



UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

TRABAJO FIN DE MASTER

MASTER: MATEMÁTICAS AVANZADAS
ESPECIALIDAD: ANÁLISIS MATEMÁTICO

**TEORIAS MUSICALES TRANSFORMACIONAL
Y NEO-RIEMANNIANA**

Autor: Víctor Manuel de Pablo Basurto
Tutor: Javier Pérez Álvarez

Fecha: 8 de Octubre de 2014

*Dedicado a mis dos notas musicales:
Victoria y Marifé.*

*Unas veces consonante,
muchas menos disonante,
van llenando de música,
cada día de mi vida.*

Resumen

Las teorías musicales Transformacional y Neo-Riemanniana ofrecen un nuevo paradigma teórico musical para la construcción de modelos analíticos útiles en el estudio de las percepciones e intuiciones musicales. En ellas se definen unos sistemas musicales donde actúan ciertas transformaciones que se pueden modelar como estructuras de grupos matemáticos. Es sabido que una característica importante de la música es el uso de simetrías melódicas y armónicas, y que en matemáticas el concepto de simetría está íntimamente ligado a las estructuras de grupo. El objetivo de este TFM es introducir y describir los desarrollos matemáticos de estas teorías, profundizando en los aspectos teóricos de base así como en los resultados más relevantes obtenidos. Se trata de un trabajo matemático orientado a matemáticos. Dado que es necesaria una base musical suficiente para comprender el alcance estructural de la expresión musical, se elabora un primer capítulo de introducción musical donde se presentan los elementos musicales relevantes que aparecerán a lo largo del trabajo. A continuación una breve introducción histórica para dar paso a las propias teorías musicales Transformacional y Neo-Riemanniana. Finalmente, como colofón a estas teorías, se muestran algunos ejemplos de análisis sobre piezas musicales reales utilizando las técnicas descritas.

Abstract

Transformational and Neo-Riemannian music theories propose a new musical theoretical paradigm for building analytical models useful in the study of the musical perceptions and intuitions. They define musical systems where act certain transformations that can be modeled as structures of mathematical groups. It is known that an important feature of the music is the use of melodic and harmonic symmetries, and in mathematics the concept of symmetry is intimately linked to the group structures. The aim of this thesis is to introduce and describe the mathematical developments of these theories, exploring basic theoretical aspects as well as the most relevant results obtained. It is a mathematical work oriented to mathematicians. Since adequate musical knowledge is required to understand the structural scope of musical expression, a first chapter of musical introduction is made, where relevant musical elements that appear throughout the work are presented. Then, a brief historical introduction to make way for the own Transformational and Neo-Riemannian music theories. Finally, as culmination of these theories, some examples of analysis for real music pieces are made using the techniques described.

TRABAJO FIN DE MASTER

TEORIAS MUSICALES TRANSFORMACIONAL Y NEO-RIEMANNIANA

INDICE

1.- Introducción	2
2.- Introducción Musical	3
3.- Introducción Histórica	15
4.- Teoría Musical Transformacional	19
4.1.- Sistemas de Riemann (Riemann systems)	19
4.1.1.- Grupo de desplazamiento GSHIFT (shift group)	21
4.2.- Intervalos y Transformaciones Musicales Generalizados	24
4.2.1.- GIS. Características Formales	27
4.2.2.- GIS. Transposiciones e Inversiones	30
4.2.3.- G-Torsors. Grupo Simple Transitivo STRANS	38
4.2.4.- Transformaciones Triádicas no interválicas	40
4.3.- Transformaciones Triádicas Uniformes. UTTs.	42
4.3.1.- Tríadas y UTTs	42
4.3.2.- UTTs Riemannianas	48
4.3.3.- Grupos Simple Transitivos de UTTs	52
4.3.4.- La estructura del grupo UTT	57
5.- Teoría Musical Neo-Riemanniana	66
5.1.- La red tonal (Tonnetz) y el grupo PLRD.	66
5.2.- Dualismo armónico. El grupo S/W (Schritts/Wechsels)	70
5.3.- Tríadas parsimoniosas	75
5.4.- Dualidad T/I \leftrightarrow PLR	78
6.- Ejemplos	83
6.1.- Wagner	83
6.2.- Beethoven	84
7.- Conclusiones	86
8.- Bibliografía	88

1.- Introducción

El primer párrafo de este trabajo es obligado emplearlo en aclarar el título escogido. Cualquier matemático se estará preguntando qué hace Riemann involucrado en teoría musical, no parece que en su amplio espectro productivo hubiera algo relacionado con la música. Bien, el título no se refiere a Bernard Riemann (1826-1866), sino a Hugo Riemann (1849-1919). Siendo ambos alemanes y haber coexistido en el tiempo, el primero es uno de los mayores matemáticos de la historia y el segundo un musicólogo cuyas innovadoras ideas fueron retomadas a finales del siglo XX, germinando una corriente de análisis teórico musical denominada “Neo-Riemannian Music Theory”.

Mucho se ha escrito sobre la relación de las matemáticas y la música, el propio Leibniz (1646-1716) dijo: “*La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando*”, lo que puede interpretarse como un ejercicio aritmético secreto. Sabemos que una cualidad importante de la música, explotada normalmente en la mayoría de composiciones, es el uso de simetrías melódicas y armónicas. También sabemos que en matemáticas el concepto de simetría está íntimamente ligado a las estructuras de grupo. Pues bien, la línea argumental de este trabajo se basa en la búsqueda de estructuras de grupo que describen determinadas simetrías, constituidas por una serie de transformaciones mediante las cuales se perfila la progresión melódica y armónica con la que se desarrollan ciertos fragmentos musicales.

La música cromática del siglo XIX, especialmente la del famoso compositor Richard Wagner, pero también Liszt e incluso pasajes de los clásicos Mozart, Beethoven o Schubert, supuso para los teóricos musicales un verdadero reto analítico. Se encontraban con movimientos tonales y cadencias armónicas completamente incoherentes y alejadas de los paradigmas clásicos, lo que les obligó a desarrollar nuevos conceptos sobre los que establecer modelos analíticos. En esa búsqueda destacaron los trabajos de Hugo Riemann, introduciendo una serie de pensamientos novedosos que con el paso del tiempo fueron ganando fuerza, como veremos a lo largo de este trabajo.

A finales del siglo XX, en los 1980's, el músico teórico David Lewin (1933-2003) publica unos artículos y libros que darán lugar a una nueva rama de la teoría musical, denominada Teoría Transformacional. Lewin, en la construcción de modelos analíticos convincentes para sus percepciones e intuiciones musicales define unos sistemas musicales más o menos abstractos donde actúan ciertas transformaciones que se pueden modelar como estructuras de grupos matemáticos. Para el desarrollo de su teoría Transformacional emplea gran cantidad de conceptos y técnicas descritas por Hugo Riemann, adaptándolas a su modelo con el fin de establecer una teoría consistente. Su libro “*Generalized Musical Intervals and Transformations*” (GMIT-1987) es considerado seminal en el nacimiento de las teorías musicales Transformacional y Neo-Riemanniana.

La teoría musical Neo-Riemanniana es una depuración y profundización de la teoría Transformacional aplicada a estructuras armónicas denominadas tríadas. Como se verá más adelante, debe su nombre a Hugo Riemann por los arduos trabajos de éste en lo que denominó dualismo armónico, un innovador concepto sobre la construcción y percepción sensorial de tríadas mayores y menores.

El presente trabajo tiene como objetivo introducir y describir los desarrollos matemáticos de estas teorías, profundizando en los aspectos teóricos de base así como en los resultados más relevantes que se han obtenido, sintetizando el estado del arte sobre esta materia y abreviando en lo posible los conceptos musicales involucrados, pero sin perder de vista en ningún momento el contenido musical subyacente.

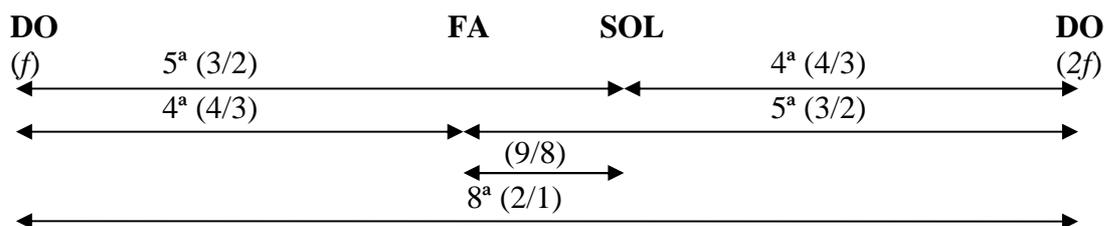
Se trata de un trabajo matemático orientado a matemáticos que no tienen por qué tener conocimientos musicales amplios, pero sí es necesaria una base musical suficiente para comprender el alcance estructural de la expresión musical. Para ello se elabora un primer capítulo de introducción musical, donde se presentan los elementos musicales relevantes que aparecerán de una forma u otra a lo largo del trabajo. A continuación una breve introducción histórica para dar paso a las propias teorías musicales Transformacional y Neo-Riemanniana. Finalmente se desarrollan dos subgrupos importantes de transformaciones, T/I y PLR, y se demuestra su dualidad como centralizadores. Como colofón a estas teorías se muestran algunos ejemplos de análisis sobre piezas musicales reales utilizando las técnicas descritas.

Este TFM se espera que sirva como base para introducirse y especializarse en estas teorías, así como adquirir los conocimientos y destrezas necesarios para iniciar posibles investigaciones futuras más específicas.

2.- Introducción Musical

Me gustaría empezar este capítulo con una pregunta: ¿Qué es más antiguo, las matemáticas ó la música? Evidentemente yo no estoy en condiciones de responder a esta pregunta, pero lo que sí sabemos es que hace muchos años, allá por la antigua Grecia, la prestigiosa escuela matemática pitagórica ya se interesaba por la música. Parece ser que el propio Pitágoras (siglo VI a.C.) observando los golpes de diferentes martillos en el yunque se dio cuenta de las propiedades consonantes o afines de determinados sonidos y empezó sus investigaciones analizando ciertas características de los objetos que los producían. Por ejemplo, haciendo vibrar una cuerda se genera un sonido, si se reduce la longitud de la cuerda a la mitad este sonido guarda una relación con el primero, de modo que ambos producen una sensación auditiva semejante, es decir, presentan cierta afinidad o **consonancia**. Lo mismo ocurre si la relación entre longitudes guarda una proporción entera, a saber, $3/2$, $4/3$, etc. se obtiene una percepción agradable. Experimentando con este instrumento (monocordio) diseñaron lo que hoy conocemos como escala musical diatónica en su versión pitagórica.

Utilizando una nomenclatura actual, sabiendo que una característica fundamental de los sonidos es su frecuencia ó altura, llamamos **octava** al intervalo que hay entre una frecuencia f y otra de valor doble $2f$. Vamos a llamar **tónica** a la frecuencia f , luego la relación de octava es $2/1$. Entre f y su octava $2f$ se encuentra la frecuencia $3/2f$, denominada **quinta justa** (5^a), luego veremos por qué, con lo que la quinta se encuentra a una distancia de $3/2$ de la tónica. Así mismo, la quinta se encuentra a $4/3$ de la octava, a esta relación la llamamos **cuarta justa**. Ya tenemos los cuatro puntos claves de la escala pitagórica: “*la extensión de la octava es una quinta más una cuarta*”, decía el pitagórico Filolao (siglo V a.C.).



Con una visión matemática de estas relaciones, destacamos ciertas propiedades:

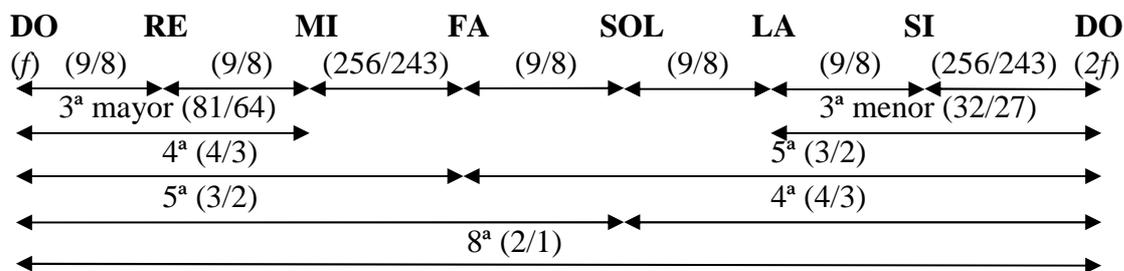
- Simetría, las notas FA y SOL están equiespaciadas respecto a los extremos (octava).
- El intervalo de quinta es la media aritmética de la octava $(a+b)/2$.

- El intervalo de cuarta es la media armónica de la octava $2ab/(a+b)$.
- ¿Y la media geométrica \sqrt{ab} ? Vale $\sqrt{2}$ y se encuentra entre el FA y el SOL. Más adelante veremos que coincide con el FA# (FA sostenido) de la escala cromática.

A la distancia entre la cuarta y la quinta, $9/8$, se le llama intervalo de **tono**, y con él ya podemos extender la **escala diatónica pitagórica** completa. Está compuesta de 7 notas DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI y se repite cíclicamente, de modo que la octava nota volvería a ser un DO, de aquí le viene el nombre de octava. Lo mismo ocurre con el resto de notas, es decir, la misma nota en escalas consecutivas están separadas por un intervalo de octava.

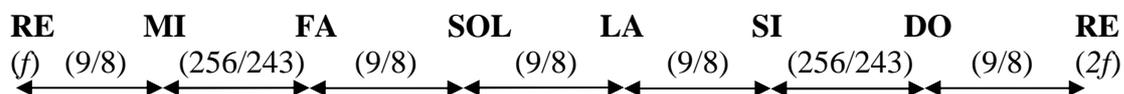
Vemos que entre todas las notas hay una distancia o intervalo de un tono ($9/8$) excepto de MI a FA y de SI a DO que la distancia es $256/243$. A este intervalo se le denomina **semitono** porque su distancia es de aproximadamente la mitad de un tono, a saber: $(256/243)^2 \cong 9/8$.

En la escala completa cobran sentido las denominaciones de cuarta y quinta, pues corresponden a las notas situadas en cuarto y quinto lugar de la escala respectivamente, siendo DO la primera. Así mismo, cabe destacar la aparición de dos intervalos nuevos, importantes como se verá más adelante, son la **tercera mayor** ($81/64$) y la **tercera menor** ($32/27$), fruto de la composición de dos tonos y tono más semitono respectivamente.



Una vez obtenida la escala diatónica y los intervalos más relevantes mencionemos el **tritonio**, formado por tres tonos, de FA a SI. En la edad media era llamado el intervalo del diablo por su sonido siniestro y es posible que su uso estuviera prohibido por la iglesia.

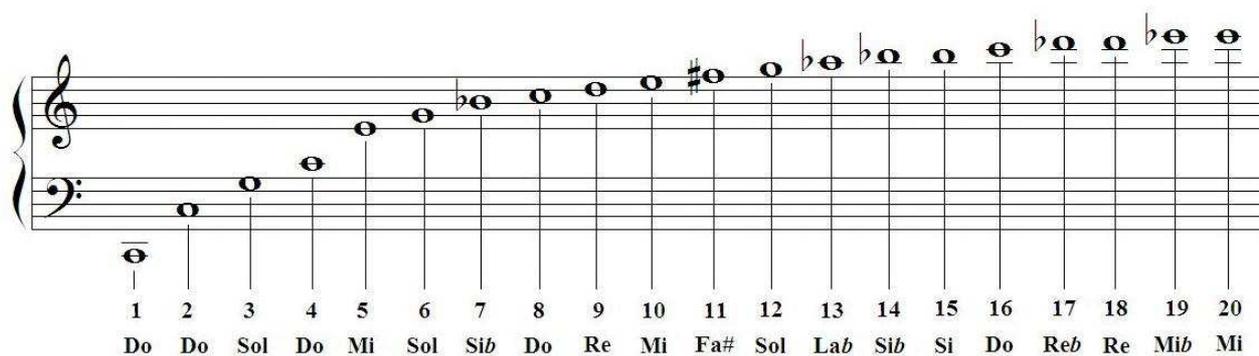
Si empezamos la escala desde RE, aparece una nueva relación de simetría: la distribución de tonos y semitonos es igual ascendiendo o descendiendo en la escala musical. Esta propiedad ya se conocía y fue explotada en la música religiosa de la edad media, donde los clérigos componían sus piezas religiosas partiendo de RE.



Otra propiedad importante de la escala musical es lo que se conoce como **círculo de quintas**. Si se van sucediendo intervalos de quinta recorriendo octavas sucesivas se comprueba que al cabo de 12 intervalos volvemos a tener la misma nota pero en la séptima octava, esto es: $(3/2)^{12} \cong 2^7$. Realmente no son exactamente iguales, esto ya lo conocía Pitágoras, a la diferencia la denominaron **coma pitagórica** ($(3/2)^{12}/2^7 = 1.0136$). Esta pequeña diferencia provoca una **disonancia** entre ambas notas que se identificaba como el aullido de un lobo, por eso también se denomina comúnmente como **quinta del lobo**. Aún así este círculo de quintas jugará un importante papel en el futuro, cuando se empiece a

experimentar con la denominada afinación temperada ó temperamento igual. Y como no, será otro gran matemático el encargado de ello, nos referimos a Marin Mersenne (1588-1648).

Aunque en aquella época los pitagóricos no eran conscientes de la explicación física del fenómeno, con el avance de la ciencia los conocimientos en acústica no hicieron sino corroborar sus apreciaciones. Específicamente, el descubrimiento de la **serie armónica**, que es el conjunto de sonidos derivados de un fundamental que se obtienen de las diversas particiones de una cuerda $1/2$, $1/3$, $1/4$, ... , siendo el sonido de la cuerda completa el fundamental. Cuando una cuerda de longitud L se hace vibrar, no solo produce una onda de longitud L , sino que además se forman dos ondas de $L/2$., tres de $L/3$, cuatro de $L/4$ y así sucesivamente. Este fenómeno es general para cualquier instrumento musical, sea de cuerda, viento ó percusión. El conjunto de armónicos es la característica que define la particularidad del sonido de cada instrumento, lo que normalmente se conoce como **timbre**.



La generalización de este fenómeno, que por otra parte fue un hito matemático crucial para el desarrollo tecnológico actual, se debe a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), quién demostró que cualquier señal ó función periódica se puede descomponer en una serie trigonométrica convergente, llamada serie de Fourier. Cuando la señal referida es un sonido, la serie de Fourier no es ni más ni menos que la serie armónica.

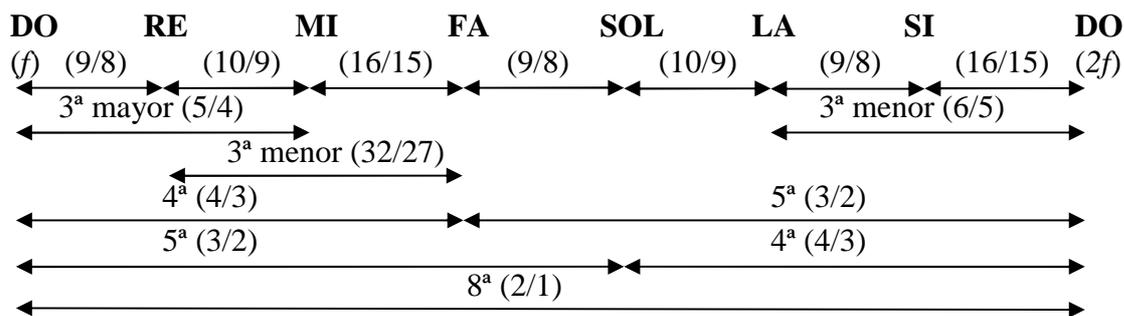
La serie armónica descompone un sonido en el tono o frecuencia fundamental f y una sucesión de armónicos de frecuencia múltiplo entero del fundamental, $2f$, $3f$, $4f$, ... Con ella se explica fácilmente por qué un sonido de frecuencia una octava superior es consonante o agradable al oído con la tónica, porque coincide su fundamental $2f$ y su desarrollo armónico $4f$, $6f$... con armónicos de la tónica. Esta coincidencia total de armónicos hace que la relación de octava sea la más consonante de todas, percibiendo ambos sonidos como si fueran prácticamente el mismo. Análogamente, una quinta, de frecuencia $3/2f$, tiene su segundo armónico en $3f$, el cuarto en $6f$, etc., es decir, coinciden todos sus armónicos pares. Para la cuarta, de frecuencia $4/3f$, vemos que el tercer armónico es $4f$, el sexto $8f$, etc... En general, cualquier sonido de frecuencia m/nf tendrá sus armónicos múltiplos de n coincidentes con la tónica f . Esta es la prueba física de la sensación agradable que experimentaban los pitagóricos al percibir sonidos generados mediante una relación numérica m/n .

Pitágoras fue aun más allá al definir el silencio como música, el oído humano lo percibe por la simple razón de ser continuo, carente de intervalos.

Unos años después el también griego Aristógenes (siglo IV a.C.), discípulo de Aristóteles, introdujo algunas modificaciones a la escala musical. El procedimiento de Aristógenes consiste en elegir los sonidos de

la escala diatónica de manera que los intervalos que forman cada sonido con la tónica están tomados de la serie armónica. De la figura de la serie armónica se extrae que el tercer armónico es SOL, el quinto MI, el noveno RE y el 15° SI. Trasladándolos a la primera octava dan las siguientes relaciones: SOL (3/2), MI (5/4), RE (9/8), SI (15/8). Básicamente aparece una nueva relación entera para el intervalo de tercera mayor, esta es 5/4. Recordemos que en la escala de Pitágoras el intervalo de tercera mayor aparece sobrevenido con el valor 81/64, es decir como composición de dos tonos consecutivos de valor 9/8. Por tanto, la primera diferencia se produce en el intervalo de 3ª mayor, con un error de $(91/64)/(5/4) = 1.0125$. El resto de intervalos importantes 8ª (2/1), 5ª (3/2), 4ª (4/3) y tono (9/8), los mantiene.

La nueva escala de Aristógenes presenta el siguiente aspecto:



Comparando ambas escalas, la de Pitágoras y la de Aristógenes, podemos resumir que:

- Las dos escalas mantienen las relaciones de 8ª (2/1), 5ª (3/2), 4ª (4/3) y Tono (9/8). Si bien en la escala de Aristógenes existen dos relaciones distintas para el intervalo de tono, 9/8 y 10/9, la diferencia es $(9/8)/(10/9) = 1.0125$.
- El intervalo de semitono es diferente, 16/15 frente a 256/243, la diferencia es $(16/15)/(256/243) = 1.0125$.
- La 3ª mayor es diferente, 5/4 frente a 81/64, la diferencia es $(5/4)/(81/64) = 1/1.0125$.
- En la escala de Aristógenes hay dos 3ªs menores, una igual de 32/27 y otra distinta de 6/5, la diferencia es $(6/5)/(32/27) = 1.0125$.
- De lo anterior se deduce que hay cuatro notas coincidentes: DO, RE, FA y SOL, y tres ligeramente distintas: MI, LA y SI, con un error de 1.0125, es decir, un 1.25%.
- La escala pitagórica parece más sencilla porque tiene solamente dos clases de separación entre intervalos: 9/8 y 256/243, mientras que la de Aristógenes presenta tres: 9/8, 10/9 y 16/15. Si bien las relaciones en esta última son más simples y el intervalo de semitono pitagórico 256/243 puede resultar complicado de afinar.
- A propósito del círculo de quintas, la secuencia diatónica de quintas FA, DO, SOL, RE, LA, MI, SI, es exacta para la escala de Pitágoras. En la escala de Aristógenes se puede observar que la quinta entre RE y LA tiene una distancia irregular de 40/27, distinta de 3/2, el error es $(3/2)/(40/27) = 1.0125$.
- Sin embargo, los valores de la serie armónica correspondientes a las notas MI (5/4) y SI (15/8) coinciden en la escala de Aristógenes y no en la pitagórica.
- Un detalle interesante para cualquier matemático es que todas las relaciones de distancias de intervalos en la escala de Pitágoras se obtiene mediante fracciones compuestas por los números primos 2 y 3, esto es, se pueden obtener con la fórmula $2^a 3^b$ para enteros a y b adecuados. En la

escala de Aristógenes entra en juego el número primo 5, de modo que con $2^a 3^b 5^c$ para enteros a, b y c adecuados obtenemos las relaciones de los intervalos.

Nos encontramos con dos escalas muy parecidas pero diferentes, la cuestión es ¿Cuál es mejor? Para el oído en ambas escalas suenan perfectamente correlativas todas las notas, sin embargo en realidad tienen diferencias apreciables en cuanto a la relación entre frecuencias. De hecho, la mayoría de los oídos no consiguen percibir la diferencia melódica de una “coma” en la entonación. Pitágoras era partidario del cálculo matemático para construir la escala, mientras que Aristógenes creía que era el oído el que debía decidir, lo que al parecer supuso en la época un asunto de discusión.

Para los griegos, que entonaban melodías sin acompañamiento, era preferible la escala pitagórica por ser más simple. Pero, lo realmente importante, es cómo suena todo esto al oído. Finalmente fue el oído el que prefirió la escala de Pitágoras para la monofonía (melodía sin acompañamiento), que era la música de la época, mientras que la escala de Aristógenes tuvo que aguardar hasta el surgimiento de la polifonía (combinación de sonidos simultáneos) para ser la preferida. Es evidente que en la polifonía el papel de la serie armónica es determinante. El veneciano Gioseffo Zarlino (1517-1590) fue el teórico más destacado del Renacimiento, trabajó en la escala de Aristógenes llegando a las mismas conclusiones que él. Por ello esta escala se conoce también por el nombre de Aristógenes-Zarlino.

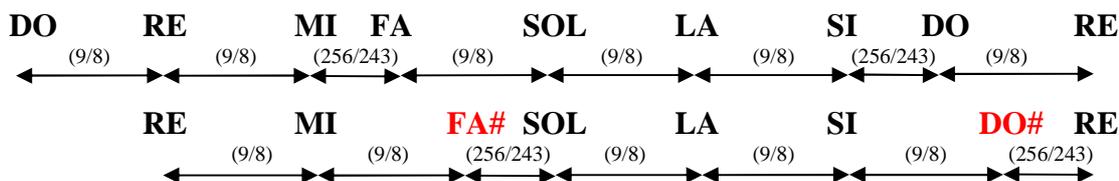
Ya tenemos la escala musical diatónica, compuesta por siete notas que se repiten cíclicamente en las sucesivas octavas. Ahora bien, si escuchamos la escala completa secuencialmente empezando desde DO: DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI-DO, se obtiene una sensación auditiva diferente de otra escala que empiece en RE: RE-MI-FA-SOL-LA-SI-DO-RE. Lo mismo ocurre si ejecutamos la escala desde cualquier otra nota, es decir, cada escala “suena” diferente debido a que el orden de tonos y semitonos es distinto. Este fenómeno ya lo conocían los griegos y lo definieron como **modos**, es decir, según cuál fuese la nota adoptada para comenzar la escala, se definiría el “modo” en que la música sería compuesta, ya que determina la línea característica de la melodía. Este tipo de música se denomina **música modal** y es la que predominó en Europa desde la antigua Grecia hasta el renacimiento, pasando por los cánticos religiosos de la edad media, ejemplo el canto gregoriano.

Para ser más precisos acerca del concepto del modo, el empezar por cualquier nota no define necesariamente el modo. El “modo” queda definido solamente cuando la nota inicial de la escala es tratado por el compositor como un “centro de atracción”, que puede funcionar como nota conclusiva, es decir, que dé una sensación de cierta estabilidad para terminar una música o una parte importante de la misma. La característica sonora más peculiar de la música modal es que posee diferentes efectos “conclusivos”, más o menos intensos, y otros “suspensivos”, según sea el modo elegido por el compositor y según decida manejar los sonidos de la escala.

¿Qué ocurriría si empezamos la escala por otra nota, pongamos RE, pero en lugar de hacer como en la música modal manteniendo la altura de las notas, mantenemos la distancia de los intervalos? Esto es lo que se conoce como “transportar” la escala a otra altura y es la base del **sistema tonal** o **tonalidad**. La tonalidad es un sistema donde el sonido fundamental es determinante absoluto del punto de partida, y también de conclusión, de cualquier música. Ese sonido fundamental va a ser la primera nota de la escala y se llamará tónica. Ninguno de los modos, excepto el que comienza la escala en DO permite un efecto conclusivo tan intenso. Al ir transcurriendo los siglos los modos caerían en desuso, pero éste al

que nos estamos refiriendo, el que comienza la escala por el DO, sería el único que permanecería, con el nombre de **modo mayor**, junto al que comienza la misma escala por LA, conocido como **modo menor**.

Veamos cómo queda la escala pitagórica transportada a RE:

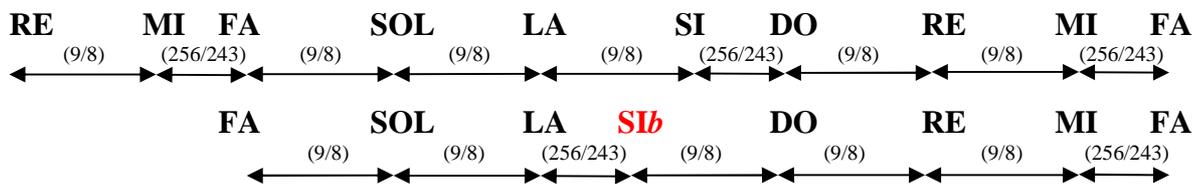


En la figura, para favorecer la apreciación visual, se ha ajustado la distancia entre notas en función de que el intervalo sea de tono o semitono.

Vemos que en la escala de RE coinciden todas las notas con la escala de DO menos el FA y el DO, que se encuentran desplazadas hacia arriba más o menos a la mitad con la nota siguiente. Por tanto, el FA y el DO son sonidos/frecuencias nuevas y se les pone el nombre de FA# (FA sostenido) y DO# (DO sostenido). Si repetimos el proceso con la escala empezando en MI, nos aparecerían otras dos notas nuevas, a saber, SOL# y RE#.

Apuntar que la escala que empieza en DO corresponde a la tonalidad de DO Mayor, la que empieza en RE a RE Mayor, etc.

Veamos qué ocurre en FA mayor.



Ahora coinciden todas las notas con la escala de DO excepto el SI que se encuentra por debajo aproximadamente un semitono. Esto es nuevo, ahora tenemos la nota desplazada hacia abajo, por lo que no la podemos denominar con el sufijo sostenido #. Cuando está por debajo le ponemos el sufijo *b* (*bemol*), con lo que la nueva nota es un Sib (SI bemol).

Comenzando la escala por cualquier otra nota pasarán cosas similares, serán necesarios nuevos sonidos (frecuencias) intermedios que se denotan aplicando el sufijo sostenido ó bemol según caiga la nota por encima o por debajo de su ubicación en la escala inicial de DO. En general, estas notas se llaman **notas alteradas**.

Aquí aparece un fenómeno peculiar que es motivo de gran confusión y que ha supuesto un auténtico quebradero de cabeza para los sistemas de afinación a lo largo de la historia. El Sib que ha aparecido en esta escala de FA es distinto del LA# que aparece en la escala de SI, por ejemplo. Se observa que el Sib está a una distancia $256/243$ por encima del LA, mientras que el LA# está a $256/243$ por debajo del SI, es decir $(9/8)/(256/243) = 2187/2048$ por encima del LA.

Técnicamente la diferencia se debe a que entre LA y LA# hay un semitono cromático, mientras que de LA a Sib hay un semitono diatónico. Semitono diatónico porque ambas notas LA y Sib pertenecen a la

escala diatónica de FA ó tonalidad de FA Mayor. Sin embargo, LA y LA# no pertenecen a la misma escala diatónica de ninguna tonalidad. Los griegos decían que añadir algunos sonidos que no pertenecían a la escala diatónica le daba un cierto “color” (cromos) a la música, y ahí nace la etimología del término. Crearon el género “**cromático**” para dar colorido a la monotonía del género “**diatónico**“. El género cromático de la antigua Grecia se considera el antecesor directo de lo que actualmente se entiende por “**cromatismo**”, es decir, la melodía y la armonía se pueden enriquecer mediante el uso de sonidos que no forman parte de la tonalidad. Pero ese cromatismo era en base a intervalos menores que el semitono diatónico. Por tanto, los griegos usaban cromatismo para conseguir efectos de “colorear” las melodías, pero no conocían la escala cromática que veremos en breve.

En resumen, generando las escalas de las diferentes tonalidades aparecen sonidos/frecuencias nuevas entre medias de las notas naturales, a distancia de un semitono diatónico ó cromático de las dos notas que le rodean, que se denotan con un sufijo # (sostenido) ó *b* (bemol) dependiendo de si están respectivamente por encima o por debajo de la nota natural. Esto hace que para cubrir las tonalidades normalmente utilizadas en las composiciones musicales se necesiten 31 sonidos/frecuencias distintos por cada octava. Recordemos que todas estas notas guardan relaciones entre sí que se pueden obtener de la fórmula $2^a 3^b$ para enteros *a* y *b* adecuados.

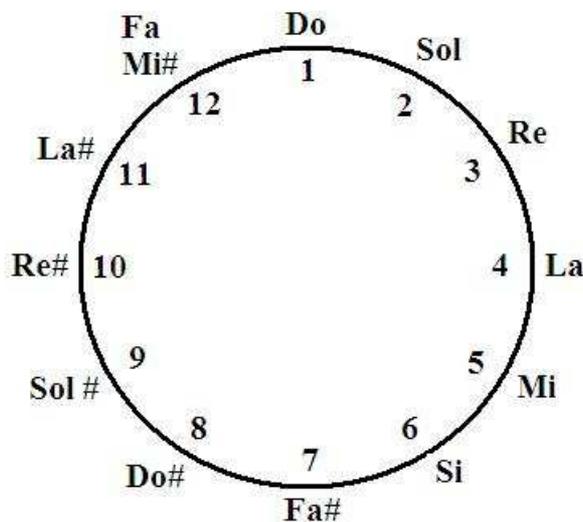
Por si esto no fuera suficiente, todavía se puede complicar aún más. Si en lugar de utilizar el modelo de escala de Pitágoras se emplea el modelo de Aristógenes, que recordemos posee dos relaciones distintas para el intervalo de tono, entonces se necesitan hasta 72 sonidos/frecuencias distintos por octava, 6 sonidos diferentes por nota. En este caso incluso dejan de coincidir las mismas notas naturales sin alteraciones. En efecto, es inmediato ver que la distancia del intervalo RE-MI en DO Mayor es 10/9, mientras que en RE mayor la distancia del mismo intervalo RE-MI sería 9/8, de donde se deduce que la frecuencia correspondiente a MI es diferente en esas dos tonalidades. Estas 72 notas guardan relaciones entre sí que se pueden obtener de la fórmula $2^a 3^b 5^c$ para enteros *a*, *b* y *c* adecuados.

Visto el significado de tonalidad, se conoce como **música tonal** aquella música construida sobre una tonalidad claramente identificada, donde el sonido fundamental (tónica) es determinante absoluto del punto de partida, y también de conclusión. El hecho de que una obra musical se ajuste a una tonalidad, con su escala diatónica correspondiente en modo mayor ó menor, no impide que se puedan utilizar efectos cromáticos con notas fuera de su escala diatónica, o incluso, cambios de tonalidad en pasajes intermedios. El cambio de tonalidad durante una pieza musical se denomina **modulación**. Es más, desde sus inicios en el renacimiento hasta nuestros días, el uso de estos efectos ha ido in crescendo, hasta el punto de que actualmente existe un sistema musical denominado **atonalidad ó música atonal**, iniciado por el austriaco Arnold Schönberg (1874-1951), donde las obras musicales no se ajustan a las normas de la tonalidad y carecen de centro tonal.

Volviendo a las escalas y a la problemática de las notas y sus múltiples sonidos/frecuencias aparecidos según este sistema de **entonación o afinación justa**, es decir, respetando escrupulosamente las relaciones enteras de los intervalos, podemos imaginar los problemas de afinación en los instrumentos a la hora de cambiar de tonalidad. Al interpretar una pieza musical, dependiendo de la tonalidad en la que estaba escrita, el instrumento debía ser afinado de acuerdo a la escala correspondiente.

Para resolver los inconvenientes de orden práctico en la afinación de instrumentos de sonido fijo se desarrolló el **temperamento igual o afinación temperada**, consistente en la división de la octava en 12

sonidos uniformemente espaciados. Estos 12 sonidos aparecen en la sucesión de quintas ya comentada. La acción de establecer el temperamento se llama “templar” la escala. Para esto, se iguala la sucesión de 12 quintas con una sucesión de 7 octavas, es decir, se cierra la sucesión en el denominado **círculo de quintas**. El error cometido, que como conocemos es de una coma pitagórica, se reparte entre las quintas empleadas, transformándose dichas quintas justas en quintas templadas y desapareciendo la coma.



Esto permitiría la creación de una escala en donde todos los intervalos son iguales, es decir, divide la escala de DO a DO en 12 partes iguales (12 semitonos). Aparece así la conocida escala cromática:

DO - DO# - RE - RE# - MI - FA - FA# - SOL - SOL# - LA - LA# - SI - DO.

En la escala cromática ahora sí son iguales los sonidos o frecuencias correspondientes a LA# y Sib. Este fenómeno se define como **enarmonía** o género “*enarmónico*” y se aplica a la relación entre dos o más sonidos que, a pesar de poseer distintos nombres, son iguales en entonación (frecuencia), esto es, son enarmónicos. Por tanto, la escala cromática también podría escribirse como:

DO - RE b - RE - MI b - MI - FA - SOL b - SOL - LA b - LA - SI b - SI - DO.

Observar que en la escala temperada las siguientes notas también son enarmónicas: MI# y FA, MI y FA b , SI# y DO, SI y DO b .

Todas las notas contiguas son equidistantes y están separadas por un semitono de valor

$$2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2} = 1.0595$$

Veamos el error cometido en el intervalo de quinta: si igualamos el círculo quintas, $(3/2)^{12} \cong 2^7$, $(r/2)^{12} = 2^7 \Rightarrow r = 2^{(19/12)} = 2.9966 \rightarrow 0.11\%$ error

Lo mismo se obtiene sabiendo que una quinta, DO-SOL por ejemplo, son 3 tonos y un semitono o, lo

que es lo mismo en la escala cromática, 7 semitonos. De donde, $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^7 = \frac{r}{2} \Rightarrow r = 2^{(19/12)}$

En la siguiente tabla se muestran los valores (frecuencia en Hz) de las notas de la escala en los tres modelos planteados, se toma como referencia el LA de la cuarta octava a 440 Hz, así como semitonos cromáticos en las escalas de afinación justa.

	DO	DO#	RE	RE#	MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	LA#	SI	DO
1- Escala Temperada	261,63	277,18	293,66	311,13	329,63	349,23	369,99	392,00	415,30	440,00	466,16	493,88	523,25
2- Escala Pitágoras	260,74	278,44	293,33	313,24	330,00	347,65	371,25	391,11	417,66	440,00	469,86	495,00	521,48
3- Escala Aristógenes	264,00	278,44	297,00	316,80	330,00	352,00	375,47	396,00	422,40	440,00	469,33	495,00	528,00
(E1-E2)/E2 (%)	0,34	-0,45	0,11	-0,68	-0,11	0,45	-0,34	0,23	-0,56	0,00	-0,79	-0,23	0,34
(E1-E3)/E3 (%)	-0,90	-0,45	-1,12	-1,79	-0,11	-0,79	-1,46	-1,01	-1,68	0,00	-0,68	-0,23	-0,90
(E2-E3)/E3 (%)	-1,23	0,00	-1,23	-1,12	0,00	-1,23	-1,12	-1,23	-1,12	0,00	0,11	0,00	-1,23

El sistema del temperamento igual, que ya era practicado empíricamente por los vihuelistas españoles, fue sistematizado en 1482 por Bartolomé Ramos de Pareja (1440-1491), uno de los primeros teóricos musicales del Renacimiento. Si bien esta escala no se popularizó hasta 1627 cuando el fraile y matemático Marín Mersenne (1588-1648) estableció con precisión la relación entre longitud de cuerda y la frecuencia en su obra *Armonía Universal*, formulando las reglas para afinar una escala donde todos los intervalos sean iguales, es decir, divide la escala en 12 partes iguales: la “*escala cromática*”. Se resolvía así el problema de cambiar de tonalidad (modular) sin reajustar la afinación. La coma pitagórica había desaparecido. Eso sí, no permite la entonación exacta de ninguna escala diatónica, como se desprende de la tabla anterior.

Este sistema fue consagrado por Johann Sebastian Bach (1685-1750) en su obra “*El Clave Bien Temperado*” (1722), estructurado en dos ciclos de preludios y fugas en todas las tonalidades mayores y menores de la gama cromática.

Hasta aquí hemos obtenido las escalas diatónica y cromática, tratando de desarrollar los conceptos y principios sobre los que se sustenta la percepción sonora del oído humano, con el objetivo de describir los elementos sustanciales que permitan comprender al lector los estudios analíticos que se plantearán más adelante, a medida que vaya avanzando la materia propia de este trabajo.

Si bien las escalas diatónica y cromática son las más utilizadas en la actualidad, merece la pena comentar brevemente algunas otras.

La **escala pentatónica**, como su nombre indica, está formada por cinco sonidos o notas. Para definirla coloquialmente se compone de las cinco teclas negras del piano. Se define el modo mayor como: SOL b , LAB, SIB, RE b , MIB, SOL b y el modo menor: MIB, SOL b , LAB, SIB, RE b , MIB. También sus correspondientes transposiciones, por ejemplo DO, RE, MI, SOL, LA, DO en modo mayor y DO, MIB, FA, SOL, SIB, DO en modo menor. Comentar que estas escalas tienen muchísima importancia, pues están omnipresentes en casi todas las culturas y prácticas musicales del mundo.

Otra escalas utilizada con frecuencia son las escalas **hexatónicas**, constituidas por una sucesión de seis sonidos, alturas o notas diferentes dentro de una octava. Por ejemplo la escala de “*tonos enteros*” utilizada en la música impresionista (Claude Debussy, por ejemplo) tiene 6 notas uniformemente espaciadas, o sea que el intervalo entre las notas es la raíz sexta de 2. Es inmediato que estos intervalos

son exactamente el doble que los semitonos de la escala cromática de temperamento igual $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^2 = \sqrt[6]{2}$,

es decir, es una escala a intervalos de un tono: DO, RE, MI, FA#, SOL#, LA#, DO.

Otra escala hexatónica es la denominada “*escala de Blues*”: DO, Mib, FA, FA#, SOL, Sib, DO. Derivada de una pentatónica menor DO, Mib, FA, SOL, Sib, DO, a la que se le añade la nota de blues (“*blue note*”) que aporta la expresividad característica del blues, la *blue note* no es otra que el conocido *tritono*, en este caso el FA#.

Ha llegado el momento de ampliar la perspectiva y definir la música en el sentido general del término. Podemos decir que la música es el arte de combinar organizadamente en el tiempo un conjunto de sonidos, de manera que resulten agradables al oído. Dentro de esta organización, podemos distinguir tres conceptos principales:

- **La melodía.** Consiste en la sucesión de un sonido tras otro, con una altura y duración específicas, que se interpretan continuamente en un tiempo determinado. Es el conjunto de notas que conforman una pieza musical.
- **La armonía.** Es una combinación de notas producidas simultáneamente, y vendría a ser la contraposición de la melodía (donde los sonidos se emiten uno detrás de otro).
- **El ritmo.** Es la distribución de diferentes sonidos o notas en el tiempo, formando una pieza musical.

Sobre la melodía ya hemos establecido los elementos básicos que la componen, a saber: notas, intervalos, escalas, modos y tonalidades. El ritmo queda fuera del alcance de este trabajo, así que no entraremos en más detalles. Por tanto, para finalizar este capítulo de introducción musical nos queda el concepto de armonía.

La armonía es un fenómeno muy complejo y amplio, pero aquí no vamos a entrar en toda su extensión, nos conformaremos con describir las ideas básicas necesarias para comprender el lenguaje en que se expresan la teoría Transformacional y Neo-Riemanniana sobre acordes, tríadas, funciones armónicas y progresión armónica.

Cuando se definió el sistema tonal vimos que en la tonalidad el sonido fundamental es determinante absoluto del punto de partida y también de conclusión. Ese sonido fundamental es la primera nota de la escala y se llama tónica. También se dijo que sólo habían perdurado dos modos de la escala: el modo mayor y el modo menor. Por ejemplo, en la tonalidad de DO Mayor la escala es: DO, RE, MI FA, SOL, LA, SI, DO. EL modo menor de esta escala es LA, SI, DO, RE, MI, FA, SOL, LA y corresponde a la tonalidad denominada La menor. Se dice que ambas tonalidades son relativas, es decir, La menor es la relativa menor de DO Mayor y DO Mayor es la relativa mayor de La menor. Aunque son tonalidades distintas, las notas de sus escalas son exactamente las mismas, sólo difiere la nota de comienzo que determina el modo.

Con el fin de generalizar el uso de las tonalidades y abstraerse de una escala concreta a la que referirse, se creó la terminología de **grados de la escala** para denominar la posición de las notas dentro de una escala musical. Los grados se designan mediante números romanos correlativos I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII y cada grado recibe los siguientes nombres:

I	Tónica	V	Dominante
II	Supertónica	VI	Superdominante o Submediante
III	Mediante	VII	Sensible (escala diatónica mayor) o Subtónica (escala menor)
IV	Subdominante	VIII	Octava o Tónica

Así en la escala de DO Mayor, DO es la tónica, RE la supertónica, ..., SI la sensible. En su relativa La menor, la tónica es LA, SI la supertónica, ..., y SOL la subtónica.

En armonía, un acorde es un conjunto de dos o más notas simultáneas o superpuestas. Según Jean-Philippe Rameau (1683-1764), uno de los primeros y más importantes estudiosos de armonía, en su “*traité de l’harmonie*” (1722) argumenta como núcleo de su teoría que toda armonía tiene su base en la raíz o nota fundamental de un acorde, conocida como “*bajo fundamental*”.

El acorde básico y más conocido es la tríada, está compuesto por tres notas a distancias de tercera según la teoría de Rameau. Como dos terceras seguidas forman una quinta, podemos decir que una tríada se compone de la nota raíz, una tercera y una quinta. El acorde toma el nombre de la nota raíz y para saber si es mayor o menor hay que analizar su tercera. Si la nota generadora del acorde está en la parte más grave, el acorde está en estado fundamental, si no, se dice que está invertido. Por ejemplo, el acorde de DO Mayor está formado por las notas DO-MI-SOL en su estado fundamental. SOL-DO-MI será también una tríada DO Mayor pero con una inversión.

Los acordes de tríada pueden clasificarse en:

- **Perfectos mayores.** Presentan un intervalo de tercera mayor (2 tonos), y quinta justa (3 tonos y 1 semitono). DO Mayor: DO-MI-SOL
- **Perfectos menores.** Tienen una tercera menor (1 tono y 1 semitono) y una quinta justa. La menor: LA-DO-MI
- **Disminuidos.** Tercera menor y una quinta disminuida (tritono). SI disminuido: SI-RE-FA
- **Aumentados** Tercera mayor y una quinta aumentada (4 tonos). DO : DO-MI-SOL#

Las tríadas se pueden construir sobre cualquier grado de la escala. En una escala en modo mayor, el I, IV y V grados son acordes perfectos mayores, el II, III y VI acordes perfectos menores, y el VII un acorde disminuido. En una escala de modo menor, el I, IV y V grado son acordes perfectos menores, el III, VI y VII son perfectos mayores y el II es disminuido.

Existen también acordes formados por cuatro notas distintas, las **Tétradas**, entre los que se encuentran los acordes de séptima o acordes con séptima. Se generan superponiendo tres terceras mayores o menores, o lo que es lo mismo, añadiendo un intervalo de séptima a las tríadas. Existen ocho combinaciones posibles en función del orden de esa superposición:

- | | |
|---|---|
| • Acorde menor con séptima menor | • Acorde aumentado con séptima mayor |
| • Acorde menor con séptima mayor | • Acorde aumentado con séptima aumentada |
| • Acorde mayor con séptima menor | • Acorde de séptima disminuida |
| • Acorde mayor con séptima mayor | • Acorde de séptima de sensible |

La relación entre los acordes y la tonalidad se expresa mediante el concepto de **función armónica**. Existen tres funciones armónicas principales, denominadas **funciones tonales**, a saber: **Tónica (I)**, **Subdominante (IV)** y **Dominante (V)**.

- La **Tónica** es el acorde formado con el primer grado de su escala. Es el centro tonal, genera estabilidad sonora y todo empieza y termina en ella.
- La **Subdominante** es aquella relacionada con el 4º grado de esa escala. Aporta semiestabilidad, desde la que, dependiendo de cómo o qué se quiera componer, puede volver a la estabilidad de la tónica, o evolucionar hacia la tensión generada por la dominante.

- La **Dominante** se forma con el 5º grado, por lo que está una quinta por encima de la tónica. Genera una fuerte tensión que pide ser resuelta, por la tónica, por ejemplo.

El resto son funciones armónicas secundarias:

- La **Supertónica** se refiere al 2º grado y aunque pueda engañarnos el nombre, tiene función de subdominante. Es útil para llegar a la dominante, al igual que el 4º grado.
- La **Sensible** se refiere al 7º grado y tiene función de dominante. Es sustituible por el 5º grado.

Existen dos grados que actúan con funciones armónicas un tanto ambiguas: los grados III y VI.

- El 3º grado, **Mediante**, queda a medio camino entre la tónica y la dominante, y además comparte dos notas con los acordes de ambas, por lo que puede desempeñar las dos funciones.
- Al 6º grado, **Submediante**, le ocurre lo mismo, sólo que comparte las dos notas con los acordes de tónica y subdominante, pudiendo también desempeñar las dos funciones.

Al describir las funciones armónicas se ha introducido indirectamente el concepto de **progresión armónica** y se refiere a la sucesión de acordes en el desarrollo de la obra musical. Desde los inicios del descubrimiento de la armonía y durante varios siglos todos los giros melódicos y armónicos se desenvolverían alrededor de la atracción de la dominante hacia la tónica.

La progresión desde la tónica a la tonalidad dominante o a la tonalidad del relativo mayor, constituía la exposición, el movimiento armónico de regreso a la tónica construía el desarrollo y el regreso a la tonalidad de la tónica señalaba el comienzo de la recapitulación. Comúnmente la modulación se realizaba sobre el quinto grado de la escala original. En obras de tonalidad menor, la modulación podría ser a la tonalidad de la dominante menor o podría ser a la tonalidad del relativo mayor.

El movimiento más común desde un acorde a otro es por medio de intervalos fuertes. Un movimiento de este tipo es fuerte porque los dos acordes tienen el menor número de notas en común y por lo tanto contrastan más. El movimiento por intervalos débiles es más débil porque los dos acordes en este caso comparten más notas.

A partir de aquí la nomenclatura utilizada para referirnos a las notas podrá ser indistintamente el cifrado español, el inglés o americano, o la notación entera para el temperamento igual con equivalencia enarmónica, según convenga.

Cifrado español:	DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI
Cifrado inglés/Americano:	C-D-E-F-G-A-B
Notación entera:	0-2-4-5-7-9-11

Equivalencia enarmónica:

DO \equiv C \equiv SI# \equiv B# \equiv 0	MI \equiv E \equiv FAb \equiv Fb \equiv 4	SOL# \equiv G# \equiv LAb \equiv Ab \equiv 8
DO# \equiv C# \equiv REb \equiv Db \equiv 1	FA \equiv F \equiv MI# \equiv E# \equiv 5	LA \equiv A \equiv 9
RE \equiv D \equiv 2	FA# \equiv F# \equiv SOLb \equiv Gb \equiv 6	LA# \equiv A# \equiv SIb \equiv Bb \equiv 10
RE# \equiv D# \equiv MIb \equiv Eb \equiv 3	SOL \equiv G \equiv 7	SI \equiv B \equiv DOb \equiv Cb \equiv 11

Las notas se consideran generalmente (módulo octava), (mod 12) en el caso de notación entera, por tanto, cuando hablamos de una nota nos referimos a una clase de equivalencia, nota (módulo octava). Para referirse a notas dentro de octavas concretas se le añade como sufijo un número que indica la octava, así C4 es el DO de la octava 4, F#3 es el FA sostenido de la octava 3, etc.

3.- Introducción Histórica

En el siglo XIX la música del romanticismo, aunque también en menor medida la del periodo clásico, tenía un grado de cromatismo tal que los modelos analíticos convencionales diseñados para la música diatónica se encontraban con movimientos tonales y cadencias armónicas fuera de los parámetros clásicos de unificación tonal. Los teóricos musicales de la época tuvieron que abordar el análisis de la obra de grandes genios de la historia de la música, Wagner, Liszt, Schubert, Mozart, Beethoven, etc. con unas herramientas que no contemplaban la evolución que estaba experimentando la música. Ésta, a pesar de contener estructuras armónicas triádicas, presentaba movimientos y progresiones armónicas completamente incoherentes según los paradigmas conocidos sobre los que se sustentaban los modelos analíticos aplicables a los sistemas tonales diatónicos.

Desde entonces, numerosos teóricos han intentado designar o asignar un nombre a este tipo de música: “tonalidad cromática”, “cromatismo triádico”, “triádico atonal”. No confundir atonal con disonante, pues una consonancia no implica tonalidad, ni la presencia de una disonancia implica atonalidad. El término más apropiado parece “triádico pos-tonal” para definir la música cromática del siglo XIX. Dice William Rothstein 1989 *“Algunas frases de Wagner no son verdaderas desde un punto de vista tonal porque no contienen un movimiento tonal coherente, estas frases cruzan la brumosa línea que separa la tonalidad de la pos-tonalidad. Es una práctica triádica pero pos-tonal”*.

A estos efectos, la ópera de Wagner “Tristan e Isolde” es considerada como el comienzo del fin de la armonía y tonalidad convencional, es decir, el comienzo de la pos-tonalidad o atonalidad.

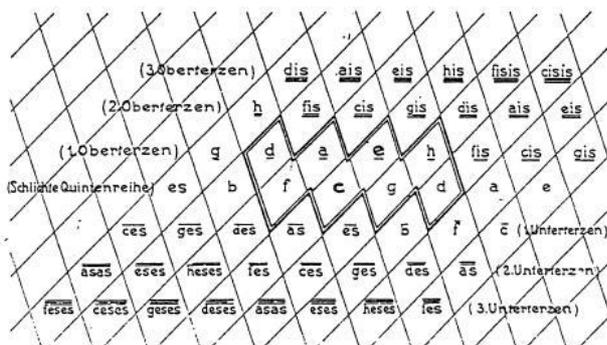
Entonces la pregunta es: si esta música no es completamente coherente de acuerdo a los principios de tonalidad diatónica, ¿a qué otros principios puede ser coherente? Los teóricos del siglo XIX trabajaron una serie de conceptos sobre un sistema de tonalidad diatónica, funciones armónicas y dualismo:

- 1- Transformaciones triádicas
- 2- Maximización de tonos comunes
- 3- Voz principal parsimoniosa
- 4- Espejo o inversión dual (dualismo)
- 5- Equivalencia enarmónica
- 6- Tabla de relaciones tonales, red tonal

En el desarrollo de estos conceptos sobre los que establecer modelos analíticos cabe destacar los trabajos de Hugo Riemann. Podemos adelantar que la teoría musical Neo-Riemanniana suprime el centrismo tonal de estos conceptos y los integra tejiendo con ellos un sistema para el estudio del repertorio atonal de la época actual.

La búsqueda de Riemann para explicar los fenómenos musicales utilizando razonamientos teóricos sólo puede entenderse en el contexto de los esfuerzos que realizaron los músicos teóricos del siglo XIX encaminados a considerar la música como una disciplina científica. Su objetivo era desarrollar un modelo científico capaz de explicar cómo percibimos la música. Los trabajos de Riemann, con clara influencia de Hauptmann, Helmholtz, y Oettingen, sacaron a relucir el conflicto entre los pensamientos idealistas y empíricos.

Hugo Riemann en su tabla de relaciones tonales, **Tonnetz** “*Tone network*”, ilustra una representación visual de relaciones entre tonos, armonías y tonalidades.

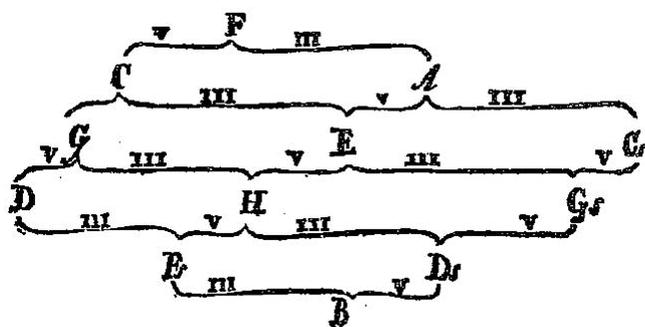


Hugo Riemann, “Ideen zu einer Lehre von den Tonvorstellungen,” *Jahrbuch der Bibliothek Peters* 21–22 (1914–1915): 20.

Se trata de una red donde en las líneas horizontales se sitúan sucesiones de 5ªs perfectas, 3ªs mayores en la diagonal ascendente de izquierda a derecha y 3ªs menores en la diagonal descendente de izquierda a derecha. Formando triángulos cuya base horizontal sea una quinta, se construyen triadas armónicas (*Klang*) mayores si el otro vértice se encuentra hacia arriba, o menores si el triángulo está invertido hacia abajo. Por ejemplo DO Mayor: DO(c)-MI(e)-SOL(g) ó el relativo La menor: LA(a)-DO(c)-MI(e).

En esta tabla, Hugo Riemann calcula relaciones entre armonías mediante su posición relativa, es decir, se puede pasar de DO Mayor a SOL Mayor con el movimiento horizontal a la derecha de una posición. De DO Mayor a La menor desplazando una posición a izquierda y otra arriba e invirtiendo el triángulo. Constituye una “estructura” o terreno de consonancias armónicas sobre el que se pueden trazar sucesiones temporales entre triadas (*Klang*) o caminos entre coordenadas espaciales. Es una tabla de relaciones tonales que representa una abstracción de la experiencia musical, una construcción mental, seguramente menos real que imaginaria.

Es justo señalar que esta tabla es una reorganización decisiva de versiones anteriores formadas por líneas horizontales de 5ª y verticales de 3ª mayores (Artur von Oettingen, 1866), que a su vez derivan, cómo no, de estudios del propio Leonhard Euler (1707-1783).



Tonnetz de Euler

Tonnetz original aparecido en “*Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae*”, Euler 1739. Muestra las relaciones triádicas de la quinta perfecta y la tercera mayor: Arriba la nota FA(F), por debajo a la izquierda el DO(C) (quinta perfecta por encima de FA), y a derecha el LA(A) (tercera mayor sobre FA).

Parece ser que esta nueva concepción del Tonnetz indicaría que para Hugo Riemann el factor decisivo en la cognición de la música es más visual que aural, es la habilidad de formar imágenes visuales a partir de unos datos percibidos auralmente. Riemann concluye que la audición de cambios de tono son transformados en una visión de cambios espaciales.

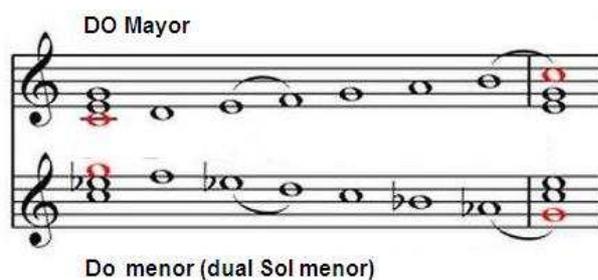
Una característica crucial de esta red es su cromatismo extremo, de hecho contiene un número infinito de diferentes tonos, ninguno de ellos idéntico. Ello es debido a que Riemann quería derivar sus teorías armónicas desde las relaciones puras de la entonación justa, por tanto la malla se extiende infinitamente por todos los lados. En entonación justa cada escala diatónica tiene su ajuste o temperamento propio, lo que proporciona un carácter perceptivo distintivo y, por tanto, un diferente potencial expresivo. Esto es lo que Riemann creía que aportaba los efectos armónicos mágicos en la música de Wagner. Sin embargo

Riemann reconocía las inmensas dificultades prácticas que esto entrañaba, frente al uso universal del temperamento igual, con lo que concedía validez a la “*identificación o equivalencia enarmónica*”.

Otro concepto que llegó incluso a obsesionar a Hugo Riemann es el dualismo armónico o inversión dual, hasta el punto que en sus primeras fases pensaba que se debía a la aparición de subarmónicos en los acordes menores, algo que posteriormente reconoció erróneo. De la misma manera que cualquier sonido se compone del fundamental f y sus armónicos $2f, 3f, \dots$, desarrolló la hipótesis de la existencia de una serie subarmónica $f, 1/2f, 1/3f, \dots$, que proporcionara una base natural para la tonalidad menor. Si bien esta serie subarmónica era generada en el oído, siguiendo la teoría de no linealidad del oído de Hermann von Helmholtz (1821-1894), es decir, el oído produce armónicos que no están presentes en la onda sonora, pero son audibles en nuestra percepción.

El significado de dualismo para Riemann se refiere a la relación inversa entre las tríadas mayores y menores, de modo que considera la construcción de una tríada menor como la imagen invertida descendente (“*upside down*”) de una tríada mayor. Por ejemplo, DO Mayor se compone de DO-MI-SOL, una quinta entre DO-SOL y una tercera mayor entre DO-MI. El relativo La menor, formado por LA-DO-MI, según la perspectiva de Riemann sería el “*dual*” Mi menor, pues tiene intervalos equivalentes en espejo descendente, esto es, una quinta entre LA-MI y una tercera mayor entre DO-MI.

Sistema Dual de Riemann: modo menor como espejo descendente del modo mayor. Las ligaduras indican notas separadas por semitonos, el resto por tonos enteros. La escala descendente del dual Sol menor (Do menor) presenta los mismos intervalos que la escala DO Mayor ascendente.



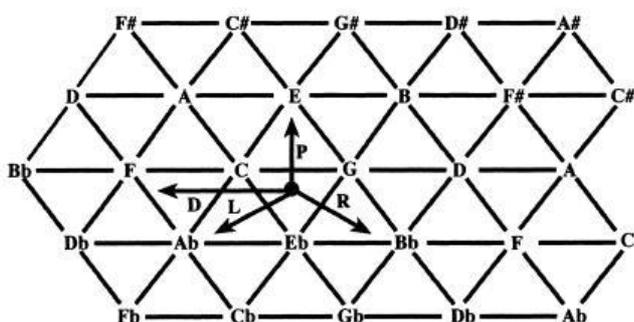
En los años 1980’s los trabajos de David Lewin (1933-2003), en los que explora diferentes transformaciones musicales y sus propiedades como estructuras de grupos matemáticos, dan lugar a la **Teoría Musical Transformacional**. De los diferentes tipos de sistemas musicales y clases de transformaciones que define, propone una clase que invierte tríadas, mapeando tríadas mayores y menores entre sí. Como el eje de inversión depende de los tonos componentes de la tríada, en lugar de ser un punto fijo en el conjunto de tonos (pitch-class space), esta clase de transformaciones se denominan “*inversión contextual*”. Las tres inversiones contextuales REL (Relative), PAR (Parallel) y LT (Riemann’s Leading Tone Exchange) están directamente ligadas al sistema *Schritte/Wechsel* entre dos tríadas, introducido por Oettingen en 1866 y expandido por Riemann en 1880.

Según Lewin, seguramente el mayor problema de Riemann es que nunca tuvo en la mente el carácter transformacional de sus teorías, nunca cayó en la cuenta de las relaciones triádicas como algo aplicado a un klang para obtener otro klang. Otros autores (Klumpenhouwer) no comparten esta impresión y aseguran que las relaciones *Schritte/Wechsel* entre dos tríadas son explícitamente independientes de una determinada tonalidad, por lo que el sistema S/W es esencialmente transformacional en el sentido de Lewin: “algo que se aplica a un Klang para obtener otro Klang”.

En su libro “*Generalized Musical Intervals and Transformations*” (GMIT-1987), adicionalmente a las transformaciones triádicas, introduce tres áreas de exploración futura: Lógica composicional, estructuras

de grupos y representación geométrica. Hace notar que la composición doble de MED (mediante) produce DOM (dominante), es decir $MED.MED = DOM$, con lo que la transformación MED es un generador de grupo. Esencialmente, la composición de transformaciones es la tecnología transformacional desarrollada en GMIT, también representada en gráficos bidimensionales.

Poco después Brian Hyer (1989) desarrolla estas tres áreas, extrae un subconjunto de transformaciones de tríadas de Lewin: tres inversiones contextuales (PAR, REL y LT) y una transposición (DOM), denominando cada una por su primera letra: P, R, L, D. Para ilustrar la composición de estas transformaciones Hyer recupera la “Tabla de Relaciones Tonales” ó “Tonnetz” tan usada por los teóricos del siglo XIX. La tabla, más preciso un gráfico, incluye tres ejes coordenados representando los tres intervalos triádicos.



A diferencia de sus antecesores del siglo XIX, el Tonnetz de Hyer se construye con temperamento igual, lo que hace que el eje horizontal de 5ªs pitagóricas se convierta en el círculo de 5ªs temperadas, y los ejes diagonales de 3ªs justas se convierten en círculos de 3ªs temperadas mayores y menores.

La tabla se cierra en círculo por cada una de sus tres dimensiones y el gráfico entero se convierte en un **hipertoro**. Esta concepción enriquece la estructura de grupo de las transformaciones e intensifica la relación entre la teoría transformacional de tríadas y la teoría armónica del siglo XIX. Esta es una singular ironía de la teoría armónica del siglo XIX, pues, aunque estos teóricos se sentían cómodos con el temperamento igual y estaban interesados en el movimiento de tríadas por el tonnetz, no se adentraron a explorar sus propiedades cíclicas bajo el temperamento igual.

A principios de los años 1990’s Richard Cohn se interesa por el concepto “voz principal parsimoniosa” (parsimonious voice-leading), una cualidad notable que presenta la familia de transformaciones triádicas PLR, puesto que, como se verá en detalle más adelante, cada una de estas operaciones aplicada a una tríada produce otra tríada de cuyas tres notas, dos coinciden con la tríada inicial. El término “parsimonia” en este contexto se refiere a la “ley del camino más corto”. Resaltar que este concepto de parsimonia no era algo nuevo, sino que ya se formulaba a finales del siglo XVII y no consistía en una simple lógica de progresión armónica, sino que era tratado como un efecto cognitivo en la percepción musical.

Cohn comparte sus investigaciones con Jack Douthett y John Clough. Por iniciativa de Clough se organiza en julio de 1993 el primer simposio en la universidad estatal de New York at Buffalo, en cuyas conferencias interviene también David Lewin. Fruto de las actividades de este grupo de trabajo “Buffalo working group” nace la **Teoría Musical Neo-Riemanniana**, desarrollada a partir de ese momento no sólo por sus fundadores sino por más investigadores inspirados en sus trabajos e ideas.

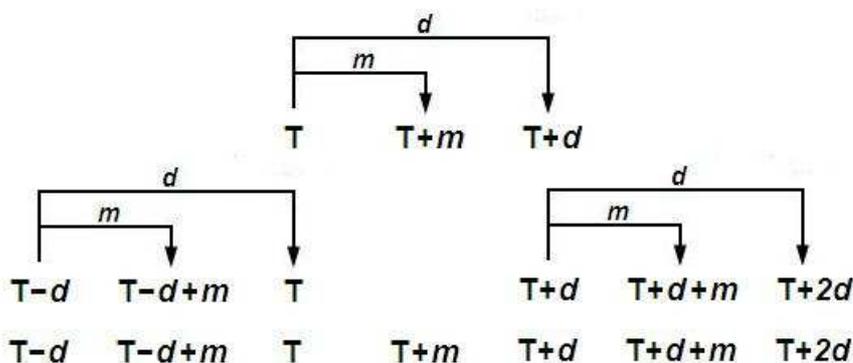
La renovación de las ideas de Hugo Riemann ha revigorizado la teoría musical, ofreciendo la perspectiva de un nuevo paradigma teórico musical que complementa a los actuales “*estructuralistas*” de Heinrich Schenker y “*atonal*” de Allen Forte.

De una manera resumida podemos decir que la Teoría Musical Neo-Riemanniana se origina al aplicar la Teoría Musical Transformacional de David Lewin a las relaciones triádicas, es una sub-disciplina.

Definición #4.1.1. Sistema de Riemann RS (*Riemann system*). Es una estructura ordenada tripla (T, d, m) , donde T es una nota y d y m son intervalos tales que $d \neq 0$, $m \neq 0$, $d \neq m$. Estas restricciones son necesarias y suficientes para garantizar que las notas T , $T+m$ y $T+d$ son distintas. Por tanto, T es la tónica del sistema de Riemann (T, d, m) , d y m sus intervalos dominante y mediente.

Definición #4.1.2. Tríadas Primarias ó Funciones Tonales (*funciones armónicas principales*). Dado el RS (T, d, m) se denomina **tríada Tónica** del sistema al conjunto $\{T, T+m, T+d\}$, **tríada Dominante** al conjunto $\{T+d, T+d+m, T+2d\}$ y **tríada SubDominante** a $\{T-d, T-d+m, T\}$.

Definición #4.1.3. Conjunto Diatónico de RS (T, d, m) . Es el conjunto no ordenado formado por la unión de las tríadas primarias, esto es, $\{T-d, T-d+m, T, T+m, T+d, T+d+m, T+2d\}$.



Definición #4.1.4. Lista Canónica. Es el conjunto diatónico pero ordenado según indica la figura, es decir, la **serie ordenada** $\{T-d, T-d+m, T, T+m, T+d, T+d+m, T+2d\}$.

Definición #4.1.5. Tríadas Secundarias del sistema RS (T, d, m) . Se denomina **tríada Mediante** del sistema al conjunto $\{T+m, T+d, T+d+m\}$ y **tríada SubMediante** al conjunto $\{T-d+m, T, T+m\}$.

Según las restricciones dadas en la Definición #4.1.1, el conjunto diatónico de un RS puede tener de 3 a 7 notas distintas. Por ejemplo hemos visto que $(C, 7, 4)$ tiene como lista canónica FaCeGbD, equivalentemente el conjunto diatónico $\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ con 7 notas distintas. Mientras que $(C, 7, 2)$ tiene como lista canónica FgCdGaD, cuyo conjunto diatónico $\{0, 2, 5, 7, 9\}$ tiene sólo 5 notas distintas.

Definición #4.1.6. Un sistema de Riemann se dice **redundante** si su conjunto diatónico tiene menos de 7 elementos, y **no redundante** si tiene exactamente siete notas distintas.

Teorema #4.1.1. Un sistema RS (T, d, m) es **no redundante** si y sólo si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- i) $Nd \neq 0 \pmod{12}$, $N = 1, 2, 3$. Esto es, uno, dos o tres intervalos de dominante no son un número exacto de octavas.
- ii) $m \neq Nd \pmod{12}$, $N = \pm 1, \pm 2, 3$

La verificación de este teorema es inmediata sin más que inspeccionar las relaciones de intervalos entre las notas del conjunto diatónico $\{T-d, T-d+m, T, T+m, T+d, T+d+m, T+2d\}$.

Hemos conseguido un método para generar diferentes sistemas musicales, algunos tonales según la teoría clásica y otros no tanto. En cualquier caso, todos parecen susceptibles de ser utilizados para componer música. Por ejemplo, el conjunto diatónico del sistema $(C, 7, 4)$ coincide con la escala de DO Mayor y el sistema $(C,7,2)$ hemos visto que tiene las notas de la escala pentatónica Mayor de FA (FA, SOL, LA, DO, RE).

Definición #4.1.7. Se denomina **sistema conjugado** del RS (T, d, m) al sistema $(T, d, d-m)$. La operación que transforma un sistema RS dado en su conjugado se llama “*CONJ*” y simbólicamente se escribe $CONJ(T, d, m) = (T, d, d-m)$.

La operación de conjugación se puede aplicar a cualquier sistema de Riemann y, formalmente, es necesario verificar que $(T, d, d-m)$ cumple también las condiciones de la Definición #4.1.1, sea cual sea el sistema (T, d, m) de partida. Pero es inmediato que $d \neq 0, d-m \neq 0, d \neq d-m$ suponiendo que $d \neq 0, m \neq 0, d \neq m$.

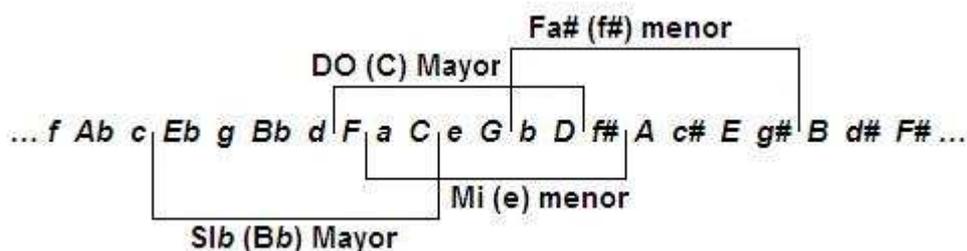
Ejemplo #4.1.1. Sea el sistema de DO Mayor $(C, 7, 4)$, entonces $CONJ(C, 7, 4) = (C, 7, 3)$ tiene como lista canónica $F ab C eb G bb D$, es decir, el sistema de Do menor. Por tanto, $CONJ(\text{DO Mayor}) = (\text{Do menor})$, recíprocamente $CONJ(\text{Do menor}) = (\text{DO Mayor})$. En general, la transformación “*CONJ*” invierte cualquier sistema a su modo relativo. He aquí una buena muestra de relación de simetría, concepto cumbre en la belleza artística matemática.

4.1.1.- Grupo de desplazamiento GSHIFT (*shift group*)

En este capítulo se introduce la idea de desplazamiento de la lista canónica de un sistema de Riemann hacia la lista canónica de otro RS.

Dado el sistema RS (T, d, m) , llamamos $m' = d-m$. Entonces la lista canónica de (T, d, m) se compone de seis intervalos sucesivos m, m', m, m', m, m' . Si extendemos esta lista canónica indefinidamente hacia izquierda y derecha, es decir, una alternancia sucesiva indefinida de intervalos m y m' , se obtiene una secuencia como la que se ilustra en la figura, para el RS $(C, 7, 4)$ DO Mayor.

... f Ab c Eb g Bb d F a C e G b D f# A c# E g# B d# F# a# C# e# G# ...
 ... fa LAB do Mib sol Sib re FA la DO mi SOL si RE fa# LA do# MI sol# SI re# FA# la# DO# mi# SOL# ...



La secuencia se compone de notas cuyos intervalos alternan 3ª mayores y menores. Cada tripleta consecutiva constituye una tríada consonante. Esto ya estaba apuntado por Moritz Hauptmann (1792-1868) en “*The nature of Harmony and Metre*” 1853.

En la figura se observa que desplazando el sistema de DO Mayor cuatro posiciones a la izquierda se obtiene el sistema de Sib Mayor. Dado un entero N positivo o negativo, se puede definir una transformación formal $SHIFT(N)$ que opera sobre un determinado RS y lo transforma en otro RS cuya lista canónica está desplazada N posiciones. Si N es positivo la lista canónica del sistema desplazado es la serie de siete notas resultante de desplazar la lista canónica original N pasos a la derecha. Si N es negativo, se desplaza N pasos a la izquierda. Si N es impar se obtiene un sistema en modo menor, pero se observa que es necesario considerar la regla de mayúsculas y minúsculas en notación invertida, lo cual no afecta al concepto que vamos a desarrollar.

Ejemplo #4.1.1.1. De la figura se extrae que $SHIFT(-4)(DO Mayor) = (Sib Mayor)$, $SHIFT(4)(Mi menor) = (Fa\# menor)$, $SHIFT(5)(Sib Mayor) = (Mi menor)$, ...

Generalizando la estructura a una lista extendida de un sistema de Riemann RS cualquiera (T, d, m) , para calcular $SHIFT(N)(T, d, m)$ tenemos:

1. Si N es par vemos que el sistema desplazado tendrá los mismos intervalos d y m que el original, y la nueva nota tónica será la anterior desplazada N posiciones, esto es, transportada $(N/2)$ intervalos dominantes d . Luego $SHIFT(N)(T, d, m) = (T+i, d, m)$, siendo $i = (N/2)d$.
2. En el caso $N = 1$, el nuevo sistema conserva el intervalo dominante d , pero el intervalo mediante pasa a ser $m' = d-m$ y la tónica $T+m$. Luego $SHIFT(1)(T, d, m) = (T+m, d, d-m)$.
3. Si N es impar podemos poner $SHIFT(N) = SHIFT(1) SHIFT(N-1)$. Como $N-1$ es par, $SHIFT(N-1)(T, d, m) = (T+i, d, m)$, siendo $i = ((N-1)/2)d$. Luego $SHIFT(N)(T, d, m) = SHIFT(1)SHIFT(N-1)(T, d, m) = SHIFT(1)(T+i, d, m) = (T+i+m, d, d-m)$, siendo $i = ((N-1)/2)d$.

Por tanto,

Definición #4.1.1.1. La transformación $SHIFT(N)$ “desplazamiento de N pasos” del sistema de Riemann RS (T, d, m) se calcula algebraicamente como sigue:

- Si N es par, $SHIFT(N)(T, d, m) = (T+i, d, m)$, siendo $i = (N/2)d$.
- Si N es impar, $SHIFT(N)(T, d, m) = (T+i+m, d, d-m)$, siendo $i = ((N-1)/2)d$.

La composición de transformaciones $SHIFT(N)$ sobre un RS (T, d, m) verifica las siguientes propiedades:

1. $SHIFT(M)SHIFT(N) = SHIFT(M+N)$.
2. Asociativa. $[SHIFT(M)SHIFT(N)]SHIFT(P) = SHIFT(M)[SHIFT(N)SHIFT(P)]$.
3. Elemento neutro. $SHIFT(0) = IDENT$ (operación identidad).
4. Elemento simétrico. $SHIFT(N)SHIFT(-N) = SHIFT(0)$.
5. Conmutativa. $SHIFT(M)SHIFT(N) = SHIFT(N)SHIFT(M)$.

Demostrar estas propiedades es inmediato, en consecuencia, el conjunto de transformaciones de desplazamiento $\{SHIFT(N), N \in Z\}$ forman un grupo abeliano.

Definición #4.1.1.2. $GSHIFT \equiv \{SHIFT(N), N \in Z\}$ es el **grupo de transformaciones de desplazamiento** sobre sistemas de Riemann con la operación de composición.

En matemáticas, la estructura de grupo está íntimamente ligada al concepto de simetría, que a su vez es un elemento clave en la representación artística. Pues bien, en este caso podemos “visualizar” la simetría prestando atención a la serie de la siguiente figura. Se corresponde con la lista canónica

extendida del sistema de DO Mayor, representada en notación entera con entonación templada ó temperamento igual. En negrita tenemos, de izquierda a derecha, la sucesión de quintas (intervalo $7 \pmod{12}$) que se repite periódicamente cada 12 notas, es decir, el círculo de quintas. Las notas impares forman también la sucesión de quintas pero desplazada -7 posiciones. Por tanto, tenemos dos círculos de quintas superpuestos con un desplazamiento de 7 pasos, lo que es lo mismo, una estructura periódica (*circular*) de 24 elementos.

... 3 6 10 **1 5 8 0 3 7 10 2 5 9 0 4 7 11 2** 6 9 1 4 8 11 3 6 10 **1 5 8 0 3 7 10 2** ...

En este análisis de simetría han aparecido nuevas apreciaciones:

1. En afinación temperada, la lista canónica extendida es periódica, de periodo 24, por tanto $SHIFT(N) = SHIFT(N+24k)$, $k \in \mathbb{Z}$, y el grupo **GSHIFT** es finito.
2. En afinación justa ya vimos que el círculo de quintas no se cierra, sino que se va acarreado la denominada como pitagórica, por tanto, la lista canónica extendida es infinita, no periódica y con todas las notas distintas, se sigue que el grupo **GSHIFT** es infinito.
3. $SHIFT(-7)$ transforma un sistema mayor en su relativo menor, sin embargo no es recíproco pues la transformación que genera el relativo mayor de uno menor es $SHIFT(7)$. No confundir con la transformación **CONJ**, que no pertenece a este grupo, y sí es involutiva, es decir, $CONJ^2 = IDENT$. Esto ya nos da idea de que el grupo **GSHIFT** puede ser subgrupo de un grupo de transformaciones de orden mayor.

Adicionalmente, se observa que si M y N son pares entonces $M+N$ y $-N$ también son pares, luego la composición de transformaciones $SHIFT(M)SHIFT(N) = SHIFT(M+N)$ con M y N pares forman un subgrupo de **GSHIFT**.

Definición #4.1.1.3. $GEVSHIFT \equiv \{SHIFT(N), N \in 2\mathbb{Z}\}$ es el **grupo de transformaciones de desplazamientos pares** sobre sistemas de Riemann con la operación de composición.

Para finalizar este capítulo, veamos algunas transformaciones que por su importancia merecen una atención especial. El desplazamiento par $SHIFT(2)$ y su inverso $SHIFT(-2)$ transforman un sistema RS (T, d, m) en su “sistema dominante” $(T+d, d, m)$ y “subdominante” $(T-d, d, m)$ respectivamente. Estas transformaciones tienen una relación directa con la construcción de las tríadas primarias, por lo que se le asignan nombres especiales. Lo mismo ocurre con las transformaciones $SHIFT(1)$ y $SHIFT(-1)$.

Definición #4.1.1.4. Las siguientes transformaciones se denominan también como:

- **DOM** (Dominante) $\equiv SHIFT(2)(T, d, m) = (T+d, d, m)$ “sistema dominante”.
- **SUBD** (Subdominante) $\equiv SHIFT(-2)(T, d, m) = (T-d, d, m)$ “sistema subdominante”.
- **MED** (Mediante) $\equiv SHIFT(1)(T, d, d-m) = (T+m, d, m)$ “sistema mediante”.
- **SUBM** (Submediante) $\equiv SHIFT(-1)(T, d, d-m) = (T-m, d, m)$ “sistema submediante”.

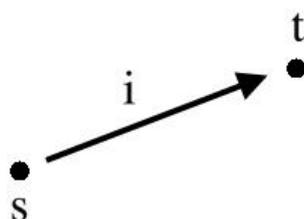
Cualquier grupo que contenga **DOM**, también tendrá **DOM DOM**, **DOM DOM DOM**, ... y sus inversas **SUBD**, **SUBD SUBD**, **SUBD SUBD SUBD**, ..., es decir, todas las transformaciones pares. En este sentido se puede decir que **DOM** es un “generador del grupo” **GEVSHIFT**. En el mismo sentido **MED** es un generador del grupo **GSHIFT**.

4.2.- Intervalos y Transformaciones Musicales Generalizados

Este capítulo recibe el mismo nombre que el libro de David Lewin “*Generalized Musical Intervals and Transformations*” GMT [12] publicado en 1987, que dio origen a la teoría musical Transformacional. En él vamos a definir y desarrollar los conceptos y herramientas matemáticas más importantes, profundizando especialmente en los aspectos musicales armónicos que pocos años después tomaron una dimensión y relevancia propia, dando lugar a la teoría musical Neo-Riemanniana.

En el capítulo anterior se han visto los Sistemas de Riemann, también pertenecientes a trabajos previos de David Lewin en 1982 [11], donde ya aparecen los términos de intervalos y transformaciones. Pues bien, los Sistemas de Riemann (RS) no son sino un caso particular de la teoría Transformacional general cuyos conceptos formales trataremos de exponer aquí.

El punto de partida es la situación general esquematizada en la controvertida figura 0.1 [12] página xxix.



Muestra dos puntos s y t en un espacio musical simbólico. La flecha i indica la medida de una característica, distancia o movimiento de s a t . Esta situación se puede apreciar en muchos espacios musicales y la usamos para decir que i es el intervalo entre s y t , siendo los puntos simbólicos notas ó clases de notas (módulo octava).

Antes de empezar con el desarrollo formal veamos algunos ejemplos de espacios musicales según este esquema. Por el momento denotamos $int(s, t)$ a la medida o movimiento asociada al intervalo de s a t .

Ejemplo #4.2.1. Sea S el espacio musical formado por las notas cromáticas bajo temperamento igual, distinguiendo las mismas notas en diferentes octavas, es decir, $C4$ es el DO de la octava 4, $G5$ el SOL de la octava 5, etc. Dadas dos notas s y t , $int(s, t)$ es el número de semitonos en sentido ascendente para ir de s a t . Así $int(C4, D4) = 2$, $int(C4, G4) = 7$, $int(C4, C5) = 12$, $int(C4, F3) = -7$, $int(C4, F2) = -19$.

Ejemplo #4.2.2. Sea S el espacio musical formado por las notas cromáticas bajo temperamento igual, pero en este caso sin distinguir la octava, es decir, nota (módulo octava). Dadas dos notas s y t , $int(s, t)$ es el número de semitonos en sentido ascendente para ir de s a t . así $int(C, D) = 2$, $int(C, G) = 7$, $int(C, C) = 0$, $int(C, F) = 5$. S es un espacio modular (módulo 12).

Ejemplo #4.2.3. Este espacio musical S , armónico en vez de melódico, comprende todas las notas de una entonación justa. Escribimos $FQ(s)$ para la frecuencia fundamental de la nota s , entonces $int(s, t)$ es el cociente $FQ(t)/FQ(s)$. Este cociente será algún elemento del grupo multiplicativo $2^a 3^b 5^c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo, el conocido tritono $int(C4, F\#4) = 45/32 = 2^{-5} 3^2 5$. Esta relación armónica se puede interpretar musicalmente bajo dos prismas:

1. Matemáticamente la relación $45/32$ significa que el armónico 32 del desarrollo en serie del fundamental $F\#4$ coincide con el armónico 45 de $C4$. Este armónico corresponde a la

altura $F\#9$. ($32 = 2^5 \Rightarrow 5$ octavas de $F\#4$ a $F\#9$). Esta relación parece muy lejana para intuir la musicalmente, ¿quizás por eso el tritono se ha considerado siempre como un intervalo armónicamente débil?

2. Intuición musical. Sabemos cuáles son las relaciones armónicas que presentan una percepción tonal preponderante, a saber: octava ($FQ(t) = 2FQ(s)$), quinta o dominante ($FQ(t) = (3/2)FQ(s)$), y tercera mayor o mediante ($FQ(t) = (5/4)FQ(s)$) junto con sus inversas suboctava ($1/2$), subdominante ($2/3$) y submediante ($4/5$). Podemos buscar una sucesión de estas relaciones principales de la siguiente manera: $FQ(F\#4) = (1/2)FQ(F\#5)$, $FQ(F\#5) = (5/4)FQ(D5)$, $FQ(D5) = (3/2)FQ(G4)$, $FQ(G4) = (3/2)FQ(C4)$. Componiendo la cadena tenemos que $FQ(F\#4) = (1/2)(5/4)(3/2)(3/2)FQ(C4)$, de donde $int(C4, F\#4) = 45/32$. Esta cadena refleja una intuición más “natural”, esto es, $F\#4$ es la suboctava ($1/2$) de $F\#5$, que es mediante ($5/4$) de $D5$, a su vez dominante ($3/2$) de $G4$ que es dominante ($3/2$) de $C4$.

Ejemplo #4.2.4. En el mismo espacio S del ejemplo anterior, dadas dos notas s y t , podemos poner $int(s, t) = (b, c)$ al par ordenado de enteros tal que t está a b intervalos dominantes y c intervalos mediantes de s , teniendo en cuenta que existe una potencia entera de 2 (2^a) de modo que se cumple que $FQ(t)/FQ(s) = 2^a 3^b 5^c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Este espacio se puede visualizar como una tabla bidimensional donde las líneas corresponden a la conocida sucesión de quintas ($3/2$) y las columnas son series de terceras mayores ($5/4$), todas infinitas por estar en temperamento justo. A continuación se ilustra el movimiento de $F\#4 = (1/2)F\#5$ a $C4$, de donde $int(C4, F\#4) = (2, 1)$.

.
.	E3	B3	F#3	C#4	G#4	D#5	A#5	E#6	B#6	F##7	C##8	.	.
.	C2	G2	D3	A3	E4	B4	F#5	C#6	G#6	D#7	A#7	.	.
.	Ab1	Eb2	Bb2	F3	C4	G4	D5	A5	E6	B6	F#7	.	.
.	Fb1	Cb2	Gb2	Db3	Ab3	Eb4	Bb4	F5	C6	G6	D7	.	.
.	Dbb1	Abb1	Ebb2	Bbb2	Fb3	Cb4	Gb4	Db5	Ab5	Eb6	Bb6	.	.
.

En los ejemplos vistos hasta ahora se ha usado el concepto tradicional de intervalo para denotar la medida de distancia entre notas musicales. Veamos ahora algunos ejemplos poniendo la atención en la medida de los elementos que marcan el ritmo, es decir, la medida del tiempo o intervalos de tiempo.

Ejemplo #4.2.5. El espacio musical S es una sucesión de puntos de tiempo separados regularmente. Dados dos puntos de tiempo s y t , $int(s, t)$ es el número de unidades de tiempo entre t y s , puede ser negativo si t es anterior a s .

Ejemplo #4.2.6. El mismo espacio S del ejemplo anterior puede considerarse dividido en compases, cada uno de los cuales contiene N tiempos o pulsos. Entonces tenemos clases de pulsos, N diferentes. Por ejemplo en el compás $12/8$ hay 12 pulsos, luego $N = 12$ clases de pulsos.

Ejemplo #4.2.7. El espacio musical S es una familia de duraciones, cada duración mide un espacio de tiempo en unidades de tiempo. Dados dos elementos s y t , $int(s, t) = t/s$.

Ejemplo #4.2.8. El espacio musical S es una familia de duraciones pero $int(s, t) = (t-s)$ en lugar del cociente. En este sistema “aditivo” los intervalos se miden en unidades de tiempo, mientras en el sistema de “cocientes” del ejemplo anterior $int(s, t)$ es un simple número sin dimensión.

Todos estos ejemplos tienen ciertas características estructurales comunes, especialmente el tratamiento de los intervalos nos hace intuir alguna similitud con la estructura matemática de grupo: dados los intervalos i y j podemos componerlos de alguna manera, por ejemplo suma, suma (mod 12), multiplicación, verificando las siguientes propiedades:

- La composición de intervalos $i:j$ es también un intervalo del sistema. Para cualquier elemento r , s y t del espacio musical S , el intervalo i de r a s compuesto con el intervalo j de s a t produce el intervalo $i:j$ de r a t . Simbólicamente $int(r, s) \cdot int(s, t) = int(r, t)$.
- Asociativa. $i \cdot (j \cdot k) = (i \cdot j) \cdot k$.
- Elemento Neutro. $int(s, s) = e$ tal que $j \cdot e = e \cdot j = j$.
- Elemento Simétrico. Cada intervalo i tiene su “intervalo inverso” i^{-1} en el sentido $i^{-1} \cdot i = i \cdot i^{-1} = e$. Si $i = int(s, t)$ entonces $i^{-1} = int(t, s) = int(s, t)^{-1}$.

Definición #4.2.1. Se llama *Generalized Interval System* (GIS) a la tripla ordenada $(S, IVLS, int)$, donde S , el espacio del GIS, es una familia de elementos, $IVLS$, el grupo de intervalos del GIS, es un grupo matemático, e int la función $int: S \times S \longrightarrow IVLS$, que cumple las dos condiciones siguientes:

- (A) Para todo $r, s, t \in S$, $int(r, s) \cdot int(s, t) = int(r, t)$.
- (B) Para cada $s \in S$, $i \in IVLS$, existe un único elemento $t \in S$ situado a la distancia del intervalo i desde s , es decir, existe un único elemento $t \in S$ que satisface la ecuación $int(s, t) = i$.

De la definición del GIS y la condición (A) se obtiene que:

- $int(s, s) = e$. En efecto, $int(s, s) \cdot int(s, s) = int(s, s)$, multiplicando ambos miembros por $int(s, s)^{-1}$ se sigue $int(s, s) = e$.
- $int(t, s) = int(s, t)^{-1}$. Como $int(s, t) \cdot int(t, s) = int(s, s) = e$, multiplicando ambos miembros por $int(s, t)^{-1}$ se sigue $int(t, s) = int(s, t)^{-1}$.

La condición (B), intuitivamente, garantiza que el espacio S es suficientemente grande como para contener todos los elementos que puedan ocurrir. Es decir, dado un elemento s y cualquier intervalo i de medida, distancia o movimiento que podamos intuir, entonces tiene que existir un elemento t que se encuentre a la distancia i de s . En algunos casos esta condición puede implicar que el espacio S sea infinito o contenga elementos fuera de la familia de elementos musicalmente practicables. Aún así es perfectamente plausible trabajar en el espacio formal del GIS como un espacio de posibilidades teóricas.

Hay un matiz de la condición (B) que merece ser estudiado. Dados s e i , la condición exige que sea un único elemento t el que satisfaga que $int(s, t) = i$. Esto parece muy restrictivo, veamos qué pasa si en su lugar se permite que haya “algún” elemento, pero no que sea único. Si existe otro t' que cumple $int(s, t') = i$, entonces $int(s, t) \cdot int(t, t') = int(s, t') = i = int(s, t)$, de donde $int(t, t') = e$. Si definimos una relación de equivalencia $EQUIV$ en S tal que r y r' son equivalentes si y sólo si $int(r, r') = e$, entonces el espacio S se puede particionar en clases de equivalencia y la familia de clases de equivalencia, es decir, el nuevo espacio cociente $S/EQUIV$, junto con el grupo de intervalos entre clases de equivalencia, que es el mismo $IVLS$, forman un nuevo GIS. Es inmediato que este GIS cumple la condición (B) “restrictiva”, y

no parece evidente que el espacio S presente posibilidades que no puedan satisfacerse igual con el espacio reducido $S/EQUIV$ de clases de equivalencia.

En este momento podemos revisar los ejemplos anteriores que hemos visto y observar las estructuras GIS que sugieren.

Ejemplo #4.2.9. En el ejemplo #4.2.1 el espacio S es la escala cromática temperada extendida indefinidamente, el grupo $IVLS$ es el conjunto de los números enteros con la operación usual de suma y la función $int(s, t) = i = \text{n}^\circ$ de semitonos de s a t , i será negativo si t es anterior a s . Es inmediato comprobar que el sistema GIS así definido cumple las condiciones (A) y (B).

El espacio S del ejemplo #4.2.2 es el conjunto de las 12 clases de notas de la escala cromática temperada, el grupo $IVLS$ es el conjunto de los números enteros con la operación de suma módulo 12 y la función $int(s, t) = i = \text{n}^\circ$ de semitonos de s a $t \pmod{12}$.

El GIS del ejemplo #4.2.3 tiene como espacio S la familia extendida de todas las notas posibles en entonación justa. El grupo $IVLS$ aquí es el grupo multiplicativo de los números racionales que se pueden expresar en la forma $2^a 3^b 5^c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y la función $int()$ es el cociente de sus frecuencias $int(s, t) = FQ(t)/FQ(s)$.

En el ejemplo #4.2.4 el espacio S se ha representado en la tabla bidimensional, de modo que $IVLS$ es el grupo de los pares ordenados de enteros (a, b) con la operación suma de sus componentes: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Es decir, $IVLS$ es el producto directo de los enteros con la operación suma consigo mismo. En este caso $int(s, t) = (a, b)$, lo que significa que t está a posiciones al este y b posiciones al norte de s en la tabla.

El resto de ejemplos, #4.2.5 a #4.2.8, son análogos sin más que considerar en vez de notas, pulsos de tiempo o duración.

4.2.1.- GIS. Características Formales

Lo primero que vamos a introducir es una terminología formal para referirnos a los objetos del espacio S de un sistema GIS. Se trata de una generalización de la nomenclatura familiar que ya conocemos de etiquetar las notas de la escala cromática C, C#, D, ..., Bb, B con los números enteros 0, 1, 2, ..., 10, 11 (mod 12), de modo que en cualquier GIS siempre podemos usar los intervalos del grupo $IVLS$ para etiquetar los elementos de S por sus respectivos intervalos desde un elemento de referencia en el propio espacio S .

Definición #4.2.1.1. Dado un GIS $(S, IVLS, int)$ y un miembro de referencia “*ref*” en S , se define la función **LABEL**: $S \longrightarrow IVLS$: $s \longrightarrow LABEL(s) = int(ref, s)$.

Teorema #4.2.1.1. Sea cual sea el elemento *ref*, la función **LABEL**: $S \longrightarrow IVLS$ es biyectiva y satisface la ecuación $int(s, t) = LABEL(s)^{-1} \cdot LABEL(t)$.

Prueba: Dado el elemento $ref \in S$, para cualquier intervalo $i \in IVLS$, por la condición (B) de la definición #4.2.1 de GIS, existe uno y sólo un elemento $s \in S$ que verifica $int(ref, s) = i$. Como

$int(ref, s) = LABEL(s)$, se sigue que para todo $i \in IVLS$ existe un $s \in S$ tal que $LABEL(s) = i$, luego es sobreyectiva, además es único por lo que también es inyectiva.

Por la definición #4.2.1.1, $LABEL(s)^{-1} \cdot LABEL(t) = int(ref, s)^{-1} \cdot int(ref, t)$. De la definición #4.2.1 de GIS Sabemos que $int(ref, s)^{-1} = int(s, ref)$, luego $LABEL(s)^{-1} \cdot LABEL(t) = int(s, ref) \cdot int(ref, t) = int(s, t)$ c.q.d.

En el ejemplo #4.2.9 se han descrito los sistemas GIS asociados a diferentes espacios musicales vistos en ejemplos anteriores. El espacio S del ejemplo #4.2.1 es la escala cromática temperada extendida indefinidamente y el espacio del ejemplo #4.2.2 es el conjunto de las 12 clases de notas de la escala cromática temperada. Observando ambos espacios se intuye que bajo alguna relación de equivalencia podemos obtener el segundo espacio como espacio cociente del primero. Si los llamamos S_1 y S_2 respectivamente, la relación de equivalencia $EQUIV$ en S_1 definida por el intervalo de octava, es decir, dados $s, s' \in S_1$, $(s) EQUIV (s') \Leftrightarrow s' = s$ (módulo octava), tiene como clases de equivalencia precisamente a las notas del espacio S_2 . Podríamos poner $S_2 = S_1/EQUIV$.

Este mecanismo se puede extender al sistema GIS asociado y generalizarlo para construir nuevas estructuras GIS cocientes.

Definición #4.2.1.2. Una **Congruencia** $CONG$ en un grupo G es una relación de equivalencia que tiene la siguiente propiedad: si $(x_1) CONG (y_1)$ y $(x_2) CONG (y_2)$ entonces $(x_1 \cdot x_2) CONG (y_1 \cdot y_2)$. El grupo G se puede particionar en clases de congruencia que son los elementos del grupo cociente $G/CONG$. Denotaremos \underline{x} a la clase de congruencia (equivalencia) formada por todos los elementos congruentes con x .

Teorema #4.2.1.2. Dado un GIS $(S, IVLS, int)$ y una congruencia $CONG$ en el grupo $IVLS$, entonces se induce una relación de equivalencia $EQUIV$ en el espacio S , de modo que s y s' son equivalentes si $int(s, s')$ es congruente con la identidad e en $IVLS$. La relación de equivalencia $EQUIV$ se denomina **equivalencia inducida** en S .

Prueba: $int(s, s) = e$, luego $(s) EQUIV (s)$ y $EQUIV$ es reflexiva. Si $(int(s, s')) CONG (e)$ significa que $(s) EQUIV (s')$, es inmediato que $(int(s, s')^{-1}) CONG (e)$, de donde $(int(s', s)) CONG (e)$, es decir, $(s') EQUIV (s)$. Se sigue que $EQUIV$ es simétrica. Si $(int(s, s')) CONG (e)$, $(int(s', s'')) CONG (e)$, entonces $(int(s, s'')) = int(s, s') \cdot int(s', s'')$ $CONG (int(s', s'')) CONG (e)$, luego $EQUIV$ es transitiva c.q.d.

Lema #4.2.1.1. Dado un GIS $(S, IVLS, int)$ y una congruencia $CONG$ en el grupo $IVLS$, sea $EQUIV$ la equivalencia inducida en S . Si $(s) EQUIV (s')$ y $(t) EQUIV (t')$, entonces $(int(s, t)) CONG (int(s', t'))$.

Prueba: $int(s, t) = int(s, s') \cdot int(s', t') \cdot int(t', t)$, pero $(int(s, s')) CONG (e)$, $(int(t', t)) CONG (e)$, luego con operaciones sencillas sobre la expresión se sigue $(int(s, t)) CONG (int(s', t'))$ c.q.d.

Teorema #4.2.1.3. Dado un GIS $(S_1, IVLS_1, int_1)$ y una congruencia $CONG$ en el grupo $IVLS_1$, sea $EQUIV$ la equivalencia inducida en S_1 . Sea S_2 el espacio cociente $S_1/EQUIV$, la familia de clases de equivalencia en S_1 bajo la relación de equivalencia inducida $EQUIV$. Sea $IVLS_2$ el grupo cociente $IVLS_1/CONG$ formado por las clases de congruencia en $IVLS_1$.

Entonces la función $int_2: S_2 \times S_2 \longrightarrow IVLS_2: (p, q) \longrightarrow int_2(p, q) = \underline{int_1}(s, t)$ para cualquier s y t pertenecientes a las clases de equivalencia p y q respectivamente, está bien definida. Además, $(S_2, IVLS_2, int_2)$ tiene estructura de GIS.

Prueba: El lema #4.2.1.1 asegura que la función int_2 está bien definida. En efecto, dados p y q , para cualquier $s, s' \in p$ y $t, t' \in q$ se tiene que $(int(s, t)) \text{ CONG } (int(s', t'))$, por lo que $int_2(p, q) = \underline{int_1}(s, t)$ sólo depende de las clases de equivalencia p y q , y no de los elementos s y t escogidos. Ahora nos queda probar que $(S_2, IVLS_2, int_2)$ tiene estructura de GIS, para ello basta con comprobar que verifica las condiciones (A) y (B) de la definición #4.2.1. Esta demostración es sencilla teniendo en cuenta la estructura de GIS del sistema $(S_1, IVLS_1, int_1)$, así que para no extender demasiado este trabajo, se deja como ejercicio al lector.

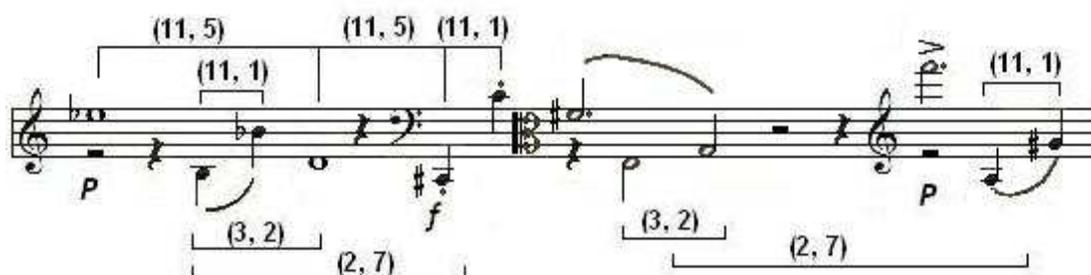
Definición #4.2.1.3. En las condiciones del teorema #4.2.1.3, el GIS $(S_2, IVLS_2, int_2)$ se denomina GIS *cociente* de $(S_1, IVLS_1, int_1)$ (*módulo CONG*) y se escribe $\mathbf{GIS}_2 = \mathbf{GIS}_1/\text{CONG}$.

Otro método habitual para construir GIS es mediante el producto directo. Antes de entrar en la discusión formal de esta idea, veamos un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo #4.2.1.1. Sea \mathbf{GIS}_1 el GIS del ejemplo #4.2.2, S_1 es el espacio de las 12 clases de notas de la escala cromática temperada, el grupo $IVLS_1$ es el conjunto de los números enteros con la operación de suma módulo 12 y la función $int_1(p, q)$ el n° de semitonos de p a q (mod 12). Sea \mathbf{GIS}_2 el GIS del ejemplo #4.2.5, donde S_2 es una sucesión de puntos de tiempo separados regularmente, $IVLS_2$ es el conjunto de los números enteros con la operación de suma y la función $int_2(s, t)$ el n° de pulsos de tiempo desde el punto de tiempo s al punto t .

Vamos a construir un nuevo GIS, \mathbf{GIS}_3 , como sigue. S_3 es el producto cartesiano $S_1 \times S_2$, esto es la familia de pares ordenados (p, s) , donde p es una clase de notas en S_1 y s un punto de tiempo en S_2 . $IVLS_3$ es el producto directo de los grupos $IVLS_1$ y $IVLS_2$, por tanto $IVLS_3 = IVLS_1 \otimes IVLS_2$ es un grupo también. Un objeto de $IVLS_3$ tiene la forma (i, j) , donde i es un entero (mod 12) y j un entero. Los elementos de $IVLS_3$ se combinan según la ley del producto directo de grupos: $(i_1, j_1) + (i_2, j_2) = (i_1 + i_2, j_1 + j_2)$, siendo $i_1 + i_2$ la suma (mod 12) en $IVLS_1$ y $j_1 + j_2$ la suma usual de enteros en $IVLS_2$. La función int_3 opera de la siguiente manera: dados dos elementos $(p, s), (q, t) \in S_3$, el intervalo $int_3((p, s), (q, t)) = (int_1(p, q), int_2(s, t)) \in IVLS_1 \otimes IVLS_2 = IVLS_3$. Es sencillo comprobar que el sistema $(S_3, IVLS_3, int_3)$ así construido verifica las condiciones (A) y (B) de los GIS.

La siguiente figura ilustra un fragmento musical del tercer movimiento “Variaciones para piano op. 27” de Anton Webern (1883-1945). Las líneas de enlace visualizan algunos intervalos de interés del tipo \mathbf{GIS}_3 que se acaba de definir y sugieren la relevancia que puede tener este sistema \mathbf{GIS}_3 para el análisis teórico musical.



Webern op.27. Variaciones para piano.

Un elemento del espacio S_3 es el par $(B, 35)$ que representa la aparición de la nota B (SI) en el tiempo 35. Otro es el par $(D, 37)$, que se refiere a la nota D (RE) en el 37. El intervalo entre ambos elementos es $(int_1(B, D), int_2(35, 37)) = (3, 2)$. Este intervalo pertenece al grupo $IVLS_3$ y se puede interpretar como un intervalo de 3 semitonos entre notas que ocurren en momentos separados por dos unidades de tiempo. No entraremos en un análisis detallado en términos musicales, simplemente resaltar que la recurrencia de ciertos intervalos GIS_3 en este pasaje tiene su significado musical ya que se puede asociar con conceptos descriptivos de la expresividad musical, cadencia, acompañamiento, predominancia, etc.

Definición #4.2.1.4. Dados $GIS_1 = (S_1, IVLS_1, int_1)$ y $GIS_2 = (S_2, IVLS_2, int_2)$, se denomina **producto directo $GIS_1 \otimes GIS_2$** al sistema $GIS_3 = (S_3, IVLS_3, int_3)$ construido de la siguiente manera:

- S_3 es el producto cartesiano $S_1 \times S_2$, es decir, la familia de elementos (s_1, s_2) , donde s_1 y s_2 son elementos de S_1 y S_2 respectivamente.
- $IVLS_3$ es el producto directo de los grupos $IVLS_1 \otimes IVLS_2$. Los elementos de $IVLS_3$, esto es, los pares (i, j) , se combinan (formando un grupo) según la ley del producto directo de grupos: $(i_1, j_1) \cdot (i_2, j_2) = (i_1 \cdot i_2, j_1 \cdot j_2)$.
- La función int_3 opera en $S_3 \times S_3 \longrightarrow IVLS_3$ de la siguiente manera: dados dos elementos $(s_1, s_2), (t_1, t_2) \in S_3$, el intervalo $int_3((s_1, s_2), (t_1, t_2)) = (int_1(s_1, t_1), int_2(s_2, t_2))$.

Faltaría comprobar que el sistema $GIS_3 = (S_3, IVLS_3, int_3)$ definido verifica las condiciones (A) y (B) de los GIS, lo cual es sencillo considerando los sistemas GIS_1 y GIS_2 de partida.

4.2.2.- GIS. Transposiciones e Inversiones

En este capítulo se describen los conceptos de “transposición” e “inversión” de elementos de un espacio S como operaciones naturales en cualquier GIS, relacionados con la estructura de intervalos y la combinación de los mismos. Se exploran determinadas características, como por ejemplo las operaciones que preservan los intervalos, las cuales pueden coincidir o no con las operaciones de transposición dependiendo de que el grupo de intervalos sea o no conmutativo.

Definición #4.2.2.1. Se llama **transformación** en el espacio musical S a toda función T sobre un espacio musical en sí mismo, $T: S \longrightarrow S$. Si la función es biyectiva, entonces se dice que es una **operación**.

Definición #4.2.2.2. Dado un GIS y un intervalo $i \in IVLS$, se define **Transposición por i (T_i)**, a la transformación en S que asigna a cada $s \in S$ el elemento $T_i(s)$ de S que está a un intervalo i de s . Este elemento $T_i(s)$ es único y queda bien definido por la ecuación $int(s, T_i(s)) = i$. En efecto la famosa condición (B) de los GIS garantiza que dados i y s existe un único t tal que $int(s, t) = i$. Es precisamente t el elemento al que hemos llamado “transposición por i de s ”, $T_i(s)$.

Teorema #4.2.2.1. Cada transposición T_i es una **operación**, es decir, es una transformación biyectiva en S . Las operaciones de transposición T_i forman un grupo que es anti-isomorfo con el grupo de intervalos $IVLS$. Específicamente, la aplicación $f: IVLS \longrightarrow \{T_i, i \in IVLS\}: i \longrightarrow f(i) = T_i$ es un anti-isomorfismo: f es biyectiva y $T_i \cdot T_j = T_{ji}$.

Prueba: Primero demostraremos que f es un anti-homomorfismo, esto es, $T_i \cdot T_j = T_{ji}$. Dados los intervalos i, j y el objeto s , usando la condición (A) $int(s, T_i(T_j(s))) = int(s, T_j(s)) int(T_j(s), T_i(T_j(s)))$. De la definición #4.2.2.2 de transposición por i se sigue que $int(s, T_i(T_j(s))) = ji$. Por tanto, $T_i(T_j(s))$ está a un intervalo ji de s , es decir, $T_{ji}(s)$. Esto significa de la composición de transformaciones $T_i \cdot T_j$ tiene el mismo efecto que la transformación T_{ji} , luego $T_i \cdot T_j = T_{ji}$.

Veamos ahora que f es biyectiva. Por la construcción de f es inmediato que es sobreyectiva. Para probar que es inyectiva basta con demostrar que si $T_i = T_j$ entonces i y j son el mismo intervalo. Pero para cada $s \in S$, si $T_i(s) = T_j(s)$, entonces $i = int(s, T_i(s)) = int(s, T_j(s)) = j$.

Nos queda probar que T_i es una operación y que la familia de transposiciones $\{T_i, i \in IVLS\}$ forman un grupo de operaciones. Para ello veamos que es suficiente con demostrar que la familia de transposiciones satisface las siguientes condiciones:

- i) $\{T_i, i \in IVLS\}$ es una familia cerrada, esto es, para cualquier $i, j \in IVLS$ la composición $T_i \cdot T_j$ también es un miembro de la familia. Esto es evidente habiendo probado que $T_i \cdot T_j = T_{ji}$.
- ii) Dado cualquier T_i , existe un T_j tal que $T_i \cdot T_j = T_j \cdot T_i = 1$. Es inmediato que T_e , siendo e el intervalo identidad del grupo $IVLS$, es la transposición identidad, es decir, $T_e(s) = s = I(s)$. Por tanto, dado el intervalo i , si elegimos $j = i^{-1}$, entonces $ij = ji = e$, se sigue $T_i \cdot T_j = T_{ji} = T_e = 1$. Análogamente $T_j \cdot T_i = T_{ij} = T_e = 1$.

La condición ii) nos dice que toda transposición T_i tiene su inversa T_i^{-1} por lo que es biyectiva, luego es una operación.

Finalmente se sigue que la familia de operaciones de transposición por i $\{T_i, i \in IVLS\}$ forman un grupo de operaciones.

Teorema #4.2.2.2. Fijado un elemento de referencia “ ref ” en S , entonces $LABEL(T_i(s)) = LABEL(s) \cdot i$.

Prueba: $LABEL(T_i(s)) = int(ref, T_i(s)) = int(ref, s) int(s, T_i(s)) = LABEL(s) \cdot i$.

Este teorema #4.2.2.2 nos está diciendo que, independientemente del elemento de referencia escogido, la etiqueta para la transposición por i de s , es la etiqueta del propio s multiplicada a la derecha por el intervalo i . Esto sugiere una pregunta natural: ¿Qué ocurriría si se multiplicara a la izquierda?

Definición #4.2.2.3. Fijado un elemento de referencia ref en S y un intervalo i , la transformación P_i (más preciso P_i^{ref}) se define en S por la fórmula $LABEL(P_i(s)) = i \cdot LABEL(s)$, que satisface la relación $int(ref, P_i(s)) = i \cdot int(ref, s)$.

Notar que el valor de $P_i(s)$ depende del elemento ref elegido, en contraste con las transposiciones $T_i(s)$, $int(s, T_i(s)) = i$. En efecto, $int(s, P_i(s)) = int(s, ref) int(ref, P_i(s)) = int(s, ref) \cdot i \cdot int(ref, s)$.

Teorema #4.2.2.3. Las transformaciones P_i forman un grupo de operaciones isomorfo al grupo de intervalos $IVLS$ bajo la aplicación $f: IVLS \longrightarrow \{P_i, i \in IVLS\}: i \longrightarrow f(i) = P_i$. En particular se verifica la fórmula $P_i \cdot P_j = P_{ij}$.

Prueba: $LABEL(P_i(P_j(s))) = i \cdot LABEL(P_j(s)) = i \cdot j \cdot LABEL(s) = LABEL(P_{ij}(s))$. De donde $P_i(P_j(s)) = P_{ij}(s)$, como se cumple para todo s , $P_i \cdot P_j = P_{ij}$.

Luego la aplicación f es un homomorfismo sobreyectivo. Pero también es inyectiva pues si $P_i = P_j$, para cualquier elemento s en S se cumple que $i \cdot LABEL(s) = LABEL(P_i(s)) = LABEL(P_j(s)) = j \cdot LABEL(s)$, lo cual implica que $i = j$. Por tanto f es un isomorfismo.

Queda demostrar que $\{P_i, i \in IVLS\}$ tiene estructura de grupo, pero el proceso es completamente análogo al grupo de transposiciones del Teorema #4.2.2.1, por lo que no lo repetiremos.

Las operaciones P_i tienen una propiedad importante y es que son transformaciones que “*preservan los intervalos*”. Veamos qué significa esto exactamente.

Definición #4.2.2.4. Dado un GIS $(S, IVLS, int)$, una transformación X se dice que “*preserva los intervalos*” si para cada $s, t \in S$ verifica que $int(X(s), X(t)) = int(s, t)$.

Teorema #4.2.2.4. Independientemente del elemento ref elegido, las transformaciones en S que preservan los intervalos son justamente las operaciones P_i .

Prueba: Primero veamos que P_i preserva los intervalos.

$$int(P_i(s), P_i(t)) = LABEL(P_i(s))^{-1} LABEL(P_i(t)) = (i \cdot LABEL(s))^{-1} (i \cdot LABEL(t)) = (LABEL(s)^{-1} \cdot i^{-1}) (i \cdot LABEL(t)) = LABEL(s)^{-1} LABEL(t) = int(s, t).$$

Ahora suponiendo que X es una transformación que preserva los intervalos en S , tendremos que encontrar un intervalo i tal que $X = P_i$. El i que buscamos es $LABEL(X(ref)) = int(ref, X(ref))$. En efecto, $LABEL(X(s)) = int(ref, X(s)) = int(ref, X(ref)) int(X(ref), X(s)) = i \cdot int(X(ref), X(s)) = i \cdot int(ref, s) = i \cdot LABEL(s) = LABEL(P_i(s))$. Luego $LABEL(X(s)) = LABEL(P_i(s))$, por tanto $X(s) = P_i(s)$ para todo s . Se sigue que $X = P_i$ c.q.d.

De este último teorema podemos deducir que las transformaciones que preservan los intervalos forman un grupo. Además, dado un elemento ref , es inmediato a cada operación P_i le corresponde otra operación P_j para un ref diferente, por lo que podemos referirnos en adelante al grupo de operaciones que preservan los intervalos P_i sin necesidad de especificar un elemento ref concreto.

Teorema #4.2.2.5. Dado un intervalo i , las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) T_i preserva los intervalos.
- (b) $T_i = P_i$ para cualquier elemento ref .
- (c) i es central en $IVLS$, esto es, i conmuta con todo $j \in IVLS$.

Prueba: (a) \Rightarrow (b) Fijado cualquier ref , como T_i preserva los intervalos, por el teorema #4.2.2.4 anterior existe un $P_j = T_i$. Para todo s , $LABEL(T_i(s)) = LABEL(s) \cdot i = j \cdot LABEL(s) = LABEL(P_j(s))$. En particular, para $s = ref$, $LABEL(ref) \cdot i = j \cdot LABEL(ref)$, pero $LABEL(ref) = int(ref, ref) = e$, luego $i = j$. Se sigue $T_i = P_i$.

(b) \Rightarrow (c) Suponiendo que $T_i = P_i$ para cualquier elemento ref , para cada s $LABEL(T_i(s)) = LABEL(P_i(s))$, luego $LABEL(s) \cdot i = i \cdot LABEL(s)$. Pero esto significa que i conmuta con cada $j \in IVLS$, pues para cada j se puede elegir el elemento s tal que $LABEL(s) = j$, es decir, que cae en el intervalo j desde ref . Esto es, $j \cdot i = i \cdot j$.

(c) \Rightarrow (a) Fijado cualquier $ref \in S$, para todo s, t se tiene: $int(T_i(s), T_i(t)) = LABEL(T_i(s))^{-1} LABEL(T_i(t)) = (LABEL(s) \cdot i)^{-1} (LABEL(t) \cdot i) = i^{-1} \cdot LABEL(s)^{-1} LABEL(t) \cdot i = i^{-1} \cdot int(s, t) \cdot i = i^{-1} \cdot i \cdot int(s, t) = int(s, t)$. Luego $int(T_i(s), T_i(t)) = int(s, t)$, por tanto T_i preserva los intervalos.

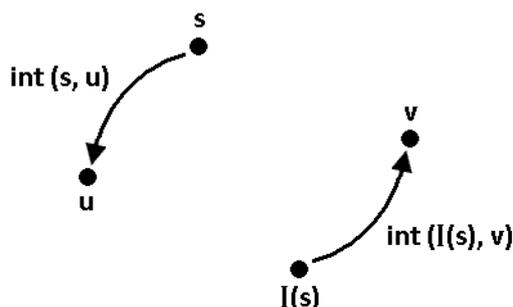
Corolario #4.2.2.1.

- (1) En un GIS conmutativo (cuyo grupo de intervalos $IVLS$ es abeliano), las operaciones de transposición son, precisamente, las operaciones que preservan los intervalos.
- (2) En un GIS no conmutativo existen transposiciones que no preservan los intervalos, al igual que existen operaciones que preservan los intervalos pero no son transposiciones.

Teorema #4.2.2.6. Las operaciones de transposición conmutan con las operaciones que preservan los intervalos.

Prueba: Fijado cualquier elemento de referencia ref , para todo T_i, P_j y cualquier elemento s , tenemos que $LABEL(P_j(T_i(s))) = j \cdot LABEL(T_i(s)) = j \cdot (LABEL(s) \cdot i) = (j \cdot LABEL(s)) \cdot i = LABEL(P_j(s)) \cdot i = LABEL(T_i(P_j(s)))$. Se sigue que $P_j(T_i(s)) = T_i(P_j(s))$ para todo s , luego $P_j T_i = T_i P_j$. Esto es, T_i conmuta con P_j c.q.d.

A continuación vamos a estudiar las “operaciones de inversión” en un GIS. La siguiente figura pretende ayudar a visualizar la definición de inversión siguiendo una intuición espacial de los intervalos.



Para cada $u, v \in S$ se puede definir una operación I_u^v “inversión u/v ” de modo que cualquier elemento s y su inversión $I_u^v(s)$ queden balanceados sobre los elementos u y v en una determinada proporción de intervalos. $I(s)$ (se sobreentiende que es $I_u^v(s)$) y v tienen una relación de intervalo que es la inversa del intervalo entre s y u . Esta proporción inversa está ilustrada en la figura mediante la posición en espejo de las flechas, esto es, $int(v, I(s)) = int(s, u)$.

Definición #4.2.2.5. Dados cualquier $u, v \in S$, la operación I_u^v “inversión u/v ” se define por la ecuación $int(v, I_u^v(s)) = int(s, u)$ para todo $s \in S$. En adelante I_u^v se abreviará por I cuando no haya posibilidad de confusión.

Esta operación está bien definida porque para cualquier s , si ponemos $i = int(s, u)$ entonces existe un único elemento t que está a un intervalo i de v . Este elemento t , que satisface la ecuación $int(v, t) = int(s, u)$ es precisamente el que buscamos $I_u^v(s)$.

Además esta transformación es una operación porque es biyectiva. Es sobreyectiva porque dado un elemento t existe un s tal que $t = I_u^v(s)$ que cumple $int(v, t) = int(v, I_u^v(s)) = int(s, u)$. Es inyectiva porque si $I_u^v(s) = I_u^v(s')$, entonces $int(s, u) = int(v, I_u^v(s)) = int(v, I_u^v(s')) = int(s', u)$, de donde $s = s'$.

Teorema #4.2.2.7. Fijado un elemento de referencia ref en S , entonces $LABEL(I_u^v(s)) = i \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot j$ siendo $i = LABEL(v)$ y $j = LABEL(u)$.

Prueba: $int(v, I(s)) = int(s, u)$, de donde $int(v, ref)int(ref, I(s)) = int(s, ref)int(ref, u)$, luego $LABEL(v)^{-1}LABEL(I(s)) = LABEL(s)^{-1}LABEL(u)$. Se sigue $i^{-1} \cdot LABEL(I(s)) = LABEL(s)^{-1} \cdot j$. Multiplicando por i tenemos $LABEL(I(s)) = i \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot j$ c.q.d.

Esta fórmula va a ser de mucha utilidad, por ejemplo para analizar si es posible que haya dos inversiones distintas que realicen la misma operación en S , es decir, $I_u^v(s) = I_x^w(s)$ para todo $s \in S$. El siguiente teorema desvela esta cuestión.

Teorema #4.2.2.8. $I_u^v = I_x^w$ si y sólo si $w = I_u^v(x)$ y el intervalo $int(x, u)$ es central.

Prueba: Fijado un elemento de referencia ref en S , sean i, j, k y m las respectivas $LABELs$ para v, u, w y x . Entonces, para cualquier s , $LABEL(I_u^v(s)) = i \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot j$, $LABEL(I_x^w(s)) = k \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot m$. Luego $I_u^v = I_x^w$ equivale a $i \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot j = k \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot m$ para todo $s \in S$.

Como s recorre todos los elementos de S , entonces $LABEL(s)^{-1}$ recorre todos los intervalos en $IVLS$. Luego la condición de partida es equivalente a $i \cdot n \cdot j = k \cdot n \cdot m$ para todo $n \in IVLS$. Como $IVLS$ es grupo, operando nos queda la siguiente condición equivalente a $I_u^v = I_x^w$:

$$n \cdot (j \cdot m^{-1}) = (i^{-1} \cdot k) \cdot n \text{ para todo } n \in IVLS. \quad (1)$$

(\Rightarrow) Suponiendo que la condición (1) es cierta, hay que demostrar que $w = I_u^v(x)$ y el intervalo $int(x, u)$ es central.

De la condición (1) para $n = e$ se obtiene que $i^{-1} \cdot k = j \cdot m^{-1}$. Llamamos $c = i^{-1} \cdot k = j \cdot m^{-1}$ y tenemos que $n \cdot c = c \cdot n$ para todo $n \in IVLS$, lo que significa que c es central. Además, $c = j \cdot m^{-1} = m^{-1} \cdot j$, pues $c \cdot m = j = m \cdot c$, luego $c = m^{-1} \cdot j$. Análogamente, $c = i^{-1} \cdot k = k \cdot i^{-1}$.

Como $i^{-1} \cdot k = LABEL(v)^{-1}LABEL(w) = int(v, w)$ y $m^{-1} \cdot j = LABEL(x)^{-1}LABEL(u) = int(x, u)$ entonces $int(v, w) = int(x, u)$ e $int(x, u) = c$ es central. Ahora la relación $int(v, w) = int(x, u)$, según la definición #4.2.2.5, significa que $w = I_u^v(x)$ c.q.d.

(\Leftarrow) Suponiendo que $w = I_u^v(x)$ y el intervalo $int(x, u)$ es central hay que probar que se verifica la condición (1).

Si $w = I_u^v(x)$ entonces $int(v, w) = int(x, u)$, $LABEL(v)^{-1}LABEL(w) = LABEL(x)^{-1}LABEL(u)$, se sigue que $i^{-1} \cdot k = m^{-1} \cdot j$.

Por hipótesis $int(x, u) = m^{-1} \cdot j = c$ es central, luego $n \cdot c = c \cdot n$ para todo $n \in IVLS$ y por el mismo razonamiento anterior se sigue que $n \cdot (j \cdot m^{-1}) = (i^{-1} \cdot k) \cdot n$ para todo $n \in IVLS$, que es precisamente la condición (1) c.q.d.

Notar que aunque en la demostración del teorema #4.2.2.8 se ha usado $LABEL$ y un elemento ref , La validez del teorema no depende de la elección de ref .

Corolario #4.2.2.2. $I_u^v = I_v^u$ si y sólo si el intervalo $int(v, u)$ es central.

Prueba: Por el teorema #4.2.2.8 anterior, $I_u^v = I_v^u$ sí y sólo si $u = I_u^v(v)$ y el intervalo $int(v, u)$ es central. Pero la definición #4.2.2.5 de inversión u/v , I_u^v , nos asegura que $int(v, I_u^v(v)) = int(v, u)$, de donde $u = I_u^v(v)$ c.q.d.

Aunque por la definición de inversión se cumple que $u = I_u^v(v) = I_v^u(v)$ y $v = I_u^v(u) = I_v^u(u)$, este corolario nos dice que en un sistema GIS la inversión u/v no tiene por qué ser la misma operación que la inversión v/u . Ambas operaciones I_u^v y I_v^u transforman u en v y v en u , pero puede haber otros elementos s tal que $I_u^v(s) \neq I_v^u(s)$. De hecho, este corolario asegura que existe ese elemento s si $\text{int}(v, u)$ no es central, lo cual está relacionado con el concepto de conmutatividad como vamos a ver a continuación.

Corolario #4.2.2.3.

- (1) En un GIS abeliano, $I_u^v = I_v^u$. Y en general, $I_u^v = I_x^w$ si y sólo si $w = I_u^v(x)$.
- (2) En un GIS no conmutativo siempre existe alguna inversión tal que $I_u^v \neq I_v^u$. Porque siempre existe algún intervalo $\text{int}(v, u)$ que no es central.

Es el momento de estudiar cómo se combinan las inversiones I_u^v con las Transposiciones T_n y las operaciones que preservan los intervalos P_n .

Teorema #4.2.2.9. Para cualquier transposición T_n y cualquier inversión I_u^v .

- i) $T_n I_u^v = I_x^v$, siendo $x = T_n(u)$.
- ii) $I_u^v T_n = I_u^w$, siendo $w = T_n^{-1}(v)$.
- iii) T_n conmuta con I_u^v sí y sólo si n es central y $n^2 = e$.

Prueba: Fijando un elemento de referencia ref en S , sean $i = LABEL(v)$ y $j = LABEL(u)$.

Entonces, $LABEL(T_n I_u^v(s)) = LABEL(I_u^v(s)) \cdot n = i \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot j \cdot n = LABEL(I_x^v(s))$, donde x es el elemento de S cuya $LABEL$ es $j \cdot n$. Así, $LABEL(x) = j \cdot n$, $LABEL(u) = j$, por tanto $x = T_n(u)$.

Como $LABEL(T_n I_u^v(s)) = LABEL(I_x^v(s))$ y s es cualquier elemento de S , se sigue que $T_n I_u^v = I_x^v$ c.q.d. en i).

Para probar ii) procedemos de la siguiente manera: $LABEL(I_u^v T_n(s)) = i \cdot LABEL(T_n(s))^{-1} \cdot j = i \cdot (LABEL(s) \cdot n)^{-1} \cdot j = i \cdot n^{-1} \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot j = LABEL(I_u^w(s))$, donde w es el elemento de S cuya $LABEL$ es $i \cdot n^{-1}$. Así, $LABEL(w) = i \cdot n^{-1}$, $LABEL(v) = i$, por tanto w es la transposición n^{-1} de v , $w = T_{n^{-1}}(v)$. Pero $T_{n^{-1}} = T_n^{-1}$, luego $w = T_n^{-1}(v)$ ($T_i T_j = T_{ji}$, $\{T_n\}$ es anti-isomorfo a $IVLS$).

Como $LABEL(I_u^v T_n(s)) = LABEL(I_u^w(s))$ y s es cualquier elemento de S , se sigue que $I_u^v T_n = I_u^w$ c.q.d. en ii).

De las fórmulas probadas en i) y ii) podemos establecer que $T_n I_u^v = I_u^v T_n$ sí y sólo si $I_x^v = I_u^w$, siendo $x = T_n(u)$ y $w = T_n^{-1}(v)$. Por el teorema #4.2.2.8, $I_x^v = I_u^w$ si y sólo si $w = I_x^v(u)$ y el intervalo $\text{int}(u, x)$ es central. Lo que es equivalente, según la definición #4.2.2.5, sí y sólo si $\text{int}(v, I_x^v(u)) = \text{int}(v, w) = \text{int}(u, x)$ e $\text{int}(u, x)$ es central. Pero $\text{int}(u, x) = n$, (de $x = T_n(u)$), e $\text{int}(v, w) = n^{-1}$ (de $w = T_n^{-1}(v)$). Recapitulando, $T_n I_u^v = I_u^v T_n$, es decir, T_n conmuta con I_u^v sí y sólo si $n = n^{-1}$ y n es central c.q.d. en iii).

El teorema #4.2.2.9 determina los intervalos n en un sistema GIS para que la transposición T_n conmute con cualquier inversión. En el conocido GIS de las 12 clases de notas de la escala cromática, T_6 (transposición tritono) conmuta con cada operación de inversión, lo cual significa que si se invierte una nota y se transporta por un tritono, se obtiene el mismo resultado que si primero se transporta por un tritono y luego se invierte. En este GIS no existe otra transposición con esta propiedad, excepto la identidad trivial T_0 , pues $n + n = 0 \pmod{12}$ sólo se cumple para $n = 6$.

El siguiente teorema nos enseña cómo se combinan las inversiones con las operaciones que preservan los intervalos P_n .

Teorema #4.2.2.10. Para cualquier operación que preserve los intervalos P e inversión I_u^v .

- i) $PI_u^v = I_u^w$, siendo $w = P(v)$.
- ii) $I_u^v P = I_x^v$, siendo $x = P^{-1}(u)$.
- iii) P conmuta con I_u^v sí y sólo si $P = T_c$, para alguna transposición T_c tal que c es central y $c^2 = e$.

Prueba: La demostración de este teorema es completamente paralela al teorema #4.2.2.9 anterior, por lo que no la incluimos para no extender excesivamente este trabajo.

Teorema #4.2.2.11. Fijado un elemento de referencia ref en S , sean i, j, k y m las respectivas LABELS para v, u, w y x . Entonces, $I_u^v I_x^w = P_{im^{-1}} T_{k^{-1}j}$.

Prueba: Dado cualquier s , sabemos que $LABEL(I_u^v(s)) = i \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot j$ y $LABEL(I_x^w(s)) = k \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot m$. Luego $LABEL(I_u^v I_x^w(s)) = i \cdot (LABEL(I_x^w(s)))^{-1} \cdot j = i \cdot (k \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot m)^{-1} \cdot j = i \cdot (m^{-1} \cdot LABEL(s) \cdot k^{-1}) \cdot j = (i \cdot m^{-1}) \cdot LABEL(s) \cdot (k^{-1} \cdot j) = LABEL(P_{im^{-1}} T_{k^{-1}j}(s))$. Como $LABEL(I_u^v I_x^w(s)) = LABEL(P_{im^{-1}} T_{k^{-1}j}(s))$ para todo s , se sigue $I_u^v I_x^w = P_{im^{-1}} T_{k^{-1}j}$ c.q.d.

Corolario #4.2.2.4. I_v^u es la operación inversa de I_u^v .

Prueba: Dados u y v , hacemos $x = v$ y $w = u$ en el teorema #4.2.2.11 anterior. Entonces, $m = i$ y $k = j$, de donde $i \cdot m^{-1} = k^{-1} \cdot j = e$. Se sigue que $I_u^v I_v^u = P_e T_e = e$. Simétricamente se demuestra que $I_v^u I_u^v = P_e T_e = e$. Se concluye que I_v^u e I_u^v son operaciones inversas c.q.d.

Corolario #4.2.2.5. Sean la transposición T y la inversión I en un GIS conmutativo.

- i) $I^{-1} = I$.
- ii) $IT = T^{-1}I$.

Prueba: i) se sigue de los corolarios #4.2.2.4 y #4.2.2.3 (1). Para probar ii) hacemos $J = IT$, que es una inversión por el teorema #4.2.2.9. Por tanto cumple que $J = J^{-1}$. Luego $IT = J = J^{-1} = (IT)^{-1} = T^{-1}I^{-1} = T^{-1}I$ c.q.d.

En el teorema #4.2.2.1 se estableció que la familia de transposiciones $\{T_i, i \in IVLS\}$ forma un grupo de operaciones, que denominamos **TNSPS**. Así mismo, las operaciones que preservan los intervalos

$\{P_i, i \in IVLS\}$, según el teorema #4.2.2.3, forman el grupo **PSVS**. Si llamamos **INVS** a la familia de todas las operaciones de inversión, el siguiente teorema nos ilustra una visión global en la que se combinan todos los tipos de operaciones.

Teorema #4.2.2.12. Sea **PETEY** la familia de todas las operaciones en S que se pueden expresar de la forma PT , donde P es una operación que preserva los intervalos y T es una transposición. Sea **PETINV** la familia **PETEY** más la familia de inversiones **INVS**, esto es, $PETINV = PETEY \cup INVS$.

- i) **PETEY** es un grupo de operaciones en S .
- ii) **PETINV** es un grupo de operaciones en S .

Prueba: i) Sean PT y $P'T'$ dos miembros cualesquiera de **PETEY**. Si ponemos $P'' = PP'$ y $T'' = TT'$, como **PSVS** y **TNSPS** son grupos, entonces $P'' \in PSVS$ y $T'' \in TNSPS$, con lo que $P''T'' \in PETEY$. Además, aplicando el teorema #4.2.2.6, $(PT)(P'T') = P(TP')T' = P(P'T)T' = P''T''$, de donde **PETEY** es una familia cerrada de operaciones.

Para probar que **PETEY** es un grupo es suficiente, como se vio en el teorema #4.2.2.1, con verificar que **PETEY** contiene al inverso de cada uno de sus miembros. Pero para todo $PT \in PETEY$ se cumple que $P^{-1}T^{-1} \in PETEY$ y $PT = TP$, luego $PT(P^{-1}T^{-1}) = TP(P^{-1}T^{-1}) = e$. Análogamente, $(P^{-1}T^{-1})PT = (P^{-1}T^{-1})TP = e$. Por tanto, $P^{-1}T^{-1}$ es el inverso de TP c.q.d.

Para probar ii) primero observamos que tanto **PETEY** como **INVS** son familias de operaciones que contienen los elementos inversos, por tanto su unión **PETINV** también contiene los inversos de sus elementos. Entonces, sólo queda probar que **PETINV** es una familia cerrada de operaciones. Dados dos elementos $X, Y \in PETINV$ hay que demostrar que XY pertenece también a **PETINV**. Se distinguen cuatro casos posibles:

1. $X, Y \in PETEY$. Entonces $XY \in PETEY \subset PETINV$.
2. $X \in PETEY, Y \in INVS$. Hacemos $X = PT, Y = I$, de donde $TI = I'$ por el teorema #4.2.2.9 y $PI' = I''$ por el teorema #4.2.2.10. Entonces $XY = PTI = PI' = I'' \in INVS \subset PETINV$.
3. $X \in INVS, Y \in PETEY$. Análogamente hacemos $X = I, Y = PT$, de donde $IP = I'$ por el teorema #4.2.2.10 e $I'T = I''$ por el teorema #4.2.2.9. Entonces $XY = IPT = I'T = I'' \in INVS \subset PETINV$.
4. $X, Y \in INVS$. Entonces, por el teorema #4.2.2.11, $XY \in PETEY \subset PETINV$ c.q.d.

Para finalizar este capítulo vamos a introducir el concepto de transformación que “**invierte los intervalos**”, relacionada con las operaciones de inversión, en un sentido paralelo a la relación natural vista anteriormente entre las transposiciones y las operaciones que preservan los intervalos.

Definición #4.2.2.6. Una transformación Y en el espacio S de un sistema GIS $(S, IVLS, int)$ se dice que “**invierte los intervalos**” si para cada $s, t \in S$ verifica que $int(Y(s), Y(t)) = int(t, s)$.

Teorema #4.2.2.13. Fijado un elemento de referencia ref , si Y es una transformación que invierte los intervalos, entonces existe un intervalo i tal que $LABEL(Y(t)) = i \cdot LABEL(t)^{-1}$ para todo $t \in S$.

Prueba: Por definición $int(Y(t), Y(s)) = int(s, t)$, luego $LABEL(Y(t))^{-1} LABEL(Y(s)) = LABEL(s)^{-1} LABEL(t)$. Si tomamos $s = ref$, entonces $LABEL(s) = e$. Ahora hacemos

$i = LABEL(Y(ref))$, con lo que la ecuación nos queda como $LABEL(Y(t))^{-1} \cdot i = LABEL(t)$. Operando, $LABEL(Y(t))^{-1} = LABEL(t) \cdot i^{-1}$, se sigue $LABEL(Y(t)) = i \cdot LABEL(t)^{-1}$ c.q.d.

Teorema #4.2.2.14. En un GIS conmutativo (grupo de intervalos *IVLS* abeliano),

- (1) Las transformaciones que invierten los intervalos son operaciones de inversión.
- (2) Las operaciones de inversión son transformaciones que invierten los intervalos.

Prueba: (1) Fijado un elemento de referencia *ref*, del teorema #4.2.2.13 anterior si *Y* es una transformación que invierte los intervalos, entonces existe un intervalo *i* tal que $LABEL(Y(t)) = i \cdot LABEL(t)^{-1}$. Del teorema #4.2.2.7 $LABEL(I_u^v(s)) = i \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot j$ siendo $i = LABEL(v)$ y $j = LABEL(u)$. Se sigue $LABEL(I_u^v(s)) = LABEL(Y(s)) \cdot j$. Haciendo $u = ref$ tenemos que $j = e$, por tanto la transformación que invierte los intervalos *Y* coincide con la inversión I_{ref}^v c.q.d.

(2) Tenemos que probar que la inversión I_u^v invierte los intervalos. sean $i = LABEL(v)$ y $j = LABEL(u)$, entonces $int(I_u^v(s), I_u^v(t)) = LABEL(I_u^v(s))^{-1} LABEL(I_u^v(t)) = (i \cdot LABEL(s)^{-1} \cdot j)^{-1} (i \cdot LABEL(t)^{-1} \cdot j) = (j^{-1} \cdot LABEL(s) \cdot i^{-1}) (i \cdot LABEL(t)^{-1} \cdot j) = LABEL(t)^{-1} LABEL(s) = int(t, s)$ c.q.d.

Teorema #4.2.2.15. En un GIS no conmutativo no existen transformaciones que invierten los intervalos en *S*.

Prueba: Suponemos que *Y* es una transformación que invierte los intervalos en *S*. Para todos $s, t \in S$, $LABEL(Y(t))^{-1} LABEL(Y(s)) = LABEL(s)^{-1} LABEL(t)$. Por el teorema #4.2.2.13 existe un intervalo *i* tal que $LABEL(Y(t)) = i \cdot LABEL(t)^{-1}$. Sustituyendo, $(i \cdot LABEL(t)^{-1})^{-1} (i \cdot LABEL(s)^{-1}) = (LABEL(t) \cdot i^{-1}) (i \cdot LABEL(s)^{-1}) = LABEL(t) LABEL(s)^{-1} = LABEL(s)^{-1} LABEL(t)$. Lo que significa que *IVLS* es abeliano, en contra de la hipótesis c.q.d.

4.2.3.- G-Torsors. Grupo Simple Transitivo STRANS

Desde un punto de vista algebraico existe una similitud entre el concepto de GIS y un **G-Torsor** (**Espacio Principal Homogéneo**). Un G-Torsor es un espacio *S* en el que actúa un grupo *G* de manera regular, es decir, simple (libre) y transitivamente. Esto es equivalente a decir que:

- Para cualquier s, t existe un único elemento g en *G* tal que $g \cdot s = t$.
- El subgrupo estabilizador de cualquier elemento s es trivial (e).
- La órbita de cada elemento s es una biyección en *S*.

Es inmediato ver que cualquier grupo *G* es un G-Torsor consigo mismo, veamos ahora que un G-Torsor es isomorfo con *G*. Dado un elemento s en *S*, la aplicación $G \times s \longrightarrow S: (g, s) \longrightarrow g \cdot s = t$. es obviamente biyectiva, de donde *G* es isomorfo a *S*, aunque no es un isomorfismo canónico, pues depende de la elección arbitraria del elemento s en *S*. Por tanto, el espacio *S* es similar a *G* pero sin conocer cual es su punto de “*identidad*”, se podría decir que un G-Torsor es un grupo *G* “que ha olvidado su origen”. Existen casos similares en otras ramas de las matemáticas, por ejemplo un “espacio afín es como un espacio vectorial que ha olvidado su origen”.

Esta visión de acción de un grupo sobre un conjunto nos permite reemplazar el concepto de intervalo en un sistema GIS por el concepto de operación de transposición en un espacio. En lugar de: “ i es la distancia interválica de s a t ” podemos pensar: “ T_i es la única transposición en este espacio que transforma s en t ”.

Bajo este pensamiento, podemos sustituir la idea de estructura GIS por la idea de un espacio S junto con un grupo especial de operaciones en S . Este grupo de operaciones es lo que matemáticamente se denomina **acción simple transitiva** en S . Un grupo **STRANS** de operaciones en S es simple transitivo cuando satisface la siguiente condición: Para cualesquiera $s, t \in S$, existe un único miembro OP de **STRANS** tal que $OP(s) = t$.

Según lo visto en capítulos anteriores, dados s y t en el espacio de un GIS, existe una única operación de transposición T que cumple $T(s) = t$, ésta es $T_{int(s, t)}$. Por tanto, el grupo **TNSPS** de transposiciones es simple transitivo en el espacio S de cualquier sistema GIS.

El siguiente teorema demuestra la situación recíproca.

Teorema #4.2.3.1. Sea S un conjunto de objetos y **STRANS** un grupo de operaciones que actúa simple transitivamente en S , entonces existe un sistema GIS cuyo espacio es S y **STRANS** es su grupo de transposiciones.

Prueba: Dados S y **STRANS** como en el enunciado, sea **IVLS** una “familia de índices”, es decir, una familia de elementos i, j, k, \dots que se puede poner en correspondencia biyectiva con la familia **STRANS**. Podemos llamar OP_i a la operación de **STRANS** que se corresponde con el miembro i de la familia de índices **IVLS**. Ahora convertimos **IVLS** en un grupo definiendo la siguiente operación binaria: $i \cdot j = k$ en **IVLS** cuando $OP_j \cdot OP_i = OP_k$ en **STRANS**. Es obvio, por construcción, que el grupo **IVLS** es anti-isomorfo con el grupo **STRANS**.

Ya tenemos el espacio S y el grupo **IVLS**. Definimos la función $int: S \times S \longrightarrow \text{IVLS}: (s, t) \longrightarrow int(s, t) = i \in \text{IVLS}$ tal que $OP_i(s) = t$. Este i es único por ser **STRANS** simple transitivo.

Nos queda demostrar que el sistema (S, IVLS, int) así definido cumple las condiciones (A) y (B) de la definición #4.2.1 sobre *Generalized Interval Systems*. Pero si $int(s, t) = i$ e $int(t, u) = j$, que significa que $OP_i(s) = t$ y $OP_j(t) = u$, entonces $OP_j \cdot OP_i(s) = OP_j(t) = u$. Por la estructura de grupo de **IVLS** $OP_j \cdot OP_i = OP_{ij}$, de donde $OP_{ij}(s) = u$. Se sigue $int(s, u) = i \cdot j = int(s, t)int(t, u)$, es decir, se cumple la condición (A).

Por otro lado, dados s e i , sea $t = OP_i(s)$, de donde $int(s, t) = i$. Si t' es otro elemento de S que verifica $int(s, t') = i$, entonces $OP_i(s) = t'$. Se sigue $t = t'$. Luego dados s e i , existe un único elemento t tal que $int(s, t) = i$, lo que demuestra que se cumple la condición (B).

Por tanto, el sistema (S, IVLS, int) es un GIS y **STRANS** es su grupo de transposiciones, pues para todo elemento $s \in S$, $T_i(s)$ es el único elemento que cae en el intervalo i desde s , al igual que $OP_i(s)$. Luego $T_i = OP_i$ c.q.d.

En virtud del teorema #4.2.3.1 los sistemas GIS pueden interpretarse como un espacio S y un grupo de operaciones **STRANS** actuando simple transitivamente en S , lo que, sin duda, permite una representación matemática más elegante, $(\text{STRANS}, S): \text{STRANS} \times S \longrightarrow S$. En cualquier caso, la estructura (S, IVLS, int) de los sistemas GIS que se ha estado utilizando mantiene el concepto “histórico” principal de intervalo, frente a esta última concepción como “maquinaria transformacional”.

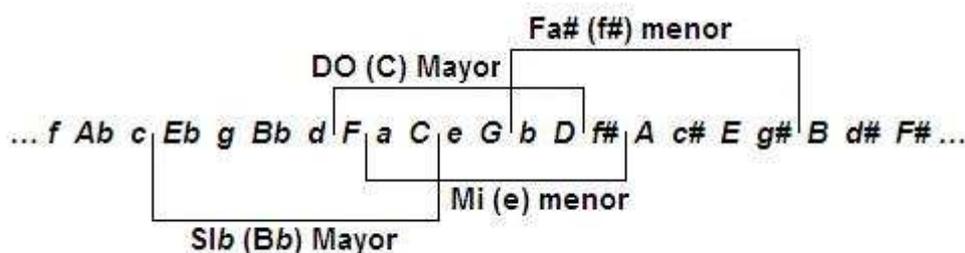
4.2.4.- Transformaciones Triádicas no interválicas

En este capítulo vamos a ver un caso particular de transformaciones donde David Lewin adoptó y modificó algunas ideas de las teorías originales de Hugo Riemann. El espacio musical va a consistir en unos objetos que denominó “*klangs*”. Aunque el significado musical original de “*klang*” es algo más complejo, aquí nos conformaremos con suponer que son tríadas armónicas consonantes, es decir, conjuntos de tres notas que guardan entre sí una relación de intervalos determinada. En capítulos precedentes ya hemos hablado de tríadas mayores y menores.

Cada *klang* se representa por un par ordenado $(p, signo)$, donde p es una nota (modulo octava) y el signo toma los valores $+$ y $-$ para mayor y menor respectivamente. El *klang* modela un objeto armónico cuya raíz ó tónica es la nota p y el signo determina el modo. Se puede transportar un *klang* transportando su raíz y preservando el signo. Por ejemplo DO Mayor $(C, +)$ trasportado por $5/6$, esto es, una tercera menor descendente (recordemos que en la escala de Aristógenes $6/5$ es el intervalo de tercera menor) resulta LA Mayor $(A, +)$. Utilizando las expresiones vistas de transposiciones sería $T(C, +) = (A, +)$. Sin embargo, para respetar el trabajo original de David Lewin, en este capítulo vamos a utilizar “*notación derecha*”, de modo que sería $(C, +)T = (A, +)$. Lewin entendía que esta nomenclatura era más natural en este contexto musical, al leerse: “DO Mayor transportado una tercera menor descendente es igual a LA Mayor”. En esta notación derecha hay que tener en cuenta que la composición de transformaciones opera de derecha a izquierda, es decir, si f y g son transformaciones, entonces $(klang)f:g = ((klang)f)g$, que sería equivalente a $g:f(klang)$ en notación izquierda.

Se define la transformación **DOM** sobre las tríadas como la transposición por el inverso del intervalo dominante, esto es, $(p, sig)DOM = (q, sig)$, donde q es la nota cuya dominante es la nota p . Leído según el apunte anterior: “ (p, sig) es la dominante de (q, sig) “. Por ejemplo, sabemos que SOL Mayor es la dominante de DO Mayor, que sería la tónica, equivalentemente: $(G, +)DOM = (C, +)$. Cuidado porque esta nomenclatura es distinta a la utilizada en los inicios (ver definición #4.1.1.4), sin embargo representa mejor los movimientos naturales en música. En la introducción musical se describió brevemente el concepto de progresión armónica y cómo, en general, los movimientos melódicos y armónicos se desenvuelven alrededor de la atracción que ejerce la tónica, que es el centro tonal.

Análogamente definimos la transformación **MED**: $(p, sig)MED = (q, sig)$, “ (p, sig) es la mediate de (q, sig) “. Ejemplo, Mi menor es la mediate de DO Mayor, $(E, -)MED = (C, +)$. Para ayudar a ver estas relaciones, pongamos de nuevo la figura que ilustra la lista canónica extendida de los Sistemas de Riemann definidos en el capítulo 4.1.



Siguiendo con las transformaciones sobre la familia de tríadas vemos que la subdominante **SUBD** es la inversa de la dominante **DOM** y la submediate **SUBM** es inversa de la mediate **MED**. En efecto, DO

Mayor es la subdominante de SOL Mayor $(C, +)SUBD = (G, +)$ pero también DO Mayor es la submediante de Mi menor $(C, +)SUBM = (E, -)$. Por tanto, $SUBD = DOM^{-1}$ y $SUBM = MED^{-1}$.

Sea el espacio musical S formado por un *klang* dado y todos los derivados de él mediante composición de las transformaciones vistas DOM , MED , $SUBD$ y $SUBM$. Sea $STRANS$ el grupo generado por ellas. Como $SUBD = DOM^{-1}$ y $SUBM = MED^{-1}$, entonces $STRANS$ es generado por DOM , MED . Además se verifica que $DOM = MED \cdot MED = MED^2$, es decir, $(p, sig)DOM = (q, sig) = (p, sig)MED^2$. Por ejemplo $((C, +)MED)MED = (A, -)MED = (F, +) = (C, +)DOM$ y $((C, -)MED)MED = (Ab, +)MED = (F, -) = (C, -)DOM$. Por tanto, el grupo $STRANS$ es generado por MED y sus elementos son las potencias de MED , siendo $MED^0 = IDENT$ y $MED^{-n} = (MED^{-1})^n = SUBM^n$. Es inmediato ver que este grupo $STRANS$ actúa simple transitivamente sobre la familia de *klangs*, independientemente del sistema de entonación elegida (justa o temperamento igual). En el caso de temperamento igual, sabemos que la lista canónica extendida es periódica, de periodo 24, de donde el espacio S se compone de 24 *klangs* (12 mayores y 12 menores) y el grupo $STRANS$ es cíclico con $MED^{24} = IDENT$.

Ahora vamos a considerar otra clase de transformaciones sobre el mismo espacio S , directamente relacionadas con las ideas de dualismo armónico de Hugo Riemann:

- **REL.** Transforma un *klang* en su relativo mayor/menor. $(C, +)REL = (A, -)$, $(A, -)REL = (C, +)$, es decir, $REL^2 = IDENT$. Observar que aunque $(C, +)MED = (A, -)$, se tiene que $(A, -)MED = (F, +)$ y, por tanto, $REL \neq MED$.
- **PAR.** Transforma un *klang* en su paralelo mayor/menor, es decir, $(p, signo)PAR = (p, -signo)$. También es de orden dos, $PAR^2 = IDENT$.
- **LT.** Leading Tone Exchange, conocida por Riemann como “Leittonwechsel”. $(C, +)LT = (E, -)$, $(E, -)LT = (C, +)$. Igualmente $LT^2 = IDENT$.

El propio David Lewin define como exótica la transformación que denomina **SLIDE**, la cual preserva en una tríada (*klang*) la nota que está en el intervalo de tercera respecto a la tónica y cambia su modo. Por ejemplo, $(F, +)SLIDE = (F\#, -)$ y $(F\#, -)SLIDE = (F, +)$. Esto es, FA Mayor $(F, +)$ tiene las notas FA-LA-DO y Fa# menor $(F\#, -)$ tiene las notas FA#-LA-DO#, o sea, se preserva LA en ambas tríadas (tercera mayor de FA y tercera menor de FA#). Este movimiento **SLIDE** entre $(F, +)$ y $(F\#, -)$ aparece en el último movimiento de la octava sinfonía de Beethoven. También puede escucharse una progresión **SLIDE** entre $(C, +)$ y $(C\#, -)$ en la sonata para piano en Sib Mayor de Schubert.

Se puede construir un grupo de transformaciones, operando sobre el espacio S , que esté generado por MED , REL , PAR y LT . Este grupo tendrá como subgrupos a $STRANS$ (generado por MED) y los subgrupos generados por $REL^2 = IDENT$, $PAR^2 = IDENT$ y $LT^2 = IDENT$, sin embargo no será simple transitivo, pues hemos visto que $(C, +)REL = (A, -) = (C, +)MED$. También puede comprobarse que $(C, +)PAR = (C, -) = (C, +)MED^7$. En efecto, $(C, +)MED^7 = (A, -)MED^6 = (F, +)MED^5 = (D, -)MED^4 = (Bb, +)MED^3 = (G, +)MED^2 = (Eb, +)MED = (C, -)$.

4.3.- Transformaciones Triádicas Uniformes. Uniform Triadic Transformations

En este capítulo se propone un esquema algebraico para el estudio de las transformaciones triádicas. Está basado en el trabajo de Julian Hook de 2002 [8] con el mismo nombre “*Uniform Triadic Transformations*”.

Hasta ese momento, el trabajo más completo sobre la estructura algebraica de las transformaciones triádicas se debía a Brian Hyer [9] (en un capítulo posterior se profundiza en ello). Hyer construyó un grupo de 144 transformaciones triádicas, PLRD (las ya conocidas PAR, LT, REL, e incluyendo la dominante D) y elaboró tablas de multiplicación de las transformaciones. Este grupo de Hyer es importante pero un poco confuso para entender las propiedades algebraicas de sus transformaciones. La gimnasia que hay que hacer para buscar sus formas canónicas y calcular sus productos es un poco inviable.

Otro aspecto que se aborda es la caracterización de las transformaciones particularmente Riemannianas. Por ejemplo la transformación D aplicada a una tríada mayor tiene el mismo efecto que L·R, pero aplicada a una tríada menor $D = R \cdot L$. Entonces Hook se preguntó si D es Riemanniana? Algunos autores (Carol Krumhansl (1998), Fred Lerdahl (2001), Cohn (1998)) dicen que si, el propio Hyer que la incluyó en su estudio. Sin embargo Henry Klumpenhouwer (1994) por el contrario no sólo no la reconoce en el espíritu dualístico de Hugo Riemann, sino que va más allá, expresando sus reservas sobre la práctica de combinar Dominante y verdaderas transformaciones Neo-Riemannianas duales, identificándolo como un movimiento de Riemann a Rameau.

La nomenclatura formal utilizada en UTT generaliza y simplifica las operaciones con transformaciones triádicas, al mismo tiempo que las clasifica según determinadas propiedades en su comportamiento.

4.3.1.- Tríadas y UTTs

Representamos una tríada como un par ordenado $\Delta = (r, \sigma)$, donde r es la raíz de la tríada expresada en notación entera mod 12 y σ es el signo indicando su modo (+ para mayor, – para menor). Así $\Delta = (0, +) = (C, +)$ es DO Mayor y $\Delta = (8, -) = (G\#, -)$ es Sol# menor. Estamos asumiendo afinación con temperamento igual y cada intervalo de una unidad expresa un intervalo de un semitono.

Al conjunto de las 24 tríadas le vamos a denotar Γ . Como las doce tríadas mayores están relacionadas por transposiciones, pertenecen a la misma *clase de transposición* Γ^+ . Análogamente, las doce tríadas menores forman la clase de transposición Γ^- .

Definición #4.3.1.1. Una **transformación triádica** es una transformación sobre el conjunto Γ en el sentido de Lewin (ver definición #4.2.2.1), es decir, una aplicación de Γ en Γ . Utilizaremos notación derecha, luego $(\Delta)X = \Delta'$ representa la acción de la transformación X sobre la tríada Δ , cuyo resultado es la tríada Δ' .

Al igual que en los sistemas GIS, interesan las transformaciones que son biyectivas, es decir, las **operaciones**, en cuyo caso está bien definida la **transformación inversa** X^{-1} : si $(\Delta)X = \Delta'$, entonces

$(\Delta \wedge) X^{-1} = \Delta$. En adelante asumimos que las transformaciones son operaciones y, por tanto, forman un grupo \mathbf{G} con la operación de composición.

El número de elementos (transformaciones) de \mathbf{G} es muy elevado (24!), igual al número de permutaciones del conjunto de tríadas Γ . Como la mayoría de ellas no tienen ningún sentido musical, centraremos la atención en una propiedad de coherencia musical que denominamos *uniformidad*, de modo que una transformación triádica *uniforme* transforma todas las tríadas mayores de la misma manera, el mismo intervalo en Γ , análogamente para las tríadas menores.

Definición #4.3.1.2. La transformación U satisface la *condición de uniformidad* si para cada tríada $\Delta = (r, \sigma)$ y cada intervalo de transposición t , si $((r, \sigma))U = (\Delta)U = \Delta' = (r', \sigma')$, entonces $((r + t, \sigma))U = (r' + t, \sigma')$. Las transformaciones (operaciones) que satisfacen la condición de uniformidad se denominan *Transformaciones Triádicas Uniformes (UTT)*.

Sea U una *UTT*, supongamos que transforma DO Mayor en la tríada (t^+, σ^+) y Do menor en (t^-, σ^-) , es decir, $((0, +))U = (t^+, \sigma^+)$ y $((0, -))U = (t^-, \sigma^-)$. Por la condición de uniformidad, cualquier otra tríada mayor $(r, +)$ ó menor $(r, -)$ será transformada por U en $((r, +))U = (r + t^+, \sigma^+)$ y $((r, -))U = (r + t^-, \sigma^-)$. Además, por ser U una operación (biyectiva) implica que σ^+ y σ^- deben ser signos opuestos, en otro caso U transformaría todas las tríadas a tríadas del mismo modo (mayor o menor), con lo que no sería una biyección. Por tanto, podemos poner $\sigma = \sigma_U = \sigma^+ = -\sigma^-$ y U queda completamente caracterizada por tres parámetros: un signo σ y dos intervalos de transposición t^+ y t^- . A los intervalos de transposición t^+ y t^- también los llamaremos “*niveles de transposición*”.

Definición #4.3.1.3. Una *UTT* U se representa por la tripla ordenada $U = \langle \sigma, t^+, t^- \rangle$. σ , t^+ y t^- se denominan los componentes de U . La acción de $U = \langle \sigma_U, t^+, t^- \rangle$ sobre una tríada $\Delta = (r, \sigma_\Delta)$ se implementa aplicando la fórmula $(\Delta)U = (r + t^{(\sigma_\Delta)}, \sigma_\Delta \sigma_U)$, siendo $t^{(\sigma_\Delta)} = t^+$ si $\sigma_\Delta = +$ ó $t^{(\sigma_\Delta)} = t^-$ si $\sigma_\Delta = -$. Para el producto $\sigma_\Delta \sigma_U$ se usa el producto usual de signos. En efecto, U actúa sobre Δ como una transposición sobre su raíz de t^+ ó t^- semitonos, dependiendo de que $\sigma_\Delta = +$ ó $\sigma_\Delta = -$. Además U cambia el modo de la tríada sí y sólo si $\sigma_U = -$. Por tanto, si $\sigma_\Delta = +$ se tiene que $(\Delta)U = (r + t^+, \sigma_U)$ y si $\sigma_\Delta = -$ se tiene que $(\Delta)U = (r + t^-, -\sigma_U)$. Combinando ambos casos se obtiene la fórmula general enunciada, donde es t^+ ó t^- dependiendo de si $\sigma_\Delta = +$ ó $\sigma_\Delta = -$ respectivamente.

Según lo visto, si $\sigma_U = +$, entonces U aplica tríadas mayores en tríadas mayores y menores en menores, se dice que U *preserva el modo*. Por el contrario, si $\sigma_U = -$, entonces U aplica tríadas mayores en tríadas menores y menores en mayores, con lo que U *invierte el modo*.

Ejemplo #4.3.1.1. Veamos algunas relaciones musicales conocidas que pueden expresarse como *UTTs*. La transformación “*RELativa*” (\mathbf{R}) aplica cada tríada mayor en su relativa menor y viceversa. Es una transformación que invierte el modo con $t^+ = 9$ $((C, +) \xrightarrow{R} (A, -))$, $t^- = 3$ $((A, -) \xrightarrow{R} (C, +))$ y cumple la condición de uniformidad, luego $R = \langle -, 9, 3 \rangle$.

- $T_0 = \langle +, 0, 0 \rangle$ (transformación identidad) $(C, +) \xrightarrow{T_0} (C, +)$, $(C, -) \xrightarrow{T_0} (C, -)$
- $T_1 = \langle +, 1, 1 \rangle$ (transposición 1) $(C, +) \xrightarrow{T_1} (Db, +)$, $(C, -) \xrightarrow{T_1} (C\#, -)$
- $T_n = \langle +, n, n \rangle$ (transposición n)

- $P = \langle -, 0, 0 \rangle$ (PARallel) $(C, +) \xrightarrow{P} (C, -), (C, -) \xrightarrow{P} (C, +)$
- $L = \langle -, 4, 8 \rangle$ (LeiTtonwechsel) $(C, +) \xrightarrow{L} (E, -), (C, -) \xrightarrow{L} (Ab, +)$
- $R = \langle -, 9, 3 \rangle$ (RELative) $(C, +) \xrightarrow{R} (A, -), (C, -) \xrightarrow{R} (Eb, +)$
- $D = \langle +, 5, 5 \rangle = T_5$ (Dominante) $(C, +) \xrightarrow{D} (F, +), (C, -) \xrightarrow{D} (F, -)$
- $M = \langle -, 9, 8 \rangle$ (Mediante) $(C, +) \xrightarrow{M} (A, -), (C, -) \xrightarrow{M} (Ab, +)$

Observar que las transformaciones Dominante (D) y Mediante (M) están definidas siguiendo las consideraciones de David Lewin (ver capítulo 4.2.4).

Este ejemplo pone de manifiesto que dadas dos tríadas en Γ , por ejemplo $\Delta = (C, +)$ y $\Delta' = (A, -)$, la transformación que realiza la progresión $\Delta \xrightarrow{U} \Delta'$ no es única, en este caso concreto U puede ser, entre otras, R ó M . De hecho, las doce UTTs de la forma $\langle -, 9, n \rangle$ tendrían el mismo resultado sobre tríadas en modo mayor, si bien sobre tríadas menores producirían resultados diferentes. Esto quiere decir las UTTs no actúan simple transitivamente. En un capítulo posterior se analiza esto en detalle.

Asimismo, aunque hemos identificado la condición de uniformidad como una propiedad de coherencia musical, esto no significa que toda transformación triádica con sentido o coherencia musical sea una UTT. Por ejemplo, la inversión I sobre la nota C no es una UTT ya que su acción sobre las tríadas $(C, +) \xrightarrow{I} (F, -)$ y $(Db, +) \xrightarrow{I} (E, -)$ implica diferentes niveles (intervalos) de transposición (5 y 3 respectivamente), lo cual incumple la condición de uniformidad.

El siguiente teorema aporta información adicional sobre la condición de uniformidad.

Teorema #4.3.1.1. Sea U una transformación triádica, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) U es una UTT.
- (b) $U = \langle \sigma, t^+, t^- \rangle$ para algún σ, t^+, t^- .
- (c) $U \cdot T_1 = T_1 \cdot U$. U conmuta con la transposición T_1 .
- (d) $U \cdot T_n = T_n \cdot U$ para $n = 0, 1, 2, \dots, 11$. U conmuta con cualquier transposición T_n .

Prueba: (a) \Rightarrow (b) Es inmediato por la definición #4.3.1.3.

(b) \Rightarrow (c) Sea U la transformación $U = \langle \sigma_U, t^+, t^- \rangle$ y Δ la tríada $\Delta = (r, \sigma_\Delta)$, entonces $(\Delta)(U \cdot T_1) = ((\Delta)U)T_1 = ((r, \sigma_\Delta)\langle \sigma_U, t^+, t^- \rangle)\langle +, 1, 1 \rangle = (r + t^{(\sigma_\Delta)}, \sigma_\Delta \sigma_U)\langle +, 1, 1 \rangle = (r + t^{(\sigma_\Delta)} + 1, \sigma_\Delta \sigma_U) = (r + 1 + t^{(\sigma_\Delta)}, \sigma_\Delta \sigma_U) = (r + 1, \sigma_\Delta)\langle \sigma_U, t^+, t^- \rangle = ((r, \sigma_\Delta)\langle +, 1, 1 \rangle)\langle \sigma_U, t^+, t^- \rangle = ((\Delta)T_1)U = (\Delta)(T_1 \cdot U)$.

(c) \Rightarrow (d) Suponiendo que $U \cdot T_1 = T_1 \cdot U$, entonces $U \cdot T_2 = U \cdot T_1 \cdot T_1 = T_1 \cdot U \cdot T_1 = T_1 \cdot T_1 \cdot U = T_2 \cdot U$. Análogamente, $U \cdot T_3 = U \cdot T_2 \cdot T_1 = T_2 \cdot U \cdot T_1 = T_2 \cdot T_1 \cdot U = T_3 \cdot U$. Y así sucesivamente con T_4, \dots, T_{11} . Ni que decir tiene que la transposición identidad T_0 conmuta con cualquier transformación U .

(d) \Rightarrow (a) Partiendo de una transformación U que conmuta con cualquier transposición T_n , para comprobar que verifica la condición de uniformidad, si U transforma $\Delta = (r, \sigma)$ en $\Delta' = (r', \sigma')$, tendremos que probar que U transforma $(r + t, \sigma)$ en $(r' + t, \sigma')$. Como U conmuta con la transposición T_t , tenemos que $(r + t, \sigma)U = ((r, \sigma)T_t)U = (r, \sigma)(T_t \cdot U) = (r, \sigma)(U \cdot T_t) = (r', \sigma')T_t = (r' + t, \sigma')$ c.q.d.

La condición (d) $U \cdot T_n = T_n \cdot U$ del teorema se ilustra en el diagrama de la siguiente figura. Representa la conmutatividad de la transformación U con la transposición T_n , lo que en matemáticas se conoce como: “el diagrama conmuta”.

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{U} & \Delta' \\ T_n \downarrow & & \downarrow T_n \\ (\Delta)T_n & \xrightarrow{U} & (\Delta')T_n = (\Delta)U \cdot T_n = (\Delta)T_n \cdot U \end{array}$$

Corolario #4.3.1.1. Sea \mathbf{V} el conjunto de todas las UTTs, entonces \mathbf{V} es un *subgrupo* de \mathbf{G} , el grupo de todas las transformaciones triádicas.

Prueba: El teorema #4.3.1.1 anterior nos dice que \mathbf{V} está formado por todas las transformaciones triádicas de \mathbf{G} que conmutan con T_1 , luego \mathbf{V} es el *centralizador* del elemento T_1 . Se sigue, por la teoría de grupos, que \mathbf{V} es un *subgrupo* de \mathbf{G} .

Los elementos de \mathbf{V} están en correspondencia biunívoca con las triplas $\langle \sigma, t^+, t^- \rangle$ en $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{12}$, por tanto, el número de elementos es $2 \times 12 \times 12 = 288$. Si bien, la estructura del grupo \mathbf{V} no es isomórfica con $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{12}$, pues la multiplicación (composición) en \mathbf{V} no está definida como la multiplicación de sus componentes. Veamos a continuación cómo se calculan los productos y los inversos de la UTTs en función de sus componentes.

Teorema #4.3.1.2. Dadas dos UTTs $U = \langle \sigma_U, t_U^+, t_U^- \rangle$ y $V = \langle \sigma_V, t_V^+, t_V^- \rangle$, entonces el producto $U \cdot V = \langle \sigma_{UV}, t_{UV}^+, t_{UV}^- \rangle = \langle \sigma_U \sigma_V, t_U^+ + t_V^{(\sigma_U)}, t_U^- + t_V^{(-\sigma_U)} \rangle$.

Prueba: Dada la triada $\Delta = (r, \sigma_\Delta)$, entonces $(\Delta)(U \cdot V) = (r, \sigma_\Delta)(U \cdot V) = ((r, \sigma_\Delta)U)V = ((r, \sigma_\Delta)\langle \sigma_U, t_U^+, t_U^- \rangle)\langle \sigma_V, t_V^+, t_V^- \rangle = (r + t_U^{(\sigma_\Delta)}, \sigma_\Delta \sigma_U)\langle \sigma_V, t_V^+, t_V^- \rangle = (r + t_U^{(\sigma_\Delta)} + t_V^{(\sigma_\Delta \sigma_U)}, \sigma_\Delta \sigma_U \sigma_V) = (r, \sigma_\Delta)\langle \sigma_U \sigma_V, t_U^+ + t_V^{(\sigma_U)}, t_U^- + t_V^{(-\sigma_U)} \rangle$ c.q.d.

De la fórmula del producto se deduce inmediatamente que, en general, $U \cdot V \neq V \cdot U$. Por tanto, el grupo \mathbf{V} de todas las UTTs es *no-conmutativo (no-abeliano)*. Veámoslo con un contra ejemplo.

Ejemplo #4.3.1.2. Dadas las UTTs $U = \langle +, 4, 7 \rangle$ y $V = \langle -, 5, 10 \rangle$, calcular las progresiones armónicas que se obtienen al aplicar las composiciones de transformaciones $U \cdot V$ y $V \cdot U$ a las triadas de DO Mayor (0, +) y Do menor (0, -).

$(0, +) \xrightarrow{U} (4, +) \xrightarrow{V} (9, -)$, luego $(0, +)U \cdot V = (9, -)$, esto es La menor.

$(0, +) \xrightarrow{V} (5, -) \xrightarrow{U} (12, -) = (0, -)$, luego $(0, +)V \cdot U = (0, -)$, esto es Do menor.

$(0, -) \xrightarrow{U} (7, -) \xrightarrow{V} (17, +) = (5, +)$, luego $(0, -)U \cdot V = (5, +)$, esto es FA Mayor.

$(0, -) \xrightarrow{V} (10, +) \xrightarrow{U} (14, +) = (2, +)$, luego $(0, -)V \cdot U = (2, +)$, esto es RE Mayor.

Por tanto, $U \cdot V = \langle -, 9, 5 \rangle$, y $V \cdot U = \langle -, 0, 2 \rangle$.

Teorema #4.3.1.3. Las únicas transformaciones en \mathbf{V} que conmutan con todas las UTTs son las transposiciones T_n ($n = 0, 1, \dots, 11$).

Prueba: Del teorema #4.3.1.1 sabemos que T_n conmuta con toda UTT. Supongamos ahora que $U = \langle \sigma, t^+, t^- \rangle$ conmuta con toda UTT. En particular conmuta con $P = \langle -, 0, 0 \rangle$, luego, por la

fórmula del producto $U \cdot P = \langle -\sigma, t^+, \bar{t} \rangle$ y $P \cdot U = \langle -\sigma, \bar{t}, t^+ \rangle$, de donde $t^+ = \bar{t}$. Llamemos $n = t^+ = \bar{t}$, con lo que $U = \langle +, n, n \rangle$ ó $U = \langle -, n, n \rangle$. Ahora bien, si $U = \langle -, n, n \rangle$ vemos que no conmuta con $V = \langle +, 0, 1 \rangle$ pues $U \cdot V = \langle -, n+1, n \rangle$ y $V \cdot U = \langle -, n, n+1 \rangle$. Por tanto, $U = \langle +, n, n \rangle = T_n$, c.q.d.

Corolario #4.3.1.2. Del teorema #4.3.1.3 anterior se sigue que el conjunto de transposiciones $\mathbf{T} = \{T_0, T_1, \dots, T_{11}\}$ es el *centro* del grupo \mathbf{V} , por tanto \mathbf{T} es un *subgrupo*. Es inmediato ver que \mathbf{T} es *cíclico* e *isomorfo* a \mathbf{Z}_{12} .

Adicionalmente, de la fórmula del producto se extraen las siguientes conclusiones:

- Si U y V son UTTs que preservan el modo, entonces conmutan entre sí.
- Si U preserva el modo y V invierte el modo, entonces conmutan sí y sólo si U es alguna transposición T_n .
- Dos transformaciones que invierten el modo $U = \langle -, m, n \rangle$ y $V = \langle -, i, j \rangle$ conmutan sí y sólo si $m - n = i - j$.
- La composición de transposiciones cumple que $T_m \cdot T_n = T_{m+n}$ y $(T_n)^k = T_{kn}$.
- El cuadrado de cualquier UTT que invierte el modo es una transposición. Esto es, $U^2 = (\langle -, t^+, \bar{t} \rangle)^2 = \langle +, t^+ + \bar{t}, t^+ + \bar{t} \rangle = T_n$, siendo $n = t^+ + \bar{t}$.

La ecuación del signo de un producto de dos UTTs, $\sigma_{UV} = \sigma_U \sigma_V$, aunque pueda parecer trivial, conlleva un significado algebraico de profunda importancia.

Definición #4.3.1.4. Llamamos *función signo (Sig)* a la aplicación que asigna a cada UTT $V \in \mathbf{V}$ su signo, es decir, uno de los dos valores posibles $\{+, -\}$. Esto es, $Sig: \mathbf{V} \longrightarrow \{+, -\}: \langle \sigma, t^+, \bar{t} \rangle \longrightarrow \sigma$. De la fórmula del producto, $\sigma_{UV} = \sigma_U \sigma_V$ ($Sig(U \cdot V) = Sig(U) \cdot Sig(V)$), se sigue que la aplicación Sig es un homomorfismo entre el grupo \mathbf{V} y el grupo multiplicativo de signos $\{+, -\}$.

Teorema #4.3.1.4. El subconjunto $\mathbf{V}^+ \subset \mathbf{V}$ de todas las UTTs que preservan el modo ($\langle +, t^+, \bar{t} \rangle$) es un *subgrupo normal abeliano* de orden 144 e *isomorfo* al producto directo de los grupos $\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{12}$.

Prueba: La función Sig definida anteriormente hemos visto que es un homomorfismo entre los grupos \mathbf{V} y $\{+, -\}$. El elemento neutro de este grupo multiplicativo de signos es el signo $+$, luego el núcleo del homomorfismo es precisamente el subconjunto \mathbf{V}^+ . Se sigue, por la teoría de grupos, que \mathbf{V}^+ es un subgrupo normal de \mathbf{V} . Además, en la fórmula de la multiplicación particularizada para \mathbf{V}^+ , $\langle +, t_U^+, \bar{t}_U \rangle \langle +, t_V^+, \bar{t}_V \rangle = \langle +, t_U^+ + t_V^+, \bar{t}_U + \bar{t}_V \rangle$, se observa que la multiplicación actúa componente a componente, por lo que \mathbf{V}^+ es isomorfo al producto directo de los grupos $\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{12}$. Se sigue que es de orden 144 y abeliano.

Las UTTs que invierten el modo componen el subconjunto $\mathbf{V}^- \subset \mathbf{V}$, también de 144 elementos pero, en este caso, \mathbf{V}^- no tiene estructura de grupo, pues el producto de dos transformaciones que invierten el modo es otra transformación que preserva el modo y, por tanto, el conjunto \mathbf{V}^- no es cerrado con la multiplicación (composición).

Todavía nos quedan por determinar algunas cuestiones del grupo **V**, concretamente el elemento identidad y los inversos de cualquier UTT. Es inmediato que el *elemento neutro* de **V** es la transposición identidad $T_0 = \langle +, 0, 0 \rangle$.

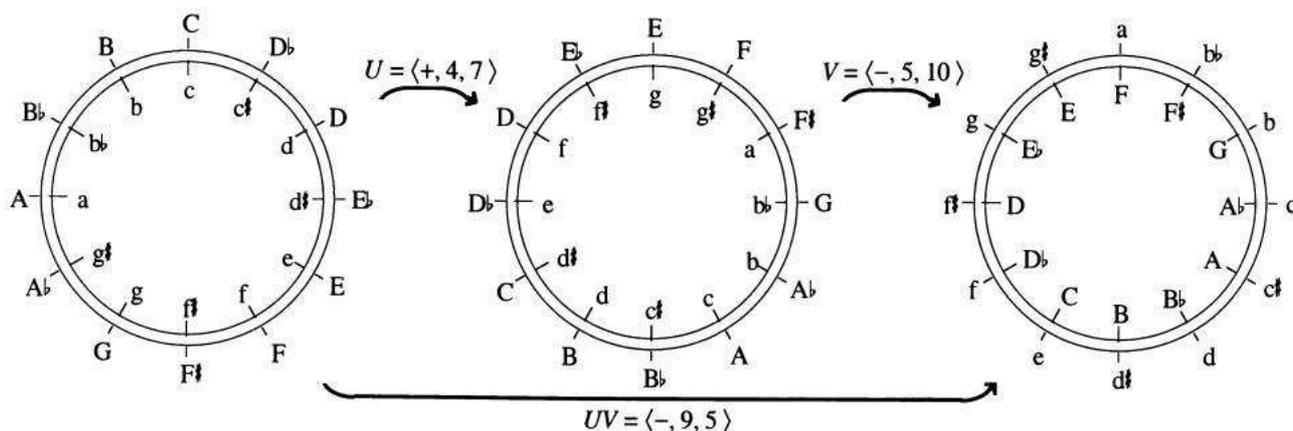
Teorema #4.3.1.5. Dada la UTT $U = \langle \sigma, t^+, t^- \rangle$, entonces su *inverso* es $U^{-1} = \langle \sigma, -t^\sigma, -t^{(-\sigma)} \rangle$

Prueba: La demostración de este teorema es inmediata sin más que utilizar la fórmula del producto para verificar que se cumple $U \cdot U^{-1} = U^{-1} \cdot U = T_0 = \langle +, 0, 0 \rangle$.

Ejemplo #4.3.1.3. Los inversos de las transformaciones más conocidas serían:

- $T_n = \langle +, n, n \rangle$ (transposición n) $(T_n)^{-1} = \langle +, -n, -n \rangle = T_{-n}$
- $P = \langle -, 0, 0 \rangle$ (PARAllel) $P^{-1} = \langle -, 0, 0 \rangle = P$, de donde $P^2 = T_0 = IDENT$
- $L = \langle -, 4, 8 \rangle$ (LeiTonwechsel) $L^{-1} = \langle -, -8, -4 \rangle = \langle -, 4, 8 \rangle = L, \Rightarrow L^2 = T_0 = IDENT$
- $R = \langle -, 9, 3 \rangle$ (RELative) $R^{-1} = \langle -, -3, -9 \rangle = \langle -, 9, 3 \rangle = R, \Rightarrow R^2 = T_0 = IDENT$
- $D = \langle +, 5, 5 \rangle = T_5$ (Dominante) $D^{-1} = \langle -, -5, -5 \rangle = T_{-5} = \langle -, 7, 7 \rangle = T_7$, (SubDominante)
- $M = \langle -, 9, 8 \rangle$ (Mediante) $M^{-1} = \langle -, -8, -9 \rangle = \langle -, 4, 3 \rangle$, (SubMediante)

Finalizaremos este capítulo introduciendo una representación visual de la acción de las transformaciones UTTs desarrollada por John Clough en 1998. Se trata de la *circunferencia dual*, configurada como un par de circunferencias concéntricas, cada una de las cuales lleva doce marcas, como si se tratase de un reloj. En una circunferencia se sitúan las doce tríadas mayores ordenadas ascendentemente por semitonos y en la otra circunferencia las doce tríadas menores. La siguiente figura ilustra esta situación, donde la primera (configuración de partida) tiene las tríadas mayores por la circunferencia exterior y las menores por el interior. En la posición de las doce en punto se sitúan DO Mayor (C) y Do menor (c). Observar la nomenclatura abreviada de las tríadas: mayúsculas para tríadas mayores y minúsculas para las menores.



Representación en la Circunferencia Dual de las UTTs $\langle +, 4, 7 \rangle \langle -, 5, 10 \rangle = \langle -, 9, 5 \rangle$

Una UTT actúa sobre la circunferencia dual de la siguiente manera: la tríada mayor se rota t^+ posiciones y la menor t^- posiciones, ambas en contra del avance del reloj. En el caso de que $\sigma = -$, después de rotar se cambia el modo de las tríadas. En la figura también se muestran las configuraciones resultantes de aplicar la progresión de transformaciones $U = \langle +, 4, 7 \rangle$ y $V = \langle -, 5, 10 \rangle$.

Cada configuración puede ser representada por un par ordenado de tríadas (Δ_1, Δ_2) , siendo Δ_1 y Δ_2 las tríadas que ocupan la posición de las doce en punto en las circunferencias exterior e interior respectivamente. En este sentido las configuraciones de la figura podrían expresarse de la siguiente manera: $(C, c) \xrightarrow{U} (E, g) \xrightarrow{V} (a, F)$.

Sea Λ el conjunto de todas las posibles configuraciones de la circunferencia dual. Entonces el grupo de las transformaciones UTTs \mathbf{V} actúa en Λ de la manera que acabamos de describir. Es fácil ver que dadas dos configuraciones λ_1 y $\lambda_2 \in \Lambda$, entonces existe una única $U \in \mathbf{V}$ que transforma λ_1 en λ_2 . Esto significa que la acción de \mathbf{V} en Λ es simple transitiva. Este resultado conecta con la definición de GIS (Generalized Interval System) de David Lewin vista en capítulos precedentes. En concreto, el teorema #4.2.3.1 garantiza que el par (Λ, \mathbf{V}) tiene estructura de GIS, siendo Λ el espacio musical (S) y \mathbf{V} el grupo de intervalos $(IVLS)$. En este GIS se interpreta el “intervalo” entre dos configuraciones λ_1 y λ_2 de la circunferencia dual como la única UTT que transforma λ_1 en λ_2 .

4.3.2.- UTTs Riemannianas

A lo largo del capítulo vamos a profundizar en las transformaciones UTTs que expresan el carácter dualístico ideado por Hugo Riemann. La condición de dualismo codifica de alguna manera la simetría inherente en la concepción armónica de Riemann: “una transformación Riemanniana aplicada sobre una tríada mayor produce sobre una tríada menor un efecto igual pero opuesto”.

Definición #4.3.2.1. Dada una UTT $U = \langle \sigma, t^+, t^- \rangle$, se define la *transposición total* de U como la suma de los dos niveles de transposición de U , esto es, $t^+ + t^-$, y se denota $\tau(U) = t^+ + t^-$.

Teorema #4.3.2.1. La aplicación $\tau: \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{Z}_{12}: U \longrightarrow \tau(U) = t^+ + t^-$ define un homomorfismo entre \mathbf{V} y \mathbf{Z}_{12} .

Prueba: Hay que demostrar que $\tau(U \cdot V) = \tau(U) + \tau(V)$. Por la fórmula del producto $\tau(U \cdot V) = \tau(\langle \sigma_U \sigma_V, t_U^+ + t_V^{(\sigma_U)}$, $t_U^- + t_V^{(-\sigma_U)} \rangle) = t_U^+ + t_V^{(\sigma_U)} + t_U^- + t_V^{(-\sigma_U)}$. Pero $\tau(U) + \tau(V) = t_U^+ + t_U^- + t_V^+ + t_V^-$, que es lo mismo, porque $t_V^{(\sigma_U)} + t_V^{(-\sigma_U)} = t_V^+ + t_V^-$, sea $\sigma_U = +$ ó $\sigma_U = -$, c.q.d.

Definición #4.3.2.2. Una UTT U satisface la *condición de dualismo de Riemann* si su transposición total es 0, es decir, si $\tau(U) = t^+ + t^- = 0$, equivalentemente $t^+ = -t^-$. Las UTTs que satisfacen esta condición de dualismo se denominan UTTs Riemannianas.

Es inmediato que existen 24 UTTs Riemannianas: doce que preservan el modo de la forma $\langle +, n, -n \rangle$ y otras doce que invierten el modo $\langle -, n, -n \rangle$.

Ejemplo #4.3.2.1. Algunas de las transformaciones familiares son Riemannianas, a saber: la identidad $T_0 = \langle +, 0, 0 \rangle$, la transposición tritono $T_6 = \langle +, 6, 6 \rangle$ y las duales por excelencia $P = \langle -, 0, 0 \rangle$, $L = \langle -, 4, 8 \rangle$ y $R = \langle -, 9, 3 \rangle$.

En este punto, hagamos un inciso para introducir la terminología original de Hugo Riemann, recuperada, entre otros, por Henry Klumpenhouwer en 1994 [10]. Si bien hay ligeras diferencias en la interpretación de la nomenclatura original en alemán por parte de diferentes autores, la notación que vamos a usar puede considerarse más o menos representativa del trabajo de Hugo Riemann.

Las UTTs Riemannianas que preservan el modo se denominan “*schritts*” y las que invierten el modo “*wechsels*”. Las denotamos como $S_n = \langle +, n, -n \rangle$ y $W_n = \langle -, n, -n \rangle$. Así, toda UTT Riemanniana es una S_n ó W_n , en particular: $T_0 = S_0$, $T_6 = S_6$, $P = W_0$, $L = W_4$ y $R = W_9$. Las siguientes relaciones se siguen de las fórmulas del producto e inversos vistas anteriormente.

- $S_m \cdot S_n = \langle +, m, -m \rangle \langle +, n, -n \rangle = \langle +, m+n, -m-n \rangle = S_{m+n}$
- $S_m \cdot W_n = \langle +, m, -m \rangle \langle -, n, -n \rangle = \langle -, m+n, -m-n \rangle = W_{m+n}$
- $W_m \cdot S_n = \langle -, m, -m \rangle \langle +, n, -n \rangle = \langle -, m-n, -m+n \rangle = W_{m-n}$
- $W_m \cdot W_n = \langle -, m, -m \rangle \langle -, n, -n \rangle = \langle +, m-n, -m+n \rangle = S_{m-n}$
- $S_n^{-1} = \langle +, n, -n \rangle^{-1} = \langle +, -n, n \rangle = S_{-n}$
- $W_n^{-1} = \langle -, n, -n \rangle^{-1} = \langle -, n, -n \rangle = W_n$

La *schritt unidad* $S_1 = \langle +, 1, -1 \rangle$, por su importancia teórica, la designaremos con el símbolo $Q = S_1$. La transformación Q transporta las tríadas mayores un semitono ascendente y las menores un semitono descendente, por ejemplo: DO Mayor = C = (0, +) \xrightarrow{Q} (1, +) = Db = REb Mayor y Do menor = c = (0, -) \xrightarrow{Q} (11, -) = b = Si menor. Es inmediato ver que $Q^{12} = T_0$ es la transformación identidad, $S_n = Q^n$ y $W_n = S_n \cdot P = Q^n \cdot P$.

En definitiva, de las 288 transformaciones triádicas uniformes (UTTs) de \mathbf{V} nos encontramos con que 24 son Riemannianas, frente a 264 que no lo son. En particular, las diez transposiciones T_n , $n \neq 0, 6$ y las transformaciones Dominante $D = \langle +, 5, -5 \rangle$ y Mediante $M = \langle -, 9, 8 \rangle$ no son Riemannianas. Conviene recordar que, si bien todas las propiedades de las UTTs que hemos visto hasta ahora aplican a las UTTs Riemannianas, sus propiedades, que veremos ahora, en general no sirven para el resto.

Definición #4.3.2.3. El conjunto de las 24 UTTs Riemannianas lo denotaremos por $\mathbf{R} \subset \mathbf{V}$. Pero \mathbf{R} es el núcleo del homomorfismo τ , de donde \mathbf{R} es *subgrupo normal* de \mathbf{V} . \mathbf{R} es el denominado *grupo de Riemann*.

Definición #4.3.2.4. El conjunto de las doce UTTs Riemannianas que preservan el modo (*schritts*) forman el subconjunto \mathbf{R}^+ . En realidad \mathbf{R}^+ es la intersección de los subgrupos normales \mathbf{R} y \mathbf{V}^+ de \mathbf{V} , se sigue que \mathbf{R}^+ es un *subgrupo normal* de \mathbf{V} . \mathbf{R}^+ se denomina *grupo schritt*.

Las doce UTTs Riemannianas que invierten el modo (*wechsels*) forman el subconjunto \mathbf{R}^- , pero no tiene estructura de grupo.

A continuación vamos a ver una serie de propiedades importantes de las UTTs Riemannianas y los grupos \mathbf{R} y \mathbf{R}^+ . Previamente demostraremos un lema para caracterizar grupos simple transitivos de UTTs que nos será de utilidad.

Lema #4.3.2.1. Un subgrupo \mathbf{K} de \mathbf{V} actúa simple transitivamente en el conjunto de tríadas Γ sí y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

- (a) Para cada signo $\sigma = +$ ó $\sigma = -$ y cada entero $m \pmod{12}$, existe un único entero $n \pmod{12}$ tal que la UTT $\langle \sigma, m, n \rangle$ pertenece al subgrupo \mathbf{K} .
- (b) Para cada signo $\sigma = +$ ó $\sigma = -$ y cada entero $n \pmod{12}$, existe un único entero $m \pmod{12}$ tal que la UTT $\langle \sigma, m, n \rangle$ pertenece al subgrupo \mathbf{K} .

Prueba: (\Rightarrow) Supongamos que \mathbf{K} es simple transitivo. Esto significa que por cada par de tríadas Δ_1 y Δ_2 , existe una única U en \mathbf{K} que aplica Δ_1 en Δ_2 . Dados σ y m como en (a), entonces la UTT $U = \langle \sigma, m, n \rangle$, para cualquier n , transforma la tríada de DO Mayor $(0, +)$ en la tríada (m, σ) . Ahora si hacemos $\Delta_1 = (0, +)$ y $\Delta_2 = (m, \sigma)$, por hipótesis existe una única U en \mathbf{K} que transforma Δ_1 en Δ_2 , es decir, un único n tal que $U = \langle \sigma, m, n \rangle$ pertenece a \mathbf{K} como se establece en (a). Para probar (b) se procede de la misma manera eligiendo $\Delta_1 = (0, -)$ y $\Delta_2 = (n, -\sigma)$.

(\Leftarrow) Suponiendo que se cumplen (a) y (b), dadas dos tríadas cualesquiera $\Delta_1 = (r_1, \sigma_1)$ y $\Delta_2 = (r_2, \sigma_2)$, tenemos que probar que existe una y sólo una U en \mathbf{K} que aplica Δ_1 en Δ_2 . Si $\sigma_1 = +$, entonces U debe ser de la forma $\langle \sigma_2, r_2 - r_1, n \rangle$, para cualquier n . Pero por la condición (a) este n es único, luego U es único también. Análogamente, si $\sigma_1 = -$, entonces U debe ser de la forma $\langle -\sigma_2, m, r_2 - r_1 \rangle$, para cualquier m . pero por (b) este m es único, luego U es único c.q.d.

Teorema #4.3.2.2. El grupo de Riemann \mathbf{R} y sus subconjuntos \mathbf{R}^+ y \mathbf{R}^- presentan las siguientes propiedades:

- (a) \mathbf{R} es el subgrupo de \mathbf{V} generado por las transformaciones $P = \langle -, 0, 0 \rangle$ y la schritt unidad $Q = \langle +, 1, 11 \rangle$.
- (b) \mathbf{R} es el subgrupo de \mathbf{V} generado por las transformaciones $L = \langle -, 4, 8 \rangle$ y $R = \langle -, 9, 3 \rangle$.
- (c) \mathbf{R} es isomorfo a D_{12} , el grupo diedral de orden 24.
- (d) \mathbf{R} actúa simple transitivamente en el conjunto de tríadas Γ .
- (e) \mathbf{R}^+ es un grupo cíclico de orden 12 generado por la schritt unidad $Q = \langle +, 1, 11 \rangle$.
- (f) \mathbf{R}^+ actúa simple transitivamente en cada una de las clases de transposición Γ^+ y Γ^- .
- (g) Si $U \in \mathbf{R}^-$, entonces $U^{-1} = U$. Equivalentemente $U^2 = T_0$
- (h) Si $U_1, U_2, \dots, U_k \in \mathbf{R}^-$, entonces $(U_1 \cdot U_2 \cdots U_k)^{-1} = U_k \cdots U_2 \cdot U_1$.
- (i) Si $U_1, U_2, \dots, U_k \in \mathbf{R}^-$ y k es impar, entonces $U_1 \cdot U_2 \cdots U_k = U_k \cdots U_2 \cdot U_1$.

Prueba: (a) Anteriormente se ha visto que toda transformación Riemanniana se puede escribir como $S_n = Q^n$ ó $W_n = Q^n \cdot P$, luego P y Q generan el grupo \mathbf{R} .

(b) Sabiendo que se cumple (a), basta con demostrar que P y Q se pueden expresar como productos de L y R . Pero $R \cdot L = \langle -, 9, 3 \rangle \langle -, 4, 8 \rangle = \langle +, 5, 7 \rangle = Q^5$ y Q^{12} es la identidad T_0 , se sigue que $(R \cdot L)^5 = (Q^5)^5 = Q^{25} = (Q^{12})^2 \cdot Q = Q$. También $(R \cdot L)^3 \cdot R = (Q^5)^3 \cdot R = Q^{15} \cdot R = Q^{12} \cdot Q^3 \cdot R = Q^3 \cdot R = \langle +, 3, 9 \rangle \langle -, 9, 3 \rangle = \langle -, 0, 0 \rangle = P$.

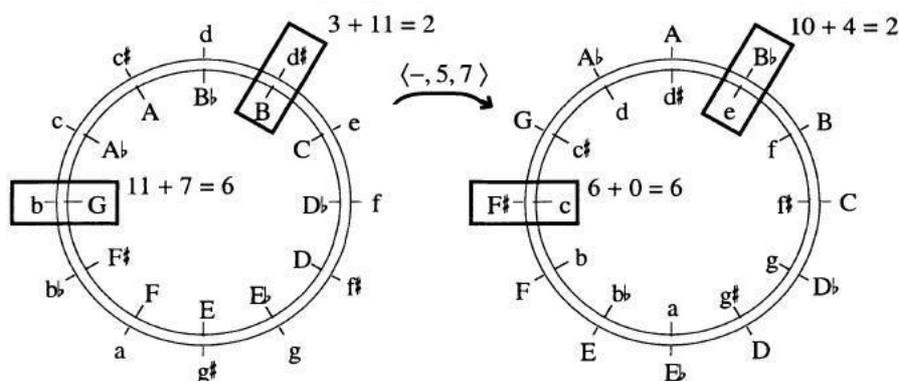
(c) De teoría de grupos sabemos que el grupo diedral D_k es un grupo de orden $2k$ generado por dos elementos x e y tal que $x^2 = 1$ (identidad), $y^k = 1$ y $x \cdot y = y^{-1} \cdot x$. En este caso $k = 12$ y tenemos que demostrar que $x = P$ e $y = Q$ son los generadores. Ya sabemos que $P^2 = T_0$ (identidad) y $Q^{12} = T_0$. Aplicando fórmulas vistas anteriormente, $P \cdot Q = W_0 \cdot S_1 = W_{11} = S_{11} \cdot W_0 = Q^{11} \cdot P = Q^{-1} \cdot P$.

(d) Es inmediato que \mathbf{R} satisface las dos condiciones del lema #4.3.2.1, ya que en ambos casos la condición de dualismo de Riemann impone que $m = -n$. Se sigue que la acción de \mathbf{R} en Γ es simple transitiva.

- (e) Ya hemos visto anteriormente que los elementos de \mathbf{R}^+ son los schritts $S_1 = Q, S_2 = Q^2, \dots, S_{11} = Q^{11}$ y la identidad $T_0 = Q^{12}$. Se sigue que \mathbf{R}^+ es un grupo cíclico de orden 12 generado por Q .
- (f) Se sigue de (d), si Δ_1 y Δ_2 pertenecen a la misma clase de transposición (Γ^+ ó Γ^-) entonces la única UTT que aplica Δ_1 en Δ_2 preserva el modo, luego un elemento de \mathbf{R}^+ .
- (g) Los elementos de \mathbf{R}^- son los wechsels W_n , los cuales verifican que $W_n^{-1} = W_n$.
- (h) Para cualquier grupo $(U_1 \cdot U_2 \cdots U_k)^{-1} = U_k^{-1} \cdots U_2^{-1} \cdot U_1^{-1}$ y aplicando (g) $= U_k \cdots U_2 \cdot U_1$.
- (i) Como el producto de un número impar de UTTs que invierten el modo también invierte el modo, entonces $U_1 \cdot U_2 \cdots U_k \in \mathbf{R}^-$. Por (g) $U_1 \cdot U_2 \cdots U_k = (U_1 \cdot U_2 \cdots U_k)^{-1}$ y por (h) $= U_k \cdots U_2 \cdot U_1$.

El grupo de Riemann \mathbf{R} tiene una importancia significativa, de hecho había sido estudiado previamente por otros autores, aunque sin el formalismo matemático de UTTs ideado por Julian Hook. Así, Henry Klumpenhouver en 1994 enumeró doce schritts y doce wechsels formando un sistema equivalente a \mathbf{R} . John Clough en 1998 se refirió a este grupo como el “grupo S/W ”. En 1997 Richard Cohn lo denominó “familia PLR ” de operaciones. Como se verá posteriormente, esta nomenclatura PLR es la que ha prevalecido en la teoría Neo-Riemanniana. Si bien este grupo se genera con L y R , y la inclusión de P pudiera parecer redundante, de hecho $P = RLRLRLR$, el uso de P posibilita expresiones más cortas para las transformaciones Riemannianas. Por ejemplo, la transposición tritono $T_6 = (LR)^6 = (RL)^6 = (PR)^2 = (RP)^2$. Eso sin considerar el indiscutible sentido musical que tiene la transformación P de convertir una triada en su paralela mayor ó menor.

La condición de dualismo de Riemann tiene su visualización geométrica en la circunferencia dual. Bajo la acción de una UTT Riemanniana las dos circunferencias rotan el mismo número de posiciones pero en sentidos opuestos. En la siguiente figura se observa cómo la suma de las dos triadas (considerando notación entera de la raíz) se mantiene constante en cada posición.



Finalmente veamos una variante de la función transposición total, la cual origina otro subgrupo, íntimamente relacionado con \mathbf{R} .

Definición #4.3.2.5. Dada una UTT $U = \langle \sigma, t^+, t^- \rangle$, se define la *transposición asimétrica (skew)* de U , y se denota $\tau^*(U)$, a:

$$\tau^*(U) = \begin{cases} \tau(U) = t^+ + t^-, & \text{si } \sigma = + \\ \tau(U) + 6 = t^+ + t^- + 6, & \text{si } \sigma = - \end{cases}$$

Al igual que se vio con τ , la aplicación τ^* define un homomorfismo entre \mathbf{V} y \mathbf{Z}_{12} cuyo núcleo es un subgrupo normal \mathbf{R}^* de \mathbf{V} llamado *grupo de transformaciones Riemannianas asimétricas*. Las

transformaciones que preservan el modo en \mathbf{R}^* son las mismas que en \mathbf{R} , las schritts $S_n = \langle +, n, -n \rangle$. Sin embargo, las transformaciones que invierten el modo en \mathbf{R}^* son las “*wechsels asimétricas*” de la forma $W_n^* = \langle -, n, -n + 6 \rangle$, un especie de variante tritono de las wechsels en \mathbf{R} . Es inmediato que \mathbf{R}^* satisface las condiciones del lema #4.3.2.1, por lo que \mathbf{R}^* actúa simple transitivamente en Γ .

4.3.3.- Grupos Simple Transitivos de UTTs

En anteriores capítulos se ha visto que el grupo \mathbf{V} de UTTs no es simple transitivo, pues dadas dos tríadas $\Delta_1, \Delta_2 \in \Gamma$ existe más de una UTT que transforma Δ_1 en Δ_2 . También hemos visto subgrupos de \mathbf{V} (\mathbf{R} y \mathbf{R}^*) que sí son simple transitivos, de modo que para cada par de tríadas existe una única transformación que aplica una en otra. Esta propiedad, junto con el hecho mismo de que estos subgrupos son más reducidos, permiten suponer un atractivo interés hacia estos subgrupos simple transitivos.

Dado que el espacio Γ está formado por 24 tríadas, es claro que cualquier subgrupo simple transitivo debe tener, al igual que \mathbf{R} y \mathbf{R}^* , exactamente 24 elementos. Sin embargo, no todo subgrupo de \mathbf{V} de orden 24 es simple transitivo, por ejemplo, todas las transformaciones de la forma $\langle +, n, 0 \rangle$ y $\langle +, n, 6 \rangle$ forman un grupo de 24 elementos, pero no simple transitivo, ya que son todas transformaciones que preservan el modo.

El objetivo de este capítulo es identificar y clasificar todos los grupos simple transitivos de \mathbf{V} .

Definición #4.3.3.1. Dados dos enteros a y b ($\text{mod } 12$), definimos tres subconjuntos de \mathbf{V} de la siguiente manera:

1. $K^+(a)$. Conjunto de UTTs que preservan el modo de la forma $\langle +, n, an \rangle$.
2. $K^-(a, b)$. Conjunto de UTTs que invierten el modo de la forma $\langle -, n, an + b \rangle$.
3. $K(a, b)$. Es el conjunto de UTTs de ambos tipos, es decir, $K(a, b) = K^+(a) \cup K^-(a, b)$.

Es inmediato que, fijados a y b , ambos conjuntos $K^+(a)$ y $K^-(a, b)$ tienen 12 elementos, y por tanto $K(a, b)$ está compuesto de 24 elementos. También es fácil ver que $K^+(a)$ es un grupo.

Teorema #4.3.3.1. $K(a, b)$ es un subgrupo de \mathbf{V} sí y sólo si $a^2 = 1$ y $ab = b$ ($\text{mod } 12$).

Prueba: (\Rightarrow) $K(a, b)$ es un grupo. Las transformaciones $\langle +, 1, a \rangle$ y $\langle -, 0, b \rangle$ pertenecen a $K^+(a)$ y $K^-(a, b)$ respectivamente, luego también pertenecen a $K(a, b)$. Por ser grupo, su producto $\langle -, 0, b \rangle \langle +, 1, a \rangle = \langle -, a, b + 1 \rangle$ también pertenece a $K(a, b)$, y como invierte el modo debe pertenecer a $K^-(a, b)$. Se sigue que $\langle -, a, b + 1 \rangle$ es de la forma $\langle -, n, an + b \rangle$ para algún n , de donde $n = a$ y $a^2 + b = b + 1$, es decir, $a^2 = 1$. Por otro lado, $\langle -, 1, a + b \rangle$ es de $K^-(a, b)$, luego también pertenece a $K(a, b)$, con lo que $\langle -, 1, a + b \rangle \langle -, 0, b \rangle = \langle +, b + 1, a + b \rangle$ debe pertenecer a $K^+(a)$. Se sigue que $\langle +, b + 1, a + b \rangle$ es de la forma $\langle +, n, an \rangle$ para algún n , de donde $b + 1 = n$ y $a + b = a(b + 1)$, es decir, $ab = b$.

(\Leftarrow) Suponiendo que $a^2 = 1$ y $ab = b$ ($\text{mod } 12$), para demostrar que $K(a, b)$ es un subgrupo tenemos que probar que todos los posibles productos e inversos de los elementos de $K(a, b)$ pertenecen a $K(a, b)$. Para ellos consideramos los diferentes casos de UTTs en $K^+(a)$ y $K^-(a, b)$. Con los productos tenemos cuatro casos:

1. $\langle +, m, am \rangle \langle +, n, an \rangle = \langle +, m+n, a(m+n) \rangle \in K^+(a)$.
2. $\langle +, m, am \rangle \langle -, n, an+b \rangle = \langle -, m+n, a(m+n)+b \rangle \in K^-(a, b)$.
3. $\langle -, m, am+b \rangle \langle +, n, an \rangle = \langle -, m+an, am+b+n \rangle \in K^-(a, b)$, porque $a(m+an)+b = am+a^2n+b = am+b+n$, al ser $a^2 = 1$.
4. $\langle -, m, am+b \rangle \langle -, n, an+b \rangle = \langle -, m+an+b, am+b+n \rangle \in K^+(a)$, porque $a(m+an+b) = am+a^2n+ab = am+b+n$, al ser $a^2 = 1$ y $ab = b$.

Con los inversos son dos casos:

1. $\langle +, n, an \rangle^{-1} = \langle +, -n, -an \rangle = \langle +, (-n), a(-n) \rangle \in K^+(a)$.
2. $\langle -, n, an+b \rangle^{-1} = \langle -, -(an+b), -n \rangle \in K^-(a, b)$, porque $a(-(an+b))+b = -a^2n-ab+b = -n$, al ser $a^2 = 1$ y $ab = b$ c.q.d.

La condición $a^2 = 1$ se cumple para $a = 1, 5, 7$ y 11 , esto es, las unidades o elementos invertibles de grupo multiplicativo Z_{12} . La otra condición, $ab = b$, se verifica para diferentes valores de b dependiendo de los casos de a . La lista completa de subgrupos $K(a, b)$ es la siguiente:

- $K(1, 0), K(1, 1), K(1, 2), \dots, K(1, 11)$
- $K(5, 0), K(5, 3), K(5, 6), K(5, 9)$
- $K(7, 0), K(7, 2), K(7, 4), K(7, 6), K(7, 8), K(7, 10)$
- $K(11, 0), K(11, 6)$

De esta lista de 24 subgrupos $K(a, b)$ los dos últimos son conocidos: $K(11, 0)$ es el grupo de Riemann **R** y $K(11, 6)$ el grupo **R*** de transformaciones Riemannianas asimétricas. El grupo $K(1, 0)$ es particularmente interesante al estar formado por las transposiciones $T_n = \langle +, n, n \rangle$ y las homólogas que invierten el modo $T_n P = \langle -, n, n \rangle$, de forma que todas las transformaciones aplican el mismo nivel de transposición a las tríadas mayores y menores. Otra particularidad reseñable es que mientras T_0 y T_6 están presentes en todos los subgrupos $K(a, b)$, hay otras transformaciones, como $\langle +, 0, 1 \rangle$, que no pertenecen a ninguno de ellos.

Lema #4.3.3.1. Dada $U \in K^-(1, b)$ tal que $U^k = T_1 = \langle +, 1, 1 \rangle$ para algún k , entonces el grupo $K(1, b)$ es cíclico y U es su generador.

Prueba: Es inmediato que $U^{2k} = T_2, U^{3k} = T_3, \dots, U^{11k} = T_{11}$, por tanto, U genera todas las transposiciones, que son los elementos de $K^+(1)$. Resta probar que los elementos de $K^-(1, b)$, que son las transformaciones que invierten el modo de la forma $V = \langle -, m, m+b \rangle$, se pueden escribir como potencia de U . Como $U \in K^-(1, b)$ es de la forma $\langle -, n, n+b \rangle$ para algún n , tenemos $VU^{-1} = \langle -, m, m+b \rangle \langle -, n, n+b \rangle^{-1} = \langle -, m, m+b \rangle \langle -, -n-b, -n \rangle = \langle +, m-n, m-n \rangle = T_{m-n}$. Pero hemos visto que todas las transposiciones son potencia de U , luego para algún j , $VU^{-1} = U^j$, de donde $V = U^{j+1}$ c.q.d.

Teorema #4.3.3.2.

- (a) Los subgrupos simple transitivos de **V** son, precisamente, los grupos $K(a, b)$ con $a^2 = 1$ y $ab = b$.
- (b) $K(a, b)$ es conmutativo sí y sólo si $a = 1$.
- (c) $K(a, b)$ es cíclico sí y sólo si $a = 1$ y b es impar.
- (d) $K(a, b)$ es subgrupo normal sí y sólo si $a = 11$.

Prueba: (a) Para ver que un grupo $K(a, b)$ es simple transitivo hay que probar que verifica las dos condiciones del lema #4.3.2.1. La primera establece que para cada signo σ y cada entero m , debe existir un único n tal que $\langle \sigma, m, n \rangle \in K(a, b)$. Pero por la propia definición de $K(a, b)$, bien $n = am$ si $\sigma = +$, bien $n = am + b$ si $\sigma = -$, que es único. La segunda condición establece que para cada signo σ y cada entero n , debe existir un único m tal que $\langle \sigma, m, n \rangle \in K(a, b)$. En este caso hay que probar que en las fórmulas $n = am$ y $n = am + b$, m es único. Pero como $a^2 = 1$, entonces $m = an$ y $m = a(n - b)$, con lo que m queda únicamente determinado.

Recíprocamente, suponiendo que K es un subgrupo simple transitivo de \mathbf{V} , hay que demostrar que K es alguno de la forma $K(a, b)$. De nuevo, por el lema #4.3.2.1 existe un único a tal que $\langle +, 1, a \rangle \in K$ y un único b tal que $\langle -, 0, b \rangle \in K$. Veamos que $K = K(a, b)$. Llamamos $U_a = \langle +, 1, a \rangle$ y $V_b = \langle -, 0, b \rangle$. Como U_a y V_b son elementos de K , las transformaciones $U_a^m = \langle +, m, am \rangle$ y $U_a^m V_b = \langle -, m, am + b \rangle$, para cada m , también los son. Por el lema #4.3.2.1, para cada m , existe un único n tal que $\langle +, m, n \rangle$ y $\langle -, m, n \rangle$ están en K . Se sigue que es $n = am$ y $n = am + b$, según el signo σ , es decir, los elementos de K coinciden con los de $K(a, b)$, por tanto, $K = K(a, b)$ c.q.d.

(b) Siendo $U_a = \langle +, 1, a \rangle$ y $V_b = \langle -, 0, b \rangle$, los productos $U_a V_b = \langle +, 1, a \rangle \langle -, 0, b \rangle = \langle -, 1, a + b \rangle$ y $V_b U_a = \langle -, 0, b \rangle \langle +, 1, a \rangle = \langle -, a, b + 1 \rangle$ son iguales si $a = 1$, luego si $K(a, b)$ es conmutativo, entonces $a = 1$. Recíprocamente, suponiendo $a = 1$, significa que los elementos de $K(1, b)$ son de la forma $T_n = \langle +, n, n \rangle$ y $\langle -, n, n + b \rangle$. En el teorema #4.3.1.3 ya se demostró que las transposiciones T_n conmutan con todas las transformaciones. También se vio que las transformaciones que invierten el modo $\langle -, m, n \rangle, \langle -, i, j \rangle$, tal que $m - n = i - j$, conmutan entre sí, lo cual es nuestro caso para las transformaciones $\langle -, n, n + b \rangle$ c.q.d.

(c) Como los grupos cíclicos son siempre conmutativos, por (b), los grupos $K(a, b)$ cíclicos forzosamente tienen $a = 1$. Veamos que $K(1, b)$ es cíclico sí y sólo si b es impar.

(\Leftarrow) Si b es impar, entonces $1 - b$ es par, luego existe un n tal que $2n = 1 - b$. Sea $U = \langle -, n, n + b \rangle$, que sabemos pertenece a $K^-(1, b)$. Pero $U^2 = \langle +, 2n + b, 2n + b \rangle = \langle +, 1, 1 \rangle = T_1$, luego por el lema #4.3.3.1 $K(1, b)$ es cíclico y U es su generador.

(\Rightarrow) Ahora, suponiendo que U es el generador cíclico de $K(1, b)$, es claro que U debe invertir el modo, luego es de la forma $U = \langle -, n, n + b \rangle$, de donde $U^2 = \langle +, 2n + b, 2n + b \rangle = T_{2n + b}$. Si b es par, $2n + b$ también es par, luego las potencias pares de U son transposiciones pares (T_m con m par). Pero las potencias impares de U son UTT que invierten el modo. Por tanto, las transposiciones impares, como por ejemplo $T_1 = \langle +, 1, 1 \rangle$, que también pertenecen a $K(1, b)$ no se pueden poner como potencias de U , lo cual es una contradicción, por lo que b debe ser impar c.q.d.

(d) Si $K(a, b)$ es un subgrupo normal de \mathbf{V} , como $W = \langle -, 1, a + b \rangle$ es un elemento suyo, entonces UWU^{-1} debe pertenecer a $K(a, b)$ para toda UTT U . En particular, para $U = \langle +, 0, 1 \rangle$, $UWU^{-1} = \langle +, 0, 1 \rangle \langle -, 1, a + b \rangle \langle +, 0, 1 \rangle = \langle -, 1, a + b + 1 \rangle \langle +, 0, 1 \rangle = \langle -, 0, a + b + 1 \rangle$. Al ser del tipo que invierte el modo, para que pertenezca a $K(a, b)$ debe ser $a + 1 = 0$, equivalentemente, $a = 11$. Pero de la lista de subgrupos $K(a, b)$ vista anteriormente, sólo hay dos con $a = 11$, estos son $K(11, 0) = \mathbf{R}$ y $K(11, 6) = \mathbf{R}^*$, que sabemos son normales, c.q.d.

A continuación veremos una cuestión que tiene su atractivo algebraico, pero también resulta musicalmente interesante, como se pondrá de manifiesto en algún ejemplo. Se trata de los elementos de orden máximo en el grupo \mathbf{V} . Además está conectado con los grupos cíclicos $K(1, b)$ con b impar.

En el teorema #4.3.1.4 se estableció que el grupo \mathbf{V}^* de UTTs que preserva el modo es isomorfo a $Z_{12} \times Z_{12}$, de donde se deduce que el máximo orden de cualquier UTT que preserva el modo es 12. Por ejemplo, son de orden 12 las conocidas transposiciones de un semitono T_1 y T_{11} , la dominante $D = T_5$ y su inversa subdominante $D^{-1} = T_7$.

Si U es una UTT que invierte el modo, entonces U^2 preserva el modo, luego no es posible que una UTT pueda tener un orden mayor de 24. En el teorema #4.3.3.2 parte (c) se demuestra que los subgrupos $K(1, b)$ con b impar son cíclicos, y son de orden 24 puesto que son simple transitivos, luego cualquier elemento generador de ese grupo es un elemento de orden 24. El siguiente teorema identifica todos los elementos de orden 24.

Teorema #4.3.3.3. Existen exactamente 48 elementos de orden 24 en \mathbf{V} , son las UTTs de la forma $\langle -, m, n \rangle$ tal que $m + n = 1, 5, 7, 11$. Estas transformaciones $U = \langle -, m, n \rangle$ son generadoras de los grupos simple transitivos $K(1, b)$, siendo $b = n - m$.

Prueba: Para cada $m = 0, 1, \dots, 11$, hay cuatro valores de n tal que $m + n = 1, 5, 7, 11$, luego es claro que existen 48 UTTs del tipo $\langle -, m, n \rangle$ descrito. Sea $U = \langle -, m, n \rangle$ una de ellas, $b = n - m$ y $c = \tau(U) = m + n$. Es inmediato que U pertenece a $K(1, b)$ y $U^2 = T_c$, de donde $U^{2c} = (U^2)^c = (T_c)^c = \langle +, c^2, c^2 \rangle$. Pero por hipótesis $c = 1, 5, 7, 11$, de donde $c^2 = 1 \pmod{12}$, y por tanto, $U^{2c} = \langle +, 1, 1 \rangle$. Se sigue, por lema #4.3.3.1, que U es generador del grupo $K(1, b)$, por tanto, de orden 24. Queda por demostrar que toda UTT de orden 24 es de la forma $\langle -, m, n \rangle$ tal que $m + n = 1, 5, 7, 11$. Supongamos que V es de orden 24 en \mathbf{V} . Sabemos que las UTTs que preservan el modo son de orden 12 o menor, luego V debe ser una transformación que invierte el modo, por tanto, se puede poner $V = \langle -, m, n \rangle$ para algún m y n . Sea $c = m + n$. Las potencias pares de V son $V^2 = \langle +, c, c \rangle$, $V^4 = \langle +, 2c, 2c \rangle$, $V^6 = \langle +, 3c, 3c \rangle$, ..., $V^{24} = \langle +, 12c, 12c \rangle = T_0$, puesto que V es de orden 24. Además todas ellas deben ser distintas, es decir, los números $c, 2c, 3c, \dots, 12c = 0 \pmod{12}$, deben ser distintos. Pero esto sólo es posible si c es co-primo de 12, esto es, si $c = 1, 5, 7, 11$ c.q.d.

Corolario #4.3.3.1. Dado un valor b impar, existen 12 transformaciones que invierten el modo $\langle -, m, n \rangle$ en $K(1, b)$. Ocho de ellas satisfacen $m + n = 1, 5, 7, 11$ y las otras cuatro $m + n = 3, 9$. Luego cada uno de los seis grupos cíclicos $K(1, b)$, a saber: $K(1, 1)$, $K(1, 3)$, $K(1, 5)$, $K(1, 7)$, $K(1, 9)$ y $K(1, 11)$, por el teorema anterior, puede ser generado por ocho elementos diferentes, lo que hace el total de 48 elementos de orden 24 comentados.

Las UTTs de orden 24 tienen un interés musical considerable. Al aplicarlas sucesivamente resulta una cadena de tríadas que recorre las 24 (mayores y menores) del espacio Γ hasta volver al punto de partida. Cuidado, porque si bien es cierto lo que acabamos de decir para las UTTs de orden 24, no es cierto en general que una UTT de orden n genere ciclos de n tríadas distintas. Por ejemplo $\langle +, 3, 4 \rangle$ es de orden 12, pero no genera ciclos de 12 tríadas, sino de longitud 4 aplicada a tríadas mayores y 3 para las menores.

De orden 24 es la transformación **Mediante** $M = \langle -, 9, 8 \rangle$ y su inversa, **SubMediante** $M^{-1} = \langle -, 4, 3 \rangle$, cualquiera de ellas es generador del grupo $K(1, 11)$. Como veremos en adelante, este grupo, por su importancia lo vamos a designar específicamente con el nombre $\mathbf{M} = K(1, 11)$. El grupo \mathbf{M} ya fue

introducido anteriormente por David Lewin (lo vimos como grupo *STRANS* en el capítulo 4.2.4.- Transformaciones Triádicas no interválicas)

La siguiente tabla muestra ejemplos reales famosos de progresiones triádicas generadas por transformaciones de orden 24 (Julian Hook [8]).

<i>Chord progressions</i>				
Source	Progression	UTT (U)	U^2	Group
Bach, Violin Concerto in A Minor, I, mm. 88–94	$e \rightarrow E \rightarrow a \rightarrow A \rightarrow d \rightarrow \dots$	$\langle -, 5, 0 \rangle$	T_5	$\mathcal{K}(1, 7)$
Mozart, Requiem, <i>Confutatis</i> , mm. 10–12	$C \rightarrow c \rightarrow G \rightarrow g \rightarrow D \rightarrow \dots$	$\langle -, 0, 7 \rangle$	T_7	$\mathcal{K}(1, 7)$
Beethoven, String Quartet, Op. 18, No. 6, IV, mm. 20–28	$B \rightarrow e \rightarrow F\# \rightarrow b \rightarrow C\# \rightarrow \dots$	$\langle -, 5, 2 \rangle$	T_7	$\mathcal{K}(1, 9)$
Beethoven, Symphony No. 3, I, mm. 178–186	$c \rightarrow A\flat \rightarrow c\# \rightarrow A \rightarrow d$	$\langle -, 5, 8 \rangle$	T_1	$\mathcal{K}(1, 3)$
Beethoven, Symphony No. 9, II, mm. 143–171	$C \rightarrow a \rightarrow F \rightarrow d \rightarrow B\flat \rightarrow \dots$	$\langle -, 9, 8 \rangle = M$	T_5	$\mathcal{K}(1, 11) = \mathcal{M}$
Liszt, “Wilde Jagd,” mm. 180–184	$E\flat \rightarrow g \rightarrow D \rightarrow f\# \rightarrow D\flat \rightarrow \dots$	$\langle -, 4, 7 \rangle$	T_{11}	$\mathcal{K}(1, 3)$
<i>Tonal cycles</i>				
Source	Key sequence	UTT (U)	U^2	Group
Bach, <i>Well-Tempered Clavier</i>	$C \rightarrow c \rightarrow C\# \rightarrow c\# \rightarrow D \rightarrow \dots$	$\langle -, 0, 1 \rangle$	T_1	$\mathcal{K}(1, 1)$
Chopin, Preludes, Op. 28	$C \rightarrow a \rightarrow G \rightarrow e \rightarrow D \rightarrow \dots$	$\langle -, 9, 10 \rangle$	T_7	$\mathcal{K}(1, 1)$
Liszt, <i>Transcendental Etudes</i>	$C \rightarrow a \rightarrow F \rightarrow d \rightarrow B\flat \rightarrow \dots$	$\langle -, 9, 8 \rangle = M$	T_5	$\mathcal{K}(1, 11) = \mathcal{M}$

En la sinfonía N° 9 de Beethoven, entre los compases 143-171, se produce una secuencia de 19 triadas generadas consecutivamente por la transformación mediante M (Richard Cohn, 1997 [4]), sólo le faltan 5 para completar el ciclo de 24. En la parte inferior de la tabla se incluyen colecciones de piezas compuestas en todas las tonalidades. La organización en el cambio de tonalidad puede ser descrita usando también UTTs.

Ejemplo #4.3.3.1. Vamos a pararnos un poco para desmenuzar esta curiosa secuencia de 19 triadas de la novena sinfonía de Beethoven: $C \xrightarrow{M} a \xrightarrow{M} F \xrightarrow{M} d \xrightarrow{M} B\flat \xrightarrow{M} g \dots \xrightarrow{M} A$. Como en cualquier progresión triádica, la elección del grupo simple transitivo $K(a, b)$ determina un posible análisis transformacional. Así, esta misma progresión puede ser descrita por la aplicación alterna de las transformaciones R y L pertenecientes al grupo de Riemann $\mathbf{R} = K(11, 0)$: $C \xrightarrow{R} a \xrightarrow{L} F \xrightarrow{R} d \xrightarrow{L} B\flat \xrightarrow{R} g \dots \xrightarrow{L} A$. Otro posible análisis podría resultar de utilizar el grupo de las UTTs independientes del modo $K(1, 0)$: $C \xrightarrow{T_9P} a \xrightarrow{T_8P} F \xrightarrow{T_9P} d \xrightarrow{T_8P} B\flat \xrightarrow{T_9P} g \dots \xrightarrow{T_8P} A$.

Cada uno de los tres análisis tiene sus virtudes. Así en $K(1, 0)$ la progresión se produce por la composición de una inversión de modo (P) con una transposición que alterna los niveles 8 y 9. En el grupo \mathbf{M} la progresión completa se produce con una única transformación (M), lo cual es interesante, sin embargo no es convincente expresar que la misma transformación produce dos

movimientos diferentes alternados. El análisis Neo-Riemanniano, con las transformaciones R y L , se adapta perfectamente a esta secuencia de tríadas, donde se van alternando los acordes relativos (R) y Leittonwechsel (L).

Por tanto, toda progresión triádica admite diferentes análisis, hasta 24 utilizando los grupos simple transitivos. Para cada caso particular, unos serán más convincentes que otros. Otro ejemplo de secuencias singularmente adaptadas a la visión Neo-Riemanniana (grupo \mathbf{R}) son el “*bucle RPL*”: $f \xrightarrow{R} Ab \xrightarrow{P} g\# \xrightarrow{L} E \xrightarrow{R} c\# \xrightarrow{P} Db \xrightarrow{L} f$ y los “*ciclos hexatónicos*” (Richard Cohn, 1997 [3]) formados por tres tríadas en modo mayor y menor, es decir, secuencias de seis tríadas: $Ab \xrightarrow{P} g\# \xrightarrow{L} E \xrightarrow{P} e \xrightarrow{L} C \xrightarrow{P} c \xrightarrow{L} Ab$.

Debido a que la transformación mediante M conecta tríadas a intervalos de tercera diatónica, y además $M^2 = D$ es la transformación dominante, el grupo \mathbf{M} es el más apropiado para analizar progresiones diatónicas. $I \xrightarrow{M^2} IV \xrightarrow{M^{-4}} V \xrightarrow{M^3} vi \xrightarrow{M} IV \xrightarrow{M} ii \xrightarrow{M^{-5}} V \xrightarrow{M^2} I$. Un análisis Neo-Riemanniano de esta progresión no tendría mucho sentido.

Estableciendo de nuevo una conexión con las ideas de David Lewin sobre la acción de los grupos simple transitivos $STRANS$ en los sistemas GIS (Generalized Interval Systems), podemos decir que cada uno de los subgrupos de \mathbf{V} implementa su propio conjunto de “*intervalos*” en $\mathbf{\Gamma}$, es decir, su propia “*distancia*” entre dos tríadas. Por ejemplo, el “*intervalo*” entre C, DO Mayor, (0, +) y d, Re menor, (2, -) es T_2P en el grupo $K(1, 0)$, $W_2 = RLR$ en el grupo de Riemann \mathbf{R} , $W_2^* = \langle -, 2, 4 \rangle$, en \mathbf{R}^* ó M^3 en \mathbf{M} .

Para terminar este capítulo veamos una característica interesante de los subgrupos simple transitivos que son conmutativos pero no cíclicos, esto es, los subgrupos de la forma $K(1, b)$ con b par. Están formados por las doce transposiciones $T_n = \langle +, n, n \rangle$ y otras doce transformaciones que invierten el modo de la forma $\langle -, m, m + b \rangle$. Como b es par, podemos encontrar un k tal que $2k = -b \pmod{12}$, de donde, $k + b = -k$. Por tanto, para $m = k$, tenemos que $\langle -, k, -k \rangle = W_k$ pertenece a $K(1, b)$, luego cualquier UTT de $K(1, b)$ que invierte el modo se puede expresar como producto de W_k y alguna transposición T_n . Se sigue que el grupo $K(1, b)$ es generado por la wechsell W_k y la transposición T_1 . Tenemos que cualquier elemento de $K(1, b)$ puede escribirse unívocamente como $W_k^i T_1^j$, donde i es 1 ó 0 y j un entero $\pmod{12}$. Recordar que W_k conmuta con T_1 y $W_k^2 = T_0$. Con todo esto, es inmediato ver que el grupo $K(1, b)$ es isomorfo a $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_{12}$. Las transformaciones $W_k^i T_1^j \in K(1, b)$ se corresponden con los pares ordenados $(i, j) \in \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_{12}$.

4.3.4.- La estructura del grupo UTT

Siguiendo con la estructura algebraica del grupo \mathbf{V} , en este capítulo se obtienen resultados que caracterizan nuevas familias de subgrupos de \mathbf{V} .

Dado que se va a utilizar el producto de subgrupos, básico en teoría de grupos, recordemos algunas de sus propiedades.

- Si H y K son dos subgrupos de G , se define el producto HK como el conjunto de todos los productos hk , para todo $h \in H$ y $k \in K$.

- El conjunto HK es un subgrupo sí y sólo si $HK = KH$.
- Si H ó K son subgrupos normales, entonces HK es subgrupo.
- Para grupos finitos, el cardinal de HK es $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$.

Definición #4.3.4.1. Dada la UTT $B = \langle +, 0, 1 \rangle$, llamamos \mathbf{B} al grupo generado por B . Es claro que $B^n = \langle +, 0, n \rangle$, luego \mathbf{B} es un subgrupo cíclico de orden 12, isomorfo a \mathbf{Z}_{12} .

Lema #4.3.4.1. Las siguientes afirmaciones son inmediatas:

- Si \mathbf{K} es cualquiera de los subgrupos simple transitivos vistos $K(a, b)$, entonces $\mathbf{B} \cap \mathbf{K} = \{T_0\}$. En particular, $\mathbf{B} \cap \mathbf{R} = \mathbf{B} \cap \mathbf{M} = \{T_0\}$.
- $\mathbf{R} \cap \mathbf{M} = \{T_0, T_6\}$

Teorema #4.3.4.1.

- Si \mathbf{K} es cualquiera de los subgrupos simple transitivos $K(a, b)$, entonces $\mathbf{V} = \mathbf{BK}$. Por tanto, cada UTT $U \in \mathbf{V}$ se puede poner unívocamente como $U = B^i V$ para algún i , $0 \leq i \leq 11$, y algún V en \mathbf{K} .
- $\mathbf{V} = \mathbf{BR}$. Cada UTT $U \in \mathbf{V}$ se puede poner unívocamente como $U = B^i V$ para algún i , $0 \leq i \leq 11$, y algún V en \mathbf{R} .
- Si V es un elemento de orden 24 en \mathbf{V} , entonces \mathbf{V} es generado por B y V . Cada UTT $U \in \mathbf{V}$ se puede poner unívocamente como $U = B^i V^j$ para algunos i , $0 \leq i \leq 11$, y j , $0 \leq j \leq 23$.
- $\mathbf{V} = \mathbf{BM}$. Cada UTT $U \in \mathbf{V}$ se puede poner unívocamente como $U = B^i M^j$ para algunos i , $0 \leq i \leq 11$, y j , $0 \leq j \leq 23$.
- \mathbf{V} es generado por $B = \langle +, 0, 1 \rangle$ y $P = \langle -, 0, 0 \rangle$.
- $\mathbf{V} = \mathbf{MR}$. Cada UTT $U \in \mathbf{V}$ se puede poner como $U = M^i V$ para algún i , $0 \leq i \leq 23$, y algún V en \mathbf{R} . Esta representación no es unívoca pues, en realidad, para cada U hay dos posibilidades, cada una de ellas con exponente i e $i + 12$.

Prueba: (a) Sea \mathbf{K} uno de los subgrupos simple transitivos $K(a, b)$. Por la fórmula del producto de grupos vista anteriormente, $|\mathbf{BK}| = \frac{|B| \cdot |K|}{|B \cap K|} = \frac{12 \cdot 24}{1} = 288$. $|B \cap K| = 1$ se ha visto

en el lema #4.3.4.1. Luego \mathbf{BK} es un subconjunto de \mathbf{V} que tiene también 288 elementos. Se sigue $\mathbf{BK} = \mathbf{V}$. Como \mathbf{B} está formado por las potencias de B , cada elemento de \mathbf{V} se puede poner como $B^i V$. Puesto que i tiene 12 valores posibles y V puede ser uno de los 24 elementos de \mathbf{K} , entonces existen $12 \times 24 = 288$ posibles productos, que tienen que ser todos distintos para recorrer los elementos de \mathbf{V} . Por tanto, la representación $B^i V$ es única (unívoca).

(b) Es un caso particular de (a), tomando $\mathbf{K} = \mathbf{R} = K(11, 0)$.

(c) Según el teorema #4.3.3.3 V es generador del grupo simple transitivo del tipo $K(1, b)$, luego también se sigue de (a).

(d) La transformación mediante M es una UTT de orden 24, luego se sigue de (c).

(e) En el apartado (b) se ha visto que $\mathbf{V} = \mathbf{BR}$. Del teorema #4.3.2.2 (a) sabemos que el grupo de Riemann \mathbf{R} es generado por las transformaciones $P = \langle -, 0, 0 \rangle$ y la schritt unidad $Q = \langle +, 1, 11 \rangle$.

Luego basta probar que Q puede ponerse en términos de B y P . Pero es fácil ver que $BP = \langle -, 0, 1 \rangle$, $(BP)^2 = \langle +, 1, 1 \rangle$ y $(BP)^2 B^{10} = \langle +, 1, 11 \rangle = Q$.

(f) Por la fórmula del cardinal del producto y el lema #4.3.4.1 $|MR| = \frac{|M| \cdot |R|}{|M \cap R|} = \frac{24 \cdot 24}{2} = 288$.

De donde se deduce que $MR = V$ y cada $U \in V$ se puede poner como $U = M^i V$ para algún i , $0 \leq i \leq 23$, y algún V en R . Veamos que existen dos representaciones distintas, esto es, $U = M^i V = M^j W$, siendo $0 \leq i, j \leq 23$, y $V, W \in R$. Operando, $M^{i-j} = WV^{-1}$. Pero M^{i-j} pertenece a M y WV^{-1} a R , por el lema #4.3.4.1 los únicos elementos que pertenecen a ambos grupos son $T_0 = M^0$ y $T_6 = M^{12}$, luego bien $i - j = 0$, bien $i - j = 12$. Si $i = j$ es evidente que $V = W$ y $U = M^i V$. Si $i = j + 12$, tenemos $U = M^i V = M^{j+12} V = M^j M^{12} V = M^j T_6 V = M^j W$, donde $W = T_6 V$ c.q.d.

En la demostración del teorema anterior la transformación $B = \langle +, 0, 1 \rangle$ ha jugado un papel destacado, sin embargo, se podrían haber elegido B^5 , B^7 ó B^{11} , que también son generadores del grupo B , obteniendo los mismos resultados.

A continuación veremos una clasificación de las UTTs de V en función de una propiedad directamente relacionada con el grupo de permutaciones (grupo simétrico) de todas transformaciones triádicas (uniformes y no uniformes) G .

Definición #4.3.4.2. Se dice que una UTT $U = \langle \sigma, t^+, t^- \rangle$ es *par* si su *transposición total* $\tau(U) = t^+ + t^-$ es un número par. U es *impar* si $\tau(U) = t^+ + t^-$ es un número impar

En este sentido, de las UTTs más conocidas hasta ahora, $T_n = \langle +, n, -n \rangle$, $P = \langle -, 0, 0 \rangle$, $Q = \langle +, 1, 11 \rangle$, $L = \langle -, 4, 8 \rangle$, $R = \langle -, 9, 3 \rangle$ y $D = \langle +, 5, 5 \rangle$ son pares, mientras que $M = \langle -, 9, 8 \rangle$ y $B = \langle +, 0, 1 \rangle$ son impares. Las UTTs Riemannanas presentan por definición una transposición total igual a 0, luego son pares. Por el teorema #4.3.3.3, las UTTs de orden 24 tienen una transposición total igual a 1, 5, 7 u 11, luego son impares. Se sigue que toda transformación par es de orden 12 o menor.

En capítulos anteriores se vio que τ es un homomorfismo de V en Z_{12} , esto es, $\tau(UV) = \tau(U) + \tau(V)$. Se sigue que el producto de dos transformaciones de la misma paridad es siempre par, mientras el producto de dos transformaciones de distinta paridad es siempre impar. Así mismo, el inverso de una UTT U tiene la misma paridad que U .

Por otro lado, considerando las transformaciones triádicas como elementos del grupo G de permutaciones del conjunto de tríadas Γ , se puede aplicar la teoría del grupo simétrico para representar cada transformación como producto de ciclos disjuntos cuya longitud total es 24 o menor. Entonces aparece un nuevo criterio para clasificar las transformaciones UTTs como pares e impares. Por ejemplo, $U = \langle -, 0, 8 \rangle$ se descompone en cuatro ciclos de longitud 6:

$$\begin{array}{cccccccc}
 C & \xrightarrow{U} & c & \xrightarrow{U} & Ab & \xrightarrow{U} & g\# & \xrightarrow{U} & E & \xrightarrow{U} & e & \xrightarrow{U} & C \\
 Db & \xrightarrow{U} & c\# & \xrightarrow{U} & A & \xrightarrow{U} & a & \xrightarrow{U} & F & \xrightarrow{U} & f & \xrightarrow{U} & Db \\
 D & \xrightarrow{U} & d & \xrightarrow{U} & Bb & \xrightarrow{U} & bb & \xrightarrow{U} & F\# & \xrightarrow{U} & f\# & \xrightarrow{U} & D \\
 Eb & \xrightarrow{U} & d\# & \xrightarrow{U} & B & \xrightarrow{U} & b & \xrightarrow{U} & G & \xrightarrow{U} & g & \xrightarrow{U} & Eb
 \end{array}$$

Esta estructura de cuatro sistemas hexatónicos (Richard Cohn, 1996 [3]) se puede representar en teoría de permutaciones de una forma más compacta, a saber:

$$(C, c, Ab, g\#, E, e)(Db, c\#, A, a, F, f)(D, d, Bb, bb, F\#, f\#)(Eb, d\#, B, b, G, g)$$

A su vez, cada ciclo se puede descomponer en producto de ciclos de longitud 2 llamados transposiciones (no confundir estas transposiciones con las transposiciones triádicas T_n), cada uno de los cuales simplemente intercambia dos tríadas entre sí. Por ejemplo:

$$(C, c, Ab, g\#, E, e) = (C, c)(C, Ab)(C, g\#)(C, E) (C, e)$$

En general, un ciclo de longitud n se puede descomponer en un producto de $(n - 1)$ transposiciones. Para este caso, $U = \langle -, 0, 8 \rangle$ se puede poner como producto de 20 transposiciones.

La teoría del grupo simétrico o grupo de permutaciones define una permutación como par ó impar dependiendo si su representación en transposiciones tiene un número par ó impar de ellas respectivamente. De acuerdo con esto, se dice que una UTT es par ó impar en el sentido de la teoría de permutaciones.

Teorema #4.3.4.2. La paridad de una UTT es la misma en el sentido de *transposición total* que en el sentido de la *teoría de permutaciones*.

Prueba: Sea U una UTT. Por el teorema #4.3.4.1 (e) U se puede expresar como $B^i P^j$ para algún exponente i y j . En el sentido de transposición total $B = \langle +, 0, 1 \rangle$ es impar y $P = \langle -, 0, 0 \rangle$ es par, luego P^j es par y la paridad de $U = B^i P^j$ es la misma que la de $B^i = \langle +, 0, i \rangle$, que es en realidad la misma que la paridad del número i .

Por otro lado, la transformación $B = \langle +, 0, 1 \rangle$ permuta cíclicamente todas las tríadas menores y mantiene invariantes las mayores, esto es, B es el ciclo de longitud 12 $(c, c\#, d, d\#, \dots, b)$. Entonces B se puede representar como producto de 11 transposiciones, luego es impar en el sentido de la teoría de permutaciones. La transformación paralela $P = \langle -, 0, 0 \rangle$ intercambia las tríadas mayores y menores entre sí, luego es claramente el producto de 12 transposiciones, $(C, c)(Db, c\#)(D, d) \dots (B, b)$, y por tanto par en este sentido. Por tanto, en el sentido de la teoría de permutaciones, la paridad de $U = B^i P^j$ es la misma que la de B^i , que es la misma que la paridad del exponente i , c.q.d.

Del teorema #4.3.4.2 se desprende que podemos hablar de UTTs pares ó impares sin ningún tipo de ambigüedad. Veamos a continuación algunos subgrupos que surgen de este concepto.

Definición #4.3.4.3. De las 288 UTTs que forman el grupo \mathbf{V} , la mitad (144) son pares. Acabamos de ver que el producto y los inversos de transformaciones pares son pares, luego el conjunto de UTTs *pares* \mathbf{H} forma un *subgrupo* de \mathbf{V} . Como este subgrupo es de índice 2, por teoría de grupos, sabemos que es subgrupo *normal*.

Definición #4.3.4.4. Puesto que el subgrupo de UTTs que preservan el modo \mathbf{V}^+ es normal, las transformaciones *pares que preservan el modo* $\mathbf{H}^+ = \mathbf{H} \cap \mathbf{V}^+$ forman un *subgrupo normal* de orden 72.

Por el teorema #4.3.4.1 (b) cualquier UTT U se puede poner como $U = B^i V$ para algún i y alguna transformación Riemanniana $V \in \mathbf{R}$. Luego \mathbf{H} es generado por B^2 y los generadores Riemannianos L y R .

Análogamente, por el apartado (f) del teorema #4.3.4.1 \mathbf{H} es generado por M^2 , L y R . Pero M^2 es la transformación dominante $D = M^2 = T_5$, luego D , L y R son generadores de \mathbf{H} . Además las potencias de D forman el grupo de transposiciones $\mathbf{T} = \{T_0, T_1, \dots, T_{11}\}$, de donde $\mathbf{H} = \mathbf{TR}$.

Esta última descripción del grupo de transformaciones pares \mathbf{H} , generado por D , L y R , es precisamente el grupo estudiado por Brian Hyer en los primeros años de gestación de la teoría musical Neo-Riemanniana. Más adelante se comentará su trabajo en un contexto más preciso.

Reparemos en un detalle que añade cierta idea de complejidad del grupo \mathbf{H} . \mathbf{H} es subgrupo de \mathbf{V} , el cual, por el teorema #4.3.4.1 puede ser generado por dos elementos, sin embargo, acabamos de ver que \mathbf{H} necesita tres generadores. El siguiente teorema aporta la prueba definitiva. En realidad, esta situación que puede parecer un contrasentido, se da muy frecuentemente. De hecho, cualquier grupo finito, independientemente de los generadores que tenga, es subgrupo del grupo simétrico S_n para un n suficientemente grande, y S_n se forma con sólo dos generadores, que son los ciclos $(1, 2)$ y $(1, 2, \dots, n)$.

Teorema #4.3.4.3. El grupo \mathbf{H} no puede tener sólo dos generadores.

Prueba: El grupo más simple que no puede ser generado por dos de sus elementos es el grupo de orden 8 $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, ya que con dos elementos como mucho se genera un subgrupo de orden 4. La demostración se basa en construir un homomorfismo sobreyectivo (epimorfismo) f entre \mathbf{H} y $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. En efecto, pues si las UTTs U y V generaran \mathbf{H} , entonces sus imágenes $f(U)$ y $f(V)$ generarían $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, lo cual es una contradicción.

Sea la aplicación $f: \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2: U = \langle \sigma, t^+, t^- \rangle \longrightarrow f(U) = (\alpha, \beta, \gamma)$, donde cada una de las tres componentes α , β y γ se define como:

$$\alpha(\langle \sigma, t^+, t^- \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = + \\ 1 & \text{si } \sigma = - \end{cases} \quad \beta(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } t^+ \text{ y } t^- \text{ son pares} \\ 1 & \text{si } t^+ \text{ y } t^- \text{ son impares} \end{cases} \quad \gamma(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau(U) = 0 \pmod{4} \\ 1 & \text{si } \tau(U) = 2 \pmod{4} \end{cases}$$

La definición de α es simple. β está bien definida porque al pertenecer $U = \langle \sigma, t^+, t^- \rangle$ a \mathbf{H} , $\tau(U) = t^+ + t^-$ es par, para lo cual t^+ y t^- deben que tener la misma paridad. Lo mismo para γ ; al ser $\tau(U)$ par, bien es $0 \pmod{4}$, bien es $2 \pmod{4}$.

Con la fórmula del producto, $UV = \langle \sigma_U \sigma_V, t_U^+ + t_V^{(\sigma_U)}, t_U^- + t_V^{(-\sigma_U)} \rangle$, es fácil demostrar que α , β y γ son homomorfismos, esto es, $\alpha(UV) = \alpha(U) + \alpha(V)$, $\beta(UV) = \beta(U) + \beta(V)$ y $\gamma(UV) = \gamma(U) + \gamma(V)$. En efecto, $\sigma_{UV} = \sigma_U \sigma_V$, luego $\alpha(UV) = 0$ si $\sigma_{UV} = \sigma_U \sigma_V = +$, equivalentemente U y V son del mismo signo. Se sigue $\alpha(U) + \alpha(V) = 0 + 0$ ó $1 + 1 = 0 \pmod{2}$. Por otro lado, si U y V son de distinto signo, $\sigma_{UV} = \sigma_U \sigma_V = -$, de donde $\alpha(UV) = 1$. Pero $\alpha(U) + \alpha(V) = 0 + 1$ ó $1 + 0 = 1 \pmod{2}$. La demostración para β y γ no se incluye para no extender en exceso este trabajo.

Por tanto, f aplica los elementos de \mathbf{H} en $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ tal que $f(U) = (\alpha(U), \beta(U), \gamma(U))$. Finalmente, para comprobar que f es sobreyectiva, basta con ver que los siguientes ocho elementos tienen imagen distinta: $\langle +, 0, 0 \rangle$, $\langle +, 0, 2 \rangle$, $\langle +, 1, 1 \rangle$, $\langle +, 1, 3 \rangle$, $\langle -, 0, 0 \rangle$, $\langle -, 0, 2 \rangle$, $\langle -, 1, 1 \rangle$, $\langle -, 1, 3 \rangle$ c.q.d.

Veamos ahora una amplia familia de subgrupos de \mathbf{V} que incluye la mayoría de los vistos hasta ahora. Se trata de una generalización de la definición #4.3.3.1 para los grupos simple transitivos $K(a, b)$.

Definición #4.3.4.5. Sea d un divisor de 12, esto es, $d = 1, 2, 3, 4, 6$ ó 12 . Dados dos enteros a y b ($\text{mod } d$), definimos tres subconjuntos de \mathbf{V} de la siguiente manera:

1. $K_d^+(a)$. Conjunto de UTTs que preservan el modo de la forma $\langle +, m, n \rangle$ tal que $n = am \pmod{d}$.
2. $K_d^-(a, b)$. Conjunto de UTTs que invierten el modo de la forma $\langle -, m, n \rangle$ tal que $n = am + b \pmod{d}$.
3. $K_d(a, b)$. Es la unión de ambos conjuntos, es decir, $K_d(a, b) = K_d^+(a) \cup K_d^-(a, b)$.

Para cada m , existen $12/d$ valores de n tal que $\langle +, m, n \rangle \in K_d^+(a)$, es decir, $n = am \pmod{d}$. Análogamente, para cada m , existen $12/d$ valores de n tal que $\langle -, m, n \rangle \in K_d^-(a, b)$, es decir, $n = am + b \pmod{d}$. Por tanto, los conjuntos $K_d^+(a)$ y $K_d^-(a, b)$ son de cardinal $144/d$, luego $K_d(a, b)$ está formado por $288/d$ elementos. Siguiendo una demostración paralela al teorema #4.3.3.1, se prueba que $K_d(a, b)$ es un subgrupo de \mathbf{V} sí y sólo si $a^2 = 1 \pmod{d}$ y $ab = b \pmod{d}$.

De los subgrupos del tipo $K_d(a, b)$ que acabamos de definir:

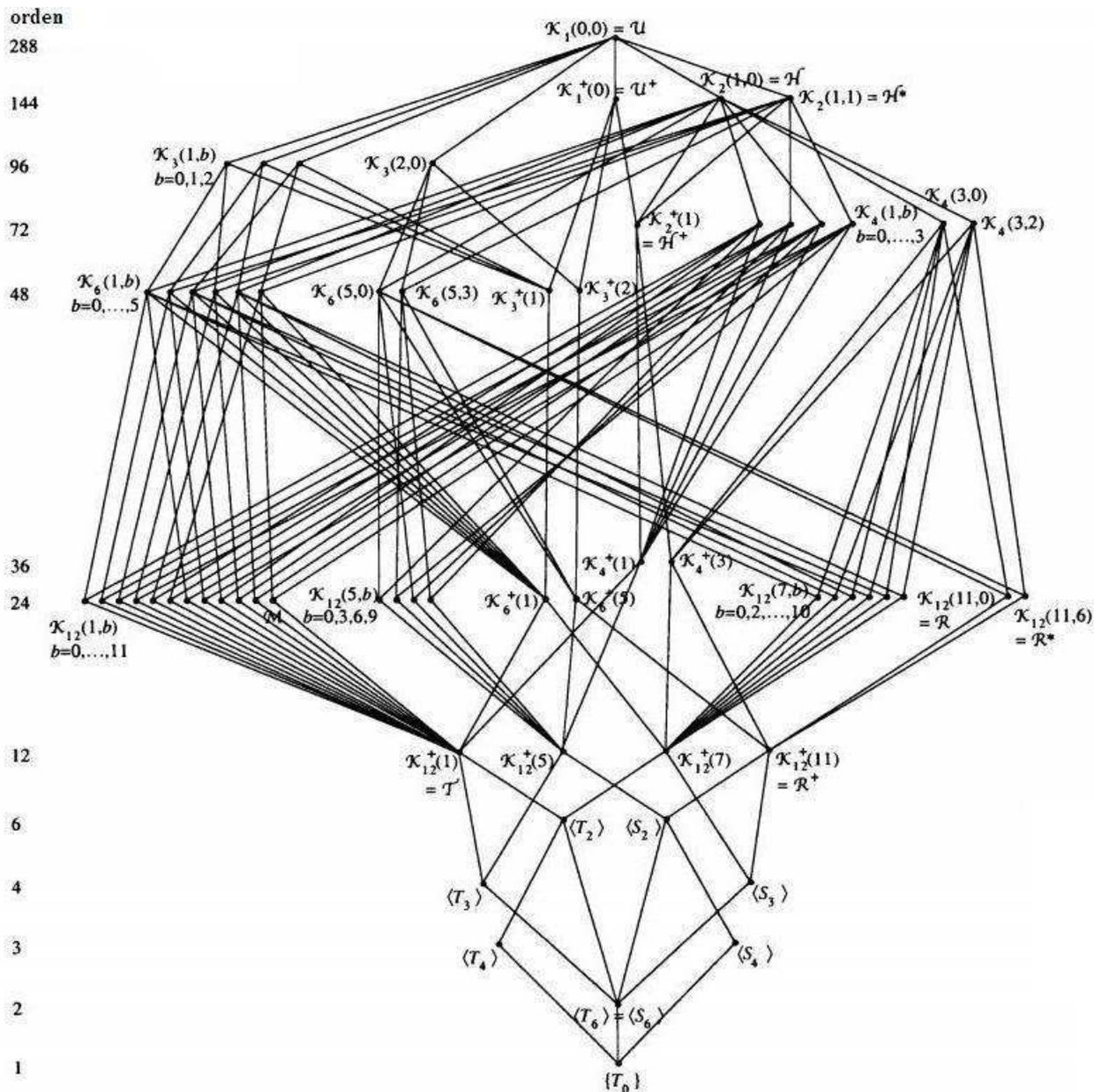
- $K_{12}(a, b)$ son los subgrupos más pequeños, y coinciden precisamente con los subgrupos simple transitivos $K(a, b)$ vistos anteriormente.
- $K_1(a, b)$ es único, lo denominamos $K_1(0, 0)$ y coincide con el mismo grupo \mathbf{V} .
- $K_2(1, 0) = \mathbf{H}$, el grupo de las UTTs pares.
- $K_d^+(a)$ son subgrupos de $K_d(a, b)$, algunos de ellos conocidos, a saber: $K_1^+(0) = \mathbf{V}^+$, $K_2^+(1) = \mathbf{H}^+$, $K_{12}^+(1) = \mathbf{T}$ y $K_{12}^+(11) = \mathbf{R}^+$.
- Un subgrupo $K_{d'}(a', b')$ puede estar contenido en otro subgrupo $K_d(a, b)$. El siguiente Teorema determina las condiciones bajo las cuales se produce esta situación.

Teorema #4.3.4.4. Sean d y d' divisores de 12, a y b enteros ($\text{mod } d$) y a' y b' enteros ($\text{mod } d'$). $K_{d'}(a', b')$ es un subgrupo de $K_d(a, b)$ sí y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- (a) d' es múltiplo de d .
- (b) $a = a' \pmod{d}$.
- (c) $b = b' \pmod{d}$.

Prueba: Se deja al lector, para no extender excesivamente este trabajo.

La red de la siguiente figura ilustra los 45 grupos $K_d(a, b)$ y sus correspondientes subgrupos $K_d^+(a)$. En la parte superior se sitúan los de mayor orden. Ciertos subgrupos van conectados con una línea, siempre que el menor esté contenido en el mayor. También se muestran en la parte inferior los subgrupos cíclicos de los cuatro grupos $K_{12}^+(a)$, que también son cíclicos.



Red de subgrupos $K_d(a, b)$ y $K_d^+(a)$ (Julian Hook [8])

Los grupos $K_d(d-1, 0)$, para cada divisor d de 12, son de especial interés, por lo que se denominan X_d . Por definición, $K_d(a, 0)$ está formado por las UTTs $\langle \sigma, m, n \rangle$ tal que $n = am \pmod{d}$, y si $a = d-1$, es equivalente a $m + n = 0 \pmod{d}$, esto es, $\tau(U)$ es múltiplo de d . Luego X_d es la imagen inversa por el homomorfismo τ del subgrupo de \mathbf{Z}_{12} generado por d , esto es, $X_d = \tau^{-1}(d\mathbf{Z}_{12})$. Por ejemplo, una UTT U pertenece a X_3 sí y sólo si $\tau(U)$ es igual a 0, 3, 6 ó 9. Los grupos $X_1 = K_1(0, 0) = \mathbf{V}$, $X_2 = K_2(1, 0) = \mathbf{H}$ y $X_{12} = K_{12}(11, 0) = \mathbf{R}$, ya los conocemos, mientras que X_3, X_4 y X_5 son nuevos.

Si d es un divisor par de 12 (2, 4, 6 ó 12) entonces existe la versión asimétrica de X_d , $X_d^* = K_d(d-1, d/2)$. Este grupo contiene todas las UTTs U que preservan el modo tal que $\tau(U) = 0 \pmod{d}$ y todas las que invierten el modo con $\tau(U) = d/2 \pmod{d}$. De los cuatro grupos asimétricos X_2^*, X_4^*, X_6^* y X_{12}^* , éste último es conocido $X_{12}^* = K_{12}(11, 6) = \mathbf{R}^*$ (grupo de transformaciones Riemannianas asimétricas). X_2^* tiene particular interés al estar formado por todas las transformaciones pares que preservan el modo y todas las transformaciones impares que invierten el modo, se denota por $\mathbf{H}^* = X_2^* = K_2(1, 1)$.

Estas construcciones pueden verse como una generalización de las funciones transposición total τ y transposición asimétrica τ^* para los divisores d de 12.

Definición #4.3.4.6. Se define la función τ_d , siendo d un divisor de 12, como la aplicación de \mathbf{V} en \mathbf{Z}_d , $\tau_d: \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{Z}_d: U \longrightarrow \tau_d(U) = \tau(U) \pmod{d}$

Definición #4.3.4.7. Si d es un divisor par de 12, se define la función τ_d^* como la aplicación de \mathbf{V} en \mathbf{Z}_d , $\tau_d^*: \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{Z}_d: U \longrightarrow \tau_d^*(U) =$

$$\tau_d^*(U) = \begin{cases} \tau(U) \pmod{d}, & \text{si } \sigma_U = + \\ \tau(U) + d/2 \pmod{d}, & \text{si } \sigma_U = - \end{cases}$$

Puesto que τ es un homomorfismo, se sigue fácilmente que τ_d y τ_d^* también son homomorfismos. El núcleo de τ_d y τ_d^* son los grupos X_d y X_d^* respectivamente, luego ambos X_d y X_d^* son subgrupos normales de \mathbf{V} . En realidad, de los 45 grupos $K_d(a, b)$ sólo estos diez subgrupos (seis X_d y cuatro X_d^*) son normales. La prueba de esto es sencilla teniendo en cuenta que si $K_d(a, b)$ es normal en \mathbf{V} , por un razonamiento similar al teorema #4.3.3.2 (d), entonces $a = d - 1$. Examinando la lista de grupos de este tipo $K_d(d - 1, b)$, se obtiene que los únicos normales son $K_d(d - 1, 0) = X_d$ y $K_d(d - 1, d/2) = X_d^*$.

De la familia de grupos $K_d(a, b)$, los únicos conmutativos son los doce grupos $K_{12}(1, b) = K(1, b)$, que ya se identificaron en el teorema #4.3.3.2 (b). En efecto, la misma prueba demuestra que si $K_d(a, b)$ es conmutativo, entonces $a = 1$. Si $d < 12$, tomando las UTTs $U = \langle +, 1, d + 1 \rangle$ y $V = \langle -, 0, b \rangle$, ambas pertenecientes a $K_d(1, b)$, resulta que $UV = \langle -, 1, b + d + 1 \rangle$ mientras que $VU = \langle -, d + 1, b + 1 \rangle$, luego $K_d(1, b)$ no puede ser conmutativo excepto para $d = 12$.

Otra familia de subgrupos de \mathbf{V} estaría formada por los conjuntos Y_d (siendo d divisor de 12) de todas las UTTs $\langle \sigma, m, n \rangle$ tales que m y n son divisibles por d , esto es, $m = n = 0 \pmod{d}$. Es inmediato que Y_d es un grupo, es más, es subgrupo de X_d , puesto que los elementos de X_d deben tener la suma $m + n$ múltiplo de d , lo cual también se cumple lo son m y n . El grupo más grande de este tipo es $Y_1 = \mathbf{V}$ y el más pequeño $Y_{12} = \mathbf{P}$, formado por dos elementos: $T_0 = \langle +, 0, 0 \rangle$ y $P = \langle -, 0, 0 \rangle$. En general, el orden de Y_d es $288/d^2$.

El comportamiento de estos grupos Y_d tiene un significado musical apreciable. Por ejemplo, Y_3 consiste en 32 transformaciones cuyos niveles de transposición son 0, 3, 6 ó 9. Este grupo Y_3 actúa de manera cerrada sobre cada una de las tres “familias octatónicas” (conjunto de ocho tríadas, cuatro mayores y sus paralelas menores: DOM, MibM, FA#M, LAM, Dom, Mibm, Fa#m, Lam). Análogamente, Y_2 actúa sobre las dos “familias de tonos enteros” (conjunto de doce tríadas), Y_4 sobre las cuatro “familias hexatónicas” (conjunto de seis tríadas) e Y_6 sobre las seis “familias tritono” (conjunto de cuatro tríadas: DOM, Dom, FA#M, Fa#m). Vemos que estos subgrupos Y_d actúan sobre conjuntos restringidos de tríadas.

En esta familia también tenemos una versión asimétrica para divisores d pares, cuyos grupos Y_d^* están formados por las transformaciones que preservan el modo $\langle +, m, n \rangle$ tales que $m = n = 0 \pmod{d}$ y las

que invierten el modo $\langle -, m, n \rangle$ con $m = n = d/2 \pmod{d}$. Estos subgrupos Y_d^* actúan sobre conjuntos restringidos de tríadas, con la peculiaridad que las tríadas mayores no son las paralelas de las menores. Por ejemplo, Y_4^* es un grupo de orden 18 que actúa sobre conjuntos de seis tríadas como este {DOM, Rem, MIM, Fa#m, LAbM, Sibm}.

Muchos otros subgrupos se pueden construir como intersección de grupos del tipo $K_d(a, b)$, Y_d e Y_d^* . Por ejemplo $Y_2^* \cap \mathbf{R} = Y_2^* \cap K_{12}(11, 0)$ es un grupo de orden 12 formado por las schritts pares $\{S_0, S_2, \dots, S_{10}\}$ y las wechsels impares $\{W_1, W_3, \dots, W_{11}\}$. Curiosamente, este subgrupo actúa simple transitivamente sobre el conjunto de 12 tríadas compuesto por seis tríadas mayores de tonos enteros y otras seis tríadas menores de tonos enteros pero no paralelas con las mayores, esto es {DOM, Do#m, REM, Mibm, MIM, Fam, FA#M, Solm, SOL#M, Lam, SibM, Sim}

Finalmente, acabaremos este capítulo apuntando sobre un bonito concepto de teoría de grupos. Si un grupo puede ponerse como producto de dos de sus subgrupos, p.e. $G = HK$, siendo H y K subgrupos normales de G cuya intersección es la identidad (elemento neutro de G), entonces G es isomorfo al producto directo $H \times K$. En el teorema #4.3.4.1 hemos visto varias representaciones de \mathbf{V} como producto de dos de sus subgrupos, sin embargo, en ninguno de los casos los dos subgrupos son normales en \mathbf{V} . Para situaciones débiles como ésta se definió el **producto semidirecto**, una teoría no tan elegante como el producto directo pero útil en éste momento. Sin entrar en muchos detalles, se dice que un grupo G es un producto semidirecto de H y K , y se expresa como $G = H \rtimes K$, si H es un subgrupo normal de G y K es subgrupo de G tales que $G = HK$ y $H \cap K = \{e\}$. En este caso, para todo $g \in G$ existen, y son únicos, $h \in H$ y $k \in K$ tales que $g = hk$. Se dice entonces que G es isomorfo al producto semidirecto $H \rtimes K$.

De los subgrupos mencionados en el teorema #4.3.4.1 sólo \mathbf{R} y \mathbf{R}^* son normales, siendo $\mathbf{V} = \mathbf{BR}$ (= \mathbf{RB}) y $\mathbf{V} = \mathbf{BR}^*$ (= $\mathbf{R}^*\mathbf{B}$). Además, por el lema #4.3.4.1, $\mathbf{B} \cap \mathbf{R} = \mathbf{B} \cap \mathbf{R}^* = \{T_0\}$. Por tanto, podemos afirmar que \mathbf{V} es isomorfo al producto semidirecto $\mathbf{R} \rtimes \mathbf{B}$ y también a $\mathbf{R}^* \rtimes \mathbf{B}$.

Otra posible construcción de \mathbf{V} sería la que sigue. Recordando que \mathbf{V}^+ es el grupo de orden 144 (isomorfo a $\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{12}$) formado por todas las UTTs que preservan el modo y $\mathbf{P} = Y_{12} = \{T_0, P\}$ es el grupo de orden 2 (isomorfo a \mathbf{Z}_2) generado por la transformación paralela $P = \langle -, 0, 0 \rangle$, como \mathbf{V}^+ es subgrupo normal de \mathbf{V} , $\mathbf{V}^+\mathbf{P} = \mathbf{V}$ (es inmediato que cualquier UTT que invierte el modo se puede poner como UP para alguna UTT U que preserva el modo) y $\mathbf{V}^+ \cap \mathbf{P} = \{T_0\}$, claramente se satisfacen las condiciones del producto semidirecto. Se sigue que \mathbf{V} es isomorfo al producto semidirecto $\mathbf{V}^+ \rtimes \mathbf{P}$, equivalentemente a $(\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{12}) \rtimes (\mathbf{Z}_2)$.

5.- Teoría Musical Neo-Riemanniana

En el capítulo de introducción histórica se adelantó que la Teoría Musical Neo-Riemanniana (NRT) es una sub-disciplina de la Teoría Musical Transformacional aplicada a tríadas, que surgió en 1993 a partir de unas conferencias organizadas en la universidad de New York at Buffalo. El nombre hace honor al teórico musical del siglo XIX Hugo Riemann, por sus teorías armónicas innovadoras como fuente de inspiración.

Esta teoría surge como respuesta a las carencias que presentan las teorías tradicionales para describir adecuadamente las “incoherencias” tonales de ciertos repertorios cromáticos de finales del siglo XIX, principalmente de Richard Wagner. NRT sustituye la noción de coherencia en la cual las estructuras y cadencias de las frases musicales se organizan jerárquicamente y están unificadas alrededor de una única nota tónica, por un concepto de coherencia que interpreta las gesturas armónicas y movimientos melódicos como elementos de grupos matemáticos finitos que relacionan directamente unas armonías con otras, caracterizando la proximidad entre ellas dependiendo de los tonos comunes que comparten.

NRT desarrolla una serie de conceptos musicales/lógico/matemáticos que describiremos con cierta profundidad en los siguientes capítulos.

- Transformaciones triádicas PLR
- Equivalencia enarmónica
- Red tonal (Tonnetz)
- Dualismo armónico (inversión dual)
- Maximización de tonos comunes
- Voz principal parsimoniosa

Por otro lado, es justo mencionar aquí que existen muchos autores críticos con la Teoría Musical Neo-Riemanniana. La primera deficiencia evidente es su restricción a las tríadas mayores y menores, ya que existen otras armonías musicales, que también se usaban en la música cromática del romanticismo, precisamente el territorio de exploración Riemanniana. En este sentido, están apareciendo nuevos estudios que tratan de adaptar la NRT a acordes de séptima, disminuidos, etc., aunque no parece por el momento que se haya conseguido una formalización satisfactoria. En cualquier caso, supone una vía abierta para investigaciones futuras.

Otra objeción palpable es su torpe aplicación para progresiones diatónicas estándar, lo que hace que su uso, incluso en música altamente cromática, sólo sirva para pasajes cortos y aislados. NRT no presta atención a aspectos fundamentales en la teoría tonal como son la relación entre acordes, tonalidad y distinciones jerárquicas en general.

5.1.- La red tonal (Tonnetz) y el grupo PLRD.

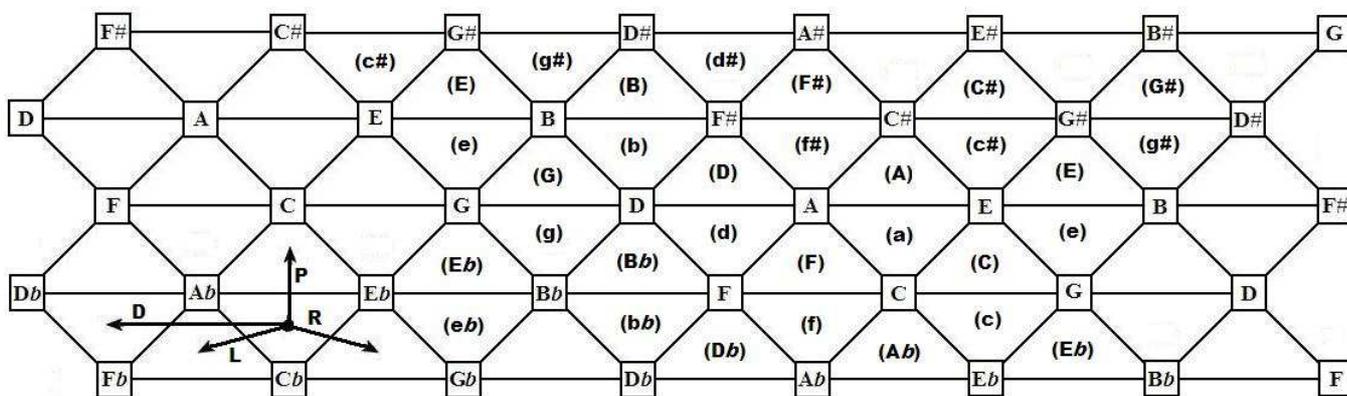
En este capítulo vamos a interpretar los trabajos de Brian Hyer [9] sobre las ideas de Hugo Riemann, considerados también pioneros en el nacimiento de la Teoría Musical Neo-Riemanniana.

Hyer empieza analizando el Tonnetz de Riemann (ver figura pág. 16), que representa relaciones entre notas y armonías. En las líneas horizontales se sitúan sucesiones de 5^{as} perfectas, 3^{as} mayores en la

diagonal ascendente de izquierda a derecha y 3^{as} menores en la diagonal descendente de izquierda a derecha. En ella, las armonías formadas por tres notas (tríadas) aparecen como triángulos cuya base horizontal es una quinta. Si el otro vértice se encuentra hacia arriba se construyen tríadas mayores y si el triángulo está invertido hacia abajo son menores.

El tonnetz de Riemann está construido en base a entonación justa, por lo que contiene un número infinito de tonos diferentes y la malla se extiende infinitamente por todos los lados. Se puede decir que esta red presenta un cromatismo extremo.

Sin embargo Hyer se da cuenta de las importantes propiedades algebraicas y topográficas que puede adquirir esta representación si se asume equivalencia enarmónica (módulo octava) y sugiere una red tonal “reconstruida” con temperamento igual, lo que hace que el eje horizontal de 5^{as} pitagóricas se convierta en el círculo de 5^{as} temperadas, y los ejes diagonales de 3^{as} justas se convierten en círculos de 3^{as} temperadas mayores y menores. La estructura aparece como combinación algebraica de cuatro transformaciones tríadicas básicas: Dominante (D), Paralela (P), Relativa (R) y Leittonwechsel (L).

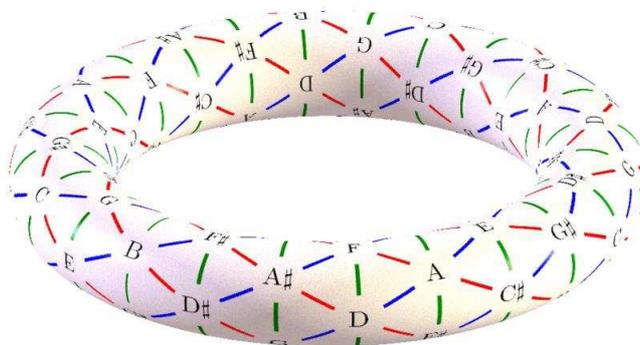


La transformación más básica es la **Dominante** (D) que, siguiendo el criterio de David Lewin de atracción cadencial hacia la tónica, transporta una tríada dominante en la tónica, esto es, una quinta descendente. Su inversa es la subdominante (S), transformando la tónica en la dominante, o sea, una quinta ascendente. Así, por ejemplo, $(G, +)(D) = (C, +)$, $(F, +)(S) = (C, +)$, o bien, $(F, +)(D^{-1}) = (C, +)$, ya que $S = D^{-1}$. Recordemos que en el tonnetz los triángulos hacia arriba formados por tres notas representan tríadas mayores, p.e. $(G, +) = (G, B, D)$, mientras que los triángulos hacia abajo representan tríadas menores, p.e. $(G, -) = (G, Bb, D)$.

La transformación **Leittonwechsel** (L) relaciona dos triángulos (tríadas) que comparten el lado situado en la diagonal descendente de izquierda a derecha, es decir, mantienen en común las dos notas separadas por un intervalo de tercera menor: $(G, +)(L) = (B, -)$, pero también $(B, -)(L) = (G, +)$, luego $L^2 = \text{IDENT}$. Se sigue que L coincide con su inversa $L = L^{-1}$. Análogamente, la transformación **Relativa** (R) transforma entre sí dos triángulos que comparten las notas situadas en la diagonal ascendente de izquierda a derecha, es decir, las dos notas separadas por un intervalo de tercera mayor: $(G, +)(R) = (E, -)$ y $(E, -)(R) = (G, +)$, luego $R^2 = \text{IDENT}$ y, por tanto, R coincide con su inversa $R = R^{-1}$. Finalmente, la transformación **Paralela** (P) transforma entre sí dos triángulos que comparten las notas situadas en la horizontal, es decir, las dos notas separadas por un intervalo de quinta: $(G, +)(P) = (G, -)$ y $(G, -)(P) = (G, +)$, luego $P^2 = \text{IDENT}$ y P coincide con su inversa $P = P^{-1}$.

Según Hyer, Riemann reconoce la diferencia operativa entre la transformación Dominante y las transformaciones P, L y R, ya que éstas coinciden con sus inversas y además pueden operar entre ellas para moverse por la red sin necesidad de la participación de D. A pesar de ello, D no puede ser generada por una combinación de P, L y R, pues aplicada a tríadas menores se tiene que $D = LR$, mientras que $LR = D^{-1}$ si se aplica a tríadas mayores.

Una característica primordial de esta red tonal con temperamento igual y equivalencia enarmónica es que las líneas horizontales y diagonales ya no se extienden infinitamente, sino que se cierran en círculo formando tres grupos finitos, a saber: el eje horizontal es el círculo de quintas (12 notas separadas 7 semitonos sucesivamente), la diagonal ascendente de izquierda a derecha forman un círculo de 3 notas separadas una tercera mayor (4 semitonos) y la diagonal descendente de izquierda a derecha formando un grupo de 4 notas a intervalo de tercera menor, es decir, 3 semitonos. En definitiva, la red se cierra en círculo por cada una de sus tres dimensiones y aparece representada en una nueva figura geométrica, un **hipertoro**.



La línea azul se corresponde con el eje horizontal del círculo de quintas, la verde es la diagonal de terceras menores y la roja la otra diagonal de terceras mayores.

Esta propiedad de cerrarse en círculo las notas que conforman los nodos de la red, también puede aplicarse a las tríadas contenidas en los triángulos. Para ello basta con observar que la composición de transformaciones P y L (PL) va desplazando las tríadas mayores hacia abajo en la diagonal de las terceras mayores, mientras que LP las desplaza hacia arriba en la misma diagonal. Recíprocamente, para las tríadas menores, PL las desplaza hacia abajo y LP hacia arriba. Podemos decir que PL y LP representan movimientos en sentidos opuestos, esto es, son algebraicamente inversos. Análogamente, con la combinación de las transformaciones P y R (PR y RP) se obtiene un comportamiento idéntico pero en la diagonal de las terceras menores. En el eje horizontal, D y D^{-1} se encargan del movimiento en ambos sentidos. En todos los casos, es inmediato que se cierran en círculo, luego forman grupos algebraicos cíclicos, cuyos generadores son D, PL y PR para los círculos de quintas, terceras mayores y terceras menores respectivamente. Cumplen que $D^{12} = (PL)^3 = (PR)^4 = \text{IDENT}$, luego son grupos de orden 12, 3 y 4. Con lo visto hasta ahora, podemos componer los siguientes subgrupos:

- $\langle P \rangle = \{P, P^2\}$, $\langle L \rangle = \{L, L^2\}$, $\langle R \rangle = \{R, R^2\}$. Involuciones.
- $\langle PL \rangle = \{PL, (PL)^2, (PL)^3\}$. Desplazamientos preservando el modo (mayor o menor) en la diagonal de terceras mayores.
- $\langle PR \rangle = \{PR, (PR)^2, (PR)^3, (PR)^4\}$. Desplazamientos preservando el modo (mayor o menor) en la diagonal de terceras menores.
- $\langle P, L \rangle = \{P, L, PL, PLP, (PL)^2, (PL)^3\}$. Desplazamientos en la diagonal de terceras mayores.

- $\langle P, R \rangle = \{P, R, PR, PRP, (PR)^2, (PR)^2P, (PR)^3, (PR)^4\}$. Desplazamientos en la diagonal de terceras menores.
- $\langle D \rangle = \{D, D^2, D^3, \dots, D^{12}\}$. Desplazamientos preservando el modo (mayor o menor) en la horizontal (quintas).
- $\langle P, D \rangle = \{P, D, PD, D^2, PD^2, D^3, \dots, PD^{11}, D^{12}\}$, $\langle L, D \rangle = \{L, D, LD, D^2, LD^2, D^3, \dots, LD^{11}, D^{12}\}$, $\langle R, D \rangle = \{R, D, RD, D^2, RD^2, D^3, \dots, RD^{11}, D^{12}\}$. Desplazamientos en la horizontal (quintas).

La extensión al conjunto completo de todas las combinaciones posibles entre las transformaciones P, L, R y D también forma un conjunto cerrado de transformaciones sobre las 24 tríadas mayores y menores. Además tiene estructura de grupo, pues contiene sus inversos (dada una transformación es posible encontrar otra de modo que la composición de ambas sea la identidad). Nos referiremos a este grupo como “*grupo PLRD*”.

Otra propiedad importante que detecta Hyer, y que le servirá para clasificar el grupo completo PLRD, es que la transformación Dominante D “conmuta” con todas las demás, esto es, $DL = LD$, $DR = RD$, etc. Luego D es “central” en el grupo PLRD. Esto le permite “factorizar” cualquier combinación de la siguiente manera: $(DL)(DR)(DP) = (DDD)(LRP) = (D^3)(LRP)$, etc., es decir, agrupando los factores D a la izquierda.

Con todo ello, Hyer es capaz de organizar todas las transformaciones en 12 formas canónicas distintas y componer una tabla en la que demuestra que el grupo es cerrado y tiene orden 144.

	D^n	D^nLP	D^nPL	D^nL	D^nP	D^nPLP	D^nRL	D^nRP	D^nLR	D^nR	D^nRLP	D^nLRP
D^m	D^{m+n}	$D^{m+n}LP$	$D^{m+n}PL$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n}P$	$D^{m+n}PLP$	$D^{m+n}RL$	$D^{m+n}RP$	$D^{m+n}LR$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n}RLP$	$D^{m+n}LRP$
D^mPL	$D^{m+n}PL$	D^{m+n}	$D^{m+n}LP$	$D^{m+n}P$	$D^{m+n}PLP$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n+6}LR$	$D^{m+n}RL$	$D^{m+n+6}RP$	$D^{m+n}RLP$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n+6}R$
D^mLP	$D^{m+n}LP$	$D^{m+n}PL$	D^{m+n}	$D^{m+n}PLP$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n}P$	$D^{m+n}RP$	$D^{m+n+6}LR$	$D^{m+n+6}RL$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n+6}R$
D^mL	$D^{m+n}L$	$D^{m+n}P$	$D^{m+n}PLP$	D^{m+n}	$D^{m+n}LP$	$D^{m+n}PL$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n}RP$
D^mP	$D^{m+n}P$	$D^{m+n}PLP$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n}PL$	D^{m+n}	$D^{m+n}LP$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n}RL$
D^mPLP	$D^{m+n}PLP$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n}P$	$D^{m+n}LP$	$D^{m+n}PL$	D^{m+n}	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n+6}L$
D^mLR	$D^{m+n}LR$	$D^{m+n+6}RL$	$D^{m+n+6}RP$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n+6}R$	D^{m+n}	$D^{m+n}LP$	$D^{m+n+6}PL$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n}P$	$D^{m+n+6}PLP$
D^mRP	$D^{m+n}RP$	$D^{m+n+6}LR$	$D^{m+n}RL$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n+6}PL$	D^{m+n+6}	$D^{m+n}LP$	$D^{m+n+6}P$	$D^{m+n+6}PLP$	$D^{m+n}L$
D^mRL	$D^{m+n}RL$	$D^{m+n}RP$	$D^{m+n+6}LR$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n+6}LP$	D^{m+n+6}	D^{m+n}	$D^{m+n+6}PLP$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n}P$
D^mR	$D^{m+n}R$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n}RL$	$D^{m+n}RP$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n}L$	$D^{m+n}P$	$D^{m+n+6}PLP$	D^{m+n}	$D^{m+n}LP$	$D^{m+n+6}PL$
D^mRLP	$D^{m+n}R$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n}R$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n}RL$	$D^{m+n}RP$	$D^{m+n}P$	$D^{m+n}PLP$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n}PL$	D^{m+n}	$D^{m+n+6}LP$
D^mLRP	$D^{m+n}L$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n}LR$	$D^{m+n+6}R$	$D^{m+n+6}PLP$	$D^{m+n+6}L$	$D^{m+n}P$	$D^{m+n+6}LP$	$D^{m+n+6}PL$	D^{m+n}

Cada forma canónica representa una clase de 12 transformaciones: $PLRD = \{\{D^n, n = 0 \dots 11\}, \{D^nPL, n = 0 \dots 11\}, \{D^nLP, n = 0 \dots 11\}, \dots, \{D^nLRP, n = 0 \dots 11\}\}$, todas ellas disjuntas, de donde el grupo PLRD se compone de $12 \times 12 = 144$ elementos.

Como bien apuntó posteriormente Julian Hook en su trabajo sobre Transformaciones Triádicas Uniformes (UTT), esta formalización del grupo PLRD es muy tediosa y confusa, no es fácil de entender esta separación en formas canónicas disjuntas. Es claro que el grupo PLRD coincide con el grupo **H** de UTTs pares. También sabemos que $\langle P, L, R \rangle$ es el grupo de Riemann **R**, que es simple transitivo y de

orden 24. Además $\langle L, R \rangle = \langle P, L, R \rangle = \mathbf{R}$, al verificarse $P = (RL)^3R$. Sin embargo, las 12 formas canónicas no se corresponden con el grupo \mathbf{R} completo, ni siquiera es un subgrupo de \mathbf{R} . Esto lo explica Hook observando que las 12 formas canónicas se corresponden con el conjunto cociente $\mathbf{R} / \{T_0, T_6\}$ (siendo $T_6 = D^6 = M^{12}$), y por el teorema #4.3.4.1 (f), $\mathbf{V} = \mathbf{MR}$, toda transformación U admite dos representaciones, cada una de ellas con dos transformaciones de \mathbf{R} que difieren en el factor $T_6 = D^6$, esto es, $U = M^iV = M^{i+12}D^6V$, donde V y D^6V pertenecen a \mathbf{R} . Por ello es suficiente con 12 formas canónicas, una por cada par V, D^6V .

5.2.- Dualismo armónico. El grupo S/W (Schritts/Wechsels)

La adaptación de las ideas de Hugo Riemann que realizaron David Lewin y Brian Hyer generó ciertas discrepancias entre los teóricos musicales, específicamente en dos aspectos: por una lado el carácter dualístico y por otro la interpretación transformacional de las relaciones triádicas. Ya hemos comentado anteriormente que para Lewin, seguramente el mayor problema de Riemann es que nunca tuvo en la mente el sentido transformacional de sus teorías, no cayó en la cuenta de las relaciones triádicas como algo aplicado a un klang para obtener otro klang. También mencionamos que la inclusión de la transformación Dominante D en el grupo PLRD de Hyer, para algunos autores como Carol Krumhansl (1998), Fred Lerdahl (2001) y Cohn (1998) era apropiada, mientras que Henry Klumpenhouwer (1994) no sólo no la reconoce en el espíritu dualístico de Hugo Riemann, sino que va más allá, expresando sus reservas sobre la práctica de combinar la Dominante y verdaderas transformaciones Neo-Riemannianas duales, identificándolo como un movimiento de Riemann a Rameau.

A continuación estudiaremos los argumentos que Henry Klumpenhouwer expuso en su trabajo (1994) [10] con la intención de entender el verdadero contenido intrínseco del “dualismo armónico” de Hugo Riemann.

Según Klumpenhouwer, la principal propiedad de las transformaciones Relativa (R) y Leittonwechsel (L), en particular por el hecho de que son sus propias inversas (involutivas), es que inducen unas relaciones duales entre las tríadas mayores y menores. Así por ejemplo, la transformación L cambia el modo de una tríada mayor a su paralela menor y la transporta una tercera mayor ascendente, $(C, +)(L) = (E, -)$, mientras que cambia el modo de una tríada menor a su paralela mayor y la transporta una tercera mayor descendente, $(E, -)(L) = (C, +)$. El sentido opuesto de la transposición y el cambio de modo es la huella característica del pensamiento dualístico. Análogamente, en el caso de la transformación Relativa, ésta cambia el modo de una tríada mayor a su paralela menor y la transporta una tercera menor descendente, $(C, +)(R) = (A, -)$, mientras que sobre una tríada menor la cambia a su paralela mayor y la transporta una tercera menor ascendente, $(A, -)(R) = (C, +)$.

Adicionalmente, Hugo Riemann tenía una concepción dualística en la construcción de las propias tríadas. Inicialmente intentó explicar la inversión dual de las tríadas mediante la generación subjetiva de subarmónicos en las tríadas menores. Para explicar este concepto Klumpenhouwer utiliza una técnica alternativa equivalente, basada en las ideas de Moritz Hauptmann (1853) sobre el modelo de las tríadas mayores y menores.

Hauptmann asigna tres “funciones” a las notas que forman las tríadas mayores y menores: “unidad” (*Einheit*), “dualidad o separación” (*Zwei-heit*) y “unión” (*Verbindung*). Para referirse a estas tres funciones las etiqueta respectivamente I, II y III, y se asignan a los miembros de la tríada siguiendo dos reglas:

- 1) I y II forman una quinta (módulo octava)
- 2) I y III forman una tercera mayor (módulo octava)

Según estas reglas, la nota que actúa como función I es la única que participa en ambos intervalos de quinta y tercera mayor (módulo octava).

Así, por ejemplo la tríada de Sib Mayor, formada por las notas Sib–RE–FA (Bb–D–F):

- Por la regla 1) Bb y F podrían ser I y II.
- Por la regla 2) Bb y D podrían ser I y III.
- Se sigue que Bb tiene que ser I, F es II y D es III. Esto es, Sib Mayor \equiv Bb(I)–D(III)–F(II).

En el caso de Sib menor, formada por las notas Sib–REb–FA (Bb–Db–F):

- Por la regla 1) Bb y F podrían ser I y II.
- Por la regla 2) Db y F podrían ser I y III.
- Se sigue que F tiene que ser I, Bb es II y Db es III. Esto es, Sib menor \equiv Bb(II)–Db(III)–F(I).

Comparando la asignación de las funciones en las tríadas mayores y menores, Hauptmann analiza los intervalos de quinta y tercera mayor construidos en sentido ascendente:

- En las tríadas mayores los dos intervalos referidos son I–II y I–III respectivamente.
- En las tríadas menores los dos intervalos referidos son II–I y III–I respectivamente.

Lo cual se interpreta de la siguiente manera: en las tríadas mayores la nota que actúa como I “*tiene*” una quinta y una tercera mayor, mientras que en las tríadas menores la nota que actúa como I “*es*” una quinta y una tercera mayor.

Bajo esta construcción de Hauptmann, el *modelo dualístico* organiza las sensaciones aurales de tal manera que al escuchar una tríada se selecciona una tercera mayor (o su inversión) y una quinta (o su inversión), haciendo que una nota quede sobre determinada y parezca más prominente que las otras dos. En contraste, el *modelo de bajo fundamental* de Rameau, asigna la prominencia a la nota más baja de las tres, una vez organizadas en intervalos de tercera mayor y quinta según la secuencia del menor espacio registral posible.

Siguiendo este modelo dualístico, las tríadas se representan como el par ordenado $\Delta = (r, \sigma)$, pero ahora r no es la raíz de la tríada (como correspondería en el modelo de bajo fundamental) sino la nota que actúa como función I de Hauptmann, luego ponemos $\Delta = (I, \sigma)$. El elemento σ sigue siendo es el signo que indica su modo (+ para mayor, – para menor). Así, el acorde de Sib Mayor (Bb–D–F) que acabamos de ver se escribiría como (Bb, +), coincidiendo con la representación de bajo fundamental utilizada hasta ahora, mientras que el acorde Sib menor (Bb–Db–F) sería (F, –), es decir, el “*dual*” Fa menor. En resumen, la representación de las tríadas mayores coincide en ambos modelos, mientras que en las tríadas menores **I** está una quinta por encima de r .

Otro de los aspectos que Klumpenhouwer trata de aclarar es que las relaciones de Riemann *Schritte/Wechsel* entre dos tríadas son explícitamente independientes de una determinada tonalidad, por lo que el sistema S/W es esencialmente transformacional en el sentido de Lewin: “algo que se aplica a un Klang para obtener otro Klang”. Para el estudio de estas transformaciones utiliza el modelo dualístico de representación de tríadas.

Empezamos examinando las *schritts*, la primera de las dos clases de transformaciones que Hugo Riemann presentó en “*Skizze einer Neuen Methode der Harmonielehre*” (“*Esbozo de un nuevo método de armonía*”) (1880).

- **Quintschritt (Q)**. Transporta un klang (tríada) el intervalo que va de I a II. Por ejemplo, DO Mayor (C, +), donde C es I y G es II, el intervalo es una quinta ascendente, luego $Q(C, +) = (G, +)$, esto es SOL Mayor. En el caso de Fa menor (dual Do menor) (C, -), C es I y F es II, el intervalo es una quinta descendente, luego $Q(C, -) = (F, -)$, este es el dual Fa menor (Sib menor). En la nomenclatura vista en las UTTs es la schritt $S_7 = \langle +, 7, -7 \rangle$.
- **Gegenquintschritt (-Q)**. Transporta un klang el intervalo que va de II a I. Esto significa que es también un intervalo de quinta pero descendente para las tríadas mayores y ascendente para las menores, es decir, $-Q$ es la inversa de Q . Se corresponde con $S_{-7} = \langle +, -7, 7 \rangle = S_5 = \langle +, 5, -5 \rangle$.
- **Terzschrift (T)**. Transporta un klang el intervalo que va de I a III. Por tanto, el intervalo relevante es una tercera mayor ascendente. Así, $T(C, +) = (E, +)$ y $T(C, -) = (Ab, -)$. Se corresponde con $S_4 = \langle +, 4, -4 \rangle$.
- **Leitonschritt (L)**. Es la composición de Q y T , un intervalo de quinta más una tercera mayor, esto es, un intervalo de séptima mayor. Se corresponde con $S_{11} = \langle +, 11, -11 \rangle$.
- **Ganztonschritt (G)**. Transporta un klang dos veces el intervalo que va de I a II, luego $G = Q^2$. Se corresponde con $S_2 = \langle +, 2, -2 \rangle$.
- **Kleinterzschrift (K)**. Transporta un klang el intervalo que va de II a III, es decir una tercera menor descendente. Se corresponde con $S_9 = \langle +, 9, -9 \rangle$.

Estas seis schritts son las únicas que considera Hugo Riemann, pero siguiendo el mismo mecanismo del par Quintschritt (Q) / Gegenquintschritt (-Q), Klumpenhouwer construye otras cuatro:

- **Gegenterzschrift (-T)**. $S_8 = \langle +, 8, -8 \rangle$.
- **Gegenleitonschritt (-L)**. $S_1 = \langle +, 1, -1 \rangle$.
- **Gegenganztonschritt (-G)**. $S_{10} = \langle +, 10, -10 \rangle$.
- **Gegenkleinterzschrift (-K)**. $S_3 = \langle +, 3, -3 \rangle$.

A las que añade otras dos más para completar el conjunto de schritts y cerrar la estructura de grupo (*grupo S*):

- **Identity (I)**. $S_0 = \langle +, 0, -0 \rangle$.
- **Tritonuschritt (R)**. $S_6 = \langle +, 6, -6 \rangle$.

Según esta nomenclatura, la transformación Xschritt transporta un intervalo X (siendo X la designación de intervalos en alemán) en la dirección del signo de la tríada, es decir, ascendente si es mayor y descendente si es menor. Una GegenXschritt es la inversa de Xschritt.

Las schritts se combinan siguiendo la regla: $Xschritt \cdot Yschritt = (X + Y)schritt$, es decir, la operación suma habitual. Se sigue que el grupo es *conmutativo*.

Si bien las schritts sólo relacionan klangs del mismo género, la segunda clase transformaciones presentadas por Riemann en 1880, *Wechsels*, relacionan klangs de modo opuesto.

- **Seitenwechsel (W)**. Invierte un klang sobre I, esto es, una reflexión (intercambio) entre tríadas mayores y menores que comparten la nota que actúa como función I. Así, $W(C, +) = (C, -)$, y $W(C, -) = (C, +)$, es decir, trasporta las tríadas mayores una quinta descendente y las menores una quinta ascendente, cambiando el modo. En la nomenclatura vista en las UTTs es la *wechsel* $W_5 = \langle -, 5, -5 \rangle$.

Las restantes wechsels se contruyen como composición de alguna schritt con Seitenwechsel:

- **Terzwechsel (TW)**. Transporta un klang el intervalo que va de I a III, esto es, aplica Terzschrift (*T*) y luego invierte el resultado sobre I, es decir, aplica Seitenwechsel (*W*). Se puede decir que es una reducción de "TerzschriftSeitenwechsel". $TW(C, +) = W(E, +) = (E, -)$ y $TW(C, -) = W(Ab, -) = (Ab, +)$, (atención al orden de composición de izquierda a derecha). *TW* es funcionalmente equivalente a la conocida transformación Relativa (*R*). Alternativamente, se puede definir como la inversión de un Klang sobre I y III. Se corresponde con $W_9 = \langle -, 9, -9 \rangle$.
- **Leittonwechsel (LW)**. Composición de Leittonschrift (*L*) y Seitenwechsel (*W*). $LW(C, +) = W(B, +) = (B, -)$ y $LW(C, -) = W(Db, -) = (Db, +)$. Evidentemente coincide con la transformación Leittonwechsel (*L*) conocida y, alternativamente, se puede definir como la inversión de un Klang sobre II y III. Se corresponde con $W_4 = \langle -, 4, -4 \rangle$.
- **Quintwechsel (QW)**. Es equivalente a la transformación conocida Paralela (*P*) y, alternativamente, se puede definir como la inversión de un Klang sobre I y II. Se corresponde con $W_0 = \langle -, 0, -0 \rangle$.
- **Ganztonwechsel (GW)**. Se corresponde con $W_7 = \langle -, 7, -7 \rangle$.
- **Tritonuswechsel (RW)**. Se corresponde con $W_{11} = \langle -, 11, -11 \rangle$.

Estas seis wechsels son las únicas que considera Hugo Riemann. Utilizando la misma técnica se construyen las otras seis:

- **Gegenquintwechsel (-QW)**. $W_{10} = \langle -, 10, -10 \rangle$.
- **Kleinterzwechsel (KW)**. $W_2 = \langle -, 2, -2 \rangle$.
- **Gegenkleinterzwechsel (-KW)**. $W_8 = \langle -, 8, -8 \rangle$.
- **Gegenleittonwechsel (-LW)**. $W_6 = \langle -, 6, -6 \rangle$.
- **Gegenterzwechsel (-TW)**. $W_1 = \langle -, 1, -1 \rangle$.
- **Gegenganztonwechsel (-GW)**. $W_3 = \langle -, 3, -3 \rangle$.

Ya sabemos que el conjunto de las 12 wechsels no es cerrado (la composición de dos wechsels no invierte el modo), y por tanto no forman grupo. Sin embargo, el conjunto de 24 schritts/wechsels sí es cerrado y tiene estructura de grupo (*grupo S/W*). Las reglas de combinación entre ellas son:

- | | | |
|-------------------------------|-------------------|--------------------------------|
| • $Xschritt \cdot Yschritt =$ | $(X + Y)schritt.$ | $Q \cdot L = Q + L = R.$ |
| • $Xschritt \cdot Ywechsel =$ | $(X + Y)wechsel.$ | $Q \cdot LW = (Q + L)W = RW.$ |
| • $Xwechsel \cdot Yschritt =$ | $(X - Y)wechsel.$ | $QW \cdot L = (Q - L)W = -TW.$ |
| • $Xwechsel \cdot Ywechsel =$ | $(X - Y)schritt.$ | $QW \cdot LW = (Q - L) = -T.$ |

Además, el grupo es simple transitivo, por lo que dados dos klangs j y k , existe un único miembro X del grupo S/W tal que $X(j) = k$.

Este uso analítico de las propiedades de los grupos es esencial en el espíritu transformacional de GMIT [12], de aquí que Klumpenhouwer defienda que el sistema S/W es transformacional en el sentido de Lewin: “algo que se aplica a un Klang para obtener otro Klang”.

La siguiente tabla muestra las transformaciones de Riemann en las diferentes nomenclaturas estudiadas.

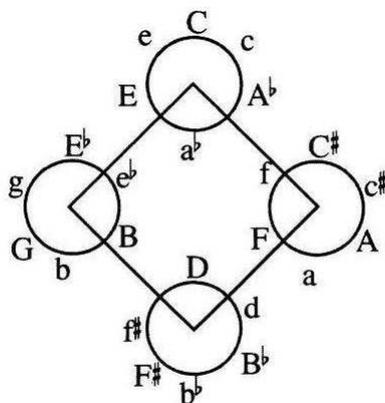
Las 24 UTTs Riemannianas

	UTT	Acción	S_n/W_n	Riemann / Klumpenhouwer	P/Q	L/R	P/L/R	Hyer	Otros nombres
Schritts (elementos de R^+)	$\langle +, 0, 0 \rangle$	$C \rightarrow C, c \rightarrow c$	S_0	Identity	$P^0 Q^0$	$L^0 R^0$	$(P^0 L^0 R^0)$	(D^0)	$T_0, ID, E, IDENT$
	$\langle +, 1, 11 \rangle$	$C \rightarrow Db, c \rightarrow b$	S_1	Gegenleittonschritt	Q	$(RL)^5$	LPRP, PLRL, RLPL, RPLP	$D^6 LR$	Schritt Unidad
	$\langle +, 2, 10 \rangle$	$C \rightarrow D, c \rightarrow bb$	S_2	Ganztonschritt	Q^2	$(LR)^2$	LRLR, RLRP, RPRL	$D^6 PL$	
	$\langle +, 3, 9 \rangle$	$C \rightarrow Eb, c \rightarrow a$	S_3	Gegenkleinterzschrift, Gegensextschrift	Q^3	$(RL)^3$	PR	$D^6 RP$	
	$\langle +, 4, 8 \rangle$	$C \rightarrow E, c \rightarrow g\#$	S_4	Terzschrift	Q^4	$(LR)^4$	LP	LP	
	$\langle +, 5, 7 \rangle$	$C \rightarrow F, c \rightarrow g$	S_5	Gegenquintschrift	Q^5	RL	RL	RL	
	$\langle +, 6, 6 \rangle$	$C \rightarrow F\#, c \rightarrow f\#$	S_6	Tritonuschrift	Q^6	$(LR)^6, (RL)^6$	PRPR, RPRP	D^6	T6
	$\langle +, 7, 5 \rangle$	$C \rightarrow G, c \rightarrow f$	S_7	Quintschrift	Q^7	LR	LR	LR	
	$\langle +, 8, 4 \rangle$	$C \rightarrow Ab, c \rightarrow e$	S_8	Gegenterzschrift	Q^8	$(RL)^4$	PL	PL	
	$\langle +, 9, 3 \rangle$	$C \rightarrow A, c \rightarrow d\#$	S_9	Kleinterzschrift, Sextschritt	Q^9	$(LR)^3$	RP	RP	
	$\langle +, 10, 2 \rangle$	$C \rightarrow Bb, c \rightarrow d$	S_{10}	Gegenganztonschritt	Q^{10}	$(RL)^2$	LRPR, PRLR, RLRL	$D^6 LP$	
$\langle +, 11, 1 \rangle$	$C \rightarrow B, c \rightarrow c\#$	S_{11}	Leittonschritt	Q^{11}	$(LR)^5$	LPLR, LRLP, PLPR, PRPL	$D^6 RL$		
Wechsels (elementos de R^-)	$\langle -, 0, 0 \rangle$	$C \rightarrow c, c \rightarrow C$	W_0	Quintwechsel	P	$(RL)^3 R$	P	P	PAR
	$\langle -, 1, 11 \rangle$	$C \rightarrow c\#, c \rightarrow B$	W_1	Gegenterzwechsel	QP, PQ^{11}	$(LR)^3 L$	LPR, RPL	$D^6 LRP$	SLIDE
	$\langle -, 2, 10 \rangle$	$C \rightarrow d, c \rightarrow Bb$	W_2	Kleinterzwechsel, Sextwechsel	$Q^2 P, PQ^{10}$	RLR	RLR	$D^6 PLP$	
	$\langle -, 3, 9 \rangle$	$C \rightarrow d\#, c \rightarrow A$	W_3	Gegenganztonwechsel	$Q^3 P, PQ^9$	$(LR)^5 L$	PRP	$D^6 R$	
	$\langle -, 4, 8 \rangle$	$C \rightarrow e, c \rightarrow Ab$	W_4	Leittonwechsel	$Q^4 P, PQ^8$	L	L	L	LT
	$\langle -, 5, 7 \rangle$	$C \rightarrow f, c \rightarrow G$	W_5	Seitenwechsel	$Q^5 P, PQ^7$	$(RL)^4 R$	PLR, RLP	RLP	
	$\langle -, 6, 6 \rangle$	$C \rightarrow f\#, c \rightarrow F\#$	W_6	Gegenleittonwechsel	$Q^6 P, PQ^6$	$(LR)^2 L$	RPR	$D^6 P$	
	$\langle -, 7, 5 \rangle$	$C \rightarrow g, c \rightarrow F$	W_7	Ganztonwechsel	$Q^7 P, PQ^5$	$(RL)^2 R$	LRP, PRL	LRP	
	$\langle -, 8, 4 \rangle$	$C \rightarrow g\#, c \rightarrow E$	W_8	Gegenkleinterzwechsel, Gegensextwwechsel	$Q^8 P, PQ^4$	$(LR)^4 L$	LPL, PLP	PLP	
	$\langle -, 9, 3 \rangle$	$C \rightarrow a, c \rightarrow Eb$	W_9	Terzwechsel	$Q^9 P, PQ^3$	R	R	R	REL
	$\langle -, 10, 2 \rangle$	$C \rightarrow bb, c \rightarrow D$	W_{10}	Gegenquintwechsel	$Q^{10} P, PQ^2$	$(RL)^5 R$	LPRPR, LRPRP, PLRLR, PRLRP, RLPLR, RLRLP, RPLPR, RPRPL	$D^6 L$	
$\langle -, 11, 1 \rangle$	$C \rightarrow b, c \rightarrow Db$	W_{11}	Tritonuswechsel	$Q^{11} P, PQ$	LRL	LRL	$D^6 RLP$		

5.3.- Tríadas parsimoniosas

Una cualidad notable de las transformaciones PLR es la denominada “voz principal parsimoniosa” (parsimonious voice-leading). El término “parsimonia” se refiere a la “ley del camino más corto”, pues cada una de estas operaciones “retiene” dos notas con la tríada inicial. Sin embargo, el incremento que sufre la tercera nota no es siempre el mismo, que es de un semitono en el caso de P y L, y de un tono entero en el caso de R. Esta característica ha tenido su importancia en el desarrollo de la cultura musical de determinados periodos y estilos musicales desde hace mucho tiempo, ya en el siglo XVII era considerada como un efecto cognitivo en la percepción musical. El énfasis en la retención de tonos (notas) comunes y la voz principal semitonal añade una dimensión adicional a las transformaciones triádicas y teoría armónica del siglo XIX.

Esta circunstancia permite progresiones triádicas consistentes en movimientos de un simple semitono, representadas en el Tonnetz como desplazamientos por la diagonal de terceras mayores (ascendente de izquierda a derecha). Ya vimos que el grupo $\langle P, L \rangle = \{P, L, PL, PLP, (PL)^2, (PL)^3\}$ es de orden seis y genera los cuatro ciclos hexatónicos de Cohn, representativos en el movimiento semitonal entre tríadas.



El Sistema Hyper-hexatónico (Richard Cohn)

Otra progresión triádica parsimoniosa se obtiene con desplazamientos por la diagonal de terceras menores (descendente de izquierda a derecha), obteniendo tres ciclos octatónicos (el grupo $\langle P, R \rangle = \{P, R, PR, PRP, (PR)^2, (PR)^2P, (PR)^3, (PR)^4\}$ es de orden ocho). Aquí la voz principal es ligeramente menos parsimoniosa que la anterior pues el movimiento semitonal de la transformación P se alterna con intervalos de un tono entero provocados por R.

En este sentido, vamos a presentar un interesante descubrimiento de Richard Cohn (1997) [3] que implica la sobre determinación de las tríadas consonantes.

Hasta ahora hemos conocido las propiedades acústicas bien establecidas de las tríadas, por defecto consonantes, formadas por intervalos de quinta y tercera mayor o menor. Sin embargo, el potencial de estas tríadas para producir movimientos parsimoniosos no tiene, en principio, ninguna relación con dichas propiedades acústicas, sino más bien con las propiedades derivadas de la estructura de grupo en sistemas de temperamento igual módulo-12. A continuación veremos cómo Cohn demuestra un comportamiento especial de las tríadas consonantes dentro del conjunto de todas las posibles clases de tríadas.

Antes de entrar en la demostración general, veamos un caso particular en el siguiente ejemplo.

Ejemplo #5.3.1. Imaginemos una clase de tríadas cuya forma básica es (015), esto es, formada por una nota raíz (0) y otras dos notas a intervalos de 1 y 5 semitonos de la raíz. Una tríada de esta clase sería {C, C#, F}. El resto de miembros de la clase se obtendrían por transposición e inversión. Apuntar solamente que esta clase se corresponde con la clase 3-4 definida por Allen Forte en su “*Teoría atonal*” (1973) [15], donde define una serie de clases (conjuntos) de notas equivalentes bajo las transformaciones $T_n / T_n I$ (Transposición / Inversión). Volviendo a la tríada {C, C#, F}, si aplicamos sobre ella las transformaciones P , L y R , se obtendrían las tríadas {C, E, F}, {C, C#, Ab} y {C#, F, F#} respectivamente. Si lo ponemos en notación entera sería: $P(\{0, 1, 5\}) = \{0, 4, 5\}$, $L(\{0, 1, 5\}) = \{0, 1, 8\}$ y $R(\{0, 1, 5\}) = \{1, 5, 6\}$. Se ve claramente que las tres transformaciones “retienen” dos notas, sin embargo la tercera nota experimenta un movimiento de tres semitonos en dos casos y seis semitonos en otro. Por tanto, no se consigue la característica de parsimonia mencionada anteriormente.

En el caso general, aunque estamos interesados en las tríadas del sistema cromático usual de 12 clases de notas (o notas módulo 12), la definición está abierta a cualquier otro sistema cromático de cardinal c .

Definición #5.3.1. Sea c un entero positivo que representa el cardinal del sistema cromático.

Definición #5.3.2. Q es una tríada (módulo c) de la forma $\{0, x, x+y\}$, siendo $0 < x \leq y$. Esta condición asegura que Q es la forma básica de esa clase de tríadas.

Definición #5.3.3. I_u^v es la transformación de inversión u/v en el sentido de Lewin (ver definición #4.2.2.5). Recordemos que esta operación se define por la ecuación $int(s, u) = int(v, I_u^v(s))$. Se sigue que intercambia las notas u y v entre sí.

Con ello, la familia de operaciones PLR sobre la tríada $Q = \{0, x, x+y\}$ se define de la siguiente manera:

Definición #5.3.4.

- a) $P(Q) = I_{x+y}^0(Q) = I_{x+y}^0(\{0, x, x+y\}) = \{x+y, y, 0\}$. Por ejemplo, $P(\{0, 3, 7\}) = I_7^0(\{0, 3, 7\}) = \{0, 4, 7\}$, $P(\{0, 1, 5\}) = I_5^0(\{0, 1, 5\}) = \{0, 4, 5\}$.
- b) $L(Q) = I_x^0(Q) = I_x^0(\{0, x, x+y\}) = \{x, 0, -y\}$. Por ejemplo, $L(\{0, 3, 7\}) = I_3^0(\{0, 3, 7\}) = \{0, 3, 8\}$, $L(\{0, 1, 5\}) = I_1^0(\{0, 1, 5\}) = \{0, 1, 8\}$.
- c) $R(Q) = I_{x+y}^x(Q) = I_{x+y}^x(\{0, x, x+y\}) = \{2x+y, x+y, x\}$. Por ejemplo, $R(\{0, 3, 7\}) = I_7^3(\{0, 3, 7\}) = \{10, 3, 7\}$, $R(\{0, 1, 5\}) = I_5^1(\{0, 1, 5\}) = \{6, 1, 5\}$.

Se aprecia que cada operación PLR intercambia dos notas de Q y la tercera se sustituye por otra fuera de Q . Esta nota es la que se percibe como movimiento de voz principal. Para expresar la magnitud de este movimiento definimos las variables p , l y r .

Definición #5.3.5. Para la tríada $Q = \{0, x, x+y\}$ se tiene que:

- a) $p = y - x$, pues $x \xrightarrow{P} y$.
- b) $l = -2y - x$, pues $x+y \xrightarrow{L} -y$.
- c) $r = 2x + y$, pues $0 \xrightarrow{R} 2x + y$.

Se observa que $p + l + r = 0$. En la siguiente tabla se calculan los valores para todas las clases de tríadas en un sistema módulo-12.

$\{0, x, x+y\}$	$p = y - x$	$l = -2y - x$	$r = 2x + y$
$\{0, 1, 2\}$	0	9	3
$\{0, 1, 3\}$	$\boxed{1}$	7	4
$\{0, 1, 4\}$	$\boxed{2}$	5	5
$\{0, 1, 5\}$	3	3	6
$\{0, 1, 6\}$	4	$\boxed{1}$	7
$\{0, 2, 4\}$	0	6	6
$\{0, 2, 5\}$	$\boxed{1}$	4	7
$\{0, 2, 6\}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	8
$\{0, 2, 7\}$	3	0	9
$\{0, 3, 6\}$	0	3	9
$\{0, 3, 7\}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{10}$
$\{0, 4, 8\}$	0	0	0

La tabla demuestra que la única clase de tríadas módulo-12 que presenta un comportamiento parsimonioso ante la familia de operaciones PLR se corresponde con la forma básica (037), y esta es precisamente el conjunto de tríadas consonantes. Es fácil ver que cualquier miembro de la clase, obtenido mediante transformaciones $T_n / T_n I$, tiene los mismos valores p, l y r .

En resumen:

- 1) De todas las clases de tríadas módulo-12, las tríadas consonantes son las únicas susceptibles de voz principal parsimoniosa ante la familia de operaciones PLR.
- 2) Esta circunstancia es función del tamaño de los intervalos en la tríada, es decir, de su estructura interna.
- 3) Esta propiedad es incidental con sus óptimas propiedades acústicas.

De aquí que Richard Cohn concluyera que las tríadas consonantes están *”sobre determinadas”*. Según Cohn, esta relación fortuita que presentan las tríadas consonantes entre su generación acústica y su voz principal parsimoniosa subyace en el corazón del desarrollo de la tradición musical europea, al igual que otros tipos de sobre determinaciones descubiertos en los años 1960’s:

- La división cromática de la octava en 12 partes, siendo 12 el entero abundante más pequeño y el menor entero n tal que 3^n aproxima a alguna potencia de 2. Del conocido círculo de quintas $(3/2)^{12} \cong 2^7$.
- La proximidad entre la quinta justa ($2/3$), que es relación geométrica básica en la consonancia, y la fracción $7/12$, que expresa cierta relación de distribución entre las 7 notas de la escala diatónica de cada tonalidad y el conjunto de tonalidades posibles por transposición en un sistema de temperamento igual de 12 partes.

5.4.- Dualidad $T/I \longleftrightarrow \mathbf{PLR}$

A lo largo de este trabajo hemos utilizado indiscriminadamente la palabra “dual”, a saber: pensamiento dualístico de Hugo Riemann, dualismo armónico (efecto opuesto de las transformaciones sobre las tríadas mayores y menores), inversión dual y nomenclatura dual de las tríadas menores, circunferencia dual para representar el efecto de las transformaciones en el conjunto de las 24 tríadas consonantes.

Pues bien, aún hay más amigos. En este capítulo vamos a desarrollar un resultado importante que anunció David Lewin en el famoso libro *GMIT* y que algunos autores (Fiore [7]) denominan como acción **dual** de dos grupos en el sentido de Lewin. No en vano, David Lewin acabó su obra *GMIT* [12] (último párrafo del apéndice B, página 253) con la siguiente consideración:

- Supongamos un espacio S y un grupo $STRANS$ de operaciones que actúa simple transitivamente en S . Si consideramos la familia $STRANS'$ de transformaciones f en S tal que f conmuta con todos los elementos de $STRANS$, entonces se verifica que $STRANS'$ es también un grupo de operaciones simple transitivo sobre S . Además, toda transformación g que conmuta con todos los elementos de $STRANS'$ es también miembro de $STRANS$.
- En particular, si consideramos el espacio S de un GIS cuyas transposiciones sean los elementos de $STRANS$, entonces los elementos de $STRANS'$ son las operaciones que preservan los intervalos.
- Dualmente, si el espacio S corresponde a un GIS cuyas transposiciones son los elementos de $STRANS'$, entonces los elementos de $STRANS$ son las operaciones que preservan los intervalos.
- Se sigue, que si $STRANS$ es conmutativo, entonces $STRANS'$ coincide precisamente con $STRANS$.

Posteriormente Hook [8] identificó este efecto entre los grupos T/I y \mathbf{R} (\mathbf{PLR}), ambos isomorfos con el grupo diedral D_{12} (por tanto isomorfos entre sí). Las transformaciones de cada uno de ellos son las únicas que conmutan con las del otro, esto es, el grupo T/I es el centralizador de \mathbf{R} y viceversa.

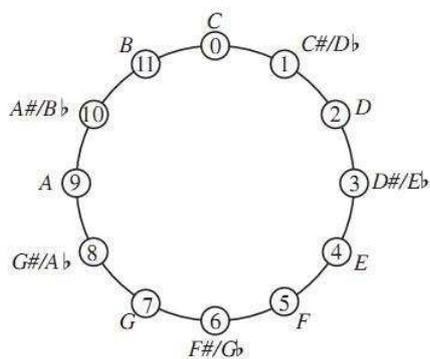
Se trata de un nuevo concepto de dualidad, en este caso dualidad entre subgrupos.

Definición #5.4.1. Dados los *subgrupos* H y K de G , se dice que H y K son *duales* si actúan simple transitivamente sobre el mismo conjunto y cada uno de ellos es el centralizador del otro.

Antes de nada, profundicemos un poco más en el grupo de Transposiciones e Inversiones (T/I), que es un grupo de transformaciones usualmente utilizado en teoría musical general con temperamento igual (escala cromática temperada de 12 notas), pero que no hemos visto mucho en este trabajo porque, como se apuntó en el capítulo de Transformaciones Triádicas Uniformes (UTTs), la inversión I (inversión sobre la nota C) no es uniforme: su acción sobre las tríadas $(C, +) \xrightarrow{I} (F, -)$ y $(Db, +) \xrightarrow{I} (E, -)$ implica diferentes niveles (intervalos) de transposición (5 y 3 respectivamente), lo cual incumple la condición de uniformidad.

La transformación I se corresponde con la inversión $I_C^C = I_0^0$ en la nomenclatura de Lewin: $int(s, 0) = int(0, I_0^0(s)) = -int(I_0^0(s), 0)$. Por tanto, una nota x semitonos por encima del DO ($C = 0$), se

transforma en $I(x) = -x \pmod{12}$, es decir, x semitonos por debajo de DO, equivalentemente $12-x$ semitonos por encima. El resto de inversiones I_n se definen como $I_n(x) = -x + n \pmod{12}$. Teniendo en cuenta que las transposiciones T_n son $T_n(x) = x + n \pmod{12}$, se deduce la equivalencia $I_n = T_n \cdot I$.



El reloj musical

- La transposición T_1 genera una *rotación* de una posición en sentido positivo.
- La inversión $I = I_0$ se corresponde con una *reflexión* sobre el eje 0-6.
- Como $(T_1)^n = T_n$ e $I_n = T_n \cdot I_0$, es inmediato que T_1 e I_0 generan el grupo diedral de simetrías de un polígono de 12 lados.

Luego el conjunto de 12 transposiciones y 12 inversiones $\mathbf{I} = \{T_0, T_1, \dots, T_{11}, I, T_1I, \dots, T_{11}I\}$ forma un grupo isomorfo al grupo diedral D_{12} de orden 24. Este grupo \mathbf{I} es conocido como **grupo T/I**. Es fácil comprobar que se verifican las siguientes leyes de composición:

- $T_m \cdot T_n = T_{m+n \pmod{12}}$
- $T_m \cdot I_n = I_{m+n \pmod{12}}$
- $I_m \cdot T_n = I_{m-n \pmod{12}}$
- $I_m \cdot I_n = T_{m-n \pmod{12}}$

Acabamos de ver el grupo T/I actuando sobre el conjunto de 12 notas cromáticas, esto es:

- $T_n: Z_{12} \longrightarrow Z_{12}: x \longrightarrow T_n(x) = x + n \pmod{12}$
- $I_n: Z_{12} \longrightarrow Z_{12}: x \longrightarrow I_n(x) = -x + n \pmod{12}$

Veamos ahora en acción al grupo T/I sobre el conocido conjunto de tríadas consonantes mayores y menores Γ . La siguiente tabla enumera las 24 tríadas (12 mayores y 12 menores), mostrando para cada una el conjunto de las tres notas que la componen. Observar que en las tríadas mayores la nota raíz se corresponde con la primera nota del conjunto, mientras que en las menores la nota raíz es la tercera.

Triadas Mayores	Triadas Menores
$C = \langle 0, 4, 7 \rangle$	$\langle 0, 8, 5 \rangle = f$
$C\sharp = D\flat = \langle 1, 5, 8 \rangle$	$\langle 1, 9, 6 \rangle = f\sharp = g\flat$
$D = \langle 2, 6, 9 \rangle$	$\langle 2, 10, 7 \rangle = g$
$D\sharp = E\flat = \langle 3, 7, 10 \rangle$	$\langle 3, 11, 8 \rangle = g\sharp = a\flat$
$E = \langle 4, 8, 11 \rangle$	$\langle 4, 0, 9 \rangle = a$
$F = \langle 5, 9, 0 \rangle$	$\langle 5, 1, 10 \rangle = a\sharp = b\flat$
$F\sharp = G\flat = \langle 6, 10, 1 \rangle$	$\langle 6, 2, 11 \rangle = b$
$G = \langle 7, 11, 2 \rangle$	$\langle 7, 3, 0 \rangle = c$
$G\sharp = A\flat = \langle 8, 0, 3 \rangle$	$\langle 8, 4, 1 \rangle = c\sharp = d\flat$
$A = \langle 9, 1, 4 \rangle$	$\langle 9, 5, 2 \rangle = d$
$A\sharp = B\flat = \langle 10, 2, 5 \rangle$	$\langle 10, 6, 3 \rangle = d\sharp = e\flat$
$B = \langle 11, 3, 6 \rangle$	$\langle 11, 7, 4 \rangle = e$

Conjunto Γ de Triadas Consonantes

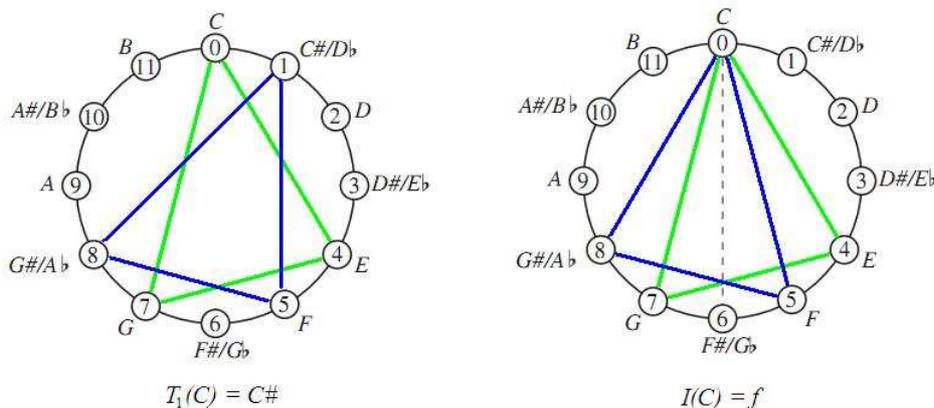
- $T_1(C) = T_1\{0, 4, 7\} = \{T_1(0), T_1(4), T_1(7)\} = \{1, 5, 8\} = C\#$.
- $T_n(C) = T_n\{0, 4, 7\} = \{T_n(0), T_n(4), T_n(7)\} = \{0+n, 4+n, 7+n\}$.
- $I(C) = I\{0, 4, 7\} = \{I(0), I(4), I(7)\} = \{0, 8, 5\} = f$.
- $I_n(C) = I_n\{0, 4, 7\} = \{I_n(0), I_n(4), I_n(7)\} = \{0+n, 8+n, 5+n\}$.

Observación:

$T_n(C)$ es la tríada situada en la fila n de la primera columna.

$I_n(C)$ es la tríada situada en la fila n de la segunda columna.

De lo visto se deduce fácilmente que el grupo T/I actúa simple transitivamente sobre el conjunto Γ . En efecto, dadas dos tríadas Y y Z existen dos transformaciones g_1 y g_2 de T/I que las relaciona con C , es decir, $g_1(C) = Y$, $g_2(C) = Z$. Por tanto $g_2g_1^{-1}(Y) = Z = g(Y)$, siendo $g = g_2g_1^{-1}$ único al ser únicos g_1 y g_2 . La siguiente figura ilustra gráficamente el movimiento de las tríadas bajo la acción de las transformaciones T/I , es un tipo de representación gráfica muy habitual en los últimos tiempos.



La unicidad de g se puede demostrar de una manera más elegante utilizando el teorema Órbita–Estabilizador. Sabemos que la órbita de un elemento Y de Γ bajo la acción del grupo I consiste en los elementos de Γ a los que se mueve Y , esto es, $O_Y = \{gY, g \in I\}$. El grupo estabilizador de Y está formado por aquellos elementos de I que fijan Y , es decir, $I_Y = \{g \in I, gY = Y\}$. El teorema Órbita–Estabilizador establece que el orden de un grupo que actúa sobre un conjunto es igual al producto del orden del grupo estabilizador de cualquier elemento del conjunto por el cardinal de su órbita, esto es, $|I| = |I_Y| |O_Y|$. En el caso particular que nos ocupa, $|I| = 24$ y $|O_Y| = 24$, de donde $|I_Y| = 1$, es decir, el único elemento que fija Y es el elemento neutro. Por tanto, si existieran dos miembros g y g' tal que $g(Y) = g'(Y) = Z$, entonces $g^{-1}g'(Y) = Y$. Pero $g^{-1}g'$ es el elemento neutro, luego $g = g'$ c.q.d.

También podríamos haber recurrido al teorema #4.3.2.2, donde se probó que el grupo de Riemann R actúa simple transitivamente sobre el conjunto de tríadas consonantes Γ y es isomorfo al grupo diedral D_{12} , al igual que I . Se sigue que I (grupo T/I) actúa simple transitivamente sobre Γ . Un posible isomorfismo sería directamente la identificación de generadores: $P \longrightarrow I, Q \longrightarrow T_I$. Recordemos que $P = \langle -, 0, 0 \rangle$ es la transformación paralela y $Q = \langle +, 1, -1 \rangle$ es la schritt unidad S_I .

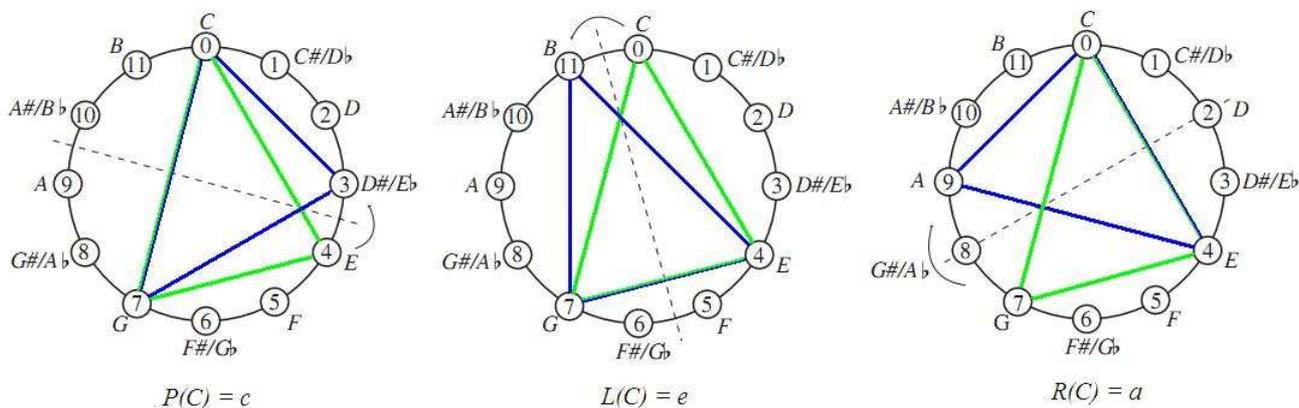
Ya hemos comentado que la inversión I no es una transformación uniforme y por tanto no pertenece al grupo V de UTTs. También que $I = I_C^C = I_0^0$ en la nomenclatura de Lewin. Representando las tríadas en la forma habitual raíz/signo, $\Delta = (r, \sigma)$, para $I_n(r, \sigma) = (r', \sigma')$ se verifica que $\sigma' = -\sigma$ y la nueva raíz r' se corresponde con la inversión de la quinta de r , es decir, $r' = -(r + 7) + n \pmod{12}$, de donde sale la ecuación $r + r' + 7 = n \pmod{12}$. Por otro lado, sabemos que una UTT $U = \langle -, t^+, t^- \rangle$ invierte una tríada (r, σ) en $(r + t^\sigma, -\sigma)$, luego $U(r, \sigma)$ sería equivalente a $I_n(r, \sigma)$ para $n = 2r + t^\sigma + 7$, se sobreentiende $\pmod{12}$. El hecho de que n dependa de la tríada concreta sobre la que se aplica la inversión I_n , le da el sentido de transformación “contextual”.

En la parte final de su trabajo sobre UTTs [8], Julian Hook añade las inversiones I_n al grupo \mathbf{V} de UTTs y obtiene un nuevo grupo \mathbf{Q} de orden 1152 formado por las transformaciones que llama QTTs “*Transformaciones Triádicas Cuasi-Uniformes*”.

El grupo PLR ó grupo de Rieman \mathbf{R} ya lo hemos estudiado ampliamente a lo largo del presente trabajo, por lo que sólo añadiremos alguna relación con el grupo T/I y la nueva técnica de representación gráfica. Las tres transformaciones P , L y R producen inversión de modo. Es fácil comprobar que su representación en términos de inversión I_n , así como los ejes de inversión son:

- $P\{x, y, z\} = I_{x+z}\{x, y, z\}$, eje de inversión $\left(\frac{x+z}{2}, \frac{x+z}{2} + 6\right)$
- $L\{x, y, z\} = I_{y+z}\{x, y, z\}$, eje de inversión $\left(\frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2} + 6\right)$
- $R\{x, y, z\} = I_{x+y}\{x, y, z\}$, eje de inversión $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} + 6\right)$

Algunos autores consideran estas transformaciones PLR como contextuales debido a que, al relacionarlas con I_n , el valor de n dependen de la tríada sobre la que se aplica. Sin embargo en la terminología de UTTs = $\langle -, t^+, t^- \rangle$ no es así, siendo los niveles de transposición t^+ y t^- independientes de la tríada en cuestión.



Con las fórmulas anteriores es muy sencillo comprobar que las transformaciones PLR y T/I conmutan, de hecho sabemos que las transposiciones T_n conmutan con todas las UTTs. Dado que $I_n = T_n \cdot I$, basta con probar que conmutan con I . Para no extendernos mucho comprobaremos sólo el caso de la transformación Relativa $R\{x, y, z\} = I_{x+y}\{x, y, z\}$, es decir, debemos probar que $R \cdot I\{x, y, z\} = I \cdot R\{x, y, z\}$. Por un lado $R \cdot I\{x, y, z\} = R\{-x, -y, -z\} = I_{-x-y}\{-x, -y, -z\} = \{-y, -x, z-x-y\}$ y por otro $I \cdot R\{x, y, z\} = I \cdot I_{x+y}\{x, y, z\} = I\{y, x, -z+x+y\} = \{-y, -x, z-x-y\}$ c.q.d.

También podríamos haber utilizado la fórmula de inversión de la quinta de la raíz $r + r' + 7 = n \pmod{12}$. Tenemos que probar que $R \cdot I(r, \sigma) = I \cdot R(r, \sigma)$. Por un lado $R \cdot I(r, \sigma) = R(-(r+7), -\sigma) = (-(r+7)-9, \sigma)$ ó $(-(r+7)+9, \sigma)$ dependiendo del signo de σ . Por otro lado $I \cdot R(r, \sigma) = I(r+9, -\sigma)$ ó $I(r-9, -\sigma) = (-(r+9+7), \sigma)$ ó $(-(r-9+7), \sigma)$ c.q.d.

Considerando los grupos PLR y T/I como subgrupos del grupo \mathbf{Q} de QTTs “*Transformaciones Triádicas Cuasi-Uniformes*”, a su vez subgrupo del grupo \mathbf{G} de permutaciones de Γ ó grupo simétrico $\text{Sim}(\Gamma)$, ya estamos en condiciones de abordar el objetivo de este capítulo:

Teorema #5.4.1. Los grupos PLR y T/I son *duales*, esto es, ambos actúan simple transitivamente sobre el conjunto de tríadas consonantes mayores y menores Γ y cada uno de ellos es el centralizador del otro.

Prueba: (Basada en [7]). Ya hemos comprobado que ambos grupos son simple transitivos y conmutan entre sí, lo que significa que el grupo PLR está contenido en el centralizador $C(T/I)$ del grupo T/I en $\text{Sim}(\Gamma)$. Igualmente, el grupo T/I está contenido en el centralizador $C(\text{PLR})$.

Calculemos ahora el orden de $C(T/I)$ aplicando el teorema Órbita–Estabilizador. Dada cualquier tríada $Y \in \Gamma$, si h es una transformación de $C(T/I)$ que fija Y , para toda transformación g del grupo T/I se tiene que $hY = Y \rightarrow ghY = gY \rightarrow hgY = gY \rightarrow hY' = Y'$. Pero por ser T/I simple transitivo Y' puede ser cualquier tríada de Γ eligiendo el g adecuado, luego h fija todo el conjunto Γ , por lo que no puede ser otro elemento que la identidad. Por tanto, el estabilizador $C(T/I)_Y$ es el grupo trivial, de donde $|C(T/I)_Y| = 1$.

Por otro lado, sabemos que la órbita de Y en $C(T/I)$ tiene que ser $O_Y \leq 24$, en particular $O_Y = 24$ ya que $\text{PLR} \subset C(T/I)$ y el grupo PLR es simple transitivo de orden $|\text{PLR}| = 24$.

Del teorema Órbita–Estabilizador $24 = |\text{PLR}| \leq |C(T/I)| = C(T/I)_Y O_Y \leq 24$, de donde $|C(T/I)| = 24$.

Se sigue $C(T/I) \equiv \text{PLR}$.

La equivalencia dual $C(\text{PLR}) \equiv T/I$ se prueba con un procedimiento completamente análogo, invirtiendo los papeles de los grupos PLR y T/I c.q.d.

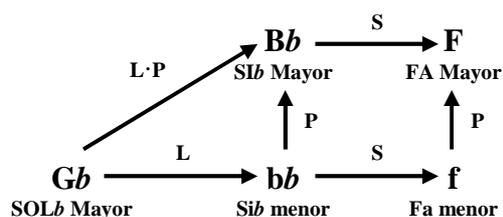
6.- Ejemplos

A continuación se exponen un par de ejemplos representativos del análisis musical Transformacional y Neo-Riemanniano. El primero corresponde a unos fragmentos del ciclo de óperas “*El anillo del nibelungo*” de Richard Wagner, que estudió David Lewin en [13] y posteriormente Henry Klumpenhouwer amplió [10] con algunas consideraciones armónicas dualísticas. El segundo ejemplo describe la famosa secuencia de diecinueve tríadas consecutivas distintas en la 9ª sinfonía de Beethoven (2º movimiento, scherzo).

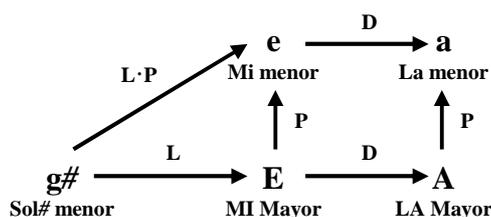
6.1.- Wagner

“*El anillo del nibelungo*” (*Der Ring des Nibelungen*) es una tetralogía de óperas épicas basadas en la mitología germánica previa a la cristianización, compuesta por Richard Wagner entre los años 1848 y 1874: *El oro del Rin* (*Das Rheingold*), *La valquiria* (*Die Walküre*), *Sigfrido* (*Siegfried*) y *El ocaso de los dioses* (*Götterdämmerung*).

David Lewin estudió la estructura armónica de un fragmento musical (leitmotiv ó tema musical) conocido como valhalla, que se repite (normalmente con ciertas variaciones y alteraciones) en el oro del Rin y la valquiria. La siguiente figura muestra las redes (nodos y flechas) que ilustran la progresión armónica de este tema en ambas óperas. Es fácilmente reconocible que los nodos corresponden a las armonías (tríadas) y las flechas a las transformaciones que aplican entre ellas.



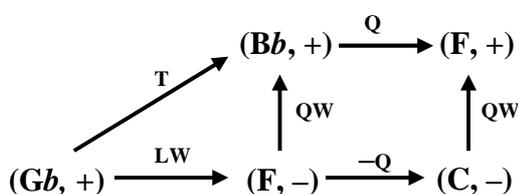
a) Valhalla (I) en “*el oro del Rin*”



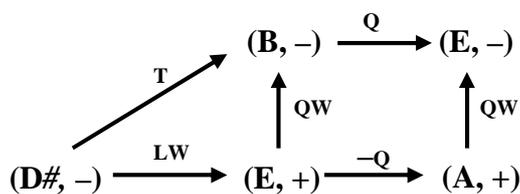
b) Valhalla (II) en “*la valquiria*”

En ambos casos, a) y b), las tríadas están identificadas de acuerdo al modelo de la teoría de bajo fundamental de Rameau. Las transformaciones indicadas por las etiquetas de las flechas se corresponden con las conocidas L (Leittonwechsel), P (Parallel), D (Dominante) y S (Subdominante). L-P representa la composición de L y P. Comparando ambas redes, vemos que presentan una estructura fuertemente isográfica, si no fuera por la diferencia en las transformaciones S y D. Mientras la parte izquierda de ambas, con las transformaciones L y L-P, evoca un comportamiento dualístico sobre tríadas de modos opuestos, en la parte derecha se rompe esa concepción dual con S y D.

Posteriormente, Henry Klumpenhouwer analizó esos mismos temas utilizando la terminología dual de Hugo Riemann para las tríadas y las transformaciones *Schritte/Wechsel* en las fechas.



a) Valhalla (I) en “*el oro del Rin*”

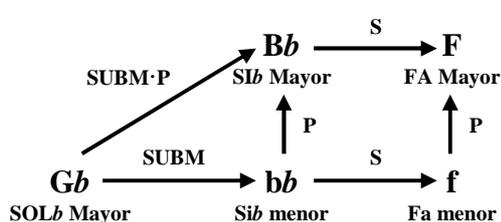


b) Valhalla (II) en “*la valquiria*”

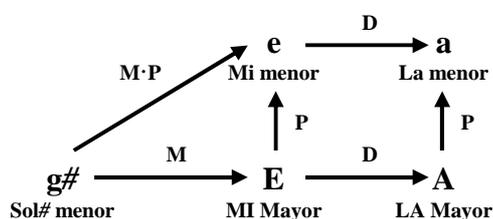
Las transformaciones equivalentes son LW (Leittonwechsel), QW (Quintwechsel), T (Terzschrift), Q (Quintschrift) y su inversa -Q (gegenQuintschrift).

Si comparamos ambas redes a) y b), ahora sí son estrictamente isográficas, coincidiendo todas las etiquetas de las flechas. Las tríadas de los nodos tienen modos opuestos y se puede afirmar que ambas redes son duales, es decir, la red a) es una representación “positiva” o “mayor” de la red b). Se concluye que existe una conexión dual entre ambos temas Valhalla I y II.

Adicionalmente, Klumpenhouwer propone una variante para avanzar en el análisis inicial de David Lewin, sustituyendo en la red a) las transformaciones L y L·P por la SubMediante (SUBM) y la composición SUBM·P respectivamente, mientras que en la red b), L y L·P equivalen respectivamente a la transformación Mediante (M) y la composición M·P. De este modo, con la representación de las tríadas según el modelo de bajo fundamental, las nuevas redes mostrarían el siguiente aspecto, podríamos decir de simetría inversa, al ser inversos M y SUBM, D y S.

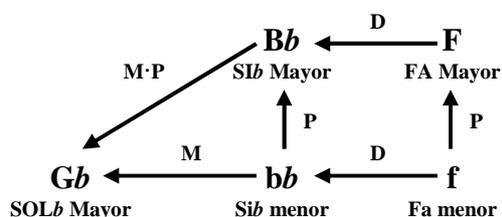


a) Valhalla (I) en “el oro del Rin”



b) Valhalla (II) en “la valquiria”

La simetría inversa se ve inmediatamente al invertir el sentido de las transformaciones.



a) Valhalla (I) en “el oro del Rin”

6.2.- Beethoven

Normalmente, las características consideradas protagonistas en el carácter dramático de la música instrumental de Beethoven están relacionadas con la polaridad entre tónica y dominante, así como la interacción, a veces clara a veces confusa, de estructuras musicales diferentes. El ritmo y la métrica también intervienen en los esquemas dramáticos, pero raramente son considerados como principales actores.

El 2º movimiento (scherzo) de la 9ª sinfonía de Beethoven fue objeto de un exhaustivo trabajo de análisis por parte de Richard Cohn en 1992 [4], otorgando una importancia preponderante a la métrica como cualidad protagonista en la impronta dramática de esta obra.

En particular, el pasaje comprendido entre los compases 143 y 171 presenta una modulación en la métrica temporal, de tal modo que la acentuación de determinados compases genera un conflicto entre métrica doble y triple. A continuación puede verse la partitura de este fragmento en una versión adaptada para piano de Franz Liszt.

Según Cohn, presenta una estructura métrica de orden superior (hiper-métrica) donde el control de la métrica doble se rompe y aparecen infiltrados elementos de métrica triple que admite diferentes interpretaciones. Para describir esta situación Richard Cohn plantea una reducción en la que cada compás se representa por la duración de una negra.

La figura muestra cómo los primeros 16 compases y los 6 finales mantienen la interpretación de métrica doble, pero los 12 compases intermedios (a partir del 159) presentan tres variantes de interpretación, a saber:

- (a) Movimiento melódico con periodicidad triple
- (b) Mantiene la métrica doble
- (c) Periodicidad triple pero con una oscilación de bajo nivel en métrica doble

Para Richard Cohn esta situación de conflicto doble/triple está íntimamente relacionada con el diseño tonal del pasaje, que consiste en una larga cadena de terceras diatónicas descendentes. En el ejemplo #4.3.3.1 ya se describió esta singular progresión armónica formada por una secuencia de 19 tríadas distintas:

$$C \rightarrow a \rightarrow F \rightarrow d \rightarrow Bb \rightarrow g \rightarrow Eb \rightarrow c \rightarrow Ab \rightarrow f \rightarrow Db \rightarrow bb \rightarrow Gb \rightarrow eb \rightarrow B \rightarrow g\# \rightarrow E \rightarrow c\# \rightarrow A$$

Dependiendo del grupo simple transitivo escogido la progresión puede ser descrita por la aplicación de diferentes transformaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = K(1, 11): & \quad C \xrightarrow{M} a \xrightarrow{M} F \xrightarrow{M} d \xrightarrow{M} Bb \xrightarrow{M} g \dots \xrightarrow{M} A. \\ K(1, 0): & \quad C \xrightarrow{T_9P} a \xrightarrow{T_8P} F \xrightarrow{T_9P} d \xrightarrow{T_8P} Bb \xrightarrow{T_9P} g \dots \xrightarrow{T_8P} A. \\ \mathbf{R} = K(11, 0): & \quad C \xrightarrow{R} a \xrightarrow{L} F \xrightarrow{R} d \xrightarrow{L} Bb \xrightarrow{R} g \dots \xrightarrow{L} A \end{aligned}$$

Esta secuencia presenta una alternancia de tríadas en modo mayor y menor, es decir, genera una oscilación de modo que lleva inherente una periodicidad doble.

Pero al mismo tiempo, cada par de tríadas adyacentes mantiene dos tonos en común (el conocido efecto de tríadas parsimoniosas), lo cual se deduce inmediatamente del análisis Neo-Riemanniano (grupo **R**, con las transformaciones *Relativa* y *Leittonwechsel* que se van alternando), generando una rotación sobre la nota superior de la tríada que se repite con periodicidad triple, como se aprecia en la interpretación (a).

Definitivamente, en palabras de Richard Cohn, “*la sensación creciente de conflicto entre métrica doble/y triple del pasaje, junto con la sensación de desorientación tonal, constituye el camino obsesivo que persigue Beethoven hacia el corazón de la oscuridad cromática*”. Seguidamente, el final del fragmento (compases 171 a 176), donde se produce la recuperación en ambos aspectos, tonal y métrico.

7.- Conclusiones

Al comienzo del trabajo, en el capítulo de introducción, decíamos que la línea argumental se basaría en la búsqueda de estructuras de grupo que describen determinadas simetrías, constituidas por una serie de transformaciones mediante las cuales se perfila la progresión melódica y armónica con la que se desarrollan ciertos fragmentos musicales. Pues bien, finalizado el trabajo, podemos afirmar que las teorías musicales Transformacional y Neo-Riemanniana desarrolladas han producido una gran cantidad de grupos y subgrupos matemáticos actuando como transformaciones sobre espacios musicales diversos.

Todo ello gracias a las ideas de Hugo Riemann (y sus contemporáneos Helmholtz y Oettingen), eso sí, actualizadas convenientemente por David Lewin, Brian Hyer, Julian Hook, Richard Cohn, Henry Klumpenhouwer, etc... ya que aquellos teóricos musicales no tenían conciencia de los conceptos matemáticos de conjuntos y grupos, aunque subyacían escondidos en sus desarrollos teóricos musicales.

El filósofo David Hume (1711-1776) definió la teoría musical como impresiones que se hacen tangibles y forman ideas. El análisis teórico musical proporciona un orden conceptual para organizar y entender la música. En este sentido, Hugo Riemann ya apuntaba, a través de su tonnetz, hacia una organización geométrica de las progresiones armónicas, generando una visualización espacial de las impresiones auditivas. Igualmente, su definición de dualismo armónico o inversión dual entre tríadas mayores y menores introduce un elemento de simetría, concepto cumbre en la belleza artística matemática.

La Teoría Musical Transformacional propone un cambio sustancial en la perspectiva con la que se analiza el movimiento musical. Para David Lewin, “*la actitud transformacional*” consiste en estudiar las gesturas características (*transformaciones*) que se pueden realizar para obtener esas progresiones armónicas y melódicas. Las transformaciones musicales se modelan como elementos grupos matemáticos.

Definitivamente, se ha puesto de manifiesto la utilidad de las teorías musicales Transformacional y Neo-Riemanniana para enfocar el análisis teórico musical desde una nueva perspectiva, complementaria a los métodos usuales “*estructuralista*” de Heinrich Schenker y “*atonal*” de Allen Forte. Este nuevo paradigma pone a disposición una maquinaria matemática capaz de esquematizar y caracterizar progresiones armónicas y melódicas, a la par que ofrece un lenguaje descriptivo eficaz para su representación.

A lo largo del trabajo han aparecido estructuras y representaciones fundamentalmente aplicadas al conocido espacio musical Γ (conjunto de las 24 tríadas armónicas consonantes mayores y menores), con objeto de asentar las características principales de ambas teorías musicales. Queda abierto el camino para posibles trabajos futuros. Por ejemplo, extendiendo el espacio musical Γ con tríadas aumentadas, disminuidas, acordes de cuatro notas (tétradas) como los acordes de séptima ó de sexta, etc..., que sin duda, traerían como consecuencia nuevas figuras geométricas y representaciones visuales en la percepción musical.

8.- Bibliografía

- [1] **Baez, John.** This Week's Finds in Mathematical Physics (Week 234) (2006).
<http://math.ucr.edu/home/baez/week234.html>.
- [2] **Cohn, Richard.** Introduction to Neo-Riemannian Theory: A Survey and a Historical Perspective. *Journal of music Theory*, Vol. 42, N° 2 (1998).
- [3] **Cohn, Richard.** Neo-Riemannian Operations, Parsimonious Trichords, and Their “Tonnetz” Representations. *Journal of music Theory*, Vol. 41, N° 1 (1997).
- [4] **Cohn, Richard.** The Dramatization of Hypermetric Conflicts in the Scherzo of Beethoven's Ninth Symphony. *19th-Century Music*, Vol. 15, N° 3 (1992).
- [5] **Fiore, Thomas M.** Music and Mathematics. fioret@umich.edu.
- [6] **Thomas M. Fiore, Ramon Satyendra.** Generalized Contextual Groups. *Music Theory Online*, Vol. 11, N° 3 (2005).
- [7] **Alissa S. Crans, Thomas M. Fiore, Ramon Satyendra.** Musical Actions of Dihedral Groups. (2008). arXiv.org.
- [8] **Hook, Julian.** Uniform Triadic Transformations. *Journal of music Theory*, Vol. 46, N° 1 (2002).
- [9] **Hyer, Brian.** Reimag(in)ing Riemann. *Journal of music Theory*, Vol. 39, N° 1 (1995).
- [10] **Klumpenhouwer, Henry.** Some Remarks on the Use of Riemann Transformations. *Music Theory Online*, Vol. 0, N° 9 (1994).
- [11] **Lewin, David.** A Formal Theory of Generalized Tonal Functions. *Journal of music Theory*, Vol. 26, N° 1 (1982).
- [12] **Lewin, David.** Generalized Musical Intervals and Trnsformations (GMIT). *Yale University Press* (1987).
- [13] **Lewin, David.** Some Notes on Analyzing Wagner: "The Ring" and "Parsifal". *19th-Century Music*, Vol. 15, N° 3 (1992).
- [14] **Edward Gollin, Alexander Rehding.** The Oxford Handbook of Neo-Riemannian Music Theories. *Oxford University Press* (2011).
- [15] **Forte, Allen.** The Structure of atonal Music. *Yale University Press* (1973).
- [16] **Hauptmann, Moritz.** The Nature of Harmony and Metre. *London* (1888).
- [17] **Rameau, Jean Philippe.** *Traité de L'Harmonie* (1722).
- [18] **Romero Redondo, Roberto.** Música y Matemáticas.
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Musica%20y%20Matematicas.pdf
- [19] **Britos Zunín, Gustavo.** Música y ciencia. 8) El gran legado musical de la antigua Grecia.
<http://eltamiz.com/elcedazo/2012/11/04/musica-y-ciencia-8-el-gran-legado-musical-de-la-antigua-grecia-4/>