LA ECUACIÓN FUNCIONAL DE FRÉCHET

Khader Faiez Abu-Helaiel Jadallah

Universidad Nacional de Educación a Distancia
Facultad de Ciencias
Sección de Apoyo a la Docencia y a la Investigación
Negociado de Posgrados - Tercer Ciclo

La Ecuación Funcional De Fréchet

Trabajo Fin de Máster. Matemáticas Avanzadas
Especialidad: **Análisis Matemático**

Khader Faiez Abu-Helaiel Jadallah
Tutor del TFM: **Prof. Dr. José Mª Almira Picazo**

Linares, 29 de junio de 2011

La Ecuación Funcional De Fréchet

Trabajo Fin de Máster

Presentado a la Facultad de Ciencias, UNED.
Sección de Apoyo a la Docencia y a la Investigación
Negociado de Posgrados - Tercer Ciclo
Paseo Senda Del Rey, 9
28040 Madrid

Por

Khader Faiez Abu-Helaiel Jadallah

Para optar al Título de

Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas
Especialidad: **Análisis Matemático**

Realizado bajo la dirección del profesor
Dr. José Mª Almira Picazo
Departamento de Matemáticas
Universidad de Jaén

Madrid, 7 de junio de 2011. **España**

HONORABLE TRIBUNAL

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de Educación a Distancia, presento a su consideración mi trabajo Fin de Máster titulado:

La Ecuación Funcional De Fréchet

tema que me fuera asignado por la Comisión de Máster de Matemáticas Avanzadas de la Facultad de Ciencias de acuerdo con la normativa que regula los trabajos de Fin de Máster de la UNED, con fecha 15 de Marzo de 2011.

Miembros del Tribunal

- **Dr. Alberto Borobia Vizmanos. (Uned)**
- **Dra. Beatriz Hernando Boto. (Uned)**
- **Dr. José Leandro María Gonzalez. (Uned)**
- **Dr. José María Almira Picazo. (Ujaén)**

Madrid, 7 de junio de 2011

Khader Faiez Abu-Helaiel Jadallah

Visto Bueno

Art. 6. 2 y 3 DEL REGLAMENTO (Aprobado en Consejo de Gobierno de 24 de junio de 2008)

D. José Mª Almira Picazo, como tutor del estudiante **D. Khader Faiez Abu-Helaiel Jadallah** del Máster en Matemáticas Avanzadas de la Facultad de Ciencias, considero que el Trabajo de Fin de Máster

La Ecuación Funcional De Fréchet

está concluido y doy el visto bueno para su defensa pública.

Madrid, 6 de junio de 2001

Tutor: José María Almira Picazo

Sección de Apoyo a la Docencia y a la Investigación
Negociado de Posgrados-Tercer Ciclo
PASEO SENDA DEL REY, 9
28040 MADRID

Dedicatoria

A mi Mujer **Josefa** y mis Hijos: **Ramzy, Faiez y Nabilah**.
Son mi apoyo.
A mi Padre **Faiez** y mi Madre **Widad**.
Sin ellos no hay metas que puedan alcanzarse.

Agradecimientos

Deseo agradecer a mi tutor el Profesor **Dr. José María Almira Picazo** del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén, el apoyo incondicional que he recibido de él durante todo el tiempo que ha durado esta investigación. Este trabajo no habría sido posible sin su apoyo.

Además, quiero agradecer a todos los miembros de la Sección de Apoyo a la Docencia y a la Investigación de la UNED así, como el Negociado de Posgrados de Tercer Ciclo y sobre todo al Coordinador del Máster de Matemáticas Avanzadas, el Profesor **Dr. Alberto Borobia Vizmanos**.

Finalmente, no olvidaré a mis profesores del Máster: **Dra. Beatriz Hernando Boto**, **Dr. Arturo Fernandez Arias** y **Dr. Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo.**

Índice general

Resumen

Pretendemos estudiar las soluciones de la ecuación en diferencias progresivas de orden superior y tamaño de paso fijo $h > 0$:

$$\Delta_h^{n+1} f(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} f(x+ih) = 0 \tag{1}$$

El estudio de este tipo de ecuaciones funcionales tiene su origen en un artículo de 1909 del conocido matemático francés Maurice Fréchet, que estudió una ecuación en diferencias progresivas con paso variable y se sirvió de ésta para caracterizar los polinomios ordinarios como las únicas soluciones continuas de su ecuación. De hecho, es bien conocido que las soluciones continuas de $\Delta^{n+1}(f) \equiv 0$ son los polinomios $p \in \mathbb{P}_n$.

M. A. Mckiernan [26] demostró que cualquier solución de (1) es de la forma:

$$f(x) = A^0 + A^1(x) + A^2(x) + \cdots + A^n(x) = \sum_{k=0}^{n} A^k(x) \tag{2}$$

donde A^0 es una constante y $A^k(x) = A_k(x, x, \ldots, x)$, $k = 1, \ldots, n$ son las diagonales en x de ciertas funciones simétricas y multiaditivas $A_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Llamamos polinomio a toda función de la forma (2).

Por otra parte Z. Ciesielski [15] ha demostrado que, cualquier solución de la inecuación funcional:

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \geq 0, \quad \forall\, x, h \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

si está acotada en algún conjunto Γ medible-Lebesgue de medida positiva, entonces es continua en toda la recta real.

Se deduce que las soluciones de (1) que no son polinomios son no acotadas en cada conjunto de medida de Lebesgue positiva, por lo que tienen oscilaciones enormes.

Se desprende también que los documentos mencionados dan una buena respuesta a la pregunta:

¿cuando las soluciones de la ecuación funcional de Fréchet son polinomios? (en sentido ordinario)

pero no dan ninguna descripción del grafo de las soluciones discontinuas de esta ecuación funcional. Además algunas de las pruebas implican resultados técnicos de teoría de la medida. Luego, no son elementales. Así pues, nuestra tarea consistirá en:

- Dar una prueba del teorema de Fréchet que no implique el uso de la teoría de la medida. Mas precisamente, vamos a probar que cualquier solución de $\Delta_h^{n+1} f(x) = 0$ que sea continua en un punto o acotada en algún intervalo de interior no vacío, es un polinomio de grado $\leq n$.

- Como consecuencia de la técnica desarrollada para nuestra prueba del teorema de Fréchet, daremos una descripción de la clausura del grafo de f de las soluciones arbitrarias de $\Delta_h^{n+1}(f) \equiv 0$. En particular, tenemos que demostrar que:

$$\overline{graf\,\{f\}}^{\mathbb{R}^2} = \overline{\{(x,y) : x \in \mathbb{R}\,, y = f(x) \in \mathbb{R}\}}^{\mathbb{R}^2} \tag{4}$$

  contiene un conjunto abierto no acotado del plano.

▲ Para poder abordar los puntos anteriores de modo que esta memoria sea autocontenida y esté bien fundada y motivada, realizaremos en los primeros capítulos de la misma una breve excursión por el mundo de las ecuaciones funcionales, haciendo especial hincapié en los resultados más clásicos de la teoría, los cuales contienen las diferentes ecuaciones funcionales tratadas por Cauchy en su " Curso de Análisis " de 1821, así como la propia ecuación de Fréchet y alguna de sus generalizaciones.

Tendremos especial cuidado en el tratamiento de los llamados teoremas de regularidad, de los cuales el teorema de Darboux es un ejemplo paradigmático, y en el estudio de la clausura del grafo de las soluciones no regulares de las ecuaciones funcionales que tratemos.

Introducción

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice aditiva si es solución de la ecuación funcional:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Esta ecuación fue estudiada por primera vez por **A. M. Legendre** en 1791 y **C. F. Gauss** en 1809, pero el primer resultado importante sobre las soluciones de (5) fue la demostración, incluida por **A. L. Cauchy** en su famoso " Cours D'Analysé " (1821) [14], de que las únicas funciones continuas y aditivas que existen son las aplicaciones lineales

$$f(x) = c\,x, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Desde entonces, (5) se conoce como **ecuación funcional de Cauchy**. Posteriormente, **G. Darboux** (1875) [17] demostró que la continuidad en un sólo punto o la acotación uniforme en algún intervalo no vacío son también condiciones suficientes para garantizar que una función aditiva debe ser lineal. Otro importante resultado es que, cuando es aditiva y no continua, la clausura del grafo de f es todo el plano. La ecuación funcional de Cauchy es importante también porque fue estudiando las soluciones de la misma que se introdujo el concepto de base de Hamel de un espacio de Banach [22], [26].

En 1909, **M. Fréchet** [18] estudió una importante generalización de la ecuación de Cauchy, mediante la cual fue capaz de caracterizar los polinomios. De hecho, se puede considerar que sus resultados son el origen de la teoría de polinomios en espacios de Banach [19]. Por tanto, la ecuación funcional de Fréchet tiene también especial relevancia en la historia del Análisis Funcional. Para la ecuación de Fréchet se conoce, desde hace mucho tiempo, la validez de un teorema análogo al de Darboux para la ecuación de Cauchy [20], [21]. Sin embargo hasta hace relativamente poco tiempo [7], no se había dicho nada sobre la clausura del grafo de las soluciones discontinuas de la ecuación de Fréchet.

En esta memoria se realiza una breve introducción a las ecuaciones funcionales [1], [4], explicando las motivaciones principales de dicha teoría, desde la ecuación funcional de Cauchy y las hipótesis de Darboux, hasta la ecuación funcional de Fréchet y un trabajo de síntesis sobre los artículos [7], [18] y parte de la monografía [16] redactando todos los detalles de las demostraciones.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conjuntos Ordenados

Definición 1.1.1. *Una relación binaria sobre un conjunto* $\mathbf{X}$ *es un subconjunto no vacío* $\mathcal{R}$ *de* $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

Definición 1.1.2. *La relación binaria* $\mathcal{R}$ *se dice que es un orden parcial si ella es*

- *reflexiva:* $(x, x) \in \mathcal{R}\ \forall\, x \in \mathbf{X}$,
- *antisimétrica: si* (x, y) *y* (y, x) *están en* $\mathcal{R}$, *entonces* $x = y$,
- *transitiva: si* (x, y) *y* (y, z) *están en* $\mathcal{R}$, *entonces* $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Escribiremos $\leq$ para denotar un orden parcial sobre $\mathbf{X}$. Un conjunto $\mathbf{X}$ equipado con un orden parcial $\leq$ es llamado un conjunto parcialmente ordenado y denotado por $(\mathbf{X}, \leq)$.

Definición 1.1.3. *Dos elementos* x, y *en un conjunto parcialmente ordenado se dice que son comparables si* $x \leq y$ *o* $y \leq x$.

Definición 1.1.4. *Un conjunto parcialmente ordenado en el cual cualquier par de elementos son comparables es llamado un conjunto totalmente ordenado y a dicho orden se le denomina un orden total.*

Definición 1.1.5. *Una cadena* $\mathcal{C}$ *en un conjunto parcialmente ordenado* $\mathbf{X}$ *es un subconjunto que está totalmente ordenado cuando se le dota del orden que hereda de* $\mathbf{X}$.

Definición 1.1.6. *Sea* $(\mathbf{X}, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado y sea* $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{X}$.

- *Un elemento* $x \in \mathbf{X}$ *es una cota superior de* $\mathcal{A}$ *si* $a \leq x\ \ \forall\, a \in \mathcal{A}$.
- *Si* x_0 *es una cota superior de* $\mathcal{A}$ *y si cualquier otra cota superior* x *de* $\mathcal{A}$ *satisface* $x_0 \leq x$, *entonces se dice que* x_0 *es el supremo de* $\mathcal{A}$.
- *Un elemento* $x_0 \in \mathbf{X}$ *se dice que es el máximo o el elemento más grande en* $\mathbf{X}$ *si* $x \leq x_0$ *para todo* $x \in \mathbf{X}$.

Definición 1.1.7. *Sea* $(\mathbf{X}, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado y sea* $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{X}$*. Un elemento* $x_0 \in \mathbf{X}$ *se dice que es un elemento maximal en* $\mathbf{X}$ *si no existe* $y \in \mathbf{X}$ *para el cual* $x_0 < y$*, es decir, si el único elemento* $x \in \mathbf{X}$ *que satisface* $x_0 \leq x$ *es el propio* x_0*.*

Obsérvese que un elemento maximal no tiene porque ser el más grande de todos: más aun, lo que no le está permitido a un elemento maximal es ser menor que cualquier otro elemento del conjunto.

Las definiciones de ínfimo, mínimo y minimal se introducen de modo completamente similar.

1.1.1. El Axioma De Elección

El Axioma de Elección es un axioma de la teoría de conjuntos que postula la existencia de ciertos objetos sin dar ninguna indicación de cómo obtenerlos. Desde su aparición ha resultado ser un principio muy controvertido. Su aceptación, en términos generales, se sustenta sobre la creencia de que nuestra percepción sobre los conjuntos finitos se puede ampliar a los conjuntos infinitos, pero más allá de eso, el principal argumento para su aceptación es que dicho axioma es tremendamente útil (ver, por ejemplo, [9] [23] para una discusión sobre este tema). Muchos resultados importantes y fundamentales en Análisis Real, Topología, Análisis Funcional, Algebra, etc. se pueden demostrar si se acepta, sin limitaciones, el Axioma de Elección.

Definición 1.1.8. *Una función de elección es una aplicación* f*, definida en un conjunto* $\mathbf{X}$ *de conjuntos no vacíos tal que para todo conjunto* $\mathcal{A} \in \mathbf{X}$*,* $f(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$*, o dicho de otra forma, la función de elección* f *elige exactamente un elemento de cada conjunto en* $\mathbf{X}$*.*

Entre las numerosas formas equivalentes del Axioma de Elección que existen, tal vez una de las más populares sea la siguiente:

Axioma 1.1.1 (Axioma de Elección)**.** *Si* $(\mathbf{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ *es una familia de conjuntos tal que* $\mathbf{X}_\alpha$ *es no vacío para todo* $\alpha \in \mathcal{J}$*, entonces existe al menos una función de elección para la familia* $(\mathbf{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$*.*

Lo anterior se puede expresar diciendo que dada cualquier colección $(\mathbf{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ de conjuntos no vacíos, el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in\mathcal{J}} A_\alpha$ es no vacío, lo que cotidianamente se traduce en afirmar que, dada cualquier colección $(\mathbf{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ de conjuntos no vacíos uno puede elegir, de cada $\mathbf{X}_\alpha$, un único elemento x_α para formar un nuevo conjunto. Es un hecho ya establecido que el Axioma de Elección es independiente del resto de axiomas de la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC) en el sentido de que ni la verdad, ni la falsedad de dicho axioma puede ser demostrado a partir del resto de axiomas de (ZFC). El uso del Axioma de Elección muchas veces se oculta y, aunque sea obvio para el experto, puede no ser percibido por el principiante. De hecho, grandes matemáticos tales como Borel y Lebesgue que eran acérrimos detractores de tal axioma, lo usaron inconscientemente en la prueba de algunos de sus teoremas. Por ejemplo, Lebesgue lo utilizó para demostrar que las uniones numerables de conjuntos medibles son conjuntos medibles.

1.1.2. El Lema De Zorn

Entre las numerosas y variadas formas equivalentes del Axioma de Elección, se encuentra el así llamado Lema de Zorn, un resultado formulado por M. Zorn en 1935 y que resulta ser extremadamente útil en varias ramas del quehacer matemático. Por ejemplo, el Lema de Zorn es fundamental para demostrar resultados importantes tales como el Teorema de Hahn-Banach, ***la prueba de la existencia de una base de Hamel en cualquier espacio vectorial no***

trivial, etc. De hecho, se puede demostrar que el Axioma de Elección es equivalente a la existencia de bases de Hamel (ver [28]).

Lema 1.1.1 (Lema de Zorn)**.** *Sea* $(\mathbf{X}, \leq)$ *un conjunto no vacío parcialmente ordenado. Si cualquier cadena* $\mathcal{C}$ *en* $\mathbf{X}$ *posee una cota superior, entonces* $\mathbf{X}$ *posee un elemento maximal.*

Con mucha frecuencia, el Lema de Zorn se utiliza cuando $\mathscr{F}$ es una familia de subconjuntos de un conjunto dado $\mathbf{X}$ ordenados por la relación de inclusión $\subseteq$ con la propiedad de que cualquier cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{X}$, su unión $\cup\mathcal{C}$, también esté en $\mathscr{F}$[1]. En este caso particular, el Lema de Zorn se expresa del modo siguiente:

Corolario 1.1.1 (Principio Maximal de Hausdorff)**.** *Sea* $\mathscr{F}$ *una familia de subconjuntos no vacíos de un conjunto no vacío* $\mathbf{X}$. *Supongamos que los elementos de* $\mathscr{F}$ *están ordenados por la relación de inclusión* $\subseteq$ *y que para cualquier cadena* $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{F}$, *se cumple que su unión* $\cup\mathcal{C}$ *también está en* $\mathscr{F}$. *Entonces* $\mathscr{F}$ *posee un elemento maximal.*

1.2. Subconjuntos Densos

Sea un espacio topológico $(\mathbb{E}, \mathcal{T})$ y un subconjunto $\mathbf{X} \subset \mathbb{E}$.

- En $\mathbb{R}$, designamos por $\mathcal{T}_u$ a la topología usual determinada por las bases de entornos abiertos $\mathbf{B}(p) = (p - \epsilon, p + \epsilon)$, donde $\epsilon > 0$.
- En $\mathcal{T}_u$ cada intervalo abierto y acotado (a, b), con $a < b$, es un conjunto abierto.

Definición 1.2.1. *Se dice que un* $x \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{E}$ *es un punto adherente de* $\mathbf{X}$, *si en todo entorno* $\mathbf{U}(x)$ *de* $\mathbf{X}$ *hay puntos de* $\mathbf{X}$, *es decir*

$$\mathbf{U}(x) \cap \mathbf{X} \neq \emptyset.$$

Definición 1.2.2. *El conjunto de todos los puntos adherentes de* $\mathbf{X}$ *es la clausura topológica de* $\mathbf{X}$. *Se designa por* $\overline{\mathbf{X}}$.

- En $\mathbb{R}$ la clausura del conjunto $\mathbb{Q}$ de puntos racionales es el mismo $\mathbb{R}$.
- Si se considera el grafo de la función $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$, la clausura del mismo en la topología usual de $\mathbb{R}^2$ es la unión del grafo con el conjunto $\{0\} \times [-1, 1]$.

Definición 1.2.3. *Un conjunto* $\mathbf{X}$ *es cerrado si, y sólo si, contiene a sus puntos de acumulación.*

Proposición 1.2.1. *Un conjunto* $\mathbf{X}$ *es cerrado si, y sólo si, coincide con su adherencia:*

$$\mathbf{X} = \overline{\mathbf{X}}.$$

Definición 1.2.4. *Un conjunto* $\mathbf{X}$ *se dice que es denso respecto de un conjunto* $\mathbf{Y}$, *si cada punto de* $\mathbf{Y}$ *es adherente de* $\mathbf{X}$; *es decir, si* $\mathbf{Y} \subset \overline{\mathbf{X}}$. *O, dicho de otra manera, si para cada* $y \in \mathbf{Y}$, *en todo entorno* $\mathbf{U}(y)$ *existen puntos de* $\mathbf{X}$.

Definición 1.2.5. *Se dice que un subconjunto* $\mathbf{X}$ *de un espacio topológico* $(\mathbb{E}, \mathcal{T})$ *es denso en el espacio si*

$$\overline{\mathbf{X}} = \mathbb{E}.$$

[1]Obsérvese que $\cup\mathcal{C}$, es una cota superior para $\mathcal{C}$ con respecto a $\subseteq$.

A veces se dice que el conjunto $\mathbf{X}$ es denso en todas partes. Un conjunto denso en $\mathbb{E}$ está caracterizado porque en cualquier abierto no vacío del espacio existen puntos de $\mathbf{X}$.

- En $\mathbb{R}$ con la topología usual $\mathcal{T}_u$, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales es denso.
- En $\mathbb{R}^2$ con la topología euclídea, el conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso; y también es denso $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.
- Los polinomios son densos en el conjunto $C[a,b]$ de las funciones continuas definidas en $[a,b]$, dotado de la topología asociada a la distancia

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \| f - g \|_\infty .$$

1.3. Bases De Hamel

Usaremos $\mathbb{K}$ para representar al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Sea $\mathbf{X}$ un espacio vectorial.

Definición 1.3.1. *Sea $\mathcal{A} \subset \mathbf{X}$ un conjunto finito, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, digamos que $\mathcal{A} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Diremos que $\mathcal{A}$ es linealmente independiente si*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0, \ (\lambda_i \in \mathbb{K}, \ i = 1, \ldots, n)$$

implica que $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Definición 1.3.2. *Sea $\mathcal{B} \subset \mathbf{X}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Diremos que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente si todo subconjunto finito $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ es linealmente independiente.*

Definición 1.3.3. *Sea $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset \mathbf{X}$. Diremos que $\mathcal{C}$ es maximal linealmente independiente si $\mathcal{C}$ es linealmente independiente y además, si $\mathcal{D}$ es tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$ entonces $\mathcal{D}$ no es linealmente independiente.*

Proposición 1.3.1. *Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{X}$ un conjunto linealmente independiente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$\mathcal{B}$ es maximal linealmente independiente.*

ii) *$\mathcal{B}$ es un sistema generador para $\mathbf{X}$.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$. Supongamos que existe $x \in \mathbf{X}$ tal que x no es combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \{x\}$ es linealmente independiente.

$ii) \Rightarrow i)$. Si $\mathcal{C} \supsetneqq \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{C}$ no puede ser libre porque todo $x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}$ es combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{B}$. $\square$

Definición 1.3.4. *Un subconjunto maximal linealmente independiente de $\mathbf{X}$, se llama base de Hamel de $\mathbf{X}$. Así $\mathcal{B} \subset \mathbf{X}$ es una base de Hamel si*

i) *$\mathcal{B}$ es linealmente independiente,*

ii) *$\mathcal{B}$ genera $\mathbf{X}$, es decir, el subespacio lineal más pequeño de $\mathbf{X}$ que contiene a $\mathcal{B}$ es $\mathbf{X}$.*

- Si $\mathbf{X} = \{P : [0,1] \to \mathbb{R} : P$ es un polinomio con coeficientes reales$\}$ entonces $\mathbf{X}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y una base de Hamel es: $\mathcal{B} = \{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ donde $p_i(x) = x^i$.

El teorema sobre existencia de bases de Hamel es importante, sin embargo, no provee una construcción de la base de Hamel. De hecho, el problema de encontrar bases de Hamel explícitas no admite solución constructiva (ejemplo: $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial).

Teorema 1.3.1. *Todo espacio vectorial* $\mathbf{X} \neq \{0\}$ *posee una base de Hamel.*

Demostración. La demostración de este teorema hará uso del lema de Zorn.

Como $\mathbf{X} \neq \{0\}$ existe $x \in \mathbf{X}$ tal que $x \neq 0$. Evidentemente $\{x\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Sea $\mathcal{D} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \subset \mathbf{X},\ \mathcal{M}$ linealmente independiente$\}$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$ pues, $\{x\} \in \mathcal{D}$.

Ahora, definimos un orden parcial en $\mathcal{D}$: Para $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{D}$ diremos que $\mathcal{M} \leq \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Es muy sencillo verificar que $\leq$ es un orden parcial en $\mathcal{D}$. Para ello, tomamos una cadena $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ y sea $\mathcal{M} = \cup_{\mathcal{M}_i \in \mathcal{C}} \mathcal{M}_i$.

Veamos que $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$: Sea $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ un subconjunto finito, $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Puesto que $\mathcal{C}$ es totalmente ordenado, existe $\mathcal{M}_i \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_i$ y $\mathcal{M}_i$ es linealmente independiente. Así $\mathcal{N}$ es linealmente independiente y por tanto $\mathcal{M} \in \mathcal{D}$.

Además, es claro que $\mathcal{M}$ es cota superior de $\mathcal{C}$. Por el lema de Zorn, $\mathcal{D}$ tiene un elemento maximal, digamos $\mathcal{B}$, y éste constituye una base de Hamel de $\mathbf{X}$. $\square$

Teorema 1.3.2. *Sea* $\mathcal{B}$ *una base de Hamel de* $\mathbf{X}$. *Entonces, para cada* $x \in \mathbf{X}$, $x \neq 0$, *existen* $n \in \mathbb{N}$, *elementos únicos* $x_1, \ldots, x_n$ *de* $\mathcal{B}$ *y escalares* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *únicos, tales que* $|\lambda_i| > 0$ *y* $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Demostración. Demostraremos primero la existencia de tal representación.

Sea $x \in \mathbf{X}$, $x \neq 0$. Si $x \in \mathcal{B}$, una tal representación es clara con $n = 1$, $x_1 = x$ y $\lambda_1 = 1$.

Supongamos ahora que $x \notin \mathcal{B}$.Entonces, el subconjunto $\mathcal{B} \cup \{x\}$ de $\mathbf{X}$ contiene propiamente a $\mathcal{B}$ y ya que $\mathcal{B}$ es maximal linealmente independiente, se tiene que $\mathcal{B} \cup \{x\}$ no es linealmente independiente, luego existe $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \cup \{x\}$, $\mathcal{A}$ finito y no vacío tal que $\mathcal{A}$ no es linealmente independiente. Forzosamente $x \in \mathcal{A}$, pues de otro modo tendríamos $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y así $\mathcal{A}$ debería ser linealmente independiente, lo cual es imposible.

Supongamos que $\mathcal{A} = \{x, x_1, \ldots, x_n\}$. Como $\mathcal{A}$ no es linealmente independiente existen escalares $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ no todos nulos tales que

$$\lambda\, x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i = 0.$$

Afirmamos que $\lambda \neq 0$ porque en otro caso tendríamos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i = 0$ con $x_i \in \mathcal{B}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y siendo $\mathcal{B}$ linealmente independiente tendríamos que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, lo cual es una contradicción.

Así, $\lambda \neq 0$ y por consiguiente

$$x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda}\, x_i.$$

Ahora, demostraremos la unicidad. Supongamos que existen $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ y elementos $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ tales que

$$x_i \in \mathcal{B}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,\ y_j \in \mathcal{B},\ \forall\, j = 1, \ldots, n$$

y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n$ escalares tales que

$$|\lambda_i| > 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,\ |\mu_j| > 0,\ \forall\, j = 1, \ldots, n$$

y

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, x_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\, y_j.$$

Si fuese $m > n$ entonces, existe $i \leq m$ tal que $x_i \neq y_j\ \forall\, j = 1, \ldots, n$, luego λ_i debe ser igual a cero pues de otro modo quedaría expresado x_i en términos de los restantes elementos lo cual es imposible pues constituyen un subconjunto linealmente independiente de $\mathcal{B}$. Con esto se contradice que $|\lambda_i| > 0$. Así $m \leq n$. De igual forma $n \leq m$ y por tanto $n = m$.

Ahora, sea i tal que $1 \leq i \leq m$. Si $x_i \neq y_j$ para cada $1 \leq j \leq n$ entonces $\lambda_i = 0$ ya que de otro modo quedaría expresado x_i en términos de los otros elementos y esto es imposible. De nuevo contradecimos el hecho de que $|\lambda_i| > 0$. Así, para cada $1 \leq i \leq m$ existe $i_j, 1 \leq i_j \leq n$ tal que $x_i = y_{i_j}$. De nuevo, la independencia lineal asegura que $\lambda_i = \mu_{i_j}$. □

1.4. Funciones Multiaditivas y Simétricas

Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ dos espacios lineales sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Definición 1.4.1. *Supongamos que $n \in \mathbb{N}$. La función*

$$f : \mathbf{X}^n \to \mathbf{Y}$$

se dice n-aditiva si para cada $m, 1 \leq m \leq n$ y para cada $x_1, \ldots, x_n, y_m \in \mathbf{X}$,

$$f(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m + y_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_m, x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Es decir, f es aditiva respecto de cada una de sus variables $x_m \in \mathbf{X}$, $m = 1, \ldots, n$.

Definición 1.4.2. *Supongamos que $n \in \mathbb{N}$. La función*

$$f : \mathbf{X}^n \to \mathbf{Y}$$

se dice simétrica si

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}\right)$$

para cualquier permutación $\{\tau(1), \ldots, \tau(n)\}$ de $\{1, \ldots, n\}$.

Definición 1.4.3. *Supongamos que $n \in \mathbb{N}$. Si la función $F : \mathbf{X}^n \to \mathbf{Y}$ es n-aditiva y simétrica, entonces definimos la diagonal de F como la función $f : \mathbf{X}^n \to \mathbf{Y}$ dada por la fórmula*

$$f(x) = F(x, \ldots, x),\ x \in \mathbf{X}.$$

Definición 1.4.4. *La función $A^n : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, se llama monomio de grado n si y sólo si existe $A_n : \mathbf{X}^n \to \mathbf{Y}$ simétrica y n-aditiva tal que*

$$A^n(x) = A_n(x, \ldots, x),\ x \in \mathbf{X}.$$

Si n es un o positivo, entonces, $i_n : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^n$ denota la aplicación diagonal dada por $i_n(x) = (x, \ldots, x)$. Está claro que, de la relación $A^n(x) = A_n(x, \ldots, x)$ que $A^n : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es la composición de las funciones i_n y A_n :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{i_n} & \mathbf{X}^n \\ & \searrow & \downarrow A_n \\ & & \mathbf{Y} \end{array} \quad \text{y } A^n = A_n \circ i_n.$$

Si $A^n : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es un monomio de grado n, para cualquier $q \in \mathbb{Q}$, obtenemos

$$A^n(q\,x) = q^n A^n(x).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} A^n(q\,x) &= A_n(q\,x, \ldots, q\,x) \\ &= q^n A_n(x, \ldots, x) \\ &= q^n A^n(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbf{X}$ y todo $q \in \mathbb{Q}$. (ver Proposición 2.1.1)

Definición 1.4.5. *Decimos que $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es un polinomio (generalizado) de grado $\leq n$ si*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A^k(x) \quad (x \in \mathbf{X}),$$

donde A^k es un monomio de grado k, $k = 0, 1, \ldots, n$.

1.5. Funciones Semicontinuas

Definición 1.5.1. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente en $x_0 \in \mathbb{R}$ si*

$$\forall\, c > 0, \quad f^{-1}\left(f(x_0) - c, +\infty\right)$$

es un entorno de x_0, donde $f(x_0)$ es el límite de la red

$$\{i_V : V \in \mathbf{U}(x_0)\}$$

siendo

$$i_V = \inf\{f(y) : y \in V\}$$

y $\mathbf{U}(x_0)$ denota la familia de entornos de x_0.

Si f es semicontinua inferiormente para cada $x \in \mathbb{R}$, se dice que f es semicontinua inferiormente en $\mathbb{R}$, lo cual equivale a:

$$\forall\, k \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(k, +\infty) \text{ es abierto.}$$

La función f se dice semicontinua superiormente en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $(-f)$ es semicontinua inferiormente en x_0. Y si lo es para cada $x \in \mathbb{R}$, diremos que f es semicontinua superiormente en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.5.1. *Sea f una función semicontinua en $\mathbb{R}$ y $\mathbf{D}$ un denso de $\mathbb{R}$. Si la restricción $f\mid_{\mathbf{D}}$ es continua, entonces f es continua en los puntos de $\mathbf{D}$.*

Demostración. Sea x_0 un punto de $\mathbf{D}$ y $c > 0$. Supongamos que f es semicontinua inferiormente; se tiene entonces que: existe un entorno abierto $\mathbf{U}(x_0)$ tal que

$$f(\mathbf{U}) \subset (f(x_0) - c, +\infty)\,.$$

Como$f\mid_{\mathbf{D}}$ es continua en x_0, se tiene que existe un entorno abierto $\mathbf{V}(x_0) \subset \mathbf{U}$ tal que

$$f\left(\mathbf{V} \cap \mathbf{D}\right) \subset \left(f(x_0) - \frac{c}{2}, f(x_0) + \frac{c}{2}\right).$$

Veamos que $f(\mathbf{V}) \subset \left(-\infty, f(x_0) + \frac{c}{2}\right)$: Para cada $y \in \mathbf{V}$ y cada $r > 0$, se tiene

$$f^{-1}\left(f(y) - r, +\infty\right) \cap \mathbf{V} \cap \mathbf{D} \neq \emptyset,$$

así que existe $x \in \mathbf{V} \cap \mathbf{D}$ tal que

$$f(x) > f(y) - r,$$

luego

$$f(y) - r < f(x_0) + \frac{c}{2}.$$

Así pues,

$$f(y) < f(x_0) + \frac{c}{2} + r, \quad \forall\, r > 0,$$

luego

$$f(y) \leq f(x_0) + \frac{c}{2} < f(x_0) + c.$$

Por tanto,

$$f(\mathbf{V}) \subset \left(f(x_0) - c, f(x_0) + c\right).$$

□

Si f es semicontinua superiormente, la demostración es similar.

Capítulo 2

Ecuaciones Funcionales: Una Introducción

A pesar de que varios grandes matemáticos, como D'Alembert, Euler, Gauss, Cauchy, Abel, Weierstrass, Darboux, Hilbert, Fréchet y otros muchos, trabajaron durante algún tiempo con ecuaciones funcionales, el estudio de éstas se ha visto siempre eclipsado por los resultados, sin duda importantes, que se han logrado con las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. La razón es clara: las ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales han sido el camino a seguir en todo momento cuando se ha buscado la aplicación física.

Sin embargo, el estudio de ecuaciones funcionales más generales, en las que no se asume regularidad alguna sobre las soluciones, ha alcanzado ya su etapa de madurez y resulta, sin lugar a dudas, un tema de enorme importancia en el Análisis Matemático moderno.

Definición 2.0.2. ***(Ecuación Funcional)*** *En un sentido amplio, una ecuación funcional puede ser considerada como una ecuación en la que intervienen variables independientes, funciones conocidas, funciones desconocidas y constantes. Se excluyen expresamente las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones integrales y otros tipos de ecuaciones que contengan operadores infinitesimales.*

2.1. Ecuación Funcional De Cauchy

La primera ecuación funcional que vamos a estudiar está dada por la expresión

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}), \tag{2.1}$$

donde se supone que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Esta ecuación (2.1) fue resuelta, para el caso de funciones f continuas por A. L. Cauchy en 1821[1] del modo siguiente:

De (2.1), se sigue por inducción matemática que

$$f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n), \quad \forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

y poniendo $x_1 = \cdots = x_n = x$ se tiene

$$f(x + \cdots + x) = f(nx) = f(x) + \cdots + f(x) = nf(x), \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

[1] A. M. Legendre 1791 y C. F. Gauss 1809 utilizaron el mismo razonamiento en una forma menos exacta, antes de A. L. Cauchy 1821.

Sea $x = \frac{m}{n}\,t$ con $m, n \in \mathbb{Z}^{+}$, entonces

$$nx = mt$$

y,

$$f(nx) = f(mt).$$

Además,

$$nf(x) = mf(t);$$

$$nf\left(\frac{m}{n}\,t\right) = mf(t).$$

De aquí, hemos probado que

$$f\left(\frac{m}{n}\,t\right) = \frac{m}{n}f(t) \tag{2.2}$$

es válida $\forall\, t \in \mathbb{R}$ y todos los racionales $r = \frac{m}{n} > 0$.

Ahora bien, podemos extender (2.2) a $r = \frac{m}{n} = 0$. Para ello, poniendo $x = 0$ en (2.1), tenemos

$$\begin{aligned} f(y) &= f(y+0) \\ &= f(y) + f(0) \end{aligned}$$

entonces,

$$f(0) = 0$$

y es inmediato que

$$f(0\,t) = 0f(t),$$

lo que implica que (2.2) es válida $\forall\, t \in \mathbb{R}$ y todos los racionales no negativos.

Por último, si ponemos $y = -x$ en (2.1) tenemos

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &= f((x + (-x)) \\ &= f(x) + f(-x) \end{aligned}$$

se tiene,

$$f(-x) = -f(x)$$

y, de aquí (2.2) implica

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n}\,t\right) &= f\left(-\left(-\frac{m}{n}\right)t\right) \\ &= -f\left(-\left(\frac{m}{n}\right)t\right) \\ &= -\left(-\frac{m}{n}\right)f(t) \\ &= \frac{m}{n}f(t) \end{aligned}$$

es válida también $\forall\, t \in \mathbb{R}$ y todos los racionales $r = \frac{m}{n} < 0$.

Por tanto, (2.1) satisface

$$f(rt) = rf(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \text{ y } \forall\, r \in \mathbb{Q}. \tag{2.3}$$

Suponiendo ahora que $t = 1$ y poniendo $f(1) = c$, deducimos que

$$f(r) = c\,r, \quad \forall\, r \in \mathbb{Q}. \tag{2.4}$$

Si asumimos que $f(x)$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}$ y teniendo en cuenta que todo número real x es límite de racionales

$$x = \lim_{n\to\infty} r_n$$

tomando limites en (2.4), se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(r_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} c\,r_n \\ &= c \lim_{n\to\infty} r_n \\ &= c\,x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Podemos resumir los resultados obtenidos anteriormente en las siguientes proposiciones y, a partir de ellas, el teorema de Cauchy.

Proposición 2.1.1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación funcional*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

entonces, existe un número real c tal que

$$f(r) = c\,r, \quad \forall\, r \in \mathbb{Q}. \tag{2.4}$$

Proposición 2.1.2. *Supongamos que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tal que*

$$f(r) = g(r), \quad \forall\, r \in \mathbb{Q}$$

entonces,

$$f(x) = g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Como f y g son continuas, entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(r_n). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(r_n).$$

Sin embargo, por la suposición de que las funciones f y g coinciden en todos los números racionales,

$$f(r_n) = g(r_n), \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

Se sigue que,

$$f(x) = g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

□

Las dos proposiciones 2.1.1 y 2.1.2 juntas nos darán el resultado que necesitamos.

Teorema 2.1.1 (Cauchy[14])**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface la ecuación funcional*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

entonces, existe un número real c tal que

$$f(x) = c\,x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Demostración. De la proposición 2.1.1, vemos que existe un número real c tal que $f(r) = c\,r$ para todos los números racionales r. Pero $f(x)$ y $g(x) = c\,x$ ambas son funciones continuas. De la proposición 2.1.2,

$$f(x) = g(x) = c\,x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

□

Sin embargo, G. Darboux en 1875 [17] mostró que la continuidad en un sólo punto $x_0 \in \mathbb{R}$, es suficiente:

Teorema 2.1.2. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface (2.1) y es continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces*

$$f(x) = c\,x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

con $c = f(1) \in \mathbb{R}$.

Demostración. En efecto, si

$$\lim_{u \to x_0} f(u) = f(x_0)$$

entonces, para cualquier x, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to x} f(t) &= \lim_{t+x_0 \to x+x_0} f\left(t + x_0 - x_0\right) \\
&= \lim_{t-x+x_0 \to x_0} f\left((t - x + x_0) + (x - x_0)\right) \\
&= \lim_{u \to x_0} f\left(u + (x - x_0)\right) \\
&= \lim_{u \to x_0} \left(f(u) + f(x - x_0)\right) \\
&= \lim_{u \to x_0} f(u) + f(x - x_0) \\
&= f(x_0) + f(x - x_0) \\
&= f(x_0 + x - x_0) \\
&= f(x),
\end{aligned}$$

lo que implica, que f es continua en todo $x \in \mathbb{R}$. El resultado se sigue del teorema de Cauchy. □

Además, G. Darboux en 1880 mostró también, que es suficiente asumir que f es no negativa (no positiva) para valores de x en un entorno del origen o que está acotada en un intervalo arbitrario $(a, b) \subset \mathbb{R}$, para obtener a (2.6) como solución general de la ecuación funcional de Cauchy (2.1).

Teorema 2.1.3. *Si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface (2.1) y es monótona o acotada en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que f es de la forma*

$$f(x) = c\,x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Demostración. Se sigue de (2.1) y de $f(y) \geq 0$ para $y > 0$ suficientemente pequeño, que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \geq f(x),$$

es decir, $f(x)$ es monótona creciente. Obviamente, monótona creciente se puede reemplazar por monótona decreciente bajo las mismas condiciones excepto que $f(y) \leq 0$ para $y > 0$ suficientemente pequeño.

Además, como vimos anteriormente en (2.4), para

$$x = r \in \mathbb{Q}: \;\; f(r) = c\,r.$$

Sean ahora, $\{r_n\}$ una sucesión creciente y $\{R_n\}$ decreciente de números racionales convergentes a x. Entonces, para cada n tenemos

$$r_n < x < R_n$$

y

$$c\,r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = c\,R_n,$$

por tanto

$$f(x) = c\,x.$$

Por otra parte, supongamos que $f(x)$ es una función acotada en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ y f es solución de (2.1). Entonces la función

$$g(x) = f(x) - f(1)x$$

satisface (2.1), pues

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - f(1)(x+y) \\ &= f(x) - f(1)x + f(y) - f(1)y \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Por otra parte, para cualquier $r \in \mathbb{Q}$, de (2.4), tenemos

$$\begin{aligned} g(r) &= f(r) - f(1)r \\ &= c\,r - c\,r \\ &= 0, \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} g(x+r) &= f(x+r) - f(1)(x+r) \\ &= f(x) + f(r) - f(1)x - f(1)r \\ &= f(x) - f(1)x + f(r) - f(1)r \\ &= f(x) - f(1)x + f(r) - c\,r \\ &= f(x) - f(1)x \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Ahora bien, al estar f acotada en (a,b), es evidente que también lo está g en el mismo intervalo. Por otro lado, dado $x \in \mathbb{R}$ existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x + r \in (a,b)$ y $g(x) = g(x+r)$. Se sigue que g está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$. Si existe un valor x_0, para el cual

$$g(x_0) = \alpha \neq 0$$

entonces

$$\begin{aligned} g(nx_0) &= n\, g(x_0) \\ &= n\, \alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para n suficientemente grande, la función g toma valores arbitrarios muy grandes, lo que entra en contradicción con que g está acotada. Se sigue que,

$$g(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Es decir

$$f(x) = f(1)x.$$

□

Teniendo en cuenta todo lo anterior, es claro que se satisface el siguiente teorema.

Teorema 2.1.4 (Darboux [17])**.** *Si la ecuación funcional de Cauchy*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

se satisface $\forall x, y \in \mathbb{R}$ y si la función $f(x)$ es continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, monótona o acotada en un intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}\,(\text{con}\, a < b)$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que f es de la forma

$$f(x) = c\, x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

De los resultados de G. Darboux, es inmediato deducir, que las soluciones de (2.1) que no son lineales, son globalmente irregulares, es decir, no son continuas en ninguna parte.

Más adelante, estás condiciones fueron debilitadas más a fondo. En particular, se sabe que basta la acotación uniforme de f en un conjunto con medida Lebesgue positiva para garantizar que si f es aditiva entonces $f(x) = c\, x$ [15].

Por otra parte, G. Hamel [22] fue el primero en resolver el problema de la existencia de funciones discontinuas aditivas. En efecto, el conjunto de los números reales, considerado como espacio vectorial lineal sobre los racionales, tiene una base de Hamel $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ y de aquí, puede mostrarse que la ecuación funcional de Cauchy tiene soluciones adicionales que no son de la forma (2.6).

Teorema 2.1.5. *Sea $\mathcal{B}$ una base de Hamel de $\mathbb{R}$. Entonces f es solución de la ecuación funcional de Cauchy si y solo si*

$$f(x) = \sum_{b \in \mathcal{B}} r_b(x)\mathcal{L}(b), \tag{2.7}$$

donde $x = \sum_{b\in\mathcal{B}} r_b(x) b$ es la representación de x como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$.

En particular, para cada función $\mathcal{L} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ existe exactamente una función aditiva

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tal que

$$f\,|_{\mathcal{B}} = \mathcal{L}.$$

Demostración. Consideramos la función $\mathcal{L} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ y definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que se satisfaga la relación (2.7) anterior. Sean

$$x = \sum_{b\in\mathcal{B}} r_b(x)\, b, \quad y = \sum_{b\in\mathcal{B}} r_b(y)\, b$$

dos números reales cualesquiera. Entonces,

$$x + y = \sum_{b\in\mathcal{B}} (r_b(x) + r_b(y))\ b$$

y por tanto

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} (r_b(x) + q_b(y))\ b\right) \\ &= \sum_{b\in\mathcal{B}} (r_b(x) + q_b(y))\ \mathcal{L}(b) \\ &= \sum_{b\in\mathcal{B}} r_b(x)\, \mathcal{L}(b) + \sum_{b\in\mathcal{B}} q_b(x)\, \mathcal{L}(b) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Se sigue que f es aditiva. $\square$

Del teorema 2.1.5 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.1.1. *Sean $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ una base de Hamel de $\mathbb{R}$ y $\mathcal{L} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ función arbitraria. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la única función aditiva que es extensión de $\mathcal{L}$. Entonces, f es continua si y sólo si $\frac{\mathcal{L}(x)}{x} = c$ para todo $x \in \mathcal{B}$, con c constante real.*

Demostración. Asumiendo que f es continua, entonces

$$f(x) = c\, x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

y en particular, para $x \in \mathcal{B}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= f(x) \\ &= c\, x, \end{aligned}$$

luego,

$$\frac{\mathcal{L}(x)}{x} = c.$$

Recíprocamente, si

$$\mathcal{L}(x) = c\, x \quad \forall\, x \in \mathcal{B},$$

entonces la función $c\, x$ es una extensión aditiva de $\mathcal{L}$. Del teorema 2.1.5 se sigue que, tal extensión es única. Por lo tanto $f(x) = c\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y consecuentemente f es continua. $\square$

Está claro ahora como construir las soluciones de la ecuación funcional de Cauchy que no son de la forma (2.6). Sean b_1, b_2 dos elementos distintos de la base de Hamel $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$. Si asignamos un valor arbitrario $f(b_1)$ a b_1 y elegimos $f(b_2)$ de modo que

$$f(b_2) \neq b_2\, \frac{f(b_1)}{b_1},$$

entonces podemos tomar f completamente arbitraria en el resto de $\mathcal{B}$, por tanto la solución f no puede ser de la forma (2.6).

Una propiedad interesante de las funciones aditivas discontinuas es que sus gráficas son subconjuntos densos de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.1.6 (Gráfica densa)**.** *La gráfica de cualquier solución* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de*

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R} \tag{2.1}$$

que no sea de la forma

$$f(x)=c\,x, \quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{2.6}$$

es densa en todo el plano $\mathbb{R}^2$.

Demostración. La gráfica de f es el subconjunto del plano

$$\mathcal{G}=\{(x,y):\, x\in\mathbb{R},\, y=f(x)\in\mathbb{R}\}$$

Tomamos $x_1\neq 0$. Si f no es de la forma (2.1) para ninguna constante $c\in\mathbb{R}$, entonces existe un número real no nulo x_2 tal que

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\neq\frac{f(x_1)}{x_1}.$$

Se sigue que los vectores $\mathbf{v_1}=(x_1,f(x_1))$ y $\mathbf{v_2}=(x_2,f(x_2))$ son linealmente independientes, por lo que generan todo el plano $\mathbb{R}^2$. Esto significa que para cualquier vector $\mathbf{v}$ del plano, existen escalares $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{v}=\alpha\mathbf{v_1}+\beta\mathbf{v_2}.$$

Si sólo consideramos escalares $r_1,r_2\in\mathbb{Q}$, podemos aproximar

$$r_1\mathbf{v_1}+r_2\mathbf{v_2},$$

arbitrariamente a cualquier $\mathbf{v}$ del plano, pues $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Ahora,

$$\begin{aligned} r_1\mathbf{v_1}+r_2\mathbf{v_2} &= r_1\,(x_1,f(x_1))+r_2\,(x_2,f(x_2)) \\ &= (r_1x_1+r_2x_2, r_1f(x_1)+r_2f(x_2)) \\ &= (r_1x_1+r_2x_2, f(r_1x_1+r_2x_2)) \end{aligned}$$

Entonces

$$\widetilde{\mathcal{G}}=\{(x,y):\, x=r_1x_1+r_2x_2,\, y=f(x);\, r_1,r_2\in\mathbb{Q}\}$$

es denso en $\mathbb{R}^2$ y como

$$\mathcal{G}\supseteq\widetilde{\mathcal{G}},$$

la gráfica de $\mathcal{G}$ es también densa en $\mathbb{R}^2$. □

Corolario 2.1.2. *Para una solución de* (2.1)*, que no sea de la forma* (2.6)*, la imagen de cualquier intervalo* (a,b) *con* $a<b$*, es densa en* $\mathbb{R}$.

Corolario 2.1.3. *Si* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *satisface* (2.1) *y es continua en un punto, monótona o acotada (superior o inferiormente) en un intervalo de medida positiva, entonces existe una constante* $c\in\mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x)=c\,x, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

2.2. Otras Ecuaciones Estudiadas Por Cauchy

Las tres ecuaciones restantes estudiadas por Cauchy son:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{2.8}$$
$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{2.9}$$
$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{2.10}$$

Estas ecuaciones (particularmente la primera) se pueden resolver de manera directa como en el caso de la ecuación (2.1), pero también pueden reducirse a (2.1) fácilmente.

Sea f una solución de (2.8). Supongamos que existe un valor x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Entonces (2.8) implica que

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left((x-x_0)+x_0\right) \\ &= f(x-x_0)f(x_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la única solución f de (2.8) que tiene ceros es la función idénticamente nula. Supongamos ahora que $f(x) \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Por tanto las soluciones no nulas de (2.8) satisfacen que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como f es estrictamente positiva, podemos definir la función:

$$g(x) = ln(f(x)).$$

Entonces g además satisface la ecuación funcional de Cauchy (2.1), puesto que

$$\begin{aligned} g(x+y) &= ln(f(x+y)) \\ &= ln(f(x)f(y)) \\ &= ln(f(x)) + ln(f(y)) \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Por tanto, si f es nula, es continua en algún punto o localmente acotada, y resuelve (2.8), entonces podemos aplicar el Teorema de Darboux a g, por lo que $g(x) = c\,x$ para alguna constante c y, podemos concluir que

$$f(x) = e^{cx}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En resumidas cuentas, hemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 2.2.1. *Supongamos que f es continua en un punto o acotada en algún conjunto de medida positiva y f es solución de la ecuación funcional*

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{2.8}$$

Entonces o bien f es idénticamente nula o existe una constante c tal que

$$f(x) = e^{cx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) pueden estudiarse de forma parecida. Concretamente, para $x, y > 0$, las sustituciones $x = e^u, y = e^v$ y $g(u) = f(e^u)$ transforman la ecuación funcional (2.9) en

$$g(u + v) = g(u) + g(v),$$

y la ecuación (2.10) en

$$g(u + v) = g(u)g(v).$$

Así pues, estos cambios nos llevan a una prueba directa de los siguientes resultados:

Teorema 2.2.2. *Supongamos que f es continua en un punto o acotada en algún conjunto de medida positiva y f es solución de la ecuación funcional*

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^+). \tag{2.9}$$

Entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = c\,ln(x) \quad (x \in \mathbb{R}^+).$$

Además, si (2.9) se satisface con $x = 0$ ó $y = 0$, entonces

$$f \equiv 0.$$

Teorema 2.2.3. *Supongamos que f es continua en un punto o acotada en algún conjunto de medida positiva y f es solución de la ecuación funcional*

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{2.10}$$

Entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^c \quad \text{ó} \quad f(x) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

2.3. Ecuación Funcional De Jensen

La ecuación funcional de Jensen tiene la forma

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

y puede considerarse como una versión de la ecuación funcional de Cauchy (2.1) usando promedios.

De nuevo, se asume que f generalmente es una función continua. Para simplificar, supongamos que su dominio es toda la recta real. Es fácil reducir (2.11) a la ecuación funcional de Cauchy (2.1). Para ello, ponemos $y = 0$ en (2.11), obtenemos

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + f(0)}{2}$$

Sea $f(0) = a$, entonces

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + a}{2},$$

de aquí con (2.11), tenemos

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+a}{2},$$

esto es,

$$f(x)+f(y) = f(x+y)+a.$$

Haciendo $g(x) = f(x) - a$, tenemos

$$g(x+y) = g(x)+g(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

que es la ecuación funcional de Cauchy.

Por otra parte, g es una función continua con $g(0) = 0$. Por lo tanto, existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = c\,x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y podemos concluir que la forma general de la solución de (2.11) debe ser de la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)+a \\ &= c\,x + a. \end{aligned}$$

Claramente, cualquier solución de la ecuación funcional de Cauchy (2.1) es también solución de la ecuación funcional de Jensen (2.11) si y sólo si $f(0) = 0$.

Teorema 2.3.1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación funcional de Jensen (2.11), entonces existe una función aditiva $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y una constante $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = g(x)+a \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Tomamos $x_0 \in \mathbb{R}$ y definimos la función $f_0 : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f_0(x) = f(x+x_0) - f(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

Entonces f_0 es solución de la ecuación funcional de Jensen (2.11) y por otra parte

$$f_0(0) = 0, \quad f_0\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} f_0(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

Por lo tanto, de (2.11) obtenemos, para $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ que satisface $x+y \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, que

$$f_0(x+y) = 2\, f_0\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\,\frac{f_0(x)+f_0(y)}{2} = f_0(x)+f_0(y).$$

De todo ello, existe una función aditiva $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_0(x) = g(x), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

Consecuentemente, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x-x_0) + f(x_0) \\ &= g(x-x_0) + f(x_0) \\ &= g(x) + f(x_0) - g(x_0). \end{aligned}$$

Si ponemos, $a = f(x_0) - g(x_0)$, concluimos que

$$f(x) = g(x)+a \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

□

Teorema 2.3.2. *Supongamos que f es una función continua en un punto, acotada (superior o inferiormente) o medible en algún conjunto de medida positiva y f es solución de la ecuación funcional de Jensen*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{2.11}$$

Entonces existen $c, a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = c\,x + a \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Nótese que, si en la ecuación funcional de Jensen (2.11), ponemos $h = \frac{y-x}{2}$ entonces, la ecuación funcional (2.11) puede reescribirse en la forma

$$f(x+h) = \frac{f(x)+f(x+2h)}{2},$$

y de aquí, la ecuación

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = 0 \quad (x, h \in \mathbb{R}), \tag{2.12}$$

que corresponde a la representación de la ecuación funcional de Cauchy (2.1) en términos del operador Δ de diferencias progresivas. En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 f(x) &= \Delta_h\left(\Delta_h f(x)\right) \\ &= \Delta_h\left(f(x+h) - f(x)\right) \\ &= \Delta_h f(x+h) - \Delta_h f(x) \\ &= f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \\ &= 0, \quad (x, h \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

De todo ello, diremos que cualquier solución de la ecuación funcional de Cauchy (2.1) es solución también de (2.12). Por otra parte, es fácil probar que, cualquier solución de (2.12) restringida a un conjunto de la forma $x\,\mathbb{Q}$, con $x \in \mathbb{R}$, es un polinomio de grado ≤ 1, $p_x(t) = a_x x + b_x$ (es un caso particular del lema 5.1.1). Así, si f satisface (2.12) y $f(0) = 0$, entonces

$$f(t) = c_x\,t, \quad \forall\, t \in x\,\mathbb{Q}$$

de modo que,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\left(\frac{2x+2y}{2}\right) \\ &= \frac{f(2x)+f(2y)}{2} \\ &= \frac{c_x 2x + c_y 2y}{2} \\ &= c_x x + c_y y \\ &= f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Concluimos, que f es solución de la ecuación funcional de Cauchy (2.1) si y sólo si es solución de (2.12) y $f(0) = 0$. En particular, las gráficas de las soluciones discontinuas de (2.12) son subconjuntos densos en $\mathbb{R}^2$.

En el capítulo [4] (ver teorema 4.1.1) veremos que en 1909, M. Fréchet [18] estudió y demostró una generalización importante de la ecuación funcional de Cauchy, que caracteriza a los polinomios.

Capítulo 3

El Operador Diferencia Progresiva y Las Funciones Polinómicas

3.1. El Operador Diferencia Progresiva Δ_h

Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dos espacios lineales sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales y sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una función arbitraria. El operador Δ_h, se define mediante la ecuación:

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \quad x, h \in \mathbf{X}. \tag{3.1}$$

Las iteraciones Δ_h^n de Δ_h para $n = 0, 1, \ldots$ están definidas por la recurrencia

$$\Delta_h^0 f = f, \quad \Delta_h^{n+1} f = \Delta_h \left(\Delta_h^n f\right), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.2}$$

La superposición de varios operadores diferencia se suele escribir como

$$\Delta_{h_1 \cdots h_n} f = \Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_n} f, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Lema 3.1.1. *Para funciones arbitrarias $f, g : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ y para constantes arbitrarias $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tenemos,*

$$\Delta_h (\alpha f + \beta g) = \alpha\, \Delta_h f + \beta\, \Delta_h g. \tag{3.4}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la definición (3.1). □

Lema 3.1.2. *Para $h_1, h_2 \in \mathbf{X}$ arbitrarios, los operadores Δ_{h_1}, Δ_{h_2} conmutan:*

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} f = \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} f \tag{3.5}$$

Demostración. De (3.1) tenemos,

$$\begin{aligned}
\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} f(x) &= \Delta_{h_1} \left(f(x+h_2) - f(x)\right) \\
&= \Delta_{h_1} f(x+h_2) - \Delta_{h_1} f(x) \\
&= f(x+h_1+h_2) - f(x+h_2) - f(x+h_1) + f(x) \\
&= \Delta_{h_2} \left(f(x+h_1) - f(x)\right) \\
&= \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} f(x).
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.1.1. *Sea τ una permutación de $\{1, \dots, n\}$. Entonces*

$$\Delta_{h_1 \cdots h_n} f = \Delta_{h_{\tau(1)} \cdots h_{\tau(n)}} f.$$

Lema 3.1.3. *Para $h_1, h_2 \in \mathbf{X}$ arbitrarios,*

$$\Delta_{h_1+h_2} f - \Delta_{h_1} f - \Delta_{h_2} f = \Delta_{h_1 h_2} f. \tag{3.6}$$

Demostración. Directamente, a partir de (3.1), tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_{h_1+h_2} f(x) - \Delta_{h_1} f(x) - \Delta_{h_2} f(x) &= f(x+h_1+h_2) - f(x) - f(x+h_1) + f(x) \\
&- f(x+h_2) + f(x) \\
&= f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1) - f(x+h_2) + f(x) \\
&= \Delta_{h_1 h_2} f(x).
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\Delta_{h_1 \cdots h_n} f(x) = \sum_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{1} (-1)^{n - \sum_{i=1}^{n} k_i} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} k_i h_i\right). \tag{3.7}$$

Demostración. La haremos por inducción sobre n. Para $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{h_1} f(x) &= \sum_{k_1=0}^{1} (-1)^{1-k_1} f\left(x + k_1 h_1\right) \\
&= -f(x) + f(x+h_1)
\end{aligned}$$

que coincide con (3.1).

Supongamos que (3.7) es cierta para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, del corolario 3.1.1, la hipótesis de inducción y el lema 3.1.1, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{h_1 \cdots h_{n+1}} f(x) &= \Delta_{h_{n+1}} \left(\Delta_{h_1 \cdots h_n} f(x)\right) \\
&= \Delta_{h_{n+1}} \sum_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{1} (-1)^{n - \sum_{i=1}^{n} k_i} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} k_i h_i\right) \\
&= \sum_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{1} (-1)^{n - \sum_{i=1}^{n} k_i} \Delta_{h_{n+1}} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} k_i h_i\right) \\
&= \sum_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{1} (-1)^{n - \sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{k_{n+1}=0}^{1} (-1)^{1-k_{n+1}} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} k_i h_i + k_{n+1} h_{n+1}\right) \\
&= \sum_{k_1, \cdots, k_n, k_{n+1} = 0}^{1} (-1)^{n - \sum_{i=1}^{n} k_i + 1 - k_{n+1}} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} k_i h_i + k_{n+1} h_{n+1}\right) \\
&= \sum_{k_1, \cdots, k_{n+1} = 0}^{1} (-1)^{n+1 - \sum_{i=1}^{n+1} k_i} f\left(x + \sum_{i=1}^{n+1} k_i h_i\right)
\end{aligned}$$

así, hemos obtenido (3.7) para $n + 1$. □

Corolario 3.1.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh). \tag{3.8}$$

Demostración. Supongamos que k entre $k_1, \cdots, k_n$ dados en (3.7) es exactamente igual a uno y $h_1 = \cdots = h_n = h$, entonces, la expresión del segundo miembro de (3.7) se reduce a:

$$(-1)^{n-\sum_{i=1}^{k} 1} f\left(x + \sum_{i=1}^{k} h\right) = (-1)^{n-k} f(x+kh).$$

Pero, hay $\binom{n}{k}$ elecciones posibles de k unos de entre $k_1, \cdots, k_n$, donde k recorre desde 0 hasta n. Por tanto, (3.8) se sigue de (3.3) y (3.7)

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overset{n}{h \cdots h}} f(x) &= \Delta_h^n f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh).
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.1.2. *[24] Sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una función y sean $h_1, \cdots, h_n \in \mathbf{X}$ arbitrarios. Para $k_1, \cdots, k_n \in \{0, 1\}$ definimos*

$$a_{k_1 \cdots k_n} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i h_i}{i}, \qquad b_{k_1 \cdots k_n} = -\sum_{i=1}^{n} k_i h_i.$$

Entonces, para cada $x \in \mathbf{X}$,

$$\Delta_{h_1 \cdots h_n} f(x) = \sum_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{1} (-1)^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \Delta_{a_{k_1 \cdots k_n}}^{n} f\left(x + b_{k_1 \cdots k_n}\right). \tag{3.9}$$

Demostración. Siguiendo [24], demostraremos la fórmula:

$$(-1)^n \Delta_{x_1 2x_2 \cdots n x_n} f(x) = \sum_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{1} (-1)^{n-\sum_{i=1}^{n} k_i} \Delta_{A_{k_1 \cdots k_n}}^{n} f\left(x + B_{k_1 \cdots k_n}\right) \tag{3.10}$$

donde,

$$A_{k_1 \cdots k_n} = -\sum_{m=1}^{n} k_m x_m, \qquad B_{k_1 \cdots k_n} = -\sum_{m=1}^{n} m k_m x_m, \quad \forall\, x, x_1 \cdots, x_n \in \mathbf{X}.$$

Haciendo esto, la fórmula (3.9) se obtendrá por multiplicación en ambos miembros de (3.10) por $(-1)^n$ y la sustitución $m x_m = h_m$ para $m = 1, \ldots, n$.

Ahora bien, del corolario 3.1.2 y del teorema 3.1.1, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{1} (-1)^{n-\sum_{i=1}^{n} k_i} \Delta^n_{A_{k_1\cdots k_n}} f\left(x + B_{k_1\cdots k_n}\right) \\
= & \sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{1} (-1)^{n-\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} f\left(x + B_{k_1\cdots k_n} + mA_{k_1\cdots k_n}\right) \\
= & \sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{1} (-1)^{n-\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} f\left(x + \sum_{m=1}^{n} mk_m x_m - m\sum_{m=1}^{n} k_m x_m\right) \\
= & \sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{1} (-1)^{n-\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} (ik_i x_i - mk_i x_i)\right) \\
= & \sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{1} (-1)^{n-\sum_{i=1}^{n} k_i} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} (i-m)k_i x_i\right) \\
= & \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{1} (-1)^{n-\sum_{i=1}^{n} k_i} f\left(x + \sum_{i=1}^{n} (i-m)k_i x_i\right) \\
= & \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \Delta_{(1-m)x_1\cdots(n-m)x_n} f(x) \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

nótese que, para cada $m = 1, \ldots, n$ uno de los incrementos

$$(1-m)x_1 \cdots (n-m)x_n$$

es cero, luego en virtud del corolario 3.1.1

$$
\begin{aligned}
\Delta_{(1-m)x_1\cdots(n-m)x_n} f(x) &= \Delta_{(1-m)x_1\cdots - x_{m-1} \overset{\downarrow}{} x_{m+1}\cdots(n-m)x_n} \left(\Delta_{\underset{\uparrow n=m}{0}} f(x) \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

pues, $\Delta_{(m-m)x_m} f(x) = \Delta_0 f(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Consecuentemente, en la última suma (3.11) sólo quedará el término correspondiente a $m = 0$, lo que implica la fórmula (3.10).

A partir de aquí, basta multiplicar la fórmula (3.10) en ambos miembros por $(-1)^n$, para obtener

$$\Delta_{x_1 2x_2\cdots nx_n} f(x) = (-1)^n \sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{1} (-1)^{n-\sum_{i=1}^{n} k_i} \Delta^n_{A_{k_1\cdots k_n}} f\left(x + B_{k_1\cdots k_n}\right)$$

y mediante la sustitución, $mx_m = h_m$ para $m = 1, \ldots, n$, obtendremos la fórmula (3.9).

$$\Delta_{h_1 h_2\cdots h_n} f(x) = \sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{1} (-1)^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \Delta^n_{a_{k_1\cdots k_n}} f\left(x + b_{k_1\cdots k_n}\right).$$

□

3.2. Funciones Polinómicas

La función $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ que verifica la condición

$$\Delta_h^{n+1} f(x) = 0, \quad \text{para cada } x, h \in \mathbf{X} \tag{3.12}$$

se llama función polinómica de grado $\leq n\,(n \in \mathbb{N})$.

Lema 3.2.1. *Sean $f_1, f_2 : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ funciones polinómicas de grado $\leq n$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ constantes arbitrarias. Entonces, la función*

$$f = \alpha f_1 + \beta f_2$$

también es un polinomio de grado $\leq n\,(n \in \mathbb{N})$.

Demostración. Obviamente, Δ_h es un operador lineal y la composición de operadores lineales es un operador lineal, del lema 3.1.1, obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_h^{n+1}\left(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right) &= \alpha\, \Delta_h^{n+1} f_1(x) + \beta\, \Delta_h^{n+1} f_2(x) \\ &= 0, \quad \forall\, x, h \in \mathbf{X} \end{aligned}$$

y por tanto, f es un polinomio de grado $\leq n\,(n \in \mathbb{N})$. $\square$

Teorema 3.2.1. *Si $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es una función polinómica de grado $n\,(n \in \mathbb{N})$, entonces*

$$\Delta_{h_1 \cdots h_{n+1}} f(x) = 0, \quad \textit{para cada } x, h_1, \ldots, h_{n+1} \in \mathbf{X} \tag{3.13}$$

Demostración. En efecto, la diferencia

$$\Delta_{h_1 \cdots h_{n+1}} f(x),$$

en virtud del teorema 3.1.2, puede expresarse mediante la fórmula (3.9) conteniendo sólo diferencias de orden $n+1$ con paso fijo y, contando con nuestra hipótesis, todas son nulas. $\square$

Lema 3.2.2. *Sea $F : \mathbf{X}^n \to \mathbf{Y}$ una función simétrica n-aditiva y sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ la diagonal de F definida por*

$$f(x) = F(x, \ldots, x), \quad x \in \mathbf{X}.$$

Entonces, para cada $x, h \in \mathbf{X}$,

$$\Delta_h f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F(x, \overset{k}{\ldots}, x, h, \overset{n-k}{\ldots}, h). \tag{3.14}$$

Demostración. De la propia definición del operador Δ_h (3.14), tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_h f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ &= F(x+h, \ldots, x+h) - F(x, \ldots, x), \end{aligned}$$

por lo que, (3.14) puede reescribirse como,

$$\begin{aligned} F(x+h, \ldots, x+h) &= \Delta_h f(x) + F(x, \ldots, x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F(x, \overset{k}{\ldots}, x, h, \overset{n-k}{\ldots}, h) + F(x, \ldots, x). \end{aligned}$$

Es decir, la expresión (3.14) es equivalente a:

$$F(x+h,\dots,x+h) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(x,\overset{k}{\dots},x,h,\overset{n-k}{\dots},h). \tag{3.15}$$

La demostración de (3.15) se realiza por inducción sobre n. Para $n=1$:

$$\begin{aligned} F(x+h) &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} F(x,\overset{k}{\dots},x,h,\overset{1-k}{\dots},h) \\ &= F(h)+F(x) \end{aligned}$$

que, evidentemente es cierta ya que $F=f$ es una función aditiva.

Supongamos que (3.15) es cierta para $n \in \mathbb{N}$ y sea $F:\mathbf{X}^{n+1} \to \mathbf{Y}$ simétrica $(n+1)$-aditiva. Entonces, para $z \in \mathbf{X}$ la función $\varphi(x_1,\dots,x_n)=F(x_1,\dots,x_n,z)$ es simétrica y n-aditiva, por lo que podemos utilizar la hipótesis de inducción para concluir que:

$$F(x+h,\overset{n}{\dots},x+h,z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(x,\overset{k}{\dots},x,h,\overset{n-k}{\dots},h,z).$$

Haciendo $z=x+h$ y teniendo en cuenta que F es simétrica $(n+1)$-aditiva, se tiene

$$\begin{aligned} F(x+h,\overset{n+1}{\dots},x+h) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(x,\overset{k}{\dots},x,h,\overset{n-k}{\dots},h,x+h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(x,\overset{k}{\dots},x,h,\overset{n-k}{\dots},h,x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(x,\overset{k}{\dots},x,h,\overset{n+1-k}{\dots},h,h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(x,\overset{k+1}{\dots},x,h,\overset{n-k}{\dots},h) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(x,\overset{k}{\dots},x,h,\overset{n+1-k}{\dots},h), \end{aligned}$$

reemplazando en la primera suma $k+1$ por m, resulta

$$\begin{aligned} F(x+h,\overset{n+1}{\dots},x+h) &= \sum_{m=1}^{n+1} \binom{n}{m-1} F(x,\overset{m}{\dots},x,h,\overset{n-(m-1)}{\dots},h) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} F(x,\overset{m}{\dots},x,h,\overset{n-(m-1)}{\dots},h) \\ &= \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} F(x,\overset{m}{\dots},x,h,\overset{(n+1)-m}{\dots},h) + F(x,\overset{n+1}{\dots},x) \\ &\quad + F(h,\overset{n+1}{\dots},h) + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} F(x,\overset{m}{\dots},x,h,\overset{(n+1)-m}{\dots},h) \\ &= F(x,\overset{n+1}{\dots},x) + \sum_{m=1}^{n} \left[\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}\right] F(x,\overset{m}{\dots},x,h,\overset{(n+1)-m}{\dots},h) \\ &\quad + F(h,\overset{n+1}{\dots},h) \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$$

tendremos la expresión (3.15) para $n+1$

$$\begin{aligned} F(x+h, \overset{n+1}{\ldots}, x+h) &= F(x, \overset{n+1}{\ldots}, x) + \sum_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} F(x, \overset{m}{\ldots}, x, h, \overset{(n+1)-m}{\ldots}, h) \\ &\quad + F(h, \overset{n+1}{\ldots}, h) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n+1}{m} F(x, \overset{m}{\ldots}, x, h, \overset{(n+1)-m}{\ldots}, h), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Lema 3.2.3. *Sea $F : \mathbf{X}^n \to \mathbf{Y}$ función simétrica n-aditiva y sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ la diagonal de F. Entonces, para cada $m \geq n$ y $x, h_1, \cdots, h_m \in \mathbf{X}$, tenemos*

$$\Delta_{h_1 \cdots h_m} f(x) = \begin{cases} n! F(h_1, \cdots, h_n) & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases} \tag{3.16}$$

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n = 1$:

$$\Delta_{h_1} f(x) = f(x + h_1) - f(x),$$

y como $F = f$ es aditiva

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} f(x) &= f(x + h_1) - f(x) \\ &= f(x) + f(h_1) - f(x) \\ &= f(h_1) = F(h_1). \end{aligned}$$

Para $m > 1$,

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1 \cdots h_m} f(x) &= \Delta_{h_1 \cdots h_{m-1}} (\Delta_{h_m} f(x)) \\ &= \Delta_{h_1 \cdots h_{m-1}} f(h_m) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pues h_m es constante.

Supongamos que (3.16) es cierta para $n \in \mathbb{N}$ y tomando una función $F : \mathbf{X}^{n+1} \to \mathbf{Y}$ simétrica $(n+1)$-aditiva. Si $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es su diagonal, entonces en virtud de los lemas 3.2.2 y 3.1.1, tenemos que, para $x, h_1, \cdots, h_{n+1} \in \mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1 \cdots h_{n+1}} f(x) &= \Delta_{h_1 \cdots h_n} \left(\Delta_{h_{n+1}} f(x)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \Delta_{h_1 \cdots h_n} F(x, \overset{k}{\ldots}, x, h_{n+1}, \overset{(n+1)-k}{\ldots}, h_{n+1}). \end{aligned}$$

La función $F(x, \overset{k}{\ldots}, x, h_{n+1}, \overset{(n+1)-k}{\ldots}, h_{n+1})$ es k-aditiva para cada $1 \leq k \leq n$. Para $k = 0$, la expresión $F(h_{n+1}, \overset{(n+1)-k}{\ldots}, h_{n+1})$ como función en x es constante. Luego teniendo en cuenta la hipótesis de inducción, tenemos

$$\Delta_{h_1 \cdots h_n} F(x, \overset{k}{\ldots}, x, h_{n+1}, \overset{(n+1)-k}{\ldots}, h_{n+1}) = \begin{cases} n! F(h_1, \cdots, h_{n+1}) & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k < n. \end{cases}$$

y,

$$\begin{aligned}\Delta_{h_1\cdots h_n} f(x) &= (n+1)n!F(h_1,\ldots,h_{n+1})\\ &= (n+1)!F(h_1,\ldots,h_{n+1}).\end{aligned}$$

Por otra parte, si $m > n+1$: entonces, teniendo en cuenta que $F(h_1,\ldots,h_{n+1})$ es una constante, tendremos del corolario 3.1.1

$$\begin{aligned}\Delta_{h_1\cdots h_m} f(x) &= \Delta_{h_{n+2}\cdots h_m}\left(\Delta_{h_1\cdots h_{n+1}} f(x)\right)\\ &= \Delta_{h_{n+2}\cdots h_m}\left((k+1)!F(h_1,\ldots,h_{n+1})\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

lo que significa, que (3.16) se verifica para $n+1$ y, por tanto, se concluye la demostración. □

Corolario 3.2.1. *Sea $F : \mathbf{X}^n \to \mathbf{Y}$ una función simétrica n-aditiva y sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ la diagonal de F. Si $f = 0$, entonces $F = 0$.*

Demostración. Tomamos $x, h_1, \ldots, h_n \in \mathbf{X}$. Entonces, claramente

$$\Delta_{h_1\cdots h_n} f(x) = 0,$$

y del lema 3.2.3,

$$\begin{aligned}F(h_1,\ldots,h_n) &= \frac{1}{n!}\Delta_{h_1\cdots h_n} f(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $h_1,\ldots,h_n \in \mathbf{X}$ son arbitrarios, hemos probado que $F = 0$. □

Teorema 3.2.2. *[24] Sean $A_k : \mathbf{X}^k \to \mathbf{Y}$, $k = 0,\ldots,n$ funciones simétricas k-aditivas y sean $A^k : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, $k = 0,\ldots,n$ sus respectivas diagonales. Entonces, la función $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ dada por*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A^k(x) \quad (x \in \mathbf{X}), \tag{3.17}$$

es una función polinómica de grado $\leq n$.

Demostración. Tomamos $x, h \in \mathbf{X}$, entonces del lema 3.2.3

$$\Delta_h^{n+1} A^k(x) = 0, \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

luego,

$$\begin{aligned}\Delta_h^{n+1} f(x) &= \Delta_h^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} A^k(x)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \Delta_h^{n+1}\left(A^k(x)\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

lo que completa la demostración y por tanto, f es una función polinómica de grado $\leq n$. □

Nótese que, para $n = 1$, la ecuación $\Delta_h^2 f(x) = 0$ toma la forma

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = 0 \quad (x, h \in \mathbf{X})$$

o, equivalentemente, mediante la sustitución $h = \frac{y-x}{2}$, resulta la conocida ecuación funcional de Jensen:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right) \quad (x, y \in \mathbf{X}).$$

Teorema 3.2.3. *La función $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es solución de la ecuación funcional de Jensen*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right) \quad (x, y \in \mathbf{X}), \tag{3.18}$$

si y sólo si existe una constante $A^0 \in \mathbf{Y}$ y una aplicación aditiva $A^1 : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ tal que:

$$f(x) = A^0 + A^1(x), \quad (x \in \mathbf{X}) \tag{3.19}$$

Demostración. Supongamos que f es solución de (3.18). Definimos la función $g : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ mediante:

$$g(x) = f(x) - f(0), \quad (x \in \mathbf{X})$$

entonces $g(0) = 0$ y de (3.18) para $x, y \in \mathbf{X}$ tenemos

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(g(x) + g(y)\right).$$

Haciendo $y = 0$, obtenemos

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\, g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbf{X}.$$

Ahora bien, para cada $x, y \in \mathbf{X}$:

$$\begin{aligned} g(x+y) &= 2\, g\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &= 2\left(g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{y}{2}\right)\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\, g(x) + \frac{1}{2}\, g(y)\right) \\ &= g(x) + g(y), \end{aligned}$$

lo que implica que g es aditiva. Como

$$g(x) = f(x) - f(0) \Rightarrow f(x) = f(0) + g(x)$$

y

$$f(x) = A^0 + A^1(x), \quad (x \in \mathbf{X})$$

donde,

$$A^0 = f(0), \quad A^1(x) = g(x), \quad (x \in \mathbf{X})$$

y A^1 es una aplicación aditiva.

Recíprocamente, si f es de la forma (3.19) con A^1 aditiva, entonces para $x, h \in \mathbf{X}$ tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 f(x) &= \Delta_h^2 \left(A^0 + A^1(x)\right) \\ &= \Delta_h^2 A^1(x) \\ &= A^1(x+2h) - 2A^1(x+h) + A^1(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir, f es solución de la ecuación

$$\Delta_h^2 f(x) = 0, \quad (x \in \mathbf{X})$$

que, como ya sabemos, es equivalente a la ecuación funcional de Jensen. □

Teorema 3.2.4. *([24], [6] y [26]) Sea $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ función polinómica de grado $\leq n$. Entonces, existen aplicaciones simétricas k-aditivas*

$$A_k : \mathbf{X}^k \to \mathbf{Y}, \quad (x \in \mathbf{X})$$

tales que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} A^k(x), \quad (x \in \mathbf{X})$$

con, A^k, $k = 0, 1, \ldots, n$ las diagonales de A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, respectivamente.

Demostración. Probaremos la existencia de A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ por inducción sobre n. Para $n = 0$ es evidente. Para $n = 1$, f satisface la ecuación

$$\Delta_h^2 f(x) = 0, \quad (x \in \mathbf{X})$$

y por el teorema 3.2.3 existe una constante $A_0 \in \mathbf{Y}$ y una aplicación aditiva $A^1 : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ tales que:

$$f(x) = A^0 + A^1(x), \quad (x \in \mathbf{X})$$

lo que implica que f admite una representación de la forma (3.19).

Ahora, supongamos que para cada función polinómica $g : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ de orden $n - 1 \in \mathbf{N}$ existen aplicaciones simétricas k-aditivas $A_k : \mathbf{X}^k \to \mathbf{Y}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$ tales que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k(x), \quad (x \in \mathbf{X}); \tag{3.20}$$

donde A^k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ son las diagonales de A_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, respectivamente.

Asumiendo que $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es un polinomio de grado $\leq n$, definimos la función $A_n : \mathbf{X}^n \to \mathbf{Y}$ mediante,

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_1 \cdots x_n} f(0), \quad (x_k \in \mathbf{X}), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.21}$$

Evidentemente, del corolario 3.1.1, A_n es simétrica. Además del corolario 3.1.1, lema 3.1.1, lema 3.1.3 y del teorema 3.2.1, para cada $k = 1, \ldots, n$ y $x_1, \ldots, x_n, y_k \in \mathbf{X}$, tenemos

$$\begin{aligned} & A_n\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\right) - A_n\left(x_1, \ldots, x_n\right) - A_n\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\right) \\ = \; & \frac{1}{n!} \Delta_{x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_n} \left(\Delta_{x_k + y_k} f(0) - \Delta_{x_k} f(0) - \Delta_{y_k} f(0)\right) \\ = \; & \frac{1}{n!} \Delta_{x_1 \cdots x_n y_k} f(0) \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Esto demuestra que A_n es n-aditiva. Nótese que para $x, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{X}$, del lema 3.1.1 y del teorema 3.2.1, tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_{x_1 \cdots x_n} f(x) - \Delta_{x_1 \cdots x_n} f(0) &= \Delta_{x_1 \cdots x_n} \left(f(x) - f(0) \right) \\
&= \Delta_{x_1 \cdots x_n} \left(\Delta_x f(0) \right) \\
&= \Delta_{x_1 \cdots x_n \cdot x} f(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y, de la fórmula (3.21)

$$\Delta_{x_1 \cdots x_n} f(x) = n! A_n \left(x_1, \ldots, x_n \right).$$

Por tanto, en virtud de los lemas 3.1.1 y 3.2.3, para

$$g = f - A^n;$$

donde, A^n es la diagonal de A_n, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{h_1 \cdots h_n} g(x) &= \Delta_{h_1 \cdots h_n} f(x) - \Delta_{h_1 \cdots h_n} A^n(x) \\
&= \Delta_{h_1 \cdots h_n} f(x) - n! A_n \left(h_1, \ldots, h_n \right) \\
&= 0, \quad \text{para } h_1, \ldots, h_n \in \mathbf{X}.
\end{aligned}$$

Esto significa exactamente que, g es una función polinómica de grado $\leq n-1$. Por tanto, la hipótesis de inducción implica que existen aplicaciones simétricas k-aditivas

$$A_k : \mathbf{X}^k \to \mathbf{Y} \ (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

tales que, la fórmula (3.20) se verifica con $A^k \, (k = 0, 1, \ldots, n-1)$, las diagonales de A_k, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, respectivamente. Por tanto,

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) + A^n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} A^k(x) \quad (x \in \mathbf{X}),
\end{aligned}$$

que es lo que buscábamos. $\square$

Capítulo 4

La Ecuación Funcional De Fréchet

4.1. Definición Funcional De Polinomios

Sabemos que las únicas funciones continuas aditivas que existen son las funciones lineales $f(x) = c\,x$ ($c \in \mathbb{R}$). A partir de aquí es fácil demostrar que $f(x) = ax + b$ si y sólo si f es una función continua que es solución de la ecuación funcional

$$f(x + y) - f(x) - f(y) + f(0) = 0.$$

Fréchet [18], demostró que los polinomios ordinarios,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

también se pueden caracterizar como las únicas soluciones continuas de una cierta ecuación funcional.

Teorema 4.1.1. *(**Fréchet** [18]) Un polinomio de grado n en x es una función continua verificando la identidad:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n+1}(f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) \quad &\equiv \quad f(x_1 + \cdots + x_{n+1}) - \sum_1{}^{*} f(x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}) \\ &\quad + \sum_2{}^{*} f\left(x_{i_1} + \cdots + x_{i_{n-1}}\right) - \cdots\cdots \\ &\quad + (-1)^n \sum_n{}^{*} f(x_{i_1}) + (-1)^{n+1} f(0) \\ &\equiv \quad 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde, $x_1, \ldots, x_{n+1}$ son variables reales.

En la identidad (4.1), la notación $\sum_h{}^{*}$ es una abreviación de:

$$\sum_h{}^{*} = \sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_{n+1-h}\}\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\} \\ \#\{i_1,\ldots,i_{n+1-h}\}=n+1-h}}$$

El teorema constituye, pues, una definición funcional de los polinomios. *La función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un polinomio (ordinario) de grado $\leq n$ si y sólo si $\mathcal{F}_{n+1}(f)$ es idénticamente nula en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n. Para $n = 1$, resulta la ecuación funcional de Cauchy.

Si x_{n+1} es una constante arbitraria y $f(x)$ es una función continua verificando (4.1), entonces la función

$$\varphi(x) \equiv f(x + x_{n+1}) - f(x) - f(x_{n+1}) + f(0)$$

es un polinomio de grado $n - 1$.

En efecto, si $\mathcal{F}_{n+1}(f) = 0$ entonces la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(\varphi) \quad \equiv \quad & \varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right) - \sum_{n-1} \varphi\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}}\right) + \sum_{n-2} \varphi\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-2}}\right) \\ & - \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{1} \varphi\left(x_{j_1}\right) + (-1)^n \varphi(0) \end{aligned}$$

es idénticamente nula y, por tanto, podemos aplicar nuestra hipótesis de inducción a la función φ.

Si tenemos ahora en cuenta que la expresión

$$f(x + y) - f(x) - f(y) + f(0) \equiv Q(x, y) \tag{4.2}$$

es simétrica respecto las variables x e y, podemos concluir que $Q(x, y)$ es un polinomio de grado $\leq n - 1$ respecto de cada una de las dos variables x e y.

Vamos a utilizar la identidad (4.2) para demostrar que este polinomio tiene una forma particular. Para ello, procedemos como sigue:

▶ En primer lugar, notemos que $Q(x, y)$ satisface la ecuación funcional

$$Q(x, y) + Q(x + y, z) = f(x + y + z) - f(x) - f(y) - f(z) + 2f(0),$$

de modo que $Q(x, y) + Q(x + y, z)$ es una función simétrica respecto las variables x, y y z.

▶ Descomponemos $Q(x, y)$ de forma única como suma de polinomios en la forma:

$$Q(x, y) \equiv Q_0 + Q_1(x, y) + \cdots + Q_r(x, y) \tag{4.3}$$

donde, cada $Q_p\,(p = 0, 1, \ldots, r)$ es un polinomio homogéneo de grado p[1]. Se puede comprobar inmediatamente que cada uno de los polinomios $Q_p(x, y)$ satisface que

$$Q_p(x, y) + Q_p(x + y, z)$$

es simétrica respecto las variables x, y y z.

▶ Ahora bien, todo polinomio homogéneo $Q_p(x, y)$ de grado p es de la forma

$$Q_p(x, y) \equiv A_0 x^p + A_1 x^{p-1} y + A_2 x^{p-2} y^2 + \cdots + A_{p-1} x y^{p-1} + A_p y^p.$$

[1] $Q_p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p Q_p(x, y)$ para cada $p = 0, 1, \ldots, r$.

Por tanto

$$\begin{aligned}
& Q_p(x,y)+Q_p(x+y,z) \\
= \;& A_0x^p+A_1x^{p-1}y+A_2x^{p-2}y^2+\cdots+A_{p-1}xy^{p-1}+A_py^p \\
& +A_0(x+y)^p+A_1(x+y)^{p-1}z+A_2(x+y)^{p-2}z^2+\cdots+A_{p-1}(x+y)z^{p-1}+A_pz^p \\
= \;& A_0x^p+A_1x^{p-1}y+A_2x^{p-2}y^2+\cdots+A_{p-1}xy^{p-1}+A_py^p \\
& +A_0\left[\binom{p}{0}x^p+\binom{p}{1}x^{p-1}y+\binom{p}{2}x^{p-2}y^2+\cdots+\binom{p}{p}y^p\right] \\
& +A_1\left[\binom{p-1}{0}x^{p-1}+\binom{p-1}{1}x^{p-2}y+\binom{p-1}{2}x^{p-3}y^2+\cdots+\binom{p-1}{p-1}y^{p-1}\right]z \\
& +\cdots \\
& +A_{p-1}\left[x+y\right]z^{p-1} \\
& +A_pz^p \\
= \;& 2A_0x^p+\left[A_1y+A_0\binom{p}{1}y+A_1z\right]x^{p-1} \\
& +\cdots \\
& +\left[A_hy^h+A_0\binom{p}{h}y^h+A_1\binom{p-1}{h-1}y^{h-1}z+\cdots+A_{h-1}\binom{p-(h-1)}{1}yz^{h-1}+A_hz^h\right]x^{p-h} \\
& +\cdots \\
& +\left(A_py^p+A_0y^p+A_1y^{p-1}z+A_2y^{p-1}z^2+\cdots+A_pz^p\right).
\end{aligned}$$

Los coeficientes de las diferentes potencias de x deberán ser simétricos en x, y y se tendrá en particular

$$A_0=0, \quad A_{h-1}=\frac{\binom{p-1}{h-1}}{\binom{p-(h-1)}{1}}A_1 \quad \text{para} \quad h=2,\ldots,p,$$

por otro lado, Q_p es simétrica en x e y y se tendrá

$$A_p=A_0,$$

y como

$$\frac{\binom{p-1}{h-1}}{\binom{p-(h-1)}{1}}=\frac{\binom{p}{h-1}}{\binom{p}{1}}$$

tendremos

$$\begin{aligned}
p\,Q_p \;&\equiv\; \binom{p}{1}A_1x^{p-1}y+\cdots+\binom{p-1}{h-1}A_1x^{p-(h-1)}y^{h-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}A_1xy^{p-1} \\
&\equiv\; A_1\left[(x+y)^p-x^p-y^p\right].
\end{aligned}$$

Aplicando este resultado a los polinomios $Q_0,\ldots,Q_r$ vemos que se tendrá para Q una expresión de la forma:

$$\begin{aligned}
Q(x,y) \;&=\; \sum_{p=2}^{r}B_p\left[(x+y)^p-x^p-y^p\right] \\
&\equiv\; R(x+y)-R(x)-R(y)+R(0), \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

donde $R(x)$ es el polinomio de grado r dado por:

$$R(x) = \sum_{p=2}^{r} B_p x^p = B_2 x^2 + \cdots + B_r x^r,$$

con $r \leq n$, puesto que $Q(x,y)$ es de grado $n-1$ en x.

▶ Tomemos
$$S(x) \equiv f(x) - R(x).$$

Entonces la identidad (4.2) lleva, mediante (4.4), a:

$$S(x+y) - S(x) - S(y) + S(0) \equiv 0,$$

siendo $S(x)$ una función continua que verifica esta identidad. Luego, $S(x)$ es necesariamente un polinomio de primer grado
$$B_0 + B_1 x.$$

Tal como se ha visto anteriormente, se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv S(x) + R(x) \\ &\equiv B_0 + B_1 x + \cdots + B_r x^r \quad \text{con} \quad r \leq n, \end{aligned}$$

y por tanto, $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$. □

Observación 4.1.1. *La prueba de Fréchet permanece inalterada si se asume la continuidad sólo en un punto (o la acotación en un intervalo cuyo interior es no vacío) de la solución f de $\mathcal{F}_{n+1}(f) \equiv 0$. Esto es así, porque φ es continua o acotada en un intervalo abierto si y sólo si f lo es (lo que valida el paso de inducción) y lo mismo ocurre para S. Por otro lado, el único paso donde se requiere la prueba de que f sea continua, es mostrar que S (solución de la ecuación funcional de Cauchy) es una función lineal. Por tanto, podemos afirmar que si f satisface las hipótesis del teorema de Darboux y $\mathcal{F}_{n+1}(f) \equiv 0$, entonces f es un polinomio ordinario de grado $\leq n$.*

4.2. La Ecuación Funcional De Fréchet y El Operador Diferencia Progresiva Δ_h

En esta sección vamos a establecer la relación que existe entre la ecuación $\mathcal{F}_{n+1}(f) = 0$ y los resultados expuestos en el capítulo 3 de esta memoria.

Proposición 4.2.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces*

$$\mathcal{F}_{n+1}(f) = \Delta_{x_0 \cdots x_n} f(0). \tag{4.5}$$

Demostración. Por el teorema 3.1.1 (sobre la representación explícita en una fórmula cerrada para el operador $\Delta_{x_0 \cdots x_n}$) sabemos que

$$\Delta_{x_0 \cdots x_n} f(0) = \sum_{k_0, \cdots, k_n = 0}^{1} (-1)^{n - \sum_{i=0}^{n} k_i} f\left(\sum_{i=0}^{n} k_i x_i\right). \tag{4.6}$$

Ahora bien, si agrupamos los términos que satisfacen $\sum_{i=0}^{n} k_i = h$ y sumamos, para $h = 0, 1, \ldots, n+1$, obtenemos el operador $\mathcal{F}_{n+1} f(x_0, \ldots, x_n)$. □

Proposición 4.2.2. *Si f es solución de la ecuación funcional de Fréchet*

$$\Delta_{x_0 \cdots x_n} f(0) = 0 \tag{4.5}$$

para toda elección de nodos $\{x_i\}_{i=0}^n$, entonces se satisface la ecuación funcional

$$\Delta_{x_0 \cdots x_n} f(x) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{4.7}$$

Demostración. En efecto, supongamos que $\mathcal{F}_{n+1}(f)(x_0, \ldots, x_n)$ se satisface en cualquier $\{x_i\}_{i=0}^n$. Entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos:

$$\mathcal{F}_{n+1}(f)(x, x_0, \ldots, x_{n-1}) = \Delta_{x x_0 \cdots x_{n-1}} f(0),$$

y

$$\mathcal{F}_{n+1}(f)(x + x_n, x_0, \ldots, x_{n-1}) = \Delta_{(x+x_n) x_0 \cdots x_{n-1}} f(0).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n+1}(f)(x + x_n, x_0, \ldots, x_{n-1}) &= \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} \left(\Delta_{x+x_n} f(0)\right) \\ &= \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} \left(f(x + x_n) - f(0)\right) \\ &= \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} f(x + x_n) - \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} f(0). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n+1}(f)(x, x_0, \ldots, x_{n-1}) &= \Delta_{x x_0 \cdots x_{n-1}} f(0) \\ &= \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} \left(\Delta_x f(0)\right) \\ &= \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} \left(f(x) - f(0)\right) \\ &= \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} f(x) - \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} f(0) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Restando ambas ecuaciones (4.8) y (4.9), se llega a:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} f(x + x_n) - \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} f(0) - \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} f(x) + \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} f(0) \\ &= \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} f(x + x_n) - \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} f(x) \\ &= \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} \left(f(x + x_n) - f(x)\right) \\ &= \Delta_{x_0 \cdots x_{n-1}} \Delta_{x_n} f(x) \\ &= \Delta_{x_0 \cdots x_n} f(x). \end{aligned}$$

□

De todo lo explicado aquí, se deduce que los resultados del capítulo 3 son aplicables para obtener una descripción completa de las soluciones (regulares o no) de la ecuación de Fréchet

$$\mathcal{F}_{n+1}(f) = 0.$$

En particular, basta tomar pasos fijos para poder demostrar el teorema de Fréchet. Nosotros vamos a abordar una vía de ataque para este resultado, bajo las condiciones de Darboux, en el próximo capítulo de esta memoria.

Capítulo 5

El Teorema De Darboux Para La Ecuación Funcional De Fréchet

Los resultados que daremos a continuación son análogos a los dados por Darboux para la ecuación funcional de Cauchy, pero para operadores en diferencias de orden superior.

5.1. Descripción De Las Soluciones De $\Delta^{n+1}(f) \equiv 0$

Demostraremos un lema técnico que nos dará una descripción de las soluciones de $\Delta^{n+1}(f) \equiv 0$, sin ninguna hipótesis de regularidad en la función f, cuando se limitan a determinados subconjuntos densos de la recta real. Describiremos las soluciones sobre $\mathbb{Q}$ y posteriormente generalizamos el resultado para conjuntos de la forma $\alpha + (\beta - \alpha)\mathbb{Q}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En particular, dado $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{P}_n$ un polinomio de grado $\leq n$, estudiaremos el conjunto

$$\mathcal{H}_p = \{u \in \mathbb{Q} : p(u) = f(u)\} \tag{5.1}$$

Lema 5.1.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta_h^{n+1}(f) = 0$. Entonces, existe un único polinomio $p \in \mathbb{P}_n$ tal que*

$$f\mid_{\mathbb{Q}} = p\mid_{\mathbb{Q}} .$$

Demostración. Sea f tal que $\Delta_h^{n+1}(f) = 0$.

Tomemos el único polinomio $p \in \mathbb{P}_n$ que interpola a f en los nodos $\left\{\frac{i}{n}\right\}_{i=0}^{n}$, de modo que

$$p\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i}{n}\right) \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Consideramos ahora el conjunto $\mathcal{H}_p$ definido en (5.1). Queremos probar que $\mathcal{H}_p \supseteq \mathbb{Q}$ y por tanto $f\mid_{\mathbb{Q}} = p\mid_{\mathbb{Q}}$. Para ello (y como primer paso) ponemos

$$\Omega_0 = \left\{\frac{i}{n} : i \in \mathbb{Z}\right\} \tag{5.3}$$

y demostraremos que $\Omega_0 \subseteq \mathcal{H}_p$.

Ahora bien, si definimos los nodos $y_i = i \cdot \frac{1}{n}$ $(i \in \mathbb{Z})$, tenemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$ existe un único $p_k \in \mathbb{P}_n$ tal que:

$$p_k(y_i) = f(y_i),\ \forall\, i = k, k+1, \ldots, k+n \quad (\text{En particular}, p_0 = p).$$

Por otra parte,

$$\Delta_{\frac{1}{n}}^{n+1} f(0) = 0,$$

luego,

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta_{\frac{1}{n}}^{n+1} f(0) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} f\left(\frac{i}{n}\right) + f\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} f\left(y_i\right) + f\left(y_{n+1}\right), \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

se sigue que,

$$\begin{aligned}
f\left(y_{n+1}\right) &= -\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} f\left(y_i\right) \\
&= -\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} p_0\left(y_i\right), \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

y, como $p_0 = p \in \mathbb{P}_n$,

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta_{\frac{1}{n}}^{n+1} p_0(0) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} p_0\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} p_0\left(\frac{i}{n}\right) + p_0\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} p_0\left(y_i\right) + p_0\left(y_{n+1}\right), \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

tenemos que,

$$p_0\left(y_{n+1}\right) - \Delta_{\frac{1}{n}}^{n+1} p_0(0) = -\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} p_0\left(y_i\right). \qquad (5.7)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
f\left(y_{n+1}\right) &= p_0\left(y_{n+1}\right) - \Delta_{\frac{1}{n}}^{n+1} p_0(0) \\
&= p_0\left(y_{n+1}\right) \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

y, tenemos:

$$p_0\left(y_i\right) = f\left(y_i\right) = p_1\left(y_i\right), \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n+1, \qquad (5.9)$$

como $p_0, p_1 \in \mathbb{P}_n$, concluimos que
$$p_0 \equiv p_1. \tag{5.10}$$

El mismo argumento, prueba que:

$$p_k \equiv p_{k+1} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{5.11}$$

Por tanto, es inmediato que:
$$\mathcal{H}_p \supseteq \Omega_0.$$

Cambiamos ahora el tamaño de paso h de $\frac{1}{n}$ a $\frac{1}{2n}$ y, consideramos:

$$\Omega_1 = \left\{ y_i = i\, h_1 = \frac{i}{2n} \;:\; i \in \mathbb{Z} \right\} \tag{5.12}$$

Tomamos el único $\widetilde{p} \in \mathbb{P}_n$ que interpola a f en los nodos $\{y_0, \ldots, y_n\}$ de (5.12) y, mediante el mismo argumento utilizado para (5.3), se puede demostrar que $\mathcal{H}_{\widetilde{p}} \supseteq \Omega_1$.
Ahora bien, es evidente que
$$\Omega_1 \cap \Omega_0$$
contiene infinitos puntos, por lo que
$$p = \widetilde{p}$$
y
$$\Omega_1 \subseteq \mathcal{H}_p.$$

Repitiendo el proceso de forma reiterada mediante un cambio de paso de tamaño

$$h_m = \frac{i}{2^m\, n} \qquad m = 0, 1, \ldots, n, n+1 \ldots$$

y considerando
$$\Omega_m = \left\{ y_i = i\, h_m = \frac{i}{2^m\, n} \;:\; i \in \mathbb{Z} \right\}_{m \in \mathbb{N}_0} \tag{5.13}$$

llegamos a la conclusión de que[1]:

$$\mathcal{H}_p \supseteq \Omega_m \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Tomamos ahora un $a \in \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \Omega_m$ y consideramos la función:

$$\widetilde{f}(t) = f(a\, t) \tag{5.14}$$

Es inmediato, que $\Delta_h^{n+1} \widetilde{f} = 0$, por lo que, de la misma manera que hicimos para f, podemos encontrar para $\widetilde{f}$ un $\widetilde{p} \in \mathbb{P}_n$ tal que:

$$\widetilde{p}|_{\Omega_m} = \widetilde{f}|_{\Omega_m} \quad (m \in \mathbb{N}_0). \tag{5.15}$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$\mathcal{M} = \Omega_m \cap a\, \Omega_m \tag{5.16}$$

[1]Nótese que, $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \ldots \subset \Omega_n \subset \ldots$

es un conjunto infinito. Además, tenemos:

$$p(a\,y) = f(a\,y) = \widetilde{f}(y) = \widetilde{p}(y) \quad \forall y \in \mathcal{M}. \tag{5.17}$$

Así que

$$\widetilde{p}(t) = p(a\,t), \tag{5.18}$$

Se sigue que

$$f(a) = \widetilde{f}(1) = \widetilde{f}\left(\frac{n}{n}\right) = \widetilde{p}\left(\frac{n}{n}\right) = p(a). \tag{5.19}$$

Por tanto $a \in \mathcal{H}_p$ y podemos concluir que:

$$\mathcal{H}_p \supseteq \mathbb{Q} \tag{5.20}$$

lo que implica

$$f\mid_{\mathbb{Q}} = p\mid_{\mathbb{Q}}.$$

□

Observación 5.1.1. *Como $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$, el lema 5.1.1 nos proporciona una nueva demostración del teorema de Fréchet original, pues la hipótesis de continuidad en toda la recta real para la función f obviamente conlleva que $f = p$ si $f\mid_{\mathbb{Q}} = p\mid_{\mathbb{Q}}$, $p \in \mathbb{P}_n$.*

Lema 5.1.2. *Dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta_h^{n+1} f = 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio $p_{\alpha,\beta} \in \mathbb{P}_n$ tal que*

$$f\mid_{\alpha+(\beta-\alpha)\mathbb{Q}} = p\mid_{\alpha+(\beta-\alpha)\mathbb{Q}}.$$

Demostración. Para cualquier elección de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, consideramos la función

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \widetilde{f}(t) = f\left((\beta-\alpha)\,t + \alpha\right). \end{array}$$

Obviamente $\Delta_h^{n+1}\widetilde{f} = 0$. Procediendo como en el lema 5.1.1, existirá un $\widetilde{p} \in \mathbb{P}_n$, tal que:

$$\widetilde{f}\mid_{\mathbb{Q}} = \widetilde{p}\mid_{\mathbb{Q}}.$$

Veamos que, para nuestros objetivos, es suficiente escoger el polinomio

$$p_{\alpha,\beta}(t) = \widetilde{p}\left(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right).$$

En efecto, $\forall y \in \mathbb{Q}$ sea $t = (\beta-\alpha)\,y + \alpha$. Entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= f\left((\beta-\alpha)\,y + \alpha\right) \\ &= \widetilde{f}(y) \\ &= \widetilde{p}(y) \\ &= \widetilde{p}\left(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \\ &= p_{\alpha,\beta}(t) \qquad \forall t \in \alpha + (\beta-\alpha)\mathbb{Q} \end{aligned} \tag{5.21}$$

y, por tanto

$$f\mid_{\alpha+(\beta-\alpha)\mathbb{Q}} = p\mid_{\alpha+(\beta-\alpha)\mathbb{Q}}.$$

□

En lo que sigue, bajo la suposición de que no hay confusión acerca de las soluciones de $\Delta_h^{n+1} f = 0$, denotaremos por $p_{\alpha,\beta}$ al único polinomio de grado $\leq n$ tal que $f\mid_{\alpha+(\beta-\alpha)\mathbb{Q}} = p_{\alpha,\beta}\mid_{\alpha+(\beta-\alpha)\mathbb{Q}}$ y, definimos los polinomios $p_\alpha = p_{0,\alpha}$ y $p_\beta = p_{0,\beta}$ tales que $f\mid_{\alpha\mathbb{Q}} = p_\alpha\mid_{\alpha\mathbb{Q}}$ y $f\mid_{\beta\mathbb{Q}} = p_\beta\mid_{\beta\mathbb{Q}}$, respectivamente.

Teorema 5.1.1. *Dados $n \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta_h^{n+1} f = 0$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $f \in \mathbb{P}_n$.

ii) *f es continua en un cierto $x \in \mathbb{R}$.*

iii) *$f\mid_{(a,b)}$ está acotada en un cierto intervalo abierto y no vacío $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$.*

Demostración. Las implicaciones $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$ son evidentes, por lo que sólo tenemos que demostrar $iii) \Rightarrow i)$.

Supongamos que $f \notin \mathbb{P}_n$. En este caso, podemos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ tal que

$$f\mid_{\alpha\mathbb{Q}} = p_\alpha\mid_{\alpha\mathbb{Q}}, \quad p_\beta\mid_{\beta\mathbb{Q}} = f\mid_{\beta\mathbb{Q}}$$

y

$$p_\alpha \neq p_\beta.$$

Elegimos $x_0 \in \alpha\mathbb{Q}$ y $x_1 \in \beta\mathbb{Q}$ con $0 < x_0 < x_1$ de modo que $p_{x_0}(x_0) \neq p_{x_1}(x_1)$.[2]

Dados $r, s \in \mathbb{Q}$, definimos:

$$x_{1,r} = r\,x_1, \quad x_{s,r} = x_0 + s\,(x_{1,r} - x_0) \text{ y } p_r = p_{x_0,x_{1,r}} \tag{5.22}$$

Entonces,

$$p_r\mid_{x_0+(x_{1,r}-x_0)\mathbb{Q}} = f\mid_{x_0+(x_{1,r}-x_0)\mathbb{Q}} \tag{5.23}$$

y la relación

$$p_r\,(x_{s,r}) = f\,(x_{s,r}) \tag{5.24}$$

se satisface $\forall\, r, s \in \mathbb{Q}$.

Ponemos $p_0 = p_{x_0}$ y $p_1 = p_{x_1}$. Entonces,

$$p_0(x_0) = f(x_0) \text{ y } p_1\,(x_{1,r}) = f\,(x_{1,r})\,, \quad \forall\, r \in \mathbb{Q}. \tag{5.25}$$

Por otra parte, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $r \in \mathbb{Q}$ tenemos,

$$\begin{aligned} x_{i,r} &= x_0 + i\,(x_{1,r} - x_0) \\ &= x_0 + i\,(r x_1 - x_0) \\ &= (1-i)\,x_0 + i\,r\,x_1 \in (1-i)x_0 + x_1\mathbb{Q} \end{aligned} \tag{5.26}$$

y, si establecemos

$$p_i = p_{(1-i)x_0, x_1+(1-i)x_0} \tag{5.27}$$

la relación

$$p_i\,(x_{i,r}) = f\,(x_{i,r}) \tag{5.28}$$

se satisface $\forall\, r \in \mathbb{Q}$.

[2] Nótese que $p_{x_0} = p_\alpha$ y $p_{x_1} = p_\beta$.

Así, hemos obtenido un conjunto fijo de polinomios

$$\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$$

con $p_0 \neq p_1$, y un subconjunto paramétrico de nodos

$$\{x_{1,r}, x_{2,r}, \ldots, x_{n,r}\}_{r\in\mathbb{Q}}$$

tal que, la familia de puntos

$$\{(x_{i,r}\,, f\,(x_{i,r}))\}_{r\in\mathbb{Q}}$$

es un subconjunto de la gráfica de p_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ y,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{r\to r_0\\ r\in\mathbb{Q}}} x_{i,r} &= \lim_{\substack{r\to \frac{x_0}{x_1}\\ r\in\mathbb{Q}}} ((1-i)x_0 + i\,r\,x_1) \\ &= x_0 \end{aligned} \tag{5.29}$$

En otras palabras, la gráfica de cada uno de los polinomios, p_i que hemos construido es una especie de "raíl" por el que podemos deslizar los puntos $(x_{i,r}, f(x_{i,r}))$ (con $r \in \mathbb{Q}$ variable), que pertenece a la gráfica de f. Además los puntos $x_{i,r}$ se pueden aproximar a placer al punto x_0 $\left(\text{hasta hacer}\, r \to r_0 = \frac{x_0}{x_1}\right)$ y, fijado un valor $r \in \mathbb{Q}$, todos los puntos $\{(x_{i,r}, f(x_{i,r}))\}_{i=0}^n$ pertenecen a la gráfica del polinomio p_r, lo que nos sugiere pensar que la familia de polinomios p_r debe explotar cerca de x_0 cuando $r \to r_0$. Esto es precisamente lo que vamos a probar.

Está claro que,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{r\to r_0\\ r\in\mathbb{Q}}} f(x_{i,r}) &= \lim_{\substack{r\to r_0\\ r\in\mathbb{Q}}} p_i(x_{i,r}) \\ &= \lim_{x\to x_0} p_i(x) \\ &= p_i(x_0). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Es decir,

$$\{(x_{i,r}\,, f\,(x_{i,r}))\}_{i=0}^n = \{(x_{i,r}\,, p_i\,(x_{i,r}))\}_{i=0}^n \;\to (x_0, p_i(x_0)) \quad \text{cuando}\, r \to r_0 \tag{5.31}$$

Ahora, sean $q, \widetilde{p}_r \in \mathbb{P}_n$ los polinomios de interpolación de Lagrange[3] en los puntos $\{(i\,, p_i(x_0))\}_{i=0}^n$ e $\{(i\,, p_i(x_{i,r}))\}_{i=0}^n$, definidos por

$$q(i) = p_i(x_0) \quad \text{y} \quad \widetilde{p}_r(i) = f(x_{i,r}) \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n, \tag{5.32}$$

respectivamente, donde $r \in \mathbb{Q}$ es arbitrario. De (5.30) se desprende que

$$\lim_{\substack{r\to r_0\\ r\in\mathbb{Q}}} \widetilde{p}_r(i) = q(i), \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.33}$$

Por tanto,

$$\lim_{\substack{r\to r_0\\ r\in\mathbb{Q}}} \widetilde{p}_r = q \tag{5.34}$$

[3]El polinomio de Lagrange que interpola a f en los nodos $\{t_i\}_{i=0}^n$ está dado por $L_n\left(\{f, \{t_i\}_{i=0}^n\}\right)(t) = \sum_{i=0}^n f(t_i)\, l_i(t) = \sum_{i=0}^n f(t_i) \prod_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^n \frac{t-t_k}{t_i-t_k}$

siendo la convergencia uniforme[4] en subconjuntos compactos de la recta real. Vemos que existe una fuerte relación entre p_r y $\widetilde{p}_r$. De hecho, es fácil comprobar que

$$p_r(t) = \widetilde{p}_r\left(\frac{t-x_0}{x_{1,r}-x_0}\right), \tag{5.35}$$

pues la relación

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}_r\left(\frac{x_{i,r}-x_0}{x_{1,r}-x_0}\right) &= \widetilde{p}_r\left(\frac{(1-i)x_0+irx_1-x_0}{x_{1,r}-x_0}\right)\\
&= \widetilde{p}_r\left(\frac{(rx_1-x_0)i}{x_{1,r}-x_0}\right)\\
&= \widetilde{p}_r(i)\\
&= f(x_{i,r})\\
&= p_r(x_{i,r})
\end{aligned} \tag{5.36}$$

se verifica para todo $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ y $p_r(t)$, $\widetilde{p}_r\left(\frac{t-x_0}{x_{1,r}-x_0}\right) \in \mathbb{P}_n$.

La suposición de que $p_0(x_0) \neq p_1(x_0)$ garantiza que q no es un polinomio constante, lo que implica

$$\overline{q(\mathbb{Q})} = q(\mathbb{R}) \tag{5.37}$$

donde,

$$q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad q(\mathbb{R}) = [M,\infty) \quad \text{o} \quad q(\mathbb{R}) = (-\infty, M] \tag{5.38}$$

para un cierto $M \in \mathbb{R}$.

Luego, para cada $\mathrm{C} \in q(\mathbb{R})$ y cada $\epsilon > 0$, existe algún $s \in \mathbb{Q}$ tal que $|\mathrm{C} - q(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Por otra parte,

$$\lim_{\substack{r\to r_0\\ r\in\mathbb{Q}}} \| \widetilde{p}_r - q \|_{[0,s+1]} = 0, \tag{5.39}$$

y basta escoger $|r-r_0|$ suficientemente pequeño para que

$$\begin{aligned}
\max_s \{|x_0-x_{s,r}|, |f(x_{s,r})-q(s)|\} &= \max_s \{|x_0-x_{s,r}|, |p_r(x_{s,r})-q(s)|\}\\
&= \max_s \{|x_0-x_{s,r}|, |\widetilde{p}_r(s)-q(s)|\}\\
&\leq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

y

$$\begin{aligned}
\max_s \{|x_0-x_{s,r}|, |f(x_{s,r})-\mathrm{C}|\} &\leq \max_s \{|x_0-x_{s,r}|, |f(x_{s,r})-q(s)|+|q(s)-\mathrm{C}|\}\\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\\
&= \epsilon,
\end{aligned} \tag{5.41}$$

lo que significa que

$$(x_0, \mathrm{C}) \in \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}, \quad \text{para todo } \mathrm{C} \in q(\mathbb{R}). \tag{5.42}$$

Como x_0 fue elegido arbitrariamente en el conjunto de puntos $u \in x_0\mathbb{Q}$ tales que $p_0(u) \neq p_1(u)$, podemos concluir, que f no está localmente acotada en ningún intervalo abierto y no vacío $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. $\square$

[4] $\mathbb{P}_n$ es un espacio vectorial de dimensión finita y todas las normas son equivalentes en dicho espacio.

5.2. Descripción De $\overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}$

Con el fin de dar una descripción de la clausura del grafo de las soluciones f de $\Delta_h^{n+1}f = 0$, probaremos los siguientes resultados.

Lema 5.2.1. *Sea f la solución de $\Delta_h^{n+1}f = 0$ que no es continua en ninguna parte. Entonces $\overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ que contiene un conjunto abierto no acotado y para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un intervalo infinito $\mathcal{I}_x \subset \mathbb{R}$ tal que:*

$$\{x\} \times \mathcal{I}_x = \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2} \cap \{x\} \times \mathbb{R}. \tag{5.43}$$

Demostración. Los detalles de la demostración del teorema 5.1.1, nos revelan que si $\Delta_h^{n+1}f = 0$ pero $f \notin \mathbb{P}_n$ entonces, existen

$$p_0, p_1 \in \mathbb{P}_n, \quad p_0 \neq p_1$$

tales que

$$p_0 \mid_{x_0\mathbb{Q}} = f \mid_{x_0\mathbb{Q}}, \quad p_1 \mid_{x_1\mathbb{Q}} = f \mid_{x_1\mathbb{Q}}$$

y para cada punto $u_0 \in x_0\mathbb{Q} \setminus \{u : p_0(u) = p_1(u)\}$ existe un intervalo infinito $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ con

$$\{u_0\} \times \mathcal{J} \subset \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}.$$

Además,

$$\mathcal{J} = q(\mathbb{R})$$

para un cierto polinomio $q \in \mathbb{P}_n$[5] tal que,

$$q(0) = p_0(u_0) \text{ y } q(1) = p_1(u_0).$$

En particular,

$$\{u_0\} \times [p_0(u_0), p_1(u_0)] \subset \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}.$$

lo que implica,

$$\mathrm{C}(p_0, p_1) \subset \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2},$$

donde,

$$\mathrm{C}(g, h) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \min_x\{g(x), h(x)\} \leq y \leq \max_x\{g(x), h(x)\}\Big\} \tag{5.44}$$

para cualquier elección de funciones $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esto demuestra que $\overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}$ contiene un subconjunto abierto no acotado.

Ahora, demostraremos la segunda afirmación del lema:
Dado $x \in \mathbb{R}$, si (x, y_1), $(x, y_2) \in \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}$ y $y_1 < y_2$ entonces, para todo $\epsilon > 0$, con $\epsilon < |y_1 - y_2|$, hay dos puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\max\{|x - x_1|, |x - x_2|, |y_1 - f(x_1)|, |y_2 - f(x_2)\} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, el polinomio p_{x_1,x_2+x_1} satisface

$$p_{x_1,x_2+x_1}([x_1, x_2]) \supseteq [f(x_1), f(x_2)] \text{ y } \overline{graf\{p_{x_1,x_2+x_1}\}}^{\mathbb{R}^2} \subset \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}.$$

[5] Que depende de la elección de u_0.

Así, si tomamos $w \in (y_1, y_2)$ tal que

$$y_1 < f(x_1) < y_1 + \frac{\epsilon}{2} < w < y_2 - \frac{\epsilon}{2} < f(x_2) < y_2$$

entonces, existe un punto $\xi_w \in (x_1, x_2)$ tal que $p_{x_1,x_2+x_1}(\xi_w) = w$, esto es:

$$\text{máx}\{|x-\xi_w|, |w - p_{x_1,x_2+x_1}(\xi_w)|\} = |x-\xi_w| \leq \text{máx}\{|x-x_1|, |x-x_2|\} \leq \epsilon$$

y, $(x, w) \in \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}$, pues ϵ es arbitrario. Se sigue que:

$$\{x\} \times [y_1, y_2] \subset \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}.$$

Esto demuestra, que

$$\overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2} \cap \{x\} \times \mathbb{R} = \{x\} \times \mathcal{I}_x,$$

para cierto intervalo $\mathcal{I}_x \subset \mathbb{R}$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Además, también implica que, $\overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}$ es un subconjunto conexo, pues, la gráfica de p_0 es conexa y corta a todos los conjuntos $\{x\} \times \mathcal{I}_x$.

Finalmente, demostraremos que $\mathcal{I}_x$ es un intervalo infinito para todo x. Ya tenemos probado esto para los puntos $x \in x_0\mathbb{Q} - \{u : p_0(u) = p_1(u)\}$.
Ahora, dado cualquier punto $x \in \mathbb{R}$, existe una sucesión infinita

$$\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \subset x \in x_0\mathbb{Q} - \{u : p_0(u) = p_1(u)\}, \text{ tal que: } \quad \lim_{n\to\infty} u_n = x.$$

Sean

$$\mathcal{N}_0 = \{n : \sup \mathcal{I}_{u_n} = \infty\} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}_1 = \{n : \text{ínf}\, \mathcal{I}_{u_n} = -\infty\}$$

Claramente,

$$\mathcal{N}_0 \cup \mathcal{N}_1 = \mathbb{N},$$

de manera que,

$$\#\mathcal{N}_0 = \infty \quad \text{o} \quad \#\mathcal{N}_1 = \infty,$$

por lo que $\mathcal{I}_x$ no está acotado de ninguna manera. □

Teorema 5.2.1. *Dados $n \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta^{n+1} f = 0$, si $f \notin \mathbb{P}_n$, entonces hay funciones $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tales que $\overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2} = \mathrm{C}(g, h)$. Además $h(x) - g(x) = +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y existen $p_0, p_1 \in \mathbb{P}_n$ tales que $p_0 \neq p_1$ y $\mathrm{C}(p_0, p_1) \subset \mathrm{C}(g, h)$. Finalmente, h es semicontinua inferior y g es semicontinua superior.*

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{R}$, ponemos

$$g(x) = \text{ínf}\left\{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}\right\},$$

y

$$h(x) = \sup\left\{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}\right\}.$$

Obviamente, con está notación, y teniendo en cuenta lo establecido en la prueba del lema 5.2.1, quedan probadas las dos primeras afirmaciones del teorema y sólo debemos probar que h es semicontinua inferior[6] y g es semicontinua superior. Así, sea x_0 tal que $h(x_0) = M < \infty$ y

[6] Sólo haremos la prueba para h, pues la prueba para g es análoga.

supongamos que h no es semicontinua inferior en x_0. Entonces, existen algún $\delta > 0$ y una sucesión $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty} \to 0$[7] tal que,

$$h(x_0 + \xi_n) \geq M + \delta \quad \forall n.$$

Ahora, se sigue de

$$h(x_0) = M < \infty$$

que

$$f(x_0) \leq M,$$

ya que,

$$(x_0, f(x_0)) \in graf\{f\} \subset \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}.$$

Luego,

$$f(x_0) = p_{x_0}(x_0) \leq M$$

y existe algún $\epsilon > 0$ tal que

$$p_{x_0}(y) \leq M + \frac{\delta}{2} \quad \forall y : \quad |y - x_0| \leq \epsilon.$$

Se sigue que

$$g(y) \leq M + \frac{\delta}{2} \quad \forall y : \quad |y - x_0| \leq \epsilon$$[8]

Por otra parte, $\forall n$ suficientemente grande, tenemos que,

$$|\xi_n| \leq \delta$$

esto es,

$$g(x_0 + \xi_n) \leq M + \frac{\delta}{2} < M + \delta \leq h(x_0 + \xi_n)$$

lo que implica que,

$$\left(x_0 + \xi_n, M + \frac{\delta}{2}\right) \in \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2} \qquad \forall n \geq n_0,$$

es decir,

$$\left(x_0, M + \frac{\delta}{2}\right) \in \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2} \text{ y } h(x_0) \geq M + \frac{\delta}{2} > M$$

lo cual, es una contradicción. □

No es difícil encontrar ejemplos concretos en los que $\overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}$ no llena el plano y, de hecho, las funciones h, g anteriores son discontinuas.

Veamos un caso concreto:

Tomemos $f(t) = t\mathcal{L}^2(t)$, donde $\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{Q}$-lineal, $\mathcal{L}(v) = 1$ $(v \in \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ es una base de Hamel de $\mathbb{R}$. Entonces $\Delta_h^4 f(x) \equiv 0$. Además $\overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\right\}$, por lo que, en este caso,

$$h(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \text{ y } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ +\infty & \text{si } x \geq 0. \end{cases}.$$

[7] $\xi_n \neq 0$, para cada n.

[8] Pues, $\{p_{x_0}\} \subset \overline{graf\{f\}}^{\mathbb{R}^2}$.

Bibliografía

[1] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their Applications*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, Academic Press, Inc., 1966, J. Aczél, 2006.

[2] J. Aczél, *Functional equations: history, applications and theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston- Lancaster, 1984.

[3] J. Aczél, *A Short Course on Functional Equations*. Based Upon Recent Applications to the Social and Behavioral Sciences. D. Reidel Publishing Company, Dordrech, Holland, 1987.

[4] J. Aczél and J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1989.

[5] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press (1992).

[6] A. Albert, J. A. Baker, Functions with bounded n-th differences, Ann. Polon. Math. 43(1983), 93-103.

[7] J. M. Almira, A. J. López-Moreno, On solutions of the Fréchet functional equation, J. Math. Anal. Appl. 332 (2007) 1119-1133.

[8] J. M. Almira, A. J. López-Moreno, Characterizing polynomials by forward differences. Appl. Math. E-Notes 3 (2003), 1-9

[9] J. M. Almira, Sobre lógica y matemáticas: Algunas observaciones sobre los fundamentos de la matemática. Rev. Acad. Can. Ciencias XVII (1-2) (2005) 117-139.

[10] J. M. Almira, A note on classical and p-adic Fréchet functional equations with restrictions, Preprint, 2011. (Este artículo está disponible en ArXiv:1104.5336)

[11] J. A. Baker, D'Alembert's functional equation in Banach algebras, Acta Sci. Math. 32(1971), 225-234.

[12] J. A. Baker, The stability of the cosine equation, Proc. Amer. Math. Soc. 80(1980), 411-416.

[13] K. Baron, Functions with differences in subspaces, Proceedings of the 18th International Symposium on Functional Equations, Univ. of Waterloo, Faculty of Mathem. 1980, 8-9.

[14] A. L. Cauchy, Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, 1. Analyse Algébrique, V. París, 1821. [Oeuvres (2) 3, París, 1897].

[15] Z. Ciesielski, Some properties of convex functions of higher orders, Ann. Pol. Math. 7 (1959) 1-7.

[16] S. Czerwik *Functional equations and inequalities in several variables*, World Scientific, 2002.

[17] G. Darboux, Mémoire sur les functions discontinues, Ann. Sci. Scuola Sup. 4 (1875) 57-112.

[18] M. Fréchet, Une definition fonctionnelle des polynomes, Nouv. Ann. 9 (4) (1909) 145-162.

[19] M. Fréchet, Les polynomes abstraits, J. Math. Pures Appl. 8 (4) (1929) 71-92.

[20] R. Ger, On some properties of polynomial functions, Ann. Pol. Math. 25 (1971) 195-203.

[21] R. Ger, On extensions of polynomial functions, Results in Math. 26 (1994) 281-289.

[22] G. Hamel, Einer basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Math. Ann. 60 (1905) 459-472.

[23] T. Jech; *Set Theory* . Springer, 2003.

[24] M. Kuczma, An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Polish Scientific Publishers and Silesian University Press, Warszawa-Krakow-Katowice, 1985.

[25] M. Kuczma, On measurable functions with vanishing differences, Ann. Math. Sil. 6 (1992) 42-60.

[26] M. A. Mckiernan, On nth ordered differences and Hamel bases, Ann. Pol. Math. 19 (1967) 331-336.

[27] A. K. Mirmostafaee, Stability of Fréchet functional equation in non-arquimedian normed spaces, Preprint, 2011.

[28] H. Rubin and J. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice, II.* Amsterdam, North-Holland, 1985.