

números derivados  $Df(x)$  de  $f$  en  $x$ . Se sigue que todas las razones

incrementales  $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$ , to-

mando  $x, y$  en el intervalo  $V_r$  ( $x \neq y$ ), están acotadas por  $M_\varepsilon$ ; de donde resulta que en este intervalo  $f(x)$  es lipschitziana con coeficiente  $M_\varepsilon$  y por tanto uniformemente continua en él, y puede extenderse por continuidad al extremo  $a$  del intervalo.

2) Sea  $\varepsilon > 0$ . Pongamos  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}$ .

Ya que  $g$  es continua en  $a$ , existe  $\delta > 0$  tal que, si  $x, y \in V_\delta$ , entonces  $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon_1$  (y, por tanto,  $|g(x) - g(a)| \leq \varepsilon_1$ ). Podemos suponer

que  $\delta < \min(\rho_{\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_1}{M_{\varepsilon_1}})$ . Sea  $x \in V_\delta$ .

Si  $|g(x) - f(x)| \leq \varepsilon_1$ , entonces  $|g(a) - f(x)| \leq |g(a) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon_1 < \varepsilon$ .

Si  $|g(x) - f(x)| > \varepsilon_1$ , sea  $d$  el extremo

inferior del conjunto  $\{y \in (a, x] / \forall z \in [y, x], |g(z) - f(z)| > \varepsilon_1\}$ .

Nótese que  $d > a$ , según resulta de la hipótesis hecha en 2). Por la continuidad de  $g$  y  $f$  en  $I$ , debe ser  $|g(d) - f(d)| = \varepsilon_1$ . Además, en el intervalo  $[d, x]$ , la función  $f$  es lipschitziana con coeficiente  $M_{\varepsilon_1}$ . Por tanto,

$$|g(a) - f(x)| \leq |g(a) - g(d)| + |g(d) - f(d)| + |f(d) - f(x)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + M_{\varepsilon_1} \delta \leq 3\varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Por la arbitrariedad de  $\varepsilon$  tendremos que en todo caso se puede obtener un  $V_r$  que haga  $|g(a) - f(x)|$  tan pequeño como se quiera para  $x \in V_r$ , y será  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$ . Vemos pues

que  $f(x)$  se extiende con continuidad a  $a$ .

### 3. COROLARIO

Sean  $I$  un intervalo acotado de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I} - I$ . Una función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  deri-

vable se puede extender a  $I \cup \{a\}$  con continuidad si y sólo si existe una función derivable  $g(x)$  definida en  $I \cup \{a\}$  tal que, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $M_\varepsilon > 0$  verificando que, si  $x \in I$  y  $|g(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ , entonces  $|f'(x)| \leq M_\varepsilon$ .

### 4. OBSERVACIÓN

Es posible extender el Teorema anterior a situaciones aún más generales, considerando un número finito de funciones  $g_i(x)$  continuas en  $a$ .

### REFERENCIAS

Fernández y Fernández-Arroyo, F. J. "Un teorema sobre extensión de funciones reales". *100cias@uned* 1 (1998), 50-53.

Pedro Rubió Díaz

Catedrático de la Escuela Universitaria  
Politécnica de Manresa  
Universidad Politécnica de Catalunya

## NOVEDADES CIENTÍFICAS

### Novedades científicas en Física

#### FÍSICA DE PARTÍCULAS

- La invariancia CPT es una de las características esenciales de la mecánica cuántica relativista. Esta invariancia establece que las leyes de la naturaleza deben permanecer invariantes si se hacen simultáneamente tres transformaciones: conjugación de carga (C), inversión de paridad (P) e inversión temporal (T).

Una consecuencia directa de esto es que las masas del protón y del antiprotón deben ser absolutamente iguales. Un experimento reciente ha permitido verificar esta relación con una precisión de una parte en  $10^9$ . Esta es la mejor prueba hasta la fecha de la invariancia CPT.

La invariancia CPT global no implica invariancia bajo cada una de las tres transformaciones por separado. De hecho, desde 1964 se sabe que las interacciones débiles violan la invariancia CP, aunque esto sólo había sido detectado en un único sistema de kaones neutros. En 1998, se ha observado una violación semejante en un sistema de mesones B.

La violación de la invariancia CP supone indirectamente la violación de la invariancia T: en efecto, ambos efectos deben compensarse para salvar la invariancia CPT global. Pero la violación de T también se ha comprobado directamente en el CERN y en Fermilab estudiando las desintegraciones de kaones neutros. Este resultado refleja que la transformación de materia en antimateria es asimétrica en el tiempo con respecto al proceso inverso, lo

que también podría explicar por qué el universo está hecho fundamentalmente de materia.

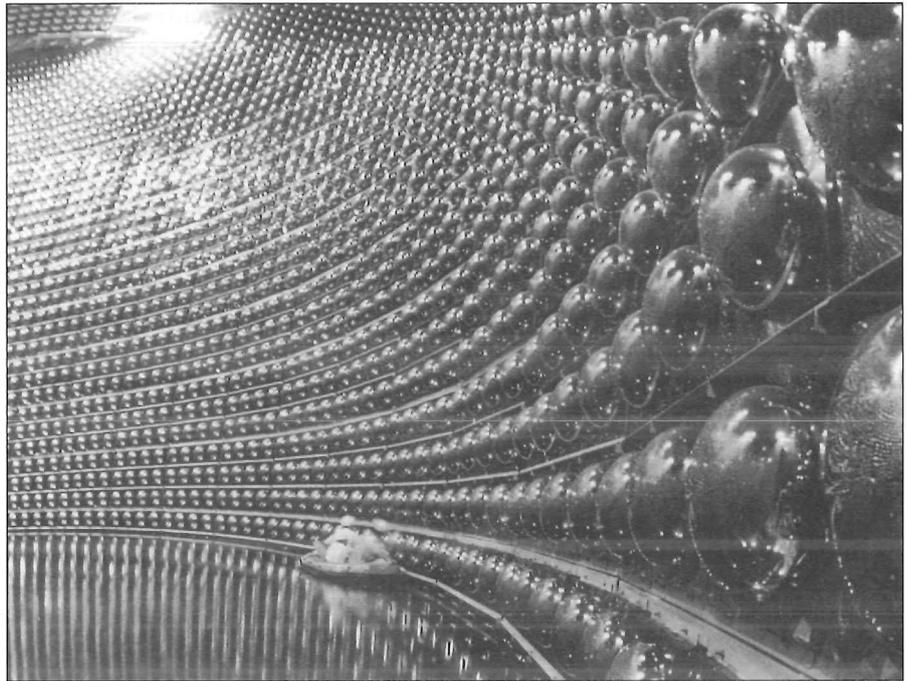
- La electrodinámica cuántica y la versión más simple de la teoría electro-débil suponen que el fotón no tiene masa. Algunas consecuencias de esta ausencia de masa son que las ondas electromagnéticas deben ser puramente transversales, todos los fotones deben tener la misma velocidad  $c$  independientemente de su frecuencia o que la radiación dipolar varía como  $1/r^2$ . Sin embargo, todo lo que los experimentos pueden demostrar es que hay un límite superior muy pequeño para la masa del fotón. Hasta ahora, la medida del alcance de la interacción electromagnética y la velocidad de fotones de diferente frecuencia daban una cota superior de  $10^{-46}$  g para la masa del fotón (del orden de una trillonésima parte de la masa del elec-

trón). Un experimento reciente, tomando como referencia el potencial magnético de la Galaxia, ha rebajado esta cota en al menos 2 órdenes de magnitud.

- Si generalmente se acepta que la masa del fotón es nula, no ocurre lo mismo con la masa del neutrino. Un valor no nulo de dicha masa podría explicar muchos problemas cosmológicos. Hasta ahora la búsqueda se basaba fundamentalmente en las leyes de conservación en reacciones de doble desintegración beta, y los resultados resultaban algo contradictorios. Ahora, el observatorio de neutrinos *Super Kamiokanda*, en Japón, ha encontrado un nuevo tipo de evidencia a partir del estudio de los neutrinos en chaparrones producidos por rayos cósmicos en la atmósfera terrestre. Según la teoría, la proporción entre neutrinos muónicos y electrónicos en estos chaparrones debe ser de 2 a 1. Sin embargo, los experimentos detectan una proporción menor. La explicación más probable es que los neutrones muónicos se han transformado en neutrinos tauónicos, que no son detectables. Para que se produzca esta transformación, u oscilación, es necesario que los neutrinos tengan masa. El ritmo de oscilación depende del cuadrado de la diferencia de masa entre ambos tipos de neutrinos, y los experimentos parecen dar un valor de 0.05 eV para esta diferencia de masa. Esto no dice nada sobre las masas absolutas de los neutrinos, aunque implica, evidentemente, que un tipo de neutrino tiene al menos una masa de este valor. Aunque fuera un resultado importante, un valor tan pequeño no bastaría para explicar la masa perdida del universo u otros problemas cosmológicos fundamentales aunque, por supuesto, no está descartado que las masas absolutas sean bastante mayores.

## FÍSICA ATÓMICA Y NUCLEAR

- En 1970 se observó por primera vez la emisión de protones por



*Dispositivo experimental en el Observatorio de neutrinos Super Kamiokanda (Japón) para la detección de diferentes sabores de neutrinos.*

núcleos. Ese fenómeno ya había sido predicho y todos los experimentos se explicaban perfectamente a partir de modelos de efecto túnel en barreras de potencial esféricas. Sin embargo, en 1998 se ha detectado por primera vez la emisión de protones por núcleos de europio-131 y holmio-141 que no encajan en este modelo e implican núcleos altamente deformados. Esto va a permitir un mejor estudio de los modelos nucleares.

- Los núcleos altamente deformados eran bien conocidos. Estos núcleos suelen crearse en niveles rotacionales muy elevados. Luego se desexcitan emitiendo una cascada regular de rayos  $\gamma$  que pone de manifiesto su paso por niveles rotacionales cada vez más bajos. Este tipo de emisión parecía descartado para un núcleo totalmente esférico pues en este caso no hay ningún eje privilegiado de rotación y el núcleo está globalmente en reposo. Sin embargo, se han detectado cascadas de emisión regular de rayos  $\gamma$  en núcleos esféricos. La explicación propuesta es que algunos pocos nucleones describen órbitas en el interior del núcleo esférico, mientras que el resto de los nucleones (la mayor parte del total) están en repo-

so. Si hay algunos protones y algunos neutrones girando en sentidos opuestos, el momento angular total sería prácticamente nulo aunque habría una dirección privilegiada. También podrían dar lugar a un momento magnético apreciable. La desexcitación de estos nucleones rotatorios daría lugar a la emisión.

- Por primera vez se ha observado triple fotoionización simultánea en un átomo de litio. La triple fotoionización ya se había observado en neon pero en este caso implicaba procesos secundarios tales como efecto Auger (es decir, los electrones no eran expulsados simultáneamente por el fotón sino que uno de los electrones expulsados expulsaba, a su vez, a otro). La sección eficaz medida experimentalmente para este proceso triple en el litio es tan sólo de un 0.0066% de la sección eficaz de ionización simple, pero aún así es cuatro veces mayor que la que sugieren los modelos teóricos más simples.

## FÍSICA CUÁNTICA

- Durante este año se han realizado varios experimentos de teleportación cuántica. Esto no consiste evi-

dentemente en transportar objetos a distancia sino en reconstruir el estado cuántico de un sistema en un lugar distante. La idea básica parte de un par de fotones producidos en un experimento tipo EPR. El emisor hace una medida conjunta de uno de estos fotones con el sistema cuyo estado se quiere teleportar. Como resultado de esta medida, el estado se transfiere instantáneamente (vía no localidad) al segundo fotón, salvo una transformación local que debe ser realizada por el receptor. Para saber qué transformación debe hacer, y reconstruir así el estado deseado, el receptor tiene que saber qué resultado obtuvo el emisor en su medida. Este resultado le es comunicado por vía clásica, de modo que en ningún caso se viola la relatividad especial.

Mediante ciertas variantes de este esquema fundamental, equipos en Roma y en Innsbruck han conseguido teleportar el estado de una partícula de espín  $1/2$ . Posteriormente, un equipo de Caltech consiguió teleportar el estado cuántico de un campo.

- También se han realizado experimentos para la implementación de un computador cuántico primitivo. Las memorias de un computador clásico están constituidas por sistemas de dos estados. Sin embargo, en un computador cuántico los sistemas pueden estar en estados superpuestos y realizar así cálculos simultáneos. Utilizando un sistema de espines de átomos de hidrógeno y de carbono-13 en moléculas de cloroformo disueltas en acetona, que se pueden manipular mediante resonancia magnética nuclear, un equipo de Berkeley y Stanford ha conseguido implementar un algoritmo cuántico. El problema que resuelve este algoritmo es muy simple pero lo importante es que permite realizar en un solo paso lo que en un algoritmo clásico necesita una media de 2.25 pasos.

- Casi todos los libros de mecánica cuántica mencionan un experimento de interferencia en una doble rendija. Cuando por algún medio se trata de determinar por qué rendija

han pasado realmente las partículas, la figura de interferencia desaparece. Esto se interpreta normalmente como una manifestación de la relación de incertidumbre posición-momento, pues la medida de la posición deja el momento indeterminado. Ahora se ha llevado a cabo una versión mucho más sutil del experimento. Un haz de átomos de rubidio es separado en dos haces y más tarde en cuatro por medio de dos "rejillas" sucesivas constituidas por ondas electromagnéticas estacionarias. Estos haces de átomos son coherentes e interfieren. Sin embargo, se pueden ajustar las ondas de modo que uno de los átomos de cada haz estén en estados cuánticos internos ligeramente diferentes, y saber así qué camino ha seguido cada átomo. Al hacer esto, la figura de interferencia desaparece.

### FÍSICA DE BAJAS TEMPERATURAS

- En 1995 se obtuvo por primera vez un condensado de Bose-Einstein (BEC) de átomos de rubidio. Para conseguir un condensado de Bose-Einstein es necesario frenar los átomos lo suficiente como para que su longitud de onda de de Broglie sea comparable a la distancia interatómica y las funciones de onda puedan solaparse. La longitud de onda es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa del átomo y la temperatura. Por ello, parecía que el candidato natural para un BEC era una colección de átomos de hidrógeno con polarización de espín (si los átomos no estuvieran polarizados se unirían en moléculas de  $H_2$ ). El problema es que no existen láseres apropiados para frenar los átomos de hidrógeno antes de que puedan quedar atrapados en una trampa magnética. Por ello se utiliza el enfriamiento por evaporación: los átomos más energéticos escapan de la trampa y así se reduce la temperatura de los átomos que quedan. De este modo, por debajo de  $40 \mu K$

se ha obtenido un condensado de unos  $10^8$  átomos. Esto abre la posibilidad de crear intensos haces de átomos coherentes que podrían ser utilizados en interferometría de átomos.

- La producción de haces de átomos coherentes recibe el nombre un tanto inapropiado de láser atómico. El nombre es inapropiado porque ahora no se trata de producir emisión de luz coherente (la L de láser). Sin embargo, un láser atómico si requiere un mecanismo de ganancia similar a la emisión estimulada, que está basada en el carácter bosónico de los fotones. También este año se ha comprobado la característica bosónica de estos BEC en un condensado de átomos de sodio. Esto significa que el ritmo de agregación de átomos al condensado aumenta con el número de átomos que ya se han condensado. De hecho, los experimentos registran incluso un ritmo mayor del esperado.

¿Podrían obtenerse también condensados de Bose-Einstein con moléculas? Las moléculas tampoco pueden frenarse mediante láseres debido a que su estructura interna permite transferencias de energía intramoleculares. Por ello, las moléculas se frenan mediante colisiones con moléculas de helio a baja temperatura y luego la temperatura se reduce aún más por evaporación del helio. Así se ha conseguido atrapar por primera vez moléculas de hidruro de calcio en una trampa magnética durante 2 segundos, aunque todavía se esté lejos de conseguir un BEC. Otra posibilidad abierta es la de trabajar con moléculas que obedezcan a la estadística de Fermi-Dirac, con lo que podría llegar a obtenerse por primera vez un gas de Fermi degenerado.

- Un ejemplo imperfecto de condensación de Bose-Einstein es el estado superfluido del  $He^4$ . Sin embargo, hasta ahora no se había podido demostrar experimentalmente. Para ello habría que ver que el momento de todos los átomos en la superficie de una capa superfluida era nulo, y la dispersión de neutrones no tenía la resolución sufi-

ciente. La técnica utilizada ahora consiste en generar fonones en el volumen del fluido y dirigirlos contra los átomos de la superficie, que salen despedidos. La medida del momento de estos átomos expulsados permite afirmar que los átomos tenían momento nulo antes de abandonar la superficie.

- La manifestación fundamental de la superfluidez es la facilidad del superfluido para fluir en un capilar. Sin embargo, también las impurezas en el superfluido se pueden mover libremente. Así, investigadores de Erlangen han observado que moléculas atrapadas en gotas de helio superfluido rotan libremente y sin rozamiento como si estuvieran en el vacío. La única diferencia es que su momento de inercia parece mayor ya que en su rotación arrastran a algunos átomos del fluido. Lo más notable es que basta con que las gotas de superfluido tengan unos 60 átomos de helio para que se produzca este comportamiento.

## FÍSICA DE MATERIALES

- La extraordinaria resolución espacial, que llega a escala atómica, del microscopio de efecto túnel lo convierten en una sonda inmejorable para estudiar estructuras en superficie. Sin embargo, la relativamente lenta respuesta temporal de la STM no hace posible el estudio de procesos dinámicos en la superficie. Ahora, la combinación de varias técnicas ha permitido alcanzar simultáneamente resoluciones espaciales de 20 nm y temporales de 20 ps.

Otra forma de estudiar procesos dinámicos en superficie es reducir la temperatura lo suficiente para que el proceso sea muy lento. De este modo, se ha podido seguir mediante STM el proceso de oxidación del CO en una superficie de platino. A partir de una secuencia de "fotografías" se puede determinar exactamente la influencia de los mecanismos físicos a escala atómica en la cinética de la reacción.

- En STM se mide la corriente eléctrica que circula entre la superficie y la punta, que decrece exponencialmente con la distancia entre ambas. Otro instrumento básico para el estudio de estructuras superficiales es el microscopio de fuerzas atómicas (AFM), en el que la punta que explora la superficie está unida a un fleje minúsculo (cantilever). Normalmente se arrastra la punta sobre la superficie y la medida de la deflexión del fleje proporciona el relieve superficial. Esto limita la rigidez de los flejes y no permite medir la variación de la fuerza con la distancia. Ahora, una combinación de STM y AFM en alto vacío ha permitido medir exactamente la fuerza entre un sustrato de oro y una punta constituida por tres átomos de tungsteno. Medidas de este tipo son fundamentales para el estudio de la fricción o la adsorción superficial.

- La punta de un AFM puede utilizarse para mover y ordenar átomos adsorbidos en una superficie. Ahora se ha utilizado un AFM en combinación con un láser para "soldar" moléculas de ADN previamente escogidas a una punta de silicio y transportarlas a voluntad sin alterar su función bioquímica. Esta técnica permitirá estudiar la interacción del ADN con cualquier otro tipo de molécula orgánica.

- Los nanotubos de carbono siguen siendo la estrella de la física de materiales. Este año se ha medido la resistencia compresiva de nanotubos de paredes gruesas que llega a superar los 100 GPa, frente a los 0.5 GPa de las fibras más resistentes conocidas hasta ahora.

Así mismo se ha comprobado que los nanotubos pueden ser metálicos o semiconductores dependiendo del diámetro del tubo y de la helicidad o paso de rosca del arrollamiento.

También se han dado pasos hacia sus aplicaciones prácticas. Por ejemplo, los nanotubos son emisores intensos de electrones, por lo que una matriz de nanotubos podría utilizarse para fabricar pantallas extraplanas y de bajo consumo. De hecho, se ha construido un prototipo

de  $32 \times 32$  pixels que ha estado emitiendo luz de forma estacionaria durante 12 horas con un voltaje de 230 V.

Por otra parte, se ha construido un transistor minúsculo, a escala molecular, constituido por un nanotubo que forma un puente entre dos electrodos de platino situados sobre una superficie de silicio. Un campo eléctrico aplicado al silicio controla la dirección de la corriente a través del nanotubo.

Otra aplicación con grandes posibilidades es en la litografía. Con un nanotubo de carbono se puede escribir literalmente sobre una superficie de silicio. En realidad, el campo eléctrico que sale de la punta del nanotubo elimina una capa de hidrógeno absorbida en el silicio. El silicio se oxida entonces y se forma un surco de  $\text{SiO}_2$  de 10 nm de anchura.

- Se ha encontrado una nueva forma de fullereno  $\text{C}_{36}$  que ya había sido predicha teóricamente. En esta nueva forma los átomos se mantienen unidos por enlaces covalentes, y no por fuerzas de van der Waals como sucede en el  $\text{C}_{60}$ . Puesto que, además, las bolas de este fullereno tienen una curvatura mayor que la del  $\text{C}_{60}$ , se espera que presenten un mayor acoplamiento electrón-fonón y sean superconductores a temperaturas relativamente altas.

- La superconductividad a alta  $T_c$  sigue llevando de cabeza a los teóricos e incluso está siendo fuente de agrias disputas. Desde el punto de vista experimental se ha puesto de manifiesto que la formación de franjas alternadas parece ser una característica de muchos de estos superconductores. Por ejemplo, se ha descubierto que en el estado metálico normal, los cupratos se estratifican en franjas en donde los portadores de carga son alternativamente electrones libres y polarones (electrones acompañados de una fuerte deformación de la red). En otros casos aparecen franjas donde los electrones presentan distintas propiedades de espín. Todavía no está claro si esto es una propiedad fundamental de estos superconduc-

tores. Si lo fuera, podría utilizarse para crecer artificialmente estructuras que mejorasen la superconductividad.

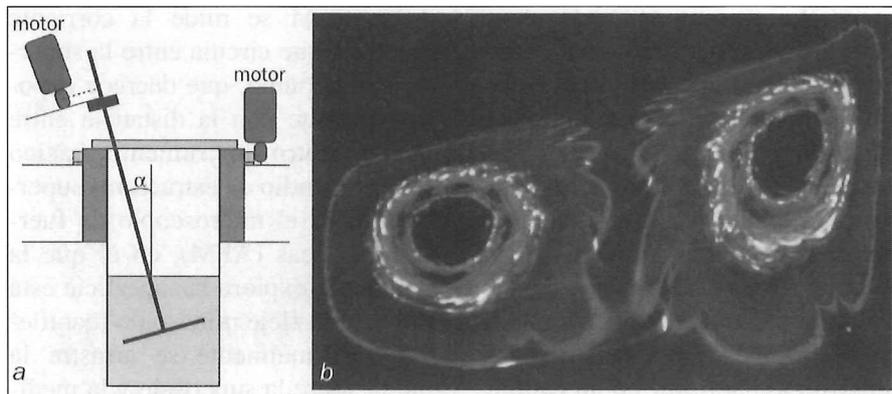
Otra demostración de que las propiedades estructurales afectan a la superconductividad a alta  $T_c$  se ha llevado a cabo depositando un compuesto superconductor en un sustrato cuyo espaciado reticular va cambiando poco a poco. Esto induce tensiones en el material. Como resultado, la temperatura crítica del material estudiado pasa de 25 a 49 K.

Finalmente, otro hecho sorprendente concerniente a la superconductividad (aunque en este caso se trata de la superconductividad normal tipo BCS) es su relación con la fricción. Cuando una placa de plomo que desliza sobre una de nitrógeno sólido se vuelve superconductora, el rozamiento se reduce a la mitad. Es la primera evidencia de que los electrones de conducción contribuyen a la fricción.

## FÍSICA DE FLUIDOS

- La teoría de la turbulencia en dos dimensiones implica la existencia de dos procesos simultáneos: una cascada de transferencia de energía desde los remolinos más pequeños a los más grandes; y una cascada inversa de transferencia de vorticidad desde las escalas grandes a las pequeñas. Ambos procesos han sido ahora observados y medidos con detalle. El flujo turbulento en 2D se produce en una capa fluida de unas pocas micras de espesor atrapada entre dos paredes de jabón de dos moléculas de espesor que está soportada entre dos agujas. Para visualizar el flujo se introducen en el fluido partículas altamente reflectoras y se iluminan con luz visible.

- Cuando removemos una taza para mezclar café con leche lo hacemos para facilitar la mezcla mediante difusión turbulenta. En ausencia de turbulencia, los procesos de difusión son muy lentos. Sin embargo, hay un mecanismo,



a) Dispositivo experimental en el que se muestra el agitador constituido por un disco plano inclinado un ángulo  $\alpha$  con respecto a la superficie libre del fluido. Tanto el agitador como el tanque que contiene al mismo giran, provocando vórtices, que dependen del ángulo  $\alpha$ .  
b) Imagen de los vórtices visualizada inyectando colorantes en el fluido e iluminando con luz láser.

llamado advección caótica, que facilita el mezclado incluso en un flujo estacionario cuasilaminar. Esto se debe a que las ecuaciones del flujo son no lineales y, en determinadas condiciones, las trayectorias de las partículas diluidas pueden tener una forma similar a las trayectorias de un atractor extraño en el espacio de fases. Este fenómeno se ha puesto de manifiesto de una forma sorprendentemente simple: basta crear en un recipiente un flujo circular estacionario con un agitador y diluir un colorante. Iluminando entonces el flujo se observan las trayectorias del tipo mencionado. Una condición necesaria es que el agitador esté inclinado con respecto al eje del fluido para que el flujo sea efectivamente tridimensional.

## ÓPTICA

- Todos los libros introductorios de óptica estudian la transmisión de la luz a través de una abertura circular. Cuando  $r/\lambda \gg 1$  la luz pasa sin problemas; cuando  $r/\lambda \approx 1$  hay difracción y la abertura actúa como una fuente puntual de radiación esférica; y cuando  $r/\lambda \ll 1$  la transmisión de luz se reduce drásticamente. Sin embargo, si se perforan muchos agujeros en una lámina metálica, la transmisión de luz es mucho mayor de lo que cabría esperar. La explicación parece estar en que la luz no se

transmite directamente sino que la energía es transmitida a través de la lámina por plasmones de superficie. Si sólo hubiera una abertura, los plasmones no podrían acoplarse al campo electromagnético incidente pues sus momentos serían ortogonales. Pero la existencia de una estrecha red de aberturas provoca la dispersión de los plasmones y facilita el acoplamiento. No está claro, sin embargo, hasta qué punto la luz transmitida conserva su direccionalidad. Si lo hiciera, este mecanismo podría ser utilizado para obtener una mejor resolución espacial en procesos ópticos tales como microscopía o litografía.

- El uso de interferometría para mejorar la resolución angular en las observaciones astronómicas es bien conocido. Esta técnica alcanza su mayor precisión en la interferometría de muy larga línea de base (VLBI) en la que se hacen interferir las señales recibidas en dos radiotelescopios a grandes distancias. Ahora se ha utilizado un proceso inverso: las señales de dos telescopios ópticos se hacen interferir destructivamente para eliminar la luz procedente de un cierto objeto y hacer visible el entorno de dicho objeto que antes quedaba enmascarado. Se espera que esta técnica facilite la localización de nuevos planetas extrasolares.