TRABAJO DE FIN DE MASTER
UNED
Máster en Matemáticas Avanzadas
Especialidad: Análisis Matemático

EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DE NEVANLINNA

Autor: José Miguel Alonso Talavera

14 de Octubre de 2.013

Tutor: Dr. Arturo Fernández Arias

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, Ambrosio y Soledad y a mis hermanos, Lidia y Lisandro que siempre mostraron su incondicional apoyo y especialmente a mi esposa Ana, sin ella este proyecto nunca hubiera llegado a su fin. El sacrificio de nuestro tiempo de ocio y vacaciones, finalmente han merecido la pena.También quiero agradecer al tutor Dr. D. Arturo Fernández Arias por el trato humano y asesoramiento académico que siempre obtuve durante todo el desarrollo de éste trabajo. Por último, también quiero hacer una mención especial de agradecimiento a mi sobrino Isaac Jiménez, por la colaboración en la edición de este trabajo.

RESEÑA HISTÓRICA

Rolf Nevanlinna, matemático finlandés (1.895-1.980), fué reconocido por sus trabajos en el campo de las funciones de variable compleja. Su trabajo más significativo estuvo relacionado con la ***TEORÍA DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS VALORES DE LAS FUNCIONES MEROMORFAS***, donde probó los dos teoremas que llevan su nombre con importantes consecuencias en dicha teoría.

Rolf Nevanlinna

INTRODUCCIÓN

El objeto de este TFM es presentar la demostración del Segundo Teorema Fundamental de la teoría de distribución de valores de Nevanlinna. Este teorema fué solamente enunciado sin demostración, debido a su complejidad, en la asignatura ¨Análisis Complejo¨ del módulo II del Máster, donde se presentaron los conceptos y resultados básicos de la teoría, terminando en el enunciado y demostración del Primer Teorema Fundamental de Nevanlinna.
La teoría de distribución de valores de las funciones meromorfas trata el problema de estudiar el número y la disposición de las raíces de las ecuaciones de la forma

$$w(z) = a,$$

dada una función meromorfa $w(z)$, donde a puede ser un número complejo finito ó bien ∞.

A finales del siglo XIX y primeros del siglo XX, aparecieron una serie de resultados dando información sobre esta cuestión, debido fundamentalmente a matemáticos franceses, Picard, Borel, Julia, Boutroux. etc.

El más importante de estos resultados es el Teorema de Picard, que afirma que para las funciones enteras, es decir las funciones analíticas en todo el plano, las ecuaciones de la forma anterior, todas tienen solución, excepto para a lo más un valor de a . Posteriormente aparecieron versiones más profundas y refinadas de este teorema, como el Teorema Grande de Picard y el Teorema de Picard-Borel.

Estos resultados tenían limitaciones importantes, por ejemplo trataban solamente el caso de funciones enteras, es decir, no consideraban funciones meromorfas y por otro lado en muchos casos se imponía la restricción que fueran funciones de orden finito de crecimiento.

En las primeras décadas del siglo XX, un matemático finlandés R.Nevanlinna, con nuevos métodos revolucionó el estado y conocimiento de la teoría de distribución de valores, liberándola de las restricciones anteriores y profundizando el alcance de los resultados obtenidos hasta entonces. El resultado cumbre de la teoría de Nevanlinna es conocido como el "Segundo Teorema Fundamental"de la teoría de distribución de valores de las funciones meromorfas y es el objeto de esta memoria.

Este teorema afirma esencialmente que la cantidad de raíces de las ecuaciones $w(z) = a$ viene medido por una función contante $N(r, a)$ que asintóticamente viene dada por la función característica $T(r, w)$ que mide el crecimiento de la función meromorfa $w(z)$. Esto ocurre para casi todos lo valores de a y las desviaciones entre $N(r, a)$ y $T(r, w)$ que ocurre solamente para una cantidad numerable de valores, que llamaremos deficientes, viene medida por una cantidad $\delta(a, w)$, tal que $0 \leq \delta(a, w) < 1$, que llamaremos deficiencia definida por

$$\delta(a, w) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, a)}{T(r, w)},$$

que satisfacen la llamada relación de las deficiencias de Nevanlinna

$$\sum_{\nu} \delta(a_\nu, w) \leq 2.$$

La teoría de Nevanlinna de las funciones meromorfas fué extendida a marcos más generales como $\mathbb{C}^n$, es decir funciones de varias complejas o también a variedades complejas, extensiones debidas a Ahlfors, Weyl, Stoll y otros.

Recientemente se han encontrado paralelismos y aplicaciones de la teoría de Nevanlinna en áreas como la teoría de las ecuaciones diofánticas en teoría de números, mencionemos los trabajos de Vojta en esta dirección.

Finalmente indicamos que aunque a lo largo del tiempo se han desarrollado métodos diferentes para probar los resultados de Nevanlinna, por ejemplo el método diferencial geométrico que luego permitiría la extensión de la teoría a dimensiones superiores, en este trabajo nosotros hemos seguido los argumentos originales de Nevanlinna, como son presentados en su libro [11] , aunque hemos introducido algunas variaciones y simplificaciones debidas a W.K.Hayman [6]

Índice

1. EL PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DE NEVANLINNA

1.1. La Fórmula de Jensen-Poisson

Para obtener los Teoremas Fundamentales de Nevanlinna partiremos de la fórmula de Jensen-Poisson. Supongamos una función meromorfa $w(z)$ en un dominio que contiene el círculo cerrado $\overline{D(0,R)}$ donde $0 < R < \infty$, si la función no tiene ni ceros ni polos en dicho círculo entonces la función $\log w(z)$ es una función analítica y uniforme allí y mediante la integral de Poisson obtenemos la representación:

$$\log w(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log w(Re^{i\varphi})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\varphi$$

donde $r < R$, en el caso que $w(z)$ tiene ceros en los puntos a_μ y polos en los puntos b_v del interior del círculo y suponiendo que no presenta ni ceros ni polos en la circunsferencia frontera $\mathcal{C}(0,R)$, aplicamos la fórmula anterior a la función :

$$g(z) = w(z)\frac{\displaystyle\prod_{|b_\nu|<R}\frac{R^2-\overline{b_\nu}z}{R(z-b_\nu)}}{\displaystyle\prod_{|a_\mu|<R}\frac{R^2-\overline{a_\mu}z}{R(z-a_\mu)}}$$

que claramente no tiene ni ceros ni polos en el círculo,

$$\log g(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log g(Re^{i\varphi})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\varphi - \log\frac{R^2-\overline{a_\mu}z}{R(z-a_\mu)} + \log\frac{R^2-\overline{b_\nu}z}{R(z-b_v)}$$

de tal forma que tomando partes reales en ambos miembros y teniendo en cuenta que en la circunsferencia de radio R se verifica $|g(Re^{i\varphi})| = |w(Re^{i\varphi})|$, obtenemos la fórmula de Jensen-Poisson:

$$\log|w(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\varphi$$
$$-\sum_{|a_\mu|<R}\log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2-\overline{a_\mu}z}\right| + \sum_{|b_v|<R}\log\left|\frac{R(z-b_\nu)}{R^2-\overline{b_\nu}z}\right| \tag{1.1}$$

Esta fórmula se dedujo bajo la premisa de que no hay polos b_ν ni ceros a_μ en la circunsferencia $|z| = R$, pero como todos los términos de (1.1) son continuos, la fórmula es válida para todo R. En el caso particular $z = 0$, entonces de (1.1) se obtiene la Fórmula de Jensen:

$$\log|w(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(Re^{i\varphi})|d\varphi + \sum_{|b_\nu|<R}\log\frac{R}{|b_\nu|} - \sum_{|a_\mu|<R}\log\frac{R}{|a_\mu|} \tag{1.2}$$

Si de los conjugados armónicos con respecto a la variable z, multiplicado por i, se añaden en ambos miembros de (1.1), el resultado es:

$$\log w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(Re^{i\varphi})|\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi + \sum_{|b_\nu|<R}\log\frac{R^2-\overline{b_\nu}z}{R(z-b_\nu)} - \sum_{|a_\mu|<R}\log\frac{R^2-\overline{a_\mu}z}{R(z-a_\mu)} + iC \tag{1.3}$$

donde:

$$C = \arg w(0) - \sum_{|b_\nu|<R}\arg\left(\frac{-R}{b_\nu}\right) + \sum_{|a_\mu|<R}\arg\left(\frac{-R}{a_\mu}\right) + 2n\pi$$

Las fórmulas (1.1),(1.2) y (1.3), jugarán un papel fundamental en la teoría que sigue.

1.2. La notación de Nevanlinna. Fórmula de Jensen-Nevanlinna. El Primer Teorema Fundamental

Si el origen $z=0$ es un polo o un cero de $w(z)$, entonces ambos miembros de la fórmula de Jensen tienden a infinito. Para eliminar éste inconveniente, aplicamos la fórmula (1.2) a la expresión $wz^{-\lambda}$, si w tiene una expansión de la forma:

$$w(z) = C_\lambda.z^\lambda + C_{\lambda+1}.z^{\lambda+1}....(C_\lambda \neq 0)$$

y cambiando el papel de la variable R por el de r se obtiene:

$$\log|C_\lambda| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(re^{i\varphi})|d\varphi + \sum_{0<|b_\nu|<r}\log\frac{r}{|b_\nu|} - \sum_{0<|a_\mu|<r}\log\frac{r}{|a_\mu|} - \lambda\log r$$

Considerando la función constante simple, $n(r,a) = n(r,a,f) =$ número de soluciones de $w(z) = a$ en $\{z||z| \leq r\}$ para $a \,\epsilon\, \widehat{\mathbb{C}}$, podemos escribir los términos:

$$\sum_{0<|a_\mu|<r}\log\frac{r}{|a_\mu|}\ ,\quad \sum_{0<|b_\nu|<r}\log\frac{r}{|b_\nu|}$$

como una integral de Stieltjes y se obtiene mediante integración por partes:

$$\sum_{0<|a_\mu|<r}\log\frac{r}{|a_\mu|} = \int_0^r \log\frac{r}{t}dn(t,0) = \int_0^r \frac{n(t,0)-n(0,0)}{t}dt + n(0,0).\log r$$

$$\sum_{0<|b_v|<r}\log\frac{r}{|b_v|} = \int_0^r \log\frac{r}{t}dn(t,\infty) = \int_0^r \frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}dt + n(0,\infty).\log r$$

de tal forma que introduciendo la llamada función constante promedio:

$$N(r,a) = \int_0^r \frac{n(t,a)-n(a,0)}{t}dt + n(0,a).\log r$$

podemos escribir la Fórmula de Jensen como:

$$\log|C_\lambda| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(re^{i\varphi})|d\varphi + N(r,\infty) - N(r,0) \tag{1.4}$$

y finalmente llamando para un número no negativo α

$$\log^+ \alpha = \max\{\log \alpha, 0\}$$

de tal forma que:

$$\log \alpha = \log^+ \alpha - \log^+ \frac{1}{\alpha}$$

obtenemos de (1.4) la llamada **Fórmula de Jensen-Nevanlinna**

$$m(r,0) + N(r,0) = m(r,\infty) + N(r,\infty) + \log |C_\lambda| \tag{1.5}$$

donde hemos llamado:

$$m(r,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \Big|\frac{1}{w(re^{i\varphi})}\Big| d\varphi$$
$$m(r,\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |w(re^{i\varphi})| d\varphi$$

Utilizaremos también la notación

$$m(r,w) = m(r,\infty)\ ,\ N(r,w) = N(r,\infty),$$

de tal forma que

$$m\Big(r,\frac{1}{w}\Big) = m(r,0)\ ,\ N\Big(r,\frac{1}{w}\Big) = N(r,0),$$

entonces la Fórmula de Jensen-Nevanlinna se escribe

$$m(r,w) + N(r,w) = m\Big(r,\frac{1}{w}\Big) + N\Big(r,\frac{1}{w}\Big) + \log |C_\lambda|$$

Para un número arbitrario $a \neq \infty$ introducimos también la notación

$$m(r,a) = m\Big(r,\frac{1}{w-a}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \Big|\frac{1}{w(re^{i\varphi})-a}\Big| d\varphi,$$

y de acuerdo con la notación anterior tenemos

$$N(r,a) = N\Big(r,\frac{1}{w-a}\Big).$$

Aplicando la Fórmula de Jensen-Nevanlinna, la función $w-a$ se obtiene:

$$m(r,w-a) + N(r,w-a) = m\Big(r,\frac{1}{w-a}\Big) + N\Big(r,\frac{1}{w-a}\Big) + \mathit{constante} \tag{1.6}$$

pero,

$$N(r,w-a) = N(r,w)$$

y también:

$$\log^+ |w-a| \leq \log^+ |w| + \log^+ |a| + \log 2$$
$$\log^+ |w| \leq \log^+ |w-a| + \log^+ |a| + \log 2$$
$$|m(r,w-a) - m(r,w)| \leq \log^+ |a| + \log^+ |a| + \log 2$$

y se concluye de (1.6) que:

$$m(r,a) + N(r,a) = m(r,\infty) + N(r,\infty) + \varphi(r,a) \tag{1.7}$$

donde $|\varphi(r,a)| \leq \log^+ |a| + \log 2 + |\log |c||$, siendo c el primer coeficiente no nulo en la expansión de Laurent de $w - a$, en el origen $z = 0$.

Finalmente introducimos la función

$$T(r,w) = m(r,w) + N(r,w) = m(r,\infty) + N(r,\infty),$$

que llamaremos función característica de la función meromorfa $w(z)$, entonces la fórmula (1.7) se escribe

$$m(r,a) + N(r,a) = T(r,w) + \varphi(r,a) \tag{1.8}$$

donde $\varphi(r,a)$ es un término acotado que siguiendo la notación debido a Landau, podemos escribir por $O(1)$. La relación (1.8) es el Primer Teorema Fundamental de Nevanlinna.

1.3. Significado del Primer Teorema Fundamental. Ejemplos

En la sección (1.2) se ha probado el

Primer Teorema Fundamental de Nevanlinna. *Dada una función meromorfa en el disco* $D(0,R) = \{z||z| < R \leq \infty\}$, *para todo* $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ y todo $r > R$ *se verifica la relación*

$$m(r,a) + N(r,a) = T(r,w) + \varphi(r,a)$$

donde $T(r,w)$, *es la función característica de* $w(z)$ *que no depende de* a y $\varphi(r,a)$ es un término acotado

$$|\varphi(r,a)| \leq \log^+ |a| + |\log |c|| + \log 2$$

siendo c el primer coeficiente no nulo en la expansión de Laurent de $w(z) - a$.

Este resultado muestra la simetría observable por una función meromorfa para $|z| < R$, en su comportamiento relativo a diferentes valores $a \epsilon \widehat{\mathbb{C}}$. La suma $m(r,a) + N(r,a)$ para diferentes valores de a viene dada por la cantidad $T(r,w)$, salvo un término acotado. El término $N(r,a)$ es un término contante o de conteo de los $a - puntos$. Uno de los constituyentes de ésta suma invariante, la cantidad $N(r,a)$, indica cómo se distribuyen densamente las raíces de la ecuación $w = a$ en el disco $|z| < R$. El primer término $m(r,a)$, recibe el nombre de función de proximidad y está definido como el valor medio de $\log^+ |\frac{1}{w-a}|$ (o de $\log^+ |w|$, si $a = \infty$) en la circunsferencia $|z| = r$, recibe una significante contribución solamente desde aquellos arcos en el círculo donde los valores de la función difiere muy poco del valor a dado. La magnitud de la función de proximidad m puede considerarse como una medida para la desviación media en la circunsferencia $|z| = r$, de la función w desde el valor a. Si los $a - puntos$ de una función meromorfa están relativamente dispersos para un cierto valor a, este hecho se traduce analíticamente en el lento crecimiento de la función $N(r,a)$, cuando $r \to R$. En el caso extremo donde a es un valor excepcional de Picard de la función, $N(r,a)$ es idénticamente cero. Pero ésta deficiencia de los $a - puntos$ tiene su compensación, la función se desvía muy poco de la media, desde el valor a en cuestión, la correspondiente función de proximidad $m(r,a)$, será relativamente grande, así que la suma $m(r,a) + N(r,a)$, alcanza la magnitud $T(r,w)$ característica de la función dada w

El Primer Teorema Fundamental de Nevanlinna, por tanto, afirma la invariancia de la afinidad total $m(r,a) + N(r,a)$ a un valor cualquiera a y que esta afinidad total es esencialmente dada por la función característica $T(r,w)$, pero no nos da información sobre el tamaño relativo de cada una de las componentes $m(r,a)$ y $N(r,a)$. Esta cuestión es abordada en el Segundo Teorema Fundamental de Nevanlinna.

Por ejemplo, se observa que la función exponencial $w(z) = e^z$ se aproxima rápidamente a dos valores excepcionales de Picard $0, \infty$, cuando $z \to \infty$. Estos son valores asintóticos , la función tiende a 0 en el semiplano de la izquierda y tiende a ∞ en el semiplano de la derecha , respectivamente.

Otro ejemplo que es instructivo en muchos aspectos, lo proporciona la siguiente función entera:

$$w = \int_0^z e^{-t^p} dt$$

siendo $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$. Consideramos los ángulos W_ν:

$$|\arg t - \tfrac{\nu\pi}{p}| < \tfrac{\pi}{2p} - \varepsilon; \text{ tal que } \nu = 0, 1..,2p-1,\ \varepsilon > 0,$$

en los ángulos W_ν la integral w tiende alternativamente a un valor asintótico finito.

$$a_\mu = e^{\frac{2\mu\pi i}{p}} \int_0^\infty e^{-r^p} dr$$

o bien a infinito.

El carácter excepcional de los $p+1$ valores; $a_0, a_1, ...a_{p-1}, a_p = \infty$, es también aparente en el comportamiento de las cantidades fundamentales correspondientes, m y N.

Encontramos por integración por partes que:

$$\int_0^z e^{-t^p} dt = -\frac{e^{-z^p}}{pz^{p-1}}(1+\varepsilon)$$

donde $\varepsilon \to 0$, cuando $z \to \infty$, en los ángulos $W_{2\mu+1}$, $\mu = 0.., p-1$, de tal forma que si hacemos $z = re^{i\varphi}$, se obtiene:

$$\log |w(z)| \sim -r^p cosp\varphi$$

de tal forma que:

$$m(r, \infty) \sim \tfrac{r^p}{\pi}$$

y puesto que $N(r,\infty)$ es idénticamente nulo, concluimos que esta cantidad indica también la magnitud:

$$T(r,w) \sim \tfrac{r^p}{\pi}$$

Si el punto z, se encuentra en el ángulo W_0, nosotros tenemos:

$$\int_0^z e^{-t^p}dt - \int_0^\infty e^{-r^p}dr = -\int_z^\infty e^{-t^p}dt = -\frac{e^{-z^p}}{pz^{p-1}} + \frac{p-1}{p}\int_z^\infty \frac{e^{-t^p}}{p}dt \sim -\frac{e^{-z^p}}{pz^{p-1}}$$

en cada semirrecta partiendo del origen y dentro de W_0

$$\log|w(z)-a_0| \sim -r^p cosp\varphi$$

y por tanto:

$$m(r,a_0) \sim \tfrac{r^p}{p\pi}$$

De forma similar, encontramos que:

$$m(r,a_\mu) \sim \tfrac{r^p}{p\pi}$$

para $\mu = 0, 1...p-1$

Finalmente, tenemos que para cada valor finito $a \neq a_\mu$,

$$m(r,a) = O(1) \text{ , cuando } r \to \infty$$

$$m(r,a_\mu) \sim \tfrac{r^p}{p\pi},\ N(r,a_\mu) \sim \left(1-\tfrac{1}{p}\right)\tfrac{r^p}{\pi}, \text{ para } \mu = 0, 1, ...p-1,$$

y

$$m(r,a) = o\left(\tfrac{r^p}{\pi}\right),\ N(r,a) \sim \tfrac{r^p}{\pi} = T(r,w), \text{ para } a \neq a_\mu$$

Así pues que el crecimiento de la función contante $N(r,a)$ es especialmente débil para los p valores asintóticos, $a_0, a_1...a_{p-1}$.

Los ejemplos vistos anteriormente indican que en la suma $m+N$, para la mayoría de los valores a , la función contante $N(r,a)$ es relativamente grande comparada con la función de proximidad $m(r,a)$, y podemos designar como ¨valor excepcional¨ a aquellos valores para los que esto no ocurre, es decir cuando la densidad de los $a-puntos$ es relativamente baja. En la investigación posterior se probará que este hecho ocurre para una amplia clase de funciones. En el caso de funciones meromorfas definidas en un disco finito $D(0,R)$, será necesario imponer que la función característica $T(r,w)$ tienda a infinito suficientemente rápido.

2. EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DE NEVANLINNA

2.1. Motivación y derivación elemental

Después de descubrir la importancia de la propiedad de simetría de una función meromorfa $w(z)$, tal que, $|z| < R \leq \infty$, el cual fue expresado en el Primer Teorema Fundamental de Nevanlinna a través de la invarianza de la suma:

$$m(r, a) + N(r, a),$$

nos proponemos como principal objetivo la investigación de la importancia relativa de cada uno de estos dos términos en la suma:

✓$m(r, a)$= componente de proximidad

✓$N(r, a)$= componente de conteo (número de raíces cuando $w(z) = \infty$).

En esta dirección conocemos ya el Teorema de Picard que afirma que la función contante de una función meromorfa en el plano $z \neq \infty$ puede anularse como máximo para dos valores de a.

Consideremos de nuevo la función entera:

$$w(z) = \int_0^z e^{-t^p} dt, \; para \; p \geq 1, \tag{2.1}$$

hemos visto ya que en cada sector

$$W_\nu : \left| \arg z - \frac{\nu\pi}{p} \right| < \frac{\pi}{2p}; \; \nu = 0, 1 ..., 2p - 1,$$

la función tiende asintóticamente a infinito para los valores impares del subíndice ν y al valor:

$$a_\nu = e^{\frac{2\upsilon\pi i}{p}} \int_0^\infty e^{-t^p} dt = e^{\frac{2\upsilon\pi i}{p}} \Gamma\Big(1 + \frac{1}{p}\Big),$$

para los valores pares del subíndice, es decir, en los $W_{2\nu}$

En la sección (1.3) mencionamos que mediante una integración por partes, se obtiene la relación:

$$\int_0^\infty e^{-t^p} dt = -\frac{e^{-z^p}}{pz^{p-1}}(1 + \epsilon), donde \; \epsilon \to 0 \; cuando \; z \to \infty,$$

de aquí se deduce que cuando la integral (2.1) tiende a ∞, el módulo de su derivada $w' = e^{-z^p}$ tiende también a infinito y aproximadamente también a la misma velocidad que $w(z)$. De aquí se deduce que cada sector $W_{2\nu-1}$ contribuya de una manera similar a $m(r, w)$ y $m(r, w')$. Las regiones angulares $W_{2\nu}$, no contribuyen significativamente a $m(r, w)$ y $m(r, w')$, pues en ellas w y w' están acotadas. Concluimos de todo esto que ambas funciones de proximidad tienen al mismo orden de magnitud que es dado por:

$$m\Big(r,w\Big) \sim m\Big(r,w'\Big) \sim \frac{r^p}{\pi}$$

En los sectores $W_{2\nu}$ la función $w(z)$ tiene el valor asintótico a_ν y contribuye la cantidad $m(r, \frac{1}{w-a_\nu})$. Esta cantidad realmente constituye toda la magnitud $m(r, \frac{1}{w-a_\nu})$, pues en los otros sectores $W\mu,\ \mu \neq 2\nu$, la función $w(z)$ tiende a otros valores asintóticos distintos y por tanto no contribuye de manera esencial. Concluimos:

$$m\Big(r, \frac{1}{w-a_\nu}\Big) \sim \frac{r^p}{p\pi}$$

En estos sectores $W_{2\nu}$, la función derivada $w'(z)$ tiende a cero aproximdamente a la misma velocidad que $w(z)$ tiende al correspondiente a_ν de tal manera que cada uno de estos sectores contribuye la misma cantidad a $m(r, \frac{1}{w-a_\nu})$ y a $m(r, \frac{1}{w'})$, es decir la función de proximidad $m(r, \frac{1}{w'})$ recibe la misma cantidad $\frac{r^p}{p\pi}$ de todos estos sectores y concluimos finalmente

$$m(r,w') \sim \sum_{\nu=1}^{p} m\Big(r, \frac{1}{w-a_\nu}\Big) \sim \frac{r^p}{\pi}.$$

Las conclusiones que hemos obtenido para la función entera particular:

$$w(z) = \int_0^z e^{-t^p} dt$$

son válidas en general en cierta medida. En efecto, sea ahora $w(z)$ una función meromorfa arbitraria. Por una parte se observa que la derivada $w'(z)$ es aproximadamente de la misma magnitud que $w(z)$ en aquellos arcos de la circunferencia $|z| = r$ donde $|w(z)|$ es grande, de tal manera que las funciones de proximidad $m(r,w)$ y $m(r,w')$ son iguales asintóticamente cuando r tiende a infinito

$$m(r,w) \sim m(r,w')$$

Por otra parte, imaginemos como ocurría en nuestro ejemplo que la función $w(z)$ se aproxima especialmente bien a ciertos valores $a_\nu, \nu = 1...p$, entonces de la misma manera que ocurría en aquel caso concreto, el valor de la derivada w' en aquellos arcos B_ν donde la diferencia $w - a_\nu$ es muy pequeña es del mismo orden de magnitud, de tal forma que las integrales:

$$\int_{B_\nu} \log^+ \Big|\frac{1}{w(re^{i\theta}) - a_\nu}\Big| d\theta, \quad \int_{B_\nu} \log^+ \Big|\frac{1}{w'(re^{i\theta})}\Big| d\theta$$

son aproximadamente iguales para todo $\nu = 1....p$. Puesto que los arcos $B\nu$ son disjuntos en la circunferencia $|z| = r$ entonces integrando sobre toda la circunferencia concluiremos:

$$m\Big(r, \frac{1}{w'}\Big) \sim \sum_{\nu=1}^{p} m\Big(r, \frac{1}{w-a_\nu}\Big)$$

Mediante la introducción de la derivada $w'(z)$ damos cuenta de todos los valores a para los cuales la función de proximidad $m(r,a)$ de la función $w(z)$ es apreciable solamente considerando las funciones de proximidad de la derivada correspondiente a dos valores $0, \infty$ es decir,

$m(r,\frac{1}{w'}), m(r,w')$. La función $m(r,w')$ aproxima la función de proximidad de la función $w(z)$ correspondiente a ∞ , es decir, $m(r,w)$, mientras que el término $m(r,\frac{1}{w'})$ aproxima la suma de las funciones de proximidad $m(r,a)$ para cualquier cantidad de valores finitos a.

Por otra parte, por el Primer Teorema Fundamental de Nevanlinna se tiene:

$$m(r,w') + N(r,w') \sim m\Big(r,\frac{1}{w'}\Big) + N\Big(r,\frac{1}{w'}\Big)$$

que junto con las relaciones obtenidas:

$$m(r,w) \sim m(r,w')$$

y

$$m\Big(r,\frac{1}{w'}\Big) \sim \sum_1^p m\Big(r,\frac{1}{w-a_v}\Big)$$

concluimos que

$$m(r,w) + N(r,w') \sim \sum_1^p m\Big(r,\frac{1}{w-a_v}\Big) + N\Big(r,\frac{1}{w'}\Big)$$

Por razones que aclararemos más adelante, nosotros modificaremos ésta relación añadiendo en ambos miembros la cantidad $2N(r,w) + m(r,w)$, entonces se obtiene:

$$2m(r,w) + 2N(r,w) \sim m(r,w) + \sum_1^p m\Big(r,\frac{1}{w-a_v}\Big) + N_1(r)$$

Llamando:

$$N_1(r) = N(r,\frac{1}{w'}) + 2N(r,w) - N(r,w') \tag{2.2}$$

una cantidad que tiene una simple interpretación y que veremos posteriormente. En definitiva, nosotros podemos sustituir la suma $m(r,w) + N(r,w)$ por la función característica $T(r,w)$ y finalmente obtendremos:

$$2T(r,w) \sim \sum_1^{p+1} m(r,a_v) + N_1(r), \tag{2.3}$$

donde $a_{p+1} = \infty$ y N_1 tiene el mismo valor que (2.2).

Este resultado se ha deducido partiendo de la hipótesis que los valores de $|w|$ y $|w'|$ no son muy diferentes cuando son grandes y que lo mismo ocurre con $|\frac{1}{w-a}|$ y $|\frac{1}{w'}|$ cuando w está próximo al valor finito a. Aunque con gran probabilidad esta hipótesis es cierta, nosotros vamos a probar rigurosamente solamemte una parte de ella. Esto lo vamos a hacer mediante un teorema sobre la función de proximidad de la derivada logarítmica $m(r,\frac{w'}{w})$, de aquí concluiremos que si $|w(z)|$ es grande entonces $|w'(z)|$ no puede ser signifcantemente más grande y similarmente que si $w(z)$ se aproxima al valor finito a entonces w' no difiere de cero significantemente más, es decir, probamos que en lugar de las igualdades asintóticas anteriores sólo obtenemos desigualdades en una dirección.

Así pues, en lugar de la desigualdad asintótica (2.3) obtenemos solamente una desigualdad y esto es esencialmente el **Segundo Teorema Fundamental**.

2.2. Demostración rigurosa del Segundo Teorema Fundamental

A continución probamos el teorema rigurosamente. Con el objeto de entender el significado de los pasos de la demostración deberemos compararlos con los pasos dados en las consideraciones anteriores.

Supongamos que:

$$w(z) = c_0 + c_k z^k \ldots c_0 \neq 0, c_k \neq 0,$$

es una función meromorfa en $|z| < R \leq \infty$ y sea $a_1, a_2 \ldots a_p$, un sistema de $p \geq 2$ números complejos finitos distintos.

En primer lugar comparamos las funciones de proximidad $m(r, w)$ y $m(r, w')$. Por medio de desigualdades elementales obtenemos:

$$m(r, w') = m(r, w\frac{w'}{w}) \leq m(r, w) + m(r, \frac{w'}{w}), \tag{2.4}$$

para estimar la función de proximidad $m(r, \frac{1}{w})$ consideramos la suma:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{w(z) - a_\nu},$$

se tiene:

$$m(r, f) = m\Big(r, fw'\frac{1}{w'}\Big) \leq m\Big(r, \frac{1}{w'}\Big) + m\Big(r, \sum_{\nu=1}^{p} \frac{w'}{w(z) - a_\nu}\Big) \tag{2.5}$$

Por otro lado, dado un μ, $\mu = 1, \ldots p$, tenemos que:

$$f = \frac{1}{w - a_\mu}\Big(1 + \sum_{\nu \neq \mu} \frac{w - a_\mu}{w - a_\nu}\Big)$$

Si $\delta = min(|a_h - a_k|, 1)(h \neq k)$, entonces para cada punto z, donde:

$$|w(z) - a_\mu| < \frac{\delta}{2p}\Big(\leq \frac{1}{2p}\Big) \tag{2.6}$$

para $\mu \neq \nu$, se tiene:

$$|w - a_\nu| \geq |a_\mu - a_\nu| - |w - a_\mu| > \delta - \frac{\delta}{2p} \geq \frac{3\delta}{4},$$

y por lo tanto:

$$\sum_{\nu \neq \mu} \Big|\frac{w - a_\mu}{w - a_\nu}\Big| < p\frac{2}{3p} = \frac{2}{3},$$

así que:

$$\Big|1 + \sum_{\nu \neq \mu} \frac{w - a_\mu}{w - a_\nu}\Big| > \frac{1}{3},$$

de todo esto se concluye:

$$\log^+ |f(z)| > \log^+ \Big|\frac{1}{w - a_\mu}\Big| - \log 3,$$

para cada punto z que satisface (2.6).

Por otro lado, los arcos determinados en el círculo definido en (2.6) son disjuntos para diferentes valores de μ y por tanto se concluye que:

$$m(r,f) \geq \frac{1}{2\pi}\sum_{\mu=1}^{p}\int_{|w-a_\mu|<\frac{\delta}{2p}} \log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi > \frac{1}{2\pi}\sum_{\mu=1}^{p}\int_{|w-a_\mu|<\frac{\delta}{2p}} \Big(\log^+\Big|\frac{1}{w(re^{i\varphi})-a_\mu}\Big| - \log 3\Big)d\varphi,$$

además,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|w-a_\mu|<\frac{\delta}{2p}} \log^+\Big|\frac{1}{w-a_\mu}\Big|d\varphi = m(r,a_\mu) - \frac{1}{2\pi}\int_{|w-a_\mu|<\frac{\delta}{2p}} \log^+\frac{1}{|w-a_\mu|}d\varphi \geq m(r,a_\mu) - \log\frac{2p}{\delta},$$

y finalmente:

$$m(r,f) > \sum_{1}^{p} m(r,a_\mu) - p\log\frac{2p}{\delta} - \log 3,$$

que junto a (2.5) resulta:

$$m\Big(r,\frac{1}{w'}\Big) > \sum_{\nu=1}^{p} m(r,a_\mu) - m\Big(r,\sum_{1}^{p}\frac{w'}{w-a_\nu}\Big) - p\log\frac{2p}{\delta} - \log 3 \tag{2.7}$$

Si las cantidades $N(r,w')$ y $N(r,\frac{1}{w'})$ se añaden en ambos miembros de las desigualdades o inecuaciones (2.4) y (2.7), entonces usando el Primer Teorema Fundamental de Nevanlinna, tenemos que:

$$T(r,w') = T\Big(r,\frac{1}{w'}\Big) + \log|K.C_k|,$$

y concluimos que la función característica $T(r,w')$ para la derivada de una función meromorfa $w(z)$ se encuentra limitada entre:

$$m(r,w) + N(r,w') + m\Big(r,\frac{w'}{w}\Big)$$

y

$$\sum_{1}^{p} m\Big(r,\frac{1}{w-a_\mu}\Big) + N\Big(r,\frac{1}{w'}\Big) - m\Big(r,\sum_{1}^{p}\frac{w'}{w-a_\nu}\Big) - p\log\frac{2p}{\delta} - \log\frac{3}{K.|C_k|}$$

Escribiendo pues que la primera de las expresiones anteriores es menor que la segunda e introducimos (2.2), obtenemos la siguiente forma preliminar del **Segundo Teorema Fundamental**.

Sea:

$$w(z) = C_0 + C_k z^k....(C_k \neq 0)$$

una función meromorfa para $|z| < R \leq \infty$. *Si* $a_1, a_2....a_p$, $p \geq 2$, *son números finitos distintos, entonces:*

$$\sum_{1}^{p+1} m(r,a_v) < 2T(r,w) - N_1(r) + S(r) \tag{2.8}$$

Aquí $N_1(r)$ es la cantidad analizada en (2.2), siendo $a_{p+1} = \infty$ y:

$$S(r) < m\Big(r, \frac{w'}{w}\Big) + m\Big(r, \sum_{1}^{p} \frac{w'}{w - a_\nu}\Big) + p \log \frac{2p}{\delta} + \log \frac{3}{K.|C_k|} \tag{2.9}$$

siendo δ el más pequeño de los números 1 y $|a_h - a_k|(h \neq k)$.

A continuación examinamos detenidamente los términos que aparecen en la desigualdad fundamental (2.8). El término $N_1(r)$ está formado por dos sumandos, uno de ellos, $N(r, \frac{1}{w'})$ cuenta los puntos z donde la función $w(z)$ toma una valor finito a con multiplicidad $k > 1$ y la contribución de tal punto es $(k-1)$. El segundo término $2N(r, w) - N(r, w')$, tiene en cuenta de forma análoga los puntos donde la función toma el valor ∞ con multiplicidad $k > 1$, es decir los polos múltiples. La cantidad $N_1(r)$ mide el número de puntos múltiples de $w(z)$, puede ser escrito en la forma:

$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t) - n_1(0)}{t} dt + n_1(0) \log r$$

donde $n_1(r)$ indica el número de puntos múltiples de $w(z)$ en el disco $|z| \leq r$, donde cada punto de multiplicidad k será contado $k-1$ veces. El término $S(r)$, juega el papel de un término de error, despreciable en general frente a la función caracterísitca $T(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$. En particular esto es siempre cierto para funciones meromorfas definidas en todo el plano complejo $\mathbb{C}$, en el caso de un disco finito, es preciso imponer condiciones adicionales de crecimiento sobre la función característica $T(r)$.

Esto es esencialmente critico cuando se excede el orden de crecimiento, de forma que $S(r)$ tiene el mismo orden de magnitud que $\log T(r)$. Esto se mantiene sin ninguna condición adicional en el caso de $R = \infty$, donde $w(z)$ es por tanto meromorfa en el plano entero $z \neq \infty$.

2.3. Lema de la Derivada Logarítmica

Con el fin de obtener una estimación de $S(r)$, necesitamos obtener una estimación de la derivada logarítmica de la función meromorfa $w(z)$.

$$w(z) = C_\lambda z^\lambda + C_{\lambda+1} z^{\lambda+1} \ldots . (C_\lambda \neq 0)$$

Utilizamos la fórmula de Jensen-Poisson vista anteriormente y diferenciamos ambos miembros de la igualdad. Sea $|z| = r$ y sean $R > r$, $\rho = \frac{1}{2}(R + r) > r$, se tiene:

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(\rho e^{i\varphi})| \frac{2\rho e^{i\varphi}}{(\rho e^{i\varphi} - z)^2} d\varphi + \sum_{|a_\mu| < \rho} \Big(\frac{\overline{a_\mu}}{\rho^2 - \overline{a_\mu} z} - \frac{1}{a_\mu - z} \Big) + \sum_{|b_\nu| < \rho} \Big(\frac{1}{b_\nu - z} - \frac{\overline{b_\nu}}{\rho^2 - \overline{b_\nu} z} \Big), \tag{2.10}$$

Llamemos $\delta(z)$ a la distancia de z al punto más próximo de entre todos los ceros y polos a_μ, b_ν y sea:

$$n = n(\rho, w) + n\Big(\rho, \frac{1}{w}\Big),$$

el número total de ceros y polos en $|z| < \rho$.

Tenemos las siguientes acotaciones:

$$|\rho^2 - \overline{a_\mu} z| \geq \rho^2 - \rho r = \rho(\rho - r),$$

de tal forma que:

$$\Big|\frac{\overline{a_\mu}}{\rho^2-\overline{a_\mu}z}\Big| \le \frac{\rho}{\rho(\rho-r)} = \frac{1}{\rho-r} \ , \ \Big|\frac{\overline{b_\nu}}{\rho^2-\overline{b_\nu}z}\Big| \le \frac{1}{\rho-r},$$

también se verifican:

$$\Big|\frac{1}{a_\mu-z}\Big| \le \frac{1}{\delta(z)} \ , \ \Big|\frac{1}{b_\nu-z}\Big| \le \frac{1}{\delta(z)}$$

por otro lado, escribiendo otra vez $\log w = \log^+ w - \log^+ |\frac{1}{w}|$ obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log w(\rho e^{i\varphi})\frac{2\rho e^{i\varphi}}{(\rho e^{i\varphi}-z)^2}d\varphi$$

$$\le \frac{2\rho}{(\rho-r)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|w(\rho e^{i\varphi})||d\varphi = \frac{2\rho}{(\rho-r)^2}\Big\{m(\rho,w)+m\Big(\rho,\frac{1}{w}\Big)\Big\},$$

de tal forma que junto con las acotaciones anteriores se deduce de (2.10).

$$\Big|\frac{w'(z)}{w(z)}\Big| \le \frac{2\rho}{(\rho-r)^2}\Big\{m(\rho,w)+m\Big(\rho,\frac{1}{w}\Big)\Big\} + n\Big\{\frac{1}{\delta(z)}+\frac{1}{\rho-r}\Big\},$$

y haciendo uso de la fórmula de Jensen-Nevanlinna

$$\Big|\frac{w'(z)}{w(z)}\Big| \le \frac{4\rho}{(\rho-r)^2}\Big\{T(\rho,w)+\log^+\Big|\frac{1}{w(0)}\Big|\Big\} + \frac{n}{r}\Big\{\frac{r}{\delta(z)}+\frac{r}{\rho-r}\Big\}.$$

De aquí se sigue:

$$\log^+\Big|\frac{w'(z)}{w(z)}\Big| \le \log^+\rho + 2\log^+\frac{1}{\rho-r} + 2\log 2 + \log^+ T(\rho,w) + \log^+\log^+\Big|\frac{1}{w(0)}\Big|$$

$$+\log 2 + \log^+\frac{r}{\delta(z)} + \log^+\frac{r}{\rho-r} + 2\log 2,$$

e integrando obtenemos:

$$m\Big(r,\frac{w'}{w}\Big) \le \log^+ T(\rho,w) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{r}{\delta(re^{i\varphi})}d\varphi + \log^+\rho + 2\log^+\frac{1}{\rho-r}$$

$$+2\log 2 + \log^+\log^+\Big|\frac{1}{w(0)}\Big| + \log^+ r + \log^+\frac{r}{\rho-r} + 2\log 2.$$

Para estimar el segundo término en la suma del miembro de la derecha utilizaremos un resultado geométrico que encontramos en W.K. Hayman, pag. 35

Lema. *Sean* $z_1, z_2, ..., z_n,\ n\ge 1$ *puntos del plano y sea* $\delta(z)$ *la mínima de las distancias* $|z-z_\nu|, \nu = 1, ...n$. *Entonces se tiene:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{r}{\delta(re^{i\varphi})}d\varphi \le 2\log n + \frac{1}{2}.$$

Para estimar n procederemos de la siguiente manera:

$$N(R,w) = \int_\rho^R \frac{n(t,w)}{t}dt \ge n(\rho,w)\frac{R-\rho}{R} \ , \ N\Big(R,\frac{1}{w}\Big) \ge \int_\rho^R \frac{n(t,\frac{1}{w})}{t}dt \ge n\Big(\rho,\frac{1}{w}\Big)\frac{R-\rho}{R},$$

de tal forma que:

$$n = n(\rho, w) + n\Big(\rho, \frac{1}{w}\Big) \leq \frac{R}{R-\rho}\Big\{N(R,w) + N\Big(R, \frac{1}{w}\Big)\Big\}$$

$$\leq \frac{R}{R-\rho}\Big\{2T(R,w) + \log^+ \frac{1}{w(0)}\Big\} \leq \frac{2R}{R-\rho}\Big\{T(R,w) + \log^+ \frac{1}{w(0)}\Big\},$$

de donde:

$$\log n \leq \log^+ R + \log^+ \frac{1}{R-\rho} + \log^+ T(R,w) + \log^+ \log^+ \frac{1}{w(0)} + 2\log 2.$$

Finalmente recordando que:

$$\rho - r = R - \rho = \frac{1}{2}(R - r),$$

por monotonía de funciones obtenemos finalmente el

Lema de la derivada logarítmica. *Si $w(z)$ es una función meromorfa en $|z| \leq R$, se tiene para $r < R$*

$$m\Big(r, \frac{w'}{w}\Big) < 4\log^+ T(R,w) + 4\log^+ \log^+ \frac{1}{w(0)} + 5\log^+ R$$

$$+6\log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ \frac{1}{r} + 14.$$

Para poder aplicar el Lema de la derivada logarítmica a la deducción del Segundo Teorema Fundamental tenemos que eliminar R del miembro de la derecha, a este fin haremos uso del siguiente resultado debido a Borel.

Lema 2. *Sea $y(x) \geq 0$, contínua, no constante y monótonamente creciente de $0 \leq x \leq \infty$, entonces:*

$$y\Big(x + \frac{1}{y(x)}\Big) < 2y(x)$$

para cada $x > 0$, a excepción de los valores de un conjunto excepcional E de medida finita.

Demostración. Si $E \neq \phi$, sea $x = x_1 \in E$, $y_1 = y(x_1) > 0$, $\Delta_1 = \frac{1}{y_1}$. Definimos las sucesiones $x_\nu, y_\nu = y(x_\nu)$, $\Delta_\nu = \frac{1}{y_\nu}$, mediante:

$$x_{\nu+1} = \text{mín}\{x \in E \mid x_\nu + \Delta_\nu \leq x\}$$

El conjunto E, que está contenido en la unión $\bigcup \Delta_\nu$ tiene por tanto medida finita.

Aplicando el lema anterior para $x = r$, $y(r) = \log T(r,w)$, donde $T(r,w)$ es una función característica de una función meromorfa no constante obtenemos la estimación:

$$m\Big(r, \frac{w}{w'}\Big) \leq 10\Big\{\log^+ T(r,w) + \log r\Big\} \tag{2.11}$$

Una estimación similar se obtiene para una función meromorfa $w(z)$ en el disco unidad $|z| < 1$. Si aplicamos el lema anterior con:

$$x = \frac{r}{1-r}, \; y(x) = \log^+ T\Big(\frac{x}{x+1}, w\Big),$$

concluimos del lema de la derivada logarítmica para r, $0 \leq r < 1$

$$m\Big(r, \frac{w}{w'}\Big) \leq 10\Big\{ \log^+ T(r,w) + \log \frac{1}{1-r}\Big\} \tag{2.12}$$

fuera de un conjunto excepcional E tal que:

$$\int_E \frac{dr}{1-r} < \infty$$

Finalmente observando que,

$$\sum_{\nu=1}^{p} \frac{w'}{w-a_\nu} = \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$$

donde

$$\Phi(z) = \prod_{\nu=1}^{p} (w-a_\nu),$$

obtenemos

$$m\Big(r, \frac{w'}{w-a_\nu}\Big) = m\Big(r, \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\Big) \leq 10\Big\{ \log^+ T(r,\Phi) + \log r\Big\}$$

para $w(z)$ meromorfa en el plano y

$$m\Big(r, \frac{w'}{w-a_\nu}\Big) = m\Big(r, \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\Big) \leq 10\Big\{ \log^+ T(r,\Phi) + \log \frac{1}{1-r}\Big\}$$

y por las desigualdades elementales de la función característica

$$T(r,\Phi) \leq \sum_{\nu=1}^{p} T(r, w-a_\nu) \leq qT(r,w) + O(1). \tag{2.13}$$

2.4. Formulación final del Segundo Teorema Fundamental

Obtenemos como conclusión de (2.8), (2.9), (2.11), (2.12) y (2.13) el Segundo Teorema Fundamental de Nevanlinna:

Segundo Teorema Fundamental de Nevanlinna. *Sea w(z) una función meromorfa no constante en el plano complejo* $\mathbb{C}$ *o bien en el disco unidad D(0,1) y sean* $a_1, a_2, ...a_p, p \geq 3$ *números complejos distintos, pudiendo uno de ellos ser* ∞. *Entonces se tiene para todo r en el caso del plano o bien para r ,* $0 \leq r < 1$ *, en el caso del disco*

$$\sum_{\nu=1}^{p} m(r, a_\nu) \leq 2T(r,w) - N_1(r) + S(r),$$

donde $N_1(r)$ *es un término positivo llamado índice de ramificación que es dado por*

$$N_1(r) = N_1\Big(r, \frac{1}{w'}\Big) + 2N(r,w) - N(r,w'),$$

y $S(r)$ *es un término de error insignificante respecto a* $T(r,w)$ *que viene dado por*

$$S(r) = m\Big(r, \frac{w'}{w}\Big) + \sum_{a_\nu \neq \infty} m\Big(r, \frac{w'}{w - a_\nu}\Big) + q\log^+ \frac{3p}{\delta} + \log 2 + \log\frac{1}{w'(0)},$$

donde

$$\delta = \min_{i \neq j} |a_i - a_j|.$$

En el caso del plano complejo $\mathbb{C}$ *se tiene la estimación*

$$S(r) = \log(rT(r,w)),$$

para todos los valores reales r *fuera de un conjunto excepcional* E *de valores* r *de medida finita, y en el caso del disco finito*

$$S(r) = O\Big(\frac{1}{1-r}\log T(r)\Big),$$

para todos los valores de r *,* $0 \leq r < 1$ *, fuera de un conjunto excepcional* E *que verifica*

$$\int_E \frac{dr}{1-r} < \infty$$

3. CONSECUENCIAS DEL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL

3.1. Deficiencias. Valores deficientes

Partimos del Primer Teorema Fundamental

$$m(r,a)+N(r,a)=T(r,w)+O(1),$$

donde podemos considerar dos casos, el plano complejo $\mathbb{C}$, es decir $|z|<R\leq R_0=\infty$, y el caso de un disco finito $|z|<R\leq R_0$, dígamos $R_0=1$. En el segundo caso supondremos que la función característica $T(r,w)$ no es acotada. De la relación

$$m(r,a)=T(r,w)-N(r,a)+O(1),$$

dividiendo por $T(r,w)$ y tomando límite inferior en ambos lados obtenemos

$$\liminf_{r\to R_0}\frac{m(r,a)}{T(r,w)}=\liminf_{r\to R_0}\left(1-\frac{N(r,a)}{T(r,w)}\right)=1-\limsup_{r\to R_0}\frac{N(r,a)}{T(r,w)},$$

llamaremos a este número deficiencia de la función $w(z)$ respecto del valor a y lo representaremos por $\delta(a,w)$, es decir

$$\delta(a,w)=\liminf_{r\to R_0}\frac{m(r,a)}{T(r,w)}=1-\limsup_{r\to R_0}\frac{N(r,a)}{T(r,w)},$$

De la definición de deficiencia y del Primer Teorema Fundamental se deduce

$$0\leq\delta(a,w)\leq 1,$$

el término

$$1-\delta(a,w)=\limsup_{r\to R_0}\frac{N(r,a)}{T(r,w)},$$

claramente mide la frecuencia relativa asintótitica de las raíces de la ecuación $w(z)=a$ consecuentemente la deficiencia $\delta(a,w)$ es un número que mide en que medida la función $w(z)$ deja de tomar el valor a.

Llamaremos valor deficiente a un valor a para el cual la deficiencia es estrictamente positiva, es decir $\delta(a,w)>0$. Los valores deficientes a son aquellos que la función toma una cantidad relativamente menor de veces. En cualquier caso observamos que un valor deficiente puede ser tomado incluso infinitas veces por la función.

Al resto de valores, es decir aquellos valores a para los cuales $\delta(a,w)=0$, los llamaremos valores normales o regulares.

3.2. Relación de las Deficiencias de Nevanlinna

Una importante e ilustrativa consecuencia del Segundo Teorema Fundamental es la llamada Relación de las Deficiencias de Nevanlinna que presentamos a continuación.

Partimos de la Desigualdad Fundamental del Segundo Teorema de Nevanlinna

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) \leq 2T(r, w) - N_1(r) + S(r),$$

dividimos ambos miembros por $T(r, w)$ y tomamos límites inferiores en ambos miembros, obtenemos

$$\sum_{\nu=1}^{q} \liminf_{r\to R_0} \Big(\frac{m(r, a_\nu)}{T(r, w)} + \frac{N_1(r)}{T(r, w)} \Big) \leq 2 + \liminf_{r\to R_0} \frac{S(r)}{T(r, w)},$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{N_1(r)}{T(r, w)} \geq 0,$$

concluimos también

$$\sum_{\nu=1}^{q} \liminf_{r\to R_0} \Big(\frac{m(r, a_\nu)}{T(r, w)} \Big) \leq 2 + \liminf_{r\to R_0} \frac{S(r)}{T(r, w)},$$

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta(a_\nu, w) \leq 2 + \liminf_{r\to R_0} \frac{S(r)}{T(r, w)}. \tag{3.1}$$

Por otro lado el Segundo Teorema Fundamental asegura que para funciones meromorfas transcendentes $w(z)$ en el plano complejo $\mathbb{C}$ se tiene

$$S(r) = O(\log(rT(r, w))),$$

de donde deducimos

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{S(r)}{T(r, w)} = 0,$$

Concluimos por tanto que para funciones meromorfas definidas en todo el plano $\mathbb{C}$ la célebre relación de la deficiencias de Nevanlinna

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta(a_\nu, w) \leq 2.$$

En el caso de funciones meromorfas definidas en un disco finito $D(0, R_0)$, que hemos supuesto previamente $R_0 = 1$, es decir el disco unidad $D(0, 1)$, sin pérdida de generalidad, se tiene la estimación en el Segundo Teorema Fundamental

$$S(r) = O\Big(\log \Big(\frac{1}{1-r} T(r, w) \Big) \Big),$$

de tal manera que la relación

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{S(r)}{T(r, w)} = 0,$$

no tiene que verificarse siempre. Una condición suficiente para que esto ocurra es

$$\lim_{r\to 1} \frac{\frac{1}{1-r}}{T(r, w)} = 0,$$

o también la condición más débil

$$\frac{1}{1-r} = O(T(r,w)).$$

Para una función meromorfa $w(z)$ en el disco unidad satisfaciendo la condición anterior se concluye también de (2.11) la relación de las deficiencias de Nevanlinna

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta(a_\nu, w) \leq 2.$$

Finalmente observamos que en la deducción de la relación de las deficiencias nosotros hemos obviado el término

$$\frac{N_1(r)}{T(r,w)} \geq 0,$$

este es un término positivo que mide los valores multiples de $w(z)$ y que juega un papel en el estudio de las ramificaciones asociadas a la función. Análogamente al caso de las deficiencias, definiríamos el número positivo

$$\liminf_{r\to R_0} \frac{N_1(r)}{T(r,w)} \geq 0,$$

que sería el índice de ramificación total de la función.

3.3. Algunos ejemplos

1.Ejemplo.

En primer lugar consideramos el caso de las funciones racionales

$$w(z) = \frac{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + ... + a_0}{b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + ... + b_0}, a_p \neq 0, b_q \neq 0$$

supongamos $p > q$, el resto de los casos se trata de forma análoga.

En este caso $w(z) \to \infty$ cuando $z \to \infty$, de donde se concluye claramente para cualquier valor finito a

$$m(r,a) = 0 \text{ para r suficientemente grande},$$

por otro lado la ecuación $w(z) = a$ tiene p raíces, de tal forma que $n(t,a) = p$ para t suficientemente grande y por tanto

$$N(r,a) = \int_0^r \frac{n(t,a)}{t} dt = p \log r + O(1) \text{ para r suficientemente grande},$$

y concluimos del Primer Teorema Fundamental

$$T(r,w) = p \log r + O(1).$$

En cuanto a las deficiencias, por tanto para a finito tenemos

$$\delta(a,w) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r,a)}{T(r,w)} = 0.$$

Para $a = \infty$ se tiene que $n(t, \infty) = q$ para t suficientemente grande, los polos se obtienen como las raíces del denominador y su número viene dado por el grado q. Deducimos que

$$N(r, \infty) = \int_0^r \frac{n(t, a)}{t} dt = q \log r + O(1) \text{ para r suficientemente grande,}$$

y también

$$m(r, \infty) = T(r, w) - N(r, \infty) = (p - q) \log r + O(1),$$

y por tanto

$$\delta(w, \infty) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, \infty)}{T(r, w)} = \liminf_{r \to \infty} \frac{(p - q) \log r + O(1)}{p \log r + O(1)} = 1 - \frac{q}{p},$$

vemos que en este caso también se verifica la relación de las deficiencias

$$\sum \delta(a, w) = 1 - \frac{q}{p} < 2.$$

2.Ejemplo.

El segundo ejemplo que consideramos es la función exponencial $w(z)$ que nosotros ya consideramos en el Sección 1, página (11). Allí vimos que

$$m(r, 0) = m(r, \infty) = \frac{r}{\pi},$$

$$N(r, 0) = N(r, \infty) = 0,$$

$$T(r, w) = \frac{r}{\pi},$$

de tal forma que

$$\delta(0, w) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, 0)}{T(r, w)} = 1,$$

y

$$\delta(\infty, w) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, 0)}{T(r, w)} = 1.$$

Para $a \neq 0, \infty$ tenemos

$$m(r, a) = O(1),$$

$$N(r, a) = \frac{r}{\pi} + O(1),$$

$$\delta(a, w) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, a)}{T(r, w)} = 0.$$

Finalmente observamos que otra vez se verifica la relación de las deficiencias

$$\sum_{\nu} \delta(a_\nu, w) = \delta(0, w) + \delta(\infty, w) = 2.$$

Por último considerando otra función también considerada en los capítulos anteriores

3.Ejemplo.

Vimos en la página (11) que la función

$$w(z) = \int_0^z e^{-t^p} dt,$$

satisface

$$m(r, a_\mu) \sim \frac{r^p}{p\pi},$$

para

$$a_\mu = e^{\frac{2\mu\pi i}{p}} \int_0^\infty e^{-t^p} dt, \ \ \mu = 0, 1, 2 ... p - 1,$$

y

$$N(r, a_\mu) \sim \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{r^p}{\pi}, \ \ \mu = 0, 1, 2 ... p - 1,$$

por otro lado

$$m(r, \infty) \sim \frac{r^p}{\pi},$$

$$N(r, \infty) = 0.$$

Finalmente para $a \neq a_\mu, \ \ \mu = 0, 1, 2 ... p - 1$ y $a \neq \infty$ se tiene

$$m(r, a) = o(r^p), \ \ cuando \ r \to \infty$$

$$N(r, a) \sim \frac{r^p}{\pi},$$

y

$$T(r, w) \sim \frac{r^p}{\pi}.$$

Concluimos para las deficiencias

$$\delta(\infty, w) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, \infty)}{T(r, w)} = 1,$$

$$\delta(a_\mu, w) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, a_\mu)}{T(r, w)} = \frac{1}{p}, \ \ \mu = 0, 1, 2 ... p - 1,$$

$$\delta(a, w) = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r, a)}{T(r, w)} = 0, \ \ para \ a \neq a_\mu, \ \ \mu = 0, 1, 2 ... p - 1$$

y comprobamos la relación de las deficiencias

$$\sum_\nu \delta(a, w) = \delta(\infty, w) + \sum_{\mu=0}^{p-1} \delta(a_\nu, w) = 2.$$

4. BIBLIOGRAFÍA

Referencias

[1] Ahlfors Lars V. Complex analysis. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[2] Cherry William and Ye Zhuan . Nevanlinna´s theory of value distribution: The second main theorem and its error terms. Springer Verlag, Berlin, 2001.

[3] Fernández Arias A. Notas del autor denominada ANÁLISIS COMPLEJO, para la asignatura que lleva ese nombre en el Master en Matemáticas Avanzadas de la Uned. 2011

[4] Fuchs W.H.J. The theory of functions of one complex variable. Van Nostrand. 1967

[5] Goldberg Anatoly A. and Ostrovskii Iossif V. Value distribution of meromorphic functions, volume 236 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. Traducida de la versión original rusa de 1970 por Mikhail Ostrovskii. Con un apéndice de Alexandre Eremenko y James K. Langley.

[6] Hayman W.K. Meromorphic functions. Oxford Clarendon Press. 1974

[7] Hayman W.K. *Rolf Nevanlinna.* Bulletin. London. Math. Society. 14.(1982). Pag. 419-436

[8] Hinkkanen A. A sharp form of Nevanlinna second fundamental theorem. Invent. Math. 108. (1992). Pag. 549-574

[9] Lang Serge. Complex analysis, volume 103 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, third edition, 1993.

[10] Lo Yang. Value Distribution Theory. Springer Verlag. 1993

[11] Nevanlinna R. Analytic functions. Springer Verlag. 1970

[12] Nevanlinna R. Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions Méromorphes. Chelsea Publishing Company. 1974

[13] Nevanlinna R. Zur Theorie der meromorphen Funktionen. Acta Mathematica. 1925

[14] O´Connor J.J. and Robertson E.F.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Nevanlinna/Nevanlinna biography (Biografía de Rolf Nevanlinna)

[15] Rubel Lee A. Entire and meromorphic functions. Universitext. Springer Verlag, New York, 1996. Con la cooperación de James E. Colliander.

[16] Vojta Paul. Diophantine approximations and value distribution theory, volume 1239 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

5. INDICE ALFABÉTICO