

- y análisis de algunos espectros atómicos. *Óptica Pura y Aplicada*, Vol. 21, pp. 167-177 (1988).
2. Gil, D. et al.: *¿Puede hablarse de un consenso constructivista en la educación científica?* *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3) 503-512 (1999).
 3. McDermott, L. Ch.: Oersted Medal Lecture 2001: "Physics Education Research-The Key to Student Learning" Department of Physics, University of Washington, Seattle, Washington 98195-1560. Proceedings of VIII Inter-American Conference on Physics Education. July, 2003, Havana. © 2001 American Association of Physics Teachers.
 4. Perrin, J.: Discontinuous Structure of Matter. Nobel Lecture, December 11, 1926. Tomado de *Nobel Lectures. Physics 1922-1941*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1965.
 5. PSSC. Guía del laboratorio de Física. Editorial Reverté, S. A. Barcelona, 1965.

6. Taton, R. et al.: *Historia General de las Ciencias*. Volumen III. La Ciencia Contemporánea I. El Siglo XIX. Ediciones Destino. Barcelona, pp. 197-200 (1973).
7. Valdés, P., Valdés, R. y Macedo, B.: *Transformaciones en la educación científica a comienzos del siglo XXI*. Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales, N.º 15, pp. 95-114 (2001).
8. Valdés, R., Tricio, V., Curbelo, J. y Cubas, A.: *La fotografía digital y el ordenador en la resolución de problemas*. Resúmenes de XXIX Reunión Bienal de la RSEF. Enseñanza de la Física. Volumen I, pp. 154-155 (2003).

Rolando Valdés Castro
y Verónica Tricio Gómez
Dpto. de Física Aplicada
Universidad de Burgos

El ingenio en el experimento

Los orígenes del filtrado óptico: el experimento de Abbe-Porter

INTRODUCCIÓN

En el año 1873 Ernst Abbe publicó su teoría sobre la formación de la imagen en el microscopio, en la que exponía los primeros experimentos de filtrado óptico. Tres décadas después, en el año 1906, A.B. Porter escribió un artículo en el que aplicaba la teoría de la difracción con el mismo objetivo, proponiendo el experimento que aquí vamos a describir. En él se conjugan el ingenio experimental y el análisis teórico riguroso.

Con el desarrollo de los láseres, de las cámaras CCD y de la Informática se ha incrementado enormemente el empleo de la Transformada de Fourier en los problemas de transmisión de información por métodos ópticos. En este sentido, las técnicas de filtrado óptico han adquirido una gran importancia en las últimas décadas.

Iluminando una diapositiva con luz láser, mediante el filtrado óptico se pueden separar los objetos grandes de los pequeños que hay en ella, se pueden reconocer aquellos que tienen la misma forma (filtros adaptados), etc. Paralelamente ha venido desarrollándose en programas informáticos una versión computacional de estas técnicas de tipo óptico, de manera que en la actualidad se utilizan profusamente en la investigación en Biología, en el diagnóstico en Medicina y en el reconocimiento de letras y símbolos en la transmisión de información.

ESQUEMA Y DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

En el experimento de Abbe-Porter se estudia lo que sucede en la transmisión de la luz entre el plano donde se

encuentra el objeto (*plano objeto*) y el plano donde se produce su imagen (*plano imagen*) a través de una lente convergente. En la Figura 1 se indica el esquema de la formación de la imagen en el experimento.

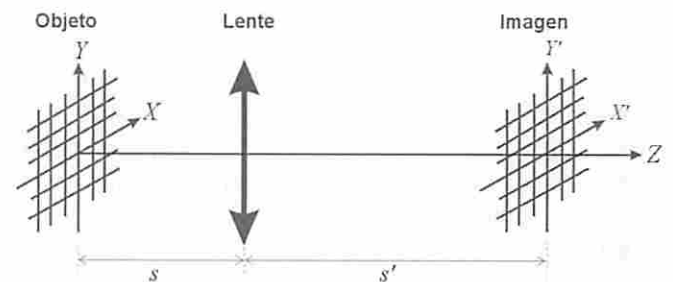


Figura 1. Esquema de la formación de la imagen en el experimento de Abbe-Porter.

El objeto es una rejilla compuesta por una serie de hilos horizontales y verticales situada en un plano $\{X, Y\}$ a una distancia s a la izquierda de la lente. Si se ilumina la rejilla con una onda plana se recoge su imagen bien enfocada en otro plano $\{X', Y'\}$ situado a una distancia s' a la derecha de la lente. El aumento de la imagen viene dado por el cociente s'/s , y estas distancias están relacionadas por la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

donde s y s' están tomadas con signo positivo y f es la distancia focal de la lente.

En la Figura 2 se puede ver el dispositivo experimental, que está compuesto por los siguientes elementos:

- Un láser de He-Ne ($\lambda = 632,8$ nm) linealmente polarizado y de 30 mW de potencia.

- Un *expandidor de haz*, compuesto por un objetivo de microscopio de 60x que condensa el rayo láser sobre un agujero (*pinhole*) de $5 \mu\text{m}$ situado en el foco de una lente convergente (*lente colimadora*) de 50 cm de distancia focal. Con este dispositivo se obtiene un haz prácticamente plano (bien colimado) de 3 cm de diámetro.
- Una *rejilla* de $12 \times 12 \text{ mm}^2$ (Figura 3) constituida por hilos de espesor $e = 0,20 \text{ mm}$ dispuestos horizontal y verticalmente con una separación $d = 0,86 \text{ mm}$ del centro de un hilo al siguiente (tanto en horizontal como en vertical). La rejilla ha sido realizada por impresión sobre una diapositiva.
- Una lente convergente (*lente formadora de imagen*) de distancia focal $f = 50 \text{ cm}$.
- Una *lente amplificadora* (de 5 cm de distancia focal).
- Una *cámara CCD* con software de análisis de imagen incorporado.

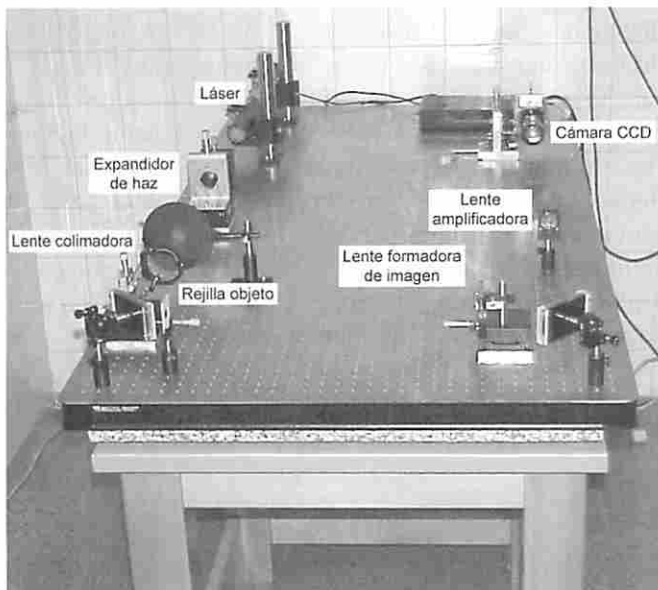


Figura 2. Dispositivo experimental.

En las Figuras 3 y 4 se pueden ver el objeto y su imagen obtenidos en este dispositivo para distancias $s = 88 \text{ cm}$ y $s' = 115 \text{ cm}$.

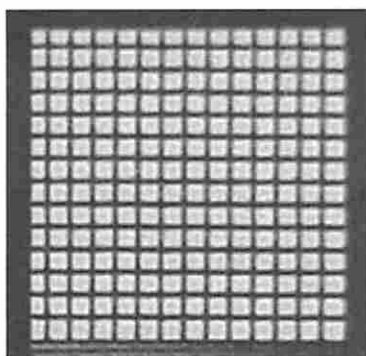


Figura 3. Rejilla objeto.

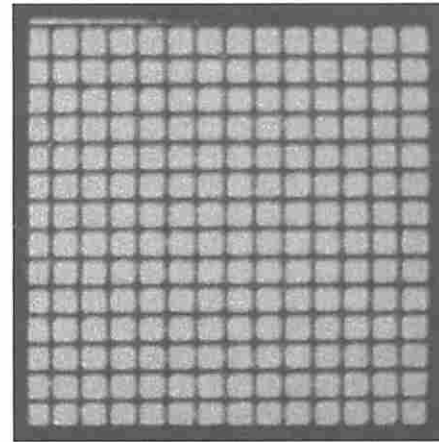


Figura 4. Imagen de la rejilla.

LA PREGUNTA QUE SE HICIERON ABBE Y PORTER

La Óptica Geométrica nos enseña de qué manera se forma la imagen con ayuda de la fórmula indicada más arriba. Sabemos, pues, lo que sucede en el plano objeto y lo que sucede en el plano imagen. Pero, ¿qué pasa entre medias? ¿Qué pasa entre los planos objeto e imagen? ¿Cómo se propaga entre ellos la luz? La respuesta la encontraron Abbe y Porter en el fenómeno de la difracción.

Gracias a Fresnel, desde principios del siglo XIX se sabe cómo determinar el avance de una onda cuando es difractada por un objeto. En el experimento de Abbe-Porter, la onda plana, que se propaga según el eje Z, alcanza el plano objeto sin deformarse. Pero al llegar a él hay partes de la misma que son interceptadas por los hilos de la red. Supongamos que queremos determinar la amplitud E_p de la onda difractada en un punto $P(x, y, z)$ intermedio entre el objeto y la lente. Esta amplitud viene dada por la suma de todas las amplitudes elementales que proceden de las ondas secundarias esféricas (principio de Huygens) que se generan en cada uno de los puntos de las zonas transparentes del objeto. Es decir, de los puntos que se encuentran en las ventanitas cuadradas de la rejilla. El valor de la amplitud elemental procedente de un punto dado de la rejilla es inversamente proporcional a su distancia r al punto P para todo instante de tiempo, pero la fase de esta amplitud elemental depende, además, del instante t en que se hace la suma de todas las onditas secundarias, y es la que tenía la onda plana incidente en la rejilla en un instante anterior $(t - r/c)$, donde c es la velocidad de la luz. Haciendo la integración sobre toda la superficie ocupada por el objeto se obtiene la amplitud de la onda difractada en el punto P.

Si no hubiera existido la rejilla, la amplitud de la onda en cualquier punto P de un plano $\{X, Y\}$ entre el objeto y la lente sería la misma en todo instante de tiempo, ya que la contribución de las ondas secundarias

elementales no sería diferente de un punto a otro (propagación de onda plana). Sin embargo, al desaparecer la contribución de las ondas elementales interceptadas por los hilos, la amplitud de difracción puede variar de un punto a otro dentro del plano $\{X, Y\}$ para todo instante de tiempo. Este es el fenómeno de la difracción.

Hablando en términos de rayos luminosos, la difracción producida en la rejilla se puede interpretar como si de ella salieran unos haces de rayos cuya intensidad dependiera de la dirección de propagación, pudiendo producirse direcciones de máximos y mínimos de intensidad. Si no existiera la lente, los diferentes rayos seguirían su camino entrecruzándose unos con otros en los diferentes planos $\{X, Y\}$ hasta que, a una distancia suficientemente alejada (en el infinito), producirían el *espectro de difracción de Fraunhofer* de la rejilla. A existir la lente, ésta recoge todos los haces de rayos haciendo que converjan sobre su plano focal imagen, como nos enseña la Óptica Geométrica. En cada punto de dicho plano focal se reunirán todos los rayos que, procedentes de la difracción, fueran paralelos a una dirección determinada. De esta manera, si hay una o varias direcciones entre el objeto y la lente para las que la intensidad de los rayos difractados es mayor, eso se manifestará por la aparición de puntos brillantes en el plano focal imagen (Figura 5).

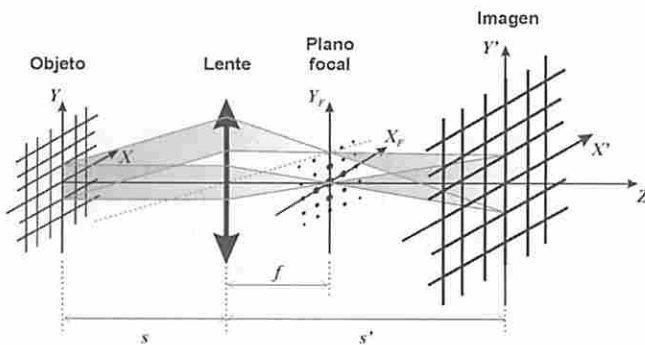


Figura 5. Espectro de difracción en el plano focal imagen.

El espacio ocupado por estos puntos depende de la distancia d entre los hilos de la red y de la distancia focal f de la lente. En la Figura 6 puede verse la distribución de puntos brillantes en el plano focal imagen (que se denomina *plano de Fourier*) obtenida con nuestro sistema para la red de la Figura 3.

El área que abarcan estos puntos es de uno o dos milímetros cuadrados y para fotografiarlos se puede proceder de dos maneras: proyectándolos sobre una pantalla blanca con una lente amplificadora o recogiéndolos directamente por la cámara CCD.

EL FILTRADO ÓPTICO

La distribución de los puntos brillantes en la Figura 6 tiene una simetría que está relacionada con la del objeto

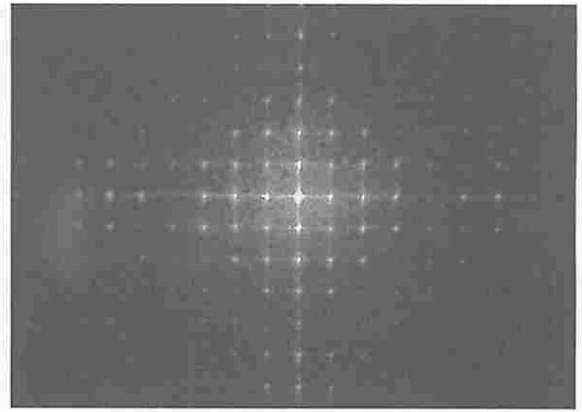


Figura 6. Espectro de Fourier de la rejilla.

de que procede. Se observan puntos brillantes alineados según rectas paralelas a los ejes X_F e Y_F . Si se hubiera hecho el experimento con una red constituida por rendijas alargadas, paralelas al eje Y , con sus centros alineados según el eje X y separados entre sí por la misma distancia d , en el plano de Fourier solamente obtendríamos una línea de puntos brillantes según el eje X_F . La conjetura que hicieron Abbe y Porter es que si colocamos una rendija paralela al eje X_F en el plano de Fourier, de manera que solo dejemos pasar los puntos brillantes colocados sobre dicho eje, en el plano imagen observaríamos franjas paralelas al eje Y' . En la Figura 7 se muestran los puntos brillantes correspondientes a la rejilla que han sido filtrados por una rendija de 0,3 mm colocada en el plano de Fourier.



Figura 7. Filtrado con una rendija horizontal.

En la Figura 8 se muestra el resultado que se obtiene en el plano imagen. Como puede verse, al hacer este filtrado han desaparecido los hilos horizontales en la imagen de la rejilla.

Si el filtrado se hace con la rendija colocada según el eje Y , obtenemos una imagen de franjas horizontales (Figura 9).

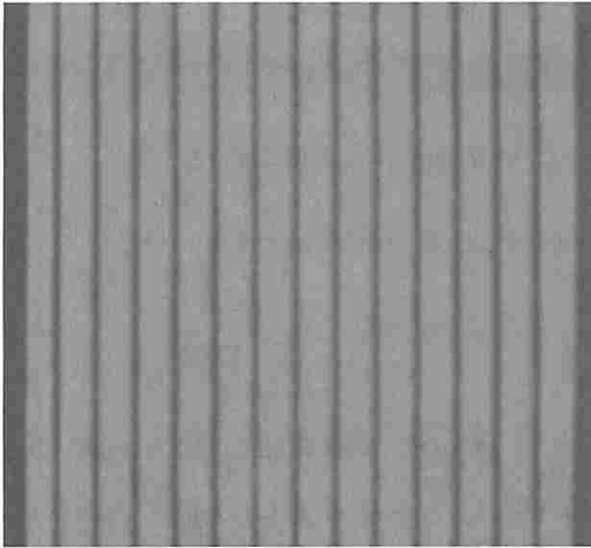


Figura 8. Imagen de la rejilla filtrada con el filtro de la Figura 7.

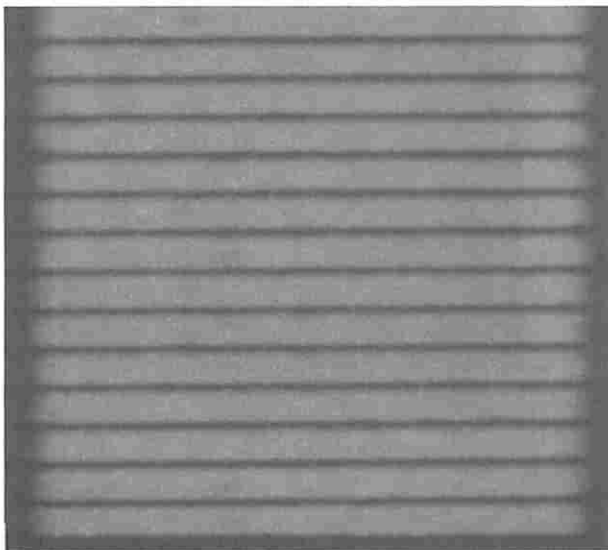


Figura 9. Imagen de la rejilla filtrada con un filtro vertical.

La consecuencia que sacaron Abbe y Porter con este experimento es que manipulando en el plano de Fourier se podrían seleccionar los detalles que se quisieran ver de una imagen. Por ejemplo: si en una diapositiva hay círculos opacos de dos tamaños diferentes distribuidos al azar, mediante filtrado óptico en el plano de Fourier se pueden eliminar los círculos de un tamaño y dejar solo los del otro para proceder al estudio de sus características.

LAS MATEMÁTICAS DEL FILTRADO ÓPTICO

El problema que se plantea en relación con la formación de imágenes por una lente es el siguiente: conocida la amplitud de la onda luminosa $U(x, y)$ en el plano objeto ($z = -s$) es necesario determinar cuál es su amplitud $U(x', y')$ en el plano imagen ($z = s'$)¹.

En el caso de la aproximación de la Óptica Geométrica, la amplitud imagen $U_g(x', y')$ es la siguiente:

$$U_g(x', y') = K \frac{\lambda^2 s'^2}{M^2} U(x, y)$$

donde K es una constante, λ es la longitud de onda de la radiación y $M = s'/s$ es el aumento de la lente, estando las coordenadas en el plano imagen y en el plano objeto relacionadas de la siguiente manera:

$$x' = Mx \quad ; \quad y' = My$$

Pero, ¿qué sucede cuando se produce la difracción y cuando se practica un filtrado óptico en el plano de Fourier? En este aspecto, las técnicas de análisis de Fourier son de gran utilidad.

Para realizar el filtrado de manera teórica se procede de la siguiente manera en este experimento:

- Se parte de la amplitud objeto $U(x, y)$ y se calcula su transformada de Fourier $G(f_x, f_y)$, cuya representación en intensidad luminosa se puede recoger en el plano focal imagen o plano de Fourier.
- La transformada de Fourier $G_g(f_x, f_y)$ de la imagen ideal $U_g(x', y')$ dada por la Óptica Geométrica se calcula fácilmente a partir de $G(f_x, f_y)$:

$$G_g(f_x, f_y) = K \frac{\lambda^2 s'^2}{M^2} G(f_x, f_y)$$

- Se filtra esta última transformada de Fourier poniendo en el plano focal imagen una máscara $H(f_x, f_y)$, que puede ser una rendija, una pantalla opaca, etc, y que selecciona las frecuencias espaciales f_x, f_y que se quieren filtrar (puntos brillantes de la Figura 7).
- Se calcula la transformada de Fourier $G'(f_x, f_y)$ de la amplitud imagen filtrada $U(x', y')$ mediante la siguiente expresión:

$$G'(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) G_g(f_x, f_y)$$

- Haciendo la transformada de Fourier inversa de $G'(f_x, f_y)$ se obtiene la amplitud imagen filtrada $U(x', y')$, que es el objetivo que se busca.

Transformada de Fourier de la amplitud objeto

La transformada de Fourier $G(f_x, f_y)$ de la función $U(x, y)$ objeto es:

$$G(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} dx dy$$

¹ Hemos tomado el origen del sistema de referencia en el plano de la lente de la Figura 1.

donde las frecuencias espaciales f_x y f_y están relacionadas con las coordenadas x_F e y_F en el plano focal imagen de la siguiente manera:

$$f_x = \frac{x_F}{\lambda f} \quad ; \quad f_y = \frac{y_F}{\lambda f}$$

En el caso de nuestro experimento, cuando el frente de onda plano es interrumpido en la rejilla por las dos redes de hilos horizontal y vertical que la forman, la amplitud del campo que emerge de ella puede venir representado por la siguiente función $U(x, y)$ en el plano objeto:

$$U(x, y) = U_0 \tau(x, y)$$

donde $\tau(x, y)$ es la función de transmisión de la rejilla, definida de la siguiente manera:

$$\tau(x, y) = \sum_p \sum_q \text{rect}\left(\frac{x - pd}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y - qd}{a}\right)$$

La constante d es la distancia entre los centros de dos ventanitas cuadradas contiguas de la Figura 3 y la constante a su anchura; los índices p y q varían entre $-N$ y $+N$, siendo $(2N + 1)$ el número de ventanitas de que está compuesta una fila horizontal (o vertical). La función $\text{rect}(\alpha)$ se define de la siguiente manera:

$$\text{rect}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\alpha| \leq 1/2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Se trata de la función escalón. En la Figura 10 se puede ver un detalle (varios *escalones*) del perfil de la distribución normalizada de la intensidad (*equivalente al factor de transmisión*) sobre el eje X de la luz que atraviesa la rejilla. Esta señal corresponde al cuadrado de la amplitud $U(x, y)$ para un valor de y constante para el que vale la unidad la función $\text{rect}((y - md)/a)$.

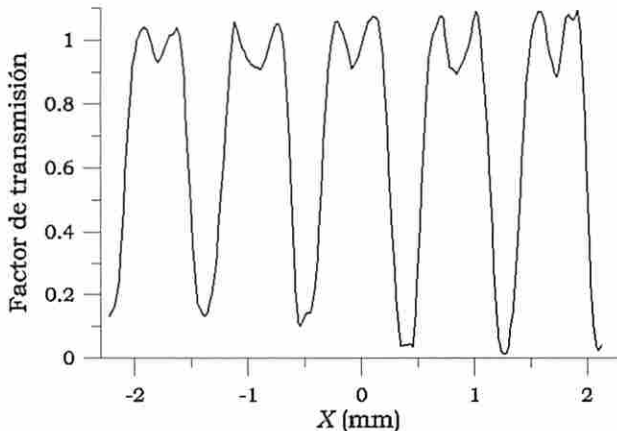


Figura 10. Perfil de la distribución de intensidad relativa de la onda que atraviesa la rejilla.

La intensidad máxima corresponde a las ventanitas y los mínimos profundos a los hilos.

Es fácil calcular la transformada de Fourier de la función escalón, por lo que la función $G(f_x, f_y)$ tiene la siguiente expresión:

$$G(f_x, f_y) = a^2 \text{sinc}(\pi a f_x) \text{sinc}(\pi a f_y) \sum_p \sum_q e^{-2\pi i p d f_x} e^{-2\pi i q d f_y}$$

donde la función $\text{sinc}(\alpha)$ está definida de la siguiente manera:

$$\text{sinc}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}$$

Con un programa de cálculo proporcionado por el software de la cámara CCD empleada se puede realizar la transformada de Fourier de la la rejilla objeto indicada en la Figura 3. En la Figura 11 se muestra el resultado obtenido.

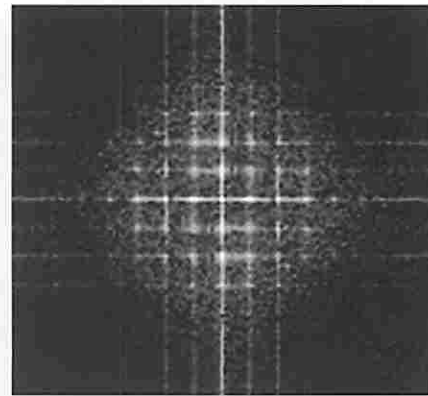


Figura 11. Transformada de Fourier de la rejilla objeto de la Figura 3.

Se puede comparar este resultado del tratamiento informático con el de la Figura 6 obtenido en el experimento óptico. La similitud es extraordinaria.

Filtrado en el plano de Fourier

Colocar una rendija horizontal en el plano de Fourier para eliminar todos los puntos brillantes (salvo los del eje X_F de la Figura 7) equivale a introducir la siguiente función $H(f_x, f_y)$:

$$H(f_x, f_y) = \text{rect}\left(\frac{y_F}{D}\right) = \text{rect}\left(\frac{\lambda f}{D} f_y\right)$$

donde D es la anchura de la rendija filtradora (en nuestro caso $D = 0,3$ mm). Dicha función no es más que una función escalón sobre la coordenada y_F del plano focal imagen centrada en el origen de coordenadas de dicho plano.

Utilizando ahora la expresión de $G_g(f_x, f_y)$, que se deduce de la de $G(f_x, f_y)$, y multiplicándola por $H(f_x, f_y)$, obtenemos el siguiente resultado para $G'(f_x, f_y)$:

$$G'(f_x, f_y) = K \frac{\lambda^2 s'^2}{M^2} \text{rect} \left(\frac{\lambda f}{D} f_y \right) a \text{sinc} (\pi a f_y) \times \\ \times \sum_p a \text{sinc} (\pi a f_x) e^{-2\pi i p d f_x}$$

donde han desaparecido todos los términos del sumatorio correspondiente a la exponencial de f_y , salvo el correspondiente a $q = 0$, ya que la rendija horizontal está centrada sobre el eje X .

Imagen filtrada

Conocida la función la función $G'(f_x, f_y)$, haciendo su transformada de Fourier inversa se determina la amplitud imagen filtrada $U(x', y')$:

$$U(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G'(f_x, f_y) e^{i2\pi(x'f_x + y'f_y)} df_x df_y$$

La amplitud $U(x', y')$ que corresponde a la imagen filtrada de la rejilla es la transformada de Fourier inversa (TF^{-1}) de la función $G'(f_x, f_y)$ filtrada. La parte de la transformada de Fourier inversa del sumatorio en p nos hace retornar a la función escalón inicial según el eje X :

$$\text{TF}^{-1} \left\{ \sum_p a \text{sinc} (\pi a f_x) e^{-2\pi i p d f_x} \right\} = \sum_p \text{rect} \left(\frac{x - pd}{a} \right)$$

En cuanto a la parte correspondiente a la integración en f_y , tenemos lo siguiente:

$$\text{TF}^{-1} \left\{ \text{rect} \left(\frac{\lambda f}{D} f_y \right) a \text{sinc} (\pi a f_y) \right\} = \\ = \int_{-f_0}^{+f_0} a \text{sinc} (\pi a f_y) e^{i2\pi y f_y} df_y$$

donde $f_0 = D/2\lambda f$ es la denominada frecuencia de corte para este filtrado porque el integrando es distinto de cero solamente en dicho intervalo, en el que se encuentran todas las frecuencias f_y que pasan.

Para los valores de los parámetros del experimento, el argumento de la función sinc es inferior a 0,25 radianes y ésta es prácticamente igual a la unidad en todo el intervalo de integración. Por lo tanto, obtenemos la siguiente expresión para esta parte de la transformada:

$$\text{TF}^{-1} \left\{ \text{rect} \left(\frac{\lambda f}{D} f_y \right) a \text{sinc} (\pi a f_y) \right\} = \int_{-f_0}^{+f_0} a e^{i2\pi y f_y} df_y$$

que es de integración inmediata, obteniéndose el siguiente valor de la integral:

$$\int_{-f_0}^{+f_0} a e^{i2\pi y f_y} df_y = a \text{sinc} (2\pi f_0 y_f)$$

donde la función sinc también es próxima a la unidad porque la coordenada y_f del plano focal imagen es muy pequeña (menor que $D/2$).

En resumen, la amplitud de la imagen filtrada será:

$$U(x', y') = 2Kf_0 a \frac{\lambda^2 s'^2}{M^2} \sum_p \text{rect} \left(\frac{x - pd}{a} \right)$$

que corresponde a una serie de bandas estrechas verticales como se puede ver en la Figura 8.

CONCLUSIÓN

Desde la época de Abbe y Porter se han venido perfilando las técnicas ópticas y matemáticas que han permitido comprender el fenómeno del filtrado óptico en toda su profundidad, aunque su aplicación práctica solo ha podido llevarse a cabo a finales del siglo XX con el enorme desarrollo que han experimentado las fuentes láser, los sistemas de detección y las técnicas informáticas.

Manuel Yuste Llandres,
Carmen Carreras Béjar
y Pedro Valera Arroyo
Dpto. de Física de los Materiales

Experimento histórico

La interferometría de neutrones

Feynman inicia el tercer volumen de sus "Lecciones de Física", dedicado a la mecánica cuántica, con una discusión del experimento de la doble rendija con partículas materiales. Para Feynman "este fenómeno encierra el corazón de la mecánica cuántica. En realidad contiene el único misterio". Y continúa: "Este experimento nunca se ha realizado exactamente de esta manera. El problema estriba en que el aparato tendría que construirse en una escala imposiblemente pequeña para mostrar los efectos

que nos interesan. Estamos haciendo un experimento mental, que hemos escogido porque es fácil de discutir".

Lo cierto es que, casi al mismo tiempo que Feynman decía esto, Claus Jönsson, en Tübingen, estaba realizando por primera vez este experimento, que dejaba así de ser un "experimento mental". Varios años más tarde, en 1974, el experimento sería refinado por Giorgio Merli, Giulio Pozzi y Gian Franco Missiroli, en Bolonia, y finalmente alcanzó su máxima sofisticación en el experimento realizado por Akira Tonomura *et al.* en 1989, en donde quedaba prácticamente asegurado que nunca había más de un electrón en vuelo. Posteriormente se han realizado experimentos de doble rendija con neutrones, átomos, moléculas simples e incluso con fullerenos C_{60} y