Si z es un punto fijo de T podemos escribir

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z \iff az+b = cz^2 + dz \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

que es una ecuación de segundo grado tal que para $c \neq 0$ tiene a lo sumo dos soluciones. Para el caso en que $c = 0$, la ecuación $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ pasa a ser $(d-a)z - b = 0$, que tiene una única solución para $d-a \neq 0$.

Y para el caso en que $c = 0$ y $d-a = 0$ la ecuación $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ se reduce a $b = 0$ y quedaría $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az}{a} = z$, que es la transformación identidad y que como ya sabemos tiene infinitos puntos fijos.

De todo esto hemos obtenido que una transformación de Möbius fija a lo más dos puntos salvo que sea la identidad.

3.4. Simetría

Una transformación fraccionaria lineal o de Möbius con coeficientes reales, T , transforma el eje real en sí mismo. Si $z = u + iv$, su simétrico respecto al eje real es $\bar{z} = u - iv$ y entonces Tz y $T\bar{z}$ son simétricos en el plano w ya que

$$T(z) = \frac{au + iav + b}{cu + icv + d} = \frac{(au + b) + iav}{(cu + d) + icv} \text{ y } T\bar{z} = \frac{au - iav + b}{cu - icv + d} = \frac{(au + b) - iav}{(cu + d) - icv}$$

En general si T transforma el eje real en una circunferencia C , los puntos $w = Tz$ y $w^* = T\bar{z}$ son simétricos respecto a ella.

Definición. z y z^* son simétricos respecto a una circunferencia C que pasa por $z_1, z_2, z_3 \Leftrightarrow (z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$.

Los puntos que se encuentran en C son simétricos de sí mismos. La transformación $z \mapsto z^*$ es biunívoca y se denomina *reflexión o simetría respecto a C* . Veamos los principales casos posibles:

- Si C es una recta, elegimos $z_3 = \infty$.

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}$$

y por tanto tenemos: $\frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}$ lo que implica $|z^* - z_2| = |z - z_2|$. Como $z_2 \in C$ éste puede ser cualquier punto de la recta C , lo que implica que z y z^* equidistan de todos los puntos de C , ocurre también que $\text{Im} \frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = -\text{Im} \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}$ que sugiere que z y z^* se encuentran en semiplanos diferentes respecto a C . De todo esto concluimos que C es la mediatriz del segmento que une z y z^* (Fig. 3-2)

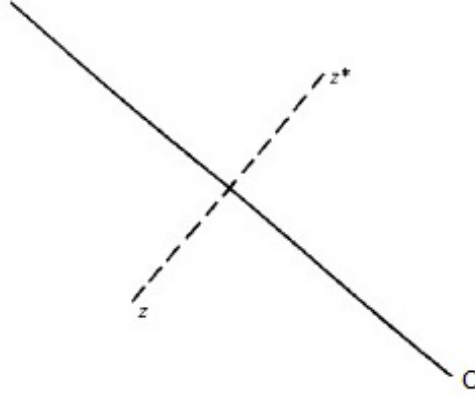


Fig. 3-2. C es la mediatriz del segmento zz^*

- Si C es una circunferencia de centro a y radio R , $C(a, R)$, $z_i \in C$ para

$i = 1, 2, 3$, tenemos $(\bar{z}_i - \bar{a})(z_i - a) = |z_i - a|^2 = R^2 \Rightarrow \bar{z}_i - \bar{a} = \frac{R^2}{z_i - a}$ entonces por la primera propiedad de la razón doble y sustituyendo los valores de $\bar{z}_i - \bar{a}$,

$$\overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = (\overline{z - a}, \overline{z_1 - a}, \overline{z_2 - a}, \overline{z_3 - a}) = (\bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_1 - a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a})$$

y por las propiedades segunda, tercera y primera respectivamente:

$$\begin{aligned} \left(\bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_1 - a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}\right) &= \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{a}}, \frac{z_1 - a}{R^2}, \frac{z_2 - a}{R^2}, \frac{z_3 - a}{R^2}\right) = \\ &= \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a\right) = \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3\right) \end{aligned}$$

luego $\overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3\right)$ y por tanto el punto simétrico de z es $z^* = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$, es decir,

$$z^* - a = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} \Rightarrow (z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$$

Resulta que

$$|z^* - a| |z - a| = R^2 \quad \text{y} \quad \frac{z^* - a}{z - a} > 0$$

con lo cual z y z^* están en la misma semirecta a partir de a (Fig. 3-3). El punto simétrico de a es ∞ .

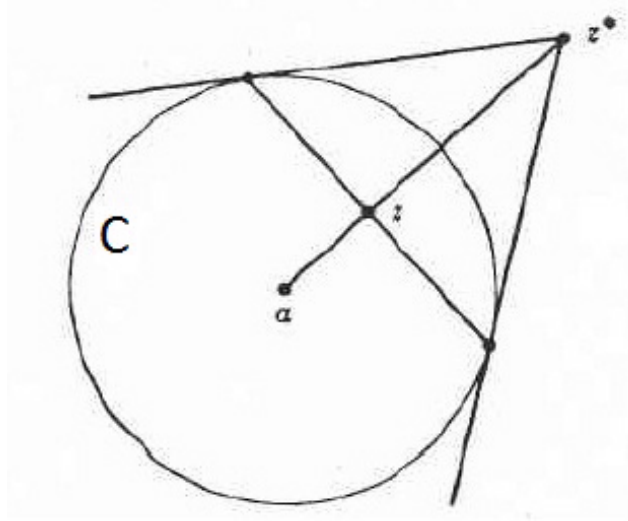


Fig. 3-3. Reflexión en una circunferencia

Teorema 3.4.1. *Principio de simetría. Si una transformación lineal lleva una circunferencia C_1 a otra circunferencia C_2 entonces transforma cualquier par de puntos simétricos respecto a C_1 en otro par de puntos simétricos respecto a C_2 .*

Las transformaciones lineales conservan la simetría: Si C_1 es el eje real y z y z^* son simétricos, mediante una transformación lineal con coeficientes reales se lleva el eje real C_1 en sí mismo, haciendo que Tz y $T\bar{z}$ sean nuevamente simétricos; si C_1 es el eje real y z y z^* son simétricos, mediante una transformación lineal llevamos C_1 a una circunferencia C_2 , Tz y $T\bar{z}$ son simétricos. Estos dos ejemplos son ciertos por la propia definición de simetría, en otros caso se utiliza una transformación intermedia que transforma C_1 en el eje real.

Lema 3.4.1. *La reflexión lleva circunferencias a circunferencias (en sentido amplio).*

Demostración. La reflexión es la composición de dos transformaciones, una conjugación $z \rightarrow \bar{z}$ y una transformación lineal de la forma $z \rightarrow \frac{R^2}{z-\bar{a}} + a$, ambas transformaciones llevan circunferencias a circunferencias y por la tanto la composición, es decir, la reflexión, lleva circunferencias a circunferencias. c.q.d

Lema 3.4.2. *Supongamos que las circunferencias C_1 y C_2 son simétricas respecto a la recta l , y sea C_3 la imagen reflejada de C_1 respecto a C_2 . Entonces C_3 es también simétrica respecto a la recta l .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que l es el eje X y el centro de C_2 es el origen. Si $z \in C_1$ y $z^* \in C_3$ como $z^* - a = \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}$ y $a = (0, 0)$ tenemos que $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}}$ y por tanto $z^*\bar{z} = R^2$, luego $\bar{z} \in C_1 \Rightarrow \overline{z^*} \in C_3$, esto es, C_3 es simétrica respecto a l (es el caso de z y z^* simétricos respecto de una circunferencia de radio R y centro el origen $\Rightarrow (z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2 \Rightarrow z^*\bar{z} = R^2$). c.q.d

El principio de simetría es utilizado normalmente para encontrar una transformación lineal que lleve una circunferencia C a otra C' . Para ello imponemos que tres

puntos z_1, z_2, z_3 situados sobre C se transformen en tres puntos w_1, w_2, w_3 que estén sobre C' , de esta manera la transformación es $T(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$. Operando de otra manera podemos también determinar la transformación exigiendo que un punto z_1 de C se transforme en un w_1 de C' y que un z_2 que no pertenezca a C se transforme en un w_2 que no esté en C' , como el punto simétrico de z_2 respecto a C , z_2^* , tiene que corresponder con el punto simétrico de w_2 respecto a C' , w_2^* , la transformación ha de ser $(w, w_1, w_2, w_2^*) = (z, z_1, z_2, z_2^*)$.

Ejemplos.

Ejemplo 1. Veamos que toda reflexión lleva circunferencias a circunferencias (entendiendo circunferencias en sentido amplio, circunferencias o rectas).

Solución. Sea la reflexión $z \rightarrow z^* = g(z)$ se define por medio de $(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$. Sea T una transformación fraccionaria lineal o de Möbius tal que $Tz_1 = 1, Tz_2 = 0, Tz_3 = \infty$ y sea $f(z) = \bar{z}$. Tenemos entonces que $Tz^* = \overline{Tz}$ y $g = T^{-1} \circ f \circ T$ ya que

$$g(z) = (T^{-1}fT)(z) = T^{-1}(f(T(z))) = T^{-1}(\overline{Tz}) = T^{-1}(Tz^*) = z^*$$

Como sabemos que T transforma circunferencias en circunferencias basta ver que f hace lo mismo.

Una circunferencia que no pase por ∞ tiene la forma $|z - a| = r$ y es transformada por f en $r = |\bar{z} - a| = |z - \bar{a}|$ que es otra circunferencia. Si la circunferencia pasa por ∞ , es decir, es una recta, tiene la forma $z = x + iy$ con $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y es transformada por f en $z = x - iy$ con $ax - by + c = 0$ que es también una recta (una circunferencia que pasa por ∞).

Ejemplo 2. Determinemos las simetrías del eje imaginario y de la circunferencia $|z| = 1$ respecto de la circunferencia $|z - 2| = 1$.

Solución. Sabemos que la reflexión o simetría respecto de una circunferencia es: $(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$, obtenemos para una circunferencia de centro a y

radio R : $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a$, en nuestro caso el punto simétrico de z es $z^* = \frac{1}{\bar{z}-2} + 2$.

La reflexión del eje imaginario es una circunferencia simétrica respecto al eje X (lemas 3.4.1 y 3.4.2). Más aún, $0^* = \frac{1}{0-2} + 2 = \frac{3}{2}$, $\infty^* = \frac{1}{\infty-2} + 2 = 2$, ambas imágenes se sitúan sobre el eje X , de tal manera que la imagen del eje Imaginario es $|z - \frac{7}{4}| = \frac{1}{4}$ (Fig. 3-4) . Se podría resolver también de la siguiente manera:

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a \implies z = \frac{R^2}{z^*-\bar{a}} + a, z \in \text{Im } z \iff z + \bar{z} = 0$$

tenemos que

$$z + \bar{z} = 0 \iff \left(\frac{R^2}{z^*-\bar{a}} + a\right) + \left(\frac{R^2}{\bar{z}^*-\bar{\bar{a}}} + \bar{a}\right) = 0$$

Sustituimos $z^* = w$ para simplificar operaciones,

$$\left(\frac{R^2}{w-\bar{a}} + a\right) + \left(\frac{R^2}{\bar{w}-a} + \bar{a}\right) = 0$$

operando obtenemos

$$\left|w + \frac{R^2 - a(a + \bar{a})}{a + \bar{a}}\right| = \sqrt{\left(\frac{R^2 - a(a + \bar{a})}{a + \bar{a}}\right)^2 + R^2 - a\bar{a}}$$

y sustituyendo $a = 2$ y $R = 1$

$$\implies \left|w + \frac{1^2 - 2(2 + 2)}{2 + 2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1^2 - 2(2 + 2)}{2 + 2}\right)^2 + 1^2 - 2^2} \iff \left|w - \frac{7}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

luego la reflexión del eje Imaginario respecto de la circunferencia $|z - 2| = 1$ es

$$|z - \frac{7}{4}| = \frac{1}{4}$$

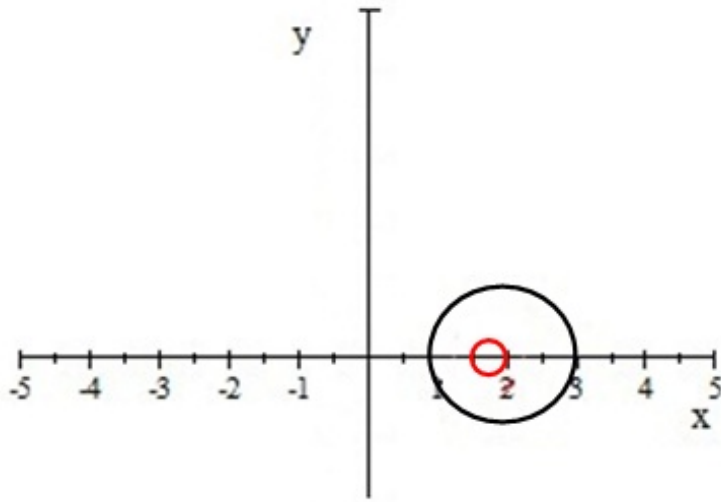


Fig. 3-4. Circunferencias $|z - 2| = 1$ y $|z - \frac{7}{4}| = \frac{1}{4}$

La reflexión de la circunferencia $|z| = 1$: Tenemos

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a \Rightarrow z = \frac{R^2}{z^* - \bar{a}} + a = \frac{R^2}{w - \bar{a}} + a$$

para $z^* = w$, entonces para la circunferencia $|z| = 1 \Rightarrow \left| \frac{R^2}{w - \bar{a}} + a \right| = 1$ y operando

llegamos a

$$\left(w - \frac{4}{3} \right) \left(\bar{w} - \frac{4}{3} \right) - \frac{1}{9} = 0 \iff \left| w - \frac{4}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

es decir, la reflexión de la circunferencia $|z| = 1$ respecto de la circunferencia $|z - 2| =$

1 es $|z - \frac{4}{3}| = \frac{1}{3}$ (Fig. 3-5).

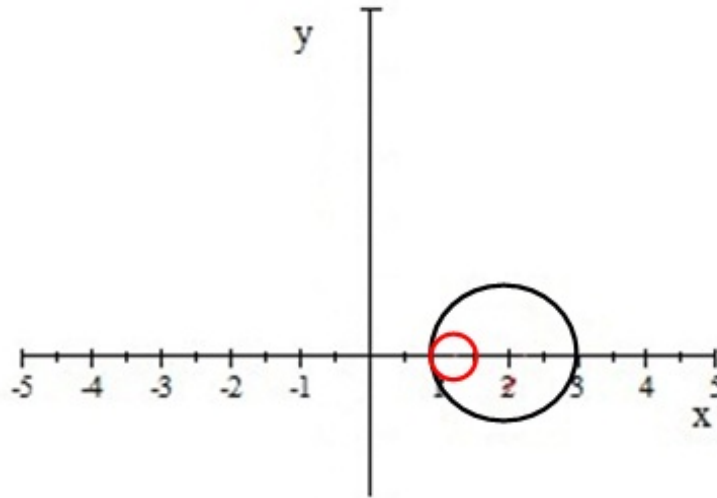


Fig. 3-5. Circunferencias $|z - 2| = 1$ y $|z - \frac{4}{3}| = \frac{1}{3}$

Ejemplo 3. Determinemos la transformación de Möbius que lleva la circunferencia $|z| = 2$ a $|z + 1| = 1$, el punto -2 al origen y el origen a i .

Solución. Sea C_1 la circunferencia $|z| = 2$ y C_2 la circunferencia $|z + 1| = 1$. Sea S la transformación de Möbius o LFT que lleva C_1 a C_2 y en la cual -2 es transformado en 0 y 0 es llevado a i . (Fig. 3-6).

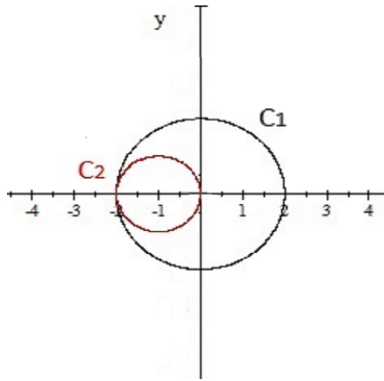


Fig. 3-6

$+\infty$ es el simétrico de 0 respecto de C_1 (ya que 0 es su centro) y 0 se lleva a i por la LFT \Rightarrow El transformado de ∞ mediante LFT es el simétrico de i respecto de C_2 . Tenemos la fórmula $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}-a} + a$, aplicando $R = 1$ y $z = i$ tenemos $z^* = \frac{1}{-i+1} - 1$ luego $z^* = \frac{i}{1-i} = \frac{-1+i}{2}$, por lo que Sz estará definida por

$$S(-2) = 0, \quad S(0) = i, \quad S(\infty) = \frac{-1+i}{2}$$

como $Sz = \frac{az+b}{cz+d}$ utilizando esas tres condiciones:

$$S(-2) = 0 = \frac{-2a+b}{-2c+d} \Rightarrow \text{Como } a = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$S(\infty) = \frac{-1+i}{2} = \frac{a}{c} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{2}{-1+i}$$

$$Sz = \frac{z+2}{\frac{2}{-1+i}z+d} = \frac{(z+2)(-1+i)}{2z+d(-1+i)}; \quad S(0) = i = \frac{2(-1+i)}{d(-1+i)} = \frac{2}{d} \Rightarrow d = \frac{2}{i} = -2i$$

Resultando finalmente la expresión para S como $Sz = \frac{(z+2)(-1+i)}{2(z+1+i)}$

Ejemplo 4. Queremos encontrar una expresión general para una LFT que transforme la circunferencia $|z| = R$ en sí misma

Solución. Sea ϕ una LFT que fija $|z| = R$. Sea $e^{i\theta} = \frac{R}{\phi(R)}$ tal que la función $z \rightarrow e^{i\theta}\phi(z)$ fija el punto $z = R$ ya que $e^{i\theta}\phi(R) = (\frac{R}{\phi(R)})\phi(R) = R$. Sea $a = e^{-i\theta}\frac{\phi(0)}{R}$ y $\Psi(z) = \frac{Rz - aR^2}{R - \bar{a}z}$. Entonces tenemos $z \rightarrow \Psi(e^{-i\theta}\phi(z))$ fija 0 y R y también fija $|z| = R$. Como la transformación dada por la reflexión en una circunferencia depende solamente de la circunferencia, esta transformación debe conservar parejas de puntos que son simétricos bajo la transformación $|z| = R$. Como 0 y ∞ son simétricos y $\Psi(e^{-i\theta}\phi(0)) = 0$ tendrá que ser $\Psi(e^{-i\theta}\phi(\infty)) = \infty$. De esta manera tenemos una LFT que fija tres puntos y por tanto es la Identidad y entonces $\Psi(e^{-i\theta}\phi(z)) = z$, lo que implica $\phi(z) = e^{i\theta}\Psi^{-1}(z)$. La solución es que $\Psi^{-1}(z) = \frac{Rz + aR^2}{R + \bar{a}z}$ y por tanto el resultado final es $\phi(z) = e^{i\theta}\frac{Rz + aR^2}{R + \bar{a}z}$.

Ejemplo 5. Determinar una transformación lineal que lleve $|z| = 1$ y $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ a circunferencias concéntricas y razone la relación entre los radios.

Solución. Elegimos una transformación que sea de la forma $Sz = \frac{1}{z - \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, de manera que $C_1 : |z| = 1$ y $C_2 : |z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ sean transformadas en circunferencias concéntricas. Ponemos $w = \frac{1}{z - \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \frac{1}{w} + \alpha$, entonces vamos a buscar la imagen de una circunferencia $|z - a| = r$ bajo la transformación S . $|z - a| = r \iff \left| \frac{1}{w} + \alpha - a \right| = r$, sea $b = a - \alpha$ entonces

$$\left| \frac{1}{w} - b \right| = r \iff |1 - bw| = r|w| \iff (1 - bw)(1 - \bar{b}\bar{w}) = r^2 w\bar{w}$$

operando $\iff (r^2 - |b|^2)w\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} - 1 = 0$, para $r \neq |b|$ se sigue la cadena de equivalencias como

$$w\bar{w} + \frac{b}{r^2 - |b|^2}w + \frac{\bar{b}}{r^2 - |b|^2}\bar{w} - \frac{1}{r^2 - |b|^2} = 0 \iff \left(\bar{w} + \frac{\bar{b}}{r^2 - |b|^2}\right)\left(w + \frac{b}{r^2 - |b|^2}\right) = \frac{r^2}{(r^2 - |b|^2)^2} \iff$$

$$\iff \left| \bar{w} + \frac{\bar{b}}{r^2 - |b|^2} \right| = \frac{r}{r^2 - |b|^2}$$

Así $C : |z - a| = r$ es transformada en una circunferencia centrada en $-\frac{\bar{b}}{r^2 - |b|^2}$ con radio $\frac{r}{r^2 - |b|^2}$. Ahora aplicamos este resultado para $C_1 : |z| = 1$ con $a = 0$ y $r = 1$, $b = a - \alpha = -\alpha$ y tendremos que la circunferencia C_1 es llevada a la circunferencia centrada en $-\frac{\bar{b}}{r^2 - |b|^2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}$; ahora aplicamos para $C_2 : |z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{4}$ luego $b = a - \alpha = \frac{1}{4} - \alpha$ y tenemos que C_2 se transforma en la circunferencia centrada en

$$-\frac{\bar{b}}{r^2 - |b|^2} = -\frac{-\frac{1}{4} - \alpha}{\frac{1}{16} - (\frac{1}{4} - \alpha)^2} = \frac{4\alpha - 1}{2\alpha(1 - 2\alpha)}$$

Entonces para que las circunferencias C_1 y C_2 sean llevadas a circunferencias concéntricas:

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha^2} = \frac{4\alpha - 1}{2\alpha(1 - 2\alpha)} \implies 2\alpha^2(1 - 2\alpha) = (1 - \alpha^2)(4\alpha - 1) \implies \alpha = 2 \pm \sqrt{3}$$

Luego podemos encontrar al menos dos transformaciones lineales S_1 y S_2 que lleve C_1 y C_2 a circunferencias concéntricas: $S_1 z = \frac{1}{z - (2 + \sqrt{3})}$ y $S_2 z = \frac{1}{z - (2 - \sqrt{3})}$. El radio de la imagen de C_1 es $r_1 = \frac{r}{|r^2 - |b|^2|} = \frac{1}{|1 - \alpha^2|}$ y el radio de la imagen de C_2 es

$$r_2 = \frac{r}{|r^2 - |b|^2|} = \frac{\frac{1}{4}}{|\frac{1}{16} - (\frac{1}{4} - \alpha)^2|}$$

Por tanto la razón entre los radios es

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{|1 - \alpha^2|} \left| \frac{1}{16} - (\frac{1}{4} - \alpha)^2 \right| = \frac{1}{4} \frac{1}{|1 - \alpha^2|} |4\alpha(2 - 4\alpha)| = \alpha \left| \frac{2 - 4\alpha}{1 - \alpha^2} \right|, \frac{r_1}{r_2} = \alpha \iff \frac{2 - 4\alpha}{1 - \alpha^2} = 1$$

y esto ocurre para $\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$, así $\frac{r_1}{r_2} = 2 + \sqrt{3}$ para el caso de $S_1 z = \frac{1}{z - (2 + \sqrt{3})}$ y

$\frac{r_1}{r_2} = 2 - \sqrt{3}$ para el caso de $S_2 z = \frac{1}{z - (2 - \sqrt{3})}$.

Es importante observar que la razón de los radios no se conserva bajo la inversión.

3.5. Circunferencias orientadas

Sea la transformación fraccionaria lineal $Sz = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0 \Rightarrow S'z = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$.

La función $w = Sz$ es una aplicación conforme para $z \neq \frac{-d}{c}, z \neq \infty$ y entonces si tenemos dos circunferencias que se cortan en el plano z , sus transformadas en w serán dos circunferencias que se cortan con el mismo ángulo, además la orientación de los ángulos se conserva.

La orientación de una circunferencia C está determinada por tres puntos que se sitúan sobre ella, z_1, z_2, z_3 ; si z no está en C , se dice que z está a la derecha de C si $\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0$ y está a la izquierda de C si $\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0$. Solamente hay dos orientaciones diferentes, derecha e izquierda, y la orientación es la misma para todos los tripletes de puntos z_1, z_2, z_3 situados sobre la circunferencia.

Como la razón doble se conserva por las transformaciones lineales, para $Sz = (Sz, Sz_1, Sz_2, Sz_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$ solamente tenemos que considerar el caso en que C es el eje real, en cuyo caso para $(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{az+b}{cz+d}$ operamos y obtenemos

$$\text{Im} Sz = \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \text{Im} z$$

Extraemos una conclusión importante: Hablar de derecha y de izquierda es lo mismo que hablar de semiplano superior e inferior y, según la última igualdad obtenida va a depender del signo de $ad - bc$.

Una transformación lineal lleva una circunferencia orientada por z_1, z_2, z_3 a una circunferencia orientada por Sz_1, Sz_2, Sz_3 y además por la invarianza de la razón doble, la derecha y la izquierda de la circunferencia en el plano z corresponden a la derecha y la izquierda de la circunferencia imagen en el plano w .

Para el caso particular de dos circunferencias tangentes, aquellas que únicamente tienen un punto en común y se cortan en un ángulo 0° , mediante una transformación

lineal llevamos el punto común al ∞ convirtiendo las circunferencias en dos rectas paralelas en w , y según estén orientadas las rectas así estarán orientadas las circunferencias en z . En el caso en que C sea una recta, determinamos su orientación por z_1, z_2, ∞ , por lo que los puntos a la derecha serán aquellos que verifiquen: $\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) = \text{Im} \frac{z-z_2}{z_1-z_2} > 0$. La orientación de una circunferencia varía de unos autores a otros pero una vez establecida ésta no cambia para cualquier terna de puntos.

Ejemplos.

Ejemplo 1. Veamos que si z_1, z_2, z_3, z_4 son puntos sobre una circunferencia entonces, z_1, z_3, z_4 y z_2, z_3, z_4 determinan la misma orientación si y solamente si $(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$.

Solución. Consideremos un punto z que no se encuentre sobre la circunferencia, diremos que z se encuentra a la izquierda de la circunferencia respecto a $(z_1, z_3, z_4) \Leftrightarrow \text{Im}(z, z_1, z_3, z_4) < 0$ y diremos que z se encuentra a la izquierda de la circunferencia respecto a $(z_2, z_3, z_4) \Leftrightarrow \text{Im}(z, z_2, z_3, z_4) < 0$. Luego para que (z_1, z_3, z_4) y (z_2, z_3, z_4) determinen la misma orientación ha de verificarse:

$$\frac{\text{Im}(z, z_1, z_3, z_4)}{\text{Im}(z, z_2, z_3, z_4)} > 0 \quad \forall z \text{ que no se encuentre situado sobre la circunferencia}$$

$$\frac{(z, z_1, z_3, z_4)}{(z, z_2, z_3, z_4)} = \left(\frac{z - z_3}{z - z_4} \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_3} \right) : \left(\frac{z - z_3}{z - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \right) = \frac{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} = \frac{1}{(z_1, z_2, z_3, z_4)} \in \mathbb{R}$$

ya que los cuatro puntos están sobre la circunferencia y ya sabemos que la razón doble de cuatro puntos es real si y solamente si los puntos son concíclicos o se encuentran alineados. Por tanto

$$\frac{\text{Im}(z, z_1, z_3, z_4)}{\text{Im}(z, z_2, z_3, z_4)} = \frac{1}{(z_1, z_2, z_3, z_4)}$$

y para que el resultado sea mayor que 0 ha de ser $(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$.

Ejemplo 2. Sean dos circunferencias tangentes C_1 y C_2 , con C_2 interior a C_1 , y una cadena de circunferencias tangentes entre sí y a C_1 y C_2 (Fig. 3-7).

Queremos demostrar que los puntos de tangencia se encuentran todos sobre la misma circunferencia.

Solución. Sea $P = C_1 \cap C_2$ el punto de tangencia y sea $Tz = \frac{1}{z-P}$. Tenemos que $T(P) = \infty$, se trata de una inversión que lleva las circunferencias C_1 y C_2 a rectas paralelas y la cadena de circunferencias tangentes en un haz de circunferencias tangentes a esas dos rectas paralelas, de esta manera sus puntos de tangencia se encuentran en otra recta paralela a $T(C_1)$ y a $T(C_2)$, que la transformación inversa lleva a una circunferencia que pasa por los puntos de tangencia del haz original.

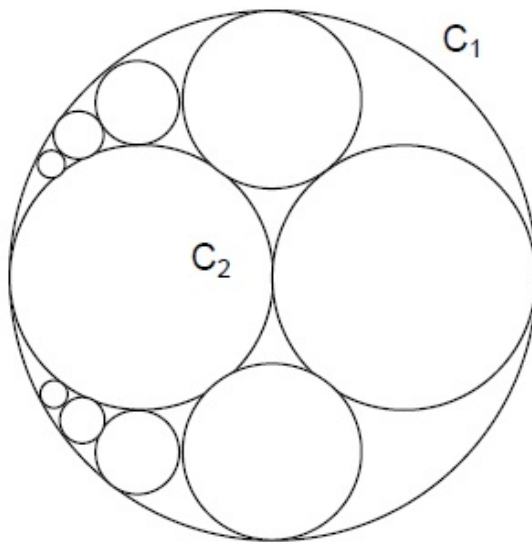


Fig. 3-7

Ejemplo 3. Sea D el disco unidad, queremos determinar todas las transformaciones de Möbius que lo transformen en sí mismo.

Solución. Ha de existir algún punto $a \in D$ que se transforme en el origen, $T(a) = 0$ y utilizando la propiedad de conservación de la simetría podemos asegurar que el simétrico de a se transformará en el simétrico del 0 (o sea en el ∞): El simétrico de a es $a^* = \frac{1}{\bar{a}}$ y $T(a^*) = T(\frac{1}{\bar{a}}) = \infty$. Por tanto

$$T(z) = ka^* \frac{z - a}{z - a^*} = k \frac{1}{\bar{a}} \frac{z - a}{z - \frac{1}{\bar{a}}} = k \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

para algún $k \in \mathbb{C}$. Si T es una transformación de Möbius tal que $T(D) = D$ entonces llevará el borde del disco D al borde del disco D , por lo que si $|z| = 1$ entonces $|T(z)| = 1$. Como $T(1)$ ha de estar en el borde del disco D ,

$$T(1) = k \frac{1-a}{a1-1} \Rightarrow |T(1)| = |k| \left| \frac{1-a}{a1-1} \right| = |k|$$

y por lo tanto k tiene módulo 1 y será de la forma $k = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Finalmente $T(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{az-1}$ para cierto $\theta \in \mathbb{R}$ y cierto $a \in \mathbb{C}$, $a \in D$, por lo que podemos elegir de manera arbitraria un parámetro real θ y otro complejo a . Podemos pues afirmar que las transformaciones bilineales del disco en sí mismo tienen tres grados de libertad, estos parámetros permiten elegir qué punto se transforma en el origen y cuál es el argumento de la derivada en ese punto.

Ejemplo 4. Sea la transformación $w = \frac{-z+i}{z+i}$, determinemos los transformados de la circunferencia de centro el origen y radio 1, y de la recta real, .

Solución. Vamos a encontrar las imágenes de tres puntos del eje real, 1, 0 y -1 . Obtenemos: $T(1) = i, T(0) = 1, T(-1) = -i$. Sabemos que una LFT lleva circunferencias a circunferencias, en sentido amplio, y en este caso como los transformados no están alineados han de ser concíclicos, exactamente se encuentran en la circunferencia de centro el origen y radio 1. Vamos a buscar ahora los transformados de tres puntos de la circunferencia de centro el origen y radio 1: $T(1) = i, T(i) = 0, T(-1) = -i$. Además como $T(-i) = \infty$, las imágenes están alineadas, $i, 0, -i, \infty$ situados sobre el eje imaginario. Por lo tanto la transformación $Tz = w$ lleva $\mathbb{R} \rightarrow |w| = 1$ y $|z| = 1 \rightarrow x + iy, x = 0$.

Capítulo 4

4. Clasificación de las transformaciones

4.1. Familias de circunferencias

Introducimos una familia de circunferencias para entender y visualizar la geometría de las transformaciones de Möbius. Consideremos la transformación lineal $w = k \frac{z-a}{z-b}$, $a, b \in \mathbb{C}$, que lleva $z = a$ a $w = 0$ y $z = b$ a $w = \infty$, rectas que pasan por el origen en el plano w son las imágenes de circunferencias que pasan por a y b en el plano z y circunferencias concéntricas en el origen y de radio ρ corresponden a circunferencias $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \frac{\rho}{k}$ en el plano z . Estas circunferencias en z se denominan *circunferencias de Apolonio* con puntos límites a y b , verificando que la razón de las distancias de sus puntos a a y b es constante.

Denominamos por C_1 a las circunferencias que pasan por a y por b y por C_2 a las circunferencias de Apolonio. Si representamos en el plano z todas las C_1 y todas las C_2 obtenemos la *red circular* o las *circunferencias de Steiner* (Fig. 4-1).

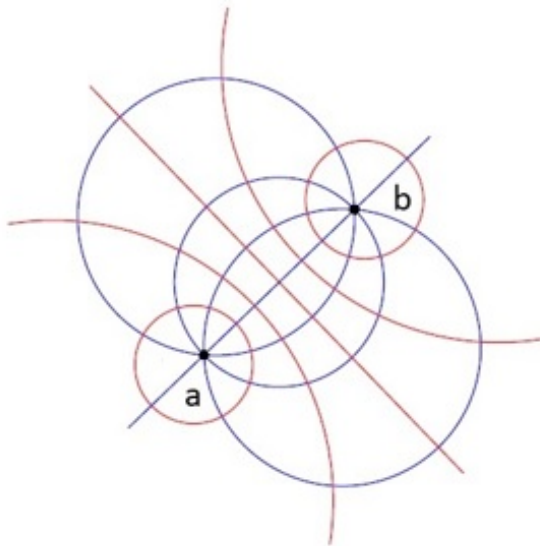


Fig. 4-1. Circunferencias de Steiner

En la red circular se verifican las siguientes propiedades:

- Por cada punto del plano \hat{C} excepto a y b , pasa una circunferencia C_1 y una C_2
- Cada C_1 corta ortogonalmente a cada C_2 en dos puntos
- La reflexión respecto a C_1 transforma toda C_2 en sí misma y toda C_1 en otra C_1 y la reflexión respecto a C_2 transforma toda C_1 en sí misma y toda C_2 en otra C_2
- Los puntos límites a y b son simétricos respecto a todas las C_2 pero no respecto a cualquier otra circunferencia
- Cada $z \in \hat{C} - \{a, b\}$ es la unión disjunta de las C_2

Para el caso en que $a = 0$ y $b = \infty$ las C_1 son rectas que pasan por el origen y C_2 son circunferencias concéntricas. Si consideramos la transformación $Tz = w$ que lleva a y b a a' y b' podemos escribir: $\frac{w-a'}{w-b'} = k \frac{z-a}{z-b}$ que transforma circunferencias C_1 en circunferencias C'_1 y circunferencias C_2 en circunferencias C'_2 con puntos límites

a' y b' . Cuando a y b son puntos fijos de T , es decir, $a = Ta = a', b = Tb = b'$, representamos Tz y z en el mismo plano y toda la red circular se transforma en sí misma, distinguiendo cada circunferencia imagen gracias al parámetro k . El ángulo entre C_1 y C'_1 es $\arg k$ y $\frac{|z-a|}{|z-b|} = |k|$ tanto en C'_2 como en C_2 .

Son importantes los casos en los que todas las circunferencias C_1 o todas las C_2 se transforman en sí mismas:

- *Transformación hiperbólica.* $C'_1 = C_1 \forall C_1$ cuando $k \in \mathbb{R}, k > 0$ (si $k < 0$ son iguales pero con orientaciones invertidas). Cuando k crece las imágenes Tz para $z \neq a, b$ circulan a lo largo de las C_1 hacia b .

- *Transformación elíptica.* $C'_2 = C_2$ cuando $|k| = 1$, al variar $\arg k$ los Tz circulan a lo largo de las C_2 en sentidos diferentes.

- *Transformación parabólica.* Una transformación lineal con dos puntos fijos es el producto de una transformación hiperbólica y una elíptica, ambas con los mismos puntos fijos, para calcularlos hay que resolver $z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, ecuación cuadrática con dos raíces, si $\gamma = 0$ un punto fijo es ∞ . Para el caso en el que las dos raíces son iguales, es decir, los puntos fijos coinciden, hablamos de una transformación parabólica. Para que se verifique esto se ha de cumplir $(\alpha - \delta)^2 = 4\beta\gamma$.

Si $z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ tiene dos raíces distintas podemos expresar la transformación como $\frac{w-a}{w-b} = k \frac{z-a}{z-b}$ y utilizamos las circunferencias de Steiner con puntos límites a y b para ver la acción geométrica de la misma. Además cualquier transformación lineal se puede escribir como $\frac{w-a'}{w-b'} = k \frac{z-a}{z-b}$ con a, b arbitrarios y nos apoyamos en las dos redes circulares.

En el caso de la transformación parabólica utilizaremos otra red circular, $w = \frac{w}{z-a} + c$, circunferencias que pasan por a en el plano z se llevan a rectas en el plano w y circunferencias tangentes en z se corresponden con rectas paralelas en w . Si escribimos $w = u + iv$, las rectas $u = cte$ y $v = cte$ se corresponden con dos familias

de circunferencias tangentes entre sí y que se cortan ortogonalmente (Fig. 4-2)

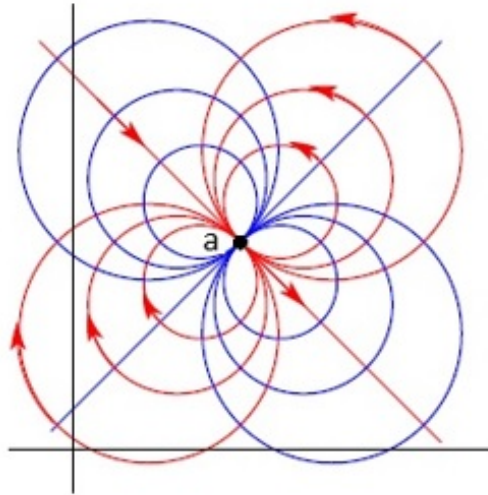


Fig. 4-2. Circunferencias de Steiner degeneradas

Esta red circular puede considerarse como un conjunto degenerado de circunferencias de Steiner, dicho conjunto está determinado por el punto a y la tangente a una de las familias de circunferencias.

Sean C_1 las circunferencias en w que son imagen de la recta $u = cte$ y sean C_2 las circunferencias en w que son imagen de la recta $v = cte$, entonces la recta $v = \text{Im } c$ corresponde a la tangente de las circunferencias C_1 y tiene la dirección $\arg w$.

Toda transformación que lleve a a a' la podemos expresar como $\frac{w'}{w-a'} = \frac{w}{z-a} + c \Rightarrow$ Las circunferencias C_1 y C_2 se llevan a circunferencias C'_1 y C'_2 determinadas por a' y w' . Si $a = a'$ es el único punto fijo entonces $w = w' \Rightarrow \frac{w}{w-a} = \frac{w}{z-a} + c$ y esta transformación lleva la red circular formada por C_1 y C_2 a sí misma; el parámetro c podemos suponerlo real y entonces C_1 se aplica sobre sí misma y la transformación parabólica puede ser considerada como una circulación a lo largo de las circunferencias C_2 .

Una transformación que no es hiperbólica, elíptica o parabólica se denomina *loxodrómica*.

En el siguiente apartado, 4.2, veremos esta clasificación con más detalle.

4.2. Clasificación por conjugación o puntos fijos

Dada la transformación de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, para calcular los puntos fijos tenemos

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z \iff az+b = cz^2+dz \iff cz^2+(d-a)z-b=0$$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2c} = \\ &= \frac{(a-d) \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2(ad-bc) + 2bc}}{2c} \end{aligned}$$

si $T(z)$ es una matriz normalizada, es decir, $ad-bc=1$, obtenemos que las raíces son:

$$z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2 + 2(ad-1)}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

Si $(a+d) = \pm 2$, solamente existe un punto fijo, $z_1 = z_2 = \frac{a-d}{2c}$.

Y para el caso en el que ∞ fuera punto fijo: $T(\infty) = \infty$

$$T(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \frac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0$$

y entonces la transformación de Möbius adopta la forma $T(z) = \frac{az+b}{d} = \alpha z + \beta$ que tiene a lo más una solución

Teorema 4.2.1. *Una transformación de Möbius tiene como punto fijo el punto del $\infty \iff T(z) = \alpha z + \beta$ y además ∞ es el único punto fijo de la transformación $\iff T(z) = z + b$.*

Demostración. Si ∞ es punto fijo $T(\infty) = \infty$ y como vimos en el apartado anterior:

$$T(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \frac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0 \Rightarrow T(z) = \alpha z + \beta$$

Como si ∞ es punto fijo T es de la forma $T(z) = az + b$, como z es punto fijo

$$T(z) = az + b = z \iff z = \frac{b}{1-a}$$

luego $\frac{b}{1-a} = \infty \iff a = 1$ y finalmente T adopta la expresión $T(z) = z + b$, es decir

T es una traslación.

Definición. *Sea T una transformación de Möbius que fija un solo punto en \hat{C} , entonces a T se le llama transformación parabólica*

Definición. *Dos transformaciones de Möbius T y S son conjugadas si existe otra transformación de Möbius φ tal que $S = \varphi T \varphi^{-1}$*

Lema 4.2.1. *Sean T y φ dos transformaciones de Möbius, T fija un punto z en \hat{C} (o preserva un subconjunto $A \subset \hat{C}$) si y solamente si $S = \varphi T \varphi^{-1}$ fija $\varphi(z)$ (o preserva $\varphi(A)$).*

Demostración.

$$T(z) = z \iff \varphi T(z) = \varphi(z) \iff \varphi T \varphi^{-1}(\varphi(z)) = \varphi(z)$$

La demostración del lema para un punto z se extrapola para un conjunto A preservado por T .

Proposición 4.2.1. *Sea T una transformación de Möbius, entonces:*

a) *Si T es parabólica, T es conjugada en $SL(2, \mathbb{C})$ de una traslación, $S(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$*

b) *Si T no es parabólica, T es conjugada en $SL(2, \mathbb{C})$ de una transformación de la forma $S(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$*

Demostración.

a) Si T es parabólica tiene un único punto fijo que vamos a denominar z_0 y sea $\varphi \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $\varphi(z_0) = \infty$, como por ejemplo $\varphi(z) = \frac{1}{z-z_0}$, tenemos que $S = \varphi T \varphi^{-1}$ fija ∞ , y entonces toma la expresión $S(z) = az + b$, y por el teorema 4.2.1 sabemos que S adopta la forma $S(z) = z + b \implies a = 1$ (si $a \neq 1$ la ecuación $az + b = z$ tendría una solución finita)

b) Vamos a suponer que T fija dos puntos, z_1, z_2 y que $\varphi(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2}$, si $z_2 = \infty$ tomamos $\varphi(z) = z - z_1$. Entonces $S = \varphi T \varphi^{-1}$ fija 0 e ∞ , por lo que si

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ obtenemos que } b \text{ y } c \text{ son } 0.$$

Proposición 4.2.2. *Dados $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ y no nulos, con $k_1 \neq k_2, k_2^{-1}$, entonces las transformaciones $T(z) = k_1 z$ y $S(z) = k_2 z$ no son conjugadas en $SL(2, \mathbb{C})$*

Demostración. Si la transformación $\varphi \in SL(2, \mathbb{C})$ conjugue T y $S \implies S = \varphi T \varphi^{-1}$ y por el lema 4.2.1 φ preserva $\{0, \infty\}$. Como φ fija 0 e ∞ es de la forma $\varphi(z) = \alpha z$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ por lo que φ conmuta con T y entonces $T = S$, lo que contradice

la hipótesis. Además si $\varphi(0) = \infty$ y $\varphi(\infty) = 0$ poniendo $\varphi(z) = \frac{az-b}{cz-d}$ como $\varphi(0) = \frac{b}{d}$ y $\varphi(\infty) = \frac{a}{c}$ tenemos que $a, d = 0$ y $\varphi(z) = \frac{b}{cz}$ y en este caso φ es una involución, $\varphi = \varphi^{-1}$, resultando

$$\varphi T \varphi^{-1}(z) = \varphi T\left(\frac{b}{cz}\right) = \varphi\left(\frac{k_1 b}{cz}\right) = \frac{b}{c\left(\frac{k_1 b}{cz}\right)} = \frac{z}{k_1}$$

lo que contradice que $k_2 \neq \frac{1}{k_1}$.

Definición. Dada $T \in SL(2, \mathbb{C})$, tal que T fija exactamente dos puntos en $\hat{\mathbb{C}}$ y T es conjugada de $S(z) = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces:

- a) Si $|\alpha| = 1$, se dice que T es elíptica
- b) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se dice que T es hiperbólica
- c) Si $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin \mathbb{R}^+$, se dice que T es loxodrómica

Esta definición no es utilizada de manera general por todos los autores, de hecho hay documentos en los que se considera a las transformaciones loxodrómicas como hiperbólicas y en otros se considera a las hiperbólicas como una subclase de las loxodrómicas.

Geometría

Como ya vimos anteriormente introducimos una familia de circunferencias con el fin de visualizar mejor la acción geométrica de las transformaciones de Möbius en el plano complejo. Sean a y $b \in \mathbb{C}$ diferentes y sea la función $\varphi = \frac{z-a}{z-b}$, ver figura 4-3

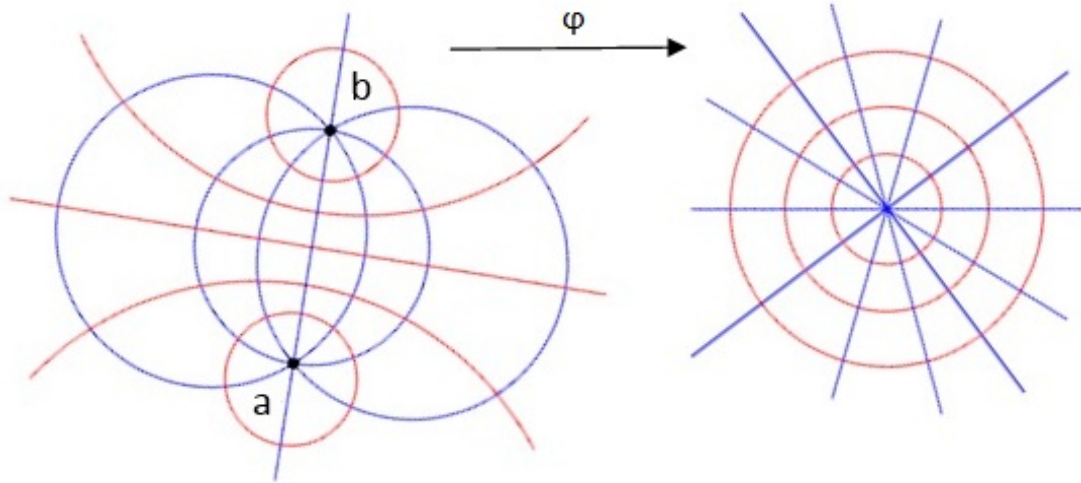


Fig. 4-3

Como ya sabemos φ transforma las circunferencias que pasan por a y por b en rectas que pasan por el origen y las circunferencias concéntricas al origen en el plano w $\{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$ son la imagen por φ de $\left\{w \in \mathbb{C} : \frac{|z-a|}{|z-b|} = r\right\}$ y son circunferencias ya que φ^{-1} es de Möbius, estas circunferencias se llaman *círculos de Apolonio* y las nombramos C_2 . A las circunferencias que pasan por a y b las denominamos por C_1 .

Si T es una transformación de Möbius *elíptica* entonces es conjugada de una transformación del tipo $S(z) = \alpha z$ con $|\alpha| = 1$, es decir, S es rotación con $\alpha = e^{i\theta}$. Y como S es una rotación solamente si verifica que cada circunferencia centrada en el origen se transforma en sí misma, por ende T es elíptica si y solamente si cada circunferencia C_2 es transformado en si mismo.

T es una transformación de Möbius *hiperbólica* si es conjugada de una transformación del tipo $S(z) = \alpha z$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$, es decir conjugada de una homotecia. Y entonces S es una homotecia solamente si verifica que transforma cada recta que

pasa por el origen en si misma, y por tanto T es hiperbólica solamente si transforma cada circunferencia C_1 en si misma.

Utilizando el mismo razonamiento T es una transformación *loxodrómica* si es conjugada de una transformación $S(z) = \alpha z$ con $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin \mathbb{R}^+$, por lo que $\alpha = re^{i\theta}$ y entonces S está formada por la composición de una rotación y una homotecia. En esta situación tanto las circunferencias C_1 como C_2 varían y las curvas que permanecen invariantes son espirales.

4.2.1. Transformaciones elípticas

Sea T una transformación elíptica con puntos fijos a y b . Sea $\varphi = \frac{z-a}{z-b}$ y $S(z) = (\varphi T \varphi^{-1})(z) = \alpha z = e^{i\theta}$, con $|\alpha| = 1$, una rotación, que es la transformación conjugada de T

Lema 4.2.1.1. *Si C es una circunferencia de Apolonio con puntos límite a y b , entonces $T(C) = C$*

Demostración. Como S preserva $\varphi(C)$, por el lema 4.2.1 la transformación T preserva $\varphi^{-1}(\varphi(C)) = C$

Lema 4.2.1.2. *Si C es una circunferencia que pasa por a y b , entonces $T(C)$ es una circunferencia por a y b que forma con C un ángulo θ en a y en b*

Demostración. Como T fija a y $b \implies T(C)$ es una circunferencia por a y b . Además $\varphi(C)$ y $S\varphi(C)$ forman un ángulo θ en el origen y por la conformalidad de φ^{-1} tenemos que: $C = \varphi^{-1}\varphi(C)$ y $T(C) = \varphi^{-1}S\varphi(C)$ también se cortan con un ángulo θ en a . Para probarlo en el punto b simplemente tenemos que cambiar los papeles de a y b en la expresión $\varphi = \frac{z-a}{z-b}$. Por lo tanto esta transformación intercambia las circunferencias que pasan por a y por b . Ver figura 4-4

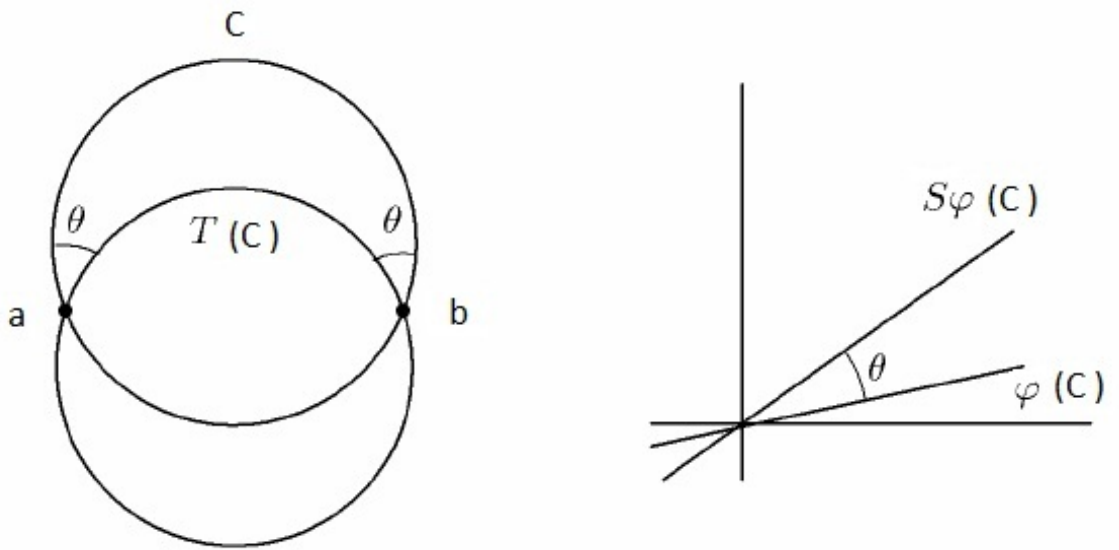


Fig. 4-4

Una transformación elíptica implica una rotación de las circunferencias de Apolonio en el plano complejo o en la esfera de Riemann. Figuras 4-5 y 4-6.

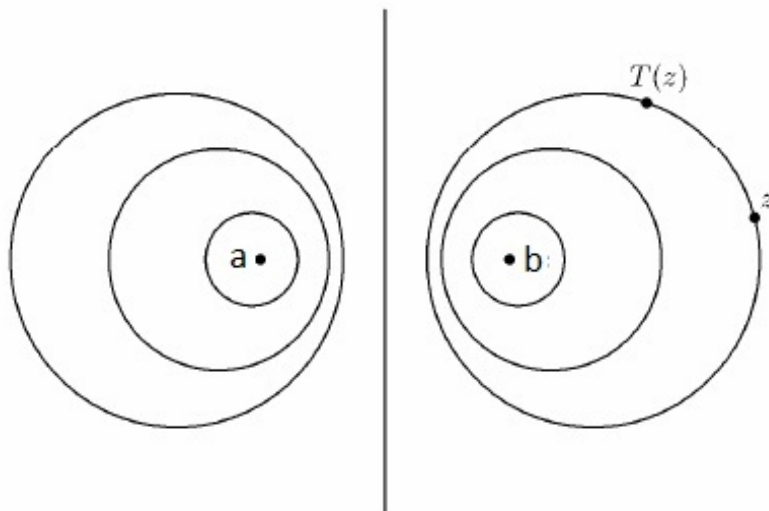


Fig. 4-5. La transformación elíptica rota las circunferencias de Apolonio

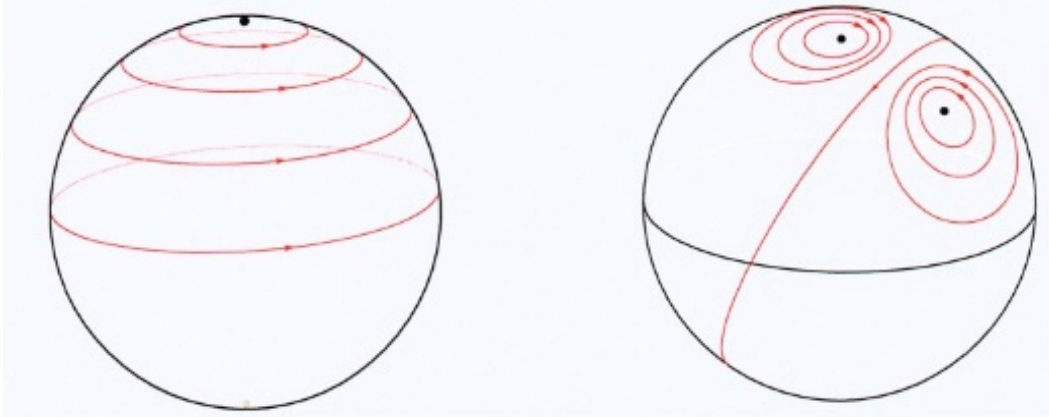


Fig. 4-6

4.2.2. Transformaciones hiperbólicas

Sea T una transformación hiperbólica con puntos fijos a y b . Sea $\varphi = \frac{z-a}{z-b}$ y $S(z) = (\varphi T \varphi^{-1})(z) = kz$, $k \in \mathbb{R}^+$, S es una homotecia

Ahora T mantiene las circunferencias que pasan por los puntos límite a y b , las circunferencias C_1 . En la figura 4-7 se presentan las transformadas de dos circunferencias C_1 , la imagen por T de cada punto de la circunferencia va a otro punto de la misma circunferencia

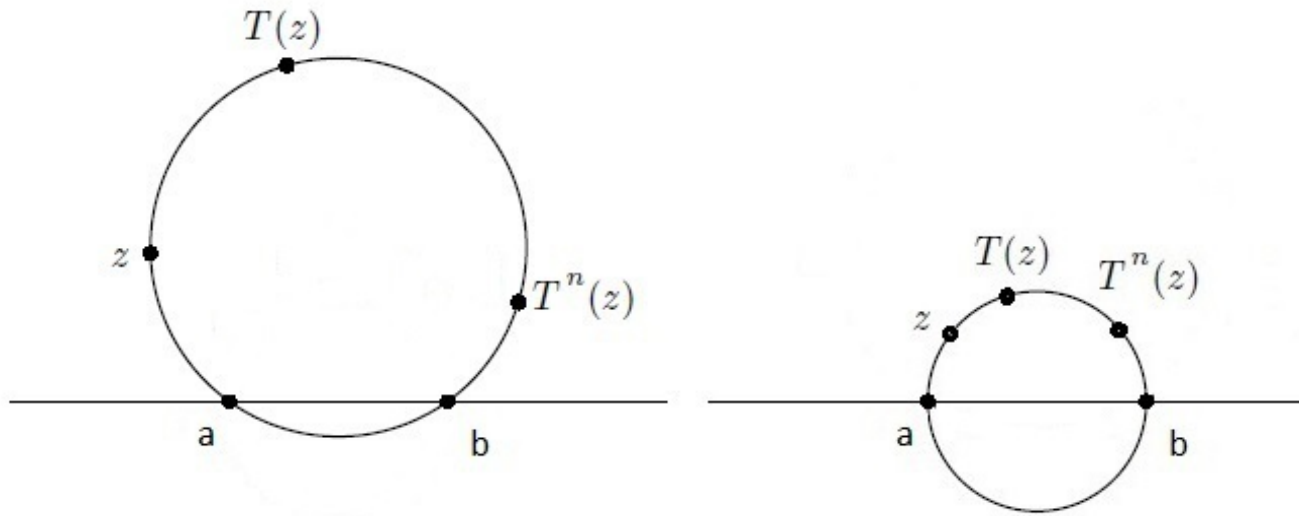


Fig. 4-7

Si tenemos C una circunferencia de Apolonio $\varphi(C)$ y $S\varphi(C)$ son circunferencias distintas concéntricas al origen y $\varphi^{-1}S\varphi(C) = T(C)$ es otra circunferencia de Apolonio. Es decir T intercambia las circunferencias de Apolonio C_2 . Obsérvese la figura 4-8.

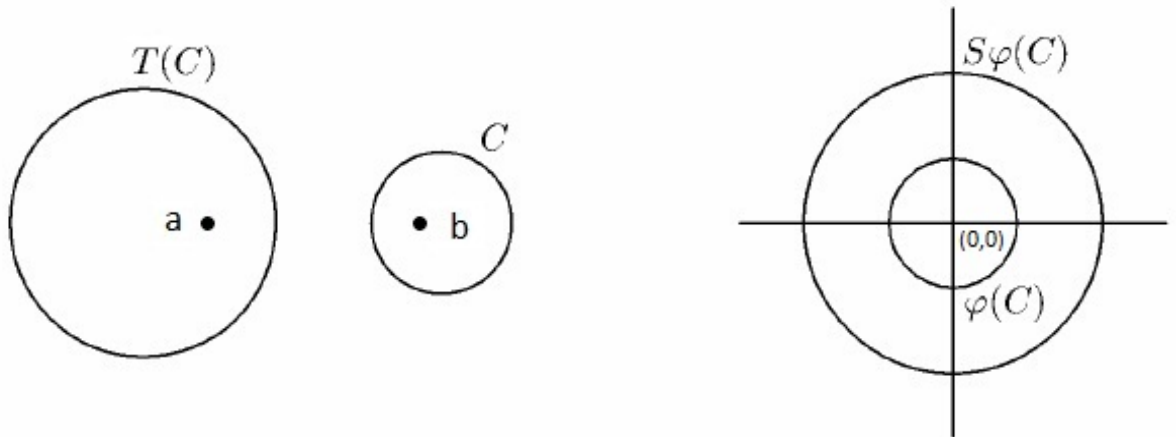


Fig. 4-8

Cuando iteramos T , con $n \in \mathbb{N}$, tenemos $T^n(z) = (\varphi^{-1}S\varphi)^n(z) = \varphi^{-1}S^n\varphi(z)$, con lo que si $k > 1$, la homotecia es una dilatación, y $z \neq a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(z) = b$ ya que $S^n\varphi(z) \rightarrow \infty$, en este caso los puntos fluyen hacia b y se dice que b es el punto fijo atractor. Además $S^n\varphi(z)$ se va alejando de 0 y $T^n(z)$ se aleja de a por lo que a se denomina punto fijo repulsor. Si $k < 1$ los papeles se invierten. Ver figura 4-9.

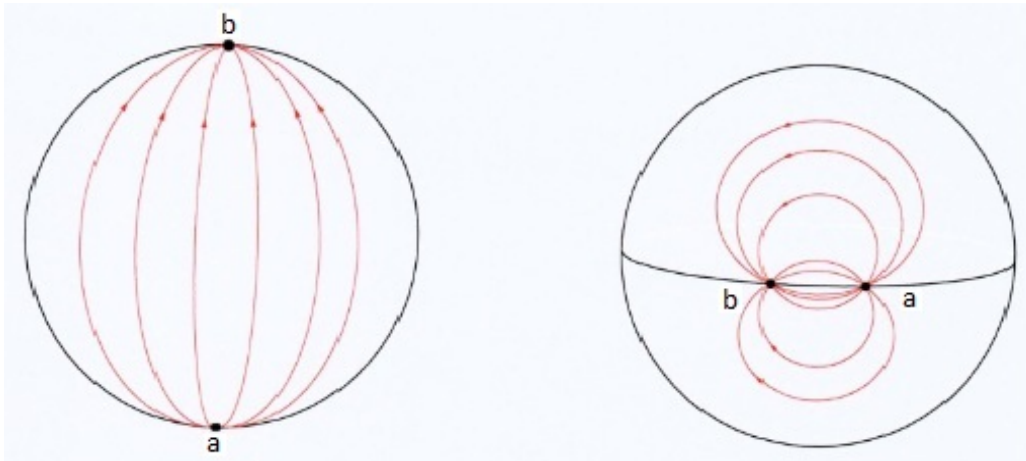


Fig. 4-9

4.2.3. Transformaciones loxodrómicas

Se trata de un tipo de transformaciones de Möbius que son composición de elípticas e hiperbólicas y por tanto lo que hacen es rotar las circunferencias de Apolonio continuando con una traslación a través de las circunferencias que pasan por los puntos límite a y b o viceversa. Este tipo de transformaciones preservan espirales que se van enrollando en los puntos fijos, existiendo un punto atractor y otro repulsor (ver figura 4-10). Si T es una transformación loxodrómica, $T(z)$ es conjugada de una

transformación del tipo $S(z) = \alpha z$, con $\alpha = e^{r+i\theta}$ y $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tendremos como puntos fijos 0 e ∞ y entonces las imágenes de z_0 por las iteraciones sucesivas son los puntos $z_0 e^{nr+in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ y la espiral $z_0 e^{xr+ix\theta}$, $x \in \mathbb{R}$ es invariante por T .

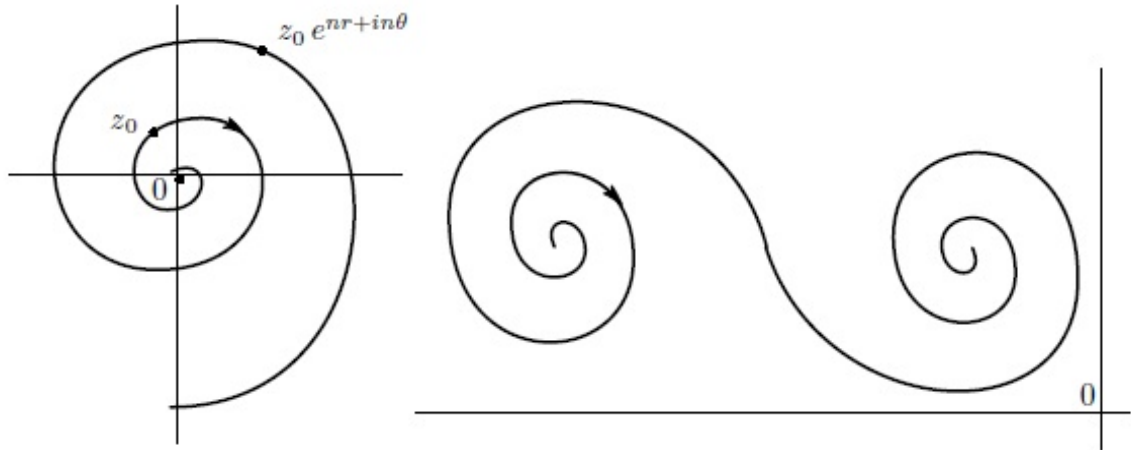


Fig. 4-10. Espirales invariantes bajo transformaciones loxodrómicas

4.2.4. Transformaciones parabólicas

Sabemos que las transformaciones parabólicas son conjugadas de las traslaciones. Todas las traslaciones del tipo $S(z) = z + b$ tienen a las rectas paralelas al vector b como familia de circunferencias fijas y estas rectas se cortan en el ∞ (ver figura 4-11)

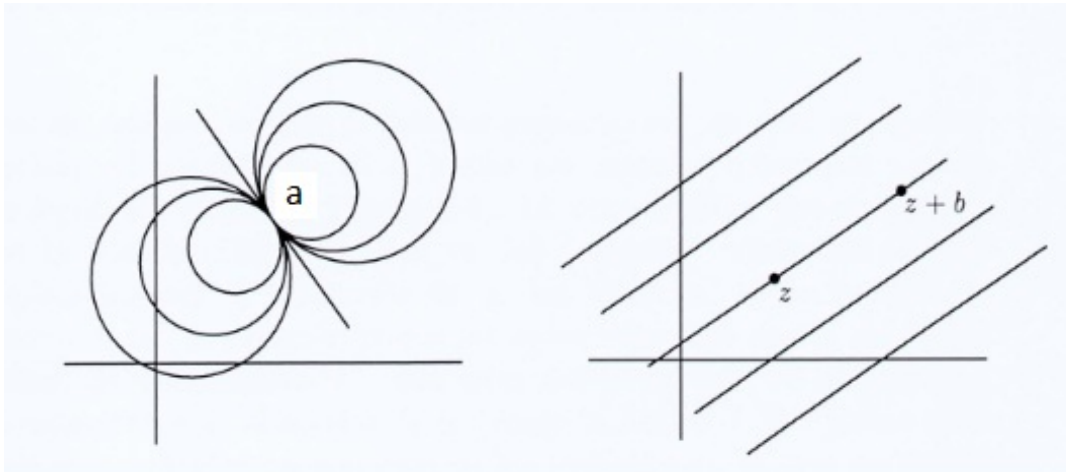


Fig. 4-11

Cuando iteramos S los puntos del plano complejo se mueven hacia ∞ en la dirección de b . Las transformaciones parabólicas fijan un solo punto, sea éste punto a y vamos a conjugar T con $\varphi(z) = \frac{1}{z-a}$, entonces la familia de circunferencias fijas cubren \hat{C} y se cortan solamente en a (Fig. 4-11). Cuando iteramos T unos puntos fluyen a través de las circunferencias hacia a y otros se alejan de él para luego acercarse. Ver figura 4-12

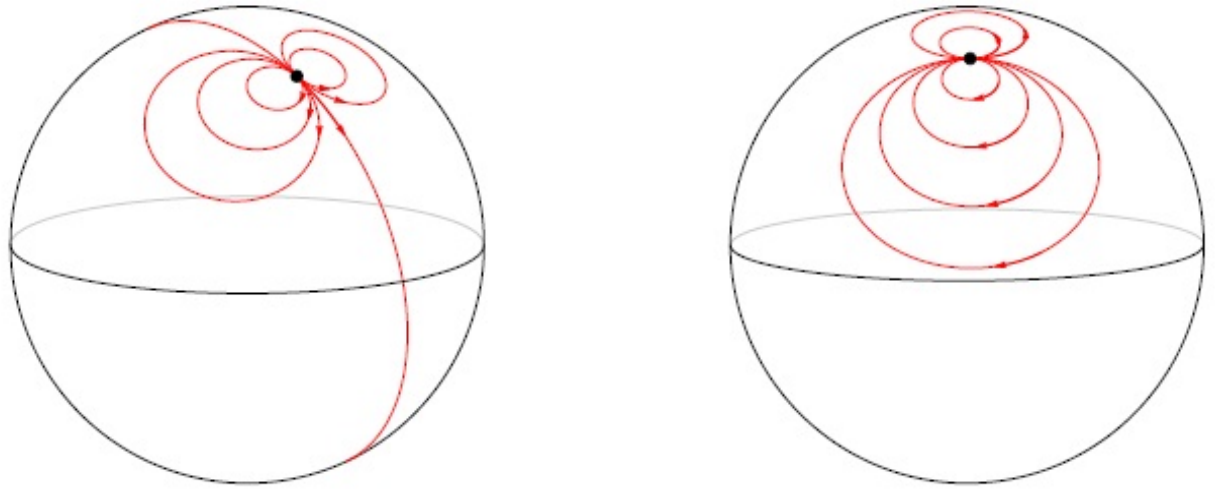


Fig. 4-12. Efecto de una transformación parabólica sobre la esfera de Riemann

Si tenemos en cuenta la familia ortogonal a $z + b$ podemos observar que la familia de circunferencias fijas por las transformaciones parabólicas se enriquece (ver figura 4-13), a esta nueva configuración se le conoce como circunferencias de Steiner degeneradas y describe con mayor detalle el efecto geométrico de las transformaciones parabólicas. Esta red circular degenerada es obtenida al juntar los dos puntos límite en uno único a .

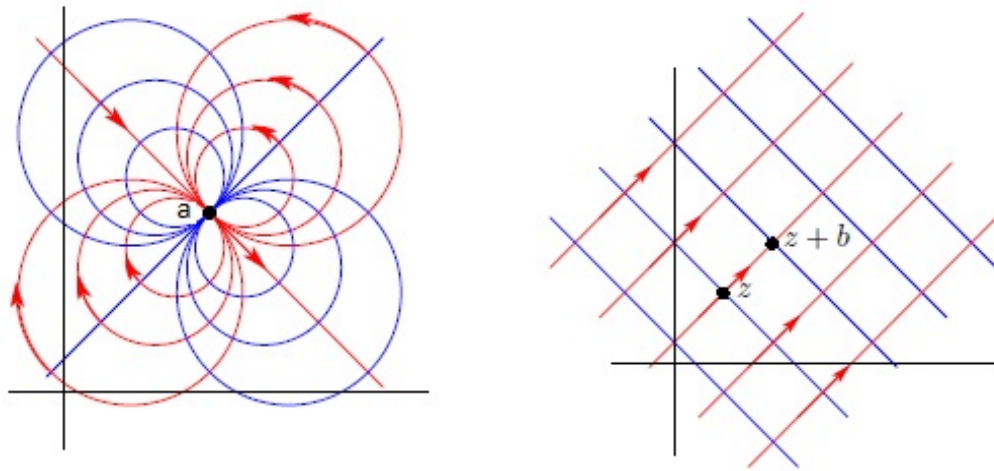


Fig. 4-13. Circunferencias de Steiner degeneradas

Esta familia de circunferencias fijas son las circunferencias de Apolonio, que seguimos denotando por C_2 a lo largo del documento, cubren toda la esfera de Riemann y la única intersección entre ellos es el punto de tangencia a , es decir, $\forall C_{21}, C_{22} \in C_2 \implies C_{21} \cap C_{22} = \{a\}$.

Es por esta degeneración de las circunferencias de Apolonio que las transformaciones parabólicas algunos autores las vean como un subcaso de las transformaciones elípticas.

La familia ortogonal la denominamos C_1 y son las circunferencias obtenidas al rotar (multiplicar por i) alrededor de a las circunferencias C_2 . La acción de las transformaciones parabólicas sobre la familia C_1 consiste en intercambiarlos, es decir, en hacerlos rotar alrededor de a (ver figura 4-13).

Ejemplos.

Ejemplo 1. Vamos a ver que toda transformación de Möbius que satisface $S^n z = z \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ es elíptica.

Solución. Tenemos que ver que dada una transformación de Möbius S que verifique $S^n z = z \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow S$ es elíptica. Vamos a estudiar los puntos fijos de S , si tiene más de dos será la Identidad y ésta es una transformación elíptica.

Vamos a suponer que S tiene dos puntos fijos distintos a y b . Sabemos que una transformación $w = Sz$ que transforme a y b en a' y b' puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} \frac{w - a'}{w - b'} &= k \frac{z - a}{z - b} \text{ con } k \in \mathbb{C} \implies \frac{Sz - a'}{Sz - b'} = k \frac{z - a}{z - b} \implies \\ \implies \frac{z - a}{z - b} &= \frac{S^n z - a}{S^n z - b} = k \frac{S^{n-1} z - a}{S^{n-1} z - b} = k^2 \frac{S^{n-2} z - a}{S^{n-2} z - b} = \end{aligned}$$

$$= \dots \text{iterando} \dots = k^n \frac{z - a}{z - b} \text{ luego } k^n = 1 \implies |k| = 1 \implies S \text{ es elíptica}$$

Supongamos ahora que a o b es infinito, sea por ejemplo $b = \infty$, tenemos

$$\frac{Sz - a}{z - a} = k \frac{Sz - b}{z - b} \implies \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{Sz - a}{z - a} = \lim_{b \rightarrow \infty} k \frac{Sz - b}{z - b} \implies \frac{Sz - a}{z - a} = k \implies Sz - a = k(z - a)$$

como

$$\begin{aligned} z - a &= S^n z - a = k(S^{n-1} z - a) = k^2(S^{n-2} z - a) = \dots = k^n(z - a) \implies \\ &\implies k^n = 1 \implies |k| = 1 \implies S \text{ es elíptica} \end{aligned}$$

Y para finalizar suponemos que S tiene solamente un punto fijo a , sea $Tz = \frac{1}{z-a} + a$ que transforma a en ∞ e ∞ en a . La función TST^{-1} tiene solamente un punto fijo $a = \infty$, $Ta = \infty$ y de esta manera $TST^{-1}z = cz + d$ para algún $c \neq 0$, imponemos $c = 1$ y queda $TST^{-1}z = z + d$ y si $c \neq 1$ tendremos que el punto fijo es $f = \frac{d}{1-c}$ ya que

$$TST^{-1}f = cf + d = c \frac{d}{1-c} + d = \frac{d}{1-c} = f$$

ahora

$$\begin{aligned} z &= TS^nT^{-1}z = (TST^{-1})^nz = (TST^{-1})^{n-1}(TST^{-1})z = \\ &= (TST^{-1})^{n-1}(z+d) = (TST^{-1})^{n-2}(z+2d) = \dots = z+nd \end{aligned}$$

lo que implica que $d = 0$ y entonces $TST^{-1} = Id \Rightarrow S = T^{-1}IdT = Id$ y al ser S la identidad es elíptica.

Ejemplo 2. a) Veamos que si S es una transformación hiperbólica o loxodrómica entonces $S^n z$ converge al mismo punto fijo cuando $n \rightarrow \infty$, excepto cuando z coincide con el otro punto fijo. El límite se denomina punto fijo atractor y el otro es el punto fijo repulsor. b) Qué ocurre cuando $n \rightarrow -\infty$?. c) Qué ocurre en el caso parabólico ?.

Solución. a) Sea Sz es una transformación hiperbólica o loxodrómica, como una transformación $w = Sz$ que transforme a y b en a' y b' puede escribirse de la forma $\frac{w-a'}{w-b'} = k \frac{z-a}{z-b}$ con $k \in \mathbb{C}$, podremos escribir $\frac{Sz-\alpha}{Sz-\beta} = k \frac{z-\alpha}{z-\beta} \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ con α, β dos puntos fijos de S y $|k| \neq 1$ (para que no sea elíptica), sustituyendo z por Sz :

$$\frac{S^2z - \alpha}{S^2z - \beta} = k \frac{Sz - \alpha}{Sz - \beta} = k^2 \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

iterando obtenemos $\frac{S^n z - \alpha}{S^n z - \beta} = k^n \frac{z - \alpha}{z - \beta} \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$.

*Para el caso en que $|k| < 1$ y suponiendo $z \neq \beta$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S^n z - \alpha}{S^n z - \beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} k^n \frac{z - \alpha}{z - \beta} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S^n z - \alpha}{S^n z - \beta} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S^n z = \alpha$$

por lo que α es el punto fijo atractor y β el punto fijo repulsor.

*Para el caso en que $|k| > 1$ y suponiendo $z \neq \alpha$ tenemos

$$\frac{Sz - \alpha}{Sz - \beta} = k \frac{z - \alpha}{z - \beta} \iff \frac{Sz - \beta}{Sz - \alpha} = \frac{1}{k} \frac{z - \beta}{z - \alpha} \Rightarrow \frac{S^n z - \beta}{S^n z - \alpha} = \frac{1}{k^n} \frac{z - \beta}{z - \alpha} \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S^n z - \beta}{S^n z - \alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^n} \frac{z - \beta}{z - \alpha} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S^n z - \beta}{S^n z - \alpha} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S^n z = \beta$$

por lo que β es el punto fijo atractor y α el punto fijo repulsor.

b) Para $n \rightarrow -\infty$, sustituyendo z por $S^{-1}z$ en $\frac{Sz - \alpha}{Sz - \beta} = k \frac{z - \alpha}{z - \beta}$ obtenemos:

$$* |k| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow -\infty} S^n z = \beta \qquad * |k| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow -\infty} S^n z = \alpha$$

Es decir al cambiar el límite a $n \rightarrow -\infty$ se intercambian el punto fijo atractor y el repulsor respecto al caso anterior.

c) Para el caso parabólico Sz lo podemos escribir como $\frac{w}{w-a} = \frac{w}{z-a} + c$ con $w, c \in \mathbb{C}, c \neq 0$ y a es el único punto fijo de S . Como $w = Sz$, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\frac{w}{S^n z - a} = \frac{w}{S^{n-1} z - a} + c$; como $\frac{w}{S^{n-1} z - a} = \frac{w}{S^{n-2} z - a} + c$, por iteraciones sucesivas

$$\frac{w}{S^n z - a} = \frac{w}{S^{n-1} z - a} + c = \frac{w}{S^{n-2} z - a} + 2c = \dots = \frac{w}{z - a} + nc$$

Si $n < 0$ cambiamos Sz por $S^{-1}z$. El resultado final es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w}{S^n z - a} = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S^n z - a = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S^n z = a, \forall z \in \hat{\mathbb{C}}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 3. Queremos encontrar todas las circunferencias que son ortogonales a $|z| = 1$ y a $|z - 1| = 4$ (Fig. 4-14)

Solución. Sea $|z - \alpha| = k$ con $\alpha = a + ib$ y $a, b, k \in \mathbb{R}$, una circunferencia que corta ortogonalmente a las circunferencias $|z| = 1$ y $|z - 1| = 4$. Utilizando la propiedad: La suma de los cuadrados de sus radios es igual al cuadrado de la distancia entre los centros, tenemos que la circunferencia $|z - \alpha| = k$ corta a las circunferencias $|z| = 1$ y $|z - 1| = 4$ ortogonalmente si

$$k^2 + 1 = |\alpha - 0|^2 = \alpha\bar{\alpha} \text{ y } k^2 + 16 = |\alpha - 1|^2 = (\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1) = \alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha}) + 1$$

de las dos igualdades obtenemos $1 - (\alpha + \bar{\alpha}) - 15 = 0 \Rightarrow \alpha + \bar{\alpha} = 14$ y como

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2 \operatorname{Re} \alpha = 2a, 2a = -14 \Rightarrow a = -7 \Rightarrow \alpha = a + ib = -7 + ib$$

además

$$k^2 = |\alpha|^2 - 1 = (-7)^2 + b^2 - 1 = b^2 + 48 \Rightarrow k = \sqrt{b^2 + 48}$$

Por tanto la familia de circunferencias requerida está dada por $|z + 7 - ib| = \sqrt{b^2 + 48}$

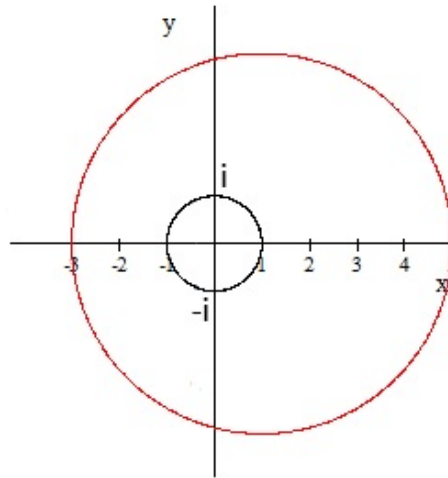


Fig. 4-14

Ejemplo 4. Sea c el centro de una circunferencia $|z - c| = r$. Sea A un punto representado por el número complejo a dentro de la circunferencia y B representado por el complejo b fuera de la circunferencia, tales que C, A, B se sitúan en la misma línea recta y $CA \cdot CB = r^2$. Queremos demostrar que $b = c + \frac{r^2}{\bar{a} - \bar{c}}$ (Fig. 4-15).

Solución.

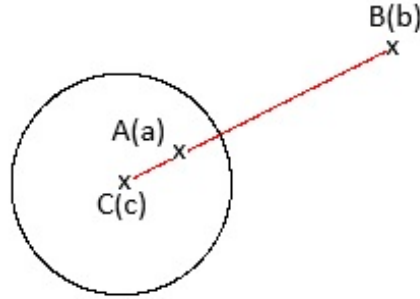


Fig. 4-15

Tenemos $CA \cdot CB = r^2 \Rightarrow |(a - c)(b - c)| = r^2$; como C, A, B son puntos colineales se verifica $\arg(b - c) = \arg(a - c) = -\arg(\bar{a} - \bar{c})$. Sabemos que $\arg z = -\arg(\bar{z})$ y que $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$; obtenemos $\arg[(b - c)(\bar{a} - \bar{c})] = 0 \Rightarrow (b - c)(\bar{a} - \bar{c})$ es real. Así pues $|(a - c)(b - c)| = r^2$ se reduce a $|b - c| |\bar{a} - \bar{c}| = r^2 \Rightarrow (b - c)(\bar{a} - \bar{c}) = r^2$ ya que $|z| = z$ si $z \in \mathbb{R}$, y de esta última igualdad obtenemos el resultado solicitado $b = c + \frac{r^2}{\bar{a} - \bar{c}}$.

4.3. Clasificación por la traza

Se hará una pequeña introducción a este tipo de clasificación de las transformaciones de Möbius, sin entrar en detalle de las demostraciones y de los pormenores de los distintos tipos, solamente se pretende que se conozca la existencia de esta otra forma de clasificar las transformaciones.

El grupo de matrices 2×2 con coeficientes complejos y determinante la unidad (en general con determinante distinto de cero) se denota por $SL(2, \mathbb{C})$, se define la traza de $A \in SL(2, \mathbb{C})$ como la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por $tr(A)$.

Lema 4.3.1. *La traza es invariante bajo la conjugación en $SL(2, \mathbb{C})$*

Demostración. Nos basta con demostrar que $tr(AB) = tr(BA)$, $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$, ya que entonces $tr(ABA^{-1}) = tr(A^{-1}AB) = tr(B)$. Ponemos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

y entonces obtenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & * \\ * & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & * \\ * & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

por lo que $tr(AB) = tr(BA)$

La traza de una transformación de Möbius está bien definida salvo un signo ya que existen dos matrices unimodulares (con determinante uno) que la definen.

Definición. Dada $T \in SL(2, \mathbb{C})$, grupo especial lineal de matrices 2×2 con coeficientes complejos y determinante la unidad, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, se define la traza de T como $\chi = \pm \frac{a+d}{\sqrt{ad-bc}}$

Y la clasificación de las transformaciones de Möbius por la traza queda como dice el siguiente teorema:

Teorema 4.3.1. *Sea $T \in SL(2, \mathbb{C})$, $T \neq Id$ y χ la traza de T . Entonces tenemos:*

- a) T es parabólica si y sólo si $\chi = \pm 2$
- b) T es elíptica si y sólo si $\chi \in (-2, 2)$
- c) T es hiperbólica si y sólo si $\chi \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

d) T es loxodrómica si y sólo si $\chi \notin \mathbb{R}$

Capítulo 5

5. Conclusiones

A continuación enumeramos las principales conclusiones del trabajo

1. Partiendo de la definición de transformación de Möbius obtenemos los diferentes tipos básicos de transformaciones: Traslación, rotación, homotecia e inversión. Se realiza un estudio con un poco más de profundidad a la inversión al ser esta aplicación la más destacada de las transformaciones anteriores.

2. Se estudia la razón entre las partes en que queda dividido un segmento $\overline{z_1 z_2}$ cuando es dividido por un tercer punto z_3 , lo que conocemos por razón simple de tres puntos, extendiendo posteriormente el estudio a la razón doble de cuatro puntos y detallando las propiedades más importantes de ambas relacionadas con el objeto de este trabajo: La razón simple no se conserva por las transformaciones de Möbius y la razón doble es invariante respecto a las transformaciones.

3. Establecemos una serie de definiciones en las que se apoya el trabajo (puntos fijos, simetría, orientación de circunferencias...) para llegar al punto álgido del trabajo, la clasificación de las transformaciones de Möbius.

4. Y por último introducimos unas familias de circunferencias para analizar el efecto geométrico de las transformaciones sobre ellas y de esta manera establecer la clasificación por conjugación o puntos fijos de las transformaciones de Möbius: Transformaciones elípticas, hiperbólicas, loxodrómicas y parabólicas; además se comenta otra manera de clasificar estas transformaciones: Clasificación por la traza.

Como remate me gustaría comentar en dos líneas la importante relación existente entre la Teoría de la Relatividad y las Transformaciones de Möbius, veámoslo. La

Teoría de la Relatividad se basa en las transformaciones de Lorentz y las funciones complejas que se corresponden con las transformaciones de Lorentz son las transformaciones de Möbius. Recíprocamente toda transformación de Möbius del plano complejo da lugar a una única transformación de Lorentz del espacio-tiempo.

Por tanto cualquier cambio que originemos en las transformaciones de Möbius produce un cambio también en las transformaciones de Lorentz y por extensión en la teoría de la Relatividad.

Comentar que dada la extensión de los temas tratados en el trabajo no se ha podido profundizar demasiado en algunas materias, de ahí que se haya intentado compensar con los variados ejemplos existentes en todas las secciones de la memoria.

Como bibliografía básica se ha utilizado sobre todo el libro de Ahlfors [1] y el de Schwerdtfeger [3], estando presentes en todos los capítulos del documento. En los capítulos 2 y 3 se ha empleado bastante información del libro de Conway [2]. En el capítulo 2 además se han utilizado Anderson [5], Hidalgo [6], Needham [7], Rudin [9] y Shakarchi [11], en el capítulo 3 además Orive [4] y Shakarchi [11], en el capítulo 4 Needham [7], Orive [4] y Carleson [10] y en el capítulo 5 Pascual [8] y Needham [7].

Bibliografía

- [1] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1979
- [2] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, second edition, Springer-Verlag, 1978
- [3] Hans Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers*, Dover Publications, Inc., 1979
- [4] Antonio Lascurain Orive, *Una Introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional*, UNAM, 2005
- [5] James W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, second edition, Springer, 2005
- [6] Rubén A. Hidalgo, *Transformaciones de Möbius: Una Introducción*, UTFSM, 2012
- [7] Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press-Oxford, 1997
- [8] Sara Benito Pascual, *Dos Ramas, una única ciencia: Física y Matemáticas*, Lulu Press, Inc. 2012
- [9] Walter Rudin, *Análisis Real y Complejo*, McGraw-Hill, 1985
- [10] Lenmart Carleson, *Complex Dynamics*, Springer, 1994
- [11] Rami Shakarchi, *Problems and Solutions for Complex Analysis*, Springer, 1999
- [12] <https://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY>. *Video de las transformaciones de Möbius*. Realizado por Douglas N. Arnold y Jonathan Rogness de la Universidad de Minnesota. 2007