Sistemas de coordenadas en espacios de Banach

Escrito por
Miguel Méndez Guerrero

Tutor: Jorge López Abad

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Educación a Distancia

Trabajo para la obtención del título de
Máster Universitario de Matemáticas Avanzadas de la UNED
Especialidad de Análisis Matemático

Julio 2019

Resumen

Este Trabajo de Fin de Máster es una introducción a la investigación sobre sistemas de coordenadas en Espacios de Banach. Se inicia el trabajo con conceptos generales sobre bases de Schauder en Espacios de Banach y sucesiones básicas con definiciones y ejemplos. Se continúa con los conceptos de equivalencia entre bases y sucesiones básicas y definiciones de base bloque, estabilidad y perturbación de bases. Lo anterior nos lleva a resultados fundamentales como son el lema de Mazur y el el principio de selección de Bessaga-Pelcynski. Seguidamente se presentan conceptos y definiciones sobre clases especiales de bases tales como bases incondicionales, contractivas y acotadas completamente que nos permitirán tener criterios para caracterizar espacios reflexivos y finalmente se presenta el espacio de James J.

Abstract

These Master's Thesis is an introdutory note on systems of coordinates in the field of Geometry of Banach Spaces. First we introduce the fundamental notions of a Schauder bases and basis sequences on Banach spaces through definitions and examples. We continue with the study of equivalences between bases and basic sequences, definitions and concepts about block basic sequences and stability and perturbations of basis. All of these leads to show Mazur's Lemma and the Bessaga-Pelczynski selection principle. The main point part of this work is an extensive treatment of special bases like unconditional, shrinking and completely-bounded bases, used in the study of reflexive spaces. Finally we present the James Space J.

Keywords: Bases de Schauder; Lema de Mazur; Principio de selección de Bessaga-Pelczynski; Bases incondicionales, contractivas y completamente acotadas; Caracterización de la reflexividad; Espacio de James.

Indice de Contenidos

1. Introducción **5**

2. Bases de Schauder **7**
2.1. Bases de Schauder y sucesiones básicas 7
2.1.1. Nociones Generales 8
2.1.2. Ejemplos de Bases 11
2.1.2.1. Bases Naturales 11
2.1.2.2. Otras Bases 13
2.2. Equivalencia de bases y equivalencia de Sucesiones Básicas 13
2.2.1. Lema de Mazur 14
2.2.2. Definiciones 15
2.2.3. Principio de Selección de Bessaga-Pelczinski. 15

3. Clases Especiales de Bases **17**
3.1. Bases Incondicionales. 17
3.1.1. Definiciones 17
3.1.2. Incondicionalidad de la base de Haar para $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$ 18
3.2. Espacios Reflexivos con Bases contractivas. 20
3.2.1. Definiciones 20
3.2.2. Caracterización de la Reflexividad de un espacio de Banach con base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en función de propiedades de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. 22
3.3. Espacios Reflexivos con Bases Incondicionales. 23
3.3.1. Caracterización de la Reflexividad con base de Schauder incondicional en función de contener subespacios isomorfos a c_0 y l_1. 24
3.4. Espacios sin bases Incondicionales. 25
3.4.1. El Espacio de James J que tiene codimensión 1 en su bidual J^{**} 25

4. Conclusiones. **27**

5. Anexo: Definiciones y Teoremas **29**

Bibliografía **30**

Capítulo 1

Introducción

Este Trabajo de Fin de Máster (TFM) es una introducción a la investigación sobre sistemas de coordenadas en Espacios de Banach. Se inicia el trabajo presentando en el capítulo 1 una visión general del TFM. En el capítulo 2 se introducen los conceptos generales sobre bases de Schauder en Espacios de Banach y sucesiones básicas con definiciones y ejemplos. Se continúa con los conceptos de equivalencia entre bases y sucesiones básicas y definiciones de número base, base bloque, estabilidad y perturbación de bases y propiedad de la aproximación, que nos conduce a resultados fundamentales para el estudio de subespacios infinito dimensionales como son el lema de Mazur y el principio de selección de Bessaga-Pelsynski. Seguidamente en el capítulo 3 se presentan conceptos y definiciones sobre clases especiales de bases tales como bases incondicionales, contractivas y acotadas completamente que nos permitirán tener criterios para caracterizar los espacios reflexivos y presentar el espacio de James. Se finaliza con conclusiones sobre estos temas y los posibles estudios posteriores que continúen este trabajo.

La referencia bibliográfica incluye dos textos de postgrado para un estudio formal del tema y tres artículos publicados en revistas científicas que nos permiten introducirnos en el campo de la investigación. El texto principal es el de Albiac-Kalton, el primero profesor de la Universidad Pública de Navarra [1] [capítulos 1 y 3], es un texto extenso, moderno, de nivel postgrado y que presenta los temas con rigor matemático con un tratamiento muy formal. Se complementa este texto con el clásico de Linderstrauss[8][capítulo 1] y el artículo de Johnson[7]. Los otros dos artículos científicos se utilizan en el capítulo 2 al tratar la cuestión fundamental de saber si tiene Base todo espacio de Banach separable y lo estudiamos con el artículo de Enflo [3] que demuestra que la respuesta es negativa, y en el capítulo 3 al estudiar la caracterización de la reflexividad que analizamos en profundidad basándonos en el extenso artículo de James [6]

La terminología y notación varía entre los autores, aquí utilizaremos mayormente la que se emplea en el texto de Albiac-Kalton[1]. Para consultas puntuales sobre temas de análisis funcional hemos utilizado los textos de Valdivia[9] y Yosida[10]. Finalizamos señalando que este trabajo ha sido escrito con LaTeX con el sistema TeXnicCenter 2.02 stable sobre MiKTeX 2.9.

Capítulo 2

Bases de Schauder

2.1. Bases de Schauder y sucesiones básicas

Empezamos comentando que para trabajar con espacios infinito dimensionales necesitamos ampliar de alguna forma los conceptos y métodos empleados con las bases de espacios finito dimensionales. Sabemos que una base permite representar cualquier elemento del espacio como una combinación de elementos de la base y determinados escalares. Por ejemplo la base canónica $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ cuyos elementos se denominan coordenadas, siendo $e_i = (0, ..., 1, ..,0)$ con 1 en la posición i, entonces B es base del espacio $\mathbb{R}^n$, denominada base de Hamel. Esta base conjuntamente con una sucesión de escalares $(a_1, a_2, ..., a_n)$ llamados coeficientes nos permite representar cualquier elemento $x \in \mathbb{R}^n$ como una única combinación lineal y finita $x = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$.

Sin embargo el conjunto $B = (e_1, e_2, ...)$ siendo $e_i = (0, ..., 1, ...)$ con 1 en la posición i no es una base de Hamel del espacio l_2 de sucesiones infinitas, porque no podemos encontrar una sucesión de escalares $(a_1, a_2, ...)$ tal que $x = a_1e_1 + a_2e_2 + ...$ sea una combinación lineal y finita. Hay que señalar que siempre existe base de Hamel para espacios de dimensión infinita, pero no hay métodos simples para su construcción. Siendo la base de Hamel, una estructura algebraica, necesitamos añadir propiedades topológicas como es la noción de aproximación, es decir convergencia, para poder desarrollar bases más fáciles de obtener. El espacio de Banach es un espacio vectorial con una topología inducida por una norma que nos va a permitir definir bases tales como la base de Schauder que es una de las más utilizadas en los espacios funcionales clásicos.

Las bases de Schauder tienen importantes aplicaciones, algunas de las cuales son los objetivos de éste TFM entre los que podemos mencionar: Cómo convierten un espacio vectorial en un espacio de sucesiones identificando cada vector con una sucesión correspondiente de coeficientes, estudiar los subespacios de dimensión infinita, simplificar demostraciones de teoremas tal como el de Eberlein-Smulian o la caracterización de la reflexividad de un espacio de Banach. Estos objetivos nos indican que el estudio de las bases nos proporcionan herramientas valiosas para el análisis de las propiedades de los espacios de Banach.

A lo largo de este trabajo iremos presentando definiciones, ejemplos y resultados que nos permitirán entender las bases de Schauder con un enfoque clásico empleado por la mayoría de autores y con rigor matemático y a un nivel de postgrado en matemáticas. Se utilizan frecuentemente teoremas del análisis funcional, topología, conceptos de espacios dual, doble dual, operadores, convergencia, convergencia débil y convergencia débil*. Estos conceptos se presentan en el apéndice para los lectores que necesiten consultar definiciones o teoremas, aunque no se incluirán demostraciones.

2.1.1. Nociones Generales

Definición 2.1.1 (Base de Schauder). Una base de Schauder es una sucesión de elementos $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X infinito dimensional que satisface la propiedad de que para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

Según esta definición la sucesión $(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n)_{N=1}^{\infty}$ converge en norma a x, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0$$

Si consideramos la base de Schauder $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, por existir una única sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ las aplicaciones $x \mapsto a_n$ son funcionales lineales y continuos. De esta forma podemos obtener algunos resultados relacionados con el dual X^*. Para esto vamos a introducir los funcionales biortogonales asociados a la base de Schauder, y a continuación definiremos las sucesiones de las proyecciones naturales asociadas también a esta base.

Definición 2.1.2 (Funcionales biortogonales). Los funcionales biortogonales asociados a una base de Schauder $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X es la sucesión de funcionales lineales y continuos $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en el dual X^* tal que:

1. $e_k^*(e_j) = 1$ si $j = k$, y $e_k^*(e_j) = 0$ en otro caso, para cualquier $j, k \in \mathbb{N}$,
2. $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n$ para cada $x \in X$.

Nota: Los funcionales biortogonales también se denominan funcionales coordenados asociados con $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Es decir $a_n = e_n^*(x)$ y si x es un elemento del espacio X se puede expresar como $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ en función de los coeficientes a_n y de las coordenadas e_n de la base o como $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n$ en función de los funcionales coordenados e_n^* y de las coordenadas e_n de la base.

Debemos comentar que para los espacios de Banach los conceptos de base y de base de Schauder son equivalentes y ha sido demostrado como una de las primeras aplicaciones del teorema de la gráfica cerrada. Sin embargo hay diferencias cuando se estudian espacios que generalizan los espacios de Banach tales como los espacios localmente convexos. Por esta razón llamaremos a partir de ahora llamaremos a las bases de Schauder bases simplemente. Ver Albiac-Kalton[1][definición 1.1.2]

Definición 2.1.3 (Sucesión de proyecciones naturales). Una sucesión de proyecciones naturales es una colección de aplicaciónes lineales $S_n : X \to X$ definida como $S_0(x) = 0$ y para $n \geq 1$ como $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)e_k$, siendo $x = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(x)e_k$. También se puede utilizar la notación $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, siendo $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, si no se quiere utilizar los funcionales coordenados e_k^*. Los operadores S_n son lineales continuos, porque los funcionales coordenados e_n^* son continuos, y también están acotados porque $S_n(x) \subset X$ es de dimensión finita, y por el principio de la acotación uniforme $\sup_n \|S_n(x)\| < \infty$.

Definición 2.1.4 (Constante de la Base). Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base del espacio de Banach X, entonces el número $\mathbf{K_b} = \sup_n \|S_n\|$ se denomina constante de la base. Si este número es 1, se dice que la base es monótona.

Cuando nos interese tener una base monótona podemos definir una nueva norma:

$$|||x||| = \sup_{n \geq 1} \|S_n(x)\| .$$

Entonces $||x|| \leq |||x||| \leq \mathbf{K_b}\, ||\mathbf{x}||$, es decir la nueva norma es equivalente a la norma original y se verifica que $|||S_n||| = 1$ para $n \in \mathbb{R}$.

Definición 2.1.5 (Sucesión Básica). Una sucesión de elementos $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X se denomina sucesión básica si es una base para $[e_k]$ es decir que sea una base de Schauder para la clausura de la envoltura lineal de $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, $(\overline{span}(e_k)_{k=1}^{\infty})$. Esta definición no exige que esta base genere todo el espacio X. Si $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ es base de Schauder para el espacio X debe cumplirse que $X = \overline{span}(e_k)_{k=1}^{\infty}$.

Las sucesiones básicas juegan un papel importante en el estudio de los espacios de Banach y continuaremos con este tema en la sección 2.2. Enunciamos a continuación un criterio para reconocer si una sucesión es básica.

Proposición 2.1.6 (Condición de Grunblum). Una sucesión $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ de elementos distintos de cero de un espacio de Banach X es una sucesión básica si y sólo si existe una constante positiva K tal que:

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|,$$

para toda sucesión de escalares (a_k) y todos los enteros m, n, tal que $m \leq n$. Observación: Esta condición conjuntamente con i) $e_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ y ii) $X = \overline{span}(e_n)_{n=1}^{\infty}$ forman las tres condiciones necesarias y suficientes para que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ sea una base de Schauder. $\square$

Mencionamos a continuación dos notas que nos permiten ampliar los contenidos de ésta sección:

1. Si $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ es base de Schauder de X, entonces $((e_n)/\,||e_n||)_{n=1}^{\infty}$ es una base normalizada de X.

2. Todo espacio de Banach X con base es separable. Recordemos que un espacio es separable si contiene un conjunto denso y numerable. Por lo tanto si $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ es base de X, el conjunto $A = \{\sum_{k=1}^{n} a_n e_n : a_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso y numerable en X. Esto quiere decir que si un espacio no es separable entonces no tiene base. Vamos a ilustrar estas afirmaciones con ejemplos de espacios de Banach separables y no separables:

El espacio de Banach infinito dimensional de las sucesiones acotadas $\ell_\infty = \{(x_n); sup\{|x_n|\,; n \geq 1\} < \infty\}$ con la norma del supremo $\|(x_n)\|_\infty = sup\{|x_n|\,; n \geq 1\}$ no es separable. Si consideramos el conjunto $A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de ℓ_∞, (sucesiones de ceros y unos), entonces A no es numerable porque su cardinal es $2^{|\mathbb{N}|}$ el mismo que el conjunto de Cantor y además satisface que $\|x - y\| = 1 \;\; \forall\, x, y \in A, x \neq y$.

El espacio de Banach infinito dimensional de las sucesiones con límite 0 $c_0 = \{(x_n); \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ con la norma del supremo $\|(x_n)\|_\infty = sup\{|x_n|\,; n \geq 1\}$ es separable. Si consideramos el conjunto $A = \{(0, ..., 0, 1^{(i)}, 0, ...)\}; i \in \mathbb{N}$, entonces A es numerable por la propia definición. Si consideramos $x \in c_0$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_1, ..., x_n, 0, 0, ...); n \in N\}$, entonces $\lim_{n\to\infty}(y_n) = x$ y $x \in \overline{span}(A)$, es decir A es denso en c_0. Concluimos que $A \subseteq c_0$ es un conjunto numerable y denso. Además, c_0 tiene base de Schauder como puede verse en el ejemplo 2.1.7. Señalamos finalmente que c_0 es un subespacio de ℓ_∞.

Hemos dicho en la nota 2 que un espacio de Banach X con base es separable. Un problema que surgió hace muchos años se refiere al inverso de esta afirmación, es decir *¿ Tiene base todo espacio de Banach separable ?*, la respuesta es negativa y se debe a Per Enflo basándose en la propiedad de aproximación (denominada AP) que construye en 1972 un espacio de Banach separable que no tiene base de Schauder. El artículo publicado por Enflo[3] se estructura alrededor de un teorema y 7 lemas que ha servido posteriormente para construir subespacios cerrados de ℓ_p para $2 < p \leq \infty$ que no tienen bases de Schauder. Finalizamos presentando algunos resultados sobre la propiedad de aproximación.

Definición 2.1.7. Un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación (AP) si, para cada conjunto compacto $\mathbf{K}$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un operador $T : X \to X$ de rango finito tal que $\|Tx - x\| \leq \epsilon$ para todo $x \in \mathbf{K}$. Observación: Todo espacio de Banach con base de Schauder tiene la propiedad AP porque las proyecciones naturales de X (ver definición 2.1.3) sobre subespacios de dimensión finita forman una sucesión de operadores que convergen puntualmente al operador identidad.

Definición 2.1.8. Un espacio separable de Banach X tiene la propiedad de la aproximación acotada (BAP) si existe una sucesión de operadores $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ de rango finito tal que $lim_{n\to\infty} \|x - Tx\| = 0$ para todo $x \in X$. Observación: tener la propiedad BAP implica tener la propiedad AP.

Problema 2.1.9 (Problema de la Base de Schauder). ¿ Tiene base todo espacio de Banach separable ? Respuesta: NO, demostrado por Enflo[3], que construye un espacio que no tiene propiedad de aproximación (AP).

Problema 2.1.10 (Problema de la Aproximación). ¿ Tiene la propiedad de la aproximación todo espacio de Banach ? Respuesta: NO, demostrado por Enflo[3]

2.1.2. Ejemplos de Bases

2.1.2.1. Bases Naturales

Algunos espacios de Banach clásicos tienen bases que podemos llamarlas naturales.

Ejemplo 2.1.11. En la introducción presentamos la sucesión $B = (e_1, e_2, ...)$ siendo $e_i = (0, ..., 1, ...)$ con 1 en la posición i, entonces la sucesión $(e_i)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder monótona y normalizada de los espacios c_0 y l_p de sucesiones para $1 \leq p < \infty$.

Ejemplo 2.1.12. Las bases ortonormales en espacios de Hibert son bases de Schauder.

Ejemplo 2.1.13. El Sistema de Haar es base de Schauder monótona no normalizada para $L_p(0,1)$ para $1 \leq p < \infty$

Sin entrar en detalles de la construcción de la base que se obtiene podemos decir que el sistema de Haar es una sucesión $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones definidas en $[0,1]$ de tal manera que $h_1 = 1$ y para $n = 2^k + s$ se definen funciones escalonadas para $k = 0, 1, ...,$ y para $s = 1, 2, ..., 2^k$ de la siguiente forma y que se muestran en la figura 2.1:

$$h_n(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad 2s - 22^{k+1} \leq t < 2s - 12^{k+1} \\ \\ -1 \quad \text{si} \quad 2s - 12^{k+1} \leq t < 2s2^{k+1} \\ \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

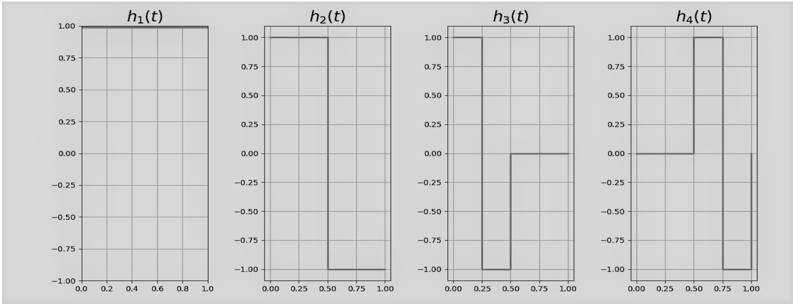

Figura 2.1: Primeros términos de la sucesión de funciones escalonadas $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ del sistema de Haar para $L_p(0,1)$ para $1 \leq p < \infty$

.

Ejemplo 2.1.14. El Sistema de Haar es base de Schauder para $C(0,1)$.

El sistema de Schauder o Faber-Schauder es una sucesión de funciones $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ que conforman una base de Schauder monótona para $C(0,1)$. La construcción de esta base se puede hacer de diversas formas. Aquí presentamos la construcción original expuesta en el texto de Albiac-Kalton [1]. Sea $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en $C(0,1)$ tal que $q_1 = 0$ y $q_2 = 1$. Se puede construir por inducción una sucesión de operadores $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ definida sobre $C(0,1)$ de la siguiente forma: $S_1 f(t) = f(q_1)$ para $1 \leq t \leq n$, entonces $S_n f$ es una función lineal definida por partes (*piecewise function*) como $S_n f(q_k) = f(q_k)$ para $1 \leq k \leq n$ en el intervalo $[0,1] \backslash \{q_1, ..., q_n\}$. El primer componente de la base es $s_0(t) = 1$ para todo t, entonces se definen recursivamente los demás componentes e_n de la base como $e_n(q_n) = 1$, $e_n(q_k) = 0$ para $1 \leq k \leq n$, y e_n es una función lineal en cada intervalo $[0,1] \backslash \{q_1, ..., q_n\}$. Las funciones de la base se muestran en la figura 2.2

Otra forma de construir esta base es relacionándola con el sistema de Haar, como se puede ver en Johnson [7]. Entones, si el sistema de Haar es $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ y la base del sistema de Schauder es $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, según la notación de índices que hemos empleado hasta ahora. La base será entonces $s_0 = 1$ y $s_n = \int h_n dt$, integral indefinida para $n \geq 1$. Finalizamos señalando que la sucesión $\{q_1, ..., q_n\}$ es la sucesión de puntos diádicos $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $[0,1]$ y que es un conjunto denso en $[0,1]$:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\frac{3}{16},\frac{5}{16},\frac{7}{16},\frac{9}{16},\ \cdots$$

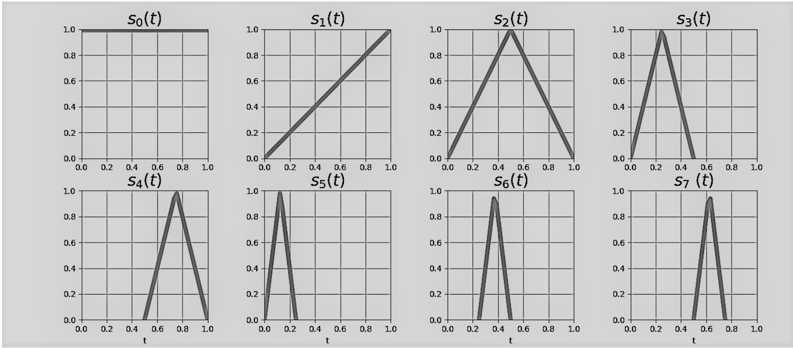

Figura 2.2: Primeros términos de la base del sistema de Faber-Schauder para el espacio de funciones continuas $C[0, 1]$ formada por funciones definidas por partes.

2.1.2.2. Otras Bases

Por ejemplo la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, cos\ x, sen\ x, cos\ 2x, sen\ 2x, cos\ nx, sen\ nx, ...)$ es el Sistema Trigonométrico y es base de Schauder para $L_p([0,\ 2\ \pi])$ para $1 < p < \infty$ en el caso real y para el caso complejo es $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, ...)$,ver [8][parrafo siguiente a definición 1.f.2].

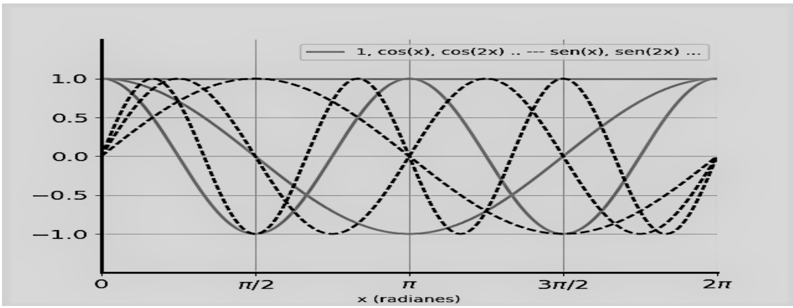

Figura 2.3: Primeros términos de la base de Schauder del sistema trigonométrico para $L_p([0,\ 2\ \pi])$ con $1 < p < \infty$ formada por funciones seno y coseno.

2.2. Equivalencia de bases y equivalencia de Sucesiones Básicas

En la sección anterior hemos presentado las definiciones básicas sobre bases y sucesiones básicas conjuntamente con criterios para demostrar la existencia de bases. En esta sección continuaremos con la teoría de bases. Un concepto importante es la unicidad de una base lo que nos lleva a presentar resultados sobre equivalencias de bases y sucesiones básicas. Otro aspecto importante que juegan las sucesiones básicas es el estudio de los subespacios de los espacios de Banach, es decir la estructura isomórfica de estos espacios. Para esto se debe encontrar una respuesta al problema que enunciamos a continuación:

Problema 2.2.1 (Problema de las sucesiones básicas). ¿ Tiene sucesión básica todo espacio de Banach infinito dimensional ? Respuesta: SI, demostrado por Mazur.

2.2.1. Lema de Mazur

Es un resultado de la teoría de los Espacios de Banach que relaciona la convergencia débil con la convergencia en norma de sucesiones a través de combinaciones lineales convexas de sus elementos.

Lema 2.2.2 (Lema de Mazur). Sea u_n una sucesión débilmente convergente a u en el espacio de Banach X con norma $\|.\|$. Entonces existe para todo $\epsilon > 0$ una combinación convexa $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k (\lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1)$ de la sucesión $(u_k : k = 1, 2, ...)$ tal que $\|u - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\| \leq \epsilon$. Una demostración basada en el funcional de Minkowsky y el teorema de Hahn-Banach la puede encontrar el lector en Yosida[10][páginas 120,121 (teorema 2(mazur))].

A continuación presentamos un lema que nos permitirá demostrar el teorema de Mazur , nos hemos basado en Lindenstrauss [8][Teorema 1.a.5 y lema 1.a.6]

Lema 2.2.3. Sea X un espacio de Banach infinito dimensional. Sea $B \subset X$ un subespacio de dimensión finita y $\epsilon > 0$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|y\| \leq (1 + \epsilon) \|y + \lambda x\|$ para todo $y \in B$ y para todo escalar λ.

Demostracion: Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\epsilon < 1$. Si los elementos de la sucesión $(y_i)_{i=1}^{m}$ tienen norma 1 en B es decir $y \in B$ con $\|y\| = 1$, entonces existe i tal que $\|y - y_i\| < \epsilon/2$. Sean los elementos de la sucesión $(y_n^*)_{i=1}^{m}$ con norma 1 en X^* tal que $y_i^*(y_i) = 1$ para todo i y sea $x \in X$ con $\|x\| = 1$ y $y_i^*(x) = 0$ para todo i. Entonces podemos asegurar que x cumple con los términos del lema. Si $y \in Y$ con con $\|y\| = 1$, considerando i tal que $\|y - y_i\| \leq \epsilon/2$ y con λ un escalar tenemos que:

$$\|y + \lambda x\| \geq \|y_i + \lambda x\| - \epsilon/2 \geq y_i^*(y_i + \lambda x) - \epsilon/2 = 1 - \epsilon/2 \geq \|y\| /(1 + \epsilon)$$

□

Teorema 2.2.4 (Mazur). Todo espacio de Banach de dimensión infinita tiene una sucesión básica.

Demostración: Sean $\epsilon > 0$ y $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \epsilon_n) \leq 1 + \epsilon$ y x_1 un elemento de X con norma 1. Por el lema anterior se puede construir inductivamente una sucesión de vectores unidad $(x_n)_{n=2}^{\infty}$ de tal manera que para todo $n \geq 1$: $\|y\| \leq (1 + \epsilon_n) \|y + \lambda x_{n+1}\|$ para cada $y \in span\{x_1, ..., x_n\}$ y todo escalar λ.
La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X con constante de la base $\leq 1 + \epsilon$, porque $\|P_n\| \leq \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \epsilon_i), n = 1, 2, ...$ □

Seguidamente presentamos definiciones y resultados sobre equivalencias, base-bloque, el principio de estabilidad y de la perturbación y el principio de selección de Bessaga-Pelczinski que nos permite extraer y construir sucesiones básicas operando con bases bloque.

2.2.2. Definiciones

Definición 2.2.5 (**Equivalencia de bases (o sucesiones básicas)**). Dos bases (o sucesiones básicas) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de los espacios de Banach X e Y respectivamente son equivalentes si la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es equivalente a la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$.

Esto quiere decir que si dos bases son equivalentes entonces los espacios de sucesiones asociados a X e Y por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ coinciden. Además por el teorema del grafo cerrado si dos bases son equivalentes, entonces los espacios X e Y por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ deben ser isomorfos como se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.6. Dos bases (o sucesiones básicas) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de los espacios de Banach X e Y respectivamente son equivalentes si y solamente si existe un isomorfismo $T : X \to Y$ tal que $T(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si dos sucesiones básicas son equivalentes los subespacios que generan son isomorfos, pero el recíproco no es cierto. Tal es el caso de las bases canónicas y sumantes (es decir $e_n = (\overbrace{0, 0, ..., 0}^{n-1}, 1, 1, ...), n = 1, 2, 3, ...)$ del espacio de sucesiones c_0 que convergen a 0 no son equivalentes. Ver Albiac-Kalton [1][teorema 1.3.2]

Definición 2.2.7 (**Base-bloque**). Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base del espacio de Banach X. Si $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros con $p_0 = 0$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares. Entonces la sucesión de elementos distintos de cero $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ en X y de la forma:

$$u_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j$$

se denomina sucesión de bloques. Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica entonces (u_n) también lo es y a la sucesión de bloques $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ se le llama base-bloque.

El concepto de base-bloque permite construir nuevas sucesiones básicas. Según la definición que acabamos de ver, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante de base que no excede la de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Las bases tienen propiedades de estabilidad que se pueden perturbar con algún elemento suficientemente pequeño y seguiremos teniendo una base. El siguiente teorema formaliza esta afirmación.

Teorema 2.2.8 (**Principio de perturbación de bases**). Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en un espacio de Banach X y sea $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ los funcionales asociados. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\sum_{n\geq 1} \|x_n^*\| \, \|x_n - y_n\| < 1$, entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Ver Albiac-Kalton [1][teorema 1.3.9]

2.2.3. Principio de Selección de Bessaga-Pelczinski.

El teorema anterior permite enunciar el llamado principio de selección de Bessaga-Pelczinski. Presentamos una versión de este principio y una demostración basada en

Facenda [4][teoremas 2.2.3 y 2.1.6]. El lector interesado encontrará otra versión en Albiac-Kalton[1][proposición 1.3.10] con una amplia demostración basada en proyecciones y la constante de base.

Teorema 2.2.9. Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base en un espacio de Banach X y sea $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ los funcionales asociados. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\liminf \|y_n\| > 0$ y $\lim_{m\to\infty} x_n^*(y_m) = 0$ para cada n, entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que es equivalente a una base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demostración: Sea $\mathbf{K_b}$ la constante de base, consideremos $y_1 = \sum_{n\geq 1} a_{n,1}\, e_n$ con $\liminf \|y_1\| > 0$, y sea $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $u_1 = \sum_{n=1}^{p_1} a_{n,1} e_n$, entonces $\|y_1 - u_1\| \leq 1/4^2\mathbf{K_b}$.

Consideremos ahora $y_2 = \sum_{n\geq p_1} a_{n,2} e_n$ con $\liminf \|y_2\| > 0$, y sea $p_2 \in \mathbb{N}$, $p_2 > p_1$, tal que si $u_2 = \sum_{n=p_1+1}^{p_2} a_{n,2}\, e_n$, entonces $\|y_2 - u_2\| \leq 1/4^3\mathbf{K_b}$.

Continuando con este procedimiento obtenemos una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es una base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ (ver definición 2.2.7), por lo tanto $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión equivalente a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por el teorema de perturbación de bases (ver teorema 2.2.8) como queríamos demostrar. $\square$

Observación: Si X es un espacio de Banach con una base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X convergente débil a cero pero no es convergente en norma, entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión equivalente a una base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Capítulo 3

Clases Especiales de Bases

3.1. Bases Incondicionales.

Hemos presentado en la sección anterior una amplia exposición sobre las bases de Schauder, sus propiedades y condiciones para su existencia. Para un estudio más amplio de las estructuras de los espacios de Banach son muy útiles propiedades especiales que puedan tener las bases. En esta sección presentamos las bases incondicionales y en la siguiente lo haremos con las bases contractivas y completamente acotadas. También demostraremos que la base de Haar es incondicional para $L_p[0,1]$ con $p > 1$, y en la sección 3.3 mostraremos una caracterización de los espacios reflexivos con base incondicional debida a James.

3.1.1. Definiciones

Definición 3.1.1 (Convergencia incondicional). En un espacio de Banach X la serie $\sum x_n$ converge incondicionalmente si todas las series formadas por diferentes reagrupamientos de los elementos de la serie convergen.

La definición anterior es equivalente a decir que $\sum x_{k_n}$ converge para cada subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. También es equivalente a decir que $\sum \pm x_n$ converge para cualquier selección de los signos $\pm$. En un espacio infinito dimensional la convergencia incondicional es más débil que la convergencia absoluta (en norma: convergencia de $\sum \|x_n\|$). Ver Albiac-Kalton [1][definición 3.1.1]

Definición 3.1.2 (Base incondicional). Una base $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X es incondicional si para cada $x \in X$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ converge incondicionalmente.

Aquí consideramos $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ como una base siempre que $(u_{\pi(n)})_{n=1}^{\infty}$ sea una base para cualquier permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. En un espacio infinito dimensional una base se dice absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n e_n\|$ converge, pero estas bases no se consideran importantes pues los espacios con este tipo de bases son isomorfos al espacio de sucesiones ℓ_1.

Si $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional de un espacio de Banach X y $\theta = (\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de signos $\pm$, definimos $S_\theta : X \to X$ como $S_\theta(\sum a_n u_n) = \sum \epsilon_n a_n u_n$. El supremo de $\|S_\theta\|$ es finito y se denomina constante de la base incondicional. Podemos definir una nueva norma $|||x||| = \sup_\theta \|S_\theta x\|$ llamada norma monótona incondicional y entonces todas las permutaciones de la base son monótonas. Comentamos finalmente que una base-bloque de una base incondicional es incondicional, y por el principio de perturbación podemos afirmar que todo subespacio infinito dimensional con base incondicional contiene una sucesión básica.

Ejemplos:

(1) La base unitaria $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional de los espacios c_0 y ℓ_1, cuyas propiedades nos servirán para caracterizar la reflexividad de los espacios de Banach en la sección 3.3. La base sumante de c definida por $f_n = (\overbrace{0, 0, ..., 0}^{n-1}, 1, 1, ...), n = 1, 2, 3, ...$ es no incondicional, es decir es condicional. Para la demostración nos hemos basado en Lindenstrauss [8][ver ejemplo pag. 20] la norma de $\sum_{n=1}^{m} a_n f_n$ es $\sup \left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \; k \in \{1, ..., m\}$. La base $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona, normalizada y no es incondicional porque $\|\sum_{i=1}^{n} f_i\| = n$, pero $\|\sum_{i=1}^{n} (-1)^i f_i\| = 1$.

(2) La base de Schauder del Sistema de Haar (ver Ejemplo 2.1.13 y Fig. 2.1) es una base incondicional para L_p[0,1], $1 < p < \infty$, y lo demostramos a continuación.

3.1.2. Incondicionalidad de la base de Haar para L_p[0,1], $1 < p < \infty$

.

Antes de demostrar la incondicionalidad presentamos un lema que prueba la existencia de una función especial u que emplearemos en el teorema. Sea:

$$p^* = max\{p, p/(p-1)\}, 1 < p < \infty,$$

$$v(x, y) = \left|\frac{x+y}{2}\right|^p - (p^* - 1)^p \left|\frac{x-y}{2}\right|^p .$$

Observación: $p/(p-1)$ es igual a q siendo p y q números conjugados, es decir $1/p + 1/q = 1$.

Con esta notación se enuncia el siguiente lema:

Lema 3.1.3. Existe una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

1. Las funciones $u(x, \cdot)$ y $u(\cdot, y)$ son cóncavas.

2. Las derivadas parciales u_x y u_y existen y son continuas.

3. $u(x, y) \leq 0$ si $xy = 0$.
Si $p \neq 2$ la desigualdad es estricta, a menos que $x = y = 0$.

4. $v \leq u$. □

Con este lema y utilizando las definiciones previas de la función v y p^* enunciamos y demostramos el siguiente teorema:

Teorema 3.1.4. El sistema de Haar es una base incondicional para L_p[0,1], $1 < p < \infty$. Si $p^* = max\{p, p/(p-1)\}$ y $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ la base de Haar en [0,1], entonces para todo $n \in \mathbb{N}, \epsilon_k = \pm 1$ si $1 \leq k \leq n$ y $a_1, ...a_n \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_k a_k h_k \right\|_p = (p^* - 1) \left\| \sum_{i=1}^{n} a_k h_k \right\|_p .$$

Demostración: Las funciones de Haar las definimos en el Ejemplo 2.1.13, definamos ahora las funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2, f_n = (f_{n,1}, f_{n,2})$ tal que:

$$f_{n,1} = \sum_{i=1}^{n} (\epsilon_k + 1) a_k h_k,$$

$$f_{n,2} = \sum_{i=1}^{n} (\epsilon_k - 1) a_k h_k.$$

Utilizando la funcion v que hemos definido antes de presentar el lema:

$$v(x, y) = \left| \frac{x+y}{2} \right|^p - (p^* - 1)^p \left| \frac{x-y}{2} \right|^p .$$

Es decir.

$$\int_0^1 v(f_n)(t)dt = \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_k a_k h_k \right\|_p^p = (p^* - 1) \left\| \sum_{i=1}^{n} a_k h_k \right\|_p^p .$$

Y entonces lo que debemos probar es que:

$$\int_0^1 v(f_n)(t)dt \leq 0.$$

Suponiéndo que existe la función v definida en el lema anterior y como $f_{1,1} f_{1,2} = 0$ implica que $u(f_1) \leq 0$ y $v(f_1) \leq 0$, y:

$$\int_0^1 v(f_1)(t)dt \leq 0.$$

Con esta desigualdad y según el lema 3.1.2 la función u es concava y las derivadas u_x y u_y existen y son continuas, por lo tanto $hk = 0$ implica que:

$$u(x+h, y+k) \leq u(x, y) + u_x(x, y)h + u_y(x, y)k. \tag{3.1}$$

Al ser $(\epsilon_n - 1)(\epsilon_n + 1) = 0$, entonces $(f_{n,1} - f_{n-1,1})(f_{n,2} - f_{n-1,2}) = 0$, es decir:

$$u(f_n) \leq u(f_{n-1}) + u_x(f_{n-1})(f_{n,1} - f_{n-1,1}) + u_y(f_{n-1})(f_{n,2} - f_{n-1,2}). \tag{3.2}$$

Integrando (3.2) obtenemos finalmente la siguiente desigualdad que prueba el teorema, es decir, el sistema de Haar es una base incondicional para $L_p[0,1]$:

$$\int_0^1 u(f_n)(t)dt \leq \int_0^1 u(f_{n-1})(t)dt. \tag{3.3}$$

□

Observación: En el caso de $p = 2$ las integrales de (3.2) $u_x(f_{n-1})(f_{n,1} - f_{n-1,1})$ y $u_y(f_{n-1})(f_{n,2} - f_{n-1,2})$ son nulas porque son productos de las funciones de Haar h_n que conforman un sistema ortonormal para $L_2[0,1]$.

3.2. Espacios Reflexivos con Bases contractivas.

En esta sección presentaremos algunas definiciones y resultados relacionadas con espacios de Banach X y sus duales X^* en términos de sus bases. Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base en un espacio de Banach X y sea $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ los funcionales asociados, entonces si X es reflexivo $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es base de X^*. El objetivo de esta sección es la caracterización dada por James de los espacios reflexivos con bases de Schauder. Una caracterización *geométrica* de la reflexividad se menciona en la proposición 5.0.11 del anexo.

3.2.1. Definiciones

Definición 3.2.1 (Inclusión canónica). Dado un espacio de Banach X se denota por J_X a la inclusión canónica del espacio en su bidual $J_X : X \to X^{**}$; esto es la aplicación que a cada vector $x \in X$ le asigna el funcional $J_X(x)$ de X^{**} dado por:

$$\begin{aligned} J_X(x): \quad x^* \quad &\to \quad K \\ J_X(x)x^* \quad &= x^*(x) \end{aligned}$$

Definición 3.2.2 (Espacio reflexivo). Se dice que un espacio de Banach X es reflexivo si verifica que la inclusión canónica en su bidual es sobreyectiva, es decir que $J_X(X) = X^{**}$.

A continuación presentamos dos proposiciones que nos servirán para entender mejor aspectos relevantes de la reflexividad. El lector interesado en este tema puede consultar a Beauzami[2], capítulo 3, que trata la reflexividad y la separabilidad en los Espacios de Banach.

Proposición 3.2.3. Un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si su dual X^* es reflexivo.

Demostración $\Rightarrow$ (condición necesaria): Supongamos que X es reflexivo. Por el teorema de Alaoglu (ver teorema 5.0.10) B_{X^*} es $\sigma(X^*, X)$-compacta, al ser X reflexivo $X^{**} = X$ y B_{X^*} es $\sigma(X^*, X^{**})$-compacta. Esto último quiere decir que la bola unidad de X^* con su topología débil es un conjunto débilmente compacto. Aplicamos ahora la proposición 5.0.11 de caracterización de la reflexividad y concluimos que X^* es reflexivo.

Demostración $\Leftarrow$ (condición suficiente): Supongamos que X^* es reflexivo, por la condición necesaria de este teorema sabemos que el dual de X^*, o sea X^{**}, es reflexivo. Por las definiciones 3.2.1 y 3.2.2 referentes a la inclusión canónica y espacios reflexivos podemos considerar a X como un subespacio cerrado de X^{**}. Por la proposición 3.2.4 concluimos que X es reflexivo. $\square$

Proposición 3.2.4. Si X es reflexivo e Y es un subespacio cerrado, entonces Y es reflexivo.

Demostración: Al ser X espacio de Banach, sabemos que la topologia débil de un subespacio cerrado Y es la topología débil de X restringida a Y, $\sigma(Y, Y^*) = \sigma(X, X^*)_{|_Y}$, y además la bola unidad de Y es cerrada con la topología débil de X. Es decir que B_Y es débilmente compacta, es decir B_Y es $\sigma(Y, Y^*)$-compacta. Aplicamos ahora la proposición 5.0.11 de caracterización de la reflexividad y concluimos que Y es reflexivo. $\square$

Definición 3.2.5 (**Bases contractivas y acotadamente completas**). Sea X un espacio de Banach y $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de X.
1. Se dice que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es contractiva (*shrinking basis*) si $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es base de X^*.
2. Se dice que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa (*boundedly complete basis*) si para toda sucesión de escalares (a_n) tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| < \infty$ la serie $\sum_{i\geq 1} a_i e_i$ converge en X.

Ver Albiac-Kalton[1][definiciones 3.2.9 y 3.2.12].

Observación 1: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base del espacio de Banach X, $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ los funcionales biortogonales asociados y $Z = \overline{span}(e_n^*)$, entonces las tres siguientes afirmaciones son equivalentes: $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa de X, $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base contractiva de Z y la aplicación $x \mapsto J_X(x)|_Z$ define un isomorfismo de X sobre Z^*.

Ver Albiac-Kalton[1][Teorema 3.2.15].

Observación 2: Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base del espacio de Banach X, $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ los funcionales biortogonales asociados y $Z = \overline{span}(e_n^*)$, entonces las tres siguientes afirmaciones son equivalentes: $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base contractiva de X, $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa de Z y $Z = X^*$.

Ver Albiac-Kalton[1][Teorema 3.2.17].

A continuación mostramos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.2.6. La base canónica de ℓ_1 no es contractiva porque su dual ℓ_∞ no tiene base por no ser separable.

Ejemplo 3.2.7. La base canónica de c_0 es contractiva pero no acotadamente completa porque $\|\sum_{i=1}^{n} e_i\| = 1$ para todo n pero la serie $\sum_{i\geq 1} e_i = (1, 1, 1, ... , 1, ...)$ no es convergente en c_0.

3.2.2. Caracterización de la Reflexividad de un espacio de Banach con base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en función de propiedades de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Teorema 3.2.8 (James). Si X tiene una base de Schauder $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces X es reflexivo si y sólo si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es contractiva y acotadamente completa.

Demostración $\Rightarrow$ (condición necesaria): Supongamos que X es reflexivo y sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ base de X y $Z = \overline{span}(e_n^*)$. Por lo tanto $X = Z^*$. Si no lo fuera, por el teorema de Hahn-Banach (ver teorema 5.0.8) se puede encontrar $0 \neq x^{**} \in X^{**}$ tal que $x^{**}(h) = 0$ para todo $h \in Z$. Por la reflexividad existe $0 = x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x)e_n \in X$ tal que $x = x^{**}$. En particular tendríamos $0 = x^{**}(e_n^*) = e_n^*(x)$ para todo n que implica que $x = 0$. Por lo tanto $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es contractiva. Si considermos $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ base de un espacio reflexivo$X^* = Z$, lo que acabamos de demostrar nos dice que $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base contractiva.

Ahora vamos a demostrar que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa. Considerando $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ como base del espacio reflexivo $X^* = Z = \overline{span}(e_n^*)$, es decir la sucesión de funcionales biortogonales $(J_X(e_n)|_Z)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Z^*. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares tal que

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| < 1.$$

Como $(\sum_{n=1}^{N} a_n J_X(e_n))_{n=1}^{\infty}$ está acotada en X^{**}, por el teorema de Alaoglu (ver teorema 5.0.10) existe un punto de acumulación $x^{**} \in X^{**}$ de la sucesión de escalares con la topología débil*. Si $h^* = x^{**}|_Z$, como

$$\lim_N \sum_{n=1}^{N} a_n j(e_n)(e_k^*) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} a_n e_k^*(e_n) = a_k,$$

se tiene que $h^*(e_k^*) = x^{**}(e_k^*) = a_k$ para todo k. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge en $Z^* = X$. Concluimos, según la definición 3.2.5, que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa.

Demostración $\Leftarrow$ (condición suficiente): Supongamos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es contractiva y acotadamente completa. Sea $Z = \overline{span}(e_n^*)$. Como la base es contractiva, entonces $Z = X^*$ (ver definición 3.2.5). y como la base es también acotadamente completa demostraremos a continuación que la aplicación $X \to Z^{**}$ es una inclusión canónica sobreyectiva y por lo tanto X es reflexivo (ver definiciónes 3.2.1 y 3.2.2).

Definimos la norma $\|x\|_Z \leq \sup\{|h(x)| : h \in Z, \|x\| \leq 1\}$. Sea $x \in X$, como $Z \subseteq X^*$, entonces $\|x\|_Z \leq \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*, \|x\| \leq 1\} = \|x\|$. Por lo tanto la aplicación $x \mapsto j(x)|_Z$ define una inclusión canónica $j(x)$ de X en Z^*.

Dado $h^* \in Z^*$ existe un $x^{**} \in X^{**}$ tal que $x^{**}|_Z = h^*$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} e^{**}(e_n^*)e_n$ converge a algún $x \in X$. Sea $j(x)|_Z = h^*$, y dado que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $j(x)|_Z(e_k^*) = e_k^* = e_k^*(x) = x^{**}(e_k^*) = h^*(e_k^*)$, y $j(x)$ es sobreyectiva. Concluimos entonces que $j(x)$ es una inclusión canónica sobreyectiva $X \to Z^*$ y como $X = Z^*$ hay una inclusión canónica sobreyectiva $X \to X^{**}$, y por lo tanto X es un espacio reflexivo. □

Para la demostración de este teorema nos hemos basado en Albiac-Kalton[1][sección 3.2]. El lector interesado en ver otro enfoque puede revisar el trabajo de James[6]. Este teorema de caracterización de espacios reflexivos nos permite tener una herramienta muy útil para determinar la reflexividad de los espacios de Banach. En los ejemplos 3.2.6 y 3.2.7 que presentamos antes vimos que ℓ_1 no tiene base contractiva ni c_0 tiene base acotadamente completa, por lo tanto ninguno de estos espacios es reflexivo. Sin embargo la base canónica de ℓ_p para $1 < p < \infty$ es contractiva y acotadamente completa, por lo tanto los espacios de sucesiones ℓ_p para $1 < p < \infty$ son espacios reflexivos. El dual de l_p es l_q, siendo $p, q > 1$ tal que $1/p + 1/q = 1$. Otra caracterización de la reflexividad se menciona en la proposición 5.0.11 del anexo.

3.3. Espacios Reflexivos con Bases Incondicionales.

En esta sección continuamos el estudio de las bases incondicionales que iniciamos en la sección 3.1. Aquí nos serviremos de los espacios ℓ_1 y c_0 que son los mas simples con bases incondicionales que tienen propiedades que también las tienen los espacios que los contienen. Sus propiedades nos permiten caracterizar propiedades de los espacios de Banach. A continuación presentamos unos resultados que nos permitirán demostrar otra caracterización de la reflexividad con base de Schauder incondicional.

Para el estudio de los siguientes teoremas nos hemos basado en James[6]. Estos resultados amplían de alguna forma las condiciones del teorema 3.2.8, se puede interpretar como una forma de saber qué condiciones deben cumplirse para que un espacio no sea reflexivo. No damos unas demostraciones exhaustivas de los teorema porque exceden los objetivos de este trabajo, aunque sí daremos las ideas principales que subyacen en las demostraciones. El lector interesado en profundizar en las demostraciones puede revisar el trabajo de James[6][lemas 1 y 2, teorema 1] o el texto de Albiac-Kalton[1][sección 3.3], ambos son textos muy formales y utilizan notaciones diferentes. En este trabajo seguimos la notación de Albiac-Kalton[1].

Teorema 3.3.1. Sea X un espacio de Banach y $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional de X, entonces $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es contractiva si y sólo si $\ell_1 \not\subset X$.

Demostración $\Leftarrow$ (condición necesaria): Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ no fuera contractiva entonces existen funcionales $e^* \in X^*$ tal que $e^*_{\overline{span}\{e_i:i\geq n\}}$ no converge a 0. En este caso se pueden construir una serie de bases-bloque (u_n) de (e_n) que sería una sucesión básica incondicional equivalente a la base canónica del espacio l_1.

Demostración $\Rightarrow$ (condición suficiente): Si $ll_1 \subset X$, su dual l_∞ sería isomorfo a un cociente de X^* que no sería separable y entonces (en) no sería base contractiva(ver ejemplo 3.2.6 y Beauzami[2], capítulo 3, que trata la reflexividad y la separabilidad en los Espacios de Banach). $\square$

Teorema 3.3.2. Sea X un espacio de Banach y $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional de X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
1. $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa.
2. c_0 no está contenida en X.
3. X es débilmente secuencialmente completo.

Demostración: A continuación resumimos las ideas generales para la demostración de las diversas implicaciones entre las tres condiciones de este teorema. Al lector interesado en una demostración completa le remitimos a Facenda [4][teorema 4.1.3].

(2) $\Rightarrow$ (1): Asumimos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ no es acotadamente completa, fijemos $(a_j)_j$ tal que $\sup_n \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right\| < \infty$ pero $\sum a_j e_j$ no converge en X (ver definición 3.2.5). Podemos construir entonces una serie de bases-bloque (u_n) de (e_n) que sería una sucesión básica incondicional equivalente a la base canónica del espacio c_0.

(1) $\Rightarrow$ (3): Asumimos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa, entonces debemos demostrar que hay una sucesión (y_n) que es débilmente Cauchy-convergente a 0.

(3) $\Rightarrow$ (2): Es inmediato porque si X es es débilmente secuencialmente completo, entonces no puede contener a c_0, porque no es es débilmente secuencialmente completo. $\square$

3.3.1. Caracterización de la Reflexividad con base de Schauder incondicional en función de contener subespacios isomorfos a c_0 y l_1.

Teorema 3.3.3 (James). Sea X un espacio de Banach con $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional, entonces X es reflexivo si y sólo si ni c_0 ni ℓ_1 son isomorfos a un subespacio de X.

Demostración $\Rightarrow$ (condición necesaria): Suponiendo que X es reflexivo, entonces la base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es contractiva y acotadamente completa según el teorema 3.2.8. Entonces según el teorema 3.3.1 y el teorema 3.3.2 (condición 2) ni c_0 ni ℓ_1 son isomorfos a un subespacio de X.

Demostración $\Leftarrow$ (condición suficiente): Suponiendo que ℓ_1 no es isomorfo a un subespacio de X, entonces por el teorema 3.3.1 la base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es contractiva. Suponiendo que c_0 no es isomorfo a un subespacio de X, entonces por el teorema 3.3.2 (condiciones 1 y 2) la base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa. Entonces aplicando el teorema 3.2.8 concluimos que X es un espacio reflexivo. El lector puede consultar una demostración más elaborada en James[6][teoremas 1,2 y 3] $\square$

3.4. Espacios sin bases Incondicionales.

Vamos a terminar este TFM presentando ejemplos de espacios de Banach que no tienen bases incondicionales. El espacio $C([0,1])$ y el espacio $L_1([0,1])$ no son reflexivos y no tienen bases incondicionales. Mencionamos, sin demostrar, que $L_1([0,1])$ no tiene base incondicional porque aunque sea débilmente secuencialmente completo no es isomorfo a su dual. James construyo un espacio de Banach separable denominado el espacio de James,J, de sucesiones de 2-variaciones acotadas que no es reflexivo pero sí isométricamente isomorfo a su bidual J^{**}. Tiene base pero no es una base incondicional. Este espacio es interesante porque sirve de contraejemplo al siguiente problema:

Problema 3.4.1 (**Espacio Reflexivo y separable**). ¿ Debe ser reflexivo un espacio de Banach si su bidual es separable ? Respuesta: NO, contraejemplo espacio de James,J.

Problema 3.4.2 (**Espacio no Reflexivo e isométricamente isomorfo**). ¿ Puede un espacio de Banach ser isométricamente isomorfo a su bidual aunque no sea reflexivo ? Respuesta: SI, Espacio de James,J, con norma modificada.

A continuación desarrollamos el espacio de James basándonos en Lindenstrauss[8] [ejemplo 1.d.2 pag. 25] que presenta estos problemas a través de un ejemplo con una visión clásica, el lector puede consultar un desarrollo más formal y moderno en Albiac-Kalton[1][sección 3.4]. Nosotros vamos a desarrollar sólo el problema 3.4.1. Antes, necesitamos la siguiente proposición:

Proposición 3.4.3. Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$es una base contractiva de un espacio de Banach X, entonces X^{**} se identifica con una sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| < \infty$.

3.4.1. El Espacio de James J que tiene codimensión 1 en su bidual J^{**}

Ejemplo 3.4.4. El Espacio de James J: Es un espacio de Banach con base de Schauder con imagen canónica de codimensión 1 en su bidual J^{**}.

Antes de presentar el espacio de James, debemos señalar que aunque J sea isométrico a J^{**}, el espacio J no es reflexivo. Al ser J^{**} separable no puede tener subespacios isomórficos ni a c_0 ni a l_1.

El espacio de J está formado por una suceśon de escalares $x = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tal que:

(i)$\|x\| = \sup \frac{1}{\sqrt{2}}[(a_{p1} - a_{p2})^2 + (a_{p2} - a_{p3})^2 + ... + (a_{m-1} - a_{pm})^2 + (a_{pm} - a_{p2})^2]^{1/2} < \infty$.

(ii)$\text{lím}_n a_n = 0$.

para todo m y $p_1 < p_2 < ... < p_m$.

La base unitaria $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona y contractiva respecto a la norma definida en (i). Los vectores $\{e_1 + e_2 + ... + e_n\}_{n=1}^{\infty}$ tienen norma 1 pero no convergen débilmente en J y por lo tanto J no es reflexivo.

La proposición 3.4.3 nos dice que J^{**} consiste en todas las sucesiones $(a_1, a_2, ...a_n, ...$ con $\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| < \infty$, es decir las sucesiones con norma definida en (i) y como (i) implica la existencia de $\text{lím}_n a_n$ inferimos que J^{**} es la envolvente convexa de J, es decir la imágen canónica de J en J^{**}. Dicho de otro modo J tiene codimensión 1 en su bidual J^{**} como queríamos demostrar. $\square$

Capítulo 4

Conclusiones.

Este TFM nos ha permitido iniciarnos en el campo de las Geometría de los Espacios de Banach. Nos hemos basado en el estudio de las bases de Schauder, condicionales, contractivas y completamente acotadas a través de diversas secciones hemos presentando definiciones básicas y los resultados mas utilizados para caracterizar diversas propiedades de los espacios de Banach reflexivos con bases incondicionales y con bases contractivas y completamente acotadas. También hemos estudiado el espacio de James J y su bidual J^{**}, ejemplo importante de espacios sin bases incondicionales.

Como continuación futura de este trabajo existen diversas lineas de investigación, algunas de las cuales mencionamos a continuación. Los espacios ℓ_1 y c_0 y los subespacios de ℓ_p ofrecen amplias posibilidades de estudio, estos espacios tienen bases incondicionales y propiedades que también las tienen los espacios que los contienen. En este TFM solo hemos tratado la caracterización de los espacios reflexivos, La teoría de estos espacios es amplia y comprende entre otros temas: el teorema de Rosenthal, el espacio de Tsirelson y la teoría de Ramsey.

Otro campo de estudio es el análisis de las propiedades de los espacios de Banach en función de las propiedades de los subespacios de dimensión finita y las propiedades del espacio infinito dimensional lo que nos llevaría al estudio del teorema de Dvoretzky entre otros. Temas más avanzados y con amplias posibilidades de desarrollo son el estudio de las aplicaciones no lineales en espacios de Banach, las bases tipo Greedy y el algoritmo de Greedy para el problema de la aproximación.

Capítulo 5

Anexo: Definiciones y Teoremas

En este anexo presentamos algunas definiciones y resultados que se emplean a lo largo del trabajo.

Teorema 5.0.1 (de Baire-Haussdoff). Todo espacio de Banach X es un conjunto de segunda categoría, es decir, que toda familia numerable de conjuntos no vacíos y cerrados (A_n) que cubra al espacio; es decir que verifique que $\bigcup A_n = X$; ha de cumplir que al menos uno de los conjuntos A_n tiene interior no vacío.

Teorema 5.0.2 (de la acotación uniforme). Dada una familia de operadores $(T_i)_{i\in I} \subset L(X;Y))$; si para cada punto $x \in X$ el conjunto $(\|T_i(x)\|\,; i \in I)$ es acotado, entonces el conjunto $(\|T_i\|\,; i \in I)$ es también acotado.

Teorema 5.0.3 (de la aplicación abierta). Dado $T \in L(X;Y)$; si T es sobreyectiva; es decir, que $T(X) = Y$; entonces T transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos.

Definición 5.0.4 (Gráfica). Dada una aplicación lineal $T : X \to Y$ se denomina gráfica de T y se denota por $GrafT$ al siguiente conjunto: $GrafT = (f(x, T(x)); x \in X \subset X \times Y$.

Teorema 5.0.5 (de la gráfica cerrada). Una aplicación lineal $T : X \to Y$ es continua si y solo si se verifica que $GrafT$ es un conjunto cerrado

Definición 5.0.6 (Inclusión canónica). Dado un espacio de Banach X se denota por J_X a la inclusión canónica del espacio en su bidual $J_X : X \to X^{**}$; esto es la aplicación que a cada vector $x \in X$ le asigna el funcional $J_X(x)$ de X^{**} dado por:

$$J_X(x) : \quad x^* \quad \to \quad K$$

$$J_X(x)x^* \; = x^*(x)$$

Definición 5.0.7 (Espacio reflexivo). Se dice que un espacio de Banach X es reflexivo si verifica que la inclusión canónica en su bidual es sobreyectiva, es decir que $J_X(X) = X^{**}$.

Teorema 5.0.8 (Hahn-Banach). Dado un espacio de Banach X y un subespacio vectorial cerrado suyo $Y \subset X$ para cada funcional $y* \in Y^*$ existe un funcional $x^* \in X^*$ que verifica:
1. $x^*(y) = y * (y)$ para todo $y \in Y$
2. $\|x^*\| = \|y^*\|$;

es decir, que los funcionales definidos en los subespacios vectoriales cerrados se pueden extender por continuidad al espacio total conservando la norma. Ver Hernando[5][teorema 1.13].

Definición 5.0.9 (topología débil). Si X es un espacio de banach, la topología débil se define como la topología más débil en X tal que cada $x^* \in X^*$ es continua. Se denota también como topología-$\sigma(X, X^*)$.
Observación: Para indicar que $(x_n) \in X$ converge débilmente a $x_0 \in X$ se expresa como $x^*(x_n) \stackrel{w}{\to} x^*(x_0)$ o $x^*(x_n) \stackrel{\sigma(X,X^*)}{\to} x^*(x_0)$

Teorema 5.0.10 (Alaoglu). Si X es un espacio de Banach, entonces la bola unidad B_{X^*} es un conjunto compacto con la topología débil* de X^*. Ver Hernando[5][teorema 1.15].

Observación: Esto quiere decir que B_{X^*} es $\sigma(X^*, X)$-compacta. Dicho de otro modo la bola unidad de X^*, B_{X^*}, con su topología débil es un conjunto débil-estrella compacto.

Proposición 5.0.11 (Caracterización de la reflexividad). X es reflexivo si y sólo si la bola unidad de X, B_X, con su topología débil es un conjunto débilmente compacto (B_X es $\sigma(X, X^*)$-compacta).

Una demostración formal se puede encontrar en Beauzami [2][capítulo 3, proposición 1].

Bibliografía

[1] ALBIAC, FERNANDO Y NIGEL J. KALTON, *Topics in Banach space theory, Second Edition.* volumen 233 de Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2016.

[2] BEAUZAMY, BERNARD *Introduction to Banach spaces and their geometry.* North-Holland, Mathematics Studies 68, Amsterdam, 1982.

[3] ENFLO, PER, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.* Acta Math., 130:309317, 1973, ISSN 0001-5962. http://dx.doi.org/10.1007/BF02392270.

[4] FACENDA AGUIRRE, JOSÉ A., *Geometría de Espacios de Banach.* Universidad de Sevilla, Secretariado de Publicaciones, 1998.

[5] HERNANDO, BEATRIZ, *Apuntes de la asignatura Operadores en espacios de Banach.* Máster en Matemáticas Avanzadas, UNED, 2017.

[6] JAMES, ROBERT C. *Bases and reflexivity of Banach spaces.* Ann. of Math. (2), 52:518527, 1950, ISSN 0003-486X. http://dx.doi.org/10.2307/1969430

[7] JOHNSON, WILLIAM B. Y JORAM LINDENSTRAUSS *Basic concepts in the geometry of Banach spaces.* En Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, páginas 1-84,. North-Holland, Amsterdam, 2001. http://dx.doi.org/10.1016/S1874-5849(01)80003-6

[8] LINDENSTRAUSS, JORAM Y LIOR TZAFRIRI *Classical Banach spaces I.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, ISBN 3-540-08072-4. Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92.

[9] VALDIVIA UREÑA, MANUEL, *Análisis Matemático V, volumen 1.* UNED 1988.

[10] YOSIDA, KOSAKU *Functional Anaysis, sixth edition.* Springer-Verlag, Berlin, 1980.