áreas de alto riesgo o de riesgo variable a la contaminación, donde se practica una fertilización excesiva, correspondientes a los municipios donde hay núcleos cuyas aguas de abastecimiento contienen más de 50 mg×L^{-1} de nitratos (*zonas vulnerables*) o entre 25 y 50 mg×L^{-1} (*zonas de protección*). Una vez definidas ambos tipos de zonas, se recomienda seguir una serie de acciones encaminadas a reducir, eliminar y prevenir la contaminación por nitratos

Cabe preguntarse, si una vez localizado el problema no se pueden emplear técnicas de descontaminación. Es evidente que dichas técnicas existen: la desnitrificación biológica, el intercambio iónico, la osmosis inversa, la reducción química y la electrodiálisis se podrían utilizar, pero son métodos muy costosos y sólo aplicables a núcleos urbanos de menos de 10.000 habitantes. La solución al problema esta pues en el control y prevención, evitando que este tipo de contaminación siga aumentando.

BIBLIOGRAFÍA

- *Análisis y evolución de la contaminación de las aguas subterráneas.* Actas del Congreso de la Asociación Internacional de Hidrogeólogos. (1994). Universidad de Alcalá de Henares.
- *Fertilizers and Environment.* Ed. Rodríguez-Barrueco, C.Kluwer Academic Publ., vol. 66 (1996)
- *Nitrogen management and ground water protection.* Ed. Follet, R.F. Elsevier (1989)
- Real Decreto 261/1996 de 16 de febrero (BOE 11 de marzo de 1996)
- Directiva 91/696/CEE (12 diciembre)

M.ª del Carmen Cartagena
Depto. de Química y Análisis Agrícola.
E.T.S.I. Agrónomos. UPM

Sobre extensión de funciones reales

1. INTRODUCCIÓN

Tomando como base el artículo **"Un teorema sobre extensión de funciones reales"**, de Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo, publicado en el nº 1 de la revista 100cias@uned de la Facultad de Ciencias, surge la posibilidad de extender a funciones continuas las hipótesis del citado artículo, en lugar de funciones derivables en un intervalo abierto (a, b), para poderlas extender con continuidad al intervalo cerrado [a, b].

El papel que jugaba la derivada en el teorema aquí lo realizan los números derivados

$$D^+F(x) = \limsup_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h};$$

$$D_+F(x) = \liminf_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h};$$

$$D^-F(x) = \limsup_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

y

$$D_-F(x) = \liminf_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h};$$

que existen (en $\overline{\mathbb{R}}$) para toda función F definida en un entorno del punto $x \in \mathbb{R}$.

2. TEOREMA

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo abierto acotado I de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}-I$. La función f se puede extender con continuidad a a si y sólo si existe una función continua $g: I \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ verificando la siguiente propiedad:

Para todo $\varepsilon>0$, existen $\rho_\varepsilon>0$ y $M_\varepsilon>0$ tales que, si $x \in I$, $|x-a| \le \rho_\varepsilon$ y $|g(x)-f(x)|\ge\varepsilon$, todos los números derivados de f en x, $Df(x)$, están acotados por M_ε ($|Df(x)|\le M_\varepsilon$).

Demostración:

Condición necesaria: Si una tal extensión $\hat{f}(x)$ a a existe, tomando $g(x)=\hat{f}(x)$ se cumple el Teorema, pues $|g(x)-\hat{f}(x)|=0$.

Condición suficiente:

Supongamos que $a=\inf I$ (análogamente se procede si $a=\sup I$).

Puede suceder que, para algún $\varepsilon>0$ y algún $r>0$, todos los $x \in V_r = (a, a+r) \cap I$ satisfagan que $|g(x)-f(x)|\ge\varepsilon$; o que para todo $\varepsilon>0$ y todo $r>0$, exista $x \in V_r$ tal que $|g(x)-f(x)|<\varepsilon$. Estudiaremos estos dos casos por separado.

1) Sean $\varepsilon>0$ y $r>0$ verificando que para todo $x \in V_r$, $|g(x)-f(x)|\ge\varepsilon$. Podemos suponer $r<\rho_\varepsilon$. Por hipótesis, existe $M_\varepsilon>0$ tal que para todo $x \in V_r$ es $|Df(x)|\le M_\varepsilon$, para todos los

números derivados $Df(x)$ de f en x. Se sigue que todas las razones incrementales $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$, tomando x, y en el intervalo V_r ($x \neq y$), están acotadas por M_ε; de donde resulta que en este intervalo $f(x)$ es lipschitziana con coeficiente M_ε y por tanto uniformemente continua en él, y puede extenderse por continuidad al extremo a del intervalo.

2) Sea $\varepsilon>0$. Pongamos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}$.

Ya que g es continua en a, existe $\delta>0$ tal que, si $x, y \in V_\delta$, entonces $|g(x)-g(y)| \leq \varepsilon_1$ (y, por tanto, $|g(x)-g(a)| \leq \varepsilon_1$). Podemos suponer que $\delta < \text{mín}\ (\rho_{\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_1}{M_{\varepsilon_1}})$. Sea $x \in V_\delta$.

Si $|g(x)-f(x)| \leq \varepsilon_1$, entonces $|g(a)-f(x)| \leq |g(a)-g(x)| + |g(x)-f(x)| \leq$ $\leq 2\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Si $|g(x)-f(x)| > \varepsilon_1$, sea d el extremo inferior del conjunto $\{y \in (a, x] \ / \ \forall z \in [y, x], |g(z)-f(z)| > \varepsilon_1\}$.

Nótese que $d > a$, según resulta de la hipótesis hecha en 2). Por la continuidad de g y f en I, debe ser $|g(d)-f(d)| = \varepsilon_1$. Además, en el intervalo $[d, x]$, la función f es lipschitziana con coeficiente M_{ε_1}. Por tanto,

$$|g(a)-f(x)| \leq |g(a)-g(d)| + |g(d)-f(d)| + $$
$$+ |f(d)-f(x)| \leq \varepsilon_1+\varepsilon_1+M_{\varepsilon_1}\delta \leq 3\varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Por la arbitrariedad de ε tendremos que en todo caso se puede obtener un V_r que haga $|g(a)-f(x)|$ tan pequeño como se quiera para $x \in V_r$, y será $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = g(a)$. Vemos pues que $f(x)$ se extiende con continuidad a a.

3. COROLARIO

Sean I un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{I}-I$. Una función $f: I \to \mathbb{R}$ derivable se puede extender a $I \cup \{a\}$ con continuidad si y sólo si existe una función derivable $g(x)$ definida en $I \cup \{a\}$ tal que, para cada $\varepsilon>0$, existe $M_\varepsilon>0$ verificando que, si $x \in I$ y $|g(x)-f(x)| \geq \varepsilon$, entonces $|f'(x)| \leq M_\varepsilon$.

4. OBSERVACIÓN

Es posible extender el Teorema anterior a situaciones aún más generales, considerando un número finito de funciónes $g_i(x)$ continuas en a.

REFERENCIAS

Fernández y Fernández-Arroyo, F. J. "Un teorema sobre extensión de funciones reales". *100cias@uned* **1** (1998), 50-53.

Pedro Rubió Díaz
Catedrático de la Escuela Universitaria
Politécnica de Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya

NOVEDADES CIENTÍFICAS

Novedades científicas en Física

FÍSICA DE PARTÍCULAS

• La invariancia CPT es una de las características esenciales de la mecánica cuántica relativista. Esta invariancia establece que las leyes de la naturaleza deben permanecer invariantes si se hacen simultáneamente tres transformaciones: conjugación de carga (C), inversión de paridad (P) e inversión temporal (T).

Una consecuencia directa de esto es que las masas del protón y del antiprotón deben ser absolutamente iguales. Un experimento reciente ha permitido verificar esta relación con una precisión de una parte en 10^9. Esta es la mejor prueba hasta la fecha de la invariancia CPT.

La invariancia CPT global no implica invariancia bajo cada una de las tres transformaciones por separado. De hecho, desde 1964 se sabe que las interacciones débiles violan la invariancia CP, aunque esto sólo había sido detectado en un único sistema de kaones neutros. En 1998, se ha observado una violación semejante en un sistema de mesones B.

La violación de la invariancia CP supone indirectamente la violación de la invariancia T: en efecto, ambos efectos deben compensarse para salvar la invariancia CPT global. Pero la violación de T también se ha comprobado directamente en el CERN y en Fermilab estudiando las desintegraciones de kaones neutros. Este resultado refleja que la transformación de materia en antimateria es asimétrica en el tiempo con respecto al proceso inverso, lo que también podría explicar por qué el universo está hecho fundamentalmente de materia.

• La electrodinámica cuántica y la versión más simple de la teoría electro-débil suponen que el fotón no tiene masa. Algunas consecuencias de esta ausencia de masa son que las ondas electromagnéticas deben ser puramente transversales, todos los fotones deben tener la misma velocidad c independientemente de su frecuencia o que la radiación dipolar varía como $1/r^2$. Sin embargo, todo lo que los experimentos pueden demostrar es que hay un límite superior muy pequeño para la masa del fotón. Hasta ahora, la medida del alcance de la interacción electromagnética y la velocidad de fotones de diferente frecuencia daban una cota superior de 10^{-46} g para la masa del fotón (del orden de una trillonésima parte de la masa del elec-