

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

PROBLEMAS DE BIFURCACIONES
EN MODELOS DE CRISTALES LÍQUIDOS

María Isabel Méndez Aller

con la dirección y supervisión de

Dr. Fernando Pestana da Costa

Universidade Aberta (Portugal)

UNED 2014

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Fernando da Costa, que bajo su guía y su inestimable ayuda, he conseguido sacar adelante este trabajo.

También quisiera dar las gracias a todos mis profesores de la UNED, quienes durante estos años me han ayudado a alcanzar mis metas.

Por último, expresar mi gratitud a mi familia, especialmente a mi marido y mi hijo, que han soportado con paciencia y cariño el tiempo dedicado a mis estudios.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	II
1. Cristales Líquidos	1
1.1. Descubrimiento de los cristales líquidos	1
1.2. Tipos y Propiedades	2
1.2.1. Nemáticos	3
1.2.2. Colestéricos	4
1.2.3. Esméticos	4
1.2.4. Polimorfismos	5
1.3. Resumen	5
2. Aspectos Matemáticos: Estudio Cualitativo de Sistemas Planos Autónomos	6
2.1. Ecuaciones y Sistemas Planos Autónomos	7
2.1.1. Propiedades de las Soluciones	8
2.2. Diagramas de Fase	9
2.2.1. Construcción Diagrama de Fase en Dimensión 1	10
2.2.2. Diagrama de Fase en Dimensión 2	12
2.3. Estabilidad de las Soluciones en Sistemas Autónomos Planos	14
2.3.1. Sistemas Lineales	14
2.3.2. Sistemas no Lineales	17
2.4. Bifurcaciones	24
2.4.1. Bifurcación silla nodo	24
2.4.2. Bifurcación Pitchfork	25

2.4.3. Bifurcación vertical	26
2.4.4. Bifurcación de Poincaré - Andronov - Hopf	27
2.5. Resumen	29
3. Teoría del Continuo en Cristales Líquidos	30
3.1. Energía Libre de Frank - Oseen	30
3.2. Campos Eléctricos y Magnéticos	32
3.3. Anclaje	32
3.4. Transición de Freedericksz en Nemáticos	33
3.5. Ecuaciones de Equilibrio	34
3.6. Soluciones de Equilibrio	35
3.6.1. Cristal Líquido con Anclaje Fuerte	35
3.6.2. Twist con Anclaje Fuerte	36
3.6.3. Soluciones de Equilibrio Tilt y Twist	37
3.7. Resumen	40
4. Transición de Freedericksz en Nemáticos	41
4.1. Transiciones Clásicas	41
4.1.1. Geometría Splay	42
4.1.2. Geometría Twist	44
4.1.3. Geometría Bend	45
4.1.4. Estudio cualitativo: aproximación a una constante	46
4.2. Pretilt en las fronteras	48
4.3. Campos aplicados con un ángulo entre 0 y $\frac{\pi}{2}$	50
4.4. Transición de Freedericksz con Campos Eléctricos	51
4.5. Efectos del Anclaje Débil	54
4.6. Análisis de las Bifurcaciones con condiciones de frontera Pre-twist	57
4.6.1. Análisis de las Bifurcaciones	61
4.7. Pretwist con condiciones de frontera antisimétricas	65
4.7.1. Condición $\phi_1 > \phi_0$	66
4.7.2. Condición $\phi_1 < \phi_0$	70

4.7.3. Diagrama de Bifurcación	71
4.8. Resumen	73
5. Aplicaciones de los cristales líquidos nemáticos	74
5.1. Twisted Nematic (TN)	74
5.2. Super Twisted nematic (STN)	80
5.3. In-Plane Switching (IPS)	80
5.4. Conclusiones Finales	81
5.5. Resumen	82

Introducción

Aunque los cristales líquidos aparecieron por primera vez en 1888, no fue hasta la década de los 60 del siglo pasado, cuando comenzó su verdadera expansión, debido fundamentalmente a sus aplicación en la fabricación de pantallas de cristal líquido, las cuales sustituyeron a las de rayos catódicos, mejorando no solo desde el punto de vista del consumo de energía, si no también mejorando las propiedades electroópticas.

Nuestro objetivo será a través de los cinco capítulos que componen este trabajo, explicar las propiedades que hacen tan especiales a estos materiales, dejando claro que es una materia multidisciplinar, en la que las Matemáticas tienen un peso considerable.

En el capítulo 1 definimos los cristales líquidos como un nuevo estado de la materia, que fue descubierto por casualidad. Existen varios tipos, cada uno adecuado a unas aplicaciones específicas, centrándonos en los cristales líquidos nemáticos, base de la fabricación de pantallas, debido fundamentalmente a que se produce la Transición de Freedericksz, efecto que desde un punto de vista matemático corresponde a una bifurcación, por ello dedicamos el capítulo 2 al estudio cualitativo de las ecuaciones autónomas, centrándonos en los sistemas dinámicos, dentro de los cuales incluimos a los cristales líquidos. Terminaremos este capítulo haciendo una revisión de los tipos de bifurcaciones más usuales.

En el capítulo 3 empezamos el estudio de la Teoría del Continuo en los cristales líquidos, fundamentada por la utilización de un vector director como orientación promedio de las moléculas del cristal líquido. Sobre el cristal actúan varias fuerzas: la energía elástica (energía libre de Frank), las fuerzas provocadas por las superficies que confinan al cristal líquido (fuerzas de anclaje) y fuerzas externas, provocadas por campos eléctricos o magnéticos. La competición entre todas ellas, llevan al director a soluciones de equilibrio, provocando el Efecto Freedericksz.

En el capítulo 4 revisaremos las Transiciones de Freedericksz más usuales en los cristales líquidos nemáticos, observando que dicho efecto se produce cuando se alcanza un determinado umbral en la intensidad del campo aplicado, pasando de un equilibrio o solución fundamental a otras soluciones también de equilibrio, produciéndose generalmente una bifurcación tipo pitchfork. Será en las dos secciones finales de este capítulo donde haremos un estudio de la bifurcación con condiciones de frontera pretwist, usando los time maps como una herramienta muy útil, que nos permitirán dibujar con todo detalle los diagramas de bifurcación.

En el capítulo 5 vamos a explicar el funcionamiento de los dispositivos de visualización tipo twisted nematic (TN), que fueron los primeros en utilizarse, del super twisted nematic (STN), que mejora las propiedades del anterior y algunos más modernos, dado que estamos en una industria en desarrollo en la que están involucrados innumerables personas dedicados a las ciencias (Matemáticas, Física, Química, Ingeniería,...) y grandes compañías industriales.

Capítulo 1

Cristales Líquidos

Si uno lo piensa bien, resulta extraño escuchar a alguien hablar de cristales líquidos. No es fácil unir ambas palabras si se tiene en cuenta lo que cada una de ellas significa. Sin embargo, los encontramos en los objetos más cotidianos: tabletas, teléfonos móviles, ordenadores portátiles, televisores ... En casi todos los hogares se dispone de varios equipos que tienen dispositivos de visualización, los conocidos displays, cuyos componentes principales son de cristal líquido. Podemos encontrarlos también los paneles de información en aeropuertos o estaciones, las ventanas que cambian de translúcidas a opacas, en fotocopiadoras o en proyectores. Asimismo, se encuentran en aplicaciones tan dispares como los cosméticos, los indicadores de temperatura o los tejidos resistentes al fuego o a los impactos.

En este capítulo se hace una breve introducción histórica sobre los cristales líquidos en la que se descubre que éstos son sustancias donde la transición de sólido a líquido no es directa, sino que tiene lugar a través de un estado intermedio. Posteriormente se presentan las características más relevantes, para concluir con una breve clasificación, presentando los cristales líquidos nemáticos que serán fundamentales en este trabajo.

1.1. Descubrimiento de los cristales líquidos

El primero en observar un cristal líquido fue el botánico austriaco Friedrich Reinitzer¹ en 1888, cuando vió que una sustancia sólida derivada del colesterol (benzoato de colesterilo) formaba un líquido turbio cuando lo calentaba hasta su temperatura de fusión (145°C). Al seguir calentando, la turbidez persistía hasta que a 179°C el líquido se volvía transparente. Poco tiempo después se descubrieron otras sustancias que presentaban el mismo comportamiento y pronto se demostró que era un nuevo estado de la materia que podía aparecer entre el sólido y el líquido.

Y en esto radica su interés: estos materiales exhiben la dualidad sólido-líquido, es decir que simultáneamente, poseen propiedades de los líquidos, fluidez y viscosidad, y propiedades ópticas que se parecen de un modo asombroso a los cristales. Por este motivo, en 1889 el físico alemán Otto Lehman² los llamó **cristales líquidos**.

Pero no fue hasta la década de los 60 del siglo XX, cuando el interés por los cristales líquidos se hizo patente debido fundamentalmente a su gran cantidad de aplicaciones prácticas. En 1970, se demostró que la corriente eléctrica de

¹Friedrich Reinitzer (1857 – 1927): químico y botánico austriaco, descubridor de los cristales líquidos.

²Otto Lehman (1855 – 1922): físico alemán considerado el "padre" de los cristales líquidos.

baja intensidad cambia la estructura interna del cristal líquido, lo que provoca variaciones en sus propiedades ópticas. Estas variaciones fueron aprovechadas, junto con otras propiedades como la polaridad de sus moléculas, en los primeros aparatos de cristal líquido, tales como las calculadoras, y que constituyeron la base para el desarrollo de la tecnología de las pantallas planas (LCDs)³

Como consecuencia, su estudio se ha incrementado de forma notoria en los últimos años y en la actualidad hay cientos de grupos e institutos de investigación dedicados a la búsqueda de nuevos fenómenos y aplicaciones.

1.2. Tipos y Propiedades

En un sólido cristalino, las moléculas ocupan posiciones fijas y están orientadas de una manera específica una respecto a las otras. Esto hace que algunas de sus propiedades cambien en función de la dirección del espacio que se considere: es lo que se llama **anisotropía**. Por el contrario, en un líquido, las moléculas están completamente desordenadas. Esta característica les confiere fluidez (capacidad de adoptar la forma del recipiente que lo contiene) y hace que sus propiedades sean isotropas (no dependen de la dirección considerada). Los cristales líquidos combinan la facilidad de movimiento de los líquidos con la anisotropía de los sólidos.

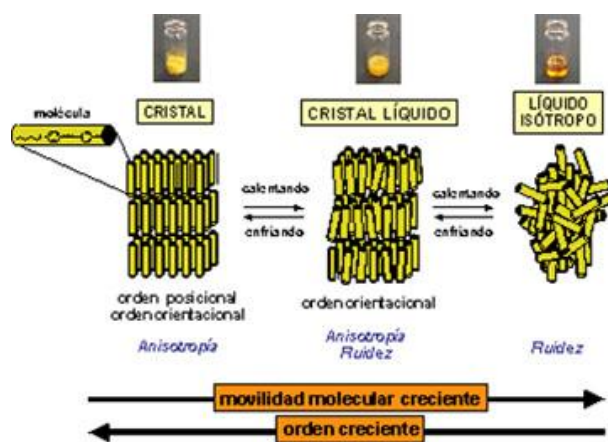


Figura 1.1: Estados de la materia y sus propiedades.

Podemos concluir entonces que los cristales líquidos son materiales que tienen varios estados intermedios entre el sólido y el líquido. Estos estados intermedios se llaman mesofases.

En estos materiales cuando las fases se obtienen por la variación de la concentración de un disolvente, se les llama liotrópicos. Así, en muchos sistemas biológicos existen organizaciones de este tipo de cristales líquidos. Uno de los ejemplos mejor conocidos son los fosfolípidos, principales componentes de las membranas celulares.

Cuando las diferentes fases de los cristales líquidos existen en un determinado rango de temperaturas, a estos materiales se les llama **termotrópicos**. El interés de éstos radica en sus aplicaciones por sus propiedades electroópticas.

Los cristales líquidos termotrópicos pueden estar compuestos por moléculas calamíticas o discóticas. Las primeras tienen una forma alargada y delgada, mientras que las segundas tienen formas de discos. Los cristales líquidos

³LCD: Liquid Cristal Device

termotrópicos formados por moléculas calamíticas se emplean más en dispositivos de visualización y aplicaciones fotónicas. El interés de los discóticos se centra en estudios de biología.

En el caso de las moléculas calamíticas la forma alargada hace que se coloquen paralelamente, pero al mismo tiempo con la libertad de poder desplazarse las unas respecto a las otras a lo largo de sus ejes. La dirección de la orientación promedio de las moléculas se representa matemáticamente por el vector director \mathbf{n} .

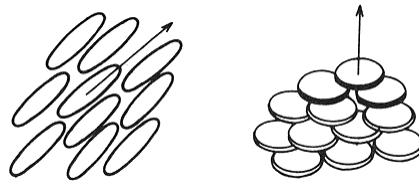


Figura 1.2: Moléculas calamíticas.

Georges Friedel ⁴ en 1922 clasificó los cristales líquidos termotrópicos, según su simetría, en tres grandes grupos. Las principales mesofases son la nemática, colestérica y esméctica.

1.2.1. Nemáticos

La fase nemática exhibe orden en la orientación de sus moléculas y al mismo tiempo desorden en sus centros de masa. Las moléculas pueden moverse lateralmente, girar alrededor del eje común o deslizarse paralelamente a él. Podríamos comparar este arreglo molecular como el de las cerillas en una caja: aunque pueden moverse, la presencia de las demás impone restricciones a estos movimientos y tiende a mantenerlas paralelas entre sí.

De este modo, respecto a la posición de sus centros de masa, un nemático se comporta como un líquido ordinario y sus moléculas se mueven caóticamente. En cambio, a diferencia de un líquido ordinario, sus moléculas se orientan, y al moverse mantienen sus ejes paralelos al vector director. Ver Figura 1.4.

Desde un punto de vista óptico aparecen unas perturbaciones estructurales en forma de hilos, de donde el nemático recoge su nombre, (proviene del término griego nema que significa hilo), y desde un punto de vista de la distribución de átomos en el espacio, son unas varillas con una relación entre largo y ancho de 3:1 a 20:1.

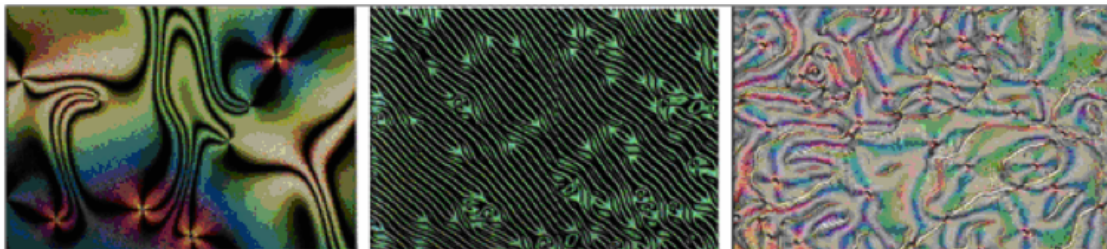


Figura 1.3: Diferentes texturas de una fase nemática.

Esta mesofase se utiliza en los sistemas de visualización porque la orientación de sus moléculas puede ser controlada

⁴George Friedel (1865 – 1933): Minerólogo y cristalógrafo francés que clasificó las mesofases de los cristales líquidos termotrópicos.

fácilmente con un campo eléctrico de baja amplitud.

1.2.2. Colestéricos

La mesofase colestérica presenta una estructura helicoidal como la mostrada en la Figura 1.5. Las moléculas están dispuestas en planos paralelos y cada uno de estos planos presentan las mismas características que la fase nemática. Los vectores directores (n) giran describiendo una hélice alrededor de un eje perpendicular. El paso de hélice corresponde cuando sus vectores directores (n) son paralelos.

Si se hace incidir luz con una longitud de onda igual al paso de la hélice, y de alguna manera se hace variar el paso de la hélice, por ejemplo variando la temperatura del dispositivo, se produce un cambio de color de éste. Esta propiedad se utiliza en dispositivos indicadores de temperatura.

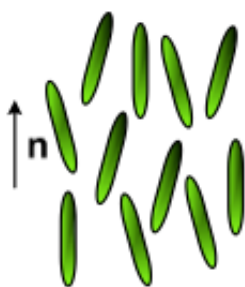


Figura 1.4: Disposición en la mesofase nemática

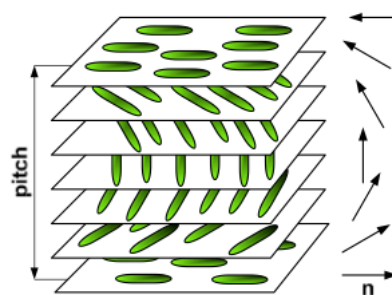


Figura 1.5: Disposición en la mesofase colestérica

1.2.3. Esméticos

Además del orden en la orientación de las moléculas presente en la fase nemática, la fase esméctica se caracteriza porque las moléculas se colocan en capas paralelas y equidistantes. La distancia entre capas es en general próxima a la longitud de una molécula. En el interior de estas capas los centros de gravedad de las moléculas están desordenados, pero los directores o dirección promedio molecular (n) tienen la misma orientación media.

Si los directores moleculares están perpendiculares a las capas, la fase correspondiente es la esméctica A, Figura 1.6.a. En la fase esméctica C, las moléculas están inclinadas un ángulo θ con relación al vector normal a las capas (N).

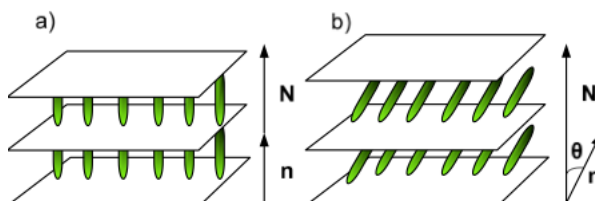


Figura 1.6: Disposición en las mesofases esméctica A y C

1.2.4. Polimorfismos

Los anteriores tipos de mesofases presentadas, no son, en modo alguno, independientes entre sí. De hecho una gran cantidad de sustancias, en el intervalo de temperaturas existente entre la fases sólida y líquida, presentan dos o más tipos diferentes, a medida que aumenta la temperatura. Por ejemplo el PAA (p-azoxyanisole) es un sólido por debajo de 118°C , un cristal líquido nemático entre 118°C y $135,5^{\circ}\text{C}$. Podemos verlo en el diagrama de fase en la Figura 1.7 junto a otros ejemplos.

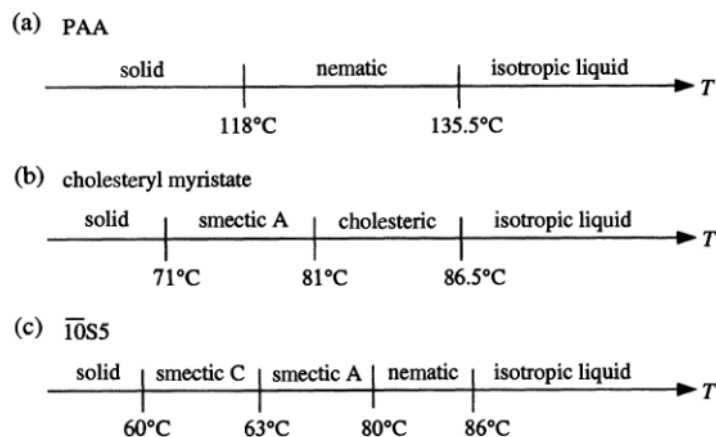
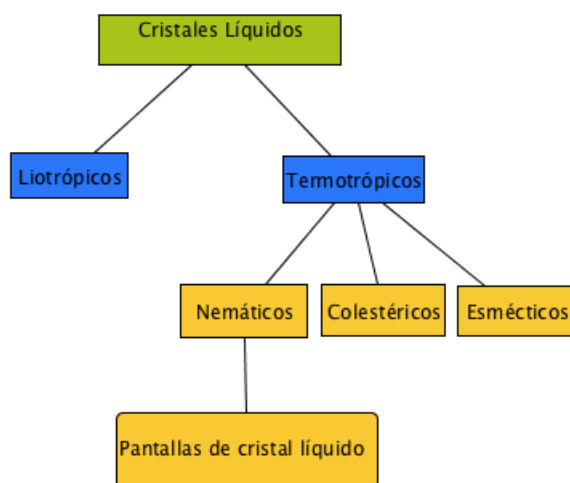


Figura 1.7: Diagramas de fase de a) PAA b) Miristato de colesterilo c) $\overline{10S5}$ (4-n-pentylphenylthiol-4'-n-decyloxybenzoate).

Estas transformaciones, así como los intervalos de temperaturas en los que tiene lugar cada mesofase, son características de cada sustancia y determinan cuál es el tipo de aplicación en que se utilizan.

1.3. Resumen



Capítulo 2

Aspectos Matemáticos: Estudio Cualitativo de Sistemas Planos Autónomos

La industria de los displays de cristal líquido ha cambiado nuestras vidas. Las pantallas planas han abierto un nuevo mundo con los móviles, las tabletas, el 3D, lo que puede ser interpretado como una segunda revolución en las tecnologías de la información.

El atractivo que supone descubrir la naturaleza de los materiales de cristal líquido y su incidencia en la moderna tecnología suscita la curiosidad científica de muchos investigadores, universidades e instituciones, involucrando a distintas áreas de la ciencia: Física, Química, Ciencia de los materiales, Biología, Medicina, Ingeniería y como no, las Matemáticas.

Entre las partes de las Matemáticas implicadas en los cristales líquidos destacamos: Modelización matemática, Cálculo variacional, Ecuaciones diferenciales, Álgebra, Topología, Probabilidad, Estadística y Computación científica.

Uno de los mayores trabajos matemáticos ha sido desarrollado en la teoría de Oseen-Frank (que veremos en el capítulo 3), y en el cual la orientación de las moléculas del cristal líquido son descritas por un vector director. Por otro lado, existe otra teoría muy popular entre los físicos, la de Landau-de Gennes, en la cual el parámetro de orden que describe la orientación de las moléculas es una matriz, llamada Q-tensor.

Ambas teorías dan lugar a un problema de cálculo variacional en el que tenemos que minimizar el funcional:

$$J(n) = \int_{\Omega} f(x, n(x), \nabla n(x)) dx \quad \text{tal que } n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ donde } \Omega \subset \mathbb{R}^m, \text{ y } m = (2, 3).$$

Problema, que en nuestro caso consistirá en minimizar la energía total de un cristal líquido ocupando un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, satisfaciendo un conjunto de condiciones de frontera, y así obtener las soluciones de equilibrio de n (vector director).

Si aplicamos un campo eléctrico o magnético externo, tiene lugar el efecto denominado **Transición de Fredericksz**¹, que es la base teórica de los displays de cristal líquido, consistente en el cambio de estabilidad entre dos distintos

¹V. Fredericksz, científico ruso, descubrió el efecto que lleva su nombre, un fenómeno que juega un papel muy importante en la tecnología LCD.

minimizadores cuando el valor del campo externo aplicado alcanza un valor crítico, es decir, la intensidad del campo eléctrico o magnético aplicado va a provocar una reorientación del vector director(n).

El estudio matemático de este efecto corresponde al estudio de las **bifurcaciones**, cuyos aspectos teóricos introduciremos en el presente capítulo, comenzando con las ecuaciones autónomas sobre las que es posible conseguir muchísima información sin conocer su solución analítica, haciendo un estudio cualitativo de sus soluciones, utilizando para ello la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales atribuida a Henry Poincaré (1854-1912), y que pretende dar respuesta a cuestiones como la estabilidad o el comportamiento asintótico de las soluciones.

Así, pensando en la resolución de las ecuaciones diferenciales asociadas a los cristales líquidos, veremos que una ecuación no autónoma se puede hacer equivalente a un sistema de dos ecuaciones autónomas, siendo nuestro objetivo adquirir familiaridad con los diagramas de fase y las herramientas más habituales para su elaboración, haciendo, por último, un repaso de los tipos de bifurcaciones más habituales cuando las ecuaciones dependen de un parámetro.

2.1. Ecuaciones y Sistemas Planos Autónomos

Definición 2.1 (Ecuación Diferencial Autónoma)

Sea I un intervalo abierto en la recta real \mathbb{R} tal que $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n : t \rightarrow x(t)$ sea una función diferenciable. Usamos la notación \dot{x} para denotar $\frac{dx}{dt}$, y nos referimos a t como tiempo o variable independiente. Si tomamos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \rightarrow f(x)$, consideramos la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

donde la incógnita es una función de $x(t)$. Este tipo de ecuaciones se llaman autónomas porque la función f no depende de la variable independiente t , aparecen con muchísima frecuencia como modelos matemáticos para el estudio de fenómenos físicos.

Definición 2.2 (Sistema Plano Autónomo)

Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo y $x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en la variable t . Sean también

$$f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \rightarrow f_i(x_1, x_2); \quad i \in \{1, 2\}$$

funciones en dos variables. Llamamos sistema plano autónomo al par de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.2)$$

Si utilizamos la notación vectorial, podemos escribir $x = (x_1, x_2)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ y $f = (f_1, f_2)$, de modo que la ecuación (2.2) obtiene ahora la forma más compacta

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.3)$$

Ejemplo 2.1 (Oscilador armónico lineal)

Consideramos la ecuación de segundo orden $\ddot{x} + x = 0$ que puede transformarse en el par de ecuaciones de primer

orden

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Las ecuaciones de este sistema serán relevantes para nosotros, ya que juegan un papel importante es alguna de las bifurcaciones de los cristales líquidos, como veremos en el capítulo 4.

2.1.1. Propiedades de las Soluciones

Definición 2.3 (Solución)

Decimos que una función diferenciable x es solución de $\dot{x} = f(x)$ en el intervalo I si $\dot{x}(t) = f(x(t))$ para todo $t \in I$.

A menudo, estamos interesados en resolver el siguiente problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

llamando $\varphi(t, x_0)$ a la solución de (2.5) tal que $\varphi(t, x_0) = x(t)$ y $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Una de las características de este tipo de ecuaciones y sistemas, es que no hay pérdida de generalidad si asumimos el problema de valor inicial con $t_0 = 0$.

Vamos a definir el teorema de Existencia y Unicidad de las soluciones de una ecuación autónoma.

Teorema 2.1 Existencia y Unicidad de las Soluciones

- (i) Si $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, entonces, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe un intervalo (posiblemente infinito) $I_{x_0} \equiv (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ conteniendo t_0 y una solución $\varphi(t, x_0)$ del problema de valor inicial definido para todo $t \in I_{x_0}$, satisfaciendo la condición inicial $\varphi(0, x_0) = x_0$. Además, si α_{x_0} es finito, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \alpha_{x_0}^+} |\varphi(t, x_0)| = +\infty,$$

0, si β_{x_0} es finito, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \beta_{x_0}^-} |\varphi(t, x_0)| = +\infty,$$

- (ii) Si, además, $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi(t, x_0)$ es única en I_{x_0} y $\varphi(t, x_0)$ es continua en (t, x_0) junto con sus primeras derivadas parciales, por lo que, $\varphi(t, x_0)$ es una función C^1 .

Se observa fácilmente que son ecuaciones de variables separadas, y aunque existe un método para resolverlas, es posible que las integrales que aparezcan no se puedan calcular. Por ello, vamos a definir los elementos necesarios para el estudio cualitativo de estas ecuaciones, y así poder analizar las soluciones a través de los diagramas de fase.

2.2. Diagramas de Fase

Para el estudio cualitativo de ecuaciones y sistemas, vamos a introducir las siguientes definiciones:

Definición 2.4 (Campo de Direcciones)

Si consideramos el lado derecho de la ecuación $\dot{x} = f(x)$, para cada punto del espacio (t, x) , (si estamos en dos dimensiones (t, x_1, x_2) , pero en caso de 1 dimensión, hablaríamos del plano (t, x)), nos da el valor de la derivada $\frac{dx}{dt}$, que puede ser considerada como la pendiente de un segmento de línea en dicho punto. La colección de dichos segmentos de línea es llamada Campo de Direcciones.

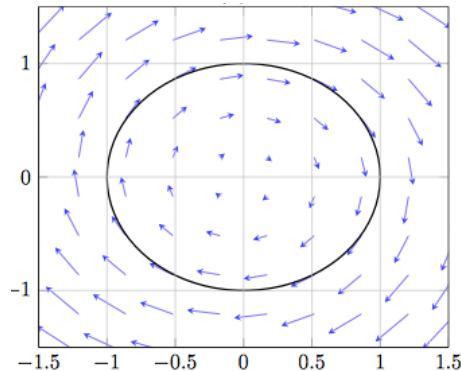


Figura 2.1: Órbita circular y campo de direcciones del oscilador armónico lineal

Definición 2.5 (Trayectoria)

En general, a la curva solución $x(t)$ tal que $x(0) = x_0$ se le llamará trayectoria a través de x_0 .

La trayectoria es tangente en cada uno de sus puntos a los segmentos de línea del campo de direcciones.

Definición 2.6 (Órbitas)

Como el sistema es autónomo (la función f es independiente de t) resulta natural considerar las proyecciones de las trayectorias sobre el plano x_1x_2 a las que llamaremos órbitas. Una órbita del oscilador armónico lineal aparece en el ejemplo 2. 1.

En general, definimos órbita de x_0 , como el conjunto de \mathbb{R}^n

$$\gamma_{x_0} = \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})} \varphi(t, x_0),$$

considerando, órbitas positivas y negativas respectivamente:

$$\begin{aligned} \gamma_{x_0}^+ &= \bigcup_{t \in [0, \beta_{x_0})} \varphi(t, x_0) \\ \gamma_{x_0}^- &= \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, 0]} \varphi(t, x_0) \end{aligned}$$

Definición 2.7 (Diagrama de Fase)

Sobre la órbita γ_{x_0} insertamos flechas para indicar la dirección en la que $\varphi(t, x_0)$ está cambiando cuando t aumenta. Así llamamos diagrama de fase al dibujo de la colección de todas las órbitas junto con las flechas de dirección.

Para comenzar a esbozarlos necesitamos además definir los siguientes conceptos

Definición 2.8 (Puntos de Equilibrio)

Un punto \bar{x} es llamado punto de equilibrio (también llamado punto crítico) de $\dot{x} = f(x)$, si $f(\bar{x}) = 0$.

Definición 2.9 (Punto crítico estable e inestable)

Un punto crítico \bar{x} se dice **estable** si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que para cada x_0 para el cual $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, la solución $\varphi(t, x_0)$ de $\dot{x} = f(x)$ en x_0 para $t = 0$ satisface $\|\varphi(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

El punto de equilibrio \bar{x} es **inestable**, si no es estable, es decir, existe un $\eta > 0$ tal que, dado $\delta > 0$, existe un x_0 con $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ y $t_{x_0} > 0$ tal que $\|\varphi(t, x_0) - \bar{x}\| = \eta$, para todo $t > t_{x_0}$.

Definición 2.10 (Punto crítico asintóticamente estable)

Un punto de equilibrio es asintóticamente estable, si es estable y además, existe un $r > 0$ tal que $\|\varphi(t, x_0) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ para todos los x_0 , satisfaciendo $\|x_0 - \bar{x}\| < r$.

Definición 2.11 (α - límite y ω - límite)

Si $\gamma_{x_0}^-$ es acotado, entonces el conjunto

$$\alpha(x_0) = \lim_{t \rightarrow \alpha_{x_0}^+} \varphi(t, x_0)$$

es llamado el conjunto α - límite de x_0 , de igual forma, si $\gamma_{x_0}^+$ está acotado, entonces el conjunto

$$\omega(x_0) = \lim_{t \rightarrow \beta_{x_0}^-} \varphi(t, x_0)$$

es llamado el conjunto ω - límite de x_0 .

Estos dos conjuntos se pueden describir como el lugar geométrico donde nace y muere la órbita de la solución $\varphi(t, x_0)$.

2.2.1. Construcción Diagrama de Fase en Dimensión 1

A continuación, vamos a dar las pautas para la construcción del Diagrama de Fase de una ecuación autónoma.

- Consideramos la recta \mathbb{R} y marcamos los puntos críticos de la ecuación (2.1).
- En cada uno de los intervalos en que queda dividida la recta, el signo de $f(x)$ es constante, porque $f(x)$ es continua y no puede cambiar de signo sin anularse. Si consideramos un intervalo en que $f(x)$ es positivo, las soluciones solo pueden crecer mientras estén en él. En un intervalo en que $f(x)$ es negativo, las soluciones decrecen.
- Marcamos con una flecha que apunta a la derecha, los intervalos con $f(x) > 0$, y a la izquierda, los de $f(x) < 0$.
- La estabilidad de los puntos críticos: Si $f'(\bar{x}) < 0$, $x(t) = \bar{x}$ es asintóticamente estable y si $f'(\bar{x}) > 0$, $x(t) = \bar{x}$ es inestable.

Ejemplo 2.2 En este ejemplo vamos a trazar los diagramas de fase de una ecuación unidimensional lineal. Consideremos la ecuación $\dot{x} = \lambda x$ siendo λ un parámetro real. Si $\lambda \neq 0$, existe un único punto de equilibrio: $\dot{x} = 0 \iff \lambda x = 0 \iff x = 0$. Si $\lambda = 0$, todos los puntos de la recta real son puntos de equilibrio. Como se sabe que una solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

es $x(t) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)}$, podemos concluir que si $\lambda > 0$, $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$, y $|x(t)| \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Haciendo un análisis análogo para el caso $\lambda < 0$, representamos a continuación los dos diagramas de fase según el valor de λ :

- Si $\lambda > 0$, obtenemos la Figura 2.2, que corresponde a una situación donde el origen $x = 0$ es inestable.

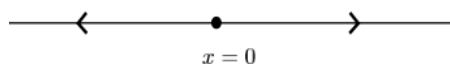


Figura 2.2: Diagrama de fase de $\dot{x} = \lambda x$, con $\lambda > 0$

- Si $\lambda < 0$, obtenemos la Figura 2.3 donde vemos que el origen es asintóticamente estable.

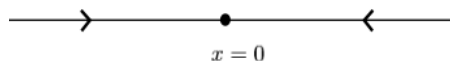


Figura 2.3: Diagrama de fase de $\dot{x} = \lambda x$, con $\lambda < 0$

En la Figura 2.4 mostramos, para $\lambda > 0$, las soluciones de la ecuación $\dot{x} = \lambda x$ en el plano (t, x) . Obsérvese la parte positiva del eje vertical (x) es una órbita que corresponde al recorrido de todas las soluciones que toman un valor inicial $x(0) > 0$; el conjunto que está formado por 0 es otra órbita; y la parte negativa del eje vertical (x), la tercera. Junto con este dibujo aparece un esquema del eje x con el diagrama de fases asociado a la ecuación.

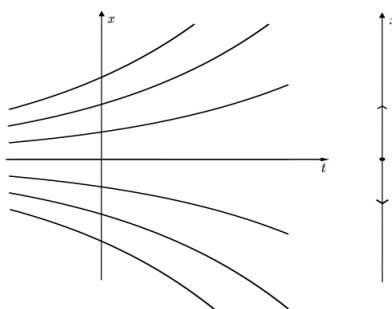


Figura 2.4: Diagrama de fase y soluciones de $\dot{x} = \lambda x$ con $\lambda > 0$

Comprobamos entonces que el diagrama de fase se obtiene proyectando sobre el eje x , el gráfico de las soluciones en el plano (t, x) , conservando la información sobre el signo de \dot{x} .

2.2.2. Diagrama de Fase en Dimensión 2

Al igual que hemos revisado el procedimiento para la construcción del diagrama de fase en dimensión 1, vemos para dimensión 2, el proceso gráfico para el oscilador armónico lineal de ecuación (2.4).

Ejemplo 2.3 (Construcción diagrama de fase del oscilador armónico lineal)

Como vemos en la Figura 2.5, la trayectoria en el espacio (t, x_1, x_2) es proyectada sobre el plano (x_1, x_2)

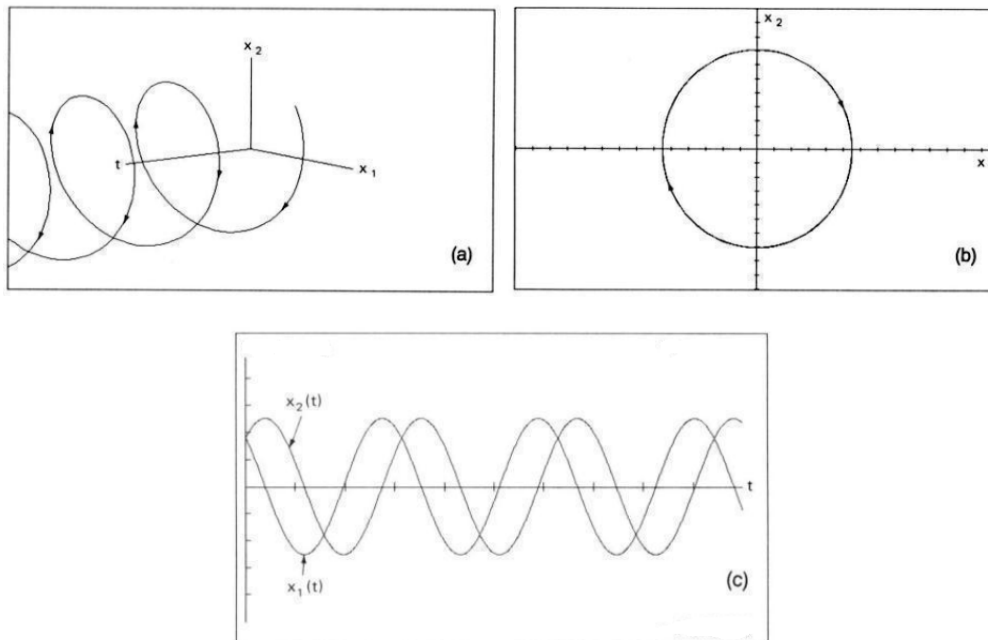


Figura 2.5: Para el oscilador armónico lineal: (a) trayectoria en el espacio (t, x_1, x_2) , (b) órbita circular resultante de proyectar la trayectoria helicoidal en el plano (x_1, x_2) , (c) gráfica de las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en función de t .

Pero, como ya habíamos comentado, no siempre es posible poder calcular las soluciones de este tipo ecuaciones, por tanto, tendremos que buscar otras herramientas que nos permitan obtener de forma sencilla como son sus órbitas. Los siguientes teoremas nos ayudan a clasificar todos los posibles comportamientos en el diagrama de fase en 2 dimensiones.

Teorema 2.2 (Poincaré - Bendixson)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 . Para la ecuación (2.3), si la semiórbita positiva $\gamma^+(x)$ de un punto x_0 está acotada y $\omega(x_0)$ no contiene puntos críticos, entonces $\omega(x_0)$ es una órbita periódica.

Podemos obtener un resultado análogo para semiórbitas negativas acotadas

Teorema 2.3 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 . Para la ecuación (2.3), si la semiórbita negativa $\gamma^-(x)$ de un punto x_0 está acotada y $\alpha(x_0)$ no contiene puntos críticos, entonces $\alpha(x_0)$ es una órbita periódica.

Teorema 2.4 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 . Para la ecuación (2.3), si la semiórbita positiva $\gamma^+(x)$ de un punto x_0 está contenida en un compacto que contiene a lo sumo una cantidad finita de puntos de equilibrio. Entonces se cumple una y solo una de las siguientes alternativas

1. El conjunto ω -límite $\omega(x_0)$ es un punto de equilibrio \bar{x} , y $\varphi(t, x_0) \rightarrow \bar{x}$ cuando $t \rightarrow \infty$.
2. $\omega(x_0)$ es una órbita periódica Γ y o bien $\gamma^+(x) = \omega(x_0) = \Gamma$, o bien $\gamma^+(x_0)$ gira en espiral hacia Γ a medida que aumenta t .
3. $\omega(x_0)$ consiste en puntos de equilibrio y órbitas cuyos conjuntos α -límite y ω -límite son los puntos de equilibrio.

Otro elemento práctico para ayudarnos a dibujar las órbitas es el siguiente

Definición 2.12 (Primeras Integrales)

Las Primeras Integrales nos dan información sobre la forma de las órbitas y no de su parametrización en función del tiempo, por tanto es conveniente eliminar la variable t de $\dot{x} = f(x)$. En las proximidades de x_0 , la órbita que pasa por x_0 puede ser definida como la solución de la ecuación escalar no autónoma

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (2.7)$$

Veamos los siguientes ejemplos de utilización de las primeras integrales para definir la forma de las órbitas de distintas ecuaciones:

Ejemplo 2.4 (Obtención órbitas del oscilador armónico lineal)

Si observamos el campo de direcciones que aparece en la Figura 2.1, o la órbita que hemos dibujado en 2.5, no resulta difícil imaginar que todas las órbitas deben ser círculos de centro $(0, 0)$. Esto puede formularse con el uso de las primeras integrales, que nos permiten calcular las órbitas. Sea el sistema (2.3), entonces mediante (2.7) obtenemos $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2}$, que integrando, corresponde a la familia de circunferencias $x_1^2 + x_2^2 = c$.

Ejemplo 2.5 (Órbitas no periódicas)

Realizamos el diagrama de fase para la ecuación

$$\ddot{x} - x = 0$$

que puede transformarse en el sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

Mediante las primeras integrales, las órbitas en el diagrama de fase satisfacen:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{x_2}$$

Integrando llegamos a la familia de hipérbolas

$$x_1^2 - x_2^2 = c$$

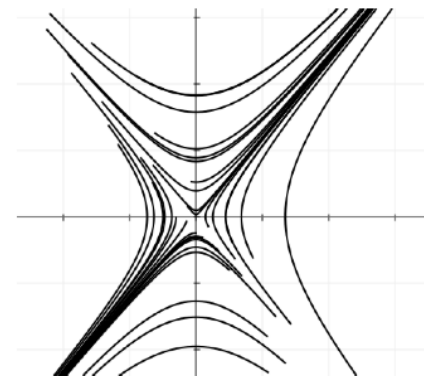


Figura 2.6: Órbitas de $\ddot{x} - x = 0$

En particular, cuando $c = 0$, obtenemos la solución constante correspondiente a la órbita $(0, 0)$ si $x_1 = x_2 = 0$, en caso contrario tendremos las soluciones $x_1 = x_2$ con $x_1 > 0$ y $x_1 < 0$, y $x_1 = -x_2$ con $x_1 > 0$ y $x_1 < 0$, cuatro soluciones que gráficamente coinciden con las bisectrices de los cuatro cuadrantes.

Para concluir la siguiente sección debemos mencionar una herramienta fundamental para el análisis de los diagramas de fase, la linealización, que estudiaremos en la sección 2.3, y que nos va a permitir el estudio de los sistemas no lineales en relación con los lineales, cuyo análisis realizaremos pormenorizadamente a continuación. Punto fundamental, si como veremos en la sección 2.4 vamos a centrarnos en el estudio de las bifurcaciones de los sistemas no lineales.

2.3. Estabilidad de las Soluciones en Sistemas Autónomos Planos

Para completar el estudio de los diagramas de fase en dimensión 2, vamos a estudiar la estabilidad de las soluciones de un sistema plano, comenzando por los sistemas lineales, para posteriormente, mediante las técnicas de linealización y teoremas como el de Hartman-Grobman, establecer una equivalencia entre éstos y los no lineales.

2.3.1. Sistemas Lineales

Vamos a considerar sistemas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde cada a_{ij} es un número real. Si establecemos, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ entonces el sistema (2.8) puede ser representado

$$\dot{x} = Ax\tag{2.9}$$

A continuación vamos a presentar la clasificación, respecto a su estabilidad, de los puntos críticos de este tipo de sistemas que depende fundamentalmente del determinante de la matriz A .

Clasificación del los puntos críticos de un sistema lineal

1. Si $\det(A) = \Delta \neq 0$, el único punto crítico del sistema es $\bar{x} = 0$. En este caso, según sean los valores propios podemos hacer la siguiente clasificación

a) **Valores propios reales y distintos:** $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda_1 \neq \lambda_2)$

La solución del sistema en este caso es

$$x = c_1 \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda_1 t} \\ v_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda_1 t} \\ v_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\tag{2.10}$$

donde v_1 es el vector propio asociado al valor propio λ_1 y v_2 es el vector propio asociado al valor propio λ_2 . Consideramos entonces tres posibilidades para los valores propios en este caso

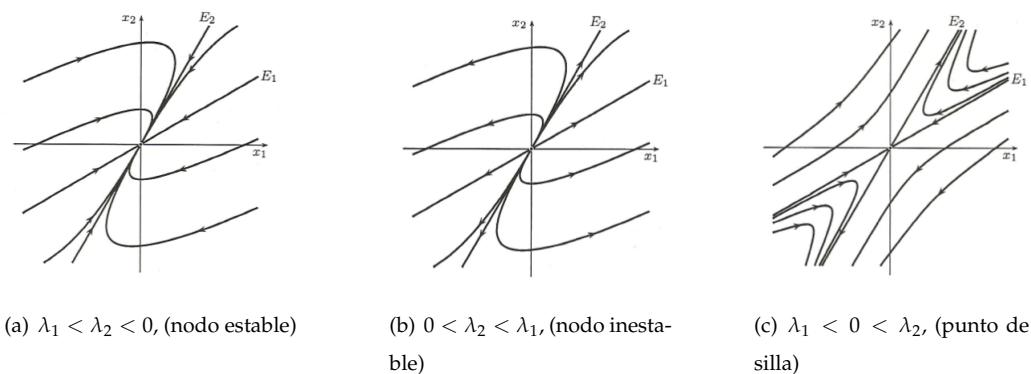


Figura 2.7: Diagramas de fase con valores propios reales distintos

En el caso (a) todas las soluciones convergen al origen cuando $t \rightarrow +\infty$, y además los espacios propios definidos por v_1 y v_2 son invariantes y los designamos como $E_j = \{w = av_j, a \in \mathbb{R}\}, j = 1, 2$. Podemos comenzar a esbozar el diagrama de fase considerando las órbitas contenidas en E_j y a continuación dibujar el resto de órbitas. Para el caso (b) todo permanece como en el caso (a), pero cambiando t por $-t$, y consecuentemente cambia el sentido de las flechas. En general, los espacios propios reales de A son invariantes para las transformaciones del espacio de fases definidas para la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$.

El proceso completo para esbozar los diagramas de fase, tanto de este caso, como de los restantes lo podemos seguir en [6, pp. 71-82].

b) Si los valores propios reales son repetidos: $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda_1 = \lambda_2)$, tenemos las siguientes situaciones

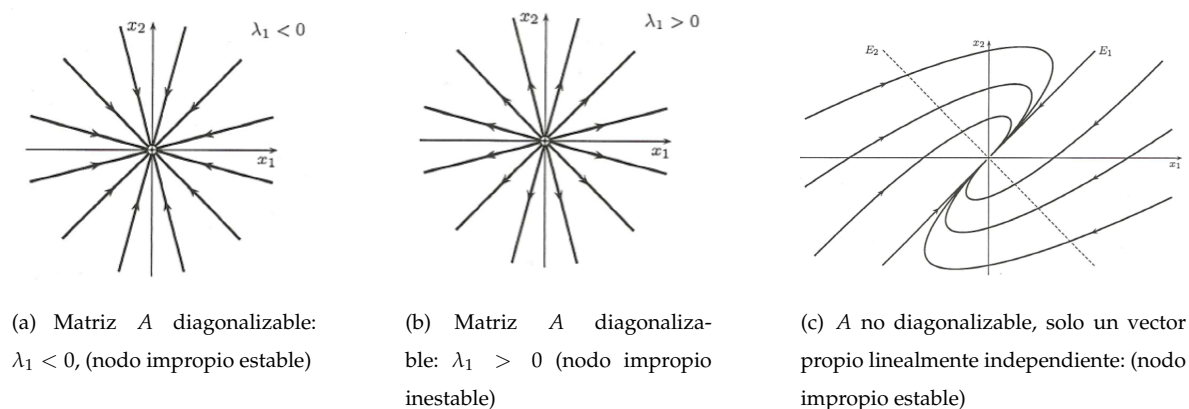


Figura 2.8: Diagramas de fase con valores propios reales repetidos

c) Si los valores propios son complejos conjugados: $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, siendo $\lambda_1 = a \pm ib$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, entonces las posibles situaciones son

- $a = 0$, tenemos dos casos

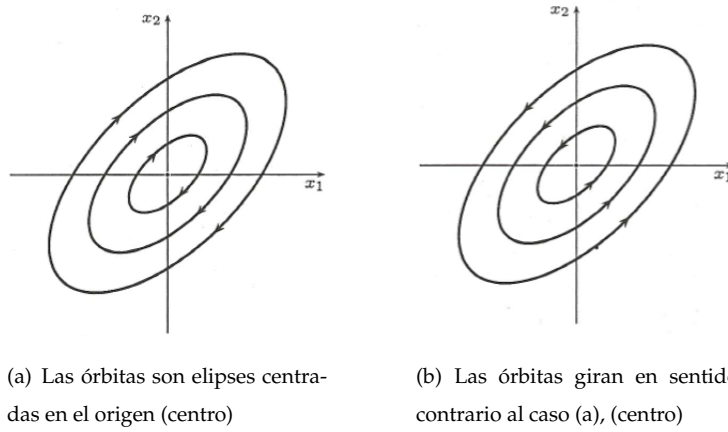


Figura 2.9: Diagramas de fase con valores propios complejos conjugados imaginarios puros

■ $a \neq 0$, tenemos los dos casos siguientes

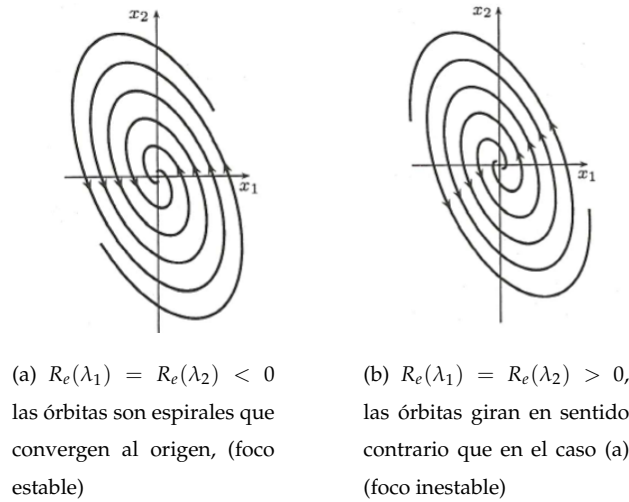


Figura 2.10: Diagramas de fase con valores propios complejos conjugados con $a \neq 0$.

2. Si $\Delta = 0$, hay infinidad de puntos críticos y todos ellos inestables, los diferentes diagramas de fase en este caso son

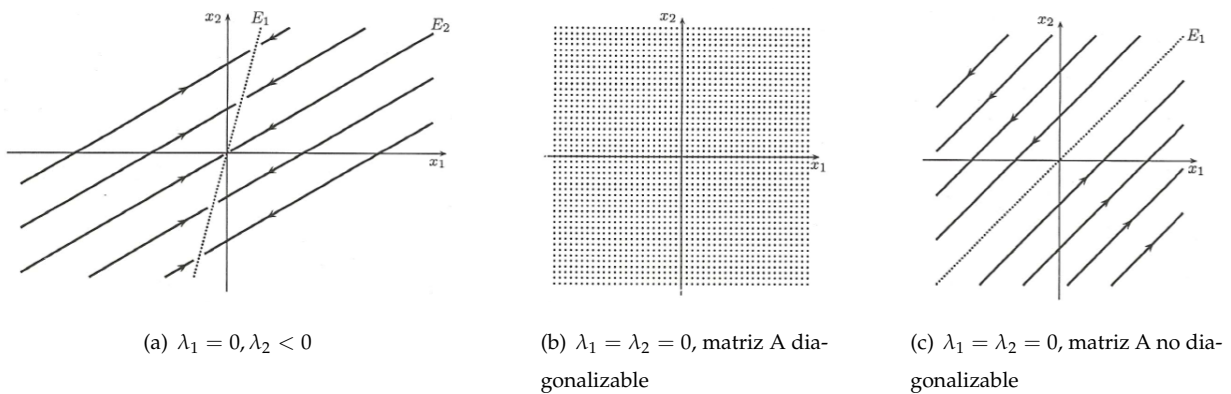


Figura 2.11: Esbozos de diagramas de fase cuando $\det A = 0$.

El caso (a) responde a uno más general, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, en caso de que $\lambda_2 > 0$, el diagrama de fase es el mismo pero con las flechas en sentido contrario.

2.3.2. Sistemas no Lineales

Linealización

Vamos a considerar sistemas planos autónomos $\dot{x} = f(x)$ donde f es una función no necesariamente lineal. Supondremos f de al menos C^1 de manera que se posible considerar la linealización de f mediante su derivada (matriz jacobiana) y estudiar las propiedades de este sistema lineal con el objetivo de deducir información sobre el comportamiento del sistema original.

Definición 2.13 (Linealización en \bar{x})

Si \bar{x} es un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$, llamamos linealización de $\dot{x} = f(x)$ en \bar{x} a la ecuación diferencial

$$\dot{x} = Df(\bar{x})x \quad (2.11)$$

donde $f = (f_1, f_2)$ es C^1 , y $Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$

El criterio para la estabilidad en sistemas no lineales se puede establecer a través del sistema linealizado, como podemos comprobar en el siguiente teorema, cuya demostración podemos encontrar en [4, pp. 267,272].

Teorema 2.5 Criterio de estabilidad para sistemas no lineales

Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema plano y \bar{x} un punto de equilibrio del mismo.

- (i) Si todos los valores propios de $Df(\bar{x})$ tienen parte real negativa, entonces \bar{x} es un punto crítico asintóticamente estable.
- (ii) Si al menos un valor propio de $Df(\bar{x})$ tiene parte real positiva, el punto crítico \bar{x} es inestable.

Para clasificar los puntos críticos de este tipo de sistemas como centros, puntos de silla, etc., vamos a introducir el teorema de Hartman - Grobman, que se utiliza cuando los puntos críticos son hiperbólicos y cuya definición es presentada previamente al teorema

Definición 2.14 (Puntos críticos hiperbólicos)

Un punto crítico \bar{x} de un sistema plano $\dot{x} = f(x)$ es hiperbólico si la matriz jacobiana en ese punto, $Df(\bar{x})$ es hiperbólica, es decir, todos sus valores propios tienen parte real no nula.

Teorema 2.6 Hartman - Grobman

Sea f de clase C^1 y \bar{x} un punto crítico hiperbólico del sistema plano $\dot{x} = f(x)$. Entonces hay una vecindad de \bar{x} en la cual $\dot{x} = f(x)$ es topológicamente equivalente a su linealización $\dot{x} = Df(\bar{x})x$

Definición 2.15 (Sistemas Topológicamente Equivalentes)

Dos sistemas $\dot{x} = f(x)$ y $\dot{x} = g(x)$ definidos respectivamente en los intervalos abiertos U y V de \mathbb{R}^2 , son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$, tal que h transforma las órbitas de f en las órbitas de g y preserva el sentido de la dirección del tiempo.

Aplicando la definición anterior al teorema de Hartman-Grobman, sea $\varphi(t, x_0)$ el flujo (conjunto de soluciones) de $\dot{x} = f(x)$ y $\psi(t, x_0)$ el flujo de $\dot{x} = Df(\bar{x})x$, entonces el homeomorfismo $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ puede ser elegido tal que

$$h(\varphi(t, x_0)) = \psi(t, x_0)$$

para todo t , siempre y cuando $\varphi(t, x_0)$ permanezca en U .

Utilizando el teorema anterior, y el criterio de estabilidad para sistemas no lineales, podemos construir la siguiente tabla

Valores propios Df	Linealización	Sistema no Lineal
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nodo Inestable	Nodo Inestable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo A. Estable	Nodo A. Estable
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Punto de Silla (Inestable)	Punto de Silla (Inestable)
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a > 0$	Punto espiral (Inestable)	Punto espiral (Inestable)
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a < 0$	Punto espiral (A. estable)	Punto espiral (A. estable)

Cuadro 2.1: Clasificación de equilibrios hiperbólicos en sistemas no lineales

Si queremos ampliar el estudio a puntos de equilibrio no hiperbólicos, introduciremos las Funciones de Lyapunov.

Funciones de Lyapunov

Consideramos $\dot{x} = f(x)$ y \bar{x} un punto crítico del mismo, hiperbólico o no. Debemos encontrar una función escalar V en un entorno de \bar{x} , que puede ser una medida de la energía potencial del sistema, de manera que a lo largo de las órbitas, ésta decrece cuando $t \rightarrow \infty$, indicando estabilidad, o bien crece en alguna dirección, indicando inestabilidad.

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \tag{2.12}$$

Definición 2.16 (Función definida positiva)

Sea U un intervalo abierto de \mathbb{R}^2 conteniendo al origen. Una función real $C^1 V : U \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow V(x)$ se dice que es definida positiva en U si

- $V(0) = 0$;
- $V(x) > 0$ para todo $x \in U$ con $x \neq 0$.

Teorema 2.7 Método directo de Lyapunov

Sea \bar{x} un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ y V una función definida positiva en un entorno U de \mathbb{R}^2 que contiene a \bar{x} .

- (i) Si $\dot{V}(x) \leq 0$ para $x \in U - \{\bar{x}\}$, entonces \bar{x} es estable.
- (ii) Si $\dot{V}(x) < 0$ para $x \in U - \{\bar{x}\}$, entonces \bar{x} es asintóticamente estable.

Teorema 2.8 Sea \bar{x} un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ y U un intervalo abierto conteniendo \bar{x} en su frontera ∂U . Supongamos que existe una función V de clase C^1 definida en $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $V(x) > 0$ y $\dot{V}(x) > 0$ si $x \in U$, y $V(x) = 0$ si $x \in \partial U$. Entonces \bar{x} será inestable.

Una función $V(x)$ que cumple con las condiciones impuestas en los teoremas anteriores se denomina función de Lyapunov. Este método es una herramienta de análisis muy poderosa. Sin embargo, presenta una desventaja, dado que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov, hay que proponer una función candidata y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad.

Ejemplo 2.6 (Función de Lyapunov para el Péndulo simple)

Consideramos el movimiento de un péndulo simple, con masa m , que se mueve sobre un plano vertical. En ausencia de rozamiento, el ángulo de desplazamiento θ con la vertical, cumple la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

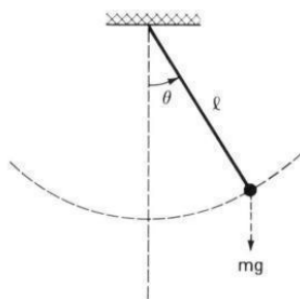


Figura 2.12: Péndulo simple

convertimos la ecuación diferencial en un sistema equivalente, tal que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{aligned}$$

La linealización de estas ecuaciones en el origen tiene valores propios imaginarios puros y además el tipo de estabilidad del punto de equilibrio en el origen no puede ser deducida por linealización. Por tanto, aplicamos el teorema de Lyapunov, y dado que es un sistema físico, vamos a tomar como función candidata la energía total del péndulo

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1)$$

Como la masa, la longitud y la aceleración de la gravedad son positivas, V es definida positiva en un entorno suficientemente pequeño del origen. Además por (2.12), $\dot{V}(x) \equiv 0$.

Entonces aplicando la parte (i) del teorema de Lyapunov, el origen es un punto de equilibrio estable del péndulo simple.

Para terminar con las técnicas de estudio de estabilidad de los sistemas planos y así mejorar el teorema de Hartman - Grobman desde otra perspectiva, ésta ya válida independientemente de la dimensión del sistema, vamos a introducir las variedades estable, inestable y central.

Es sabido que para una ecuación lineal del tipo (2.11), los vectores propios de $Df(\bar{x})$ definen espacios invariantes para las soluciones y que los valores propios determinan la estabilidad. Así, todo el espacio de fases se puede descomponer como $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$, donde

$$\begin{aligned} E^s &= \{\text{vector propio de } Df(\bar{x}), \text{ del valor propio } \lambda, \text{ tal que } \operatorname{Re}(\lambda) < 0\} && \text{subespacio estable} \\ E^u &= \{\text{vector propio de } Df(\bar{x}), \text{ del valor propio } \lambda, \text{ tal que } \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} && \text{subespacio inestable} \\ E^c &= \{\text{vector propio de } Df(\bar{x}), \text{ del valor propio } \lambda, \text{ tal que } \operatorname{Re}(\lambda) = 0\} && \text{subespacio central} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Se discute primero el caso en que no existe el subespacio central, es decir cuando $Df(\bar{x})$ carece de valores propios de parte real nula.

Variedades Estable e Inestable

Definición 2.17 (Variedades Estable e Inestable)

Sea U un entorno de un punto de equilibrio \bar{x} . Entonces la variedad estable local $W^s(\bar{x}, U)$, y la variedad inestable local $W^u(\bar{x}, U)$ de \bar{x} son definidas, respectivamente, como los siguientes subconjuntos de U :

$$\begin{aligned} W^s(\bar{x}, U) &\equiv \{x_0 \in U : \varphi(t, x_0) \in U \text{ para } t \geq 0, \text{ y } \varphi(t, x_0) \rightarrow \bar{x} \text{ cuando } t \rightarrow +\infty\} \\ W^u(\bar{x}, U) &\equiv \{x_0 \in U : \varphi(t, x_0) \in U \text{ para } t \leq 0, \text{ y } \varphi(t, x_0) \rightarrow \bar{x} \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\} \end{aligned}$$

Teorema 2.9 Variedad Lineal

Si \bar{x} es un punto crítico hiperbólico y $Df(\bar{x})$ tiene autovalores con parte real negativa, existen localmente dos variedades diferenciables de dimensiones respectivas s y $n - s$ (las variedades estable e inestable), conteniendo respectivamente a los puntos que son atraídos por \bar{x} y repelidos por \bar{x} . Más aún, los espacios tangentes a dichas variedades en \bar{x} son $\bar{x} + E^s$ y $\bar{x} + E^u$, donde E^s y E^u son los subespacios estable e inestable del sistema lineal $\dot{x} = Df(\bar{x})x$.

Este teorema nos asegura la existencia de dos variedades invariantes $W^s(\bar{x}, U)$ y $W^u(\bar{x}, U)$, para el sistema no lineal, que juegan el mismo papel que los subespacios E^s y E^u para el sistema linealizado.

Ejemplo 2.7 (Cálculo de las variedades estable e inestable)

Consideramos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \end{aligned}$$

Este sistema tiene un único punto de equilibrio en el origen, y su linealización en este punto nos lleva a concluir que es un punto de silla. Es evidente, que las variedades locales estable e inestable del sistema linealizado, respectivamente, son los ejes x_1 y x_2 , incluido el origen. Para determinar las correspondientes variedades en el sistema no lineal resolvemos las ecuaciones diferenciales, lo que es posible hacer en este caso ²dado que la primera ecuación es lineal

²En general el cálculo de las variedades estable, inestable y central suele ser bastante complejo y a veces imposible, lo normal es hallar una aproximación.

y solo depende de x_1 , de tal manera que si sustituimos su solución $x_1(t)$ en la segunda ecuación, obtenemos una ecuación diferencial lineal no homogénea para x_2 que puede ser resuelta mediante el método de la variación de las constantes. El resultado de estos cálculos es

$$x_1(t) = e^{-t}x_1^0$$

$$x_2(t) = e^t \left[x_2^0 + \frac{1}{3}(x_1^0)^2 \right] - \frac{1}{3}e^{-2t}(x_1^0)^2$$

En este caso, las variedades inestable y estable son respectivamente, el eje x_2 y la parábola $x_2 = -\frac{1}{3}x_1^2$. Podemos visualizar el ejemplo en la Figura 2.13, en la que podemos comprobar el teorema de la variedad estable y el de Hartman-Grobman (ambos sistemas son topológicamente equivalentes).

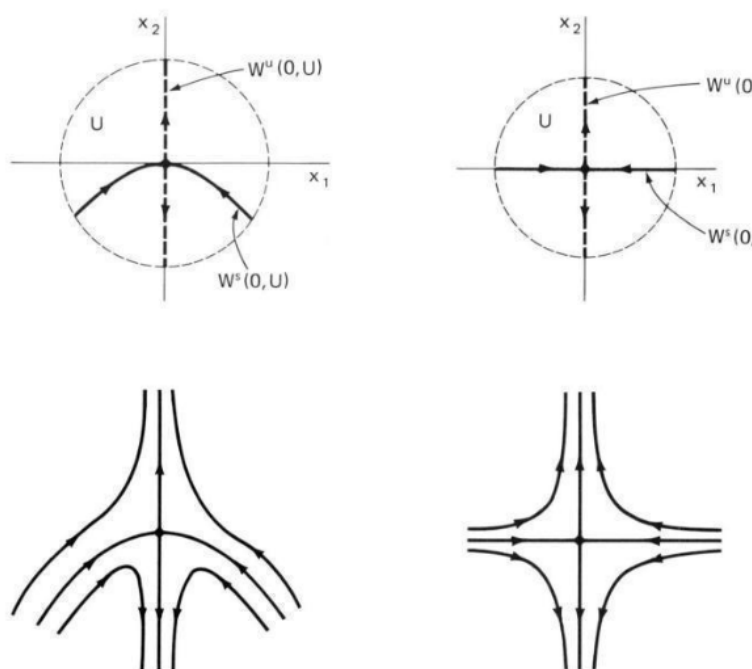


Figura 2.13: Izquierda: sistema no linealizado, derecha: sistema linealizado

Teoría de la Variedad Central

Ya habíamos mencionado que si algún valor propio de $Df(\bar{x})$ tiene parte real nula, el estudio del sistema linealizado no es suficiente para describir el comportamiento cualitativo del sistema. Además los modelos de sistemas físicos dependen de parámetros. Al variar éstos, pueden aparecer cambios en el comportamiento cualitativo de las soluciones, conocidos como bifurcaciones. Para abordar su estudio y como paso previo a la siguiente sección, vamos a revisar la variedad central. Análogamente, a las variedades estable e inestable, existe una variedad central W^c , tangente a E^c . Proyectando las ecuaciones sobre la variedad central se puede reducir la dimensión del sistema a la vez que se realiza un estudio de los equilibrios no hiperbólicos.

Para poder reducir de forma sistemática la dimensión de un sistema y facilitar así el estudio cualitativo de las soluciones entorno a una bifurcación, se puede recurrir al teorema de la variedad central. Típicamente el contexto por excelencia en el cual tiene interés aplicar esta metodología es el caso en que no exista ninguna dirección hiperbólica

inestable, es decir para todo valor propio λ de $Df(\bar{x})$ tenemos $\text{Re}(\lambda) \leq 0$.

Sin pérdida de generalidad, puede realizarse una traslación para que \bar{x} sea el origen y un cambio de variables tomando la dirección de los vectores propios, así el sistema se puede escribir de la forma

$$\dot{x} = Ax + f(x) \quad (2.14)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz constante $n \times n$ y $\bar{x} = 0$ punto crítico aislado, siendo $f(x)$ de clase C^k , $k \geq 2$, en una vecindad de $\bar{x} = 0$, y

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (2.15)$$

Existe una variedad C^{k-1} invariante W^c , la variedad central, que es tangente a E^c en 0. A diferencia de las variedades estable e inestable, la variedad central puede no ser única.

Suponemos que la matriz A en (2.14) tiene valores propios con parte real negativa y cero, entonces por simplicidad si consideramos que la matriz es diagonal, (2.14) debe ser escrito

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Yy + f_1(y, z) \\ \dot{z} &= Zz + f_2(y, z) \end{aligned} \quad (2.16)$$

con $x = (y, z)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, tal que $p + q = n$. Además, A se ha escrito

$$A = \left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & Z \end{array} \right)$$

siendo Y una matriz diagonal $p \times p$, cuyos valores propios tienen parte real cero y Z , matriz $q \times q$ que solo tiene valores propios con parte real negativa. La función $f(x) = (f_1(y, z), f_2(y, z))$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$, $f_1(y, z) \in \mathbb{R}^p$, $f_2(y, z) \in \mathbb{R}^q$, siendo f_1 y f_2 C^k , $k \geq 2$. Por último, $(0, 0)$ es un punto crítico aislado.

Definición 2.18 (Variedad Central)

Una variedad C^k $W^c(0, U)$ en un entorno U del origen, es denominada variedad local central de (2.16) si $W^c(0, U)$ es invariante para el flujo y es el gráfico de una función C^k , $z = h(y)$ con $h(0) = 0$.

Teorema 2.10 Variedad Central Existe una variedad central local $W^c(0, U)$ para el sistema (2.16) en un entorno $U \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ del origen. Además es C^k en U y tangente a E^c en el origen.

Por el teorema anterior, al ser W^c tangente a E^c podemos representarla de forma local:

$$W^c = \{(y, z) \mid z = h(y)\}; \quad h(0) = Dh(0) = 0 \quad (2.17)$$

donde $h : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, siendo U un entorno del origen.

Se considera pues la proyección de $z = h(y)$ sobre la variedad central, conduciendo a

$$\dot{y} = Yy + f_1(y, h(y)) \quad (2.18)$$

que recibe el nombre de sistema reducido a la variedad central y contiene toda la información dinámica del sistema, puesto que el resto de direcciones son atraídas exponencialmente hacia W^c como podemos ver en la Figura 2.14

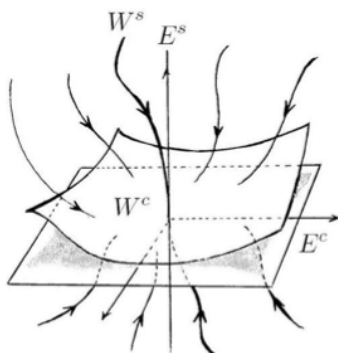


Figura 2.14: Atracción de las soluciones por la variedad central

Además, debemos remarcar que al ser W^s estable, cualquier solución tiende asintóticamente y exponencialmente sobre la variedad central y , en consecuencia, el sistema reducido sobre W^c es topológicamente equivalente al original.

Teorema 2.11 *Un punto de equilibrio del sistema es estable, (respectivamente, a. estable e inestable) si y solo si, el correspondiente punto de equilibrio de la ecuación diferencial $\dot{y} = Yy + f(y, h(y))$ en la variedad central definida por h es estable, (respectivamente, a. estable e inestable).*

Podemos generalizar la teoría para sistemas que dependan de un parámetro e investigar las posibles bifurcaciones cerca del origen para pequeños λ . Para ello, vamos a introducir el siguiente ejemplo de un sistema plano dependiente de un parámetro.

Ejemplo 2.8 Consideramos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \lambda \end{aligned} \tag{2.19}$$

donde λ es un parámetro escalar. Una variedad central es la gráfica de $h(\lambda, x_1) = \lambda$ y el flujo sobre la variedad central viene dado por $\dot{x}_1 = -x_1^3$. En el plano (x_1, x_2) , esta variedad central es la familia de líneas horizontales $x_2 = \lambda$. Una forma de apreciar mejor la variedad central es visualizándola en el espacio (λ, x_1, x_2) , de tal forma que es el plano inclinado que vemos en la Figura 2.15. Las intersecciones del plano inclinado con los planos verticales es la familia de líneas $x_2 = \lambda$. El plano de la variedad central es tangente al eje x_1 en $\lambda = 0$.

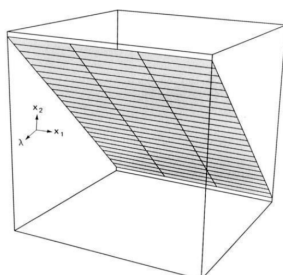


Figura 2.15: El plano inclinado es la variedad central

2.4. Bifurcaciones

Se ha señalado con anterioridad que, en general, los modelos físicos dependen de parámetros que al variar pueden provocar cambios cualitativos en el comportamiento del sistema. Este fenómeno se conoce como bifurcación y fue usado por primera vez por Poincaré.

En este capítulo atenderemos a la teoría general, siendo en el capítulo cuatro, donde concretaremos este análisis para los cristales líquidos, analizando el cambio en el mapa de soluciones cuando variamos la intensidad de un campo magnético o eléctrico.

En esta sección vamos a revisar algunos de los ejemplos más comunes de bifurcaciones en sistemas planos autónomos dependientes de un parámetro, centrándonos en los modelos no lineales debido a la complejidad de los sistemas dinámicos, entre los que se incluyen los cristales líquidos.

Definición 2.19 (Bifurcación)

Dado un sistema $\dot{x} = f(x, \lambda)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}^k$, se dice que el sistema tiene una bifurcación en $\lambda = \lambda_0$, si los diagramas de fase de los sistemas cuando $\lambda = \lambda_0$ y cuando $\lambda \neq \lambda_0$ no son topológicamente equivalentes.

2.4.1. Bifurcación silla nodo

Este tipo de bifurcación aparece tanto en dimensión 1, como en dimensión 2, caso este último que vamos a analizar. Ocurre cuando dos puntos críticos colisionan a medida que el parámetro λ cambia y se anulan uno al otro. Consideremos el siguiente sistema dependiente del parámetro λ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda + x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

- Si $\lambda < 0$, el punto crítico $(\sqrt{\lambda}, 0)$ es un punto de silla inestable, y $(-\sqrt{\lambda}, 0)$ es un nodo asintóticamente estable.
- En $\lambda = 0$ el único punto crítico es el $(0, 0)$.
- Cuando $\lambda > 0$ no hay puntos críticos.

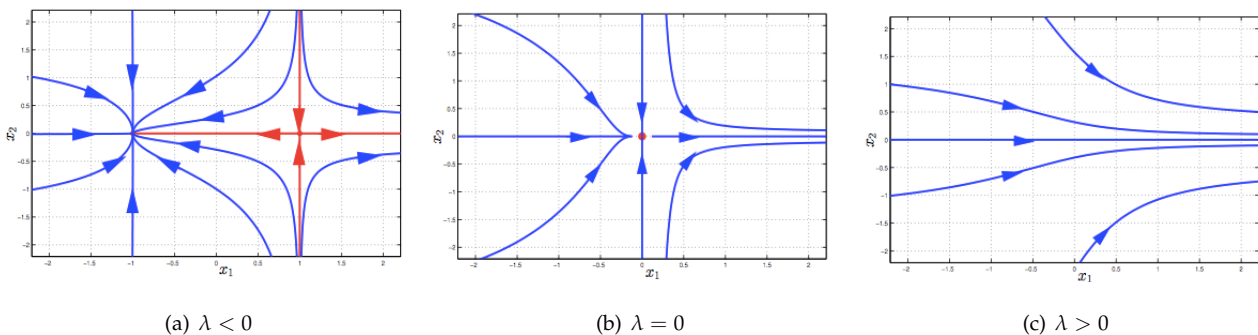


Figura 2.16: Diagramas de fase en la bifurcación silla nodo

Notamos que aún siendo este un sistema plano, el cambio de dinámica ocurre exclusivamente en el eje x_1 . Podemos ver en la Figura 2.17 el diagrama de bifurcación que reproduce los puntos de equilibrio para cada valor del parámetro, y en el que ponemos en línea discontinua los equilibrios inestables:

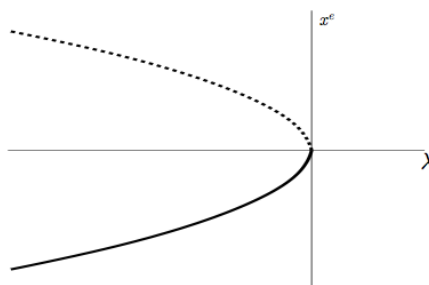


Figura 2.17: Diagrama de Bifurcación silla nodo

Por supuesto, bifurcaciones de este tipo aparecen en sistemas con una forma más general, como podemos ver en el siguiente teorema

Teorema 2.12 Consideremos el sistema

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, \lambda), \quad \dot{x}_2 = -x_2 + F_2(x_1, x_2, \lambda)$$

con $F = (F_1, F_2)$ al menos de clase C^1 , que satisface que $F(x, 0) = f(x)$ con $f(0) = 0$, y $Df(0) = 0$. Si

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}(0, 0, 0) \neq 0 \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0, 0, 0) \neq 0$$

entonces existe una bifurcación silla-nodo en $\lambda = 0$.

- Cuando $\lambda \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} < 0$ hay dos puntos de equilibrio hiperbólicos (un punto de silla y el otro asintóticamente estable).
- Cuando $\lambda \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} > 0$ no hay equilibrios.

Podemos consultar la demostración de este teorema en [4, p.316].

2.4.2. Bifurcación Pitchfork

Ocurre en sistemas en los que hay simetría, y puede ocurrir tanto en dimensión 1 como en dimensión 2. En este tipo de bifurcación el número de equilibrios pasa de 1 a 3 a medida que vamos variando el valor de λ . Cuando los dos equilibrios que aparecen son estables, la bifurcación se dice supercrítica y se llama subcrítica cuando son inestables. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\lambda x_1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

Se puede apreciar en la figura siguiente que un punto fijo estable se bifurca en dos puntos fijos estables y uno inestable (supercrítica)

- Si $\lambda > 0$, el único punto crítico es el $(0,0)$ y es asintóticamente estable.
- Si $\lambda < 0$, $(0,0)$ pierde su estabilidad y aparecen otros dos puntos críticos asintóticamente estables.

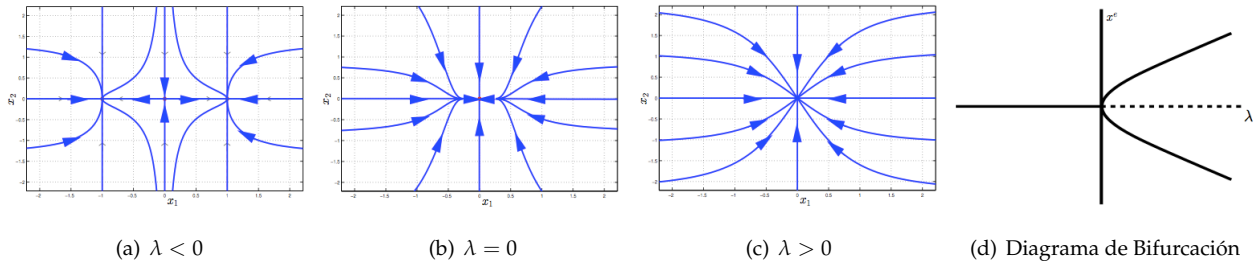


Figura 2.18: Diagramas de fase y bifurcación (Pitchfork Supercrítica)

Como para las bifurcaciones silla-nodo, tenemos un criterio para la aparición de bifurcaciones pitchfork en sistemas con formas más complicadas que en el ejemplo expuesto.

Teorema 2.13 *Considérese el sistema plano $\dot{x} = f(x, \lambda) = f(x_1, x_2, \lambda)$ con f suficientemente suave en los tres argumentos. Si $-f(x, \lambda) = f(-x, \lambda)$ y se satisfacen las siguientes condiciones en un λ_0 :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(0, \lambda_0) \neq 0,$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda x_1^2}(0, \lambda_0) \neq 0,$$

Entonces el sistema presenta una bifurcación pitchfork cuando λ pasa a través de un λ_0 en el origen.

La bifurcación es supercrítica si $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(0, \lambda_0) > 0$, y subcrítica si $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(0, \lambda_0) < 0$.

2.4.3. Bifurcación vertical

Consideramos la siguiente perturbación del oscilador armónico lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$$

- Si $\lambda < 0$, las órbitas son espirales que giran en sentido de las agujas del reloj hacia el origen cuando t aumenta. (Estable)
- Si $\lambda = 0$, es el oscilador armónico, con órbitas periódicas de centro el origen.
- Si $\lambda > 0$, las órbitas son espirales que giran en el sentido de las agujas del reloj, alejándose del origen. (Inestable)

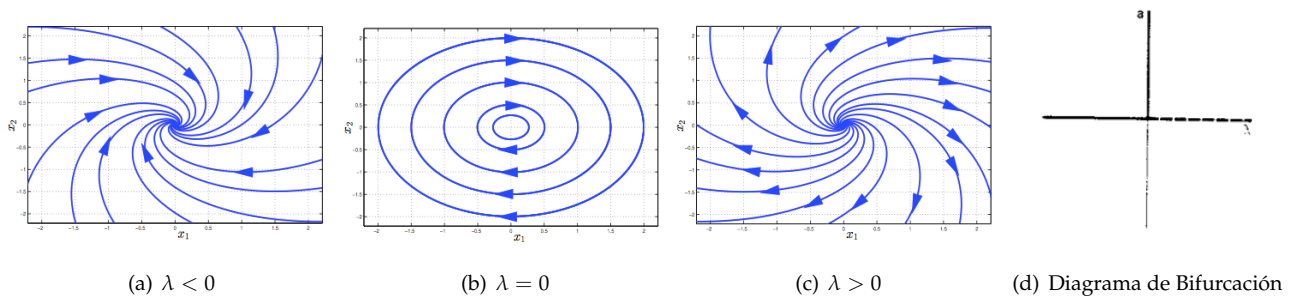


Figura 2.19: Diagramas de fase y bifurcación (Vertical)

El parámetro a que aparece en el eje vertical del diagrama de bifurcación es la amplitud de las órbitas periódicas, que corresponde con el punto donde intersecan con el eje x_1

2.4.4. Bifurcación de Poincaré - Andronov - Hopf

En este tipo de bifurcación, una órbita límite aparece de la nada, mientras el parámetro λ varía. Es necesario estar al menos en dimensión 2 para que aparezca. Consideramos el siguiente sistema dependiente de λ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1 (\lambda - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 (\lambda - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

- Si $\lambda \leq 0$, las órbitas son espirales que giran en sentido de las agujas del reloj hacia el origen, de forma que las soluciones disminuyen en norma.
- Si $\lambda > 0$, el origen se hace inestable y una órbita periódica de radio $\sqrt{\lambda}$ aparece. Todas las órbitas, excepto el origen, giran en torno a esa órbita.

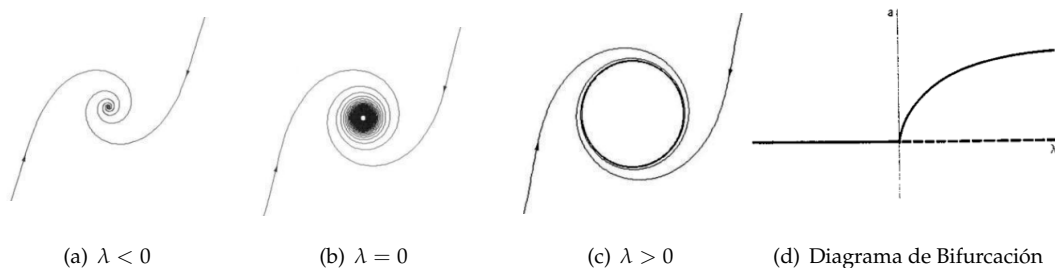


Figura 2.20: Diagramas de fase y bifurcación (Hopf)

Es instructivo comparar el diagrama de bifurcación de la Figura 2.20.d con el del sistema lineal obtenido en la Figura 2.19.d, en éste el segmento de línea correspondiente a la parte no negativa del eje a se representan las órbitas periódicas que no han sido deformadas por la curva $a = \sqrt{\lambda}$ en el problema no lineal. Por ello la bifurcación vertical recibe el nombre de bifurcación Hopf lineal.

Como en casos anteriores, vamos a generalizar con el siguiente teorema

Teorema 2.14 Sea $\dot{x} = f(x, \lambda) = A(\lambda)x + F(x, \lambda)$ un sistema dinámico de clase al menos C^3 con

$$F(0, \lambda) = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial x_1}(0, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(0, \lambda) = 0$$

para todo $|\lambda|$ suficientemente pequeño.

Supóngase que la parte lineal $A(\lambda)$ tiene, en el origen, valores propios $\alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$ con $\alpha(0) = 0$ y $\beta(0) \neq 0$. Además supóngase que estos valores propios cruzan el eje imaginario con velocidad no cero, es decir, $\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) \neq 0$.

Entonces cualquier vecindad $U \subseteq \mathbb{R}^2$ del origen $(0, 0)$, y dado cualquier $\lambda_o > 0$ existe un $\bar{\lambda}$ con $|\bar{\lambda}| < \lambda_o$, tal que la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, \lambda) = A(\bar{\lambda})x + F(x, \bar{\lambda})$ tiene una órbita periódica no trivial en U .

La demostración del teorema la podemos consultar en [4, p. 344].

Para terminar con esta sección remarcar que las bifurcaciones se pueden producirse en sentido inverso, por ejemplo, en el caso de la bifurcación Hopf, puede ocurrir que el ciclo límite aparezca para $\lambda < 0$, este tipo de bifurcación se llama bifurcación Hopf subcrítica, también como ya comentamos, aparece en la bifurcación pitchfork, como podemos ver en la figura siguiente

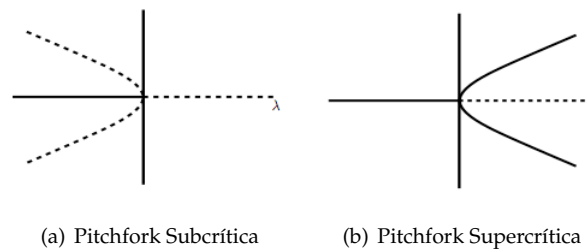
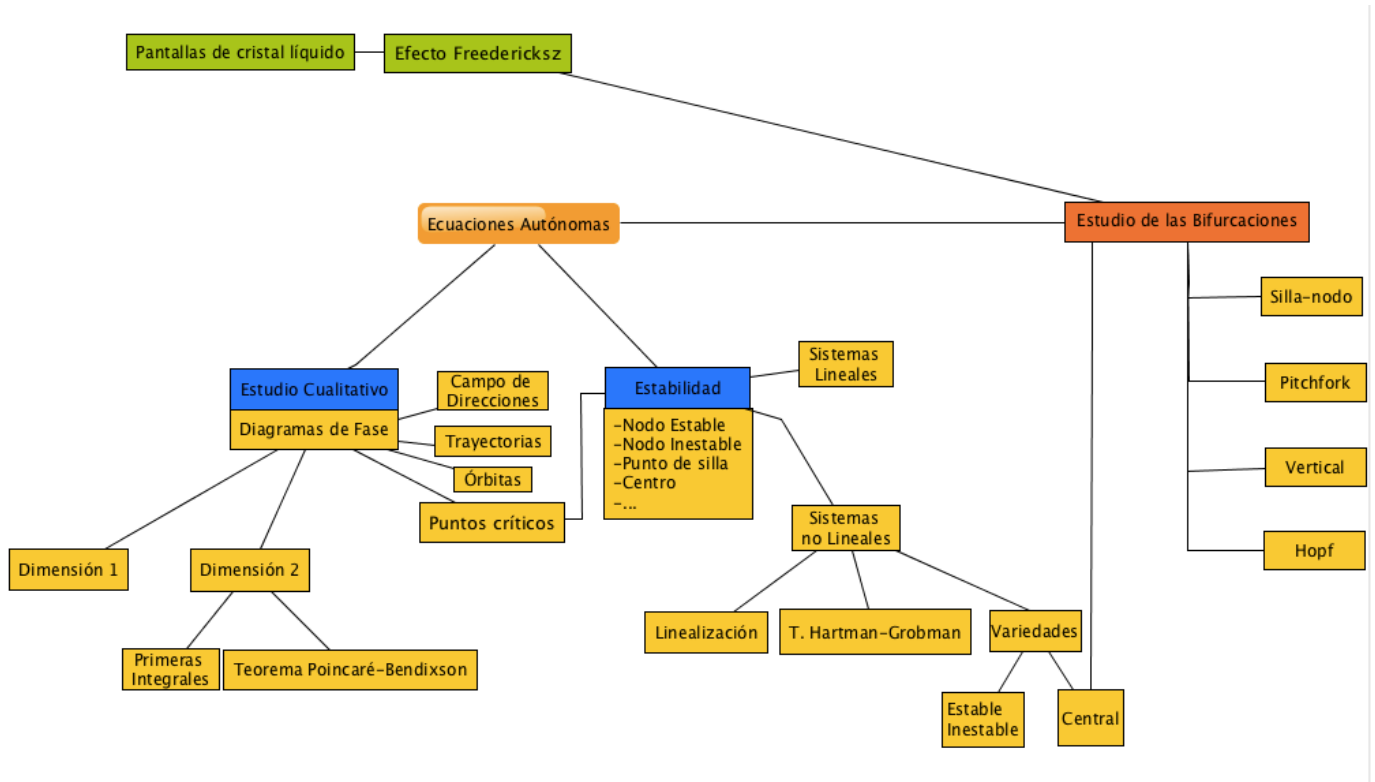


Figura 2.21: Diagramas bifurcación Pitchfork

Con estos ejemplos, hemos presentado una parte de la teoría clásica de las bifurcaciones y en el capítulo 4 desarrollaremos el análisis de las bifurcaciones en los cristales líquidos, donde podremos ver que cuando el cristal líquido está sometido a determinadas condiciones de anclaje impuestas por las superficies en competición con las fuerzas debidas a la aplicación de campos eléctricos o magnéticos (Efecto Freedericksz), se producen bifurcaciones tipo pitchfork.

2.5. Resumen



Capítulo 3

Teoría del Continuo en Cristales Líquidos

Se considera el cristal líquido como un continuo, lo que reflejamos en dos aspectos fundamentales; primero, la definición de una energía en función de las posibles deformaciones del sistema. Segundo, la minimización de esa energía, llevando esto último a las ecuaciones de equilibrio del sistema, las cuales involucran al director n y sus derivadas. Este formalismo permite describir el alineamiento del director n a través de la muestra.

Los contenidos de este capítulo, así como una gran parte de los del capítulo 4, están basados fundamentalmente en los capítulos 2 y 3 de la referencia bibliográfica [2].

3.1. Energía Libre de Frank - Oseen

La teoría estática para cristales líquidos nemáticos utiliza el vector unitario n , al que hemos denominado director, para describir la orientación promedio en un punto x de una muestra de volumen V , que representamos por:

$$n = n(x), \quad n \cdot n = 1. \quad (3.1)$$

Siendo ésta la posición a la cual regresan las moléculas después de una perturbación, debe haber alguna energía elástica presente, y dado que asumimos que la muestra de cristal líquido es incomprensible, es decir, la densidad de masa permanece constante, estamos hablando de la energía libre de Helmholtz:

$$W = \int_V w(n, \nabla n) dV \quad (3.2)$$

donde $w(n, \nabla n)$ es la densidad de energía libre.

Cuando la muestra de cristal líquido se encuentra libre de fuerzas y campos externos, se dice que toma una orientación natural en la que consideramos que $w = 0$, de forma que cualquier otro estado o configuración induce en la muestra una energía que es mayor o igual que la de la orientación natural, por tanto:

$$w(n, \nabla n) \geq 0 \quad (3.3)$$

Por otro lado, debido a la falta de polaridad a lo largo del eje de dirección, n y $-n$ son totalmente equivalentes, de tal manera que:

$$w(n, \nabla n) = w(-n, -\nabla n) \quad (3.4)$$

Además, por la forma del movimiento, se tiene que es invariante bajo rotaciones, es decir, no depende de la selección de la orientación de los ejes coordenados. Por eso, llamando Q a la matriz ortogonal propia de rotaciones, tenemos:

$$w(n, \nabla n) = w(Qn, Q\nabla nQ^T) \quad (3.5)$$

Para el cálculo de la energía introducimos un sistema de ejes coordenados tal que z es paralelo a $n_0 = (0, 0, 1)$ en el origen. Con respecto a dichos ejes, pequeños cambios ∇x , ∇y y ∇z en las direcciones x , y y z , respectivamente, inducen tres posibles tipos de deformaciones elásticas en la orientación de n_0 , **splay**, **twist** y **bend**, obteniendo las seis tensiones de curvatura (Figura 3.1):

$$\begin{aligned} \text{splay} : \quad s_1 &= \frac{\partial n_x}{\partial x}, & s_2 &= \frac{\partial n_y}{\partial y}, \\ \text{twist} : \quad t_1 &= -\frac{\partial n_y}{\partial x}, & t_2 &= \frac{\partial n_x}{\partial y}, \\ \text{bend} : \quad b_1 &= \frac{\partial n_x}{\partial z}, & b_2 &= \frac{\partial n_y}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde los componentes del director vienen dados por $n = (n_x, n_y, n_z)$

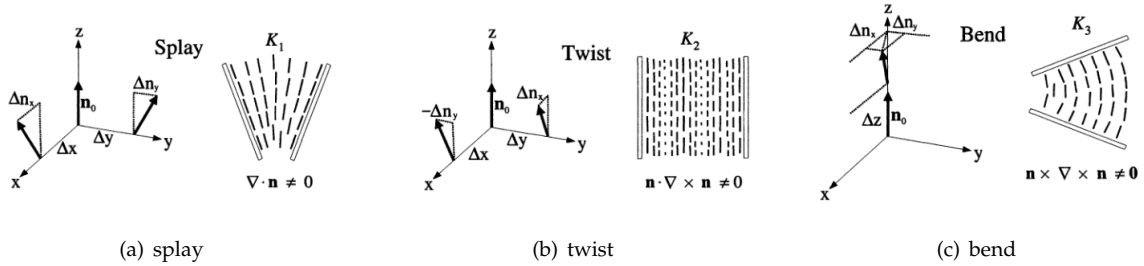


Figura 3.1: Deformaciones elásticas de n

El incremento de la densidad de energía puede ser expresado en función de las tres constantes elásticas; relacionadas con splay k_{11} , twist k_{22} y bend k_{33} , obteniendo la famosa densidad de energía de Frank-Oseen:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}k_{11}(\nabla \cdot n - s_0)^2 + \frac{1}{2}k_{22}(n \cdot \nabla \times n + t_0)^2 + \frac{1}{2}k_{33}(n \times \nabla \times n)^2 - k_{12}(\nabla \cdot n)(\nabla \cdot \nabla \times n) \\ &+ \frac{1}{2}(k_{22} + k_{24})(tr(\nabla n^2) - (\nabla \cdot n^2)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot n &= \frac{\partial}{\partial x}n_x + \frac{\partial}{\partial y}n_y + \frac{\partial}{\partial z}n_z \\ \nabla \times n &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} = i \left(\frac{\partial}{\partial y}n_z - \frac{\partial}{\partial z}n_y \right) + j \left(\frac{\partial}{\partial z}n_x - \frac{\partial}{\partial x}n_z \right) + k \left(\frac{\partial}{\partial x}n_y - \frac{\partial}{\partial y}n_x \right) \end{aligned}$$

Para los cristales líquidos nemáticos $s_0 = t_0 = k_{12} = 0$, e introduciendo la notación $k_{11} = k_1$, $k_{22} = k_2$, $k_{33} = k_3$ y $k_{24} = k_4$, la ecuación (3.7) queda:

$$w = \frac{1}{2}k_1(\nabla \cdot n)^2 + \frac{1}{2}k_2(n \cdot \nabla \times n)^2 + \frac{1}{2}k_3(n \times \nabla \times n)^2 + \frac{1}{2}(k_2 + k_4)(tr(\nabla n^2) - (\nabla \cdot n^2)) \quad (3.8)$$

Las constantes elásticas dependen de la temperatura y son del orden de 10^{-12} N, por ejemplo, para el líquido nemático PAA a una temperatura de 125°C se han establecido los valores; $k_1 = 4,5 \cdot 10^{-12}\text{N}$, $k_2 = 2,9 \cdot 10^{-12}\text{N}$ y $k_3 = 9,5 \cdot 10^{-12}\text{N}$.

3.2. Campos Eléctricos y Magnéticos

Al aplicar campos eléctricos y magnéticos a una muestra de cristal líquido, el director se alinea paralelamente o perpendicularmente al campo en cuestión. Este hecho suele jugar un papel decisivo en las aplicaciones tecnológicas de los cristales líquidos.

Consideremos un campo eléctrico E que actúa sobre una muestra de cristal líquido nemático. Suponiendo que éste es dieléctrico y que no existe flexoelectricidad ni polarización superficial, la densidad de energía libre asociada a la interacción del campo con el cristal líquido es

$$w = -\frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_a(n \cdot E)^2 \quad (3.9)$$

n es el director, ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío, y $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ es la anisotropía dieléctrica del cristal líquido. Obsérvese que si $\epsilon_a > 0$, el director tiende a orientarse a lo largo de E , mientras que si $\epsilon_a < 0$, el director tiende a orientarse en el plano perpendicular a E .

Si aplicamos un campo magnético, la densidad de energía libre es equivalente:

$$w = -\frac{1}{2}\mu_0^{-1}\chi_a(n \cdot H)^2 \quad (3.10)$$

En este caso; μ_0 es la permeabilidad en el vacío, χ_a es la anisotropía magnética, y al igual que para el campo eléctrico, si $\chi_a > 0$, el director tiende a alinarse paralelo a H y si $\chi_a < 0$, se alinea perpendicularmente a H .

Por último, mencionar que a diferencia de los campos magnéticos, los eléctricos interactúan fuertemente sobre el cristal líquido.

3.3. Anclaje

Definimos como anclaje el efecto que sobre el director imponen las superficies, y la influencia que tiene sobre todo el volumen de cristal líquido. Los principales tipos de anclaje son los siguientes:

- **Sin Anclaje:** Las superficies no imponen condiciones de frontera y por tanto no influyen en la alineación del director.
- **Anclaje Fuerte:** Las fuerzas de superficie son suficientemente grandes para obligar a n a tomar una dirección en las proximidades de una superficie. Hay dos tipos de direcciones impuestas:



Figura 3.2: Alineamientos con Anclaje Fuerte

En el caso (a), el director es forzado a alinearse perpendicularmente a las placas. Para ello se aplican unos detergentes o se tratan químicamente las superficies.

En el caso (b), el director se alinea paralelamente a las placas. Para que sea así, se pulimentan las superficies en una única dirección.

- **Anclaje Cónico:** El director se alinea formando un ángulo ψ , que depende de la temperatura, con la normal a las placas ν , cumpliendo $(n \cdot \nu)^2 = \sin^2 \psi$.

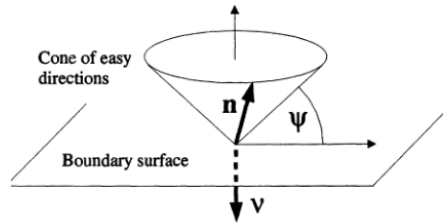


Figura 3.3: Alineamiento en Anclaje Cónico

Podemos concluir que si $\psi = \frac{\pi}{2}$ tenemos un anclaje fuerte homeotrópico y si $\psi = 0$, tenemos un anclaje fuerte homogéneo.

- **Anclaje Débil:** Para distorsionar al director introducimos una fuerza de superficie que llamaremos energía de anclaje débil

$$w_s = \frac{1}{2} \tau_0 \left(1 + \omega (n \cdot \nu)^2 \right) \quad (3.11)$$

con $\tau_0 > 0$, $\omega > -1$ y ν al igual que antes, es el vector unitario perpendicular a la superficie.

Cuando $-1 < \omega < 0$, la energía de anclaje débil favorece el alineamiento del director paralelo a ν , es decir favorecerá un alineamiento homeotrópico. Cuando $\omega > 0$, se favorecerá el alineamiento homogéneo.

3.4. Transición de Fredericksz en Nemáticos

Consideramos un cristal líquido nemático entre dos placas de cristal. Considérese el caso en que la interacción entre el nemático y las superficies hace que el director sea perpendicular a éstas en sus proximidades. Cuando un campo magnético H , (o eléctrico), se aplica perpendicular al director, no se produce ninguna distorsión hasta que la intensidad del campo supera un umbral crítico H_c .

Efectivamente, si $\chi_a > 0$, el director tiende a alinearse paralelamente al campo aplicado dentro de la muestra, compitiendo con las condiciones de anclaje impuestas en las superficies. De tal manera, que mientras $H = 0$ el director tendrá un alineamiento uniforme a lo largo de todo el cristal líquido, pero a medida que aumentamos la intensidad de H se puede apreciar la distorsión del director, cambiando abruptamente sus propiedades ópticas. La razón es que tanto el campo externo, como las superficies ejercen torsiones sobre las moléculas de la muestra y cuando el campo supera el umbral crítico H_c , se produce la distorsión del director que tiende a alinearse en la dirección del campo, como podemos observar en la Figura 3.4

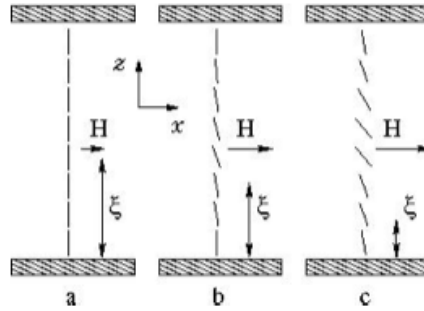


Figura 3.4: Transición de Freedericksz

Este efecto fue observado por primera vez por Freedericksz y Zolina y puede ser usado para medir algunas de las constantes elásticas. Además, es la base de los dispositivos de visualización de cristal líquido, dedicando los capítulos 4 y 5 del presente trabajo a su desarrollo.

3.5. Ecuaciones de Equilibrio

Las ecuaciones que determinan la configuración de equilibrio en un cristal líquido, son obtenidas aplicando el requerimiento de que la energía libre debe ser mínima.

La variación de energía total satisface el principio de trabajo virtual, es decir, para una deformación virtual infinitamente pequeña de un cuerpo que se encuentra en equilibrio, el trabajo virtual de las fuerzas exteriores es igual al trabajo virtual interno de deformación. Así dicho principio en una muestra de cristal líquido sería

$$\delta \int_V w(n, \nabla n) dV = \int_V (F \delta_x + G \nabla n) dV + \int_S (t \delta_x + s \nabla n) dS \quad (3.12)$$

donde V es el volumen de la muestra de cristal líquido, S son las superficies que limitan la muestra (placas), w es la densidad de energía y δ_x son los desplazamientos virtuales. Además, F es la fuerza por unidad de volumen, t es la fuerza de superficie por unidad de área, G son las fuerzas de volumen y s las fuerzas de superficie.

Si en la ecuación anterior (3.12), aplicamos restricciones al desplazamiento y a las variaciones del director n , con las transformaciones necesarias, que podemos seguir detalladamente en [2, pp. 36,37], llegamos a las siguientes ecuacio-

nes de equilibrio en una muestra de volumen V

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial n_{i,j}} \right)_{,j} - \frac{\partial \omega}{\partial n_i} + G_i + \lambda_{n_i} = 0$$

$$t_{i,j} + F_i = 0 \quad (3.13)$$

donde $,j$ representa la derivada parcial respecto a la variable j -ésima, de tal manera que $t_{i,j}$ se interpreta como la derivada de la componente i -ésima de t con respecto a la j -ésima.

En la teoría de los cristales líquidos, representamos el director

$$n = (\cos \theta_1 \cos \theta_2, \cos \theta_1 \sin \theta_2, \sin \theta_1) \quad (3.14)$$

donde, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$, lo que nos va a permitir simplificar las ecuaciones de equilibrio (3.13) mediante el proceso descrito en [2, pp. 51-53], llegando a

$$\left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \theta_{\alpha,i}} \right)_{,i} - \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \theta_{\alpha}} = 0 \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.15)$$

Ecuación que vamos a utilizar en el capítulo siguiente para calcular las soluciones de equilibrio.

3.6. Soluciones de Equilibrio

Para obtener la configuración de equilibrio del director, hemos de minimizar la energía libre total que proviene de la energía elástica, de la energía de anclaje de las superficies y de la energía resultante de aplicar un campo eléctrico o magnético.

En esta sección vamos a ver algunas de éstas configuraciones debidas a la aplicación de energías de anclaje, dejando para el siguiente capítulo las alcanzadas al aplicar campos externos.

3.6.1. Cristal Líquido con Anclaje Fuerte

Consideramos un cristal líquido nemático confinado entre dos placas, separadas una distancia d como podemos ver en la Figura 3.5. Suponemos ambas placas sometidas a la muestra a un anclaje fuerte, de tal forma que el director n satisface las siguientes condiciones de frontera:

$$n_b = (1, 0, 0) \quad \text{en} \quad z = 0, d, \quad (3.16)$$

de acuerdo al sistema de ejes cartesianos introducidos en la Figura 3.5.

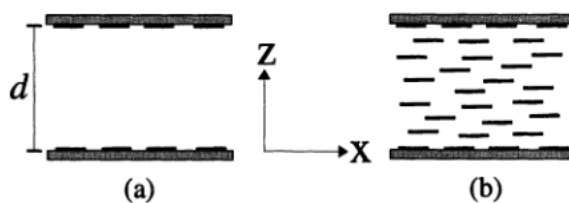


Figura 3.5: (a) Alineamiento inicial en las proximidades de las superficies. (b) Solución uniformemente constante de equilibrio alcanzada.

Consideramos las soluciones del director de la forma

$$n = (\cos \phi(z), \text{sen } \phi(z), 0) \quad (3.17)$$

con las condiciones de frontera establecidas en (3.16), vemos que

$$\phi = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, d \quad (3.18)$$

Insertamos n en la expresión de la densidad de energía obtenida en (3.8), posteriormente integramos, dando lugar a la expresión de la energía total por unidad de área en las placas (plano xy)

$$W = \frac{1}{2} K_2 \int_0^d \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz, \quad (3.19)$$

La ecuación de equilibrio viene dada por (3.15), siendo, $\theta_1 \equiv 0$ y $\theta_2 = \phi(z)$. Por tanto ϕ tiene que satisfacer la ecuación de Euler

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \phi'} \right) - \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.20)$$

donde $\hat{\omega} = \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2$, y dado que, $' = \frac{d}{dz}$, llegamos a

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0 \quad (3.21)$$

cuya solución es

$$\phi(z) = az + b, \quad a, b \text{ constantes} \quad (3.22)$$

Aplicando las condiciones frontera (3.18), revela que

$$\phi(z) \equiv 0, \quad 0 \leq z \leq d, \quad (3.23)$$

el alineamiento del director n es uniformemente constante en toda la muestra como vemos en la Figura 3.5.b.

3.6.2. Twist con Anclaje Fuerte

Consideramos el mismo experimento que en el apartado anterior, pero rotamos la placa superior $\frac{\pi}{2}$ sobre su normal, de tal forma que el alineamiento del director en las proximidades de ambas superficies forman un ángulo recto, como podemos ver en la Figura 3.6.a.

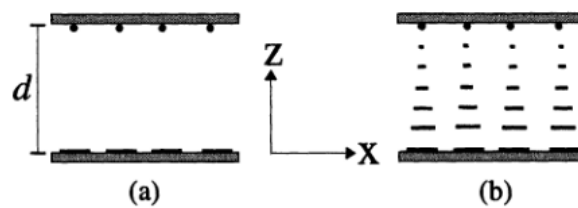


Figura 3.6: (a) Alineamiento inicial: El director en la placa superior forma un ángulo recto respecto al de la inferior. (b) Solución uniformemente twisted de equilibrio alcanzada.

Siguiendo el mismo procedimiento que hemos utilizado en el ejemplo anterior, las condiciones de frontera son

$$n_b = (0, 1, 0) \quad \text{en} \quad z = d, \quad (3.24)$$

$$n_b = (1, 0, 0) \quad \text{en} \quad z = 0, \quad (3.25)$$

Lo que nos lleva a

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad z = d, \quad (3.26)$$

$$\phi = 0 \quad \text{en} \quad z = 0. \quad (3.27)$$

La aplicación de estas condiciones nos proporciona la solución que podemos ver en la Figura 3.6.b

$$\phi(z) = \frac{\pi}{2d}z. \quad (3.28)$$

3.6.3. Soluciones de Equilibrio Tilt y Twist

En este apartado vamos a buscar soluciones más generales que las dos vistas anteriormente, en las que el director va a ser de la forma:

$$n = (\cos \theta(z) \cos \phi(z), \cos \theta(z) \sin \phi(z), \sin \theta(z)), \quad (3.29)$$

donde ϕ es el ángulo twist que hemos visto en los casos anteriores y está definido en el plano xy , y θ es el ángulo tilt, que representa la inclinación del director fuera del plano de las placas. Evidentemente en los dos ejemplos anteriores $\theta = 0$.

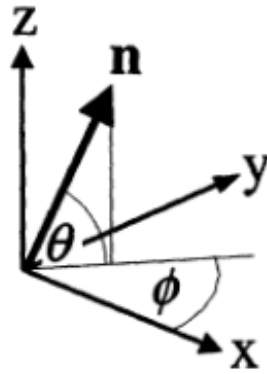


Figura 3.7: Ángulos twist ϕ y tilt θ .

Si expresamos la densidad de energía en nemáticos (3.8) en función de $\hat{\omega}$, llegamos a

$$w(n, \nabla n) = \hat{\omega}(\theta, \phi, \theta', \phi') = \frac{1}{2}f(\theta)(\theta')^2 + \frac{1}{2}g(\phi)(\phi')^2 \quad (3.30)$$

donde

$$f(\theta) = K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta, \quad (3.31)$$

$$g(\theta) = (K_2 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta) \cos^2 \theta. \quad (3.32)$$

Aplicando la ecuación de Euler - Lagrange (3.20), obtenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$f(\theta) (\theta')^2 + g(\theta) (\phi')^2 = a, \quad (3.33)$$

$$g(\theta) \phi' = b. \quad (3.34)$$

donde a y b son constantes. Vamos ahora a buscar las diferentes soluciones según las condiciones iniciales impuestas.

Solución Tilt

Imponemos las condiciones iniciales con anclaje fuerte, tal que

$$\theta(0) = \theta(d) = \theta_0, \quad (3.35)$$

$$\phi(0) = \phi(d) = 0, \quad (3.36)$$

donde θ_0 es el ángulo que forma inicialmente el director con el plano de las placas en las proximidades de éstas. Por la condición (3.36), deducimos que $\phi \equiv 0$, así que sustituyendo en (3.33) concluimos que $f(\theta) (\theta')^2 = a$. Si $a > 0$ entonces $\theta' \neq 0$ para $0 \leq z \leq d$ y además las condiciones de frontera impuestas en (3.35) no se cumplen. Si $a = 0$, por la positividad de $f(\theta)$, $\theta' = 0$, y entonces aplicando las condiciones de frontera llegamos a la siguiente solución de equilibrio

$$\theta(z) = \theta_0, \quad \phi(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq d, \quad (3.37)$$

por tanto, la alineación del director es uniforme en toda la muestra, como podemos ver en la Figura 3.8

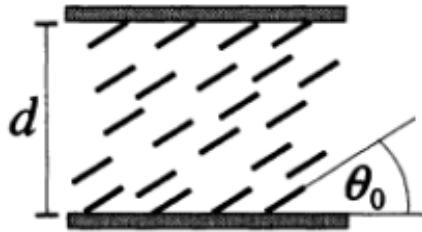


Figura 3.8: Solución con ángulo θ_0 impuesto en las condiciones de frontera

Solución Twist

Consideramos que el director está inicialmente alineado paralelo a las placas en sus fronteras y como en la Figura 3.6 la placa superior se va a rotar un ángulo arbitrario $2\phi_0$ con respecto a la inferior. Así, podemos escribir las condiciones frontera como

$$\theta(0) = \theta(d) = 0, \quad (3.38)$$

$$\phi(0) = -\phi_0, \quad \phi(d) = \phi_0, \quad (3.39)$$

Si seguimos el mismo procedimiento que en los casos anteriores, es decir, aplicamos las condiciones de frontera sobre las ecuaciones de equilibrio, llegamos a la siguiente solución

$$\theta \equiv 0, \quad \phi = \phi_0 \left(2\frac{z}{d} - 1 \right), \quad 0 \leq z \leq d, \quad (3.40)$$

Solución Twist y Tilt

En este caso las condiciones de frontera satisfacen las siguientes simetrías

$$\theta(z) = \theta(d - z), \quad \phi(z) = -\phi(d - z), \quad 0 \leq z \leq d, \quad (3.41)$$

por las cuales

$$\theta' \left(\frac{d}{2} \right) = 0, \quad \theta \left(\frac{d}{2} \right) = \theta_m > 0, \quad (3.42)$$

$$\phi \left(\frac{d}{2} \right) = 0, \quad (3.43)$$

Consideramos que la máxima inclinación θ_m es positiva y al igual que anteriormente, asumimos que las constantes elásticas son positivas, por tanto $f(\theta)$ y $g(\theta)$ son positivas para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Aplicando las condiciones anteriores en las ecuaciones de equilibrio, llegamos a

$$f(\theta) (\theta')^2 = b^2 \left[\frac{g(\theta) - g(\theta_m)}{g(\theta_m) g(\theta)} \right] \quad (3.44)$$

tal que

$$g(\theta) - g(\theta_m) = (\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta) \left[2K_2 - K_3 + (K_3 - K_2) (\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta) \right] \quad (3.45)$$

Como la expresión anterior depende de las constantes elásticas de Frank, vamos a estudiar los siguientes casos:

- Si $K_3 \leq 2K_2$, por (3.45) deducimos que

$$0 < \theta_m < \frac{\pi}{2} \quad (3.46)$$

- Si $K_3 > 2K_2$, obtenemos la siguiente restricción

$$0 < \theta_c \leq \theta_m < \frac{\pi}{2} \quad (3.47)$$

donde $\theta_c > 0$ está definido por

$$\sin^2 \theta_c = \frac{K_3 - 2K_2}{K_3 - K_2} \quad (3.48)$$

Así con estas restricciones podemos encontrar las soluciones implícitas de θ y ϕ . Para ello, seguimos el mismo procedimiento que en casos anteriores, y por separación de variables, llegamos a

$$bz = \sqrt{g(\theta_m)} \int_0^\theta \left\{ \frac{g(u) f(u)}{g(u) - g(\theta_m)} \right\}^{\frac{1}{2}} du, \quad 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \quad (3.49)$$

La solución para $\frac{d}{2} \leq z \leq d$ se obtiene usando la condición simétrica (3.42). De igual forma, la solución para ϕ es

$$\phi = -\phi_0 \sqrt{g(\theta_m)} \int_0^\theta \left\{ \frac{f(u)}{g(u) (g(u) - g(\theta_m))} \right\}^{\frac{1}{2}} du \quad (3.50)$$

Las soluciones de θ y ϕ son válidas si cumplen (3.42(2)) y (3.43), lo que significa que las siguientes relaciones deben ser cumplidas

$$b \frac{d}{2} = \sqrt{g(\theta_m)} \int_0^{\theta_m} \left\{ \frac{g(u) f(u)}{g(u) - g(\theta_m)} \right\}^{\frac{1}{2}} du \quad (3.51)$$

$$\phi_0 = \sqrt{g(\theta_m)} \int_0^{\theta_m} \left\{ \frac{f(u)}{g(u)(g(u) - g(\theta_m))} \right\}^{\frac{1}{2}} du \quad (3.52)$$

Para terminar vamos a hacer una comparación entre la energía $W_p = 2K_2 \frac{\phi_0^2}{d}$ en la solución twist plana (3.40) y la energía W_{np} de la solución twist no plana, proporcionada por las ecuaciones (3.49) y (3.50). La solución con menor energía será interpretada como la solución preferida. La energía W_{np} por unidad de área en las placas se obtiene integrando $\hat{\omega}$ en (3.30) con z entre 0 y d

$$W_{np} = \frac{1}{2} \int_0^d [f(\theta) (\theta')^2 + g(\theta) (\phi')^2] dz \quad (3.53)$$

Insertando (3.34) en W_{np} , obtenemos

$$W_{np} = \frac{b^2 d}{2g(\theta_m)} \quad (3.54)$$

Entonces

$$W_{np} - W_p = \frac{b^2 d}{2g(\theta_m)} - 2K_2 \frac{\phi_0^2}{d} \quad (3.55)$$

Por tanto $W_{np} < W_p$, si

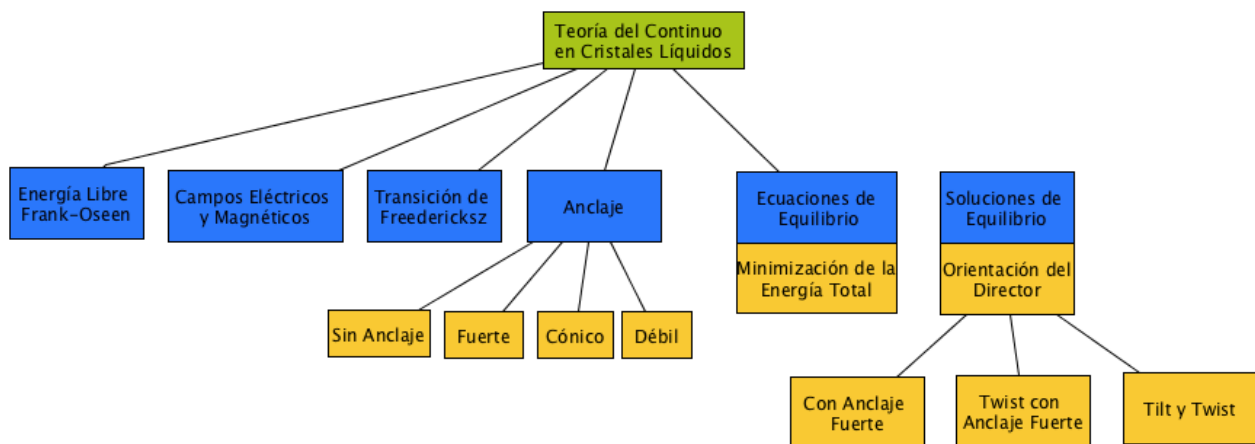
$$b^2 d^2 < 4K_2 \phi_0^2 g(\theta_m) \quad (3.56)$$

y entonces, la solución twist no plana es la solución preferida si (3.56) es satisfecha.

En este capítulo, hemos revisado los aspectos fundamentales de la teoría del continuo en los cristales líquidos, terminando con las soluciones de equilibrio del director bajo determinadas condiciones iniciales de frontera.

En el siguiente capítulo, vamos a investigar esas soluciones cuando además la muestra de cristal líquido está bajo la influencia de un campo eléctrico o magnético (Efecto Freedericksz), núcleo fundamental de este trabajo.

3.7. Resumen



Capítulo 4

Transición de Freedericksz en Nemáticos

Hemos reflejado desde el comienzo de este trabajo la importancia de los cristales líquidos en nuestra vida, en concreto habíamos comentado la relevancia en nuestra sociedad de los dispositivos de display (LCDs). La birrefringencia de un cristal líquido y la habilidad para ser alterada a través de un campo aplicado son factores que permiten al cristal líquido ser usados en este tipo de dispositivos.

Vimos en el capítulo anterior como el director (n) puede ser influenciado por un campo eléctrico o magnético así como por las fuerzas impuestas por las superficies de frontera. La competición entre ellas producen severas transiciones entre dos configuraciones moleculares alternativas (On/Off en los displays). La Transición de Freedericksz es un fenómeno clásico en los cristales líquidos, de tal forma que para que se pueda producir una distorsión del director, la intensidad del campo aplicado ha de ser mayor de un cierto umbral, denominado “umbral de Freedericksz” y la transición de una configuración inicial a una nueva es llamada transición o efecto Freedericksz.

A continuación vamos a ir revisando las distintas transiciones que se producen en los cristales líquidos, tanto desde un punto de vista físico como matemático, reflejando en este último caso, que el cambio de configuración del cristal desde un punto cualitativo es una bifurcación.

4.1. Transiciones Clásicas

En esta sección vamos a revisar las transiciones de Freedericksz que se producen bajo geometrías splay, twist y bend, cuyas soluciones de equilibrio en ausencia de campos eléctricos y magnéticos ya vimos en el capítulo anterior. Dichas soluciones serán el punto de partida para buscar las soluciones de equilibrio cuando aplicamos campos externos.

El procedimiento a seguir es parecido al que seguimos en la sección 3.6, teniendo en cuenta que ahora hemos de calcular además el valor de H a partir del cual se produce la transición de Freedericksz.

Finalizaremos con una simplificación mediante aproximación a una constante, que nos permitirá hacer un estudio cualitativo del problema y así poder trazar y analizar los diagramas de bifurcación asociados.

4.1.1. Geometría Splay

Consideramos una muestra de cristal líquido nemático confinado entre dos placas paralelas separadas una distancia d , como podemos ver en la Figura 4.1. Suponemos que el director está influenciado por un anclaje fuerte paralelo a las superficies, por tanto n satisface

$$n_b = (1, 0, 0) \quad \text{en} \quad z = 0, d,$$

así la situación de equilibrio en ausencia de campos externos obtenida en la ecuación (3.23) será

$$n = (1, 0, 0) \quad 0 \leq z \leq d$$

Suponemos que $\chi_a > 0$ y aplicamos un campo magnético perpendicular a las placas

$$\mathbf{H} = H(0, 0, 1), \quad H = |\mathbf{H}|$$

Buscamos soluciones del director teniendo en cuenta que n se va a ir reorientando para ponerse paralelo a \mathbf{H} , ($\chi_a > 0$), además asumimos que la reorientación será uniforme en los ejes x e y . Así n será de la forma

$$n = (\cos \theta(z), 0, \sin \theta(z)) \quad (4.1)$$

Las condiciones de frontera como podemos observar en la Figura 4.1.a son

$$\theta_0 = \theta_d = 0 \quad (4.2)$$

La energía total por unidad de área aplicada sobre todo el volumen V , consta de dos sumandos, la energía elástica de Frank y la energía magnética

$$W = \int_V (w_F + w_{mag}) dV = \frac{1}{2} \int_0^d \left\{ [K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta] (\theta')^2 - \chi_a H^2 \sin^2 \theta \right\} dz \quad (4.3)$$

Para calcular la ecuación de equilibrio, aplicamos la ecuación de Euler (3.20) sobre (4.3), obteniendo

$$\left[K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta \right] \theta'' + (K_3 - K_1) (\theta')^2 \sin \theta \cos \theta + \chi_a H^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (4.4)$$

De dicha ecuación obtenemos dos soluciones para el director:

- **Solución no distorsionada** cuando $\theta \equiv 0$.
- **Solución distorsionada** (o solución no cero) en la que tenemos en cuenta las condiciones de simetría

$$\theta(z) = \theta(d - z), \quad 0 \leq z \leq d, \quad (4.5)$$

$$\theta' \left(\frac{d}{2} \right) = 0, \quad \theta \left(\frac{d}{2} \right) = \theta_m > 0, \quad (4.6)$$

La constante θ_m representa el ángulo máximo de distorsión que el director puede alcanzar.

En el intervalo $0 \leq z \leq \frac{d}{2}$, θ aumenta monótonamente de 0 a θ_m , llegando a la solución siguiente en la que θ está definida en función de z .

$$\sqrt{\chi_a}Hz = \int_0^\theta \frac{[K_1 \cos^2 \hat{\theta} + K_3 \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}}{[\sin^2 \theta_m - \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}} d\hat{\theta} \quad (4.7)$$

La condición (4.6 (2)) nos lleva a

$$\sqrt{\chi_a}H\frac{d}{2} = \int_0^{\theta_m} \frac{[K_1 \cos^2 \hat{\theta} + K_3 \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}}{[\sin^2 \theta_m - \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}} d\hat{\theta} \quad (4.8)$$

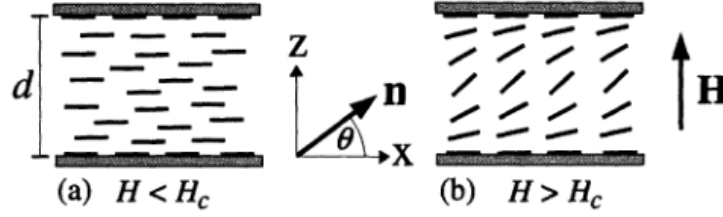


Figura 4.1: (a) $H < H_c$: el alineamiento inicial paralelo a las placas permanece intacto, (b) $H > H_c$: la orientación del director cambia, se produce el efecto Freedericksz.

La solución para $\frac{d}{2} \leq z \leq d$, es decir $\theta(d-z)$ se obtiene cambiando en la ecuación (4.7), z por $d-z$.

Para el cálculo del **umbral crítico** usamos la siguiente sustitución

$$\sin \hat{\theta} = \sin \theta_m \sin \lambda \quad (4.9)$$

tal que

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\lambda} = \frac{\sin \theta_m \cos \lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \hat{\theta} \sin^2 \lambda}} \quad (4.10)$$

satisface la ecuación (4.7), de tal manera que (4.8) puede ser reformulada

$$\sqrt{\chi_a}Hz = \int_0^\phi G(\theta_m, \lambda) d\lambda, \quad \phi = \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_m}\right) \quad (4.11)$$

$$\sqrt{\chi_a}H\frac{d}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\theta_m, \lambda) d\lambda \quad (4.12)$$

tal que

$$G(\theta_m, \lambda) = \left[\frac{K_1 + (K_3 - K_1) \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda}{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

$G(\theta_m, \lambda)$ es una función de θ_m que crece monótonamente para $0 \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2}$ cuando $K_3 > 0$. Mediante la aplicación del teorema de convergencia dominada tomamos el límite $\theta_m \rightarrow 0$ dentro de la integral (4.12), reformulándola y obteniendo la solución (4.11) para un campo crítico H_c

$$H_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_1}{\chi_a}} \quad (4.14)$$

Además de (4.12) y (4.13), $\theta_m \rightarrow \frac{\pi}{2}$ cuando $H \rightarrow \infty$. Esto significa que, para un valor fijo de d , y dado un campo de magnitud $H > H_c$, el valor de $\theta_m > 0$ puede ser determinado por (4.12). Este valor de θ_m se introduce en (4.11) para obtener la solución distorsionada θ en función de z ; esta forma de dar la solución es más práctica para cálculos numéricos que la original (4.7). Recalcar que si $H = H_c$, $\theta_m = 0$ y la solución coincide con la solución no distorsionada.

Para verificar que H_c es el umbral crítico y la transición de Freedericksz ocurre, Figura 4.1.b, necesitamos comprobar que la solución distorsionada es energéticamente favorable sobre la no distorsionada cuando $H > H_c$. Así consideramos la diferencia de energías por unidad de área en las placas

$$\Delta W = W(\theta) - W(0) \quad (4.15)$$

donde θ es la solución distorsionada y 0 es la no distorsionada. De la ecuación de la energía (4.3) y las condiciones de simetría (4.5), tenemos

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^d \left\{ [K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta] (\theta')^2 - \chi_a H^2 \sin^2 \theta \right\} dz \\ &= \chi_a H^2 \int_0^{\theta_m} (\sin^2 \theta_m - 2 \sin^2 \theta) dz \\ &= \chi_a H^2 \int_0^{\theta_m} (\sin^2 \theta_m - 2 \sin^2 \theta) \frac{dz}{d\theta} d\theta \\ &= \chi_a H^2 \int_0^{\theta_m} (\sin^2 \theta_m - 2 \sin^2 \theta) \frac{[K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}{[\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} d\theta \end{aligned} \quad (4.16)$$

Utilizando la sustitución (4.9), con $\hat{\theta}$ reemplazado por θ , y aplicando la regla (4.10) obtenemos

$$\Delta W = \sqrt{\chi_a} H \sin^2 \theta_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\lambda) G(\theta_m, \lambda) d\lambda \quad (4.17)$$

Cuando $K_3 > 0$, $G(\theta_m, \lambda) > 0$ para $0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2}$.

Así que integrando por partes obtenemos

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \chi_a H \sin^2 \theta_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} G(\theta_m, \lambda) d\lambda < 0 \quad (4.18)$$

inecuación que muestra el comportamiento de la integral en $0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$. Por tanto, podemos concluir que

$$\Delta W < 0 \quad \text{para } H > H_c \quad (4.19)$$

es decir, la solución distorsionada es la preferida cuando $H > H_c$.

Experimentalmente la detección de H_c en (4.14), permite la medida de la constante K_1 si χ_a es conocida.

4.1.2. Geometría Twist

Para este caso, el alineamiento inicial del director y del campo magnético son paralelos a las placas pero mutuamente ortogonales.

El alineamiento inicial del director viene dado por $\phi \equiv 0$ cuando las soluciones son de la forma

$$n = (\cos \phi(z), \sin \phi(z), 0) \quad (4.20)$$

cumpliendo las condiciones de frontera (4.2), (4.5) y (4.6).

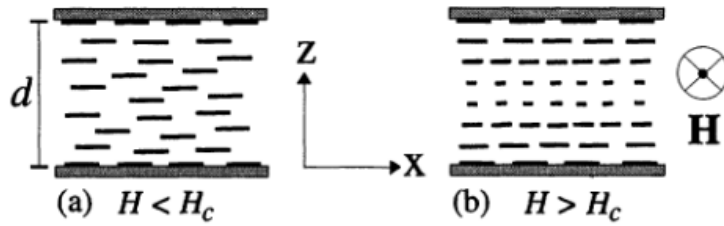


Figura 4.2: (a) $H < H_c$: el alineamiento inicial paralelo a las placas permanece intacto, (b) $H > H_c$: el director empieza a torsionar, se produce el efecto Freedericksz.

El campo magnético es

$$\mathbf{H} = H(0, 1, 0)$$

Y la ecuación de equilibrio obtenida para la geometría twist

$$K_2 \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \chi_a H^2 \sin \phi \cos \phi = 0 \quad (4.21)$$

de tal manera que mediante la aplicación de las condiciones de frontera y simetría, y siguiendo el mismo procedimiento que el descrito para la geometría splay, llegamos a determinar el valor crítico del campo magnético a partir del cuál se produce la transición de Freedericksz, permitiéndonos medir experimentalmente K_2 si χ_a es conocida.

$$H_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_2}{\chi_a}} \quad (4.22)$$

4.1.3. Geometría Bend

El campo magnético es paralelo a las placas mientras que el alineamiento uniforme inicial de la muestra es perpendicular a ellas.

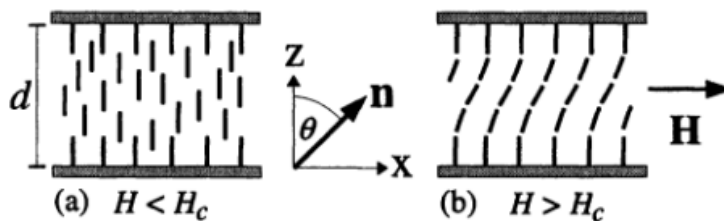


Figura 4.3: (a) $H < H_c$: el alineamiento inicial perpendicular a las placas permanece intacto, (b) $H > H_c$: el director cambia de dirección en el plano xy , se produce el efecto Freedericksz.

El alineamiento inicial del director viene dado por $\theta \equiv 0$ cuando las soluciones son de la forma

$$n = (\sin \theta(z), 0, \cos \theta(z)) \quad (4.23)$$

El campo magnético es

$$\mathbf{H} = H(1, 0, 0)$$

El análisis es el mismo que el de los casos anteriores, siendo el valor crítico

$$H_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_3}{\chi_a}} \quad (4.24)$$

que nos permitirá medir la constante elástica K_3 si χ_a es conocida.

4.1.4. Estudio cualitativo: aproximación a una constante

Para hacer un estudio cualitativo de las soluciones, es conveniente simplificar un poco el problema, para ello hacemos $K_1 = K_2 = K_3 = K$ y normalizamos la magnitud del campo magnético

$$\bar{H} = \frac{H}{H_c}, \quad H_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K}{\chi_a}} \quad (4.25)$$

En este contexto, la ecuación (4.12) se reduce

$$\sqrt{\chi_a} H \frac{d}{2} = \sqrt{K} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda}} \quad (4.26)$$

de la cual obtenemos

$$\bar{H} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda}} = \frac{2}{\pi} K(\sin \theta_m) \quad (4.27)$$

donde $K(k)$, $k = \sin \theta_m$, es la integral elíptica de primera clase de módulo k . Las transiciones que hasta ahora hemos analizado analíticamente, las podemos ilustrar con el siguiente diagrama de bifurcación que muestra como θ_m varía cuando \bar{H} aumenta, mostrando las soluciones de equilibrio estables, así cuando $H < H_c$, la solución estable es la no distorsionada o solución cero, y a partir de que alcanzamos el valor crítico, la solución cero se hace inestable y se alcanzan otras soluciones estables,

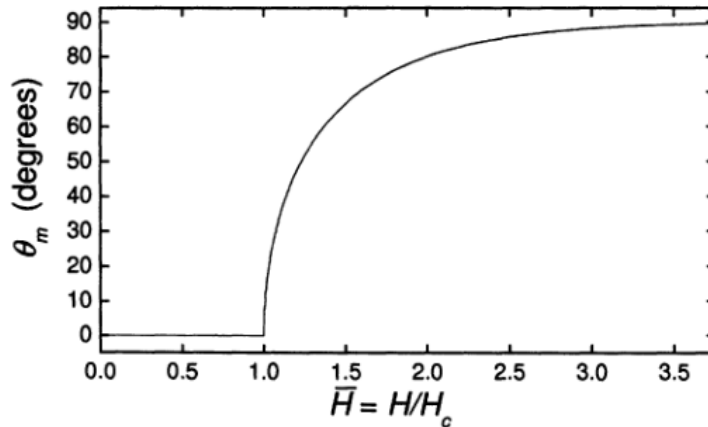


Figura 4.4: Diagrama de bifurcación: Dependencia del ángulo máximo de distorsión θ_m con respecto a \bar{H} para la constante aproximada K .

Podemos observar en la Figura 4.4 que θ_m se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ cuando H es 3 o 4 veces el valor de H_c , lo cual puede ser verificado matemáticamente usando la siguiente aproximación [2, p.80]

$$\bar{H} \sim \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{4}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_m}} \right] \quad (4.28)$$

quitamos el logaritmo y obtenemos

$$\sin^2 \theta_m \sim \sqrt{1 - 16e^{-\frac{\pi H}{H_c}}}$$

Como $16e^{-\frac{\pi H}{H_c}} < 1$, podemos utilizar la aproximación $(1+n)^r = 1 + rn + \frac{r(r-1)}{2!}n^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}n^3 + \dots$, válida para $|n| < 1$, siendo en nuestro caso, $r = \frac{1}{2}$ y $n = -16e^{-\frac{\pi H}{H_c}}$, obteniendo

$$\sin \theta_m \sim 1 + \frac{1}{2} \left(-16e^{-\frac{\pi H}{H_c}} \right) \sim 1 - 8e^{-\frac{\pi H}{H_c}} \quad (4.29)$$

y como θ_m se aproxima a $\theta_o = \frac{\pi}{2}$, podemos considerar el desarrollo en serie para la función seno

$$\sin \theta_m = \sin \theta_o + \frac{(\cos \theta_o)}{1!} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{(-\sin \theta_o)}{2!} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 + \dots \sim 1 - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2$$

de tal forma que

$$1 - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \sim 1 - 8e^{-\frac{\pi H}{H_c}}$$

Llegando finalmente

$$\theta_m \sim \frac{\pi}{2} - 4e^{-\frac{\pi}{2} \frac{H}{H_c}} \quad (4.30)$$

Dado \bar{H} , podemos determinar θ_m de la ecuación (4.27) o de la Figura 4.4. Estos valores de \bar{H} y θ_m pueden ser insertados en (4.11) y determinar $\theta(z)$. De tal manera que obtenemos

$$\sqrt{\chi_a} Hz = \sqrt{K} \int_0^\phi \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda}} \quad (4.31)$$

donde

$$\phi = \arcsin \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_m} \right) \quad (4.32)$$

Esta solución del problema de aproximación a una constante, puede ser puesta en forma adimensional introduciendo la variable

$$\bar{z} = \frac{z}{d} \quad (4.33)$$

Empleando las variables adimensionales \bar{H} y \bar{z} , la solución de θ puede ser formulada

$$\bar{z} = \frac{1}{\bar{H}\pi} \int_0^\phi \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda}} = \frac{1}{\bar{H}\pi} F(\phi, \sin \theta_m), \quad 0 \leq \bar{z} \leq \frac{1}{2} \quad (4.34)$$

donde, $F(\phi, k)$, $k = \sin \theta_m$, es la integral elíptica de primera clase de módulo k . La solución para $\frac{1}{2} \leq \bar{z} \leq 1$, es obtenida por los requerimientos de simetría, reemplazando \bar{z} por $1 - \bar{z}$. Claramente para $\theta = \theta_m$ y $\bar{z} = \frac{1}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$.

La Figura 4.5 muestra la solución de $\theta(\bar{z})$ en función de los incrementos de $H > H_c$, es decir cuando $\bar{H} > 1$

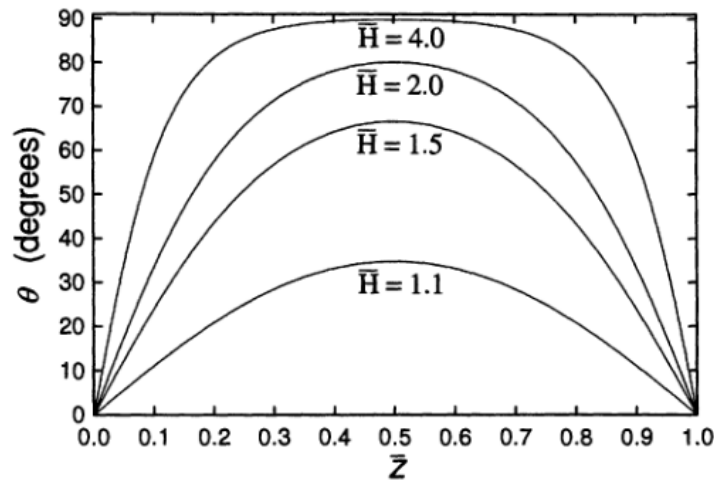


Figura 4.5: Solución $\theta(\bar{z})$ con $0 \leq \bar{z} \leq 1$, para diferentes valores de \bar{H} usando la aproximación a una constante.

4.2. Pretilt en las fronteras

Después de la transición de Freedericksz es posible tener diferentes situaciones, debido a que hay dos posibles distorsiones que son igualmente favorables energéticamente, dependiendo si $\theta_m < 0$, o $\theta_m > 0$. Esto puede ser evitado imponiendo una pequeña inclinación del director en las fronteras con las superficies, por ejemplo en el primer caso que vimos en la sección anterior, geometría splay, la solución del director sigue las ecuaciones (4.3) y (4.4), pero las condiciones de frontera ahora serán

$$\theta(0) = \theta(d) = \theta_o > 0 \quad (4.35)$$

Para $H = 0$, la ecuación de equilibrio tiene la solución trivial

$$\theta(z) = \theta_o, \quad 0 \leq z \leq d \quad (4.36)$$

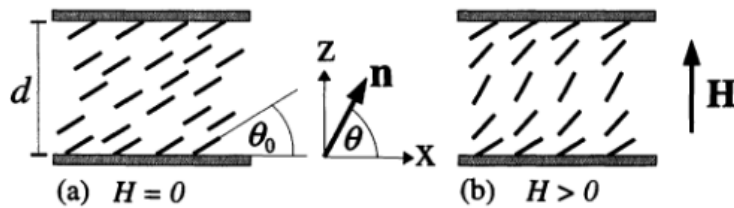


Figura 4.6: (a) El director está sometido a un anclaje fuerte en las fronteras con un ángulo de pretilt fijo θ_o , (b) Hay una transición de Freedericks cuando $H_c = 0$. Para pequeños θ_o , la diferencia entre θ_o y θ_m permanece relativamente pequeña hasta $H_c = H_{c_2}$.

Para $H > 0$ debemos tener en cuenta que ahora θ debe estar restringida a los valores en el rango $\theta_o \leq \theta \leq \theta_m$, así las soluciones análogas a (4.7) y (4.8) son respectivamente

$$\sqrt{\chi_a} Hz = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{[K_1 \cos^2 \hat{\theta} + K_3 \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}}{[\sin^2 \theta_m - \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}} d\hat{\theta}, \quad 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \quad (4.37)$$

$$\sqrt{\chi_a} H \frac{d}{2} = \int_{\theta_0}^{\theta_m} \frac{[K_1 \cos^2 \hat{\theta} + K_3 \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}}{[\sin^2 \theta_m - \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}} d\hat{\theta} \quad (4.38)$$

Si introducimos la transformación (4.9), la solución (4.37) puede ser expresada

$$\sqrt{\chi_a} H \frac{d}{2} = \int_{\lambda_0}^{\frac{\pi}{2}} G(\theta_m, \lambda) d\lambda, \quad \lambda_0 = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_m} \right) \quad (4.39)$$

con $G(\theta_m, \lambda)$ definidos en la ecuación (4.13).

La función G crece monótonamente en función de θ_m porque satisface

$$\frac{\partial}{\partial \theta_m} G(\theta_m, \lambda) > 0, \quad \theta_0 < \theta_m < \frac{\pi}{2}, \quad \lambda_0 < \lambda < \frac{\pi}{2} \quad (4.40)$$

Por simetría es una función creciente de λ y además

$$G(\theta_m, \lambda) \leq G\left(\theta_m, \frac{\pi}{2}\right) \leq \sqrt{K_1 + K_3 \sec \theta_m} \quad (4.41)$$

Para $\theta \leq \theta_m < \frac{\pi}{2}$

$$\lambda_0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{cuando} \quad \theta_m \rightarrow \theta_0 \quad (4.42)$$

Es claro que de (4.39) $H \rightarrow \frac{\pi}{2}$ cuando $\theta_m \rightarrow \theta_0$ porque

$$\int_{\lambda_0}^{\frac{\pi}{2}} G(\theta_m, \lambda) d\lambda \leq \sqrt{K_1 + K_3 \sec \theta_m} \int_{\lambda_0}^{\frac{\pi}{2}} d\lambda \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \theta_m \rightarrow \theta_0 \quad (4.43)$$

Por tanto, la solución (4.37) aparece cuando $H_c = 0$, pero para pequeños θ_0 , el efecto de la transición de Freedericksz no se va a notar hasta que H esté cerca de otra magnitud crítica H_{c_2} , hecho que vamos a demostrar a continuación considerando

$$0 < \theta_0 \ll 1, \quad \theta_m = \theta_0 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (4.44)$$

Entonces de (4.39),

$$\sqrt{\chi_a} H \frac{d}{2} = \int_{\lambda_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{K_1} d\lambda = \sqrt{K_1} \left(\frac{\pi}{2} - \lambda_0 \right) \quad (4.45)$$

$$\sin \lambda_0 = \frac{\theta_0}{\theta_0 + \varepsilon} \quad (4.46)$$

Sustituimos (4.46) en (4.45) y ordenando obtenemos

$$\varepsilon = \theta_0 \left[\sec \left(\sqrt{\frac{\chi_a}{K_1}} H \frac{d}{2} \right) - 1 \right] \quad (4.47)$$

Así podemos concluir que la solución distorsionada θ para valores de $\theta_0 \ll 1$ permanece relativamente pequeña hasta que H aumenta cerca de $H_{c_2} = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_1}{\chi_a}}$, que coincide con el campo crítico obtenido en (4.14).

La Figura 4.7 muestra la dependencia de θ_m con respecto a θ_0 en el caso especial de que $K_1 = K_3 = K$ donde, de la ecuación (4.39), para el valor clásico $H_c = H_{c_2}$

$$\bar{H} = \frac{H}{H_c} = \frac{2}{\pi} \int_{\lambda_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda}} \quad (4.48)$$

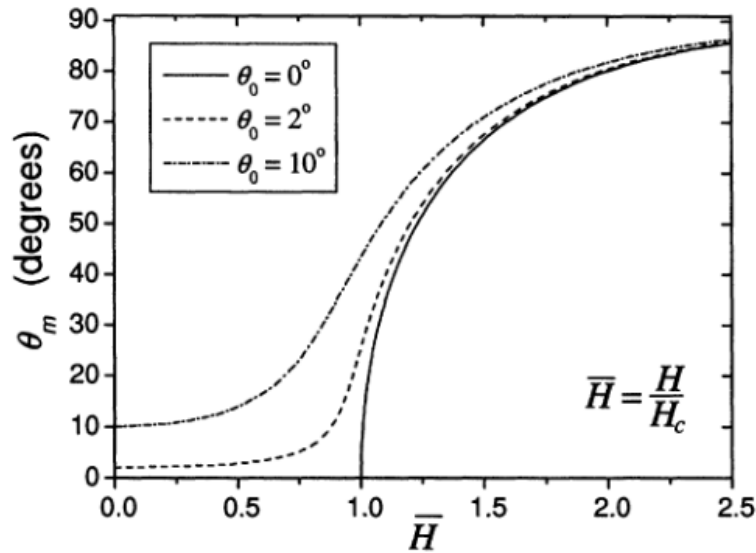


Figura 4.7: **Diagrama de Bifurcación:** Dependencia del ángulo máximo de distorsión θ_m con respecto a \bar{H} , cuando el ángulo de pretilt en las fronteras toma los valores $0^\circ, 2^\circ, 10^\circ$.

Podemos observar que cuando $\theta_0 = 0^\circ$, el gráfico coincide con el de la Figura 4.4, cuando $\theta_0 > 0$, los valores críticos medidos de H son más pequeños que los medidos teóricamente en (4.14); lo que nos lleva a deducir que las constantes de Frank medidas son más pequeñas que las reales. Rapini y Papoular (1969) mostraron que este error no era insignificante: por ejemplo, estimaron que $\frac{\Delta H_c}{H_c} \approx -1$ cuando $\theta_0 = 2^\circ$, y ese error afectaba a las constantes elásticas en un 20%.

4.3. Campos aplicados con un ángulo entre 0 y $\frac{\pi}{2}$

Restringimos nuestra atención al caso cuando $\chi_a > 0$ y \mathbf{H} es aplicado sobre toda la muestra con un ángulo fijo α . El director tiene la forma

$$\mathbf{n} = (\cos \theta(z), 0, \sin \theta(z)) \quad (4.49)$$

y el campo magnético

$$\mathbf{H} = H(\cos \alpha, 0, \sin \alpha), \quad H = |\mathbf{H}| \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (4.50)$$

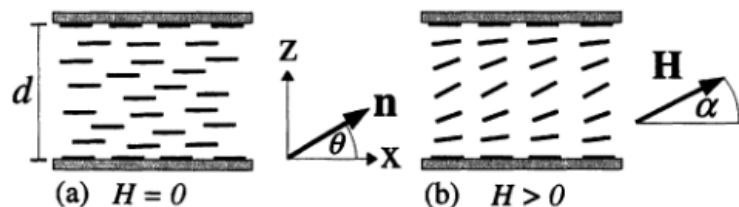


Figura 4.8: (a) Director sometido a anclaje fuerte en las fronteras, permanece paralelo a las placas de forma constante. (b) La transición de Fredericksz ocurre para $H_c = 0$, pero para $\alpha \approx \frac{\pi}{2}$, el ángulo máximo de distorsión permanece relativamente pequeño hasta $H_c = H_{c2}$.

Dado que el procedimiento necesario para llegar a las soluciones es bastante similar al utilizado en las secciones anteriores, haremos un resumen de los elementos necesarios para alcanzarlas, pudiendo consultar en [2, pp. 85,88] el proceso completo. Tenemos en cuenta

las condiciones de frontera

$$\theta_o = \theta_d = 0, \quad (4.51)$$

la ecuación de equilibrio

$$\left[K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta \right] \theta'' + (K_3 - K_1) (\theta')^2 \sin \theta \cos \theta + \chi_a H^2 \sin(\alpha - \theta) \cos(\alpha - \theta) = 0. \quad (4.52)$$

Además, en este caso, tenemos que tener en cuenta la restricción

$$0 < \theta \leq \theta_m \leq \alpha \quad (4.53)$$

Si $\theta = \theta_m = \alpha$, el alineamiento del director es paralelo al campo y representaría la solución óptima cuando $\chi_a > 0$.

La solución que obtenemos es

$$\sqrt{\chi_a} H \frac{d}{2} = \int_0^{\theta_m} \frac{[K_1 \cos^2 \hat{\theta} + K_3 \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}}{[\cos^2(\alpha - \theta_m) - \cos^2(\alpha - \hat{\theta})]^{\frac{1}{2}}} d\hat{\theta} \quad (4.54)$$

que al igual que en el caso clásico nos da una relación entre θ_m y H .

Con estos elementos y con análisis similares a los utilizados en el caso de pretilt, llegamos a la conclusión de que la solución distorsionada está siempre disponible para $H > 0$, siendo relativamente pequeña para $\alpha \approx \frac{\pi}{2}$ hasta que H está cerca de $H_{c2} = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_1}{\chi_a}}$.

4.4. Transición de Freedericksz con Campos Eléctricos

Aunque en las secciones anteriores hemos mostrado las transiciones de Freedericksz mediante las aplicación de campos magnéticos, vamos a revisar que también ocurren bajo la influencia de campos eléctricos. Todos los valores críticos de H tienen sus análogos para un campo eléctrico E , de tal forma que para $\epsilon_a > 0$ tenemos

$$E_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{k_1}{\epsilon_o \epsilon_a}}, \quad E_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{k_2}{\epsilon_o \epsilon_a}}, \quad E_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{k_3}{\epsilon_o \epsilon_a}} \quad (4.55)$$

para los problemas análogos descritos en las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3, respectivamente. El valor crítico del voltaje es de la forma $V_c = E_c d$ para una muestra de altura d .

Como ya habíamos mencionado, los campos eléctricos a diferencia de los magnéticos, son influenciados por el cristal líquido. Nuestro objetivo será modelar este efecto, sobre todo cuando $E > E_c$.

Consideramos que el director está fuertemente anclado en las fronteras paralelo al eje x y el campo eléctrico es aplicado en la dirección del eje z como podemos ver en la Figura 4.9.

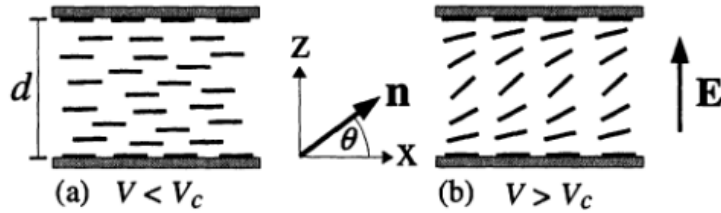


Figura 4.9: La transición de Fredericksz ocurre cuando $V_c = E_c d = \pi \sqrt{\frac{k_1}{\epsilon_o \epsilon_a}}$.

Dado que E depende de z , tenemos

$$\mathbf{n} = (\cos \theta(z), 0, \sin \theta(z)) \mathbf{E} = E(0, 0, E(z)) \quad (4.56)$$

Las condiciones de frontera son

$$\theta(0) = \theta(d) = 0 \quad (4.57)$$

La energía total, que incluye la energía elástica y la eléctrica, en función de θ tiene la forma

$$W = \frac{1}{2} \int_0^d [K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta] (\theta')^2 dz - \frac{1}{2} \epsilon_o V^2 \left\{ \int_0^d (\epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2 \theta)^{-1} dz \right\}^{-1} \quad (4.58)$$

la obtención de la expresión de la energía eléctrica que vemos en la ecuación superior, la podemos ver desarrollada en [2, p. 90, 91].

La ecuación de equilibrio que obtenemos es

$$\left[K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta \right] \theta'' + (K_3 - K_1) (\theta')^2 \sin \theta \cos \theta = -D^2 \epsilon_a \epsilon_o^{-1} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(\epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2 \theta)^2} \quad (4.59)$$

donde D es el desplazamiento eléctrico inducido por E , que viene dado por la expresión $D = \epsilon_o (\epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2 \theta) E(z)$.

Multiplicando por θ' e integrando, obtenemos

$$\left[K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta \right] \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 = D^2 \epsilon_o^{-1} (\epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2 \theta)^{-1} + C \quad (4.60)$$

siendo C una constante de integración que calculamos asumiendo, al igual que en las transiciones clásicas de Fredericksz que

$$\theta' \left(\frac{d}{2} \right) = 0, \quad \theta \left(\frac{d}{2} \right) = \theta_m > 0, \quad (4.61)$$

y entonces C será

$$C = -D^2 \epsilon_o^{-1} (\epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2 \theta)^{-1} \quad (4.62)$$

Si introducimos las constantes

$$\gamma = \epsilon_o \epsilon_{\perp}^{-1}, \quad \kappa = (K_3 - K_1) K_1^{-1} \quad (4.63)$$

la ecuación (4.60) se transforma en

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{D\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\epsilon_o\epsilon_{\perp}K_1}} \left\{ \frac{\sin^2\theta_m - \sin^2\theta}{(1 + \kappa\sin^2\theta)(1 + \gamma\sin^2\theta)(1 + \gamma\sin^2\theta_m)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.64)$$

adoptando la raíz cuadrada positiva, integramos para obtener la solución

$$z = D^{-1}\gamma^{-\frac{1}{2}}(1 + \gamma\sin^2\theta_m)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon_o\epsilon_{\perp}K_1} \int_0^{\theta} \left\{ \frac{(1 + \kappa\sin^2\hat{\theta})(1 + \gamma\sin^2\hat{\theta})}{\sin^2\theta_m - \sin^2\hat{\theta}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.65)$$

Para $z = \frac{d}{2}$ tenemos que $\theta = \theta_m$. Por tanto, de (4.65), D debe satisfacer

$$D = \gamma^{-\frac{1}{2}}(1 + \gamma\sin^2\theta_m)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon_o\epsilon_{\perp}K_1} \frac{d}{2} \int_0^{\theta_m} \left\{ \frac{(1 + \kappa\sin^2\hat{\theta})(1 + \gamma\sin^2\hat{\theta})}{\sin^2\theta_m - \sin^2\hat{\theta}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.66)$$

insertando el valor de D en la ecuación (4.65), obtenemos la solución

$$\frac{d}{2} \int_0^{\theta_m} \left\{ \frac{(1 + \kappa\sin^2\hat{\theta})(1 + \gamma\sin^2\hat{\theta})}{\sin^2\theta_m - \sin^2\hat{\theta}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\theta} \left\{ \frac{(1 + \kappa\sin^2\hat{\theta})(1 + \gamma\sin^2\hat{\theta})}{\sin^2\theta_m - \sin^2\hat{\theta}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.67)$$

Entonces, obtenemos la expresión del voltaje por medio de (4.64) y la definición de γ

$$\begin{aligned} V &= 2D\epsilon_o^{-1} \int_0^{\frac{d}{2}} (\epsilon_{\perp} + \epsilon_a\sin^2\theta)^{-1} dz \\ &= 2D\epsilon_o^{-1} 2D\epsilon_{\perp}^{-1} \int_0^{\theta_m} (1 + \gamma\sin^2\theta)^{-1} \frac{dz}{d\theta} d\theta \\ &= 2\sqrt{\frac{K_1}{\epsilon_o\epsilon_a}} (1 + \gamma\sin^2\theta_m)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\theta_m} \left\{ \frac{1 + \kappa\sin^2\theta_m}{(\sin^2\theta_m - \sin^2\theta)(1 + \gamma\sin^2\theta_m)} \right\}^{\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Finalmente, usando la sustitución (4.9) y la regla (4.10), obtenemos el voltaje en una forma más conveniente

$$V = 2\sqrt{\frac{K_1}{\epsilon_o\epsilon_a}} (1 + \gamma\sin^2\theta_m)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1 + \kappa\sin^2\theta_m\sin^2\lambda}{(1 + \gamma\sin^2\theta_m\sin^2\lambda)(1 - \sin^2\theta_m\sin^2\lambda)} \right\}^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad (4.69)$$

Para un voltaje fijo, el ángulo máximo de distorsión puede ser calculado numéricamente de (4.69); este valor de θ_m insertado en (4.67) nos da el valor de θ implícitamente como valor de z .

De forma similar a la transición de Freedericksz clásica, es posible tomar límite cuando $\theta_m \rightarrow 0$ en la expresión de V calculada anteriormente y así calcular el umbral crítico

$$V_c = \pi\sqrt{\frac{k_1}{\epsilon_o\epsilon_a}} \quad (4.70)$$

Con el objetivo de medir los efectos del cristal líquido sobre el campo eléctrico es conveniente adimensionalizar el voltaje, para ello introducimos

$$\bar{V} = \frac{V}{V_c} = \frac{2}{\pi} (1 + \gamma\sin^2\theta_m)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1 + \kappa\sin^2\theta_m\sin^2\lambda}{(1 + \gamma\sin^2\theta_m\sin^2\lambda)(1 - \sin^2\theta_m\sin^2\lambda)} \right\}^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad (4.71)$$

Volvemos a aplicar (4.9) y (4.10 en la solución (4.67), con $\bar{z} = \frac{z}{d}$, lo que nos permite que la solución para $\theta_m > 0$ sea

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^\phi \{G(\theta_m, \kappa, \gamma, \lambda)\}^{\frac{1}{2}} d\lambda}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{G(\theta_m, \kappa, \gamma, \lambda)\}^{\frac{1}{2}} d\lambda}, \quad \phi = \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_m}\right) \quad 0 \leq \bar{z} \leq \frac{1}{2} \quad (4.72)$$

donde

$$G(\theta_m, \kappa, \gamma, \lambda) = \frac{(1 + \kappa \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda)(1 + \gamma \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda)}{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda} \quad (4.73)$$

La solución para $\frac{1}{2} \leq \bar{z} \leq 1$ es obtenida por la condición de simetría $\theta(\bar{z}) = \theta(1 - \bar{z})$.

Dado un voltaje $\bar{V} > 1$, el ángulo máximo de distorsión θ_m es numéricamente calculado de (4.71). Este valor insertado en (4.73) nos da el valor de $\theta(z)$ de forma implícita y que podemos ver en la figura siguiente para distintos valores de κ y $\gamma = 0,2$

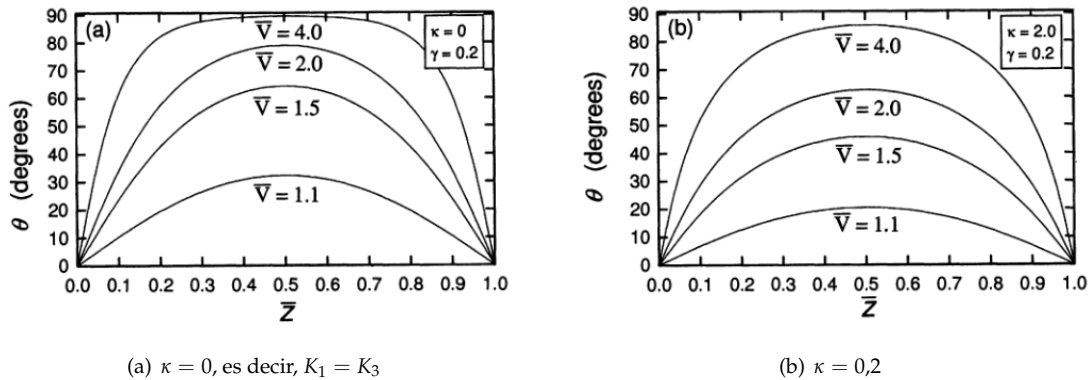


Figura 4.10: Solución $\theta(\bar{z})$ para distintos valores de \bar{V} .

Si comparamos estos gráficos con el de la Figura 4.5, podemos observar que los valores de θ_m alcanzados son menores. Este efecto es más pronunciado cuando κ pasa de 0 a 2.

4.5. Efectos del Anclaje Débil

Vamos a considerar el mismo ejemplo que vimos en la sección (4.4.1), pero con el director sometido a un anclaje débil, por tanto n satisface

$$n_b = (\cos \theta_0, 0, \sin \theta_0), \quad z = 0, d \quad (4.74)$$

con el ángulo θ_0 constante pero no determinado a priori, dado que depende del valor de H . Podemos ver en la Figura 4.11 que inicialmente $\theta_0 = 0$ en ausencia de un campo magnético. Cuando H aumenta, la muestra sufrirá una transición de Freedericksz con θ_0 variando en función de H .

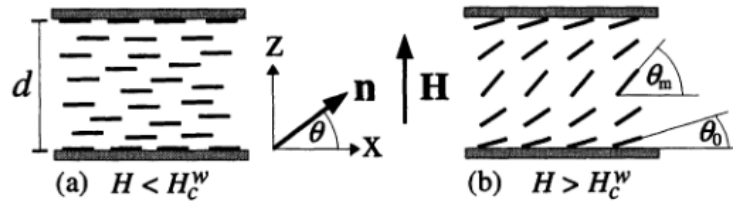


Figura 4.11: (a) Para $H < H_c^w$, el director permanece paralelo a las placas. (b) Para $H > H_c^w$, la solución distorsionada forma un ángulo θ_0 con la superficie y alcanza el ángulo máximo de distorsión en medio de la muestra.

La solución que buscamos del director tiene la forma

$$\mathbf{n} = (\cos \theta(z), 0, \sin \theta(z)), \quad 0 \leq z \leq d \quad (4.75)$$

Las condiciones de frontera impuestas son

$$\theta(0) = \theta(d) = \theta_0 \quad (4.76)$$

La energía incluye la energía elástica, la magnética y la debida al anclaje débil

$$W = \frac{1}{2} \int_0^d \left\{ [K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta] (\theta')^2 - \chi_a H^2 \sin^2 \theta \right\} dz + \frac{1}{2} \tau_0 \omega \left\{ \sin^2 \theta(0) + \sin^2 \theta(d) \right\} + \tau_0 \quad (4.77)$$

La ecuación de equilibrio a la que llegamos imponiendo las condiciones de frontera y de simetría es

$$\left[K_1 \cos^2 \theta_0 + K_3 \sin^2 \theta_0 \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\chi_a} H \left(\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta_0 \right)^{\frac{1}{2}} = \tau_0 \omega \sin \theta_0 \cos \theta_0 \quad (4.78)$$

determinando una relación entre H , θ_m y θ_0 , cumpliendo

$$0 \leq \theta_0 \leq \theta(z) \leq \theta_m, \quad 0 \leq z \leq d. \quad (4.79)$$

Al igual que en las transiciones clásicas, tenemos la solución cero, $\theta \equiv 0$, y la solución distorsionada para $H \neq 0$ que tiene la forma

$$\sqrt{\chi_a} H z = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{[K_1 \cos^2 \hat{\theta} + K_3 \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}}{[\sin^2 \theta_m - \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}} d\hat{\theta} \quad (4.80)$$

que define θ implícitamente como función de z . La condición de simetría, $\theta\left(\frac{d}{2}\right) = \theta_m > 0$, nos lleva a

$$\sqrt{\chi_a} H \frac{d}{2} = \int_{\theta_0}^{\theta_m} \frac{[K_1 \cos^2 \hat{\theta} + K_3 \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}}{[\sin^2 \theta_m - \sin^2 \hat{\theta}]^{\frac{1}{2}}} d\hat{\theta} \quad (4.81)$$

Dado un H y un d , las dos relaciones (4.80) y (4.81) pueden ser resueltas simultáneamente para determinar θ_m y θ_0 .

Si usamos la sustitución $\sin \hat{\theta} = \sin \theta_m \sin \lambda$, la solución (4.80) y el requerimiento (4.81) se transforman en

$$\sqrt{\chi_a} H z = \int_{\lambda_0}^{\phi} G(\theta_m, \lambda) d\lambda \quad (4.82)$$

$$\sqrt{\chi_a} H \frac{d}{2} = \int_{\lambda_0}^{\frac{\pi}{2}} G(\theta_m, \lambda) d\lambda \quad (4.83)$$

donde

$$G(\theta_m, \lambda) = \left[\frac{K_1 + (K_3 - K_1) \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda}{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.84)$$

$$\lambda_o = \arcsin \left(\frac{\sin \theta_o}{\sin \theta_m} \right) \quad (4.85)$$

Para el cálculo del valor crítico escribimos la ecuación (4.78) como

$$\tan \lambda_o = \frac{\sqrt{\chi_a} H}{\tau_o \omega} \sec \theta_o \left[K_1 \cos^2 \theta_o + K_3 \sin^2 \theta_o \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.86)$$

Cuando $\theta_m \rightarrow 0$ y $\theta_o \rightarrow 0$, entonces $H \rightarrow H_c^w$, donde H_c^w es el umbral crítico débil.

Así de (4.86) obtenemos

$$\tan \lambda_o = \frac{\sqrt{\chi_a K_1}}{\tau_o \omega} H_c^w \quad (4.87)$$

Por otro lado, de (4.83) cuando $H \rightarrow H_c^w$, entonces $\theta_m \rightarrow 0$, el valor crítico H_c^w , así que

$$\sqrt{\chi_a} H_c^w \frac{d}{2} = \sqrt{K_1} \left(\frac{\pi}{2} - \lambda_o \right)$$

de tal manera que

$$H_c^w = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{K_1}{\chi_a}} \left(\frac{\pi}{2} - \lambda_o \right) \quad (4.88)$$

Sustituyendo (4.88) en (4.87) obtenemos la ecuación

$$\tau_o \omega \tan \lambda_o = K_1 \frac{2}{d} \left(\frac{\pi}{2} - \lambda_o \right) \quad (4.89)$$

que determina λ_o . Insertando este valor calculado en (4.88), determinamos el valor de H_c^w . Es evidente que este valor crítico es menor que el que se alcanzaba con el anclaje fuerte.

Para hacer las comparaciones entre ambos valores críticos introducimos

$$h_c = \frac{H_c^w}{H_c}, \quad \rho = \frac{K_1 \pi}{d \tau_o \omega} \quad (4.90)$$

donde H_c es el valor crítico correspondiente al anclaje fuerte. Eliminando λ_o de (4.87) y (4.88), comprobamos que h_c debe satisfacer

$$\rho h_c = \cot \left(\frac{\pi}{2} h_c \right) \quad (4.91)$$

La Figura 4.12 ilustra h_c en función de ρ y muestra que $H_c^w \rightarrow H_c$ cuando ρ disminuye, es decir cuando la fuerza de anclaje $\tau_o \omega$ aumenta.

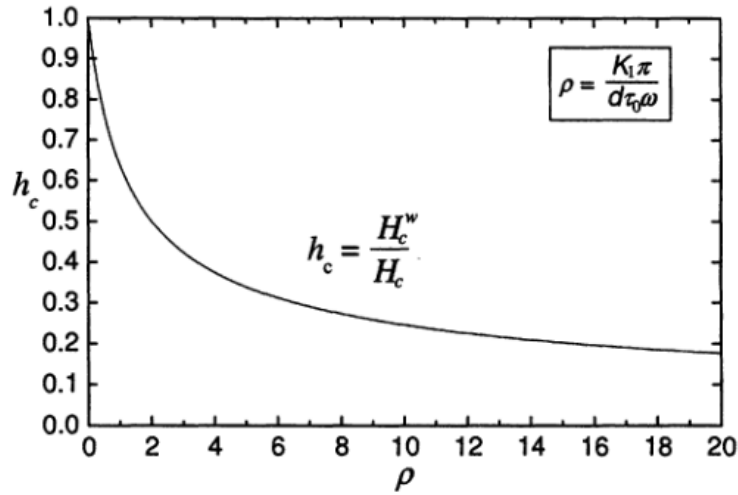


Figura 4.12: Influencia de la fuerza de anclaje $\tau_0 \omega$ sobre H_c^w .

4.6. Análisis de las Bifurcaciones con condiciones de frontera Pre-twist

En esta sección se presenta otro caso en el que se produce la transición de Freedericksz y que ha sido desarrollado en detalle por el tutor de este trabajo, D. Fernando Pestana da Costa, en la referencia [7] de la bibliografía, y que trataremos de reflejar a continuación.

Vamos a considerar de la transición de Freedericksz con geometría twist, que vimos en la primera sección del capítulo, pero con un pre-twist antisimétrico. Representamos al director por

$$n = (\cos \phi(\tau, z), \sin \phi(\tau, z), 0) \quad (4.92)$$

donde ϕ es el ángulo de twist del director. Como podemos ver en la Figura 4.13, el director está orientado en las fronteras de cada una de las placas con ángulos opuestos, $-\phi_p$ en la inferior y ϕ_p en la superior. Esto induce una torsión neta en el director a lo largo de toda la celda.

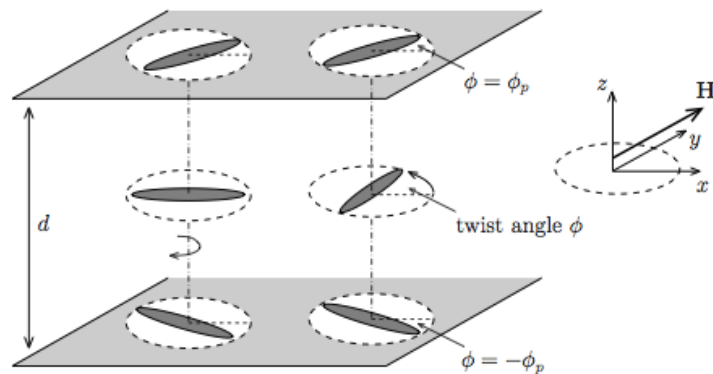


Figura 4.13: Geometría de la celda de cristal líquido con Pre-twist

Consideramos un campo magnético de intensidad H aplicado en la dirección $(0, 1, 0)$. El objetivo de esta sección será

estudiar con detalle el efecto que sobre el director va a tener la variación de la intensidad del campo magnético. Para ello, en forma adimensional, el problema de valor inicial que gobierna el comportamiento del director es

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{\zeta}^2} + \lambda \sin \phi \cos \phi, \quad (s, \bar{\zeta}) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 1) \quad (4.93)$$

$$\phi(\cdot, 0) = -\phi_p, \quad \phi(\cdot, 1) = \phi_p \quad (4.94)$$

$$\phi(0, \cdot) = \phi_0 \quad (4.95)$$

donde

$$s = \frac{K_2}{\gamma_1 d^2} \tau, \quad \bar{\zeta} = \frac{z}{d}, \quad \lambda = \frac{\mu_0 \chi_a H^2 d^2}{K_2} \quad (4.96)$$

siendo γ_1 la viscosidad rotacional y $\bar{\zeta}$ la variable adimensional \bar{z} que hemos utilizado en secciones anteriores. Es importante remarcar que el parámetro adimensional λ es proporcional a H^2 .

El problema de equilibrio asociado viene dado por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{\zeta}^2} + \lambda \sin \phi \cos \phi = 0, \quad 0 < \bar{\zeta} < 1 \quad (4.97)$$

$$\phi(0) = -\phi_p, \quad \phi(1) = \phi_p \quad (4.98)$$

En el problema de la transición clásica de Freedericksz con geometría twist, $\phi_p = 0$, el sistema posee una simetría simple de espejo, es decir, $\phi(\bar{\zeta}) \leftrightarrow -\phi(\bar{\zeta})$; y la solución fundamental, $\phi = 0$, pierde estabilidad y aparecen dos soluciones distorsionadas en una bifurcación pitchfork cuando se alcanza el valor crítico λ_c del parámetro $\lambda = \lambda(\phi_p)$ dado por

$$\lambda_c = \lambda_c(0) = \pi^2 \iff H_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_2}{\mu_0 \chi_a}} \quad (4.99)$$

Pero en el caso con pre-twist, $\phi_p \neq 0$, el sistema presenta simetría \mathbb{Z}_2 , es decir, $\phi(\bar{\zeta}) \leftrightarrow -\phi(1 - \bar{\zeta})$. El sistema todavía posee bifurcación tipo pitchfork cuando λ alcanza el valor $\lambda_c(\phi_p)$, que necesariamente es mayor que π^2 . Como podemos ver en la Figura 4.14, la solución fundamental es una función que crece de forma monótona en función de $\bar{\zeta}$ para $0 \leq \lambda \leq \lambda_c(\phi_p)$. Para $\lambda = \lambda_c(\phi_p)$, la solución satisface las condiciones de frontera $\phi'(0) = \phi'(1) = 0$, además de las condiciones impuestas en (4.98). Para $\lambda > \lambda_c(\phi_p)$, la solución fundamental deja de ser monótona y de forma simultánea se observa una rotura de la simetría en el diagrama de bifurcación.

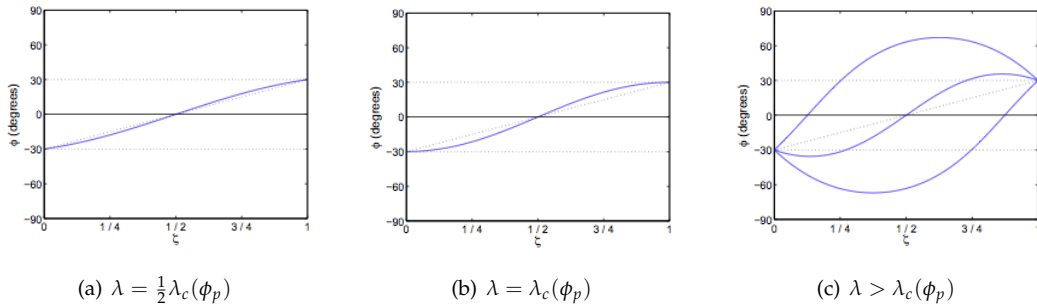


Figura 4.14: Perfiles del ángulo de torsión de la solución fundamental simétrica con $\phi_p = \frac{\pi}{6}$

Para verificar este hecho, vamos a resumir el proceso que se sigue en [7] para dibujar los diagramas de fase de bifurcación asociados a este problema. Queremos estudiar la variación del director al variar H , para ello anteriormente

hemos escogido el parámetro λ que es proporcional a H^2 , pero resulta incómodo ya que la ecuación (4.97) depende directamente del propio λ y eso alteraría el diagrama de fase, así que hacemos un cambio de variable siguiendo los pasos que damos a continuación.

En (4.97)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\lambda}{2} \sin 2\phi = 0, \quad 0 < \xi < 1 \quad (4.100)$$

dividimos todo por $\frac{\lambda}{2}$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\frac{\lambda}{2} \partial \xi^2} + \sin 2\phi = 0 \quad (4.101)$$

tal que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \xi \right)^2} + \sin 2\phi = 0 \quad (4.102)$$

así que definiendo una nueva variable, $\hat{t} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \xi$, la ecuación (4.102) puede ser expresada

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \hat{t}^2} + \sin 2\phi = 0 \quad (4.103)$$

Como \hat{t} no está centrada en el origen definimos $t = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(\xi - \frac{1}{2} \right)$ que si lo está. Así para $\xi = 0$, $t = -\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$ y para $\xi = 1$, $t = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$. De tal forma que si llamamos $L = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$, t está comprendida entre $-L$ y L .

Así, podemos expresar la ecuación de equilibrio (4.97) como

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \sin 2\phi = 0 \quad (4.104)$$

Ecuación que podemos convertir en un sistema de primer orden, de tal manera que si $\phi(\xi)$ es solución de (4.97) y (4.98), $x(t) = \phi(\xi(t))$ es solución de

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin 2x \end{cases} \quad (4.105)$$

$$x(-L) = -\phi_p, \quad x(L) = -\phi_p \quad (4.106)$$

Ahora nuestro parámetro de bifurcación será L que es proporcional a H . Por otro lado, si observamos el sistema anterior, podemos comprobar que corresponde a la ecuación no lineal del péndulo, que ya revisamos en el capítulo 2.

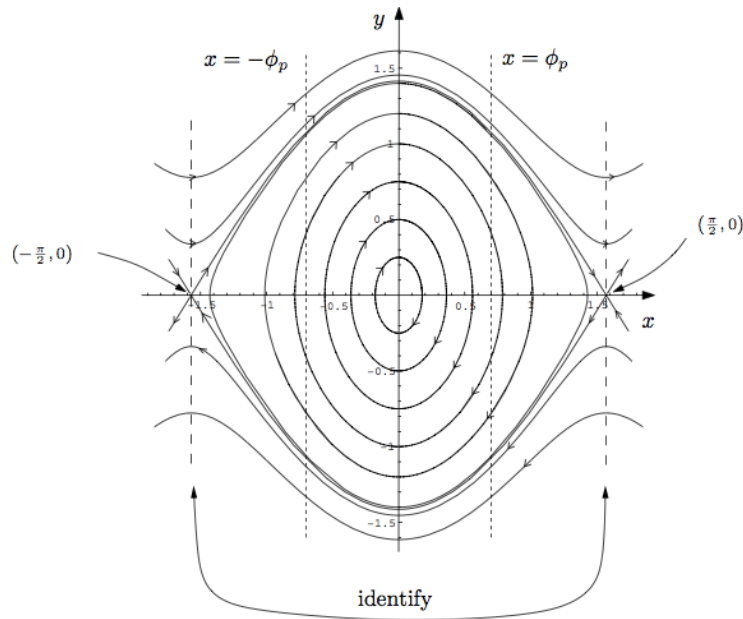


Figura 4.15: Órbitas de (4.105) con las condiciones de frontera (4.106)

La variable t representa el tiempo del sistema dinámico, de tal forma que una solución de (4.105) y (4.106) es una función $x(t)$ que comienza en el valor $-\phi_p$ y termina en el valor ϕ_p y lleva $2L$ unidades de tiempo en hacerlo. Para el cálculo de ese tiempo consideramos la órbita γ_α que pasa por $(\alpha, 0)$ en el eje x , con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Además, por simetría bastaría con estudiar el tiempo de $x = 0$ a $x = \phi_p$.

Sea

$$V(x, y) = y^2 - \cos 2x \quad (4.107)$$

una primera integral de (4.105), y como es constante a lo largo de las órbitas, para toda la órbita γ_α

$$V(x, y) = V(\alpha, 0) \quad (4.108)$$

así llegamos a que el tiempo entre 0 y α es

$$T(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x - \cos 2\alpha}} \quad (4.109)$$

Pero como ya habíamos comentado, nosotros estamos interesados en el tiempo entre 0 y ϕ_p que será

$$T_1(\alpha, \phi_p) = \int_0^{\phi_p} \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x - \cos 2\alpha}} \quad (4.110)$$

Claramente, $T_1(\phi_p, \phi_p) = T(\phi_p)$.

Por último, nos queda definir el tiempo T_2

$$T_2(\beta, \phi_p) = \int_0^{\phi_p} \frac{dx}{\sqrt{\beta^2 + \cos 2x - 1}} \quad (4.111)$$

que mide el tiempo que tarda el punto $(0, \beta)$ en alcanzar la línea $x = \phi_p$, y es usado para calcular los períodos de las órbitas por encima de la órbita γ_h que cruza el semieje positivo y en el punto $(0, \sqrt{2})$.

Usaremos estos tiempos para dibujar los diagramas de bifurcación, para ello debemos conocer sus propiedades que enunciaremos a continuación

1. Sea $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\phi_p \in (0, \alpha)$, y $\beta \geq \beta^*$. Entonces

- la función $\alpha \rightarrow T(\alpha)$ definida por (4.109) es estrictamente creciente y converge a $+\infty$ cuando $\alpha \uparrow \frac{\pi}{2}$, y a $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ cuando $\alpha \downarrow 0$, caso este último que comprobamos a continuación. Si aplicamos la fórmula trigonométrica del ángulo doble, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, en (4.109), obtenemos

$$T(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{2\sin^2 \alpha - 2\sin^2 x}}$$

que podemos escribir como

$$T(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 x}}$$

Si llamamos $\sin \alpha = k$ y realizamos el cambio de variable $\sin x = k \sin \theta$, la integral anterior se transforma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

que es una integral elíptica completa de primera especie y que podemos resolver aplicando el siguiente desarrollo en serie

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n} \right\}$$

Como $k = \sin \alpha$, y $\alpha \rightarrow 0$, podemos decir que la integral anterior será $K(k) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Así $T(\alpha) \sim \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

- las funciones $\alpha \rightarrow T_1(\alpha, \phi_p)$ y $\beta \rightarrow T_2(\beta, \phi_p)$, definidas en (4.110) y (4.111), respectivamente, son estrictamente decrecientes.

2. Diferenciando T_1 con respecto a α , obtenemos

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} = - \int_0^{\phi_p} \frac{\sin 2\alpha}{(\cos 2x - \cos 2\alpha)^{\frac{3}{2}}} dx < 0.$$

Para $\beta > \sqrt{2}$ usamos (4.111) y llegamos a

$$\frac{\partial T_2}{\partial \beta} = - \int_0^{\phi_p} \frac{\beta}{(\beta^2 + \cos 2x - 1)^{\frac{3}{2}}} dx < 0$$

que es válido para todo $\phi_p \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Con $\beta \in (\beta^*, \sqrt{2})$, y dado que $T_2(\beta, \phi_p) = T_1(\alpha(\beta), \phi_p)$, unido al hecho que $\beta \rightarrow \alpha(\beta)$ es estrictamente creciente y junto al cálculo de $\frac{\partial T_1}{\partial \alpha}$, concluimos que

$$\frac{\partial T_2}{\partial \beta} = \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\beta} < 0.$$

4.6.1. Análisis de las Bifurcaciones

Vamos a comenzar el análisis de las bifurcaciones de (4.105) y (4.106) en la región limitada por la banda $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^2 . Para ello, nos hacemos las siguientes preguntas:

- ¿ Cuántas órbitas de (4.105) que comienzan en 0 y acaban en ϕ_p , tardan exactamente L unidades de tiempo?

- ¿Cambia ese número al variar L ?

Este estudio lo vamos a comenzar considerando un valor particular de L , que denominamos L^* y que definimos como

$$L^* = T(\phi_p) \tag{4.112}$$

Consideramos los siguientes casos

Caso crítico $L = L^*$

Para cada $\phi_p \in (0, \frac{\pi}{2})$ existe una única solución (x^*, y^*) con $L = L^*$. De hecho, si fijamos $\phi_p \in (0, \frac{\pi}{2})$, por la propiedad 1, $T(\cdot)$ es estrictamente creciente, lo que implica que existe un único valor de α , denominado ϕ_p , tal que $T(\alpha) = L^*$.

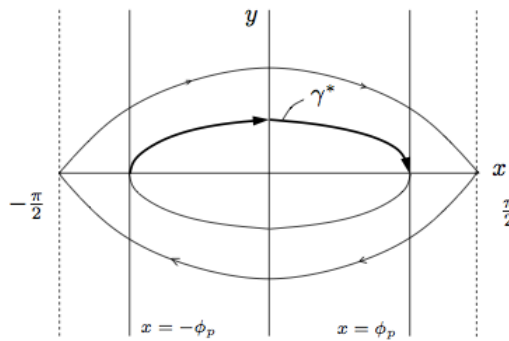


Figura 4.16: Órbita γ^* de la solución (x^*, y^*) con $L = L^*$ de (4.105) y (4.106).

Caso subcrítico $L < L^*$

Para cada valor $\phi_p \in (0, \frac{\pi}{2})$ y cada $L \in (0, L^*)$ existe una única solución. Además todas estas soluciones tienen una componente x que crece de forma monótona. Además por la propiedad 2, existe un único $\beta_L > \beta^*$ tal que $T_2(\beta_L, \phi_p) = L$.

La monotonía de la componente x de la solución como función de t se puede observar en el diagrama de fase de la Figura 4.15.

Caso supercrítico $L > L^*$

Fijado un $L > L^*$, existe un único $\alpha = \alpha(L) \in (\phi_p, \frac{\pi}{2})$, tal que $T(\alpha) = L$. Por tanto, existe una única solución de (4.105) que satisface que $x(-L) = -\alpha$ y $x(L) = \alpha$, además la componente x es estrictamente creciente; correspondiente a esta solución es el arco entre los puntos $(-\alpha, 0)$ y $(\alpha, 0)$ de la órbita γ_α que vemos en la Figura 4.17.

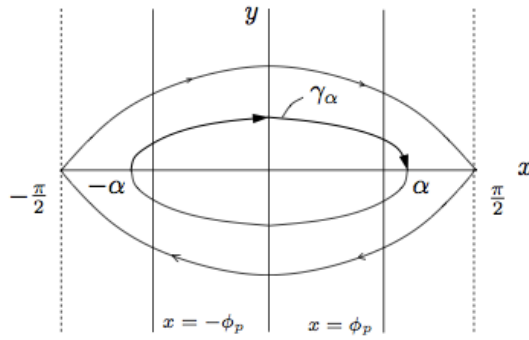


Figura 4.17: Órbita γ^α con periodo $4L$ de (4.105), con $L > L^*$.

Por construcción, γ_α tiene periodo $4L$, y por la invarianza del vector director bajo las transformaciones $x \rightarrow -x$ e $y \rightarrow -y$, se concluye, que durante un período, la órbita gasta exactamente $2L$ unidades de tiempo en cada media banda. Esto implica que existen exactamente dos soluciones de (4.105), cuyas órbitas denotamos por γ_α^+ y γ_α^- . Cuando $\alpha \rightarrow \phi_p$ y $L \rightarrow L^*$, ambas órbitas convergen a γ^* .

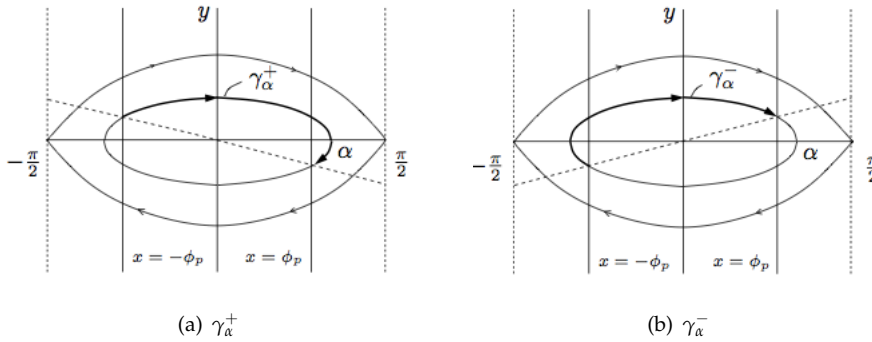


Figura 4.18: Órbitas γ_α^+ y γ_α^- de (4.105) que satisfacen las condiciones de frontera (4.106) cuando α es la única solución de $T(\alpha) = L$, para $L > L^*$.

Podemos observar que estas dos soluciones son las soluciones asimétricas que dibujamos en la Figura 4.14.c. Pero sobre la misma figura podemos ver que hay una solución simétrica que correspondería a una solución adicional de (4.105). Si observamos el punto del eje y que corresponde a la órbita γ_α de la Figura 4.19, éste tarda $2T(\alpha) - T_1(\alpha, \phi_p)$ unidades de tiempo en cubrir la longitud completa.

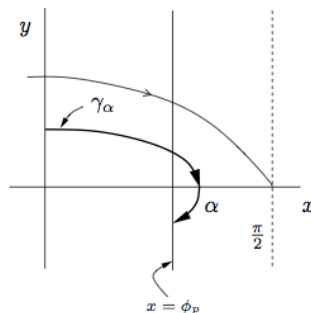


Figura 4.19: Órbita γ^α de (4.105) que satisface las condiciones de frontera $x = 0$ y $x(L) = \phi_p$.

Sabemos que T y T_1 son funciones monótonas y continuas para $\alpha \in (\phi_p, \frac{\pi}{2})$, siendo la primera creciente y la segunda decreciente. Además, como ya sabemos $T_1(\phi_p, \phi_p) = T(\phi_p) = L^*$. De aquí se sigue que $2T(\phi_p) - T_1(\phi_p, \phi_p) = L^* < L$ y $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2T(\alpha) - T_1(\alpha, \phi_p) = +\infty > L$, por tanto existe un único valor de $\alpha \in (\phi_p, \frac{\pi}{2})$ tal que la órbita γ_α dure L .

Observamos que cuando $\alpha \rightarrow \phi_p$, tenemos $2T(\alpha) - T_1(\alpha, \phi_p) \rightarrow L^*$ y $\gamma_\alpha \rightarrow \gamma^*$. Y, por simetría $x \leftrightarrow -x$, podemos concluir que para cada $L > L^*$ hay una solución única con exactamente un máximo y un mínimo en $(-L, L)$ y que bifurca de la solución crítica (x^*, y^*) .

Por último y antes de construir el diagrama de bifurcación, vamos a poner atención en soluciones no monótonas γ_{*k} cuyas órbitas son similares a γ_* , pero que giran k veces alrededor del origen. Con esta notación γ_* sería el miembro $k = 0$ de esta familia.

En la siguiente figura vemos que existen cinco tipos de soluciones de (4.105), las cuales convergen todas ellas a la solución crítica γ_{*k}

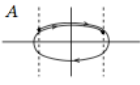
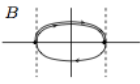
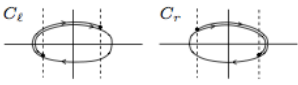
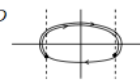
L	Orbit $\gamma_{\alpha,k}$ (winds k times around $\mathbf{0}$)	symmetry of $\gamma_{\alpha,k}$	Time taken by the orbit $\gamma_{\alpha,k}$
$L < L_k^*$		symmetric	$S_A(\alpha) := 2(2kT(\alpha) + T_1(\alpha, \phi_p))$
$L = L_k^*$		symmetric	$S_B(\phi_p) := 2(2k + 1)T(\phi_p)$
$L > L_k^*$		asymmetric	$S_C(\alpha) := 2(2k + 1)T(\alpha)$
$L > L_k^*$		symmetric	$S_D(\alpha) := 2((2k + 2)T(\alpha) - T_1(\alpha, \phi_p))$

Figura 4.20: Soluciones de (4.105) - (4.106), con α próximo a ϕ_p , girando k veces alrededor del 0.

Podemos recoger toda esta información para obtener el diagrama de bifurcación que vemos en la Figura 4.21, que corresponde a una bifurcación pitchfork supercrítica alrededor de $L = L^*$ donde las dos ramas de las soluciones asimétricas (C_l y C_r) bifurcan de la solución crítica (B). La rama simétrica (A) con $L < L^*$ desaparece en una bifurcación silla nodo en $L = L_{SN,K} \in [L^*, L_k^*)$. Denotamos por h_p , respectivamente $-h_p$, al valor de la componente y de la órbita γ_h (resp. $-\gamma_h$) en el punto de intersección con $x = -\phi_p$.

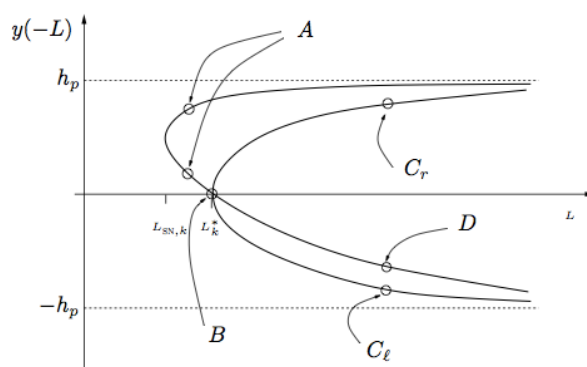


Figura 4.21: Diagrama de bifurcación pitchfork supercrítica alrededor de $L = L_k^*$ con $k \geq 1$.

Como ya habíamos mencionado existen otras soluciones (no bifurcadas), que caen en regiones no acotadas y cuyo diagrama de bifurcación podemos ver en la Figura 4.22, soluciones que podemos denominar “super-twisted”, soluciones con una torsión total a lo largo de toda la celda mayor de π radianes. Este tipo de celdas son usadas en aplicaciones de display. Las STN (celdas nemáticas Super Twisted) son preferidas a las estándar TN (celdas nemáticas twisted, con una torsión total de $\frac{\pi}{2}$ radianes) en algunas aplicaciones debido a que tienen un tiempos de respuesta más cortos y requieren menor energía. En el próximo capítulo vamos a estudiar las TN, el display más utilizado actualmente en la mayoría de los aparatos que poseen este tipo de dispositivos.

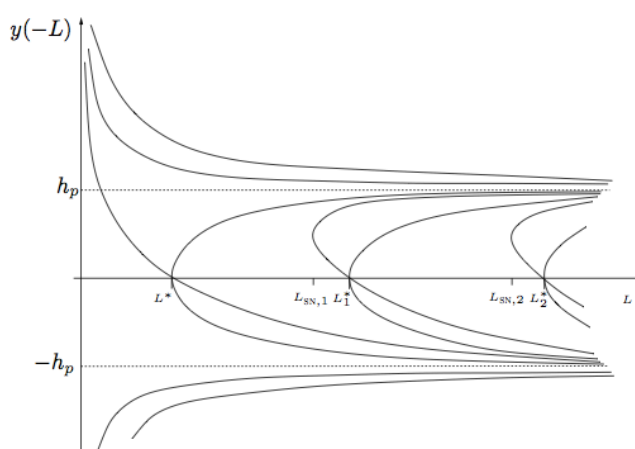


Figura 4.22: Diagrama de bifurcación que muestra la bifurcación pitchfork en $L = L^*, L_1^*$ y L_2^* , así como las soluciones no bifurcadas.

4.7. Pretwist con condiciones de frontera antisimétricas

Siguiendo la sugerencia de D. Fernando Pestana da Costa, tutor del presente trabajo, y gracias a su inestimable ayuda, en esta sección se ha desarrollado un estudio del problema que planteábamos en (4.105), pero con condiciones de frontera asimétricas, siendo éste un problema resuelto por primera vez y por tanto, no publicado hasta ahora.

Así, las condiciones impuestas en (4.106), pasan ahora a ser

$$x(-L) = -\phi_0, \quad x(L) = \phi_1 \quad (4.113)$$

El parámetro de bifurcación seguirá siendo L , proporcional a H (intensidad del campo externo aplicado), de tal forma que la solución de (4.105) y (4.113) será una función $x(t)$ que comienza en $-\phi_0$ y termina en ϕ_1 con una duración de $2L$ unidades de tiempo.

Estudiaremos en primer lugar el caso, $\phi_1 > \phi_0$, para terminar con el análisis del caso $\phi_1 < \phi_0$.

4.7.1. Condición $\phi_1 > \phi_0$

Con el objetivo de trazar el diagrama de bifurcación asociado, vamos a realizar el estudio de las posibles soluciones que cumplan las condiciones de frontera impuestas en (4.113) con $\phi_1 > \phi_0$. Seguiremos las pautas seguidas en la sección anterior, utilizando los tiempos T , T_1 y T_2 de nuevo, pero teniendo en cuenta que no hay simetría, conllevando tener que hacer el estudio de las órbitas completas.

Caso crítico

Se produce cuando $\alpha = \phi_1$. Si llamamos $L^* = T(\phi_1)$, entonces para cada ϕ_0 y $\phi_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, tal que $\phi_1 > \phi_0$, aparece una solución crítica γ^* con $L = L^*$ como vemos en la Figura 4.23(a). Pero, si nos fijamos en Figura 4.23 (b), observamos que a diferencia del caso simétrico, aparece otra órbita crítica γ_* con $L = L_*$.

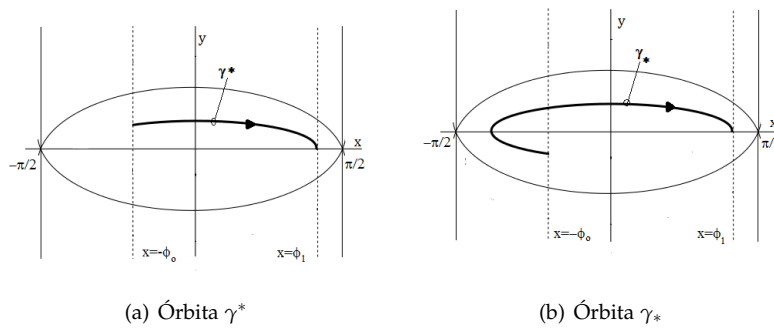


Figura 4.23: Soluciones caso crítico.

Llamamos T^* al tiempo que tarda la órbita γ^* en ir desde $-\phi_0$ hasta ϕ_1 , tiempo que podemos expresar como

$$T^* = T(\phi_1) + T_1(\phi_1, \phi_0) \quad (4.114)$$

Por otro lado, T_* será el tiempo que emplea en hacer el mismo recorrido la órbita γ_* , y que contabilizamos como

$$T_* = 3T(\phi_1) - T_1(\phi_1, \phi_0) \quad (4.115)$$

Podemos ver ambas soluciones en el diagrama de bifurcación de la Figura 4.29(rojo).

Caso Subcrítico

Fijado un $L < L^*$, encontramos soluciones que cumplen las condiciones de frontera impuestas en (4.113) tanto en el intervalo $(\phi_1, \frac{\pi}{2})$, como fuera de él, tal como podemos ver en Figura 4.24

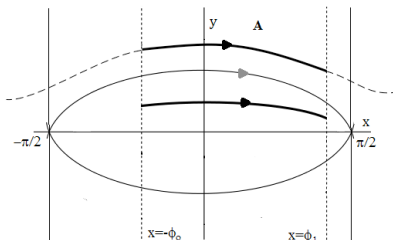


Figura 4.24: Soluciones caso subcrítico tipo A

Si consideramos el tiempo de estas órbitas como $T_2(\beta, \phi_0) + T_2(\beta, \phi_1)$, dado que T_2 es una función continua y monótona, podemos establecer la unicidad de las soluciones. Llamando β^* a la intersección de la órbita γ_* con la parte positiva del eje y , veamos las propiedades de este tipo de soluciones que llamaremos tipo A , para realizar la comparación con el caso simétrico.

- $\alpha \in (\phi_1, \frac{\pi}{2})$: $\beta^* < \beta < \sqrt{2}$

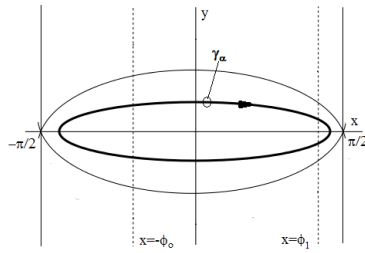
Vamos a demostrar que $T_A = T_1(\alpha, \phi_0) + T_1(\alpha, \phi_1) < T(\phi_1) + T_1(\phi_1, \phi_0) = T^*$. Así, como $\alpha > \phi_1$, y T_1 es estrictamente decreciente, si comparamos los términos de ambos tiempos mostrados en la desigualdad anterior, tenemos que $T_1(\alpha, \phi_0) < T_1(\phi_1, \phi_0)$ y como $T(\phi_1) = T_1(\phi_1, \phi_1)$, entonces $T_1(\alpha, \phi_1) < T_1(\phi_1, \phi_1)$, por tanto $T_A < T^*$. Además y tal como podemos observar en el diagrama de bifurcación en la Figura 4.29(rojo), dicha solución converge a γ_* , lo que es fácilmente verificable cuando $\alpha \rightarrow \phi_1$.

- $\beta > \sqrt{2}$

El tiempo empleado por las órbitas es expresado como $T_A = T_2(\beta, \phi_0) + T_2(\beta, \phi_1)$, y dado que T_2 es estrictamente decreciente, estamos en condiciones de afirmar que $T_A = T_2(\beta, \phi_0) + T_2(\beta, \phi_1) < T_2(\beta^*, \phi_0) + T_2(\beta^*, \phi_1) = T^*$, estableciendo de nuevo que $T_A < T^*$. Finalmente, podemos concluir que $y(-L) \rightarrow +\infty$ cuando $L \rightarrow 0$.

Caso Supercrítico

En este caso, fijado un $L > L^*$, y al igual que vimos en el caso simétrico, existe un único $\alpha = \alpha(L) \in (\phi_1, \frac{\pi}{2})$, tal que $T(\alpha) = L$, que corresponderá a porciones de órbitas tipo γ_α , que se puede ver en la Figura 4.25 y que satisfacen las condiciones de contorno (4.113).


 Figura 4.25: Órbita γ_α con $L > L^*$

En este caso aparecen tres soluciones que satisfacen las condiciones de frontera impuestas en (4.113), las cuales observamos en la Figura 4.26 y que vamos a denominar con la misma nomenclatura que hemos seguido hasta ahora

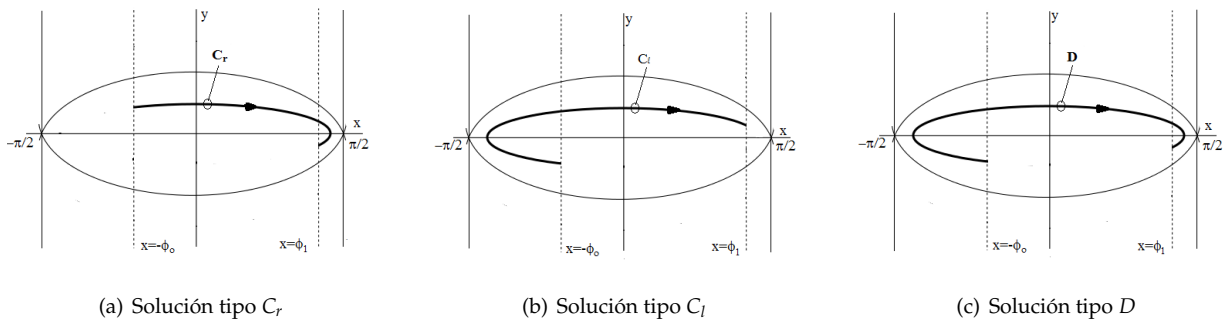


Figura 4.26: Soluciones caso supercrítico.

Vamos a analizar cada una de estas soluciones de cara a poder esbozar el diagrama de bifurcación

■ Análisis de la solución C_r

El tiempo empleado en una solución de este tipo es $T_{C_r} = 2T(\alpha) + T_1(\alpha, \phi_0) - T_1(\alpha, \phi_1)$, tiempo que suponemos mayor que $T^* = T(\phi_1) + T_1(\phi_1, \phi_0)$, dado que si $\alpha = \phi_1$, ambos tiempos coinciden. Para comprobarlo vamos a considerar $\alpha = \phi_1 + \varepsilon$, de tal forma que podemos expresar

$$T_{C_r} = 2T(\phi_1 + \varepsilon) + T_1(\phi_1 + \varepsilon, \phi_0) - T_1(\phi_1 + \varepsilon, \phi_1)$$

Como nos interesa ver que a medida que α es mayor, el tiempo empleado crece, hacemos la derivada de T_{C_r} con respecto a ε y comprobamos que es positiva

$$\frac{dT(C_r)}{d\varepsilon} = 2T'(\phi_1 + \varepsilon) - \frac{\partial T_1}{\partial x}(\phi_1 + \varepsilon, \phi_1) + \frac{\partial T_1}{\partial x}(\phi_1 + \varepsilon, \phi_0)$$

Por la propiedad 1, podemos establecer que $2T'(\phi_1 + \varepsilon) > 0$, sin embargo el signo de los otros dos términos de la igualdad no es tan sencillo de determinar, por ello, como

$$T_1(\alpha, \phi) = \int_0^\phi \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x - \cos 2\alpha}}$$

entonces

$$\frac{\partial T_1}{\partial \phi} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi - \cos 2\alpha}} > 0$$

y derivando de nuevo respecto a α

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial \phi \partial \alpha} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \alpha \partial \phi} = -\frac{\sin 2\alpha}{(\cos 2\phi - \cos 2\alpha)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

Concluyendo entonces que $\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} \right) < 0$ y como $\phi_0 < \phi_1$, entonces $-\frac{\partial T_1}{\partial x}(\phi_1 + \varepsilon, \phi_1) + \frac{\partial T_1}{\partial x}(\phi_1 + \varepsilon, \phi_0) > 0$, y por tanto

$$T(C_r) > T^*, \text{ con } \phi_1 < \phi_1 + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

Podemos confirmar estas propiedades al observar esta rama en el diagrama de bifurcación en la Figura 4.29 (color rojo).

■ Análisis de la solución D

El tiempo empleado en una solución de este tipo es: $T_D = 4T(\alpha) - T_1(\alpha, \phi_1) - T_1(\alpha, \phi_0)$. Si $\alpha \rightarrow \phi_1$, $T_D = T_*$. Por tanto, al igual que en el caso anterior, tendremos que demostrar que $T_D > T_*$ para $\phi_1 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Para ello, vamos a aplicar el siguiente procedimiento. Si observamos la Figura 4.27, comprobamos que hemos dividido el plano (x, y) en dos semiplanos, Ω^- , que contiene a los valores de $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\phi_0)$, y Ω^+ , que contiene a los valores de $x \in (-\phi_0, \frac{\pi}{2})$.

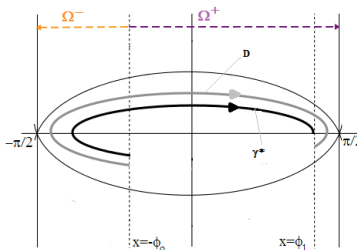


Figura 4.27: Órbita γ_α con $L > L^*$

Sea $D^\pm = D \cap \Omega^\pm$, y $\gamma_*^\pm = \gamma_* \cap \Omega^\pm = \gamma^*$. Se ve claramente que la situación en Ω^+ consiste en la comparación de $T(D^+)$ con $T(\gamma_*^+) = T(\gamma^*)$, y que realmente D^+ es una órbita tipo C_r . Por tanto, la comprobación coincidiría con la que hemos realizado en el apartado anterior, así $T(D^+) > T(\gamma^*)$.

Veamos ahora que ocurre en Ω^- . Sea $\gamma_*^- = \gamma_* \cap \Omega^-$. Comparamos $T(D^-)$ con $T(\gamma_*^-)$, que contabilizamos respectivamente

$$T(\gamma_*^-) = 2T(\phi_1) - 2T_1(\phi_1, \phi_0)$$

$$T(D^-) = 2T(\phi_1 + \varepsilon) - 2T_1(\phi_1 + \varepsilon, \phi_0)$$

Como

$$\frac{dT(D^-)}{d\varepsilon} = 2T'(\phi_1 + \varepsilon) - 2\frac{\partial T_1}{\partial x}(\phi_1 + \varepsilon)$$

Por la propiedad 1, $2T'(\phi_1) > 0$, y $2\frac{\partial T_1}{\partial x}(\phi_1 + \varepsilon) < 0$. Así, podemos afirmar que $\frac{dT(D^-)}{d\varepsilon} > 0$ y por tanto $T(D^-) > T(\gamma_*^-)$, concluyendo finalmente que

$$T(D) = T(D^-) + T(D^+) > T(\gamma_*^-) + T(\gamma_*^+) = T(\gamma_*)$$

■ Análisis de la solución C_I

El tiempo empleado por esta solución es $T(C_I) = 2T(\alpha) - T_1(\alpha, \phi_0) + T_1(\alpha, \phi_1)$. Si $\alpha \rightarrow 0$, $T(C_I) = T_*$, por tanto habría que comprobar que dado un $\phi_1 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $T(C_I) > T_*$, lo que podríamos hacer siguiendo el mismo procedimiento que en los dos apartados anteriores.

Aquí además, nos interesa verificar la convexidad de esta solución, para ello realizamos el cambio de variable $\tilde{\alpha} = \sin^2 \alpha$, de tal forma que

$$T(C_I) = 2T(\tilde{\alpha}) - T_1(\tilde{\alpha}, \phi_0) + T_1(\tilde{\alpha}, \phi_1) = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \tilde{\alpha} \sin^2 \theta}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\phi_1} \frac{dx}{\sqrt{\tilde{\alpha} - \sin^2 x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\phi_0} \frac{dx}{\sqrt{\tilde{\alpha} - \sin^2 x}}$$

Derivamos con respecto a $\tilde{\alpha}$

$$\begin{aligned} \frac{dT(C_I)}{d\tilde{\alpha}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - \tilde{\alpha} \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\phi_1} \frac{dx}{(\tilde{\alpha} - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\phi_0} \frac{dx}{(\tilde{\alpha} - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - \tilde{\alpha} \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{dx}{(\tilde{\alpha} - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Y calculamos la segunda derivada, llegando a

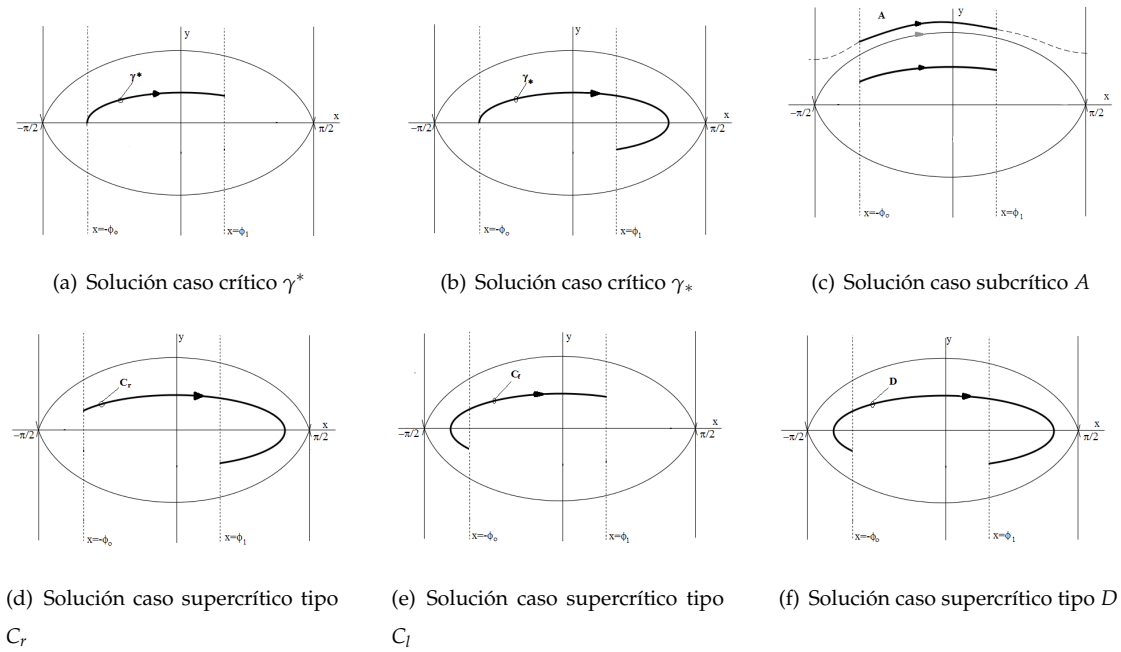
$$\frac{d^2T(C_I)}{d\tilde{\alpha}^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - \tilde{\alpha} \sin^2 \theta)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{dx}{(\tilde{\alpha} - \sin^2 x)^{\frac{5}{2}}} > 0$$

Esto nos lleva a determinar que para cualquier $\tilde{\alpha} \in \sin^2(\phi_1, 1)$, $\frac{d^2T(C_I)}{d\tilde{\alpha}^2} > 0$, lo que significa que $T(C_I)$ es una función cóncava de $\tilde{\alpha}$, y además $T(C_I) \rightarrow +\infty$ cuando $\phi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Y como, $\frac{dT(C_I)}{d\tilde{\alpha}} \rightarrow -\infty$ cuando $\tilde{\alpha} \rightarrow \sin^2 \phi_1$, teniendo en cuenta los resultados de convexidad anteriores, la función $T(C_I(\tilde{\alpha}))$, presenta un mínimo en $(\sin^2 \phi_1, 1)$. Por tanto, podemos concluir que cuando $\alpha \rightarrow \phi_1$, la pendiente tiende a $-\infty$, lo que nos va a garantizar trazar adecuadamente el diagrama de bifurcación que vemos en la Figura 4.29(rojo).

4.7.2. Condición $\phi_1 < \phi_0$

Vamos a ver a continuación las posibles soluciones con las condiciones de frontera impuestas en (4.113), pero con $\phi_1 < \phi_0$.


 Figura 4.28: Soluciones con $\phi_1 < \phi_0$.

Si contabilizamos los tiempos de cada tipo de soluciones, tenemos:

- $T^* = T(\phi_0) + T_1(\phi_0, \phi_1) = L^* + T_1(\phi_0, \phi_1)$
- $T_* = 3T(\phi_0) - T_1(\phi_0, \phi_1)$
- $T_A = T_1(\alpha, \phi_0) + T_1(\alpha, \phi_1)$. Si hacemos los mismos razonamientos utilizados para $\phi_1 > \phi_0$, podemos deducir que $y(-L) \rightarrow +\infty$ cuando $L \rightarrow 0$, y que $\alpha \rightarrow \phi_0$, $T_A \rightarrow T^*$.
- $T_{C_r} = 2T(\alpha) + T_1(\alpha, \phi_0) - T_1(\alpha, \phi_1)$. En este caso, cuando $\alpha \rightarrow \phi_0$, $T_{C_r} = T_*$. Y, de igual forma que para $\phi_1 > \phi_0$, podemos comprobar que $T_{C_r} > T_*$. Además, fácilmente podemos verificar su convexidad mediante el cambio de variable $\tilde{\alpha} = \sin^2 \alpha$ y verificar la existencia de un mínimo en $(\sin^2 \phi_0, 1)$, afirmando que cuando $\alpha \rightarrow \phi_0$, la pendiente tiende a $-\infty$.
- $T(C_l) = 2T(\alpha) - T_1(\alpha, \phi_0) + T_1(\alpha, \phi_1)$. Siguiendo las mismas pautas, podemos establecer que $T(C_l) \rightarrow T^*$ cuando $\alpha \rightarrow \phi_0$.
- $T_D = 4T(\alpha) - T_1(\alpha, \phi_0) - T_1(\alpha, \phi_1)$, asegurando que $T(D) \rightarrow T_*$ cuando $\alpha \rightarrow \phi_0$.

Una vez revisadas las posibles soluciones de los dos casos que se nos presentan con condiciones de frontera antisimétricas, así como sus propiedades, estamos en condiciones de esbozar el diagrama de bifurcación.

4.7.3. Diagrama de Bifurcación

Vamos a presentar un diagrama de bifurcación que incluye el caso simétrico, es decir, $\phi_1 = \phi_0$, que coincide con la parte de las soluciones no periódicas que vimos en la Figura 4.22 y que ahora vamos a dibujar de color negro. De color rojo, aparecen las soluciones para $\phi_1 > \phi_0$ y por último, de color azul, las soluciones para $\phi_1 < \phi_0$.

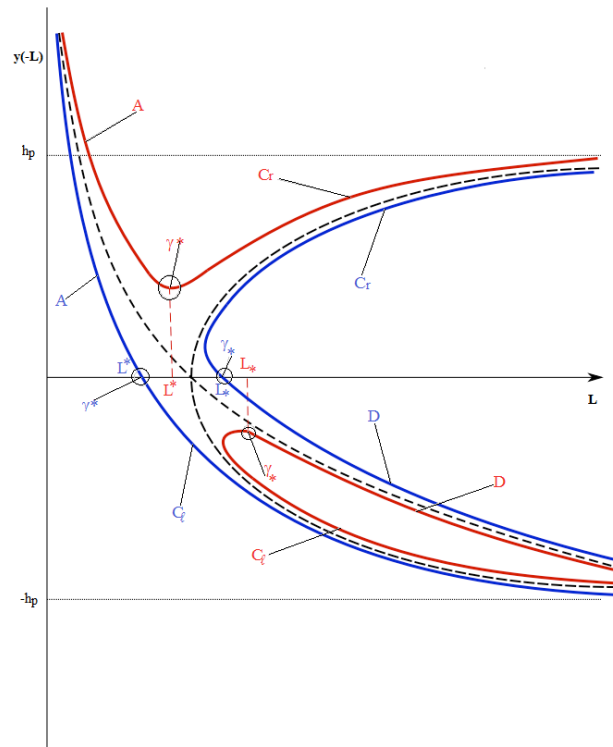
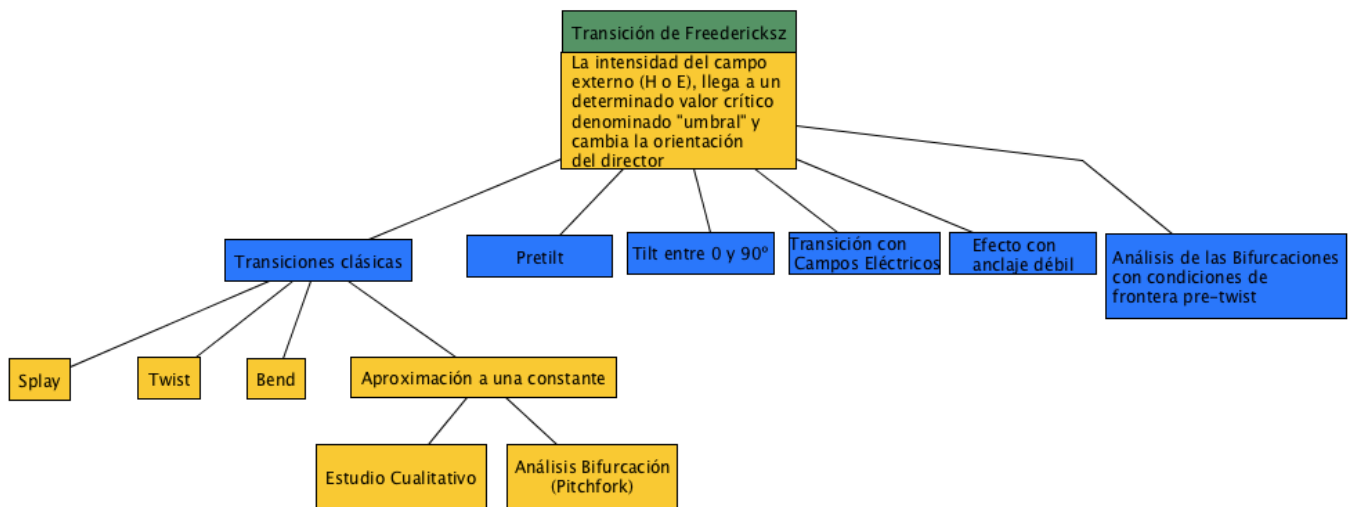


Figura 4.29: Diagramas de Bifurcación: Color negro $\phi_1 = \phi_0$, color rojo $\phi_1 > \phi_0$, color azul $\phi_1 < \phi_0$.

Siguiendo la pauta de los diagramas de bifurcación que vimos en la sección anterior, el parámetro de bifurcación es L , proporcional a H , y la variable de bifurcación es la componente y del punto de comienzo de la órbita que coincide con $x = -\phi_0$.

Como podemos observar, la bifurcación pitchfork que se produce en el caso de las condiciones simétricas, deja de producirse cuando se rompe esa simetría. Además en el caso de que $L \rightarrow 0$ y $L \rightarrow +\infty$, las ramas de los distintos casos tienden hacia las del caso simétrico.

4.8. Resumen



Capítulo 5

Aplicaciones de los cristales líquidos nemáticos

En nuestros días, los displays de cristal líquido (LCDs), basados en cristales líquidos nemáticos, son usados en una amplia variedad de aparatos. Aunque los cristales líquidos fueron descubiertos en 1888, no fue hasta 80 años después cuando el primer display de cristal líquido fue desarrollado. Fue estudiado teóricamente por Leslie en 1970 y en 1971, Martin Schadt construyó la primera pantalla de cristales líquidos que se utilizaba para relojes y calculadoras de bolsillo, sin embargo, esta tecnología ha ido tomando relevancia y solo en 2012 se vendieron 40 millones de televisores con este tipo de pantallas.

El twisted nematic (TN), es el más usado, aunque el super twisted nematic (STN) mejora las propiedades electroópticas mediante el incremento del ángulo de twist, pasando de $\frac{\pi}{2}$ radianes del TN, a un ángulo entre π y $\frac{3\pi}{2}$ del STN. Por último vamos a revisar otro tipo de display que es el in-plane switching (IPS) que muestra una amplia variedad de ángulos dado que las moléculas de cristal líquido rotan en un plano bajo la aplicación de un campo eléctrico.

5.1. Twisted Nematic (TN)

Nuestro objetivo en esta sección será modelizar la transición de Freedericksz en el comúnmente llamado dispositivo twisted nematic, en adelante TN. En la Figura 5.1 se hace una ilustración de como funcionan estos dispositivos, siendo al final de la sección cuando se comentará en detalle, una vez que hagamos el análisis matemático.

Vamos a extender el análisis de las soluciones de equilibrio tilt y twist que hicimos en la sección 3.6.3, usando la misma notación basada en la Figura 3.7.

La situación inicial sería la de la solución twist con las condiciones (3.38) y (3.39), donde para TN el ángulo $2\phi_0$ es $\frac{\pi}{2}$, y como ya vimos en los STN está entre π y $\frac{3\pi}{2}$.

El director tiene la forma general

$$n = (\cos \theta(z) \cos \phi(z), \cos \theta(z) \sin \phi(z), \sin \theta(z)) \quad (5.1)$$

Y la solución twisted plana viene dada por

$$\theta \equiv 0, \quad \phi = \phi_0 \left(2 \frac{z}{d} - 1 \right), \quad 0 \leq z \leq d, \quad (5.2)$$

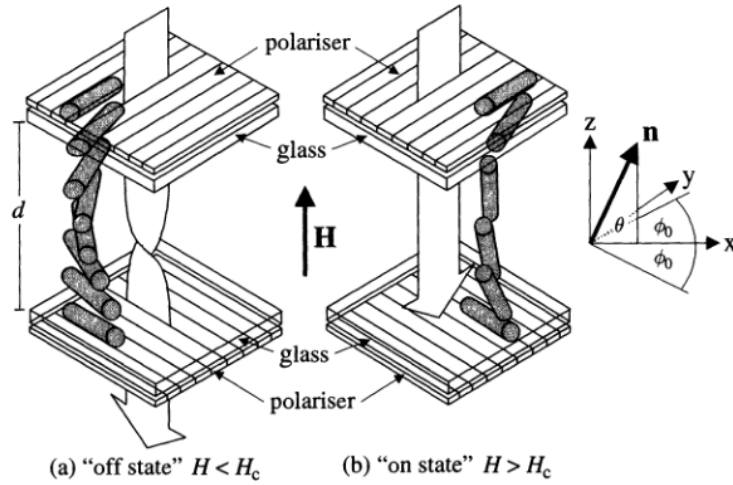


Figura 5.1: Diagrama esquemático sobre el funcionamiento de un dispositivo twisted nematic.

Si ahora aplicamos el campo magnético $\mathbf{H} = H(0, 0, 1)$, con las condiciones de frontera

$$\theta(0) = \theta(d) = 0, \quad (5.3)$$

$$\phi(0) = -\phi_0, \quad \phi(d) = \phi_0, \quad (5.4)$$

donde sin pérdida de generalidad asumimos $\phi_0 > 0$.

Consideramos la densidad de energía total como

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2} f(\theta) (\theta')^2 + \frac{1}{2} g(\theta) (\phi')^2 - \frac{1}{2} \chi_a H^2 \sin^2 \theta \quad (5.5)$$

donde $\prime = \frac{d}{dz}$, $f(\theta)$ y $g(\theta)$ son las expresiones que dimos en (3.31) y (3.32), respectivamente.

Así las ecuaciones de equilibrio asociadas son

$$2f(\theta) \theta'' + \frac{df(\theta)}{d\theta} (\theta')^2 - \frac{dg(\theta)}{d\theta} (\phi')^2 + 2\chi_a H^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (5.6)$$

$$[g(\theta) \phi']' = 0 \quad (5.7)$$

Tomando primeras integrales obtenemos

$$f(\theta) (\theta')^2 + g(\theta) (\phi')^2 + 2\chi_a H^2 \sin^2 \theta = a \quad (5.8)$$

$$g(\theta) \phi' = b \quad (5.9)$$

donde a y b son constantes de integración.

Una posible solución de las ecuaciones de equilibrio que cumplen las condiciones de frontera, sería la (5.2), sin embargo podemos buscar otras soluciones simétricas teniendo en cuenta

$$\theta(z) = \theta(z - d), \quad \phi(z) = -\phi(d - z) \quad 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \quad (5.10)$$

y además

$$\theta' \left(\frac{d}{2} \right) = 0, \quad \theta \left(\frac{d}{2} \right) = \theta_m > 0, \quad (5.11)$$

$$\phi \left(\frac{d}{2} \right) = 0, \quad (5.12)$$

Por tanto, la ecuación (5.8) puede escribirse

$$f(\theta) (\theta')^2 = g(\theta_m) \left(\phi' \left(\frac{d}{2} \right) \right)^2 - g(\theta) (\phi'(z))^2 + \chi_a H^2 (\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta) \quad (5.13)$$

y aplicando (5.11) sobre (5.9)

$$\left[g(\theta_m) \left(\phi' \left(\frac{d}{2} \right) \right) \right]^2 = b^2 = [g(\theta) (\phi'(z))]^2 \quad (5.14)$$

Si ponemos estos dos resultados en (5.13) obtenemos

$$f(\theta) (\theta')^2 = b^2 \left[\frac{1}{g(\theta_m)} - \frac{1}{g(\theta)} \right] + \chi_a H^2 (\sin^2 \theta_m - \sin^2 \theta) \quad (5.15)$$

Integrando (5.15) y usando las condiciones de frontera (5.3) alcanzamos la solución

$$z = \int_0^\theta \frac{\sqrt{f(u)}}{[\chi_a H^2 (\sin^2 \theta_m - \sin^2 u)] + b^2 \left[\frac{1}{g(\theta_m)} - \frac{1}{g(u)} \right]^{\frac{1}{2}}} du \quad 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \quad (5.16)$$

que nos da θ como función implícita de z . Por la ecuación (5.14) tenemos

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d\phi}{dz} = \frac{b}{g(\theta)} \frac{d\theta}{d\phi} \quad (5.17)$$

Insertando este resultado en (5.15), integrando y usando las condiciones de frontera (5.4), obtenemos la solución para el ángulo ϕ como función de la solución de θ

$$\phi = \phi_0 + \int_0^\theta \frac{\sqrt{f(u)}}{[\chi_a H^2 (\sin^2 \theta_m - \sin^2 u)] + b^2 \left[\frac{1}{g(\theta_m)} - \frac{1}{g(u)} \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{b}{g(u)} du \quad 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \quad (5.18)$$

Las constantes θ_m y b son obtenidas de las relaciones de simetría (5.11) y (5.12) aplicadas a las soluciones anteriores. Así

$$\frac{d}{2} = \int_0^{\theta_m} \frac{\sqrt{f(u)}}{[\chi_a H^2 (\sin^2 \theta_m - \sin^2 u)] + b^2 \left[\frac{1}{g(\theta_m)} - \frac{1}{g(u)} \right]^{\frac{1}{2}}} du \quad (5.19)$$

$$\phi_0 = \int_0^{\theta_m} \frac{\sqrt{f(u)}}{[\chi_a H^2 (\sin^2 \theta_m - \sin^2 u)] + b^2 \left[\frac{1}{g(\theta_m)} - \frac{1}{g(u)} \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{b}{g(u)} du \quad (5.20)$$

Esas dos ecuaciones determinan θ_m y b para un campo dado H .

Si ahora hacemos el cambio de variable

$$\sin u = \sin \theta_m \sin \lambda \quad (5.21)$$

las ecuaciones (5.19) y (5.20) se transforman en

$$\frac{d}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\theta_m, \lambda) d\lambda \quad (5.22)$$

$$\phi_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\theta_m, \lambda) \frac{b}{g_2(\theta_m, \lambda)} d\lambda \quad (5.23)$$

donde

$$G(\theta_m, \lambda) = \frac{\sin \theta_m \cos \lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda}} \frac{[K_1 + (K_3 - K_1) \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda]^{\frac{1}{2}}}{\left[\chi_a H^2 \sin^2 \theta_m \cos^2 \lambda + b^2 \left\{ \frac{1}{g_2(\theta_m, \frac{\pi}{2})} - \frac{1}{g_2(\theta_m, \lambda)} \right\} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.24)$$

con $g_2(\theta_m)$ definida por

$$g_2(\theta_m) = K_2 + (K_3 - 2K_2) \sin^2 \theta_m \sin^2 \lambda - (K_3 - K_2) \sin^4 \theta_m \sin^4 \lambda \quad (5.25)$$

Si tomamos límites en $g_2(\theta_m)$ y $G(\theta_m, \lambda)$ cuando $\theta_m \rightarrow 0$

$$g_2(\theta_m) \rightarrow K_2 \quad (5.26)$$

$$G(\theta_m, \lambda) \rightarrow \frac{\sqrt{K_1}}{\chi_a H^2 - b^2 (K_3 - 2K_2) / K_2^2} \quad (5.27)$$

La ecuación (5.22) nos lleva a anticipar que $H \rightarrow H_c$ donde

$$\frac{d}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{K_1}}{\chi_a H^2 - b^2 (K_3 - 2K_2) / K_2^2} \quad (5.28)$$

la cual puede ser escrita

$$\chi_a d^2 H_c^2 = \pi^2 K_1 + \frac{b_a^2 d^2}{K_2^2} (K_3 - 2K_2) \quad (5.29)$$

Tomando límite cuando $\theta_m \rightarrow 0$ en (5.23) y usando (5.28), muestra que b (que realmente depende de θ_m) satisface

$$b = 2K_2 \frac{\phi_0}{d} \quad (5.30)$$

Al eliminar la constante b de (5.29) con (5.30) se revela que H_c satisface

$$\chi_a d^2 H_c^2 = \pi^2 K_1 + 4\phi_0^2 (K_3 - 2K_2) \quad (5.31)$$

Leslie mostró que escribiendo $\beta = \sin^{\theta_m}$, y diferenciando (5.22) y (5.23) respecto a β obtenemos

$$2d^2 \chi_a \left(\frac{dH^2}{d\beta} \right)_{\beta=0} = K_3 \pi^2 - 4 (K_2^2 + K_3^2 - K_2 K_3) \frac{\phi_0^2}{K_2} \quad (5.32)$$

$$d \left(\frac{db}{d\beta} \right)_{\beta=0} = \phi_0 (K_3 - 2K_2) \quad (5.33)$$

Estos resultados combinados con (5.29), (5.30) y (5.31) dan como resultado

$$H^2 = \frac{1}{\chi_a d^2} \left(\pi^2 K_1 + 4\phi_0^2 (K_3 - 2K_2) \right) + \frac{\beta}{2\chi_a d^2} \left(K_3 \pi^2 - 4 (K_2^2 + K_3^2 - K_2 K_3) \frac{\phi_0^2}{K_2} \right) + O(\beta^2) \quad (5.34)$$

$$b = 2K_2 \frac{\phi_0}{d} + \frac{\beta}{d} (K_3 - 2K_2) \phi_0 + O(\beta^2) \quad (5.35)$$

La ecuación (5.34) muestra un diagrama de bifurcación parecido al que vimos en la Figura 4.1 siempre y cuando el mapeo $\theta_m \rightarrow H(\theta_m)$ sea creciente en las proximidades de $\theta_m = 0$, es decir

$$\phi_0 < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{K_2 K_3}{K_2^2 + K_3^2 - K_2 K_3}} = \phi_m \quad (5.36)$$

Para justificar que H_c es el umbral crítico, Leslie examinó la diferencia de energías para $H > H_c$ entre la solución no plana mediante las ecuaciones (5.16) y (5.18), y la solución plana (5.2), análisis que prueban que la transición de Freedericksz ocurre para $H > H_c$ y que la solución no plana es la preferida en ese caso.

Campos Eléctricos

Vamos ahora a calcular el valor crítico para la transición de Freedericksz si estamos bajo la influencia de un campo eléctrico. Por ejemplo, para $\epsilon_a > 0$, el voltaje crítico viene dado por $V_c = dE_c$, entonces por (5.31) tenemos

$$V_c^2 = (\epsilon_0 \epsilon_a)^{-1} \left[\pi^2 K_1 + 4\phi_0^2 (K_3 - 2K_2) \right] \quad (5.37)$$

En el caso especial en el que $2\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, tenemos

$$V_c^2 = \frac{\pi^2}{\epsilon_0 \epsilon_a} \left[K_1 + \frac{1}{4} (K_3 - 2K_2) \right] \quad (5.38)$$

Además en este caso especial, las siguientes inecuaciones

$$\frac{1}{4} \leq \frac{K_1}{2K_2 - K_3}, \quad \frac{1}{4} < \frac{K_2 K_3}{K_2^2 + K_3^2 - K_2 K_3} \quad (5.39)$$

definen posibles valores de las constantes elásticas para comprobar que V_c es el umbral crítico.

- Si $(K_3 - 2K_2) \geq 0$, la condición (5.39(2)) es satisfecha y es suficiente para validar V_c matemáticamente.
- Si $(K_3 - 2K_2) < 0$, ambas inecuaciones necesitan ser cumplidas matemáticamente para justificar V_c como umbral crítico.

Funcionamiento del dispositivo nemático twisted

Con ayuda de la Figura 5.1, estamos ahora en disposición de ilustrar brevemente como funciona un dispositivo de estas características.

Una muestra de nemático es colocada entre dos placas de cristal formando una celda. Las placas están tratadas, y por tanto, sometidas a un anclaje fuerte, de tal manera que el director está alineado de forma uniforme paralelo a las placas en sus proximidades. Como las placas están rotadas $\frac{\pi}{2}$ radianes, la solución plana twist se impone sobre el director con $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$.

En la parte externa de las placas, se han colocado unos polarizadores, cuyos ejes son paralelos al director. Cuando la luz entra en la celda, los polarizadores vibran perpendicularmente a las placas, de tal forma que el vector de polarización entra en la muestra de cristal líquido que padece una reorientación de $\frac{\pi}{2}$ radianes a lo largo de la celda y por tanto el director se reorienta.

Esto significa que la celda aparecerá transparente cuando no estén presentes ni un campo magnético ni eléctrico, o bien, cuando $H < H_c$ o $V < V_c$. En esta situación se puede describir como "off-state".

Sin embargo, cuando $H > H_c$ o $V > V_c$, la solución no plana es energéticamente favorable y el director prefiere alinearse paralelamente al campo en el centro de la celda. En este caso, el vector de polarización es ortogonal al eje de polarización de la placa inferior. Esto significa que la luz no se propaga a través de la placa inferior y la celda aparece opaca. Esta situación a menudo es referida como "on-state".

El tiempo de respuesta t_{on} desde el off-state al on-state, y el tiempo de respuesta desde el on-state al off-state viene

dado por las siguientes ecuaciones

$$t_{\text{on}} = \frac{\gamma d^2}{\epsilon_0 \epsilon_a (V^2 - V_c^2)} \quad (5.40)$$

$$t_{\text{off}} = \frac{\gamma d^2}{\pi^2 K} \quad (5.41)$$

donde $K = K_1 + \frac{K_3 - 2K_2}{4}$ y γ es la viscosidad.

Tal y como vemos en las ecuaciones anteriores, reduciendo γ y d , se mejoran los tiempos de respuesta. Si fabricamos con una profundidad menor, es necesario usar materiales de cristal líquido con una mayor ϵ_a .

Por último, mencionar que para evitar que se produzcan dominios con tilt o twist opuestos en una TN-LCD, se suele utilizar un ángulo de pretilt aproximadamente de unos 5° .

5.2. Super Twisted nematic (STN)

Como ya hemos comentado, el STN se fundamenta en la mejora de la respuesta electroóptica mediante el incremento del ángulo de twist. La orientación molecular del STN-LCD se muestra esquemáticamente en la figura (5.2). En este caso, el ángulo de twist varía entre 180° y 270° , y el ángulo de pretilt entre 5° y 20° .

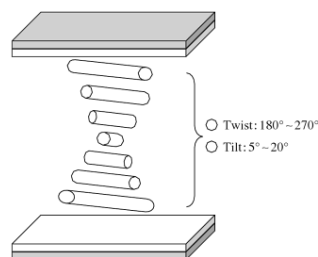


Figura 5.2: Esquema de la orientación molecular del STN-LCD.

Además, en la Figura 5.3 podemos comparar gráficamente la transmisión de la respuesta electroóptica entre los dispositivos STN y TN.

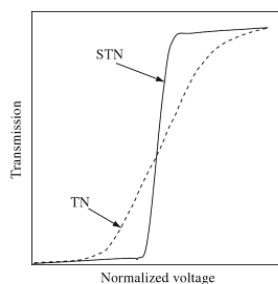


Figura 5.3: Comparación de la respuesta voltaje-transmisión del STN con el TN.

5.3. In-Plane Switching (IPS)

Muchos de los teléfonos de última generación, así como las tablets y pantallas de ordenador se fabrican con este tipo de pantallas de cristal líquido.

En los dos casos anteriores, la dirección del campo eléctrico o magnético es perpendicular a las placas, sin embargo en el IPS, los campos se aplican paralelamente a las placas, de tal forma que los ejes de las moléculas de cristal líquido están alineados paralelos a las placas independientemente de que el campo esté o no aplicado. En otras palabras, el cambio de las moléculas del cristal líquido al aplicar un campo, permanece sobre un único plano, ello permite mayores ángulos de visión, así como colores mejores y más estables.

A continuación vamos a ver una figura donde se describe el funcionamiento del IPS comparándolo con el TN

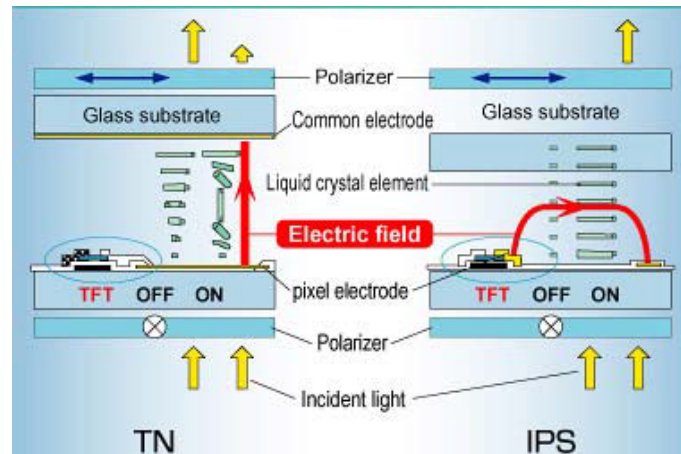


Figura 5.4: Comparación entre TN e IPS.

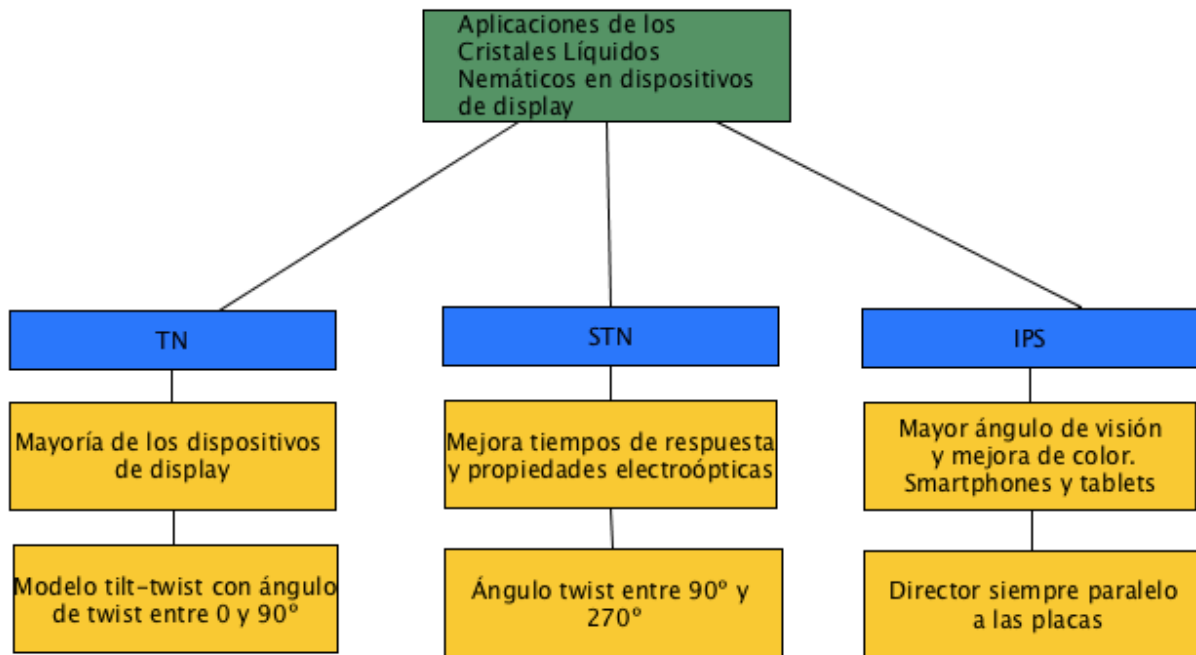
5.4. Conclusiones Finales

Para concluir, mencionar que las pantallas de cristales líquidos han revolucionado la tecnología de la comunicación e información, y con ello nuestra forma de vida. Siguen apareciendo nuevas modalidades de pantallas de cristales líquidos más eficientes y rápidas. A continuación nombramos algunas, aunque las podemos consultar en [9, pp. 102-120],

- Multi-vertical aligned nematic (MVA).
- Electrically controlled birefringence (ECB).
- Optically compensated bend (OCB).

La modelización matemática del comportamiento estático y dinámico de estos aparatos continua proporcionando una amplia variedad de interesantes problemas dentro del campo de la Matemática Aplicada. Dado el elevado número de aplicaciones que los cristales líquidos pueden tener, su presente y su futuro es sumamente prometedor, por tanto representa un campo potencial de relevantes relaciones entre las Matemáticas, la Física, la Ingeniería y otras ciencias.

5.5. Resumen



Bibliografía

- [1] Denis Andrienko, *Introduction to Liquid Crystals, International Research School Modelling of Soft Matter*, 11–15 September 2006, Bad Marienberg. http://www2.mpip-mainz.mpg.de/~andrienk/teaching/IMPRS/liquid_crystals.pdf (consultado Marzo 2014).
- [2] Ian Stewart, *The Static and Dynamic Theory of Liquid Crystals: A Mathematical Introduction*, The Liquid Crystals Book Series, vol. 2, Taylor & Francis, London, 2004.
- [3] S. Chandrasekhar, *Liquid Crystals*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [4] J. K. Hale, Hüsein Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer, New York, 1991.
- [5] John M. Ball, *The Mathematics of Liquid Crystals*, Cambridge CCA Course, 12–17 February 2012. <http://people.maths.ox.ac.uk/ball/Teaching/cambridge.pdf> (consultado Mayo 2014)
- [6] Fernando Pestana da Costa, *Equações Diferenciais Ordinárias*, 2ª Edição, Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia, vol. 1, IST Press, Lisboa, 2001.
- [7] F. P. da Costa, E. C. Gartlang, Jr., M. Grinfeld, J. T. Pinto, *Bifurcation analysis of the twist-Fréedericksz transition in a nematic liquid crystal cell with pre-twist boundary conditions*, Euro. Jnl. of Applied Mathematics (2009), **20**, 269–287.
- [8] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, 2nd Edition, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [9] Kohki Takato, Masanori Sakamoto, Ray Hasegawa, Masaki Hasegawa, Mitsushiro Koden, Nobuyuki Itoh, *Alignment Technology and Applications of Liquid Crystals Devices*, Taylor & Francis, Abingdon, 2005.