Grupos de Lie y Fribrados Principales

escrito por

José Manuel Fernández Barroso

Tutor: Javier Pérez Álvarez

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Educación a Distancia

Trabajo presentado para la obtención del titulo de
Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas de la UNED
Especialidad en Geometría y Topología

2018-2019

Resumen:

Las teorías Gauge son un pilar fundamental en la teoría de la relatividad general de Einstein ya que pretende describir la curvatura del espacio-tiempo mediante la curvatura en un fibrado apropiado.

En este trabajo de final de Máster se presentan los principales resultados sobre grupos de Lie, álgebras de Lie o acciones de grupos, que sustentan la teoría de fibrados principales y las aplicaciones gauge.

Palabras clave: Grupos de Lie, álgebras de Lie, aplicación exponencial, teorema de Frobenius, acciones de grupos, fibrados principales, fibrados principales, transformaciones gauge.

Abstract:

Gauge theories are a fundamental pillar in Einstein's theory of general relativity because they intend to describe the curvature of the space-time through the curvature of appropiated fibre bundles.

In this Master thesis we introduce the main results about Lie groups, Lie algebras or group actions, which sustain the principal bibre bundles theory and gauge transformationes.

Keywords: Lie groups, Lie algebras, exponential map, Frobeinus theorem, group actions, principal bundles, principal fiber bundles and gauge transformations.

Índice general

Dedicatoria y agradecimientos

A lo largo de estos duros años de estudio siempre me ha apoyado mi familia, tanto la mía propia como la de mi pareja que considero como mía. Es por ello que me gustaría agradecérselo a todos, por este apoyo incondicional que nunca podré llegar a devolver en la misma medida que lo que ellos han hecho por mi. A día de hoy estoy seguro de estar haciendo lo que me gusta y me siento muy orgulloso de todo lo que he conseguido y que seguiré trabajando para conseguir muchas más cosas.

Introducción

Desde que Newton tendiese puentes entre las matemáticas y la física con su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* en el año 1687, estas dos ciencias no han vuelto a separarse. Es bien sabido que existen cuatro fuerzas fundamentales en el universo:

> Gravitación, Electromagnetismo, Interacciones fuertes e Interacciones débiles.

Que son descritas por dos principales teorías físicas:

> La teoría de la Relatividad General de Einstein
> El modelo standard para partículas elementales.

Uno de los grandes retos de la ciencia es aunar bajo una misma teoría las cuatro fuerzas fundamentales, pues bien, toda la fundamentación matemática se sustenta en la teoría Gauge, cuya principal idea es:

> Describir las cuatro fuerzas fundamentales mediante la curvatura de un fibrado apropiado.

Una breve introducción histórica comienza cuando Gauss en su Teorema *egregium* demostró que la curvatura de una superficie (por ejemplo la propia Tierra) puede ser descrita mediante mediciones en su superficie sin tener en cuenta el espacio tridimensional en el que se aloja. Unos años más tarde, Bernhard Riemann y Élie Cartan desarrollaron generalizaciones del teorema egregium de Gauss que sustenta la geometría diferencial mediante la curvatura de fibrados (en general) y la física moderna mediante la teoría Gauge, por ejemplo el estudio de la curvatura en el espacio tetradimensional del espacio-tiempo que es el foco principal en la teoría de la Relatividad General de Einstein. Así, la teoría Gauge describe la interacción de fuerzas mediante la diferenciación de conexiones ya que las tranformaciones gauge modifican las conexiones pero no los efectos físicos que sufren.

Riemann introdujo su tensor de curvatura con el fin de generalizar el teorema egregium de Gauss a dimensiones superiores y este tensor puede ser descrito mediante la diferenciación de los símbolos de Christoffel. En 1915, Einstein descubrió que el tensor de curvatura de Riemann en una cierta variedad de dimensión cuatro podía ser utilizado para describir la fuerza gravitatoria en el marco de su teoría general de la relatividad.

De esta manera, la teoría gauge busca transportar información física a traves de curvas. En 1917, Levi-Civita descubrió que el estudio de variedades con curvatura se podía realizar mediante el transporte paralelo de vectores tangentes. Más allá fue Élie Cartan en la década de 1920 desarrollando un método para mover referencias y Ehresmann en 1os años 50 relacionando conexiones de un fibrado principal con las de su fibrado vectorial asociado.

En este trabajo se pretende sustentar la base teórica para finalmente llegar a definir los fibrados principales:

> Sea M una variedad y G un grupo de Lie. Llamaremos **fibrado principal** sobre M con grupo G a una variedad P y a una acción de G en P que satisface las siguientes condiciones:
>
> I. G actúa libremente sobre P por la derecha.
>
> II. M es el espacio cociente de P por la relación de equivalencia inducida por G y la proyección canónica $\pi : P \to M$ es diferenciable.
>
> III. P es localmente trivial.

Y las transformaciones gauge:

> Sea $f \in \mathrm{Aut}(P)$, diremos que f es un **transformación gauge** si además estabiliza cada órbita por G en P, es decir, para cada $p \in P$, los puntos p y $f(p)$ están en la misma órbita por G.

Podemos observar que conocer la definición de los grupos de Lie es esencial, que las veremos en el capítulo 2 junto con sus álgebras de Lie y algunas de sus propiedades más importantes. En el capítulo 5 se incluyen definiciones relacionadas con las acciones de un grupo de Lie sobre una variedad.

En el primer capítulo se dará un ejemplo de grupo de Lie, aunque aún sin una definición explícita, con el objetivo de que el lector se familiarice con ciertas ideas que serán desarrolladas en capítulos posteriores.

Veremos también, en el capítulo 4, cuatro grandes resultados que conciernen a los grupos de Lie:

> El teorema de Clasificación de grupos de Lie abelianos.
>
> El teorema de Frobenius.
>
> El teorema de correspondencia entre subgrupos y subálgebras de Lie.
>
> El teorema del subgrupo cerrado.

En el capítulo 6 se desarrollarán los principales teoremas sobre fibrados principales y las transformaciones gauge. Y para terminar se introducirán la forma de conexión y la forma de curvatura en el capítulo 7.

Introduction

Since Newton built bridges between maths and physics with his *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* in 1687, these two sciences have never separated again. Is well known there are four fundamental forces in the universe:

> Gravitation, Electromagnetic interaction, Strong interaction and Weak interaction.

Which are described by two theories mainly:

> Einstein's theory of general relativity
> The Standard Model in elementary particle physics.

One of the biggest challenges of the science in make a unique theory which can explain the four fundamental forces, well, all the mathematical foundation is based on the Gauge theory, which main idea is:

> Describe the four fundamental forces by the curvature of appropiated fibre bundles.

A brief historical introduction begin when Gauss in his *egregium* theorem proved that the curvature of a surface (the Earth for example) can be determined by using measurements on the surface without using the surrounding three-dimensional space.Some years later, Bernhard Riemann and Élie Cartan formulated generalizations of the Gauss' egregium theorem which are the basis for the Differential Geometry with the curvature on fibre bundles (in general) and for the physic with the Gauge theory, for example in the study of the curvature in the four-dimensional space-time which is the main focus on Einstein's theory of general relativity. So, Gauge theory describes the interaction between forces by the differentiation of connections because gauge transformations change the connections but not the physical effects they suffer.

Riemann introduced his curvature tensor in order to generalize the Gauss' egregium theorem to higher dimensions and this tensor can be described by differentiation of the Christoffel symbols. In 1915, Einstein discovered that Riemann curvature tensor in a certain four-dimensional manifold can be used to describe gravitation in the frame of his theory of general relativity.

In this sense, gauge theory search transport physical information along curves. In 1917, Levi-Civita discovered that the study on curved manifols can be made with parallel transport of tangent vectors. Élie Cartan went further in the 1920's developing a new way to move frames and Ehresmann in the 50's relating connections in a pincipal fibre bundle with its own associated vectorial fibre bundle.

In this thesis we pretend to show the basic theory to understand the principal fibre bundles:

> Let M a manifold and G a Lie group. A **principal fibre bundle** over M with group G consists of a manifold P and an action of G on P satisfying the following conditions:
>
> I. G acts freely on P on the right.
>
> II. M is the quotient space of P by the equivalence relation induced by G, and the canonical projection $\pi : P \to M$ is differentiable.
>
> III. P is locally trivial.

And the gauge transformations:

> Let $f \in \mathrm{Aut}(P)$, then f is a **gauge transformation** if stabilizes each orbit by G on P, that is, for each $p \in P$, the points p and $f(p)$ are in the same orbit by G.

We can see that know the Lie group definition is essential, we see it in chapter 2 with their Lie algebras and some of the most importants properties. In the chapter 5 we include definitions related with group actions on a manifold.

In the first chapter, we give a Lie group example without the explicit definition, in order to familiarize with certain ideas which we will develop in later chapters.

We will see also, in chapter 4, four greats theorems about Lie groups:

> Classification of Lie Abelian groups theorem.
> Frobenius theorem.
> Correspondence between Lie subgroups and Lie subalgebras theorem.
> Closed subgroup theorem.

In the sixth chapter we will develop the main theorems about principal bifre bundles and the gauge transformations. Finally, we will introduce the connection form and the curvature form in the chapter 7.

Capítulo 1

Grupos de matrices

"Matrix groups touch a tremendous spectrum of mathematical areas... the applications are astonishing in their pervasiveness and sometimes in their unexpectedness."
Roger Howe.

En este capítulo introduciremos los principales grupos de matrices con elementos en los cuerpos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, en algunos casos los estudiaremos también para el conjunto de los cuaterniones $\mathbb{H}$. En lo que sigue denotaremos por $M_n(\mathbb{K})$ al conjunto de matrices cuadradas de tamaño n con elementos de $\mathbb{K}$. Uno de los hechos fundamentales en cursos de álgebra lineal es que las matrices corresponden a transformaciones lineales y viceversa. En la siguiente definición introduciremos un concepto clave en lo que sigue de trabajo, y que gracias a las matrices podremos manejar mejor cuando estemos en espacios más abstractos.

Definición 1.0.1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, se definen las siguientes aplicaciones para cada $X \in \mathbb{K}^n$:*

$$\begin{array}{rccc} L_A: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & L_A(X) := (A \cdot X^T)^T \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rccc} R_A: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & R_A(X) := X \cdot A. \end{array}$$

a las que llamaremos transformaciones a la izquierda por A y transformaciones a la derecha por A, respectivamente.

Además, estas dos aplicaciones están intimamente relacionadas, ya que para cada $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $X \in \mathbb{K}^n$

$$L_A(X) = (A \cdot X^T)^T = X \cdot A^T = R_{A^T}(X).$$

1.1. El grupo general lineal

El conjunto de matrices cuadradas de tamaño n con coeficientes en $\mathbb{K}$, $M_n(\mathbb{K})$, no es un grupo bajo la multiplicación de matrices, ya que no todo elemento tiene inversa, por ejemplo la matriz enteramente nula. Tienen, por tanto, un papel fundamental las matrices que si poseen inversa.

Definición 1.1.1. *Llamaremos* ***grupo general lineal*** *sobre $\mathbb{K}$ al subconjunto de $M_n(\mathbb{K})$ dado por alguna de las siguientes posibles definiciones:*

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) &= \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \exists B \in M_n(\mathbb{K}) \text{ tal que } AB = BA = I\} \\ GL_n(\mathbb{K}) &= \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \ R_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \text{ es isomorfismo lineal}\} \\ GL_n(\mathbb{K}) &= \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \quad det(A) \neq 0\} \end{aligned}$$

A la matriz B que verifique $AB = BA = I$ para una matriz dada A, la llamaremos inversa de A y se denota por A^{-1}.

Dependiendo del contexto podremos utilizar una caracterización u otra.

Definición 1.1.2. *Llamaremos* ***grupo matricial*** *a cualquier subgrupo $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ que además sea cerrado en $GL_n(\mathbb{K})$.*

Donde cerrado se refiere al sentido habitual de teoría topologista de conjuntos, que toda sucesión de matrices de G, $(A_1, \ldots, A_i, \ldots)$ que converge a una matriz $A \in GL_n(\mathbb{K})$, entonces $A \in G$. Además, todo grupo matricial puede verse como un grupo matricial real. La demostración de este teorema se basa en la construcción de isomorfismos entre los conjuntos deseados, puede encontrarse en [Tapp, Pág 23, Theorem 2.1].

1.2. Grupos ortogonales

Definiremos en esta sección los principales subgrupos cerrados de $GL_n(\mathbb{K})$.

Definición 1.2.1. *Llamaremos* ***grupo ortogonal*** *sobre $\mathbb{K}^n$ a*

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}^n) : \ A^{-1} = \bar{A}^t\}$$

donde $\bar{A}^t$ denota la matriz transpuesta conjugada de la matriz A. Ahora bien, denotaremos de distintas maneras dependiendo si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$:

- *Denotaremos $O(n)$ que llamaremos grupo ortogonal si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*

- *Denotaremos $U(n)$ que llamaremos grupo unitario si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*
- *Denotaremos $Sp(n)$ que llamaremos grupo simpléctico si $\mathbb{K} = \mathbb{H}$.*

Geométricamente, $O(n)$ es el grupo de movimientos rígidos en $\mathbb{R}^n$. Unos nuevos grupos matriciales surgen a raíz de éstos, son los conocidos como grupos ortogonales especiales.

Definición 1.2.2. *Se tienen los siguientes grupos matriciales:*

- *Denotaremos $SO(n) := \{A \in O(n) : \quad det(A) = 1\}$ que llamaremos grupo especial ortogonal.*
- *Denotaremos $SU(n) := \{A \in U(n) : \quad det(A) = 1\}$ que llamaremos grupo especial unitario.*

Y ambos son subgrupos del grupo especial lineal:

$$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : \quad det(A) = 1\}.$$

1.3. Grupos ortogonales de dimensión baja

En esta sección fijaremos nuestra atención en varios grupos $\mathcal{O}_n(\mathbb{K})$ para ciertos valores de n.

Empecemos con $O(1) = \{(1), (-1)\}$ y por tanto $SO(1) = \{(1)\}$ que son isomorfos a grupos formados por dos y un elemento, respectivamente. Notar que $O(1)$ son los puntos de S^0.

Ahora, si $A \in O(2)$, tiene dos filas que forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Su primera fila es un vector unitario arbitrario de $\mathbb{R}^2$, que puede ser escrito como $(\cos\theta, \sin\theta)$ para algún θ. La segunda fila es unitaria y ortogonal a la primera, lo que nos deja dos opciones: $(-\sin\theta, \cos\theta)$ y $(\sin\theta, -\cos\theta)$; para el primero el determinante es 1, y para el segundo el determinante es -1. Por tanto

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \quad \theta \in [0, 2\pi) \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} : \quad \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

y

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \quad \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Así, $SO(2)$ se identifica con los puntos de la circunferencia S^1 y $O(2)$ es la unión disjunta de dos circunferencias (llama la atención que la unión disjunta de dos circunferencias tenga estructura de grupo).

Otro ejemplo de estos grupos de matrices son $U(1) = \{(e^{\theta\mathbf{i}}) : \quad \theta \in [0, 2\pi)\}$ y $SU(1) = \{(1)\}$. Observar que $U(1)$ es isomorfo a $SO(2)$.

Por último $Sp(1) = \{(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) : \ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ es el grupo de cuaterniones módulo 1, que se identifica de manera natural con la esfera tridimensional $S^3 \subset \mathbb{R}^4 \approx \mathbb{H}$. Como el producto de dos cuaterniones con modulo 1 resulta otro cuaternión de módulo 1, podemos observar que la multiplicación de cuaterniones provee a la esfera tridimensional de estructura de grupo. Más aún, $SU(2)$ es isomorfo a $Sp(1)$.

Se concluye que las únicas esferas con estructura de grupo son S^0, S^1 y S^3.

Capítulo 2

Estructura diferenciable de los grupos de Lie

(Volver al Índice)

En este capítulo comenzaremos definiendo el concepto de grupo de Lie, que nos acompañará durante todo el trabajo. Posteriormente definiremos el álgebra de Lie de un grupo de Lie, y demostraremos que no es más que su espacio tangente en el elemento neutro de la variedad respecto a la operación que la dota de estructura de grupo. Por último definiremos las traslaciones a la derecha y a la izquierda, que nos permitirán *movernos* por la variedad y lo que es más importante, inducirán una aplicación entre los espacios tangentes que nos permitirá mover vectores.

2.1. Grupos de Lie

Definición 2.1.1. *Sea G una variedad diferenciable, diremos que G tiene estructura de grupo de Lie, o simplemente que es un* ***grupo de Lie****, si tiene estructura de grupo y además las aplicaciones multiplicación e inversión son diferenciables, esto es*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (p,q) & \longmapsto & p \cdot q \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ p & \longmapsto & p^{-1} \end{array}$$

son diferenciables.

Nota: en lo que sigue llamaremos e al elemento unidad de un grupo de Lie G a menos que se especifique de otra manera.

Cabe destacar que la condición de que ambas aplicaciones sean diferenciables puede verse de manera única comprobando que

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (p,q) & \longmapsto & p \cdot q^{-1} \end{array}$$

ya que si esta es diferenciable, entonces las aplicaciones $(e,q) = q^{-1}$ y $(p,q^{-1}) = p \cdot q$ son diferenciables por ser composición de aplicaciones diferenciables; y viceversa, si q^{-1} y $p \cdot q$ son diferenciables entonces $(p,q^{-1}) = p \cdot q^{-1}$ es diferenciable, también por ser composición de aplicaciones diferenciables. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos:

- El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la suma de vectores es un grupo de Lie. En efecto, sean $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces las aplicaciones

  $$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (x_1 + y_1, \ldots, x_n, y_n)$$

  y

  $$(x_1, \ldots, x_n)^{-1} \mapsto (-x_1, \ldots, -x_n)$$

  son diferenciables.

- El espacio $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con la multiplicación es un grupo de Lie. Sean $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, entonces las aplicaciones

  $$z_1 \cdot z_2 \longmapsto x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

  y para $z = x + yi$,

  $$z^{-1} \longmapsto \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

  son diferenciables.

- $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ es un grupo de Lie con la multiplicación que hereda de $\mathbb{C}^*$ utilizado en el ejemplo anterior.

- El conjunto de matrices no singulares (con determinante no nulo) de tamaño n con coeficientes reales, $Gl(n, \mathbb{R})$, es un grupo de Lie con la multiplicación de matrices.

  Demostración. Sean

  $$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Entonces la aplicación

$$X \cdot Y \longmapsto Z = (z_{ij})_{i,j=1}^{n} := \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \cdot y_{kj}\right)_{i,j=1}^{n}$$

es diferenciable, y para $A \in Gl(n, \mathbb{R})$

$$A \mapsto A^{-1} := \frac{1}{det(A)} \cdot (adj(A))^t$$

es diferenciable, ya que A^{-1} vueve a tratarse de una matriz de tamaño n coeficientes reales no singular, por tener denominador $det(A)$. □

- Especial importancia tiene que el producto cartesiando de dos grupos de Lie vuelve a ser grupo de Lie, esto es, si G y H son grupos de Lie, entonces $G \times H$ es grupo de Lie. En efecto, la aplicación

$$(p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) := (p_1 p_2, q_1, q_2) = p_1 p_2 (q_1 q_2)^{-1}$$

es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables.

- El $n - toro$, $\mathbb{T}^n$, es un grupo de Lie donde el producto viene dado por el producto cartesiano de S^1, $n - veces$ consigo mismo.

2.2. Álgebras de Lie

Una vez vistos algunos ejemplos de variedades diferenciables que tienen también estructura de grupo de Lie, surge el siguiente concepto.

Definición 2.2.1. *Un **álgebra de Lie** E es un espacio vectorial real junto con una operación*

$$[\cdot, \cdot] : E \times E \longrightarrow E$$

que verifica las siguientes propiedades para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $X, Y, Z \in E$:

i. *Es $\mathbb{R} - bilineal$*

$$[a \cdot X + b \cdot Y, Z] = a \cdot [X, Z] + b \cdot [Y, Z]$$

$$[Z, a \cdot X + b \cdot Y] = a \cdot [Z, X] + b \cdot [Z, Y].$$

ii. *Es anti-simétrica*

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

iii. *Cumple la identidad de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

La importancia de esta estructura es que está íntimamente relacionada con los grupos de Lie, ya que como veremos, a cada grupo de Lie se le puede asociar un álgebra de Lie y viceversa, a cada álgebra de Lie le corresponde un grupo de Lie. Por tanto las propiedades de los grupos de Lie estarán determinadas por las propiedades de sus álgebras de Lie. Veamos algunos ejemplos de álgebras de Lie:

Ejemplos:

- El espacio vectorial de todas las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ con coeficientes reales, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, es un álgebra de Lie con la operación

  $$[A, B] = AB - BA.$$

  Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

- Al igual que ocurría con los grupos de Lie, si E y E' son álgebras de Lie, entonces $E \times E'$ es un álgebra de Lie con la operación binaria definida por

  $$\big[[X, Y], [X', Y']\big] = \big[[X, X'], [Y, Y']\big].$$

Definición 2.2.2. *Sea $p \in G$, llamaremos translación a la izquierda y a la derecha por p respectivamente, a los difeomorfismos*

$$\begin{array}{rccc} L_p: & G & \longrightarrow & G \\ & q & \longmapsto & L_p(q) := p \cdot q \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rccc} R_p: & G & \longrightarrow & G \\ & q & \longmapsto & R_p(q) := q \cdot p. \end{array}$$

Más aún, si $V \subset G$, los conjuntos traslación a la izquierda y a la derecha por p son respectivamente

$$L_p(V) = \{p \cdot v : v \in V\}$$

y

$$R_p(V) = \{v \cdot p : v \in V\}.$$

Definición 2.2.3. *Diremos que el subespacio vectorial S del álgebra de Lie E es un subálgebra de Lie si es cerrado bajo el corchete de E, esto es, si $X, Y \in S$, entonces $[X, Y] \in S$. En este caso podríamos considerar al propio S como un álgebra de Lie con la misma operación corchete.*

2.3. Campos y formas invariantes

Analicemos lo que tenemos hasta ahora: Tenemos una variedad con estructura de grupo y un espacio vectorial con estructura de álgebra de Lie, nuestro objetivo ahora será ver cómo se relacionan ambos conceptos. Para ello usaremos las traslaciones a la izquierda que nos permitirá movernos por la variedad de un punto a otro. Más aún, su diferencial nos permitirá mover los vectores y su *pull-back* moverá las formas. En lo que sigue denotaremos por $\mathcal{D}(G)$ el conjunto de campos vectoriales en G (algunos autores utilizan $\mathfrak{X}(G)$).

Definición 2.3.1. *Diremos que un campo de vectores $D \in \mathcal{D}(G)$ es invariante por la izquierda si para todo $p \in G$, $(L_p)_* D = D$, esto es si para cada $q \in G$ se tiene la igualdad $L_{p,*}(D_q) = D_{p \cdot q}$*

Proposición 2.3.1. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ el conjunto de sus campos vectoriales invariantes a la izquierda, entonces:*

I. *Dado un vector tangente $D_e \in T_eG$ existe un único campo de vectores invariante a la izquierda D que en e toma el valor D_e.*

II. $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

III. *Los campos vectoriales invariantes a la izquierda son diferenciables.*

IV. $\mathfrak{g}$ *es un subálgebra de Lie del espacio de campos vectoriales en G.*

Demostración. Veamos cada una de las afirmaciones por separado:

I. Debemos ver que existe un isomorfismo $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$, tomemos $\alpha(X) = X_e$. En primer lugar veamos que $\mathfrak{g}$ es subespacio vectorial del espacio de campos vectoriales de G, $\mathcal{D}(G)$. En efecto, sean $a, b \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathfrak{g} \subset \mathcal{D}(G)$, entonces para cada $q \in G$

$$L_{p,*}(aA + bB)_q = (aA + bB)_{p\cdot q} = aA_{p\cdot q} + bB_{p\cdot q} = aL_{p,*}(A)_q + bL_{p,*}(B)_q$$

por tanto $aA + bB \in \mathfrak{g}$ y se tiene que $\mathfrak{g}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{D}(G)$. Veamos ahora que α así definida es biyectiva:

- Inyectividad: si $\alpha(X) = X_e = Y_e = \alpha(Y)$ entonces para cada $p \in G$

  $$X_p = L_{p,*}(X_e) = L_{p,*}(\alpha(X)) = L_{p,*}(\alpha(Y)) = Y_p.$$

  Por tanto $X = Y$.

- Sobreyectividad: dado $X_e \in T_eG$, tomemos $X_p = L_{p,*}(X_e)$ para cada $p \in G$. Entonces $\alpha(X) = X_e$ y además X es invariante a la izquierda ya que para todo $p, q \in G$

  $$X_{qp} = L_{qp,*}(x) = L_{q,*}L_{p,*}(x) = L_{q,*}(X_p).$$

Es decir, que dado un elemento $D_e \in T_eG$ existe un único $D \in \mathfrak{g}$ cuyo valor en e es D_e como queríamos probar.

II. Continuando el argumento anterior, como α es isomorfismo, se tiene que $\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG$ y además sabemos que la dimensión del espacio tangente a una variedad en cualquier punto es la misma que la dimensión de la variedad, por tanto podemos añadir

$$\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = \dim G.$$

III. Para probar que los campos invariantes por la izquierda son diferenciables tenemos que ver que si $X \in \mathfrak{g}$ y $f \in C^\infty(G)$, entonces $X(f) \in C^\infty(G)$. Como

$$X_p(f) = L_{p,*}(X_e)(f) = X_e(f \circ L_p)$$

debemos comprobar que la aplicación que envía cada $p \in G$ en $X_e(f \circ L_p)$ es diferenciable. Para ello veremos que se trata de una composición de aplicaciones diferenciables.

Seam $\varphi : G \times G \longrightarrow G$ la aplicación $\varphi(p,q) = pq$ que es diferenciable ya que G es grupo de Lie, y las aplicaciones $i_e^1, i_p^2 : G \longrightarrow G \times G$ definidas por

$$i_e^1(q) = (q,e) i_p^2(q) \quad = (p,q).$$

Sea Y cualquier campo vectorial diferenciable en G tal que $Y_e = X_e$. Entonces $(0,Y)$ es un campo vectorial suave en $G \times G$, y $[(0,Y)(f \circ \varphi] \circ i_e^1$ es una aplicación diferenciable por ser composicion de aplicaciones diferenciables. Ahora bien , esta aplicación resulta ser

$$\begin{aligned} \circ i_e^1(p) &= (0,Y)_{(p,e)}(f \circ \varphi) \\ &= 0_p(f \circ \varphi \circ i_e^1) + Y_e(f \circ \varphi \circ i_e^2) \\ &= X_e(f \circ \varphi \circ i_e^2) = X_e(f \circ L_p). \end{aligned}$$

Por tanto $X_e(f \circ L_p) = X(f)(p)$ es composición de aplicaciones diferenciables para cada $p \in G$ y por tanto X es un campo de vectores diferenciable.

iv. Ya vimos en la demostración de (a) que $\mathfrak{g}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{D}(G)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} L_{p,*}[A,B]_x &= [A,B]_{L_p(x)} = [A,B]_{px} = [A_{px}, B_{px}] \\ &= [A_{L_p(x)}, B_{L_p(x)}] = [L_{p,*}A_x, L_{p,*}B_x] = [A_x, B_x] \end{aligned}$$

luego $[A,B] \in \mathfrak{g}$ por lo que $\mathfrak{g}$ es cerrado para el corchete definido en $\mathcal{D}(G)$.
Con estas dos propiedades, $\mathfrak{g}$ se convierte en un subálgebra de Lie de los campos de vectores en G, $\mathcal{D}(G)$.

□

Analicemos la importancia de esta proposición. En la primera afirmación hemos visto que podemos identificar cada elemento de $\mathfrak{g}$ con un elemento del espacio tangente de G en el elemento identidad, e. Además, los campos vectoriales invariantes a la izquierda son diferenciables y que además el corchete de dos campos invariantes a la izquierda vuelve a ser un campo invariante a la izquierda. Así, a partir de ahora, trabajaremos con estos importantes conocimientos. Podemos definir entonces el álgebra de Lie de un grupo de Lie.

Definición 2.3.2. *Sea G un grupo de Lie, diremos que su álgebra de Lie es el conjunto de los campos de vectores invariantes a la izquierda $\mathfrak{g}$. Alternativamente, podemos identificar también el álgebra de Lie de un grupo de Lie como el espacio tangente T_eG de G en e mediante el isomorfismo utilizado en la demostración de la primera afirmación de la proposición anterior.*

Veamos los álgebras de Lie de algunos de los grupos de Lie que vimos anteriormente.

Ejemplos:

- Tomemos ahora el grupo de Lie general lineal $Gl(n\mathbb{R})$, de las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ de coeficientes reales y determinante no nulo, con la multiplicación de matrices. Su álgebra de Lie es $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ y coeficientes reales junto con la operación corchete siguiente

$$[A, B] = AB - BA.$$

- Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Sea $\mathrm{End}(V)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales de V sobre V (el conjunto de endomorfismos) y sea $\mathrm{Aut}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ el conjunto de isomorfismos de V en V (automorfismos). Entonces $\mathrm{End}(V)$ tiene dimensión n^2 y produce un álgebra de Lie con el corchete siguiente para cada $f, g \in \mathrm{End}(V)$

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

  Una base de V determina un difeomorfismo de $\mathrm{End}(V)$ con $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ enviando $\mathrm{Aut}(V)$ sobre $Gl(n, \mathbb{R})$. Se sigue por tanto que $\mathrm{Aut}(V)$ hereda la estructura de variedad diferenciable como subconjunto abierto de $\mathrm{End}(V)$ y es un grupo de Lie con la composición de aplicaciones.

Definición 2.3.3. *Una $p-forma$ $\omega \in \Lambda^p T^*(G)$ se dice invariante por la izquierda si*

$$L_q^* \omega = \omega$$

para todo $q \in G$.

En relacion con las $p-formas$ invariantes a la izquierda tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.2.

I. *Sea ω una $p-forma$ invariante y $D^1, \ldots, D^p$ campos vectoriales invariantes, entonces la función $\omega(D^1, \ldots, D^p)$ es constante.*

II. *Toda $p-forma$ invariante $\omega \in \Lambda^p T^*(G)$ es diferenciable.*

Demostración.

I. Sea $\omega \in \Lambda T^*(G)$ una $1-forma$ invariante y X un campo invariante, entonces para $q \in G$

$$\begin{aligned} \omega(X)(q) = \omega_q(X_\sigma) &= (L_{q^{-1}}^* \omega)(X_q) \\ &= \omega_e(L_{q^{-1},*}(X_q)) = \omega_e(X_e) = \omega(X)(e) \end{aligned}$$

Que es una constante. Por tanto para una $p-forma$ invariante, ω, y $(D_1, \ldots, D_p)$ campos invariantes

$$\omega(D_1, \ldots, D_p) = \omega_e((D_1)_e, \ldots, (D_p)_e) = \omega(D_1, \ldots, D_p)(e)$$

constante.

II. Dado $X \in \mathcal{D}(G)$ un campo vectorial en G arbitrario, comprobemos que la aplicación

$$\begin{aligned} \rho_X : G &\longrightarrow T_eG \\ \sigma &\longmapsto \rho_X(\sigma) := L_{\sigma^{-1},*}(X_\sigma) \end{aligned}$$

es diferenciable. Tomemos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \Phi : G \times G &\longrightarrow G \\ (\sigma, \tau) &\longmapsto \Phi(\sigma, \tau) := \sigma^{-1}\tau \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Psi : G &\longrightarrow T(G \times G) \\ \sigma &\longmapsto \Psi(\sigma) := (0_\sigma, X_\sigma) \end{aligned}$$

entonces, $d\Phi : T(G \times G) \longrightarrow TG$ y Ψ son diferenciables y por tanto su composición $d\Phi \circ \Psi : G \longrightarrow TG$ es diferenciables. Sea ahora $\alpha(t)$ una curva diferenciable en G tal que $\alpha(0) = \sigma$ y $\dot{\alpha}(0) = X_\sigma$, tenemos que

$$\begin{aligned} (d\Phi \circ \Psi)(\sigma) = d\Phi(0_\sigma, X_\sigma) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi(\sigma, \alpha(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L_{\sigma^{-1}}(\alpha(t)) = L_{\sigma^{-1},*}(X_\sigma) = \rho_X(\sigma). \end{aligned}$$

Por tanto ρ_X es diferenciable. Como consecuencia, si $\chi = (X_1, \dots, X_p)$ son campos vectoriales en G, la aplicación

$$\begin{aligned} \rho_\chi : G \longrightarrow & T_eG \times \overbrace{\cdots}^{\text{p-veces}} \times T_eG \\ \sigma \longmapsto & \rho_\chi(\sigma) := (L_{\sigma^{-1},*}((X_1)_\sigma, \dots, L_{\sigma^{-1},*}((X_p)_\sigma) \end{aligned}$$

es diferenciable. Para terminar, veamos que para toda $p - forma$, ω, invariante es diferenciable. En efecto,

$$\begin{aligned} \omega(\chi)(\sigma) &= \omega_\sigma(\chi_\sigma) = (L^*_{\sigma^{-1}}\omega)_\sigma(\chi_\sigma) \\ &= \omega_e(L_{\sigma^{-1},*}(\chi_\sigma)) = (\omega_e \circ \rho_\chi)(\sigma) \end{aligned}$$

que es composición de aplicaciones diferenciables y por tanto diferenciable.

□

2.4. Constantes de estructura

Como sabemos, en un álgebra de Lie, el corchete de dos elementos cualesquiera vuelve a ser un elemento de dicho álgebra, por tanto, si tenemos una base en el álgebra de Lie, el resultado de cada corchete de los elementos de dicha base los podremos expresar de nuevo como combinación lineal de los elementos de la base dada. Ésto es lo que se conocen como constantes de estructura que se define más formalmente como sigue.

Definición 2.4.1. *Llamaremos constantes de estructura de una base de campos vectoriales* $(D_1, \ldots, D_n)$ *de* G *a los números reales tales que*

$$[D_i, D_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k D_k.$$

El siguiente resultado nos muestra algunas propiedades de estas constantes de estructura.

Proposición 2.4.1. *Las constantes de estructura* c_{ij}^k, *para todo* $i, j, k = 1, \ldots, k$ *verifican*

I. $c_{ij}^k + c_{ji}^k$=*0.*

II. $\sum_{r=1}^{n} \left(c_{jk}^s c_{is}^r + c_{ki}^s c_{js}^r + c_{ij}^s c_{ks}^r \right) = 0$

Demostración.

I. Si $[D_i, D_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k D_k$, sabemos que todo corchete cumple que

$$[D_i, D_j] = -[D_j, D_i] = -\sum_{k=1}^{n} c_{ji}^k D_k.$$

Luego igualando coeficientes de cada D_k obtenemos que para cad $k = 1, \ldots, n$

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \Longrightarrow c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0.$$

II. Para tres campos cualesquiera D_i, D_j, D_k se cumple la identidad de Jacobi para los corchetes

$$[D_i, [D_j, D_k]] + [D_j, [D_k, D_i]] + [D_k, [D_i, D_j]] = 0.$$

Desarrollando esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned}
&[D_i, [D_j, D_k]] + [D_j, [D_k, D_i]] + [D_k, [D_i, D_j]] \\
&\quad = \left[D_i, \sum_{s=1}^{n} c_{jk}^s D_s \right] + \left[D_j, \sum_{s=1}^{n} c_{ki}^s D_s \right] + \left[D_k, \sum_{s=1}^{n} c_{ij}^s D_s \right] \\
&\quad = \sum_{s=1}^{n} \left(c_{jk}^s [D_i, D_s] + c_{ki}^s [D_j, D_s] + c_{ij}^s [D_k, D_s] \right) \\
&\quad = \sum_{s=1}^{n} \left(c_{jk}^s \sum_{r=1}^{n} c_{is}^r D_r + c_{ki}^s \sum_{r=1}^{n} c_{js}^r D_r + c_{ij}^s \sum_{r=1}^{n} c_{ks}^r D_r \right) \\
&\quad = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left(c_{jk}^s c_{is}^r + c_{ki}^s c_{js}^r + c_{ij}^s c_{ks}^r \right) D_r = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto para cada $s = 1, \ldots, n$ se obtiene

$$\sum_{r=1}^{n} \left(c_{jk}^s c_{is}^r + c_{ki}^s c_{js}^r + c_{ij}^s c_{ks}^r \right) D_r = 0$$

y como los campos D_r son no nulos para cada $r = 1, \ldots, n$ por que forman una base, entonces debe ser

$$\sum_{r=1}^{n} \left(c_{jk}^s c_{is}^r + c_{ki}^s c_{js}^r + c_{ij}^s c_{ks}^r \right) = 0$$

□

Cabe recordar que la acción de la diferencial exterior sobre campos sigue la siguiente fórmula para una $p-forma$ ω y $D_0, \ldots, D_p$ campos vectoriales:

$$
\begin{aligned}
d\omega(D_0, \ldots, D_p) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \omega(D_0, \ldots, \hat{D}_i, \ldots, D_p) + \\
+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([D_i, D_j], D_0, \ldots, \hat{D}_i, \ldots, \hat{D}_j, \ldots, D_p)
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Una demostración de esta fórmula puede encontrarse en [War, página 70, proposición 2.25(f)]. Las constantes de estructura también cumplen la conocida como *fórmula de Maurer-Cartan* para la derivada exterior de una $1-forma$:

Proposición 2.4.2. *Sea $\omega_1, \ldots, \omega_n$ la base dual de $D_1, \ldots, D_n$, se verifica para cada $k = 1, \ldots, n$*

$$d\omega_k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j$$

Esta relación se conoce como fórmula de Maurer-Cartan.

Demostración. En primer lugar señalar que $d\omega_k$ es una $2-forma$, por tanto una base de las $2-formas$ es $\{\omega_i \wedge \omega_j : \quad i<j\}$. Y para obtener los coeficientes en dicha base basta evaluar $d\omega_k$ en dos campos cualesquiera D_i, D_j de la base $\{D_1 \ldots, D_n\}$, teniendo en cuenta la expresión (2.1):

$$
\begin{aligned}
d\omega_k(D_i, D_j) &= (-1)^i X_i \omega_k(X_j) + (-1)^j X_j \omega_k(X_i) - \omega_k([X_i, X_j]) \\
&= -\omega_k([X_i, X_j]) = -\omega_k\left(\sum_{l=1}^{n} c_{ij}^l D_l\right) = -c_{ij}^k.
\end{aligned}
$$

Luego éstas son las coordenadas de $d\omega_k$ en la base $\{\omega_i \wedge \omega_j : \quad i<j\}$, es decir

$$d\omega_k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k \cdot \omega_i \wedge \omega_j.$$

□

Proposición 2.4.3. *Dado un grupo de Lie G existe una única $1-forma$ $\omega : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathfrak{g}$ tal que $\omega(D) = D$ para todo campo invariante $D \in \mathfrak{g}$. A esta $1-forma$ la llamaremos forma canónica del grupo del Lie G.*

Demostración. Sea $(D_1, \ldots, D_n)$ una base de campos vectoriales invariantes a la izquierda y sea $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ su base dual, tomando

$$\omega = \omega_1 \otimes D_1 + \cdots + \omega_n \otimes D_n$$

es claro que $\omega(D_i) = D_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. □

Proposición 2.4.4. *Sea ω la forma canónica de un grupo de Lie, se cumple*

$$d\omega + [\omega, \omega] = 0$$

donde $[\omega, \omega]$ es la $2-forma$ sobre G con valores en G, definida como $[\omega, \omega](D_1, D_2) = [\omega(D_1), \omega(D_2)]$.

Demostración. Partimos a partir de la definición de los coeficientes de estructura y teniendo en cuenta el resultado de la *fórmula de Maurer-Cartan* para todo par de campos $D_i, D_j \in \mathcal{D}(G)$

$$\begin{aligned}
[D_i, D_j] &= \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} D_k \\
-\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} D_k + [D_i, D_j] &= 0 \\
d\omega(D_i, D_j) + [\omega(D_i), \omega(D_j)] &= 0 \\
d\omega(D_i, D_j) + [\omega, \omega](D_i, D_j) &= 0 \\
(d\omega + [\omega, \omega])\,(D_i, D_j) &= 0 \\
d\omega + [\omega, \omega] &= 0
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Homomorfismos

Una vez visto que un grupo de Lie es una variedad diferenciable G con estructura de grupo para la que la aplicación $(p, q) \longmapsto pq^{-1}$ es diferenciable, y que el álgebra de Lie son los campos vectoriales invariantes a la izquierda de un grupo de Lie, que también podemos caracterizar como los elementos del espacio tangente T_eG en el elemento neutro. Ahora cabe hacernos la siguiente pregunta: ¿cómo podemos relacionar el álgebra de Lie con su grupo de Lie? Pues bien, la respuesta es mediante la aplicación exponencial. Veamos algunos conceptos necesarios antes de definir esta aplicación.

3.1. Propiedades de los homomorfismos

Definición 3.1.1. *Una aplicación $\varphi : (G, *_G) \longrightarrow (H, *_H)$ se dice un homomorfismo de grupos de Lie si es diferenciable y homomorfismo de grupos en el sentido abstracto, es decir $\varphi(p *_G q) = \varphi(p) *_H \varphi(q)$ para cada $p, q \in G$. Diremos que es un isomorfismo si además φ es un difeomorfismo. Un isomorfismo de un grupo de Lie consigo mismo se llama automorfismo.*

En adelante omitiremos las operaciones $*_G$ y $*_H$ si no hay lugar a confusión.

Definición 3.1.2. *Una aplicación $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie si es lineal y preserva los corchetes de Lie, es decir que verifica que $\psi[X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Si además la correspondencia es biunívoca, diremos que ψ es un isomorfismo. Un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ consigo mismo se llamará automorfismo.*

Observemos que si $\varphi : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces transforma el elemento identidad de G, e, en el elemento identidad de H, e', y por tanto la diferencial φ_* es una aplicación lineal de T_eG en $T_{e'}H$. Como sabemos, existe una identificación natural entre el álgebra de Lie con el espacio tangente en la identidad y así, φ_* induce una transformación lineal de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$. Con esto podemos establecer las primeras consecuencias de esta sección.

Proposición 3.1.1. *Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, respectivamente y sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces se verifica:*

I. *Para cada $X \in \mathfrak{g}$ y $p \in G$ se cumple que $\varphi_*(X_p) = \varphi_*(X)_{\varphi(p)}$.*

II. *$\varphi_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de grupos de Lie.*

Demostración. Veamos las dos afirmaciones por separado:

I. Dado que φ es un homomorfismo, se cumple que $L_{\varphi(p)} \circ \varphi = \varphi \circ L_p$. Sea $Y = \varphi_*(X)$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_*(X)(\varphi(p)) = Y(\varphi(p)) &= L_{*,\varphi(p)} Y_e = L_{*,\varphi(p)}(\varphi_*(X_e)) \\ &= (L_{\varphi(p)\circ\varphi})_* X_e = (\varphi \circ L_p)_* X_e = \varphi_*(X_p)\end{aligned}$$

II. Ahora, para $X,\ Y \in \mathfrak{g}$ debemos comprobar que $\varphi_*[X,Y] = [\varphi_*(X), \varphi_*(Y)]$. Para una aplicación $g \in C^\infty(H)$ cualquiera:

$$[\varphi_{*,p}X, \varphi_{*,p}Y](g)(\varphi(p)) = (\varphi_{*,p}X)(\varphi_{*,p}Y)(g)(\varphi(p)) - (\varphi_{*,p}Y)(\varphi_{*,p}X)(g)(\varphi(p))$$

Vayamos por partes, llamemos $h_1 = (\varphi_{*,p}X)(g)$ y $h_2 = (\varphi_{*,p}Y)(g)$, entonces continuando la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned}&(\varphi_{*,p}X)(\varphi_{*,p}Y)(g)(\varphi(p)) - (\varphi_{*,p}Y)(\varphi_{*,p}X)(g)(\varphi(p)) = \\ &= (\varphi_{*,p}X)(h_2)(\varphi(p)) - (\varphi_{*,p}Y)(h_1)(\varphi(p)) = \\ &= X(h_2 \circ \varphi)(p) - Y(h_1 \circ \varphi)(p).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Veamos ahora a qué corresponde $h_1 \circ \varphi$ y $h_2 \circ \varphi$ en un punto cualquiera $q \in G$:

$$h_1 \circ \varphi(q) = (\varphi_{*,q}X)(g)(\varphi(q)) = X(g \circ \varphi)(q) \Longrightarrow h_1 \circ \varphi = X(g \circ \varphi)$$

$$h_2 \circ \varphi(q) = (\varphi_{*,q}Y)(g)(\varphi(q)) = Y(g \circ \varphi)(q) \Longrightarrow h_2 \circ \varphi = Y(g \circ \varphi).$$

Por tanto, retomando (3.1), obtenemos

$$\begin{aligned}X(Y(g\circ\varphi))(p) - Y(X(g\circ\varphi))(p) &= (X(Y(g\circ\varphi)) - Y(X(g\circ\varphi)))(p) \\ &= [X,Y](g\circ\varphi)(p) = \varphi_{*,p}[X,Y](g)(\varphi(p)) \\ &= \varphi_{*,p}\Big([X,Y]_p\Big)(g).\end{aligned}$$

Por tanto, observando desde donde partimos y hasta donde hemos llegado, se obtiene la igualdad buscada:

$$[\varphi_{*,p}X, \varphi_{*,p}Y]_{\varphi(p)} = \varphi_{*,p}\Big([X,Y]_p\Big).$$

Ahora bien, en particular, $\varphi(e) = e'$ y se tiene

$$\varphi_{*,e}\Big([X,Y]_e\Big) = [\varphi_{*,e}X, \varphi_{*,e}Y]_{\varphi(e)} = [\varphi_{*,e}X, \varphi_{*,e}Y]_{e'}.$$

□

Hemos visto el efecto que tiene un homomorfismo sobre campos invariantes por traslaciones a la izquierda, veamos cómo influye en formas invariantes a la izquierda.

Proposición 3.1.2. *Sea $\varphi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie, entonces se verifica:*

I. *El pull-back de φ, φ^* transforma formas invariantes a la izquierda en H, en formas invariantes a la izquierda en G.*

II. *La aplicación lineal $\varphi^* : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es la aplicación dual de $\varphi_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$.*

Demostración. I. Dado que ω es una forma invariante por la izquierda en H,

$$\begin{aligned} L_p^*\varphi^*(\omega) =& (\varphi \circ L_p)^*\omega = (L_{\varphi(p)} \circ \varphi)\omega \\ =& \varphi^* L_{\varphi(p)}^*(\omega) = \varphi^*(\omega). \end{aligned}$$

Luego $\varphi^*(\omega)$ es una forma invariante a la izquierda en G.

II. Más aún, $\varphi^* : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es la dual de $\varphi_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ por la propia definición de *pull-back* ya que para cada forma invariante a la izquierda $\omega \in \mathfrak{h}^*$ y $X \in \mathfrak{g}$,

$$(\varphi^*(\omega))(X) = \omega(\varphi_*(X)).$$

□

3.2. Subgrupos de Lie

Ya vimos en el capítulo 1 el concepto de subgrupo cerrado de un grupo de matrices, ahora extenderemos este concepto a los grupos de Lie. Comenzaremos esta sección con la definición central de los subgrupos de Lie.

Definición 3.2.1. *Sea G un grupo de Lie, diremos que el par (H, φ) es un subgrupo de Lie de G si se verifican las siguientes condiciones:*

I. *H es grupo de Lie en sí mismo.*

II. *(H, φ) es una inmersión de variedades de G, esto es φ_* es inyectiva.*

III. *$\varphi : H \to G$ es un homomorfismo de grupos.*

Si además $\varphi(H)$ es un subconjunto cerrado de G, diremos que (H, φ) es un subgrupo cerrado de G.

Rescatemos de la sección 2.2 el concepto de subálgebra.

Definición 3.2.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, diremos que $\mathfrak{h}$ es un subálgebra de Lie si para cualquier $X, Y \in \mathfrak{h}$, se cumple que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. De esta manera se podría considerar el propio $\mathfrak{h}$ como álgebra de Lie con dicha operación corchete.*

Debemos notar que si (H, φ) es un subgrupo de Lie de G y $\mathfrak{h} \simeq T_eH$, $\mathfrak{g} \simeq T_eG$ son sus respectivas álgebras de Lie, entonces φ_* es un isomorfismo de $\mathfrak{h}$ con el subálgebra $\varphi_*(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ tal como indica el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\varphi_*} & \varphi_*(\mathfrak{h}) & \subset \mathfrak{g} \\ \downarrow & & \downarrow & \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G & \end{array}$$

Más adelante volveremos sobre este diagrama, ya que nos falta la relación existente entre las álgebras y las variedades.

Enunciaremos ahora tres resultados cuyas demostraciones no reproduciremos y que podemos encontrar bien en [War, Pág 101, teorema 3.27], bien en [Lóp, Pág 39, corolario 4] o bien en [Jac, Pág 202, *Ado's theorem*], respectivamente, cuya importancia se pondrá de manifiesto en la siguiente sección.

Teorema 3.2.1. *Sean G y H grupos de Lie cuyas álgebras de Lie son respectivamente $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, con G una variedad simplemente conexa. Si $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $\varphi_* = \psi$.*

Corolario 3.2.1. *Sean G y H grupos de Lie simplemente conexos cuyas álgebras de Lie son isomorfas, entonces también G y H son isomorfos.*

Teorema 3.2.2 (de Ado).
Existe una correspondencia biunívoca (ó 1:1) entre las álgebras de Lie y los grupos de Lie simplemente conexos.

3.3. La aplicación exponencial

La aplicación exponencial está íntimamente relacionada con el concepto de geodésica o flujo geodésico en el ámbito de la Geometría Riemanniana. Nosotros la veremos asociada al concepto de subgrupo uniparamétrico de un grupo de Lie.

Definición 3.3.1. *Sea G un grupo de Lie, a cualquier homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ de grupos de Lie lo llamaremos subgrupo uniparamétrico de G.*

Cabe recordar que ($\mathbb{R}$,+) es un grupo de Lie, su álgebra de Lie, $\mathfrak{r}$, consiste en los campos constantes $\lambda \frac{d}{dr}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ con la operación corchete $[\cdot,\cdot] = 0$.

Definición 3.3.2. *Sea G un grupo de Lie, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $D \in \mathfrak{g}$, la aplicación*

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ \lambda \frac{d}{dr} &\longmapsto \lambda D \end{aligned}$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie, más concretamente del álgebra de Lie $\mathfrak{r}$ de $\mathbb{R}$ en el álgebra $\mathfrak{g}$. Como la recta real es simplemente conexa, el teorema (3.2.1) nos garantiza la existencia de un único homomorfismo de grupos de Lie, en este caso, subgrupo uniparamétrico

$$\exp_D : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

cuya diferencial es el homomorfismo de álgebras anterior

$$\begin{aligned} \exp_{D,*} : \mathfrak{r} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ \lambda \frac{d}{dr} &\longmapsto \exp_{D,*}\left(\lambda \frac{d}{dr}\right) = \lambda D. \end{aligned}$$

Es decir, la aplicación $t \longmapsto \exp_G(t)$ es el único subgrupo paramétrico de G cuyo vector tangente en $0 \in \mathbb{R}$ es D_e. En tal caso, definimos ***la aplicación exponencial***

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ D &\longmapsto \exp(D) = \exp_D(1). \end{aligned}$$

Será importante pensar en la aplicación $\exp_D : \mathbb{R} \longrightarrow G$ como la curva integral del campo D en G que pasa por el elemento identidad $e \in G$. Ya que como se trata de un homomorfismo de grupos de Lie, transforma $0 \in \mathbb{R}$ en $e \in G$, es decir, $\exp_D(0) = e$ y además

$$\exp_{D,*}\left(\left.\frac{d}{dr}\right|_t\right) \equiv (\exp_D)'(t) = D|_{\exp_{D(t)'}}.$$

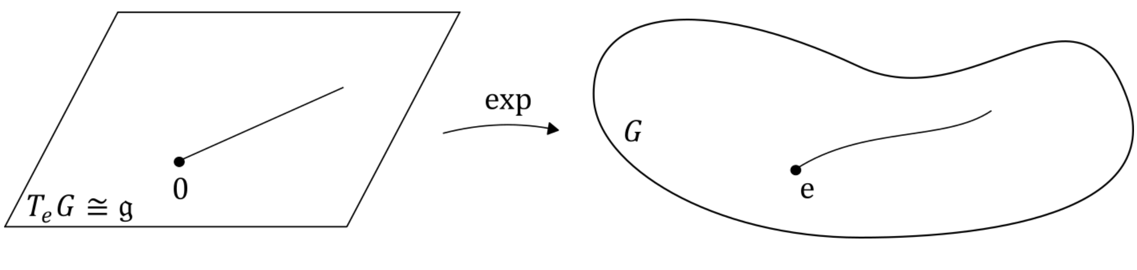

Figura 3.1: Interpretación geométrica de la aplicación exponencial.

Una vez definida esta aplicación, veamos sus propiedades más importantes.

Proposición 3.3.1. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $D \in \mathfrak{g}$. Entonces:*

I. *Para todo $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tD) = \exp_D(t)$.*

II. *Para todo t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $\exp((t_1 + t_2)D) = \exp(t_1 D) \exp(t_2 D)$.*

III. *Para todo* $t \in \mathbb{R}$, $\exp(-tD) = (\exp_D(t))^{-1}$.

IV. $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ *es diferenciable y proporciona un difeomerfismo de un entorno de* $0 \in \mathfrak{g}$ *en un entorno de* $e \in G$.

V. $L_p \circ \exp_D$ *es la única carta integral del campo invariante a la izquierda de* D *en* G *que toma el valor* p *en 0. Por tanto, los campos invariantes a la izquierda son siempre completos.*

VI. *Además, el grupo uniparamétrico de difeomorfismos* $\{D_t : G \longrightarrow G,\ t \in \mathbb{R}\}$ *asociado al campo invariante a la izquierda* D *está dado por*

$$D_t = R_{\exp_D(t)},\ \textit{esto es},\ D_t(p) = p\exp_D(t),\ \textit{para todo}\ t \in D$$

donde R_q *representa la traslación a la derecha en* G *por* $q \in G$.

Demostración. Vayamos por partes. Sabemos que $\exp_D : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es una curva integral del campo D en G que pasa por $e \in G$ en el instante inicial t = 0. Como $D \in \mathfrak{g}$ es un campo invariante a la izquierda sobre G, entonces $L \circ \exp_D : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es también una curva integral de D que en el instante inicial t = 0 pasa por p. Esto demuestra la primera parte de (V). Además como

$$t \longmapsto L_p(\exp_D(t)) = R_{\exp_D(t)}(p)$$

es la curva integral de D pasando por p en t = 0, el flujo de D viene dado por $D_t(p) = R_{\exp_D(t)}(p)$ para todo $p \in G$ y queda probado (VI). La completitud de $D \in \mathfrak{g}$ se deduce de que la expresión anterior para D_t está definido en G para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que es completo y queda terminada la demostración de (V).

Definamos las aplicaciones φ, $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ dadas por las expresiones

$$\psi(t) := \exp_{sD}(t) \qquad \text{y} \qquad \varphi(t) := \exp_D(st)$$

para $s \in \mathbb{R}$. Con lo probado anteriormente, sabemos que ψ es una curva integral del campo invariante a la izquierda sD en G con $\psi(0) = e$. Por otra parte se tiene

$$\varphi_*\left(\left.\frac{d}{dr}\right|_t\right) \equiv \varphi'(t) = \exp_{D,*}\left(s\left.\frac{d}{dr}\right|_{st}\right) = s\cdot\exp_{D,*}\left(\left.\frac{d}{dr}\right|_{st}\right) = s\cdot D|_{\exp_D(st)}.$$

De esta forma ψ es también una curva integral del campo sD con $\varphi(0) = e$, y, por la unicidad de las curvas integrales, debe ser $\psi = \varphi$, es decir,

$$\exp_{sD}(t) = \exp_D(st)$$

para todo s, $t \in \mathbb{R}$ y todo $D \in \mathfrak{g}$. A esta expresión la llamaremos **Lema de Homogeneidad**. Ahora bien, como $\exp(tD) = \exp_{tD}(1) = \exp_D(t)$, queda probado el apartado (I).

De nuevo, teniendo en cuenta el lema de homogeneidad y que $\exp_D$ es un homomorfismo de grupos de Lie, probaremos (II) y (III):

$$\exp((t_1+t_2)D) = \exp_{(t_1+t_2)D}(1) = \exp_D(t_1+t_2) = \exp_D(t_1)\exp_D(t_2) = \exp(t_1D)\exp(t_2D)$$

por lo que queda probado (II). Además como el elemento neutro, e, cumple

$$e = \exp_D(0) = \exp_D(t + (-t)) = \exp_D(t)\exp_D(-t)$$

se tiene que $\exp_D(-t) = \big(\exp_D(t)\big)^{-1}$, y por tanto

$$\exp(-tD) = \exp_{-tD}(1) = \exp_D(-t) = \big(\exp_D(t)\big)^{-1} = \big(\exp_{tD}(1)\big)^{-1} = \big(\exp(tD)\big)^{-1}$$

quedando así probado (III).
Sólo nos queda probar (IV). Para ello definamos el campo de vectores V en $G \times \mathfrak{g}$ por la expresión

$$V(p, D) := (D_p, 0) \in T_pG \oplus \mathfrak{g}_D.$$

Donde $\mathfrak{g}_D$ denota el espacio tangente a $\mathfrak{g}$ en D, que como es habitual, se puede identificar con el propio $\mathfrak{g}$. Es claro que V es un campo de vectores diferenciable, y teniendo en cuenta (V), la curva integral de V que pasa por (p,D) es

$$t \longmapsto (L_p \circ \exp_D(t), D) = (p \cdot \exp(tD), D)$$

Como consecuencia el campo V es completo y su grupo uniparamétrico local viene dado por

$$V_t(p, D) = (p \cdot \exp(tD), D)$$

En particular, la aplicación

$$\begin{aligned} V_1 : G \times \mathfrak{g} &\longrightarrow G \times \mathfrak{g} \\ (p, D) &\longmapsto V_1(p, D) = (p \cdot \exp(D), D) \end{aligned}$$

es diferenciable. Si llamamos $\pi : G \times \mathfrak{g} \longrightarrow G$ a la proyección sobre G, que es diferenciable, e $i : \mathfrak{g} \longrightarrow G \times \mathfrak{g}$ a la inyección diferenciable tal que $i(D) = (e, D)$, entonces

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ D &\longmapsto \exp(D) = \pi(e \cdot \exp(D), D) = \pi \circ V_1(e, D) = \pi \circ V_1 \circ i(D) \end{aligned}$$

que es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables. Falta ver que induce un difeomorfismo de un entorno de $0 \in \mathbb{R}$ en un entorno de $e \in G$. Para ello veamos que $\exp_* : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow T_eG$ es la identidad. En efecto, sea tD una curva en $\mathfrak{g}$ cuyo vector tangente en $t = 0$ es D, entonces $\exp(tD)$ es una curva en G cuyo vector tangente en $t = 0$ es D_e, canónicamente identificado con D y por tanto $\exp_* : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow T_eG$ es la identidad. Con esto concluye la demostración de la proposición. □

Proposición 3.3.2. *Sea $\varphi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie, cuyas álgebras de Lie son $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, respectivamente. Entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathfrak{h} & \\ \exp^G & \downarrow & & \downarrow & \exp^H \\ & G & \xrightarrow{\varphi} & H & \end{array}$$

Es decir, se tiene la relación

$$\varphi \circ \exp^G = \exp^H \circ \varphi_*.$$

Demostración. Sea $D \in \mathfrak{g}$, entonces la aplicación $t \longmapsto \varphi(\exp^G(td))$ es una curva diferenciable en H cuyo vector tangente en $t = 0$ es $\varphi_*(D_e) = (\varphi_*(D))_e$. Esta aplicación es también un subgrupo uniparamétrico de H ya que φ es un homomorfismo de grupos de Lie. Pero la aplicación que transforma cada $t \in \mathbb{R}$ en $\exp(t(\varphi_*(D)))$ es también un subgrupo uniparamétrico de H cuyo vector tangente en $t = 0$ es $(\varphi_*(D))_e$. Por la unicidad de las curvas integrales que pasan por un punto, ambas aplicaciones deben ser iguales, es decir,

$$\varphi(\exp^G(tD)) = \exp^H(t(\varphi_*(D))), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particular, para $t = 1$ se tiene

$$\varphi(\exp^G(D)) = \exp^H(\varphi_*(D))$$

y como hemos tomado un campo $D \in \mathfrak{g}$ cualquiera, se tiene que $\varphi \circ \exp^G = \exp^H \circ \varphi_*$ y queda probada las proposición. □

3.4. La aplicación exponencial en $GL_n(\mathbb{R})$

En esta sección veremos las principales propiedades de la aplicación exponencial en el grupo general lineal. Conviene rescatar del capítulo 1 su definición más usual:

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \ \det(A) \neq 0\}.$$

También recordemos que en el capítulo 2 introdujimos su álgebra de Lie, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = (M_n\mathbb{R}, [\cdot,\cdot])$. Podemos recuperar un resultado del álgebra lineal sobre la exponenciación matricial, dada una matriz $A \in M_n\mathbb{R}$ su desarrollo en serie de potencias es:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{3.2}$$

donde $A^0 = I$ es la matriz identidad.

Ahora la aplicación exponencial del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ en $GL_n(\mathbb{R})$ es precisamente (3.2)

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \exp(A) = e^A. \end{aligned}$$

La aplicación $\varphi(t) = e^{tA}$ es un subgrupo uniparamétrico en $GL_n(\mathbb{R})$ con $\varphi'(0) = A$, que es precisamente la aplicación exponencial de $GL_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \exp_A : \mathbb{R} &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto \exp_A(t) = e^{tA}. \end{aligned}$$

Antes de continuar, debemos probar algunas propiedades importantes en este grupo de Lie.

Proposición 3.4.1. *Para toda $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ se tiene que $e^A \in GL_n(\mathbb{R})$ y $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.*

Demostración. Denotaremos por $S_j(A)$ a la j-ésima suma parcial de la serie (3.2), es decir,

$$S_j(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{j!}A^j$$

y sea $B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, la aplicación $C \longmapsto BC$ es una aplicación continua de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ en sí mismo, se tiene que

$$B\left(\lim_{j\to\infty} S_j(A)\right) = \lim_{j\to\infty}(BS_j(A)).$$

En particular, si $\det(B) \neq 0$ (es decir, $B \in GL_n(\mathbb{R})$) , entonces

$$B\left(\lim_{j\to\infty} S_j(A)\right)B^{-1} = \lim_{j\to\infty}(BS_j(A)B^{-1})$$

de donde se sigue que

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}.$$

Ahora bien, en $GL_n(\mathbb{R})$ existe alguna matriz B tal que BAB^{-1} es triangular superior (todas las entradas debajo de la diagonal son nulas). Para una definición más detallada de esta matriz B consultar [War, Pág.106]. Si los elementos de la diagonal de BAB^{-1} son $\lambda_1, ..., \lambda_n$, entonces $e^{BAB^{-1}}$ es también diagonal superior cuyos elementos de la diagonal principal son $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}$. En particular, $\det(e^{BAB^{-1}}) \neq 0$ y por tanto $e^A \in GL_n(\mathbb{R})$ para cada $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Más aún, como la traza de una matriz coincide con la suma de sus autovalores, y su determinante coincide con el producto de sus autovalores, se tiene que

$$\det(e^A) = \det(Be^A B^{-1}) = \det(e^{BAB^{-1}}) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = e^{\mathrm{tr}A}.$$

$\square$

Proposición 3.4.2. *Para todo $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA$ (o equivalentemente $[A, B] = 0$), entonces*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Su demostración puede encontrarse en [War, Pág.106]

Álgebras de Lie de los subgrupos de $GL_n(\mathbb{R})$

Veamos cuáles son las álgebras de Lie de los principales subgrupos de Lie del grupo general lineal, $O(n)$, $U(n)$ y $Sp(n)$.

1. El álgebra de Lie del grupo ortonormal

$$O(n) = \{A \in M_n\mathbb{R} : \ A^{-1} = A^t\} = \{A \in M_n\mathbb{R} : \ A^t A = I\}$$

   es el conjunto

$$\mathfrak{o}(n) = \{A \in M_n\mathbb{R} : \ A^t = -A\}$$

de todas las matrices antisimétricas (*skew-symmetric* en la literatura inglesa). Las matrices que cumplen esta condición se anulan en la diagonal principal, por tanto, la dimensión es $\dim O(n) = \dim \mathfrak{o}(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$. En efecto, veamos que $T_I O(n) = \mathfrak{o}(n)$. Sea $\varphi(s)$ una curva en $M_n\mathbb{R}$ que comience en I, es decir, $\varphi(0) = I$ que pertenezca a $O(n)$, es decir que $\varphi(s)^t\varphi(s) = I$. Derivando en $s = 0$ obtenemos que $\varphi'(0)^t = -\varphi'(0)$, luego $T_I O(n) \subset \mathfrak{o}(n)$. Por otro lado, sea $A \in \mathfrak{o}(n)$, entonces $\varphi(s) = e^{sA}$ es una curva en $M_n\mathbb{R}$ con $\varphi(0) = I$ y $\varphi(\mathbb{R}) \subset O(n)$, ya que $(e^{sA})^t = (e^{sA})^{-1}$. Derivando en $s = 0$ obtenemos que $\varphi'(0) = A \in T_I O(n)$. Luego $\mathfrak{o}(n) \subset T_I O(n)$.

2. De manera análoga podemos comprobar que el álgebra de Lie del grupo $U(n)$ es el conjunto

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in M_n\mathbb{C} : \ \bar{A}^t = -A\}$$

de matrices complejas antihermíticas (*skew-hermitian* en la literatura inglesa). Cuyos elementos de la diagonal principal son números imaginarios puros. Su dimensión es $\dim U(n) = \dim \mathfrak{u}(n) = n^2$.

3. El álgebra de Lie del grupo especial unitario es el conjunto

$$\mathfrak{su}(n) = \{A \in M_n\mathbb{C} : \ \bar{A}^t = -A \quad y \quad \mathrm{tr}A = 0\}.$$

Donde se ha utilizado que $\det(e^{tA}) = e^{t\cdot\mathrm{tr}(A)}$ y se deduce que $\dim SU(n) = \dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1$.

4. De la misma manera se establece que el álgebra de Lie de $SL_n(\mathbb{R})$ es el conjunto

$$\mathfrak{sl}(\mathbb{R}) = \{A \in M_n\mathbb{R} : \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

cuya dimensión es $\dim SL_n(\mathbb{R}) = \dim \mathfrak{sl}(n) = n^2 - 1$.

5. El álgebra de Lie del grupo especial ortogonal , $SO(n)$ es el mismo que el álgebra de Lie de $O(n)$, es decir, $\mathfrak{so}(n)$ y, por tanto, también se tiene que $\dim SO(n) = \dim \mathfrak{so}(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

6. Por último, el álgebra de Lie del grupo simpléctico $Sp(n)$ es el conjunto

$$\mathfrak{sp}(n) = \{A \in M_n\mathbb{H} : \ \bar{A}^t = -A\}.$$

Debido a la actuación de la conjugación en los cuaterniones, es más útil ver este conjunto como

$$\mathfrak{sp}(n) = \{A \in M_{2n}\mathbb{C} : \ \bar{A}^t = -A \quad \text{y} \quad A^tJ = -JA\}.$$

donde J es la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5. La fórmula de Campbell - Baker - Hausdorff

Para terminar el capítulo, estableceremos y demostraremos *la fórmula de Campbel - Baker - Hausdorff* (CBH en adelante), que sirve para relacionar $\exp(X)\exp(Y)$ con $\exp(X+Y)$. Además será util en el siguiente capítulo cuando tengamos que demostrar el *teorema del subgrupo cerrado.*

Teorema 3.5.1. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y) + O(t^2)),\ t \in I := (-\varepsilon, \varepsilon) \tag{3.3}$$

donde $O(t^2) : I \to \mathfrak{g}$ es una aplicación diferenciable con $\frac{1}{t^2}O(t^2)$ acotado en I.

Demostración. Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, la curva

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto \exp(tX)\exp(tY) \end{aligned}$$

tiene su recorrido dentro de un entrono de e difeomorfo por $\exp^{-1}$ a un entorno de $0 \in \mathfrak{g}$. Por tanto, existe una curva diferenciable $Z(t)$ en $\mathfrak{g}$ tal que

$$\exp(Z(t)) = \exp(tX)\exp(tY),\ t \in I.$$

Veamos que el vector tangente para $t = 0$ de $\exp(tX)\exp(tY)$ es $X_e + Y_e$. De forma general, dadas $\alpha(t),\ \beta(t)$ curvas diferenciables en G con $\alpha(0) = e = \beta(0)$ y $\dot\alpha(0) = u \in T_eG$ $\dot\beta(0) = v \in T_eG$, entonces la curva $\sigma(t) = \alpha(t)\cdot\beta(t)$ tiene por vector tangente en $t = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} &= (\alpha\cdot\beta)_*\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} = \left.\frac{d(\alpha\cdot\beta)}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\cdot\beta\right)_{t=0} + \left(\alpha\cdot\frac{d\beta}{dt}\cdot\right)_{t=0} \\ &= \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=0}\cdot\beta(0) + \alpha(0)\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t=0} \\ &= \alpha_*\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} + \beta_*\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \\ &= \dot\alpha(0) + \dot\beta(0) = u + v. \end{aligned}$$

Como $\exp_{0,*} = id_{\mathfrak{g}}$, $\dot Z(0) = X_e + Y_e \equiv X + Y$ y la expresión en serie de Taylor viene dada por

$$Z(t) = t(X+Y) + O(t^2)$$

donde $O(t^2) : I \to \mathfrak{g}$ es una aplicación diferenciable con $\frac{1}{t^2}O(t^2)$ acotado en I y queda probado el teorema. □

En particular los primeros términos de $O(t^2)$ en el desarrollo de Taylor mencionado en la demostración del teorema anterior son

$$O(t^2) = t^2\frac{1}{2}[X,Y] + t^3\left(\frac{1}{12}[[X,Y],Y] - \frac{1}{12}[[X,Y],X]\right) + \cdots.$$

Y por tanto, se sigue la siguiente proposición.

Proposición 3.5.1. *Un grupo de Lie G es conmutativo si y sólo si su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es conmutativa.*

Demostración. Basta tener en cuenta que si $\mathfrak{g}$ es abeliano, entonces $[X, Y] = 0,\ \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ y por tanto la fórmula de CBH (3.3) nos dice que

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y)) = \exp(t(Y+X)) = \exp(tY)\exp(tX)$$

y por tanto G es abeliano.

Si ahora G es abeliano, entonces

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(tY)\exp(tX)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ y para que esto ocurra debe ser $O(t^2) \equiv 0$ que ocurre únicamente cuando $[X, Y] = 0$, es decir, que $\mathfrak{g}$ es conmutativo. □

Podemos encontrar más información sobre esta fórmula en libros como [Arv], [Lee] o para una lectura más profunda se puede consultar [Var]

Capítulo 4

Resultados importantes sobre grupos de Lie

(Volver al Índice)

En este capítulo veremos algunos de los resultados más importantes que que involucran a los grupos de Lie y sus álgebras de Lie. Estos resultados son:

- *El teorema de clasificación de grupos de Lie abelianos* que establece que todo grupo de Lie abeliano es isomorfo al producto de un cierto número de toros con un cierto número de espacios euclídeos.

- *El teorema de Frobenius* que generaliza el teorema de existencia y unicidad de las curvas integrales mediante distribuciones involutivas.

- *El teorema de correspondencia entre subgrupos de Lie y subálgebras de Lie.*

- *El teorema del subgrupo cerrado* que relaciona los subgrupos de Lie cerrados con subvariedades embebidas.

4.1. Clasificación de los grupos de Lie Abelianos

Comencemos esta sección recordando algunos resultados del álgebra lineal que nos serán de utilidad. Pero que no probaremos ya que sus demostraciones pueden encontrarse en libros de álgebra lineal.

Lema 4.1.1. *Sea E un espacio vectorial real de dimensión n. Todo subgrupo discreto $A \subset E$ está generado por $r \leq n$ vectores linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.*

Los siguientes resultados van orientados a la demostración del teorema central de esta sección, el teorema de clasificación de grupos de Lie Abelianos.

Lema 4.1.2. *Sea G un grupo de Lie conexo y U un entorno del elemento neutro e, Entonces $G = \cup U^n$, donde*

$$U^n = \{p_1 \cdots p_n |\ p_i \in U\}.$$

Proposición 4.1.1. *Sea G un grupo de Lie cuya álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es abeliana, entonces la aplicación $\exp : \mathfrak{g} \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie. Si además G es conexo, entonces la aplicación exponencial es sobreyectiva.*

Demostración. Sean $X_e, Y_e \in \mathfrak{g}$ tales que $\exp(X_e) = p_1$ y $\exp(Y_e) = q_1$, donde $p_t,\ q_t$ son subgrupos uniparamétricos correspondientes a $X, Y \in \mathcal{D}(G)$ los campos invariantes que definen. Entonces como el álgebra de Lie es abeliana, tendremos que $q_s p_t = p_t q_s$ y por tanto también $\sigma(t) = p_t q_t$ es el subgrupo uniparamétrico correspondiente a $X + Y$. Luego

$$\exp(X_e + Y_e) = \sigma(1) = p_1 q_1 = \exp(X_e)\exp(Y_e).$$

Que ademas sea sobreyectiva si G es conexo se sigue del lema anterior teniendo en cuenta que se trata de un difeomorfismo local en el cero. $\square$

Lema 4.1.3. *Dado el difeomorfismo local sobreyectivo*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n &\longmapsto \mathbb{T}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto \pi(x_1, \ldots, x_n) := (e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n}), \end{aligned}$$

donde $\mathbb{T}^n$ denota el producto cartesiano de n toros, y sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un subgrupo cerrado y discreto con $\mathbb{Z}^n \subset H$, se tiene que $\pi(H)$ es finito.

Demostración. H es unión disjunta en $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ de

$$H \cap [z, z+1) = H \cap [0,1) + z,$$

para $[z, z+1) = \prod_{i_1}^n [z_i, z_i + 1)$ siendo $\pi(H \cap [z, z+1)) = \pi(H \cap [0,1))$, por tanto bastará con demostrar que $H \cap [0,1)$ es finito. Suponiendo que no lo es, tendríamos una sucesión de puntos distintos $x_n \in H$ en el compacto $[0,1]$ y por tanto tendría un punto límite x, que estaría en H por ser cerrado, pero todo entorno de x tendría puntos x_n, lo cual contradice a que H sea discrteo. Por tanto $H \cap [0,1)$ es finito, $\pi(H \cap [z, z+1)) = \pi(H \cap [0,1))$ es finito y $\pi(H)$ es finito como queríamos probar. $\square$

Rescatemos los siguientes teoremas de la teoría de grupos abstractos.

Teorema 4.1.1. *Todo grupo abeliano finitamente generado H puede escribirse de la siguiente forma*

$$\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}.$$

Llegados a este punto, podemos destacar que si G es un grupo de Lie abeliano con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces para la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$, el subgrupo cerrado

$$\ker \exp = \exp^{-1}(e) \subset \mathfrak{g}$$

es discreto.

Teorema 4.1.2. *Todo subgrupo cerrado y discrteo $H \subset \mathfrak{g}$ es*

$$H = \mathbb{Z}[e_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[e_r]$$

con los $e_i \in H$ linealmente independientes en $\mathfrak{g}$.

Estamos ya en disposición de enunciar y probar el teorema central de esta sección.

Teorema 4.1.3 (Clasificación de los grupos de Lie Abelianos).
Todo grupo de Lie abeliano de dimensión n y conexo es isomorfo a

$$\mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

para algún $r \leq n$.

Demostración. Por el resultado anterior sabemos que

$$\ker \exp = \mathbb{Z}[e_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[e_r]$$

con los e_i linealmente independientes que extendemos a una base $e_1, \ldots, e_n \in \mathfrak{g}$. Ahora considerando las coordenadas asociadas a esta base tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{g} & \sim & \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} & \\ & x & \longrightarrow & (x_1, x_2) & \\ \exp & \downarrow & & \downarrow & \varphi \\ & G & \xleftarrow{\phi} & \mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^{n-r} & \\ & \exp(x) & \longmapsto & (\pi(x_1), x_2) & \end{array}$$

para $x_1 = (a_1, \ldots, a_r)$ y $x_2 = (a_{r+1}, \ldots, a_n)$. Si $x = \sum_i a_i e_i$ define una única ϕ para la que el diagrama es conmutativo, ya que

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(y_1, y_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}^r \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow x - y \in H \Longleftrightarrow \exp(x) = \exp(y)$$

que es un isomorfismo de grupos y difeomorfismo pues cada flecha descendente es homomorfismo de grupos, sobreyectiva por ser G conexo y difeomorfismo local. $\square$

4.2. El teorema de Frobenius

Para ilustrar este importante teorema, recordemos primero el siguiente.

Teorema 4.2.1 (**Existencia y unicidad de Curvas Integrales**).

Sea V un campo vectorial en una variedad diferenciable M. Existe una única curva cuyo generador infinitesimal es V.

En otras palabras, si tenemos un campo vectorial en una variedad, es posible encontrar siempre una curva cuyo espacio tangente en cada punto sea precisamente el valor del campo vectorial dado al principio en dicho punto. Supongamos ahora que tenemos un subespacio de dimensión k de T_pM en cada punto $p \in M$ que varía de manera diferenciable de un punto a otro. Entonces el teorema de Frobenius da respuesta a la siguiente cuestión: *¿Existe una subvariedad de M cuyo espacio tangente en cada punto sea precisamente el subespacio dado?*. Se trata por tanto de la generalización del teorema de existencia y unicidad de las curvas integrales.Comencemos por tanto con una definición.

Definición 4.2.1. *Sea M una variedad diferenciable. Dado un fibrado vectorial diferenciable $\pi : TM \to M$, llamaremos* ***distribución tangente*** *o simplemente* ***distribución*** *a un subconjunto $D \subset TM$ con las siguientes propiedades:*

I. *D es una subvariedad embebida de TM.*

II. *Para cada $p \in M$, la fibra $D_p = D \cap \pi^{-1}(p)$ es un subespacio lineal de $T_pM = \pi^{-1}(p)$.*

III. *Con la estructura de espacio vectorial en cada D_p heredada de T_pM y con la proyección $\pi|_D : D \to M$, D es un fibrado vectorial sobre M.*

Cabe destacar que la última condición implica que $\pi|_D$ es sobreyectiva y que todas las fibras D_p tienen que tener la misma dimensión.

El siguiente lema no lo probaremos, aunque su demostración puede encontrarse en [Lee, Pág.356, Lemma 14.1]

Lema 4.2.1. *Sea M una variedad diferenciable, supongamos que para cada $p \in M$ tenemos un subespacio lineal de dimensión k, $D_p \subset T_pM$. Entonces $D = \coprod_{p\in M} D_p \subset TM$ es una distribución si y sólo si se satisface la siguiente condición:*

> *Para cada punto $p \in M$ existe un entorno U en el que los campos vectoriales $Y_1, \ldots, Y_k : U \to TM$ forman una base $\left\{ Y_1|_p, \ldots, Y_k|_p \right\}$ de D_p en cada punto del entorno.*

En cuanto a esta notación, diremos que D es una distribución generada por los campos vectoriales $Y_1, \ldots, Y_k$.

Definición 4.2.2. *Sea $D \subset TM$ una distribución. Diremos que una subvariedad inmersa $N \subset M$ es una **variedad integral** de D si $T_pN = D_p$ en cada punto $p \in N$.*

Por tanto, el teorema de Frobenius nos permitirá estudiar la existencia de dichas variedades integrales. Veamos algunos ejemplos de variedades integrales que ilustrarán este importante concepto.

Ejemplos

- En $\mathbb{R}^n$, los campos vectoriales $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^k$ generan una distribución de dimensión k. Luego los subespacios afines de dimensión k paralelos a $\mathbb{R}^k$ son variedades integrales.
- Este ejemplo es más explícito y nos servirá de introducción a un nuevo concepto. Sean

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

  campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$, y sea D la distribución generada por X e Y. Veamos que D no tiene ninguna variedad integral. Supongamos que $N \subset \mathbb{R}^3$ es una variedad integral alrededor del origen. Dado que X e Y son tangentes a N, cualquier curva integral de X o de Y que empiece en N deberá permanecer en N, al menos durante un breve intervalo de tiempo. N contiene un subconjunto abierto del $eje - x$ (que además es una curva integral de X); también contiene, para un x pequeño, un subconjunto abierto de la línea paralela al $eje - y$ que pasa por $(x, 0, 0)$ (que también es curva integral de Y). Por tanto, N contiene un subconjunto abierto del plano (x, y); aunque los planos tangentes a los puntos del plano (x, y) que no estén en el $eje - x$ tampoco estarán contenidos en D. Así, no existe tal variedad integral.

Este último ejemplo nos muestra que, en general, las variedades integrales no tienen por qué existir. Para ver cuál es la condición suficiente para la existencia de éstas, debemos introducir el siguiente concepto.

Definición 4.2.3. *Diremos que una distribución D es **involutiva** si para cada par de secciones locales de D (esto es campos vectoriales X, Y definidos en un abierto de M tal que $X_p, Y_p \in D_p$ para cada punto p del abierto) su corchete de Lie es de nuevo una sección de D.*

Diremos que la distribución D es integrable si para cada punto de M existe una variedad integral de D.

Proposición 4.2.1. *Toda distribución integrable es involutiva.*

Demostración. Supongamos que X e Y son secciones locales de D definidas en algún subconjunto abierto $U \subset M$. Sea p cualquier punto de U y sea N la variedad integral de D que pasa por p. El hecho de que X e Y sean secciones locales de D signi ca que X e Y son tangentes a N. Por tanto, nos bastará con probar que $[X,Y]$ también es tangente a N.

Ésta es una cuestión local, por tanto debemos reemplazar N por algún abierto embebido de N. Un vector $V \in T_pM$ pertenece a T_pN si y sólo si $X(f) = 0$ cualquiera que sea $f \in C^\infty(M)$ que se anule en N, su prueba puede consultarse en [Lee, Pág 102, Proposition 5.8]. Supongamos que tenemos una función f de esta forma. Entonces el hecho de que X e Y sean tangentes a N implica que $Y(f)|_N = Y(f)|_N = 0$ y por tanto

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = 0,$$

es decir $[X,Y]_p \in T_pN$ para cada $p \in N$. Así $[X,Y]_p$ es también tangente a N y por tanto es una sección de D_p. □

El siguiente lema nos muestra que no es necesario probar con cada par de campos vectoriales, sino que sólo debemos hacerlo para un sistema de coordenadas locales en cada punto, cuya demostración se encuentra en [Lee, Pág.358, Lemma 14.4]

Lema 4.2.2. *Sea $D \subset TM$ una distribución. Si en un entorno de cada punto de M existe un sistema de coordenadas locales $(V_1, \ldots, V_k)$ para D tales que $[V_i, V_j]$ es de nuevo una sección de D para cada $i, j = 1, \ldots, k$, entonces D es involutivo.*

Demostración. Supongamos que se verifican las condiciones de las hipótesis y que X e Y son secciones de D en algún abierto $U \subset M$. Dado $p \in M$, elijamos un sistema de coordenadas local $(V_1, \ldots, V_k)$ cada uno de los cuales es tangente a M y por tanto una sección de D en un entorno de p. Escribamos entonces nuestros campos $X = X^iV_i$ e $Y = Y^jV_j$ en términos de este sistema de coordenadas. Por tanto

$$[X,Y] = \left[X^iV_i, Y^jV_j\right] = X^iY^j[V_i,V_j] + X^i(V_iY^j)V_j - Y^j(V_jX^i)V_i.$$

Así, hemos conseguido expresar $[X,Y]$ en términos de los elementos del sistema de coordenadas locales, que por hipótesis eran secciones de D, por tanto, también $[X,Y]$ es una sección de D y por tanto D es involutivo. □

En los ejemplos anteriores, vimos que todas las distribuciones, excepto la última, tenían la propiedad de que pasaba una variedad integral por cada punto. Además, estas subvariedades se unen correctamente tal y como ocurre con los subespacios afines paralelos de $\mathbb{R}^k$. Esta idea nos lleva al siguiente concepto.

Definición 4.2.4. *Dada una distribución $D \subset TM$ de dimensión k, diremos que un sistema de coordenadas (U, φ) de M es **flat** o **plano** para D si en los puntos de U, D está generado por los primeros k campos vectoriales $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^k$.*

En tal caso, es evidente que las foliaciones de la forma $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$ para $c^{k+1}, \ldots, c^n$ constantes, es una variedad integral de D. Esta es la situación más beneficiosa posible para variedades integrales, al menos de manera local.

Definición 4.2.5. *Diremos que una distribución $D \subset TM$ es* ***completamente integrable*** *si existe un sistema de coordenadas plano para D en un entorno de cada punto de M.*

Cabe observar que toda distribución completamente integrable es a su vez una distribución integrable y por tanto involutiva. Nuestro objetivo es ahora preguntarnos por la situación contraria, es decir, *¿toda distribución involutiva es completamente integrable?* Pues bien, el teorema de Frobenius nos dará la respuesta. Antes de enunciarlo, veamos un teorema que necesitaremos en la demostración del teorema de Frobenius, pero que no daremos su demostración (aunque puede encontrarse en [Lee, Pág. 337, Theorem 13.10]).

Teorema 4.2.2. *Sea M una variedad de dimensión n y $V_1, \dots, V_k$ campos vectoriales en un abierto de M cuyos valores son linealmente independientes en cada punto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. *Existe un sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^k)$ en un entorno de cada punto tal que $V_i = \partial/\partial x^i,\ i = 1, \dots, k$.*

II. $[V_i, V_j] \equiv 0$ *para todo $i, j = 1, \dots, k$*

Teorema 4.2.3 (Frobenius (local)).
Toda distribución involutiva es completamente integrable.

Demostración. El teorema anterior implica que cualquier distribución localmente generada de la manera que se indica en el teorema es completamente integrable. Por tanto será suficiente probar que toda distribución involutiva está localmente generada de la misma manera que indica el teorema anterior.

Sea D una distribución de dimensión k involutiva en una variedad M de dimensión n. Dado $p \in M$, elijamos un entorno U de p en el que existan ciertas coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ centradas en p y un sistema local $(Y_1, \dots, Y_k)$ para D. Podremos suponer gracias a un simple cambio lineal de coordenadas que $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p = Y_i|_p$. Tomemos ahora la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \Pi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (x^1, \dots, x^n) &\longmapsto \Pi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k) \end{aligned}$$

que induce una aplicación diferenciable entre espacios tangentes

$$\begin{aligned} \Pi_* : TU &\longrightarrow T\mathbb{R}^k \\ \sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p &\longmapsto \Pi_*\left(\sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q \right) = \sum_{i=1}^k v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\Pi(q)}. \end{aligned}$$

Claramente, la restricción de Π_* a $D_p \subset T_pM$ es un isomorfismo y por tanto, por continuidad, también será cierto que $\Pi_*|_{D_q} : D_q \to T_{\Pi(q)}\mathbb{R}^k$ es isomorfismo para cada q perteneciente a un entorno de p. Las entradas de la matriz $\Pi_*|_D$ respecto a las coordenadas $\{Y_i|_q\}$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\Pi(q)}\right\}$ son funciones continuas que dependen de cada q y por ello tambíen serán así las entradas de la matrix $\left(\Pi_*|_{D_q}\right)^{-1} : T_{\Pi(q)}\mathbb{R}^k \to D_q$. Definamos entonces un nuevo sistema local $X_1, \ldots, X_k$ para cada D cerca de p mediante

$$X_i|_q = \left(\Pi_*|_{D_q}\right)^{-1} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\Pi(q)}.$$

Habremos terminado la demostración si $[X_i, X_j] = 0$ para todo i, j.

En primer lugar observemos que, gracias a este nuevo sistema local, podemos escribir

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\Pi(q)} = \left(\Pi_*|_{D_q}\right) X_i|_q = \Pi_* \, X_i|_q .$$

Y utilizando ahora la naturalidad de los corchetes de Lie, obtenemos

$$\Pi_*[X_i, X_j]_q = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]_{\Pi(q)} = 0.$$

Además, como $[X_i, X_j]$ toma sus valores en D por la involutividad y dado que Π_* es inyectiva en D, se deduce que $[X_i, X_j]_q = 0$ para cada q y hemos terminado. □

Una importante consecuencia del teorema de Frobenius (local) es el siguiente, al que llamaremos Teorema de Frobenius (global).

Teorema 4.2.4 (Frobenius (global)).

Sea D una distribución involutiva de dimensión k en una variedad diferenciable M, y sea (U, φ) una carta plana para D. Si N es una variedad integral de D, entonces $N \cap U$ es una unión disjunta de subconjuntos abiertos de foliaciones k-dimensionales de U, cada uno de ellos es abierto en N y están embebidos en M.

Demostración. Dado que la aplicación inclusión $\imath : N \hookrightarrow M$ es continua, $N \cap U = \imath^{-1}(U)$ es un abierto de N, y por tanto es unión numerable disjunta de componentes conexas abiertas en N.

Tomemos ahora V una de las componentes conexas de $N \cap U$. Veamos en primer lugar que V está contenido en una única foliación. Elijamos algún $p \in V$, es suficiente probar que $x^i(q) = x^i(p)$ para $i = k+1, \ldots, n$ para algún $q \in V$. Dado que V es conexo, existe una curva diferenciable γ en V que conecta p con q. Dado que γ está en V y a su vez V es una variedad integral de D, se tiene que $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}V = D_{\gamma(t)}$. Como D está generado por $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}$ en Um esto implica que el resto de las $n-k$ componentes de $\dot\gamma(t)$ son nulas (i.e. $\dot\gamma^i(t) \equiv$ para $i \geq k+1$). Dado que el dominio de γ es conexo, se tiene que γ^i es constante en dichos valores de i y por tanto p y q deben estar en la misma foliación de S.

Como S es un embebimiento en M, la aplicación inclusión $V \hookrightarrow M$ es también una aplicación diferenciable en S. La inclusión $V \hookrightarrow S$ es por tanto una inmersión inyectiva entre variedades de la misma dimensión y, por tanto, un difeomorfismo local, una aplicación abierta y un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto de S. □

Una versión del teorema de Frobenius en términos de formas diferenciales puede encontrarse en [War, Pág.75, theorem 2.32]

4.3. Correspondencia entre subgrupos y subálgebras de Lie

En el capítulo anterior vimos que la aplicación exponencial relaciona un grupo de Lie con su álgebra de Lie (o viceversa, dado que es un difeomorfismo). En esta sección tomaremos, en un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, un subgrupo H y veremos que su álgebra de Lie sigue estando relacionado con una cierta subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

Proposición 4.3.1. *Supongamos que $H \subset G$ es un subgrupo de Lie. Entonces un subgrupo uniparamétrico de H es precisamente el mismo subgrupo uniparamétrico de G cuyo vector inicial pertenezca a T_eH, esto es que un vector inicial en T_eH genera el mismo subgrupo uniparamétrico tanto en H como en G.*

Demostración. Sea $F : \mathbb{R} \to H$ un subgrupo uniparamétrico, entonces la composición

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F} H \overset{\imath}{\hookrightarrow} G$$

es un homomorfismo de grupos de Lie y, por tanto, $\imath \circ F$ es un subgrupo uniparamétrico de G, que claramente cumple que $F'(0) \in T_eH$.

Por otro lado, supongamos que $F : \mathbb{R} \to G$ es un subgrupo uniparamétrico cuyo vector inicial pertenece a T_eH. Y tomemos $\tilde{F} : \mathbb{R} \to H$ un subgrupo uniparamétrico cuyo vector inicial sea $\tilde{F}'(0) = F(0) \in T_eH \subset T_eG$. Como en el párrafo anterior, podemos considerar también $\tilde{F}$ (utilizando la inclusión) como subgrupo uniparamétrico de G. Pero como F y $\tilde{F}$ ambos son subgrupos uniparamétricos de G con el mismo vector inicial y mismo punto inicial, ambos deben ser el mismo subgrupo uniparamétrico. □

Una importante consecuencia de esto es que si H es un subgrupo de Lie de $GL_n(R)$, podemos considerar que los subgrupos uniparamétricos de H son precisamente las aplicaciones de la forma $F(t) = e^{tB}$ para $B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Así podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1 (Correspondencia entre subgrupos de Lie y subálgebras de Lie). *Sea H un subgrupo de Lie de G, y $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. El subespacio $\tilde{\mathfrak{h}}$ definido por*

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \{X \in \mathfrak{g} : \ X_e \in T_eH\}$$

es un subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ isomorfo al álgebra de Lie de H, $\mathfrak{h}$.

Demostración. Es claro que la aplicación inclusión $\imath : H \hookrightarrow G$, es un homomorfismo de grupos de Lie y por tanto, $\imath_*(\mathfrak{h})$ es un subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Tal y como hemos definido los homomorfismo de álgebras de Lie, esta subálgebra es precisamente el conjunto de campos vectoriales invariantes por la izquierda en G cuyo valor en la identidad es de la forma $\imath_* V$ para algún $V \in T_eH$. Por otro lado, $\imath_* : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ es la inclusión de $\mathfrak{h}$ como subespacio de $\mathfrak{g}$ y por tanto deducimos que debe ser $\imath_*(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.

Por último, sólo nos hará falta ver que $\imath_*$ es inyectiva y por tanto isomorfismo, ya que ambos espacios vectoriales son de la misma dimensión. Así, si $\imath_* X = 0$ se tiene que en particular $\imath_* X_e = 0$. Pero $\imath$ es una inmersión y por tanto $X_e = 0$, así por la invarianza por traslaciones a la izquierda obtenemos que $X = 0$. Por tanto $\imath_*$ es inyectiba como buscábamos. □

Más aún tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.3.2. *Sea G un grupo de con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $\mathfrak{h}$ un subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Entonces existe un único subgrupo de Lie conexo H, salvo isomorfismos, cuya álgebra de Lie es precisamente $\mathfrak{h}$.*

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama para cualquier $D \in \mathfrak{h}$

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\imath_*} & \mathbb{R} & \\ \exp_D^{\mathfrak{h}} & \downarrow & & \downarrow & \exp_{\imath(D)}^{\mathfrak{g}} \\ & H & \xrightarrow{\imath} & G & \end{array}$$

donde $\exp_D^{\mathfrak{h}}$ y $\exp_{\imath(D)}^{\mathfrak{g}}$ son subgrupos uniparamétricos de H y G, respectivamente. Entonces es evidente que si vamos variando los elementos $D \in \mathfrak{h}$, la aplicación exponencial es de la forma

$$\exp^{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to H$$

tal que para cada elemento $D \in \mathfrak{h}$ se tiene un elemento $\exp^{\mathfrak{h}}(D) := \exp_D^{\mathfrak{h}}(1) \in H \subset G$. Por tanto se tiene que $H = \exp^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{h})$. □

Así hemos visto que a todo subgrupo de Lie H de un cierto grupo de Lie G le corresponde una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ del álgebra de Lie de G, $\mathfrak{g}$; y que además esta subálgebra es precisamente considerarla como el álgebra de Lie de H. Y viceversa, a toda subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ le corresponde un cierto subgrupo de Lie $H \subset G$ del que precisamente es álgebra de Lie. Esto es posible gracias a las propiedades de la aplicación exponencial que relaciona campos vectoriales invariantes a la izquierda con el valor que toman en el elemento neutro (o identidad) del grupo de Lie, pero que también podemos ver como subgrupo uniparamétrico de dicho grupo de Lie.

4.4. Teorema del subgrupo cerrado

Continuando con las posibilidades que nos ofrece la aplicación exponencial, se presenta el siguiente teorema que nos dará multitud de ejemplos de grupos de Lie. Debido a él, en el primer capítulo exigíamos que un grupo matricial fuese un subgrupo de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$ que además fuese cerrado. Pues aquí es donde entra en juego el teorema del subgrupo cerrado.

Teorema 4.4.1 (del subgrupo cerrado). *Sea G un grupo de Lie. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. *$H \subset G$ es un subgrupo de Lie cerrado.*

II. *H es una subvariedad embebida en G.*

Demostración. Veamos las implicaciones en ambos sentidos:

$I \Rightarrow II$: Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G y definamos el subconjunto $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ como

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \ \exp tX \in H \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Necesitamos probar que $\mathfrak{h}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$. Esto es evidente si nos fijamos en la definición, ya que si $X \in \mathfrak{h}$, entonces también $tX \in \mathfrak{h}$ para todo tiempo. Para ver que es cerrado bajo la suma de vectores, tomemos $X, Y \in \mathfrak{h}$ arbitrarios. Utilizando la fórula CBH (3.3) se tiene que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp\left(\frac{t}{n}X\right)\exp\left(\frac{t}{n}Y\right) = \exp\left(\frac{t}{n}(X+Y) + O\left(\frac{t^2}{n^2}\right)\right)$$

y usando recurrentemente la fórmula CBH (3.3) obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(\exp\left(\frac{t}{n}X\right)\exp\left(\frac{t}{n}Y\right)\right)^n &= \left(\exp\left(\frac{t}{n}(X+Y) + O\left(\frac{t^2}{n^2}\right)\right)\right)^n \\ &= \exp\left(t(X+Y) + O\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

y ahora tomando el límite cuando $n \to \infty$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(\exp\left(\frac{t}{n}X\right)\exp\left(\frac{t}{n}Y\right)\right)^n = \exp t(X+Y)$$

que pertenece a H por el hecho de ser cerrado. Luego $X + Y \in \mathfrak{h}$ y por tanto es subespacio vectorial.

El siguiente paso que necesitamos probar es que existe un entorno del origene en el que la aplicación exponencial de G es un difeomorfismo que cumple

$$\exp(U \cap \mathfrak{h}) = (\exp U) \cap H.$$

Esto nos permitirá después construir una carta en una foliación de H cerca de la identidad (o elemento neutro), y podremos usar las traslaciones a la izquierda para obtener cartas en foliaciones de cualquier otro punto de H. Vayamos por partes, si U es un entorno de $0 \in \mathfrak{g}$ en el que la aplicación exponencial es un difeomorfismo, entonces por definición se cumple que

$$\exp(U \cap \mathfrak{h}) \subset (\exp U) \cap H.$$

Luego para buscar un entorno que satisfaga esta relación lo único que necesitamos es demostrar que tomando dicho entorno U lo suficientemente pequeño, también se tiene la contención en el otro sentido.

Procedamos por reducción al absurdo suponiendo que dicha inclusión no se puede dar. Tomemos $\{U_i\}$ una base numerable de entornos de $0 \in \mathfrak{g}$, por ejemplo una secuencia numerable de bolas coordenadas cuyo radio tiende a cero. Esto implica que para cada i, existe un $h_i \in (\exp U_i) \cap H$

tal que $h_i \notin \exp(U\cap\mathfrak{h})$. Ahora elijamos una base $E_1,\dots,E_k$ de $\mathfrak{h}$ y extendámosla a una base de $\mathfrak{g}$, $E_i,\dots,E_k,E_{k+1},\dots,E_m$. Sea $\mathfrak{v}$ el subespacio generado por $E_{k+1},\dots,E_m$ de forma que $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\times\mathfrak{v}$. Entonces la aplicación $\mathfrak{h}\times\mathfrak{v}\to G$ dada por $(X,Y)\mapsto \exp X\exp Y$ es un difeomorfismo de U_i sobre un entorno de la identidad de G. Por tanto podemos escribir

$$h_i = \exp X_i \exp Y_i$$

para algún $X_i\in U_i\cap\mathfrak{h}$ y algún $Y_i\in U_i\cap\mathfrak{v}$ con $Y_i\neq 0$ dado que $h_i\notin\exp(U\cap\mathfrak{h})$. Como $\{U_i\}$ es una base de entornos, $Y_i\to 0$ cuando $n\to\infty$. Observemos que $\exp X_i\in H$ por definición, luego se tiene que también $\exp Y_i=(\exp X_i)^{-1}h_i\in H$.

La base $\{E_i\}$ induce un isomorfismo de espacios vectoriales $E:\mathfrak{g}\cong\mathbb{R}^m$. Denotemos por $\|\cdot\|$ la norma Euclídea inducida por este isomorfismo y definamos $c_i=\|Y_i\|$, luego $c_i\to 0$ cuando $i\to\infty$. La secuencia $\{c_i^{-1}Y_i\}$ pertenece a la esfera unidad de $\mathfrak{v}$ respecto a esta norma, luego reemplazándolo por una subsecuencia podemos suponer que $c_i^{-1}Y_i\to Y\in\mathfrak{v}$, con $\|Y\|=1$ por continuidad y, en particular, $Y\neq 0$. Demostremos entonces que $\exp tY\in H$ para todo tiempo, lo que implica que $Y\in\mathfrak{h}$ y como $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{v}=\emptyset$, llegaríamos la contradicción buscada.

Sea $t\in\mathbb{R}$ arbitrario, para cada i tomemos n_i como el mayor entero que sea menor o igual a t/c_i. Entonces

$$\left|n_i-\frac{t}{c_i}\right|\leq 1,$$

por tanto

$$|n_ic_i-t|\leq c_i\to 0,$$

es decir, $n_ic_i\to t$. Luego

$$n_iY_i=(n_ic_i)(c_i^{-1}Y_i)\to tY$$

lo que implica que $\exp n_iY_i\to\exp tY$ por continuidad de la aplicación exponencial. Pero $\exp n_iY_i=(\exp Y_i)^n\in H$. Así, el hecho de que H sea cerrado implica que $\exp tY\in H$ e $Y\in\mathfrak{h}$, llegando a la contradicción. Es decir, existe un entorno U de $0\in\mathfrak{g}$ tal que $\exp(U\cap\mathfrak{h})\supset(\exp U)\cap H$. Y así, para un cierto entorno U de $0\in\mathfrak{g}$ suficientemente pequeño se cumple la contención en ambos sentido y por tanto

$$\exp(U\cap\mathfrak{h})=(\exp U)\cap H.$$

Nos falta comprobar que H es una subvariedad embebida en G. La aplicación $\varphi=E\circ\exp^{-1}:\exp U\to\mathbb{R}^m$ es una carta coordenada de G y con la base que hemos elegido antes,

$$\varphi((\exp U)\cap H)=\varphi(\exp(U\cap\mathfrak{h}))$$

es una foliación tomando las últimas $m-k$ coordenadas nulas. Además, para un $h\in H$ arbitrario, la multiplicación por la izquierda L_h es un difeomorfismo de $\exp U$ a un entorno de h. Como H es un subgrupo de Lie, $L_h(H)=H$ y por tanto

$$L_h((\exp U)\cap H)=L_h(\exp U)\cap H,$$

y $\varphi \circ L_h^{-1}$ es una carta coordenada de H en un entorno de h. Así H es una subvariedad embebida en G

$II \Rightarrow I$: Supongamos ahora que H es una subvariedad embebida en el grupo de Lie G por tanto, necesitamos comprobar que las aplicaciones multiplicación $H \times H \to H,\ (h_1, h_2) \mapsto h_1 \cdot h_2$ e inversión $H \to H,\ h \mapsto h^{-1}$ sean diferenciables. Dado que la multiplicación es una aplicación diferenciable $G \times G \to G$, su resticción $H \times H \to G$ también es diferenciable (esto sigue siendo cierto incluso si H es sólo una inmersión). Dado que H es un subgrupo, la multiplicación es una aplicación interna $H \times H \to H$. El mismo argumento podemos aplicar a la inversión, por lo que H es subgrupo de Lie.

Falta ver que H sea cerrado en G. Supongamos que $\{h_i\}$ es una sucesión de puntos en H que convergen a un punto $g \in G$. Sea U el dominio de definición de una carta coordenada de H que contenga a la identidad y sea W el menor entorno de la identidad tal que $\bar{W} \subset U$. Como la aplicación

$$\mu : G \times G \longrightarrow G$$
$$(g_1, g_2) \longmapsto g_1^{-1} g_2$$

es continua, existe un entorno V de la identidad con la propiedad $V \times V \subset \mu^{-1}(W)$, lo que significa que $g_1^{-1} g_2 \in W$ cualesquiera que sean los puntos $g_1, g_2 \in V$. Como $g^{-1} h_i \to e$, podemos descartar un número finito de elementos de la secuencia asumiendo que $g^{-1} h_i \in V$ para todo i. Esto implica que

$$h_j^{-1} h_i = (g^{-1} h_j)^{-1} (g^{-1} h_i) \in W$$

para todo i y todo j. Fijado un cierto j y haciendo el límite cuando $i \to \infty$ obtenemos que $h_j^{-1} h_i \to h_j^{-1} g \in \bar{W} \subset U$. Como además $H \cap U$ es una foliación, es cerrada en U y, por tanto, $h_j^{-1} g \in H$, lo que implica que $g \in H$. Es decir, H es cerrado en G. □

Es conveniente enunciar y demostrar el siguiente lema que usaremos en el próximo capítulo.

Lema 4.4.1. *Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Si $A = \ker \varphi$ y $\mathfrak{a} = \ker \varphi_*$, entonces A es un subgrupo de Lie cerrado de G cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{a}$.*

Demostración. A es un subgrupo cerrado de G en el sentido abstracto, por tanto es un subgrupo de Lie de G. Si $X \in \mathfrak{g}$, entonces X pertenecerá al álgebra de Lie de A si y sólo si $\exp tX \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y esto ocurre si y sólo si $\varphi(\exp tX) = e$. Más aún, esta última condición es equivalente a que $\exp t\varphi_*(X) = e$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y esto ocurre si y sólo si $\varphi_*(X) = 0$ o en otras palabras, que $X \in \mathfrak{a}$. □

Capítulo 5

Representaciones y acciones

(Volver al Índice)

En este capítulo se presentan algunas de las propiedades de la representación adjunta, que intuitivamente mide la no conmutatividad del grupo. Hasta ahora hemos visto que ciertos grupos de Lie poseen un invariante que los relaciona, la dimensión, pero como además tienen estructura de grupo (algebraicamente hablando), podremos encontrar otro, el centro.

Después veremos las principales definiciones de las acciones de grupos sobre variedades que nos serán de utilidad en el siguiente capítulo cuando veamos los fibrados principales.

5.1. La representación adjunta

Sea G un grupo de Lie, para cada elemento $g \in G$ se define la operación conjugación

$$\begin{aligned} a_g : G &\longmapsto G \\ x &\longmapsto a_g(x) := g \cdot x \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

que es un homomorfismo y, además difeomorfismo por ser composición de aplicaciones diferenciables ($a_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$).

Por tanto, la operación conjugación induce una aplicación entre las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ de G

$$(a_g)_* : \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{g}$$

que denotaremos por $\mathrm{Ad}_g = (a_g)_*$.

Definición 5.1.1. *Llamaremos representación adjunta del grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, al homomorfismo*

$$\begin{aligned} Ad : G &\longmapsto Aut(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto Ad_g := (a_g)_*. \end{aligned}$$

Este homomorfismo tiene la siguiente importante propiedad.

Proposición 5.1.1. *La aplicación exponencial y la representación adjunta hacen conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_*} & End(\mathfrak{g}) & \\ \exp^G & \downarrow & & \downarrow & \exp^{Aut(\mathfrak{g})} \\ & G & \xrightarrow{Ad} & Aut(\mathfrak{g}) & . \end{array} \tag{5.1}$$

Demostración. Tomemos un elemento $X \in \mathfrak{g}$ y, por tanto, existe una curva γ en G tal que $\gamma(0) = g \in G$ y $\dot{\gamma}(0) = X$. Por tanto obtenemos

$$\mathrm{Ad} \circ \exp^G(X) = \mathrm{Ad}(\exp^G(X)) = \mathrm{Ad}(\gamma(t)) = (a_{\gamma(1)})_*$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \exp^{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})} \circ \mathrm{Ad}_*(X) &= \exp^{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}(\mathrm{Ad}_*(X)) = \exp^{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}(\mathrm{Ad}_*(\dot{\gamma}(0))) \\ &= \exp^{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathrm{Ad} \circ \gamma(t)) \right) \\ &= \exp^{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (a_{\gamma(t)}) \right) \\ &= \exp^{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}(a_{\gamma(t)})_* = (a_{\gamma(1)})_*. \end{aligned}$$

Por lo que el diagrama es conmutativo. □

En lo que sigue, denotaremos por ad a la aplicación Ad_*. Así, si fijamos un $g \in G$ y un $X \in \mathfrak{g}$, se cumple la siguiente igualdad

$$\exp(t\mathrm{Ad}_g(X)) = g \cdot \exp(tX) \cdot g^{-1}.$$

Basta tener en cuenta que al fijar el punto, a_g es un homomorfismo de G y por la proposición (3.3.2) sabemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_g} & \mathfrak{g} & \\ \exp^G & \downarrow & & \downarrow & \exp^G \\ & G & \xrightarrow{a_g} & G & . \end{array}$$

Además, en el caso especial en que $G = GL_n(\mathbb{R})$, entonces tomando una matriz $B \in GL_n(\mathbb{R})$ tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_B} & \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) & \\ \exp & \downarrow & & \downarrow & \exp \\ & GL_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{a_B} & GL_n(\mathbb{R}) & \end{array}$$

y para cada $C \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_B(C) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (a_B(\exp(tC))) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (B \cdot e^{tC} \cdot B^{-1}) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (e^{t \cdot B \cdot C \cdot B^{-1}}) = B \cdot C \cdot B^{-1}. \end{aligned}$$

La representación adjunta de en cualquier grupo de Lie puede identificarse con el con el corchete definido en su álgebra de Lie de la siguiente forma.

Proposición 5.1.2. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ se tiene que*

$$ad_X Y = [X, Y].$$

Demostración. Por definición sabemos que para todo $g \in G$ con $Y \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{Ad}_g Y = (a_g)_*(Y) = (R_{g^{-1}})_*(L_g)_*(Y) = (R_{g^{-1}})_*(Y).$$

Tomando ahora $x_t = \exp(tX)$ el flujo de un cierto campo $X \in \mathfrak{g}$, como X es invariante por la izquierda, entonces $L_y \circ x_t = x_t \circ L_y$ para todo $y \in G$ y por tanto

$$x_t(y) = x_t(L_y(e)) = L_y(x_t(e)) = y \cdot x_t(e) = R_{x_t(e)}(y),$$

así, $(x_t)_* = (R_{x_t(e)})_*$. Por tanto, podemos calcular el corchete de Lie de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Y - (x_t)_*(Y)) = -\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}((R_{x_t(e)})_*(Y) - Y) \\
&= -\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\mathrm{Ad}_{x_t^{-1}(e)}(Y) - Y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\mathrm{Ad}_{x_t(e)}(Y) - Y) \\
&= \mathrm{ad}_X Y.
\end{aligned}$$

□

Este teorema muestra que el corchete definido en $\mathfrak{g}$ mide en cierto modo lo que difiere G de ser conmutativo. En efeco, si G es abeliano, entonces $a_g = Id$, luego $\mathrm{Ad}_g = Id$ para todo $g \in G$. Así, por la prueba de este teorema tendríamos que $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Un álgebra de Lie con esta propiedad se conoce como álgebra de Lie abeliana. Sin embargo el recíproco se cumple en el caso en que G sea además conexo (puede encontrarse en [War]).

Proposición 5.1.3. *Sea H un subgrupo de Lie conexo del grupo de Lie G. Entonces H es normal en G si y sólo si el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H es un ideal en $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Veamos las implicaciones en ambos sentidos:

$\Longrightarrow$) Supongamos en primer lugar que $\mathfrak{h}$ es un ideal en $\mathfrak{g}$. Sea $Y \in \mathfrak{h}$, tomemos $X \in \mathfrak{g}$ y $p = \exp X$. Entonces

$$\begin{aligned}
p(\exp Y)p^{-1} &= \exp(\mathrm{Ad}_p Y) \\
&= \exp\left((\exp(\mathrm{ad}_X))(Y)\right) \\
&= \exp\left(Y + [X, Y] + \frac{(\mathrm{ad}_X^2)}{2!}(Y) + \cdots\right).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Como estamos suponiendo que $\mathfrak{h}$ es un ideal en $\mathfrak{g}$, la última serie converge a un elemento de $\mathfrak{h}$, luego

$$p(\exp Y)p^{-1} \in H.$$

Ahora, teniendo en cuenta (3.3.1(IV)) y (4.1.2), H esta generado por elementos de la forma $\exp Y$, y G está generado por elementos de la forma $\exp X$. Así, H es un subgrupo normal de G.

$\Longleftarrow$) Supongamos ahora que H es un subgrupo normal en G. Sean $s, t \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}$ y $p = \exp tX$. Entonces, teniendo en cuenta (5.2)

$$p(\exp sY)p^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_p(sY)) = \exp\left(s((\exp \mathrm{ad}_{tX})(Y))\right).$$

Como $\mathfrak{h}$ es normal, $p(\exp sY)p^{-1} \in H$ y por tanto $(\exp \mathrm{ad}_{tX})(Y) \in \mathfrak{h}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ahora bien

$$\begin{aligned}(\exp \mathrm{ad}_{tX})(Y) &= (\exp t(\mathrm{ad}_X))(Y) \\ &= Y + t[X, Y] + \frac{t^2}{2!}[X, [X, Y]] + \cdots,\end{aligned}$$

que es una curva diferenciable en $\mathfrak{h}$ cuyo vector tangente en $t = 0$ es $[X, Y]$. Así, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}$ es un ideal en $\mathfrak{g}$. □

Definición 5.1.2. *Se definen los centros de G y de $\mathfrak{g}$, respectivamente, como sigue:*

a. El centro de G: $\mathcal{C}_G = \{p \in G : \ p \cdot q = q \cdot p, \ \forall q \in G\}$.

b. El centro de $\mathfrak{g}$: $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}} = \{X \in \mathfrak{g} : \ [X, Y] = 0, \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$

Proposición 5.1.4. *Sea G un grupo de Lie conexo, entonces el centro de G, $\mathcal{C}_G$, coincide con el núcleo de la representación adjunta,* $\ker(Ad)$.

Demostración. Sea $p \in \mathcal{C}_G$ y $X \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\exp tX = p(\exp tX)p^{-1} = \exp t(\mathrm{Ad}_p(X))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Así $X = \mathrm{Ad}_p(X)$, luego $p \in \ker(\mathrm{Ad})$.

Recíprocamente, si $p \in \ker(\mathrm{Ad})$ entonces $X = \mathrm{Ad}_p(X)$ y por el mismo argumento se tiene que $\exp(X) = p\exp(X)p^{-1} \Longrightarrow \exp(X)p = p\exp(X)$. Como G es conexo, p conmuta con todo elemento de G y por tanto $p \in \mathcal{C}_G$. □

Podemos enunciar el siguiente corolario que relaciona el centro de G con el centro de $\mathfrak{g}$

Corolario 5.1.1. *Sea G un grupo de Lie conexo, entonces el centro de G, $\mathcal{C}_G$ es un subgrupo de Lie cerrado de G, cuya álgebra de Lie es el centro de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$.*

Demostración. Basta tener en cuenta (5.1.4) y (4.4.1) ya que $\mathcal{C}_G = \ker(\mathrm{Ad})$ y $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}} = \ker(\mathrm{Ad}_*)$. □

Recordemos que según se establece en el Teorema de Ado (3.2.2), toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ puede representarse fielmente en algún $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Si $\mathfrak{g}$ tiene centro trivial, podemos encontrar la representación a partir de la representación adjunta, simplemente definiendo $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ como $\mathrm{ad}_X(Y)$ y comprobando que sea un homomorfismo de álgebras de Lie.

5.2. Acciones de un grupo de Lie

En esta sección veremos las acciones de un grupo de Lie sobre otra variedad y sus aplicaciones. Veremos algunas de las propiedades más importantes, de cara a encontrar las condiciones necesarias para que el espacio cociente de una variedad diferenciable sobre un grupo de acciones sea de nuevo una variedad diferenciable.

Definición 5.2.1.

Una acción por la izquierda de G sobre M es una aplicación

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g,p) &\longmapsto g \cdot p \end{aligned}$$

que, para $g_1, g_2 \in G$, $e \in G$ el elemento neutro del grupo de Lie y $p \in M$, satisface las siguientes condiciones

I. $g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 \cdot g_2) \cdot p$.

II. $e \cdot p = p$.

Una acción por la derecha de G sobre M es una aplicación

$$\begin{aligned} M \times G &\longrightarrow M \\ (p,g) &\longmapsto p \cdot g \end{aligned}$$

que, para $g_1, g_2 \in G$, $e \in G$ el elemento neutro del grupo de Lie y $p \in M$, satisface las siguientes condiciones

I. $(p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 \cdot g_2)$.

II. $p \cdot e = p$.

Diremos que la acción es diferenciable si dicha aplicación además es diferenciable.

Antes de continuar necesitamos definir algunos conceptos.

Definiciones 5.2.1.

I. *Para cualquier $p \in M$, la **órbita** de p por la acción de G es el conjunto*

$$\mathcal{O}_p^L = \{g \cdot p : \ g \in G\}, \qquad \mathcal{O}_p^R = \{p \cdot g : \ g \in G\},$$

que es el conjunto de todas las imágenes de p por los elementos de G.

II. *Diremos que una acción es **transitiva** si la órbita de cada punto está completamente contenida en M.*

III. *Para cualquier $p \in M$, el **grupo de isotropía** o **estabilizador** de p es el conjunto de elementos de G que fijan p, es decir*

$$G_p^L = \{g \in G : \ g \cdot p = p\} \qquad G_p^R = \{g \in G : \ p \cdot g = p\}$$

dependiendo si la acción es por la izquierda o por la derecha, respectivamente.

IV. *Se dice que una acción es* ***libre*** *si el único elemento que fija algún punto de M es la identidad. Equivalentemente una acción es libre si el grupo de isotropias de $p \in G$ es $G_p^L = \{e\}$ o $G_p^R = \{e\}$ si la acción de G sobre M es por la izquierda o por la derecha, respectivamente. Si además, se verifica para todo $p \in G$, entonces diremos que la acción es* ***efectiva****.*

V. *Diremos que una acción es* ***propia*** *si la aplicación*

$$\begin{aligned} G \times M &\longmapsto M \times M \\ (g,p) &\longmapsto (g \cdot p, p) \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} M \times G &\longmapsto M \times M \\ (p,g) &\longmapsto (p, p \cdot g) \end{aligned}$$

dependiendo si la acción es por la izquierda o por la derecha, verifica que la preimagen de cualquier compacto es un compacto.

Deberemos exigir también que se verifique el siguiente teorema, que nos establece qué condiciones necesitamos para que un conjunto cociente por cualquier relación de equivalencia tiene estructura de variedad diferenciable. Aunque no lo probaremos, su demostración puede encontrarse en [War, Pág.120, Theorem 3.58].

Teorema 5.2.1. *Sea R una relación de equivalencia en una variedad M, es decir, R es un subespacio de $M \times M$ que satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Tenemos por tanto el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{R} & M \\ & {\scriptstyle \pi_1}\searrow & \downarrow \quad \pi \\ & & M/R \end{array}$$

donde $\pi : M \to M/R$ es una proyección regular y $\pi_1(p,q) = p$. Entonces para que M/R tenga estructura de variedad diferenciable se deben verificar las siguientes condiciones:

I. *R sea una subvariedad cerrada de $M \times M$.*

II. *La proyección canónica π_1 es regular.*

Proposición 5.2.1. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G. Consideremos la operación de H sobre G por traslaciones a la derecha*

$$\begin{aligned} G \times H &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto g \cdot h. \end{aligned}$$

Entonces, respecto a esta operación, existe la variedad cociente $\pi : G \to G/H$

Demostración. Sea

$$R = \left\{(p,q) \in G \times G : \; p^{-1} \cdot q \in H\right\}.$$

Si consideramos $\pi : G \times G \to G$ como $\pi(p,q) = p^{-1} \cdot q$ es una proyección regular. En efecto, dado $(p,q) \in G \times G$, definiendo $\sigma(x) = (p, p \cdot x)$ es una sección de π tal que

$$\sigma(\pi(p,q)) = \sigma(p^{-1} \cdot q) = (p,q).$$

Así $\pi^{-1}(H) = R$ y es una subvariedad cerrada de $G \times G$. Por tanto hemos probado que G/H tiene una única estructura de variedad diferenciable. □

Proposición 5.2.2. *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado y normal de G. Entonces el espacio cociente G/H tiene además estructura de grupo de Lie.*

Demostración. Sólo tenemos que comprobar que la aplicación

$$\begin{aligned} G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (pH, qH) &\longmapsto p \cdot q^{-1} H \end{aligned} \tag{5.3}$$

sea diferenciable. Tomemos las secciones locales de G/H en G, $\alpha_p : W_p \to G$ y $\alpha_q : W_q \to G$, donde W_p, W_q son entornos de pH y de qH, respectivamente.

Entonces, localmente, la aplicación

$$\begin{aligned} l : G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (p, qH) &\longmapsto (p \cdot q)H \end{aligned}$$

puede expresarse como la composición de las siguientes aplicaciones:

$$\pi \circ \varphi \circ (\alpha_p, \alpha_q),$$

donde $\varphi(p,q) = p \cdot q^{-1}$. Como todas son diferenciables, se sigue que también lo será (5.3). □

Definición 5.2.2. *Sea G un grupo de Lie actuando por la derecha sobre una variedad diferenciable M. Un elemento del álgebra de Lie $X \in \mathfrak{g}$ define un grupo uniparamétrico sobre M de la siguiente forma*

$$\gamma_t(p) = p \cdot \exp(tX), \;\; p \in M.$$

El generafor infinitesimal de γ_t se designa por X^* y recibe el nombre de ***campo fundamental*** *asociado al campo $X \in \mathfrak{g}$.*

Definición 5.2.3. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ actuando por la derecha sobre una variedad diferenciable M. Llamaremos* ***aplicación estrella*** *de un campo $X \in \mathfrak{g}$ a la aplicación $\mathbb{R}-$lineal que relaciona dicho campo X con su campo fundamental X^*, es decir*

$$\begin{aligned} \cdot^* : \mathfrak{g} &\longrightarrow TM \\ X &\longmapsto X^*. \end{aligned}$$

Los siguientes resultados constituyen una serie de propiedades importantes de esta aplicación estrella.

Proposición 5.2.3. *Sea G un grupo de Lie que actúa por la derecha sobre una variedad M. Entonces la aplicación tiene las siguientes propiedades:*

I. *Es un homomorfismo del álgebra del Lie $\mathfrak{g}$ de G en el fibrado tangente TM de M.*

II. *Si la actuación de G es efectiva, entonces la aplicación estrella es además un isomorfismo.*

III. *Si la actuación de G es libre, entonces para cada $X \in \mathfrak{g}$ no nulo se verifica que X^* es también no nulo.*

Demostración. Observemos en primer lugar que la aplicación estrella también puede definirse como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma : \mathfrak{g} &\longrightarrow TM \\ X &\longmapsto \sigma(X) = X^* \end{aligned}$$

entonces para cada $p \in M$ y la aplicación por la derecha $r_p(g) = p \cdot g$, se obtiene que

$$r_{*,p}(X_e) = (\sigma(X))_p$$

de donde observamos que la aplicación estrella es lineal.

Para probar que la aplicación estrella es un homomorfismo, debemos ver que conmute con el corchete. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, $X^* = \sigma(X)$, $Y^* = \sigma(Y)$ y $g_t = \exp(tX)$. El corchete puede definirse mediante:

$$[X^*, Y^*] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y^* - r_{g_t} Y^*\right)$$

una demostración de esta relación puede encontrarse en [Kov-Nom, Pág.15, Proposition 1.9]. Como para cada $h \in G$ podemos escribir

$$R_{x_t} \circ r_{p \cdot g_t^{-1}}(h) = p \cdot g_t^{-1} \cdot h \cdot g_t,$$

obtenemos una ecuación para la diferencial

$$(R_{*,g_t}(Y^*))_p = R_{*,g_t} \circ r_{p \cdot g_t^{-1}}(Y_e) = \sigma_{*,p}(\mathrm{ad}_{g_t^{-1}}(Y_e)).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \left[X_p^*, Y_p^*\right] &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\sigma_{*,p}(Y_e) - \sigma_{*,p}(\mathrm{ad}_{g_t^{-1}}(Y_e))\right) = \sigma_{*,p} \left(\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y_e - \mathrm{ad}_{g_t^{-1}}(Y_e)\right)\right) \\ &= \sigma_{*,p}([X, Y]_e) = [X, Y]_p^*. \end{aligned}$$

Hemos probado entonces que la aplicación estrella es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Supongamos ahora que $X^* = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, es decir, el grupo uniparamétrico dado por R_{g_t} es la transformación identidad para todo t. Así, si G actúa efectivamente, $g_t = e$ para todo

t y por tanto $X = 0$, es decir, es inyectiva. Como además las dimensiones de $\mathfrak{g}$ y de TM son la misma, entonces la aplicación estrella debe ser un isomorfismo.

Por último, supongamos que X^* se anula en algún punto $p \in M$. Entonces R_{g_t} fija p para cada t, si G actúa libremente sobre M, entonces $g_t = e$ y $X = 0$. Así, todo campo X no nulo tendrá campo fundamental X^* no nulo. $\square$

Capítulo 6

Fibrados Principales

(Volver al Índice)

Veremos en este capítulo la importante estructura de los fibrados principales. Podemos pensar en un fibrado principal como un producto cartesiano de una variedad en la que actúa un grupo de Lie, sobre la que existe una proyección que manda de nuevo el fibrado al espacio base. Sin embargo no es exactamente un producto cartesiano (aunque si lo será en el caso trivial) ya que el grupo de Lie está actuando de una cierta manera sobre la variedad que podemos imaginar como un "retorcimiento". Veremos también la definición de transformaciones gauge, que no son más que automorfismos de un fibrado principal que estabiliza las órbitas creadas por el grupo de Lie en el fibrado, y algunas de sus propiedades.

Y en la segunda sección veremos la idea que fundamenta la construcción de fibrados principales, ya que intuitivamente, si comocemos cómo "retuerce" el grupo de Lie una determinada variedad podremos conocer la estructura del fibrado principal. Estos "retorcimientos" son los provocados por las llamadas funciones de transición.

6.1. La estructura de Fibrado Principal

Empecemos con la definición de fibrado principal.

Definición 6.1.1. *Sea M una variedad y G un grupo de Lie. Llamaremos* ***fibrado principal*** *sobre M con grupo G a una variedad P y a una acción de G en P que satisface las siguientes condiciones:*

I. *G actúa libremente sobre P por la derecha, es decir, sea la acción por la derecha $R_g(p) = p\cdot g$ entonces para todo $p \in P$, el único elemento de G que fija a p es la identidad $e \in G$.*

II. *M es el espacio cociente de P por la relación de equivalencia inducida por G y la proyección canónica $\pi : P \to M$ es diferenciable.*

III. *P es localmente trivial, es decir, para cada punto $x \in M$, existe un entorno U tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfo a $U \times G$.*

A un fibrado principal con estas características lo denotaremos por $P(M, G, \pi)$ o símplemente $P(M, G)$ si no hay lugar a dudas con la proyección, incluso P si no necesitamos especificar el espacio base M ni la estructura de grupo G, en otras ocasiones podremos indicar toda la estructura del fibrado mediante la proyección, en este caso se denotaría por $\pi_G : P \to M$.

Definición 6.1.2. *Sea $P(M, G, \pi)$ un fibrado principal y $X \in M$. Llamaremos* ***fibra*** *de x a la subvariedad cerrada $\pi^{-1}(x) \subset P$. Si $u \in \pi^{-1}(x)$, entonces*

$$\pi^{-1}(x) = \{g \cdot u : \ g \in G\},$$

que llamaremos fibra en torno a u. Además, cada fibra es difeomorfa a G.

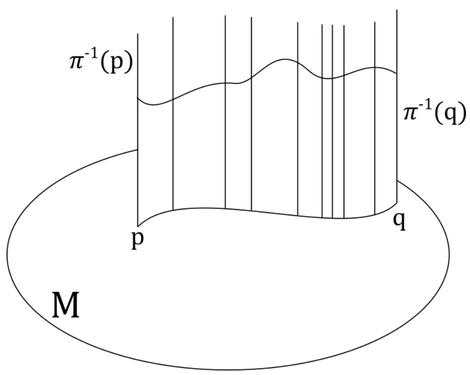

Figura 6.1: Interpretación geométrica de las fibras.

Veamos algunos ejemplos clásicos para ilustrar el concepto de fibrado.

Ejemplos

I. *El fibrado de las referencias lineales*:

Sea M una variedad de dimensión n. Una *referencia lineal* X en un punto $p \in M$ es una base ordenada $X_1, \ldots, X_n$ del espacio tangente T_pM. Llamaremos $R(M)$ el conjunto de todos las referencias lineales en todos los puntos de M y sea $\pi : R(M) \to M$ la aplición que proyecta cada referencia lineal X en p en el propio p.

Así, el grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$ actúa sobre $R(M)$ por la derecha como sigue: Si $A = A_{ij} \in GL_n(\mathbb{R})$ y $X = (X_1, \ldots, X_n)$ una referencia lineal en un punto $p \in M$. Entonces XA es, por definición, la referencia lineal $(Y_1 \ldots, Y_n)$ en p definida por

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j.$$

Es claro además que $GL_n(\mathbb{R})$ actúa libremente y que $\pi(Y) = \pi(X)$ si y sólo si $Y = XA$ para algún $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Veamos ahora como introducir una estructura diferenciable a $R(M)$. Tomemos $(x^1, \ldots, x^n)$ un sistema de coordenadas locales en un entorno coordenado U en M. Cada referencia X en $p \in U$ puede expresarse de manera única de la siguiente forma

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \quad \text{con} \quad X_i = \sum_{k=1}^{n} X_i^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

donde X_i^k es una matriz con determinante no nulo. Esto muestra que $\pi^{-1}(U)$ es una correspondencia biunívoca con $U \times GL_n(\mathbb{R})$, así, podremos crear una estructura diferenciable en $R(M)$ tomando (x^j) y (X_i^k) como sistema de coordenadas locales en $\pi^{-1}(U)$.

Es fácil ver que $R(M)(M, GL_n(\mathbb{R}), \pi)$ es un fibrado principal, al que llamaremos *fibrado de las referencias lineales sobre* M. Una referencia lineal X en $p \in M$ puede definirse como una aplicación regular de $\mathbb{R}^n$ en T_pM. Tomemos $e_1, \ldots, e_n$ la base natural de $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_i = (0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{i}, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Una referencia lineal $X = (X_1, \ldots, X_n)$ en p puede ser visto como la imagen de la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_pM \\ e_i &\longmapsto \varphi(e_i) = X_i \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Así, la acción de $GL_n(\mathbb{R})$ sobre $R(M)$ puede re-interpretarse como la composición de estas dos aplicaciones, tomando $A_{ij} \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi} & T_pM \\ e_j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{ij} e_i & & \\ & & e_i & \longmapsto & X_i \\ e_j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{ij} e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{ij} X_i. \end{array}$$

II. *El fibrado tangente y cotangente*: Sea M una variedad diferenciable, se denota el fibrado tangente a TM y el fibrado cotangente por T^*M. Sus fibras en un punto $p \in M$ son los espacios tangentes y cotangentes en dicho punto, T_pM, T_p^*M, respectivamente. Si consideramos $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema de coordenadas locales en algún entorno $U \subset M$, entonces las bases standard locales de estos fibrados son

$\{\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n\}$ para el fibrado tangente TM.

$\{\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n\}$ para el fibrado cotangente T^*M.

III. *El fibrado tensorial*: Sea T^r_s el espacio tensorial de tipo (r, s) sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. El grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$ puede ser considerado como el grupo de las transformaciones lineales del espacio T^r_s. Así obtenemos el *fibrado tensorial* $\mathcal{T}^r_s$ *de tipo* (s, r) *sobre* M haciendo a cada T^r_s una fibra. Así cada fibra de $\mathcal{T}^r_s M$ en el punto $p \in M$ puede considerarse el espacio tensorial de tipo (s, r) sobre el espacio vectorial T_pM, es decir, $T^r_s(T_pM)$.

Volvamos con algunas definiciones y propiedades más de los fibrados principales.

Definición 6.1.3. *Un homomorfismo entre fibrados principales*

$$F : P(M, G, \pi) \longrightarrow P'(M', G', \pi')$$

es un par de aplicaciones (ϕ, φ), *que cumplen las siguientes condiciones:*

I. $\phi : P \to P'$ *es diferenciable.*

II. $\varphi : G \to G'$ *es un homomorfismo de grupos de Lie.*

III. *Verifica la siguiente relación para todo* $p \in P$, $g \in G$

$$\phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot \varphi(g).$$

En estas condiciones, podemos observar que ϕ aplica la fibra $(\pi)^{-1}(p)$ de un punto $p \in M = P/G$ en la fibra de algún punto $p' \in M' = P'/G'$, de modo que se puede definir una aplicación diferenciable $\tilde{\phi} : M \to M'$ entre las variedades base de modo que haga el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & P & \xrightarrow{\phi} & P' & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi' \\ & M & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & M' & \end{array} \tag{6.1}$$

Así, si fijamos la variedad base M y el grupo estructural G, la descomposición de homomorfismo de fibrados es otro homomorfismo, de forma que podemos hablar de la categoría de fibrados principales que fibran sobre una variedad M con un cierto grupo de Lie G actuando sobre ella.

Definición 6.1.4. *Un automorfismo de un fibrado principal*

$$F : P(M, G, \pi) \longrightarrow P(M, G, \pi)$$

es un par de aplicaciones (ϕ, φ), *que cumplen las siguientes condiciones:*

I. $\phi : P \to P$ *es difeomorfismo.*

II. $\varphi : G \to G$ *es la identidad.*

III. *Verifica la siguiente relación para todo* $p \in P$, $g \in G$

$$\phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot g.$$

Así, el conjunto de todos los automorfismos de P forman un grupo bajo la composición de aplicaciones que será denotado (como habitualmente los automorfismos en espacios vectoriales) por $\mathrm{Aut}(P)$.

Definición 6.1.5. *Sea $f \in Aut(P)$, diremos que f es una* ***transformación gauge*** *si además estabiliza cada órbita por G en P, es decir, para cada $p \in P$, los puntos p y $f(p)$ están en la misma órbita por G. El conjunto de todas las transformaciones gauge es un subgrupo del grupo de automorfismos, $Gau(P) \subset Aut(P)$, llamado grupo gauge del fibrado $P(M,G)$.*

Proposición 6.1.1. *Denotemos por $C(P,G)$ el conjunto de las aplicaciones diferenciables $\tau : P \to G$ que son automorfas para la inversa de la operación adjunta, es decir, que verifican*

$$\tau(p \cdot g) = a_{g^{-1}}(\tau(p)) = g^{-1} \cdot \tau(p) \cdot g.$$

Entonces $Gau(P)$ es isomorfo a $C(P,G)$.

Demostración. Sea $\tau \in C(P,G)$, definamos la aplicación $f(p) = p \cdot \tau(p)$, entonces

$$\begin{aligned} f(p \cdot g) &= p \cdot g \cdot \tau(p \cdot g) = p \cdot g \cdot a_{g^{-1}}(\tau(p)) \\ &= p \cdot g \cdot g^{-1} \cdot \tau(p) \cdot g = p \cdot \tau(p) \cdot g \\ &= f(p) \cdot g \end{aligned}$$

y así, tanto p como $f(p)$ están en la misma órbita por G y entonces $f \in \mathrm{Gau}(P)$.

Por otro lado, si $f \in \mathrm{Gau}(P)$ definamos $\tau : P \to G$ dada por la relación $f(p) = p \cdot \tau(p)$. Entonces

$$f(p \cdot g) = p \cdot g \cdot \tau(p \cdot g)$$

y

$$f(p) \cdot g = p \cdot \tau(p) \cdot g$$

pero como están en la misma órbita por ser f gauge y la actuación es libre, se tiene que

$$\begin{aligned} p \cdot g \cdot \tau(p \cdot g) &= p \cdot \tau(p) \cdot g \\ g \cdot \tau(p \cdot g) &= \tau(p) \cdot g \\ \tau(p \cdot g) &= g^{-1} \cdot \tau(p) \cdot g \end{aligned}$$

y así $\tau \in C(P,G)$. □

Definiciones 6.1.1.

I. *Sea $P(M,G)$ un fibrado principal, diremos $Q(N,H)$ es un subfibrado principal si $N \subset M$ es una subvariedad y $H \subset G$ es un subgrupo de Lie.*

II. *Llamaremos reducción de un fibrado principal* $P(M, G, \pi)$ *a un subfibrado* $Q(N, H, \pi')$ *de forma que la aplicación inducida* $\tilde{\phi} : M \to N$ *es la identidad, es decir, se tiene el siguiente diagrama obtenido a partir del diagrama (6.1)*

$$\begin{array}{ccccc} & P & \xrightarrow{\phi} & Q & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi' \\ & M & \xrightarrow{\tilde{\phi}=id} & N & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & Q \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & M = N & \end{array}$$

III. *El fibrado trivial sobre la variedad base* M *con grupo estructural* G *es* $P = M \times G$ *mediante la operación*

$$(m, g) \cdot h = (m, g \cdot h)$$

para $h \in G$.

Proposición 6.1.2. *Sea* $\tilde{\phi} : M \to M'$ *un homomorfismo de variedades diferenciables y* $P'(M', G', \pi')$ *un fibrado principal. Sobre el producto fibrado* $M \times_{M'} P'$ *el grupo* G' *opera mediante la siguiente fórmula:*

$$(m, p') \cdot g' = (m, p' \cdot g'),$$

y dota a P *de estructura de fibrado principal con la proyección canónica* $\pi : P \to M$*, de modo que* $\tilde{\phi}$ *es el homomorfismo inducido en las variedades base por la aplicación* $\phi : P \to P'$ *como indica el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} P & = & M \times_{M'} P' & \xrightarrow{\phi} & P' \\ & & \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ & & M & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & M' \end{array}$$

El fibrado P *recibe el nombre de fibrado inducido por* $\tilde{\phi}$ *a partir de* P' *y se denota por* $\tilde{\phi}^* P'$*. Más aún, en el caso en que* $f : U \hookrightarrow M'$ *sea la inclusión de un abierto de* M'*, entonces* $\tilde{\phi}^* P'$ *lo denotaremos por* P'_U*.*

Demostración. La acción de G' sobre $M \times_{M'} P'$ es libre, ya que

$$(m, p') \cdot g' = (m, p' \cdot g') = (m, p') \Longrightarrow g' = e$$

ya que G' actúa libremente en P. El cociente de $M \times_{M'} P'$ sobre G' existe y es igual a M', en efecto, la proyección canónica $\pi : M \times_{M'} P' \to M$ es una proyección regular, pues si $s' : U \to P'$ es una sección local de π', la aplicación $s : \tilde{f}^{-1}(U) \to M \times_{M'} P'$ tal que $s(m) = (m, s(\tilde{f}(m)))$ es una sección de π y sus fibras son las órbitas de G' en P. De hecho, $\pi^{-1}(m) = (m, g' \cdot G')$, donde m es cualquier elemento de la fibra de $\tilde{f}(m)$ por π'.

Así pues, $P/G' = M$ y la proyección canónica de P sobre P/G' se puede identificar con π. $\square$

Proposición 6.1.3. *Denotemos con Dif*(M, G) *el conjunto de aplicaciones diferenciables de* M *en* G *y con Dif*(M) *al conjunto de difeomorfismos de* M*. Entonces:*

I. *Gau*$(M \times G) =$ *Dif*(M, G).

II. *Aut*$(M \times G) =$ *Dif*$(M) \times$ *Dif*(M, G).

Demostración.

I. Sea $f \in \mathrm{Gau}(M \times G)$ y sea $p = (m, g)$ un elemento arbitrario del fibrado trivial $P = M \times G$. Dado que
$$f(p) = f(m, g) = f((m, e) \cdot g) = (f(m, e)) \cdot g$$
basta calcular el valor de f sobre los elementos de la forma (m, e). Ahora bien, como (m, e) y $f(m, e)$ deben estar en la misma órbita por G tendremos
$$f(m, e) = (m, g_m)$$
para un cierto $g_m \in G$. Definiendo $\psi : M \to G$ como $\psi(m) = g_m$ se tiene que la transformación gauge de partida es $f = Id \times L_\psi$.

II. Sea ahora $f \in \mathrm{Aut}(M \times G)$, como en el caso anterior, nos bastará calcular el valor de f en los puntos de la forma (m, e). Así, por definición de automorfismo de fibrados, existe $\tilde{f} \in \mathrm{Dif}(M)$ tal que $f(m, e) = (\tilde{f}(m), g_m)$ y por tanto, podremos escribir
$$f(m, g) = (\tilde{f}(m), \psi(m)g)$$
sobre cualquier punto (m, g) del fibrado trivial, y por tanto, $f = \tilde{f} \times L_\psi$, y se concluye.

□

Proposición 6.1.4. *La condición necesaria y suficiente para que un fibrado principal sea trivial es que admita una sección global.*

Demostración. Como $\pi : P \to P/G$ es una proyección regular, cada $m_0 \in M$ tiene una sección global $s : M \to P$ de π. Sea ahora
$$f : M \times G \to \pi^{-1}(U)$$
la aplicación definida por $f(m, g) = s(m) \cdot g$. Esta aplicación es un homomorfismo de fibrados pricipales, ya que
$$f((m, g) \cdot h) = f(m, g \cdot h) = s(m) \cdot gh = f(m, g) \cdot h.$$
Además es biyectiva y su inversa es
$$f^{-1}(p) = (\pi(p), g)$$
donde g es el único elemento de G tal que $s(\pi(p)) \cdot g = p$ para $p \in \pi^{-1}(U)$. □

Así, las teoreías Guage estudian qué propiedades geométricas son invariantes bajo las transformaciones Gauge. Un estudio más profundo y detallado para lectores interesados en las teorías y transformaciones Gauge puede encontrarse en [Zeid].

6.2. Construcción de fibrados principales

Una vez vista la estructura de los fibrados principales, el objetivo de esta sección es la construcción de un cierto tipo de fibrado principal de manera que podamos reducirlo a un subgrupo de Lie del grupo estructural. La idea es la siguiente.

Dado $P(M, G, \pi)$ un fibrado principal, tomemos un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de M sobre el cual π trivializa. Así pues, para cada abierto U_α podemos elegir un isomorfismo con el fibrado trivial

$$\begin{aligned} f_\alpha : P_{U_\alpha} &\longrightarrow U_\alpha \times G \\ u &\longmapsto f_\alpha(u) = (\pi(u), \phi_\alpha(u)) \end{aligned}$$

para cierta aplicación $\phi_\alpha : P_{U_\alpha} \to G$ que verifique $\phi_\alpha(ug) = \phi_\alpha(u)g$. Si $f_\beta : P_{U_\beta} \to U_\beta \times G$ es la trivialización correspondiente a otro abierto U_β, sobre $P_{U_\alpha \cap U_\beta}$ coinciden ambas aplicaciones de la siguiente forma

$$\phi_\beta(ug)\phi_\alpha(ug)^{-1} = \phi_\beta(u)g(\phi_\alpha(u)g)^{-1} = \phi_\beta(u)\phi_\alpha(u)^{-1}.$$

Con ello observamos que el valor de $\phi_\beta(u)\phi_\alpha(u)^{-1}$ sólo depende de $\pi(u)$ y no del representante elegido en su fibra, de modo que puede definirse la aplicación

$$\begin{aligned} \psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta &\longmapsto G \\ x &\longmapsto \psi_{\beta\alpha}(x) = \phi_\beta(u)\phi_\alpha(u)^{-1} \end{aligned}$$

con $x = \pi(u)$.

Podemos observar entonces que las funciones $\{\psi_{\gamma\alpha}\}$ verifican la condición

$$\psi_{\gamma\alpha} = \psi_{\gamma\beta} \circ \psi_{\beta\alpha} \tag{6.2}$$

sobre $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Estas funciones reciben el nombre de **funciones de transición** de la trivialización $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ y la condición (6.2) es llamada condición de **cociclo**.

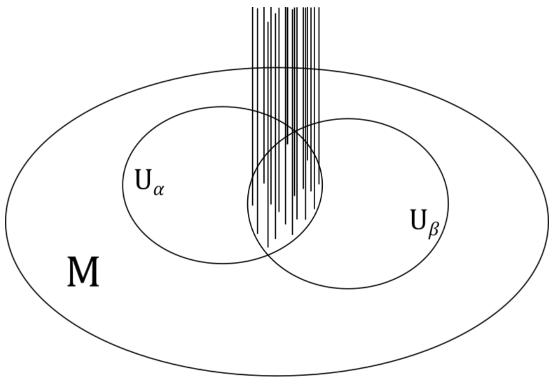

Figura 6.2: Las funciones de transición nos permiten mantener la estructura diferenciable en las intersecciones de dos entornos.

En ocasiones es conveniente utilizar secciones de un fibrado principal que acompañan a una trivialización dada. Así, para cada abierto U_α de la trivialización, definiremos una sección $s_\alpha : U_\alpha \to P$ del fibrado P dada por la siguiente fórmula

$$s_\alpha(x) = f_\alpha^{-1}(x, e)$$

donde e es, como viene siendo habitual, el elemento neutro del grupo estructural G. Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, se tiene que $s_\beta(x) = s_\alpha(x) \cdot g$, para un único $g \in G$. Por tanto

$$\phi_\alpha(s_\beta(x)) = \phi_\alpha(s_\alpha(x) \cdot g) = \phi_\alpha(s_\alpha(x)) \cdot g,$$

luego

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \phi(s_\beta(x))\phi_\alpha^{-1}(s_\beta(x)) = g^{-1}.$$

Así, finalmente

$$s_\beta = s_\alpha \psi_{\alpha\beta}$$

en $U_\alpha \cap U_\beta$. Los dos siguientes teoremas enuncian la existencia de un fibrado principal que sea trivial con unas condiciones dadas, y la condición necesaria para que podamos reducir un fibrado a un cierto subgrupo. Sus demostraciones pueden encontrarse en [Kov-Nom, I.5, Proposition 5.2] y en [Kov-Nom, I.5, Proposition 5.3], respectivamente.

Teorema 6.2.1. *Sea M una variedad diferenciable y $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ funciones diferenciables definidas sobre las intersecciones binarias de un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de M que verifica las condiciones de cociclo. Entonces existe un fibrado principal $P(M, G, \pi)$ que trivializa sobre $\{U_\alpha\}$ y que admite como funciones de transición las funciones $\psi_{\beta\alpha}$.*

Proposición 6.2.1. *Sea $P(M, G, \pi)$ un fibrado principal y H un subgrupo de Lie de su grupo estructural G. La condición necesaria y suficiente para que $P(M, G, \pi)$ admita una reducción con grupo estructural H es que posea un sistema de funciones de transición $\psi_{\beta\alpha}$ que tomen valores en H.*

Capítulo 7

Teoría de conexiones

7.1. Conexiones en fibrados principales

Dado un fibrado principal $\pi_G : P \to M$, denotemos por $V(P) \subset TP$ al fibrado vertical. Si tomamos una base $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ de $\mathfrak{g}$ entonces para cada $u \in P$ se tiene que $V_u(P) = \langle A_1^*(u), \ldots, A_n^*(u) \rangle$ y por tanto $A_1^*, \ldots, A_n^*$ es una base global de $V(P)$.

Definición 7.1.1. *Se llama **conexión** en un fibrado principal $\pi_G : P \to M$ a una distribución diferenciable $\mathcal{H}$ de campos sobre P tal que para cada punto $u \in P$, el subespacio de $H_u(P) \subset T_uP$ verifica:*

I. $T_uP = V_u(P) \oplus H_u(P)$.

II. *Para cada $u \in P$ y cada $g \in G$, para la traslación por la derecha $R_g(u) = ug$, el espacio $H_u(P)$ cumple $H_{ug}(P) = R_{*,g}(H_u(P))$.*

*A los espacios vectoriales $V_u(P)$ y $H_u(P)$ que cumplan esta descomposición los llamaremos **subespacio vertical** y **subespacio horizontal**, respectivamente, de T_uP, respecto a la conexión $\mathcal{H}$.*

De esta manera, todo vector $X_u \in T_uP$ puede escribirse de manera única como

$$X_u = X_u^v + X_u^h, \quad X_V \in V_u \subset T_uP, \; X_H \in H_u \subset T_uP.$$

Además, diremos que X_u es vertical en P si en su descomposición la componente horizontal es nula, es decir, $X_u \in V_u(P)$; y diremos que X_u es horizontal en P si en su descomposición la componente vertical es nula, es decir, $X_u \in H_u(P)$.

Definición 7.1.2. *Diremos que un campo D sobre P es π_G-**proyectable** si transforma el anillo $\pi^* C^\infty(M)$ de funciones diferenciables constantes a lo largo de la fibra en sí mismo, es decir si $D_{u\cdot g}(f\circ\pi) = D_u(f\circ\pi)$ para toda $f\in C^\infty(M)$, más aún, si $\pi_*(D_{ug}) = \pi_*(D_u)$.*

Proposición 7.1.1. *Un campo horizontal D es π-proyectable si y sólo si es G-invariante.*

Demostración. Si D es G-invariante, entonces $R_{*,g}(D_u) = D_{u\cdot g}$, luego

$$\pi_*(D_{ug}) = \pi_*(R_{*,g}(D_u)) = (\pi\circ R)_*(D_u) = \pi_*(D_u).$$

Recíprocamente, si D es π_G-proyectable entonces $\pi_*(D_{ug}) = \pi_*(D_u)$ y como $\pi\circ R_{g^{-1}} = \pi$, entonces $\pi_*(D_{ug}) = (\pi\circ R_{g^{-1}})_*(D_{ug}) = \pi_*(D_u)$. Luego $R_{*,g^{-1}}(D_{ug}) - D_u$ es un campo horizontal y vertical, por tanto es nulo y D es G-invariante. □

Proposición 7.1.2. *Dada una conexión $\mathcal{H}$ sobre el fibrado principal $\pi_G : P\to M$, para cada campo D sobre M existe un único campo horizontal G-invariante D^* sobre P, denominado levantamiento horizontal de D, tal que $(\pi_G)_*(D^*) = D$. Además tiene las siguientes propiedades:*

I. *Si D y E son dos campos sobre M, entonces $D^* + E^*$ es el levantamiento horizontal de $D+E$.*

II. *Para cada función f sobre M, $f^*\cdot D^*$ es el levantamiento horizontal de fD, donde f^* es la función sobre P definida por $f^* = f\circ\pi$.*

III. *El levantamiento horizontal del campo $[D,E]$ es la componente horizontal de $[D^*,E^*]$.*

Demostración. Probemos en primer lugar que existe un campo π_G-proyectable $\bar{D}$ sobre P cuya proyección es D. Es evidente en el caso en que P sea trivial. Veamos el caso más complejo en el que no lo sea. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto de M trivializante para P. Sea D_i un campo de $\pi^{-1}(U_i)$ proyectable sobre U_i cuya proyección sea $D|_{U_i}$. Si $\{\phi_i\}$ es una partición de M asociada al recubrimiento $\{U_i\}$, el campo

$$\bar{D} = \sum_i (\phi_i\circ\pi) D_i$$

está globalmente definido, porque *sop*$(\phi_i\circ\pi)\subset\pi^{-1}(U_i)$, es π-proyectable, porque es suma localmente finita de campos π-proyectables, y su proyección es D. Ahora basta definir D^* como la componente horizontal de $\bar{D}$, es decir, $\bar{D}^h$.

I. Para probar la primera propiedad basta tener en cuenta que con el mismo recubrimiento abierto y la misma partición asociada,

$$\overline{D+E} = \sum_i(\phi_i\circ\pi)(D_i+E_i) = \sum_i(\phi_i\circ\pi)D_i + \sum_i(\phi_i\circ\pi)E_i = \bar{D}+\bar{E}$$

y por tanto la componente horizontal será

$$(D+E)^* = \overline{D+E}^h = (\bar{D}+\bar{E})^h = \bar{D}^h + \bar{E}^h = D^* + E^*.$$

II. Con los mismos argumentos,

$$\overline{(f\circ\pi)D}^h = \sum_i (\phi_i \circ f \circ \pi) D_i = (f\circ\pi)^* \cdot D^* = f^* \cdot D^*.$$

III. Puesto que $[D^*, E^*]$ es π_G-proyectable, entonces $[D^*, E^*]^h$ también lo es y por la proposición (7.1.1) es G-invariante y su π_G-proyección es $[D, E]$.

□

7.2. Formas de conexión y curvatura

Definición 7.2.1. *Sea $\mathcal{H}$ una conexión sobre el fibrado principal $\pi_G : P \to M$. Hemos visto que para cada $u \in P$, la aplicación*

$$\begin{aligned} \cdot^* : \mathfrak{g} &\longrightarrow V_u(P) \\ A &\longmapsto A_u^* \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal. De esta manera definimos una 1-forma ω sobre P con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como sigue: Dado $D_u \in T_uP$ existe un único elemento $A \in \mathfrak{g}$ tal que la componente vertical de D_u es A_u^*, así definimos $\omega(D_u) = A$. Es claro que $\omega(D_u) = 0$ si y sólo si D_u es horizontal.

Veamos algunas propiedades de esta 1-forma.

Proposición 7.2.1. *La forma de conexión verifica las siguientes propiedades:*

I. $\omega(A^*) = A$ *para todo* $A \in \mathfrak{g}$.

II. $R_g^*(\omega) = Ad_{g^{-1}} \circ \omega$, *esto es*

$$\omega(R_{*,g}(D_u)) = Ad_{g^{-1}}(\omega(D_u))$$

para todo $D_u \in T_uP$. Además, dada una forma de conexión que satisfaga estas dos propiedades, es posible encontrar una única conexión cuya forma de conexión sea la dada.

Demostración. La primera de las propiedades se sigue directamente de la definición de ω. Para la segunda, podemos distinguir los casos en que D_u se horizontal o vertical:

- Si D_u es horizontal, $R_{*,g}(D_u)$ también lo es y, por tanto

$$R_g^*(\omega(D_u)) = \omega_{ug}(R_{*,g}(D_U)) = 0$$

y por otro lado

$$\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega(D_u)) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(0) = 0.$$

- Si D_u es vertical, entonces $D_u = A_u^*$ para algún $A \in \mathfrak{g}$. Así,

$$\begin{aligned} R_g^*(\omega(D_u)) &= \omega_{ug}(R_{*,g}(D_u)) = \omega(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(A_{ug}^*)) \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(A) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega(D_u)). \end{aligned}$$

Recíprocamente para una 1-forma ω dada, se define

$$H_u = \{D_u \in T_uP : \ \omega(D_u) = 0\}.$$

Por la primera condición es claro que $T_uP = V_u(P) \oplus H_u$. Además, si $D_u \in H_u$ se tiene

$$\omega_{ug}(R_{*,g}(D_u)) = R_g^*(\omega(D_u)) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega(D_u)) = 0$$

y por tanto $R_{*,g}H_u = H_{ug}$. Es decir, existe alguna conexión cuya forma de conexión sea la ω dada. □

Definición 7.2.2. *Se llama **forma de curvatura** de una conexión $\mathcal{H}$ a la 2-forma sobre P con valores en $\mathfrak{g}$ definida por*

$$\begin{aligned} \Omega : T_uP \times T_uP &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ X, Y &\longmapsto \Omega(X,Y) = d\omega(X^h, Y^h) \end{aligned}$$

donde ω es la forma de conexión de $\mathcal{H}$.

Lema 7.2.1. *Si D es horizontal, entonces $[D, A^*]$ también es horizontal para cualquier $A \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Por definición del corchete de Lie tenemos

$$[D, A^*] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(R_{*,\exp(tA)}D - D).$$

Ahora bien si D es horizontal también lo en $R_{*,g}(D)$ para todo $g \in G$, porque el módulo de campos horizontales, por definición, es invariante por traslaciones a la derecha. Luego $R_{*,\exp(tA)}D - D$ también es horizontal y por el paso al límite tenemos lo buscado. □

Teorema 7.2.1 (Ecuaciones de estructura).

La forma de curvatura de la definición anterior verifica

$$d\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X,Y)$$

$X, Y \in T_uP$, $u \in P$.

Demostración. Como los dos miembros de la igualdad dependen bilinealmente y hemisimétrica para X e Y, basta probar la fórmula en los casos en que los campos sean horizontales, sean verticales o uno de ellos sea vertical y el otro horizontal, puesto que cualquier otro campo será combinación lineal de estos resultados:

- Si X e Y son campos horizontales. En esta situación $\omega(X) = 0 = \omega(Y)$ y por tanto la propia definición de Ω verifica la fórmula.

- Si X e Y son verticales. En este caso, podremos escribir $X = A_1^*$ e $Y = A_2^*$ para algún campo $A_1, A_2 \in \mathfrak{g}$. Así

$$\begin{aligned} 2d\omega(X,Y) &= X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) = A_1^*A_2 - A_2^*A_1 - \omega([A_1^*, A_2^*]) \\ &= -\omega([A_1, A_2]^*) = -[A_1, A_2] = -[\omega(A_1^*), \omega(A_2^*)] = -[\omega(X), \omega(Y)]. \end{aligned}$$

  Además,
$$\Omega(X,Y) = d\omega(X^h, Y^h) = 0$$
  por ser campos verticales. De donde se deduce la fórmula buscada.

- Si X es horizontal e Y vertical. Tomemos como antes $Y = A^*$ para algún $A \in \mathfrak{g}$, por tanto

$$2d\omega(X,Y) = XA - A^*\omega(X) - \omega([X, A^*]) = -\omega([X, A^*]) \overset{\text{lema } (7{,}2{,}1)}{=} 0.$$

  Por otra parte se tiene

$$-[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X,Y) = -[0, \omega(Y)] + d\omega(X, 0) = 0.$$

□

Corolario 7.2.1 (**Identidad de Bianchi para una conexión sobre un fibrado principal**).

La forma de curvatura definida anteriormente verifica la siguiente relación

$$d\Omega(X^h, Y^h, Z^h) = 0$$

para todo sistema de campos vectoriales X, Y, Z sobre P.

Demostración. Sea $(A_1, \ldots, A_r)$ una base de $\mathfrak{g}$. La forma de conexión se expresará en la forma $\omega = \sum_{i=1}^r \omega_i \otimes A_i$ para ciertas 1-formas $\omega_1, \ldots \omega_r$. Análogamente, escribiremos la 2-forma de curvatura como $\Omega = \sum_{i=1}^r \Omega_i \otimes A_i$. Entonces, conviniendo que $[\omega, \omega] = \omega \wedge \omega$, podemos escribir la ecuación de estructura como

$$\begin{aligned} d\omega = \sum_{k=1}^r d\omega_k \otimes A_k &= -\sum_{i,j=1}^r [\omega_i \otimes A_i, \omega_j \otimes A_j] + \sum_{k=1}^r \Omega_k \otimes A_k \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i<j}^r \omega_i \wedge \omega_j \otimes [A_i, A_j] + \sum_{k=1}^r \Omega_k \otimes A_k \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i<j}^r c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j \right) \otimes A_k + \sum_{k=1}^r \Omega_k \otimes A_k. \end{aligned}$$

Esto es

$$d\omega_k = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i<j}^r c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j \right) + \Omega_k.$$

Diferenciando ahora obtenemos

$$0 = d^2\omega_k = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i<j}^{r} c_{ij}^k d\omega_i \wedge \omega_j\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i<j}^{r} c_{ij}^k \omega_i \wedge d\omega_j\right) + d\Omega_k.$$

Como ω_i se anula sobre los campos horizontales, aplicando la igualdad anterior a X^h, Y^h, Z^h obtenemos la relación buscada. $\square$

Bibliografía

[Arv] Andreas Arvanitoyeorgos, *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, American Mathematical Society, 1999.

[Egu-Gil-Han] Tohru Eguchi, Peter B. Gilkey, Andrew J. Hanson, *Gravitation, gauge theories and differential geometry*, Physics Reports, Volume 66, Issue 6, 1980, Pages 213-393.

[Hel] Sigurdur Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[Jac] Nathan Jacobson, *Lie Algebra*, Dover Publications, Inc. New York, 1962.

[Kov-Nom] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry, vol I*, John Wiley & Sons, New York, 1963.

[Lee] John M. Lee, *An introduction to smooth manifolds*, University of Washington Departament of Mathematics.

[Lib-Mar] Paulette Libermann and Charles-Michel Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[Lóp] Francisco J. López, *Introducción a la Geometría Diferencial. Teoría de Grupos de Lie*, UGR.

[Spiv] Michael Spivak, *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Vol.I, Second edition, Publish or Perish, Inc. Wilmington, Del. 1979.

[Tapp] Kristpher Tapp, *Matrix Groups for Undergraduates*, Student mathematical, Vol.29, American Mathematical Society.

[Tu] Loring W. Tu, *An introduction to manifolds*, Springer.

[Var] V.S.Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and Their Representations*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[WAR] FRANK W. WARNER, *Foundations of diferentiable manifolds and Lie groups*, SPRINGER-VERLAG, NEW YORK, 1983.

[ZEID] EBERHAND ZEIDLER. *Quantum field theory. III. Gauge theory. A bridge between mathematicians and physicists.*, SPRINGER, HEIDELBERG, 2011.