

TALLER Y LABORATORIO

Experimento casero:

Experiencias de elaboración y uso de la fotografía digital en la resolución de problemas docentes de física

INTRODUCCIÓN

Las primeras fotografías fueron tomadas por N. Niepce, al parecer en 1826 (Taton *et al.*, 1973) y necesitaron un tiempo de exposición cercano a las ocho horas. Los daguerrotipos ideados hacia 1837 mejoraron el procedimiento. En 1839, ante la insistencia de la comunidad científica representada por Arago, el gobierno francés decidió comprar el invento. Inmediatamente comenzaron las aplicaciones en la ciencia. En 1840 J. W. Draper obtuvo la imagen de la Luna. Becquerel y Draper fotografiaron el espectro de la luz solar en 1842. Foucault y Fizeau grabaron la imagen del Sol en 1845. Pronto aparecieron los negativos sobre vidrio y la invención de mejores objetivos y de placas cada vez más sensibles permitió conseguir instantáneas y secuencias de ellas en el tiempo.

Un sinnúmero de aportaciones claves a la Física tienen de base la utilización de la fotografía: el descubrimiento de la radioactividad (1896), el estudio experimental del *movimiento browniano* (1908-1909), la comprobación de las propiedades ondulatorias de los rayos X (1912), el descubrimiento del positrón (1932), etc. Gracias a la fotografía se han desarrollado la *espectroscopia*, la Astrofísica, la Física de altas energías, las predicciones meteorológicas, la observación de *móviles en medios fluidos* y muy diversos campos de la actividad investigadora.

Desde hace décadas el análisis de fotos se incluye en la resolución de problemas durante el aprendizaje de la Física (PSSC, 1965). Recientemente el empleo de ese medio de enseñanza se ha facilitado con el uso combinado del ordenador y la cámara digital (Valdés *et al.*, 2003). La nueva tecnología introduce algunas ventajas evidentes:

- La rápida obtención de gran cantidad de imágenes que se pueden observar inmediatamente, sin necesidad del revelado, a un coste relativamente bajo.
- Las extraordinarias posibilidades de los ordenadores para retocar las imágenes y hacer diversos montajes con ellas.
- La adquisición y procesamiento automatizado de datos.

En nuestra opinión, el empleo eficaz de la fotografía en el aprendizaje de las ciencias supone atender a los re-

sultados de la investigación e innovación en dos direcciones. Por una parte, observar los aportes recientemente hechos a la tecnología y, sobre esta base, seleccionar medios adecuados (en prestaciones y coste) al desarrollo de la actividad docente. Por otra parte, analizar las concepciones didácticas emergentes y, de este modo, utilizar la nueva tecnología con objetivos y metodologías generales de enseñanza bien definidas y fundamentadas. A continuación haremos algunas consideraciones relativas a las dos líneas de interés mencionadas. Más adelante ilustramos con ejemplos de nuestra experiencia las ideas referidas.

CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS GENERALES Y SOBRE EL EMPLEO DE MEDIOS TÉCNICOS

La fotografía y el vídeo digitales han llegado a la enseñanza cuando se desarrolla y asienta en diversos países un cuerpo de ideas, fundamentadas y coherentes, acerca de la formación científica. Las concepciones didácticas elaboradas enfatizan la necesidad de orientar el aprendizaje mediante el planteamiento y la resolución de situaciones problemáticas y detallan sus principales características (Gil *et al.*, 1999; McDermont, 2003; Valdés *et al.*, 2001). A continuación mencionamos y más adelante tomaremos en cuenta algunas de esas características:

- Desarrollar la enseñanza —aprendizaje en torno al planteamiento de situaciones problemáticas clave. Utilizar enunciados relativamente abiertos, prestando particular atención a las implicaciones que para el conocimiento científico y la tecnología tienen los problemas abordados.
- Encauzar la resolución de las problemáticas clave empleando sistemas de tareas (actividades, preguntas) rigurosamente planificados.
- Organizar las tareas mencionadas en el punto anterior, de manera que favorezcan la adquisición de experiencia creadora; que los alumnos reflexionen sobre el diseño de experimentos, de modelos y algoritmos de cálculo; que precisen logros y limitaciones de sus concepciones previas, de cada actividad que llevan a cabo, indicando perspectivas para ampliar y profundizar en torno a lo aprendido.
- Utilizar las tecnologías informáticas con sus funciones fundamentales en la ciencia (la Física en nuestro caso particular): cálculos numéricos y analíticos, experimentos con modelos, experimentos automatizados, búsqueda de información para la solución de problemas.

En general, la resolución de problemas de Física está ligada a la realización de mediciones y de cálculos. En este sentido el material fotográfico resulta especialmente útil como fuente de información acerca de longitudes, ángulos e intervalos de tiempo. Con el fin de facilitar el procesamiento de datos obtenidos de fotos, conviene contar con un software especialmente preparado para ello. Nosotros hemos confeccionado y utilizamos el programa Análisis de Imágenes. Un sistema similar puede ser elaborado con relativa facilidad empleando, por ejemplo, *Microsoft Visual Estudio 6.0* o posterior.

La figura 1 es una vista de la ventana principal de nuestro programa, mientras se usaba en la realización de una experiencia concreta. Sus controles permiten seleccionar fotogramas de vídeos, medir intervalos de tiempo entre fotogramas, determinar las coordenadas de puntos sobre una imagen e insertar automáticamente en una hoja de *Microsoft Excel* los resultados de las mediciones. El software cuenta con un explorador de páginas web que posibilita a los alumnos acceder al planteamiento de los problemas y hallar artículos que orientan cómo solucionarlos.

Para tomar fotografías y vídeos de unos dos minutos de duración, utilizamos la cámara digital *Sony DSC - P71*. Con esta cámara es posible captar secuencias de 16 fotogramas de objetos en movimiento (modo continuo o de disparos múltiples). La superposición de los fotogramas permite conformar una sola imagen de tipo estroboscópico, sin necesidad de oscurecimiento y de lámparas intermitentes. Semejante proceder es válido mientras sean suficientes las opciones de frecuencia que proporciona el aparato. El procesamiento del material fotográfico y la confección de páginas web lo realizamos con herramientas generales como *Macromedia Dreamweaver MX*, *Flash MX* y los productos de *Adobe*.

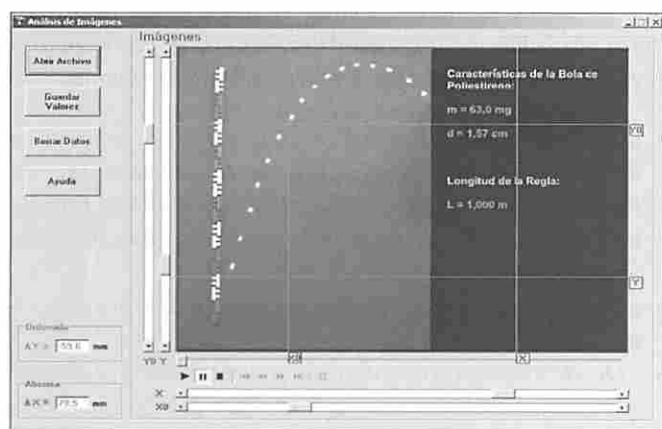


Figura 1. Ventana principal del programa Análisis de Imágenes.

A continuación hacemos algunas consideraciones metodológicas referidas a los aspectos siguientes:

- La eliminación de las trazas de cuerpos en movimiento, plasmadas en los fotogramas.
- La determinación de las escalas de las imágenes.
- La visualización de objetos necesarios en las mediciones, cuando las fotografías son hechas en la oscuridad.

Al hacer la foto estroboscópica de un cuerpo en movimiento suelen aparecer los fantasmas del móvil en la secuencia de fotogramas. Con la finalidad de eliminar esas trazas no deseadas utilizamos un software como *Photoshop* y reconstruimos las imágenes prescindiendo de la información accidental. En nuestras experiencias ha sido adecuado conservar aquellas siluetas del cuerpo correspondientes a la mitad del camino recorrido en cada lapso de exposición. Semejante proceder permite realizar mediciones si durante el tiempo de exposición es válida la aproximación de movimiento uniforme.

La determinación de la escala de las imágenes es el primer acto del procesamiento de los datos de distancia en las mediciones. En cada foto o vídeo incluimos un objeto de dimensiones conocidas con suficiente precisión (por ejemplo, una regla), que se utiliza en calidad de patrón. Si en realidad dicho objeto tiene 1m de longitud y su imagen ocupa 100 mm en la ventana de visualización del software para las mediciones, la escala es 0,01 m/mm. Multiplicando por esta cantidad las coordenadas de los puntos seleccionados de la fotografía, calculamos las distancias reales entre los objetos plasmados en la imagen.

Cuando se trata de imágenes obtenidas en la oscuridad hay que prever montajes fotográficos que, sin alterar el contenido del fenómeno estudiado, permitan visualizar objetos necesarios en las mediciones (por ejemplo, la regla patrón a que nos referimos). En este caso, con el software apropiado se controlan la opacidad, el brillo y el contraste de capas superpuestas sobre la imagen de fondo. De este modo también es posible incorporar texto relevante a las fotos.

A continuación presentamos ejemplos de problemas docentes que solucionamos con ayuda de la fotografía y el vídeo digitales, atendiendo a las consideraciones didácticas hechas.

PROBLEMAS SOLUCIONADOS CON AYUDA DE LA FOTOGRAFÍA DIGITAL

En este apartado analizamos el uso de la cámara digital en dos situaciones: la realización de una secuencia de disparos fotográficos a intervalos de tiempo seleccionados (fotografía estroboscópica) y la obtención de imágenes en la oscuridad.

Con la finalidad de ejercitar a los alumnos en el cálculo de las escalas de las fotografías y de aplicar conocimientos básicos de cinemática se puede abordar la problemática siguiente:

La disminución del tiempo de exposición fotográfica está relacionada con el mejoramiento de la sensibilidad de los sensores de luz utilizados y con la posibilidad de obtener imágenes de objetos cada vez más veloces. Intenta describir un procedimiento experimental para estimar el tiempo de exposición de una cámara de fotos.

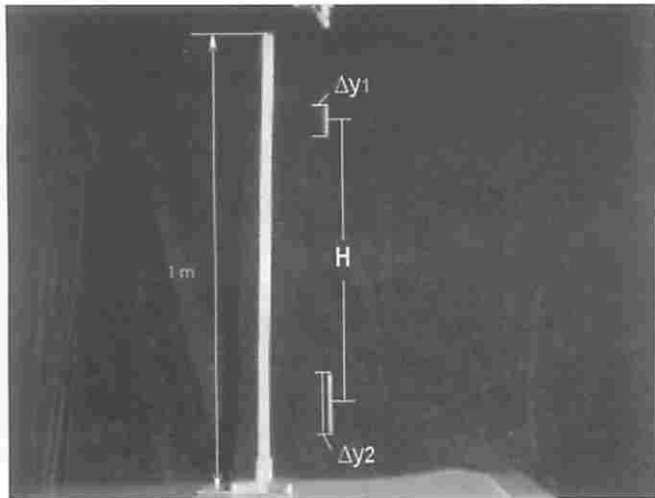


Figura 2. Composición de dos fotogramas de la caída de una esfera.

La situación anterior propone reflexionar en torno al diseño de un experimento. Una solución de la problemática abierta planteada es fotografiar la caída de una pequeña esfera de acero. La figura 2 es el resultado de haber hecho dos tomas fotográficas sucesivas. En ella se observan los rastros de longitud Δy_1 y Δy_2 debidos al tiempo de exposición y también la regla utilizada para determinar la escala de la imagen.

La longitud de las trazas grabadas se encuentra en relación directa con la velocidad media alcanzada por el móvil. Las distancias Δy_1 y Δy_2 se relacionan con el lapso de exposición según la expresión siguiente:

$$\Delta t_{\text{exp}} = \frac{\Delta y_1}{v_1} = \frac{\Delta y_2}{v_2},$$

donde v_1 y v_2 son velocidades medias.

Para describir la caída de la esfera adoptamos el modelo de movimiento uniformemente acelerado. En tal caso las velocidades medias v_1 y v_2 son numéricamente iguales a las velocidades instantáneas del móvil en la mitad de cada intervalo de exposición Δt_{exp} considerado. Pero si la duración Δt_{exp} es suficientemente pequeña, estamos en condiciones de utilizar la aproximación de movimiento uniforme en ese lapso. Entonces los valores medios v_1 y v_2 , se podrán suponer iguales a la velocidad instantánea en la mitad de los segmentos de longitud Δy_1 y Δy_2 . De este modo se obtiene:

$$\Delta t_{\text{exp}} = \frac{\Delta y_1}{v_1} = \frac{\Delta y_2}{v_2}, \quad (1)$$

Con la foto de la figura 2 estimamos $\Delta t_{\text{exp}} = 0,033$ s.

Al utilizar la cámara Sony DSC-P71 no es posible decidir el intervalo de exposición, pero sí el tiempo que media entre los fotogramas. Ello brinda la posibilidad de comprobar la validez de las suposiciones anteriormente hechas. En efecto, usando la misma imagen de la figura 2, podemos hallar el lapso Δt entre los dos disparos estroboscópicos y luego compararlo con el valor seleccionado a través del menú de la cámara.

Si a partir del tiempo Δt_{exp} estimado y de las distancias Δy_1 y Δy_2 medidas en la foto calculamos v_1 y v_2 , obtenemos el lapso entre las dos tomas fotográficas:

$$\Delta t = \frac{v_2 - v_1}{g} \quad (2)$$

El valor hallado por esta vía ($\Delta t = 0,21$ s) concuerda con lo programado en la cámara al hacer la foto. La figura 2 se ha compuesto mediante una secuencia de 16 disparos estroboscópicos realizados a $1/30$ s. Para hacer el montaje fueron superpuestos dos fotogramas separados $6/30$ s en el tiempo. Es decir, previmos $\Delta t = 0,20$ s.

Estudio de la fuerza de arrastre. Con esta temática se relacionan fenómenos cotidianos: el movimiento de bicicletas, coches, barcos y aviones, la puesta de naves espaciales en órbita, la estabilidad de edificaciones como los puentes, etc. Su análisis permite mejorar el modelo de movimiento de proyectiles, tradicionalmente incluido al inicio de los cursos de Física, que no toma en cuenta la resistencia del aire.

Para favorecer el estudio de la fuerza de arrastre se puede plantear el siguiente problema:

Es posible realizar la fotografía estroboscópica de una pelota de ping pong en caída vertical y establecer si la influencia del aire es decisiva en el movimiento. Para ello se cuenta con una cámara digital que realiza automáticamente una secuencia de 16 tomas, entre cada una de las cuales median 0,04 s. Los experimentadores procederán del modo siguiente: uno deja caer la esfera desde cierta altura y al unísono emite una señal para que algún compañero oprima el interruptor de la cámara. Al final se comparan las posiciones de la pelota registradas en la foto y las teóricamente predichas.

- ¿Qué dependencia de la fuerza de arrastre respecto a la velocidad supondrías al plantear las ecuaciones de movimiento de la pelota: de proporcionalidad directa a la velocidad o de proporcionalidad al cuadrado de la misma?
- ¿Con qué ecuación diferencial de movimiento describir la caída de la esfera?
- ¿Desde qué altura soltar la pelota para garantizar que su movimiento sea captado por las 16 tomas estroboscópicas?
- ¿Qué predicciones hacer sobre la velocidad y la posición de la bola?
- ¿Cómo verificarías los modelos con que describes la caída de la pelota?

La situación problemática planteada contiene una secuencia de cuestiones que contribuyen a orientar el estudio de la fuerza de resistencia del aire. Cálculos sencillos permiten decidir que, para describir la caída de la pelota, se debe considerar la fuerza de arrastre proporcional al

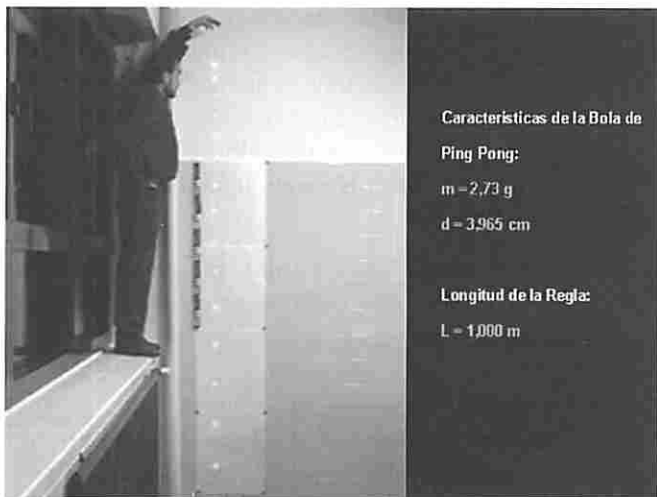


Figura 3. Caída de una pelota de ping pong en el aire.

cuadrado de la velocidad. De conformidad con esta idea planteamos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - g_E + \frac{b}{m}v^2 = 0 \quad (3)$$

donde v es la velocidad, t el tiempo;

$$g_E = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right),$$

ρ_0 es la densidad de la bola y ρ la densidad del medio.

El coeficiente $b = \frac{\rho}{2}CS$, S es el área de la sección transversal de la esfera y $C = 0,45$ es el llamado coeficiente de resistencia frontal, el cual depende de la forma del móvil y del número de Reynolds.

Para responder las cuestiones enunciadas, los alumnos pueden auxiliarse de un software como *Mathematica* de *Wolfram Research* y de un tabulador electrónico como *Microsoft Excel*. Utilizando los datos del enunciado y las características de la pelota, se obtienen los siguientes resultados:

- La pelota de ping pong, dadas su masa y diámetro, debe soltarse desde unos 3 m de altura.
- La velocidad límite de la bola se estima en 9,8 m/s. Al cabo de aproximadamente 0,8 s de movimiento, la pelota alcanzará alrededor de 6,5 m/s y habrá recorrido unos 2,85 m.

La figura 4 permite contrastar los modelos teóricos de movimiento y el fenómeno real. En ella aparecen los puntos experimentales, inferidos de la foto, representativos de la posición de la pelota en función del tiempo. También están incluidas la gráfica de la solución numérica de la ecuación (3) y la que habría de obtenerse en caso de que la resistencia del aire fuera nula. Obsérvese que con el incremento del tiempo el modelo de caída libre se aleja cada vez más de los resultados de las mediciones, mientras la solución de la ecuación resulta totalmente adecuada.

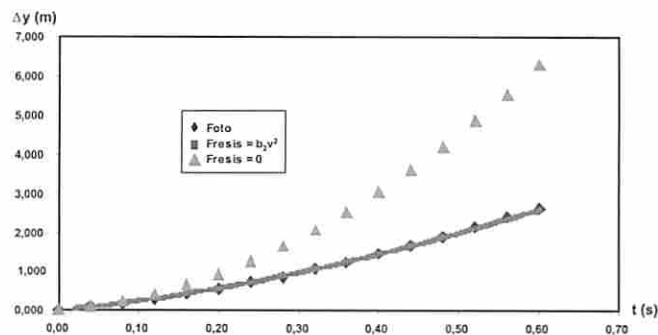


Figura 4. Distancias recorridas en función del tiempo.

Al concluir el estudio de los conceptos básicos relativos al movimiento de cuerpos sumergidos en fluidos, se propone a los alumnos realizar una serie de actividades dirigidas a profundizar, ampliar y consolidar los conocimientos sobre el tema. Entre dichas actividades puede ser útil incluir el cálculo numérico de la trayectoria de una esfera en el aire, lanzada con un ángulo respecto a la horizontal. Un complemento apropiado de este trabajo consiste en comparar la solución de las ecuaciones diferenciales de movimiento y los datos que sobre éste se obtienen con una foto estroboscópica. Para el caso dado las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -CS \frac{\rho}{2m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g_E - CS \frac{\rho}{2m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (5)$$

donde x , y , v_x y v_y son las coordenadas y las componentes de velocidad de la esfera y t es el tiempo.

En la figura 1 está grabada una secuencia de posiciones de una pelotita de poliestireno a intervalos de 0,04 s. La figura 5 permite realizar la comparación mencionada. Atendiendo a las incertidumbres de las condiciones iniciales del movimiento (inferidas de la fotografía), con el sistema de ecuaciones (4 y 5) se pronosticaron una trayectoria media, la de máximo y la de mínimo alcance. Las posiciones de la pelotita medidas con ayuda de la foto son indicadas por triángulos y, como puede apreciarse, se encuentran dentro de lo previsto por la teoría.

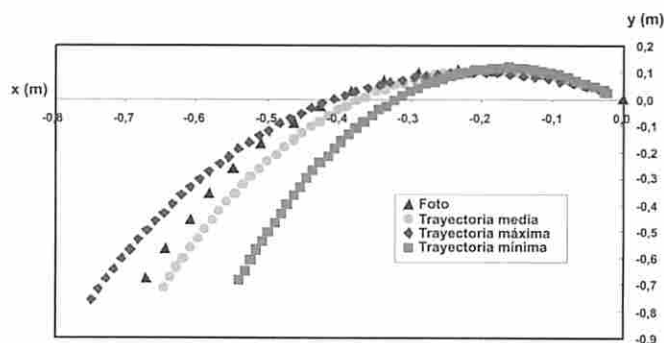


Figura 5. Trayectoria de un proyectil con lanzamiento oblicuo en el aire.

Medición de la longitud de onda de líneas espectrales. El análisis espectral tiene particular interés en la investigación astrofísica y el análisis químico, ha estado en la base del surgimiento de las ideas cuánticas y, desde hace años, es un tópico tradicional de los cursos de Física.

En calidad de espectrógrafo (figura 6) se puede utilizar el montaje siguiente. Sobre un banco óptico se fija una varilla que sostiene la regla patrón **R**. A la distancia de aproximadamente 1,40 m es colocada una red de difracción **d**, con aproximadamente 600 líneas por milímetro y previamente calibrada. Justo detrás de la red, rozándola con su objetivo, se ubica la cámara fotográfica **CF**. Entre la regla y la red se sitúa la lámpara espectral **L**, a más de un metro de distancia de la segunda. Empleando una instalación semejante se obtienen imágenes que permiten calcular, con un error del orden o inferior al 1%, la longitud de onda de las líneas espectrales visibles de átomos como los de hidrógeno, helio, mercurio y cadmio. La figura 7 corresponde al espectro visible del hidrógeno.

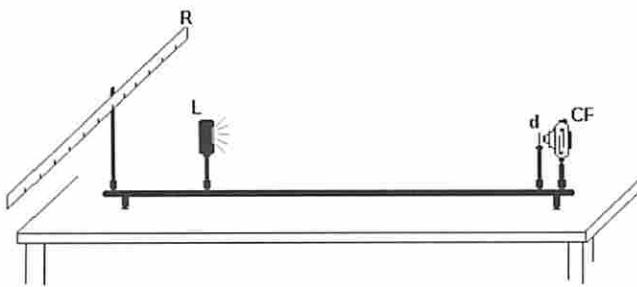


Figura 6. Espectrógrafo.

Utilizando lámparas habituales en los laboratorios docentes de Física, hemos obtenido las fotografías de espectros de diferentes elementos.

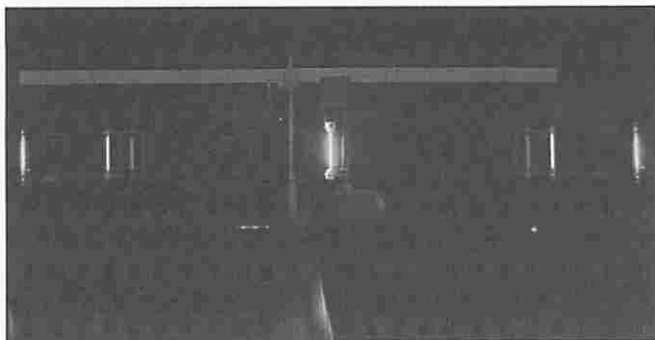


Figura 7. Montaje fotográfico con las líneas espectrales del hidrógeno.

En relación con este tema, y utilizando las fotos realizadas, los estudiantes pueden abordar problemáticas como las siguientes:

- ¿Cómo medir la cantidad de líneas por milímetro que tiene una red de difracción?
- ¿Qué procedimiento seguir para hallar la longitud de onda de las líneas espectrales grabadas por la cámara digital?

Comprender a fondo la solución de estos interrogantes es una tarea compleja para los alumnos que se inician en la Física. Por eso conviene organizar una secuencia de actividades que orienten la atención de los estudiantes hacia elementos clave de la metodología de medición (Yuste y Carreras, 1988). He aquí alguna de esas actividades:

1. *La cámara fotográfica es un componente esencial de la instalación utilizada para medir la longitud de onda de las líneas espectrales.*
 - Describe mediante un esquema cómo se forman en la cámara la imagen del espectro y de la regla patrón.
 - ¿La lámpara y la regla deben estar ubicadas sobre el mismo plano perpendicular al eje del banco óptico?
2. *En el espectrógrafo descrito la red de difracción se coloca aproximadamente a 1 m de la lámpara. La medición de las longitudes de onda se realiza utilizando la aproximación de Fraunhofer. ¿Con qué error puedes suponer paralelos los rayos de luz procedentes de la lámpara y que llegan a la red?*

Los estudiantes preparan la respuesta a las problemáticas y tareas enunciadas basándose en libros o en escritos confeccionados al efecto y a los que acceden utilizando el explorador del programa Análisis de Imágenes.

PROBLEMAS RESUELTOS CON EL EMPLEO DEL VÍDEO DIGITAL

El vídeo es especialmente útil si, al realizar las mediciones, un mismo objeto debe ser examinado en gran cantidad de situaciones durante un tiempo prolongado. Nosotros lo hemos empleado para determinar la posición de cuerpos y apreciar intervalos de tiempo de $1/30 - 1/25$ s o superiores. Resulta muy adecuado cuando en los fotogramas no es apreciable la traza del objeto debida al lapso de exposición. Tal es el caso, por ejemplo, de las posiciones extremas de un péndulo que oscila o del movimiento de partículas brownianas.

Dependencia del período respecto a la amplitud de las oscilaciones de un péndulo

En diversos momentos de los cursos básicos de Física suelen ser consideradas las oscilaciones *pequeñas* de un péndulo matemático. Para describirlas se construye un modelo teórico que, con la ventaja de estar representado por ecuaciones de movimiento de fácil solución, sólo tiene sentido para analizar una cantidad muy limitada de situaciones.

La confección de un modelo más completo podría consistir en el examen de las oscilaciones del péndulo físico, sin imponer la condición de pequeñas amplitudes. Los resultados de semejante estudio tienen valor didáctico general. Por una parte, permiten precisar el significado del término *pequeñez*, utilizado en análisis precedentes. Para ello, sobre la base de la aproximación más general elaborada, se valora el error que en el cálculo del período introduce usar el modelo de oscilaciones pequeñas del péndulo simple. Así se presta atención a las incertidumbres que en los cálculos y mediciones introducen los modelos teóricos adoptados. Por otra parte, el análisis de las ecuaciones generales que describen el movimiento del péndulo físico, posibilita familiarizar a los alumnos con el uso de ordenadores en la realización de cálculos analíticos y numéricos, de los que está cada vez menos alejada la enseñanza de la Física en los primeros cursos universitarios.

Como punto de partida para analizar la dependencia del período respecto a la amplitud de las oscilaciones de un péndulo físico, y revelando la importancia cognoscitiva del asunto, se pueden plantear las problemáticas y tareas siguientes:

1. *Auxiliándote de un software experto en cálculos analíticos, detalla cómo están relacionados la amplitud y el período de las oscilaciones de un péndulo físico:*

- *Suponiendo la conservación de la energía mecánica, precisa la dependencia de la velocidad angular respecto a la amplitud de las oscilaciones. Simplifica la expresión obtenida utilizando el concepto de longitud reducida.*
- *Expresa a través de una integral el período de las oscilaciones del péndulo. ¿Tiene esa integral solución exacta expresada con funciones elementales?*
- *Descompón en serie el integrando de la fórmula obtenida al solucionar la tarea anterior.*
- *Determina la fórmula aproximada que define la dependencia del período respecto a la amplitud de las oscilaciones del péndulo.*

2. *Comprueba que la expresión matemática obtenida al calcular el período de las oscilaciones es adecuada para la descripción de procesos reales. Con este fin utiliza el vídeo Oscilaciones de un Péndulo visto mediante el software Análisis de Imágenes. Al planificar cómo harás las mediciones toma en cuenta los interrogantes siguientes:*

- *¿Cuántas oscilaciones utilizarás para calcular el período correspondiente a una determinada amplitud?*
- *¿Cómo calcularás el seno de la amplitud seleccionada y la incertidumbre correspondiente?*
- *¿Cómo representar en un gráfico las dependencias teórica y experimental del período de las oscilaciones respecto a la amplitud?*

Esbozemos la solución de las tareas anteriores. De conformidad con la conservación de la energía mecánica, para un péndulo de momento de inercia I tenemos:

$$\frac{I}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = mga(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \quad (6)$$

donde φ y φ_0 son el desplazamiento y la amplitud angulares de las oscilaciones. A partir de la expresión anterior se halla la dependencia de la velocidad respecto a la amplitud φ_0 .

Transformando la relación (6), para el período T obtenemos:

$$T = 4 \sqrt{\frac{I}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \quad (7)$$

donde l es la longitud reducida del péndulo, $k = \sin(\varphi_0/2)$ y $u = \sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2)$.

Utilizando un software como *Mathematica*, los alumnos pueden enfrentar la tarea de hallar la solución analítica aproximada de la integral precedente y así obtener la relación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} \dots \right] \quad (8)$$

Para contrastar con la realidad el modelo teórico presentado por la fórmula (8), empleamos un vídeo de las oscilaciones de un péndulo simple y lo examinamos con el programa Análisis de Imágenes. La longitud del péndulo utilizado era de 0,45 m, la amplitud de las oscilaciones observadas variaba en el intervalo $[72^\circ, 30^\circ]$. Las incertidumbres de las mediciones realizadas fueron aceptables dentro de las exigencias de un experimento docente.

En el caso de las mediciones de tiempo, puesto que el vídeo transcurre a 25 fotogramas por segundo, el error absoluto se estima igual a 0,04s. De este modo, considerando la longitud del péndulo utilizado, el error relativo en la medición del período se estima inferior al 3%.

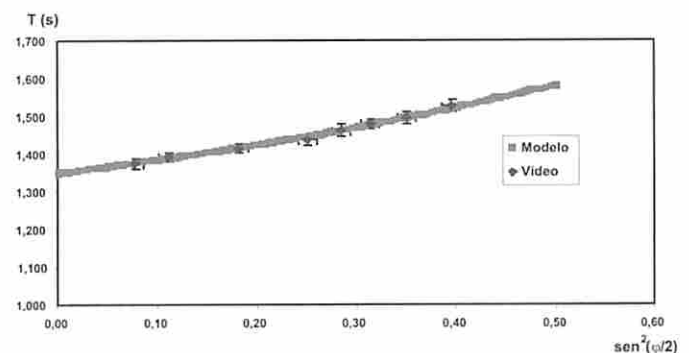


Figura 8. Período T respecto a $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$.

La cota superior de incertidumbre en la determinación de las coordenadas del péndulo la estimamos en 0,01 m y no superaba el 5% de error. En el cálculo del $\text{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}$ ello representaba un error absoluto en torno a 0,01.

Seleccionando distintos valores de amplitud, es posible construir una tabla de la relación empírica entre el período T y $\text{sen}^2 \frac{\varphi_0}{2}$. La figura 8 permite comparar el modelo teórico, representado por la ecuación (8) y los resultados de las mediciones hechas.

ESTUDIO DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

El análisis del movimiento browniano es de interés para la comprensión del segundo principio de la termodinámica, en la formación del concepto de fractal, durante el estudio de la teoría de las probabilidades y, por supuesto, insoslayable al examinar la historia del asentamiento de las ideas atomistas en la ciencia.

Confeccionamos dos vídeos sobre el movimiento browniano. El primero reproduce la agitación de corpúsculos de acuarela suspendidos en agua, vistos a través del microscopio. La figura 9 es un fotograma del vídeo Movimiento Browniano y permite estimar las dimensiones reales de las partículas, utilizando como referencia el diámetro del campo de observación medido con una red de difracción. La secuencia fílmica también da la posibilidad de apreciar que los corpúsculos de menor tamaño tienen mayor energía cinética.



Figura 9. Fotograma del vídeo: Movimiento Browniano.

El segundo vídeo es una simulación del movimiento browniano, basada en métodos de Montecarlo. Con este material de 30 s de duración pretendemos que los alumnos realicen acciones de medición semejantes a las que hicieron Perrin y sus colaboradores (Perrin, 1925) y, de este modo, entrenarles en la ejecución de cálculos estadísticos, mostrando el valor de las técnicas de Montecarlo para la simulación de fenómenos aleatorios.

La utilización del filme puede ser supeditada a la resolución del siguiente problema:

Con el vídeo Modelo de Movimiento Browniano hemos simulado los desplazamientos de partículas esféricas de radio $a = 2,12 \cdot 10^{-5}$ cm, suspendidas en agua a 20 °C. En nuestro algoritmo de cálculo consideramos variables aleatorias independientes las componentes Δx_i y Δy_i ($i = 1, 2, \dots$) de los desplazamientos en el plano (figura 10). Determinamos sus valores al cabo de lapsos de duración $\Delta \tau = 1/25$ s, correspondiente al tiempo entre dos fotogramas. Impusimos la condición de que Δx_i y Δy_i estuvieran normalmente distribuidas con esperanza matemática $M = 0$ y varianza $D = \frac{RT}{N_A} \frac{\Delta \tau}{3\pi a \eta}$; donde η

es el coeficiente de viscosidad, T la temperatura absoluta, R la constante de los gases y N_A el número de Avogadro.

¿Puede considerarse que el vídeo representará adecuadamente el movimiento browniano para $\Delta t > \Delta \tau$?

Esbozemos la respuesta de la pregunta anterior. Para que el vídeo imite satisfactoriamente el movimiento browniano es necesario que cumpla dos condiciones esenciales. En primer lugar, las proyecciones de los desplazamientos de las partículas, realizados al cabo de un intervalo de tiempo arbitrario $\Delta t > \Delta \tau$, han de cumplir con la fórmula de Einstein:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{RT}{N_A} \frac{\Delta \tau}{3\pi a \eta} \tag{9}$$

En segundo lugar, la muestra correspondiente de valores de Δx y Δy debe ajustarse a una distribución normal con esperanza matemática $M = 0$ y dispersión definida por la propia expresión (9).

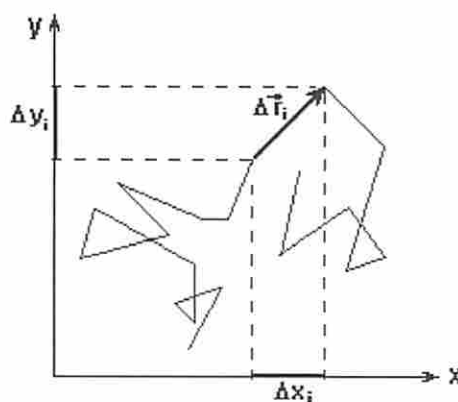


Figura 10. Proyecciones de desplazamiento browniano.

Las proyecciones $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ de desplazamientos sucesivos que realiza una partícula del vídeo al cabo de los lapsos $\Delta \tau = 1/25$ s, son n variables aleatorias independientes con la misma distribución probabilística. Por con-

siguiente, también coinciden sus esperanzas matemáticas y dispersión. Al transcurrir el tiempo $\Delta t = n \cdot \Delta \tau$, el desplazamiento resultante tiene componente $\Delta x = \sum_{i=1}^n \Delta x_i$, con dispersión $n \cdot D$ y esperanza matemática cero. Por lo tanto, el vídeo debe satisfacer la relación de Einstein.

2. Valores del número de Avogadro obtenidos del experimento con el modelo y valores reportados por J. Perrin.

Tabla 1. Valores calculados del número de Avogadro

Δt (s)	$N_{A \text{ exp}}$ (mol ⁻¹)	$N_{A \text{ Perrin}}$ (mol ⁻¹)
2,0	5,84E+23	7,3E+23
4,0	5,93E+23	6,8E+23
6,0	6,73E+23	5,6E+23
8,0	6,76E+23	6,5E+23
		7,2E+23
		7,7E+23

Los 6 resultados reportados por Perrin corresponden a la observación del movimiento de 50 partículas. Se determinaba la posición de cada corpúsculo al cabo de intervalos sucesivos de 30 s. Así se obtenía una muestra de 200 experiencias para cada cálculo del número de Avogadro. Los experimentos se realizaron variando la viscosidad del agua al diluir azúcar.

La Tabla 1 es una porción de hoja de cálculo que permite comparar resultados de los cálculos realizados por nosotros y de los experimentos efectuados por Perrin y sus colaboradores cuando comprobaron la fórmula de Einstein. Como se sabe, los trabajos de Perrin se centraron en la determinación del número de Avogadro N_A . El procesamiento de cuatro muestras tomadas con el vídeo, correspondientes a los intervalos $\Delta t = 2$ s, 4 s, 6 s, 8 s y con más de 250 experiencias cada una, pone en evidencia que el modelo elaborado satisface la expresión (9).

La otra característica examinada del movimiento browniano es la distribución normal de las proyecciones Δx y Δy . La figura 11 contiene el histograma obtenido del experimento con el modelo, en el cual se tomó $\Delta t = 2$ s. También incluye la representación gráfica de la densidad de probabilidad correspondiente. En la expresión de frecuencia relativa $N_j/N\Delta$ que aparece en la figura, N representa el total de elementos de la muestra y N_j es el número de experiencias favorables a la aparición de valores de Δx dentro del intervalo j de longitud Δ ($j = 0, 1, 2, 3$ y 4). La densidad de probabilidad ajustada es $f(\Delta x)$. El histograma fue construido con $N = 318$ experiencias.

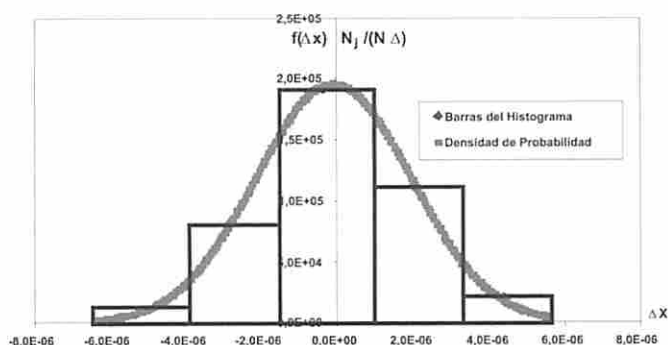


Figura 11. Distribución normal de las proyecciones de los desplazamientos brownianos.

CONSIDERACIONES FINALES

Con ejemplos concretos hemos intentado mostrar:

1. algunas posibilidades de la fotografía digital para la realización de mediciones,
2. vías para utilizar ese medio de enseñanza en la resolución de problemas, atendiendo a concepciones didácticas actuales, y
3. posibilidades del empleo conjunto de la fotografía digital y de los ordenadores, atendiendo a las funciones básicas de éstos en la Física (cálculos numéricos y analíticos, experimentos con modelos, experimentos automatizados, búsqueda de información para la solución de problemas).

Las problemáticas solucionadas con ayuda del material multimedia descrito suponen emplear al mismo tiempo fotografías, vídeos, un programa como Análisis de Imágenes, software para el cálculo numérico y analítico (Microsoft Excel, *Mathematica* o similares), textos que orientan la actividad de los alumnos, etc. Ello pone de manifiesto que es una tarea actual de la innovación didáctica elaborar libros que posibiliten acceder ágilmente a tan diverso material docente. En este sentido es evidente el valor de los ampliamente difundidos sistemas *hipermidia* como soportes de información para el aprendizaje de las ciencias. El reto actual estriba en utilizar esta tecnología con arreglo a las concepciones desarrolladas por la investigación e innovación didáctica.

Introducir en la práctica docente medios como los descritos sólo requiere disponer del software apropiado y abarata significativamente la realización de mediciones. Los estudiantes pueden participar directamente en la confección de los materiales para las mediciones. Los resultados y la metodología de nuestra labor están orientados a favorecer el trabajo independiente de los alumnos y la educación a distancia.

BIBLIOGRAFÍA

1. Carreras, C. y Yuste, M.: *Una forma sencilla y natural de iniciar a los estudiantes en la Óptica Cuántica: obtención*

- y análisis de algunos espectros atómicos. *Óptica Pura y Aplicada*, Vol. 21, pp. 167-177 (1988).
2. Gil, D. et al.: *¿Puede hablarse de un consenso constructivista en la educación científica?* *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3) 503-512 (1999).
 3. McDermott, L. Ch.: Oersted Medal Lecture 2001: "Physics Education Research-The Key to Student Learning" Department of Physics, University of Washington, Seattle, Washington 98195-1560. Proceedings of VIII Inter-American Conference on Physics Education. July, 2003, Havana. © 2001 American Association of Physics Teachers.
 4. Perrin, J.: Discontinuous Structure of Matter. Nobel Lecture, December 11, 1926. Tomado de *Nobel Lectures. Physics 1922-1941*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1965.
 5. PSSC. Guía del laboratorio de Física. Editorial Reverté, S. A. Barcelona, 1965.

6. Taton, R. et al.: *Historia General de las Ciencias*. Volumen III. La Ciencia Contemporánea I. El Siglo XIX. Ediciones Destino. Barcelona, pp. 197-200 (1973).
7. Valdés, P., Valdés, R. y Macedo, B.: *Transformaciones en la educación científica a comienzos del siglo XXI*. Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales, N.º 15, pp. 95-114 (2001).
8. Valdés, R., Tricio, V., Curbelo, J. y Cubas, A.: *La fotografía digital y el ordenador en la resolución de problemas*. Resúmenes de XXIX Reunión Bienal de la RSEF. Enseñanza de la Física. Volumen I, pp. 154-155 (2003).

Rolando Valdés Castro
y Verónica Tricio Gómez
Dpto. de Física Aplicada
Universidad de Burgos

El ingenio en el experimento

Los orígenes del filtrado óptico: el experimento de Abbe-Porter

INTRODUCCIÓN

En el año 1873 Ernst Abbe publicó su teoría sobre la formación de la imagen en el microscopio, en la que exponía los primeros experimentos de filtrado óptico. Tres décadas después, en el año 1906, A.B. Porter escribió un artículo en el que aplicaba la teoría de la difracción con el mismo objetivo, proponiendo el experimento que aquí vamos a describir. En él se conjugan el ingenio experimental y el análisis teórico riguroso.

Con el desarrollo de los láseres, de las cámaras CCD y de la Informática se ha incrementado enormemente el empleo de la Transformada de Fourier en los problemas de transmisión de información por métodos ópticos. En este sentido, las técnicas de filtrado óptico han adquirido una gran importancia en las últimas décadas.

Iluminando una diapositiva con luz láser, mediante el filtrado óptico se pueden separar los objetos grandes de los pequeños que hay en ella, se pueden reconocer aquellos que tienen la misma forma (filtros adaptados), etc. Paralelamente ha venido desarrollándose en programas informáticos una versión computacional de estas técnicas de tipo óptico, de manera que en la actualidad se utilizan profusamente en la investigación en Biología, en el diagnóstico en Medicina y en el reconocimiento de letras y símbolos en la transmisión de información.

ESQUEMA Y DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

En el experimento de Abbe-Porter se estudia lo que sucede en la transmisión de la luz entre el plano donde se

encuentra el objeto (*plano objeto*) y el plano donde se produce su imagen (*plano imagen*) a través de una lente convergente. En la Figura 1 se indica el esquema de la formación de la imagen en el experimento.

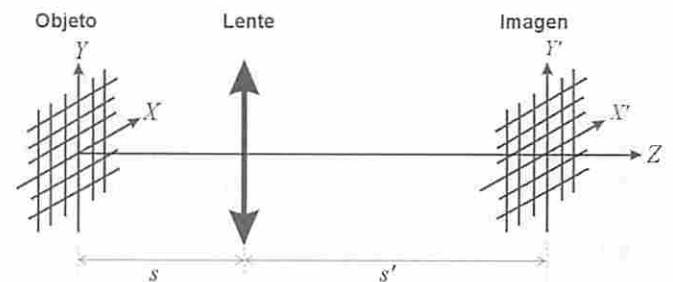


Figura 1. Esquema de la formación de la imagen en el experimento de Abbe-Porter.

El objeto es una rejilla compuesta por una serie de hilos horizontales y verticales situada en un plano $\{X, Y\}$ a una distancia s a la izquierda de la lente. Si se ilumina la rejilla con una onda plana se recoge su imagen bien enfocada en otro plano $\{X', Y'\}$ situado a una distancia s' a la derecha de la lente. El aumento de la imagen viene dado por el cociente s'/s , y estas distancias están relacionadas por la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

donde s y s' están tomadas con signo positivo y f es la distancia focal de la lente.

En la Figura 2 se puede ver el dispositivo experimental, que está compuesto por los siguientes elementos:

- Un láser de He-Ne ($\lambda = 632,8$ nm) linealmente polarizado y de 30 mW de potencia.