

Este resultado explicaba la procedencia de los núcleos de hidrógeno que incidían sobre la pantalla luminiscente.

## CONCLUSIONES

Con los resultados anteriores se llegaba a la conclusión de que el núcleo de nitrógeno se desintegraba debido a la colisión con partículas alfa, y que los núcleos de hidrógeno que se liberaban en este proceso eran constituyentes del núcleo de nitrógeno.

Rutherford concluyó que todos los núcleos atómicos debían estar constituidos por protones y electrones. Por lo que según esta hipótesis, un núcleo de  $\text{He}^4$  tenía que estar compuesto de 4 protones y dos electrones, lo que da como resultado una carga de 2 y número atómico 4.

La suposición de que en el núcleo había también electrones era incorrecta y la verdadera respuesta de la composición del núcleo no se encontró hasta el descubrimiento por J. Chadwick (1891-1974), en 1932, del *neutrón*. Usando la conservación de la energía y el momento al analizar los datos experimentales de la creación de núcleos de retroceso en nitrógeno e hidrógeno, llegó a la conclusión de que esta radiación consistía en un flujo de partículas neutras cuya masa era similar a la

del protón. Poco después del descubrimiento del neutrón, W. Heisenberg (1901-1976) estableció la hipótesis de la estructura nuclear protón-neutrón. Este modelo eliminaba completamente las dificultades asociadas con el modelo electrón-protón. Según este modelo, todos los núcleos contienen dos tipos de partículas elementales o nucleones: protones y neutrones. Los diferentes núcleos (por el momento alrededor de 2000, incluyendo los obtenidos artificialmente) se diferencian en el número de neutrones y protones que contienen.

## REFERENCIAS

1. E. Rutherford: "Collision of alfa particles with light atoms", *Philosophical Magazine*, Ser. 6, págs. 537-590 (june, 1919).
2. E. Rutherford: "Bakerian Lecture: Nuclear Constitution of Atoms", *Proc. Roy. Soc.*, A97, 374 (1920).
3. C. Castelfranchi: "Física Moderna". Ed. Gustavo Gili (1932).
4. A. Ferrer, M. Shaw y A. Williard: "Unidades Didácticas de Física Nuclear". Ed. UNED (2002).

Amalia Williard Torres  
Dpto. de Física de los Materiales

## Taller de Matemáticas

### Matemáticas y Física: el espejismo

#### INTRODUCCIÓN

La Matemática es el lenguaje propio de la Física y, en menor medida, de las demás Ciencias de la Naturaleza. El progreso matemático ha proporcionado una herramienta indispensable para el progreso de la Ciencia y de la Tecnología, así como los avances de éstas han influido fuertemente en el desarrollo matemático. A modo de sencillo homenaje a las Matemáticas vamos a exponer

aquí la descripción de un fenómeno óptico, *el espejismo*, en el que se puede constatar cómo se entrelazan los conocimientos de Física y de Matemáticas.

#### ESPEJISMO EN EL ASFALTO

A veces, cuando el sol calienta el asfalto de la carretera, observamos una fina capa especular sobre ella: es como si estuviera mojada (Figura 1).

Dicha capa semeja a un espejo donde se reflejan los automóviles que circulan por delante de nosotros. Sin embargo, al acercarnos el efecto desaparece: se trata de un espejismo.



Figura 1. Espejismo en la carretera N5 (km 168) el 6 de julio de 2006.

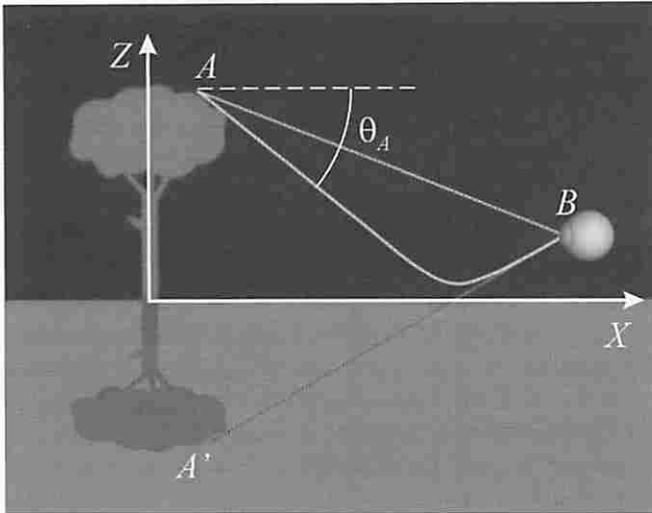


Figura 2. Esquema de las posibles trayectorias de los rayos.

Para interpretar el fenómeno se utiliza un principio que fue enunciado por el matemático francés PIERRE MARIE FERMAT (1601-1665) en el año 1657. Se trata del principio de tiempo mínimo, que dice: “*La Naturaleza actúa siempre por el camino más rápido.*”

Los rayos de sol que se reflejan en el automóvil (o en otros objetos) y llegan a nuestro ojo no lo hacen solo por un camino recto, que sería el más corto geoméricamente, sino que también lo hacen describiendo una línea curva que desciende hacia la carretera, alcanza su punto mínimo antes de llegar a ella y remonta hacia nosotros (ver Figura 2). Por esta razón podemos ver dos imágenes del automóvil: una que llega a nosotros directamente y otra que llega a través de la superficie especular. La diferencia entre los rayos que las producen está en la inclinación con la que parten desde el objeto. Los rayos que producen la imagen directa parten con un ángulo más próximo a la horizontal y su trayectoria entre  $A$  y  $B$  es prácticamente recta. Los rayos que producen la imagen especular lo hacen con un ángulo mayor y su trayectoria se curva, dando la impresión de que la imagen proviene de debajo de la carretera.

Una manera sencilla de interpretar el fenómeno es suponer que la velocidad  $v$  de la luz en el aire varía con la altura  $z$  sobre la superficie debido a la temperatura, de manera que a ras del suelo (asfalto, arena del desierto), en que el aire está más caliente, la luz alcanzaría su velocidad máxima, disminuyendo a medida que aumenta  $z$  [1]. Por esta razón, una línea curva podría ser recorrida en menos tiempo que una línea recta que estuviera por encima de ella, aunque el trayecto de ésta última fuera más corto, ya que la velocidad en todos los puntos de la curva sería mayor que en los de la recta.

## EL CAMINO ÓPTICO

Para simplificar el problema vamos a suponer que la velocidad de la luz en el aire solamente depende de la coordenada  $z$ , es decir:  $v = v(z)$ . Esto permite reducir el estudio de la trayectoria de un rayo de luz al estudio de una curva plana en un plano vertical, que tomaremos como plano  $\{X, Z\}$ . En estas condiciones, el intervalo de tiempo  $dt$  que emplearía la luz en recorrer un arco de curva  $ds$  sería:

$$dt = \frac{ds}{v(z)} \quad ; \quad ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

El tiempo  $t_{AB}$  empleado en ir desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$  debe resultar mínimo, según Fermat [2]:

$$t_{AB} = \int_A^B \frac{ds}{v(z)}$$

La velocidad  $v(z)$  es muy grande y, tradicionalmente, se suele utilizar el índice de refracción  $n(z)$  para representarla<sup>1</sup>. Este índice es el cociente entre la velocidad  $c$  de la luz en el vacío, que es una constante universal, y la velocidad  $v(z)$  en el medio considerado (en este caso, el aire):

$$n(z) = \frac{c}{v(z)}$$

Con la introducción de  $n(z)$ , la integral del tiempo mínimo podemos escribirla de la siguiente manera:

$$ct_{AB} = \int_A^B n(z) ds$$

A la longitud  $ct_{AB}$  que recorrería la luz en el vacío en el mismo intervalo de tiempo empleado en recorrer un determinado tramo geométrico en un medio se le denomina su *camino óptico asociado*. En estas condiciones, buscar el tiempo mínimo en un trayecto luminoso es lo mismo que buscar el camino óptico mínimo correspondiente, ya que la velocidad  $c$  de la luz en el vacío es constante.

Resolver el problema de tiempo mínimo planteado por Fermat significa, por consiguiente, encontrar una curva  $z = z(x)$  cuyo elemento de arco  $ds$  haga que la integral del camino óptico sea mínima. Esto precisa del establecimiento de una ecuación diferencial entre  $z$  y  $x$ , de la búsqueda de su solución general y del establecimiento de las condiciones de contorno. En las dos primeras tareas interviene esencialmente la Matemática y en la última, la Física.

<sup>1</sup> Esto se debe a que es más fácil determinar experimentalmente la relación entre las velocidades en dos medios distintos que sus valores absolutos. La ley que proporciona esta relación fue descubierta en 1621 por el matemático holandés WILLEBRORD SNELL (1580-1626) y publicada en 1637 por RENÉ DESCARTES (1596-1650) en su *Discurso del Método*.

## LA ECUACIÓN DE EULER

Para obtener la ecuación diferencial se recurre a la ecuación de Euler del cálculo variacional en su versión más simple. Expresemos el elemento de arco  $ds$  en función de  $dx$  y  $dz$ :

$$ds = \sqrt{1+x'^2} dz \quad ; \quad \text{con} \quad x' = \frac{dx}{dz}$$

Esto permite escribir el nuevo integrando como una función de  $z, x$  y  $x'$ :

$$c t_{AB} = \int_A^B f(z, x, x') dz$$

donde:

$$f(z, x, x') = n(z) \sqrt{1+x'^2}$$

La ecuación de Euler [3,4] nos proporciona la condición que debe cumplir la función  $f(z, x, x')$  para que la integral del camino óptico sea mínima:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

Puesto que el integrando no depende explícitamente de la coordenada  $x$ , llegamos a la conclusión de que su derivada respecto a  $x'$  ha de ser constante:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = n(z) \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} = a$$

Elevando al cuadrado y haciendo operaciones se llega a la siguiente expresión para  $dz/dx$ :

$$\left( \frac{dz}{dx} \right)^2 = \frac{n^2(z) - a^2}{a^2}$$

Los diferentes valores de la constante  $a$  nos permitirán obtener diferentes trayectorias para los rayos de luz que parten del punto  $A$ , pero la ecuación anterior limita los valores que podemos dar a este parámetro: el valor absoluto de la constante  $a$  que define la ecuación diferencial es el mínimo valor del índice de refracción que la luz encuentra en su trayectoria.

## VARIACIÓN DEL ÍNDICE DE REFRACCIÓN CON LA ALTURA

Como ya hemos indicado, el índice de refracción varía con la altura. Las causas de esta variación son complejas y aquí nos limitaremos a proporcionar una ley de variación con la altura  $z$  que ya ha sido ensayada con éxito para el caso de los espejismos en el desierto [5]:

$$n^2(z) = n_0^2 + n_p^2(1 - e^{-\beta z})$$

La constante  $n_0$  es el valor del índice de refracción sobre el asfalto; en este caso es el valor mínimo debido a que la temperatura del aire sobre el suelo alcanza su mayor valor. La constante  $\beta$  determina la rapidez de la variación con la altura y la constante  $n_p$  limita dicha variación, de manera que cuanto menor sea ésta última menor será la variación total de  $n(z)$ , y cuanto mayor sea la primera, más rápidamente se alcanzará un valor de  $n(z)$  constante.

Dependiendo de las circunstancias atmosféricas, de la situación geográfica, etc., pueden existir diferentes tríos de parámetros que representen la variación del índice de refracción con la altura. Para nuestro estudio utilizaremos el mismo valor del parámetro  $\beta$  propuesto para el desierto y para  $n_0$ , el calculado a partir de [6] para las condiciones de presión y temperatura del lugar y la fecha en que se tomó la fotografía de la Figura 1:

$$n_0 = 1,000248 \quad ; \quad \beta = 2,303 \text{ m}^{-1}$$

Dejaremos libre el parámetro  $n_p$  para ajustar la teoría con el experimento.

## INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Al utilizar la expresión más arriba indicada para  $n(z)$ , conviene hacer el siguiente cambio de variable para realizar la integración:

$$\rho^2 = e^{\beta z}$$

Substituyendo en la expresión de  $(dz/dx)^2$ , obtenemos:

$$\left( \frac{d\rho}{dx} \right)^2 = \alpha^2(\rho^2 - b^2)$$

donde los parámetros  $\alpha^2$  y  $b^2$  son los siguientes:

$$\alpha^2 = \frac{\beta^2(n_0^2 + n_p^2 - a^2)}{4a^2} \quad ; \quad b^2 = \frac{n_p^2}{n_0^2 + n_p^2 - a^2}$$

Si derivamos una vez más respecto de la coordenada  $x$ , obtenemos una ecuación lineal ordinaria de segundo orden para  $\rho(x)$  de fácil resolución:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} - \alpha^2\rho = 0$$

Su solución general es:

$$\rho(x) = K_1 e^{\alpha x} + K_2 e^{-\alpha x}$$

y deshaciendo el cambio de variable obtenemos  $z(x)$ , que es la curva que buscamos:

$$z(x) = \frac{2}{\beta} \ln [K_1 e^{\alpha x} + K_2 e^{-\alpha x}]$$

Las constantes  $K_1$ ,  $K_2$  y  $\alpha$  vienen determinadas por las condiciones de contorno.

## PROPIEDADES DE LA SOLUCIÓN

Antes de pasar a establecer las condiciones de contorno vamos a estudiar alguna propiedad matemática de la solución.

Puesto que a nuestro ojo llegan dos imágenes: una directamente y otra reflejada (ver Figura 1), hemos de admitir que los dos grupos de rayos que las producen verifican el principio de tiempo mínimo de Fermat. Para simplificar el razonamiento supondremos que los rayos correspondientes a la imagen directa viajan en línea recta (o casi recta) hasta llegar al observador, y que los correspondientes a la segunda lo hacen en línea curva pasando por un mínimo (ver Figura 2).

La existencia de un punto  $(x_m, z_m)$  en el que  $z(x)$  pasa por un mínimo nos permite poner en evidencia la simetría de la curva. En efecto: utilizando la condición de mínimo para dicho punto genérico, se obtienen las siguientes relaciones entre  $K_1$ ,  $K_2$  y  $z_m$ :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x_m, z_m} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow K_1 e^{\alpha x_m} = K_2 e^{-\alpha x_m} = M \quad ; \quad z_m = \frac{2}{\beta} \ln 2M$$

Si ahora tomamos el origen de coordenadas en el punto mínimo  $(x_m, z_m)$ , de la curva  $z(x)$ , obtenemos:

$$Z = \frac{2}{\beta} \ln[\cosh \alpha X]$$

donde:

$$X = x - x_m \quad ; \quad Z = z - z_m$$

Como puede verse, es una curva simétrica<sup>2</sup> respecto a un eje vertical que pasa por el punto  $(x_m, z_m)$ .

## CONDICIONES DE CONTORNO

Puesto que estamos interesados en los rayos que partiendo del punto  $A = (0, z_A)$  llegan al punto  $B = (x_B, z_B)$ , la condición de contorno necesaria ha de ser que la curva  $z(x)$  pase por dichos puntos:

Punto A:

$$z_A - z_m = \frac{2}{\beta} \ln[\cosh \alpha x_m] \Rightarrow \cosh \alpha x_m = \frac{\rho_A}{\rho_m} \quad (1)$$

Punto B:

$$\cosh \alpha(x_B - x_m) = \frac{\rho_B}{\rho_m} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_B = x_m + \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{\rho_B}{\rho_m} + \sqrt{\frac{\rho_B^2}{\rho_m^2} - 1} \right] \quad (2)$$

donde:

$$\rho_A = e^{\beta z_A/2} \quad ; \quad \rho_B = e^{\beta z_B/2} \quad ; \quad \rho_m = e^{\beta z_m/2}$$

Por consiguiente, como parámetros iniciales tenemos que proporcionar las alturas  $z_A$ ,  $z_B$  y  $z_m$ . Para determinar ésta última vamos a imponer una condición de contorno suplementaria relativa a la pendiente que debe tener la curva cuando llega al ojo del observador. Para ello vamos a distinguir dos casos: uno relativo a la imagen especular y otro relativo a la imagen directa.

## IMÁGENES ESPECULARES

A la vista de la fotografía de la Figura 1 se puede decir que las imágenes especulares tienen como plano de simetría especular en relación con el objeto a la carretera<sup>3</sup>. Por consiguiente, la coordenada  $z_{A'}$  del punto imagen  $A'$  debe ser justamente la opuesta de la del punto A:  $z_{A'} = -z_A$ . Esto quiere decir que la pendiente de la curva en el punto B ha de ser la misma que la de la recta que une este punto, de coordenadas  $(x_B, z_B)$ , con el punto  $A'$ , de coordenadas  $(0, z_{A'})$ . De esta manera, el ojo del observador vería los rayos provenientes del punto A como si vinieran de  $A'$ , ya que en la formación de la imagen en el ojo (o en la lente de la cámara) lo que interviene esencialmente es el ángulo de entrada en él. Naturalmente, ésta es una condición de contorno que proviene de la Física, y cuya formulación matemática es:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_B = \frac{z_B + z_A}{x_B}$$

Utilizando la expresión de la pendiente de la curva  $z(x)$  en el punto B y haciendo uso de las condiciones de contorno (1) y (2) más arriba indicadas, se obtiene la siguiente relación para el parámetro  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\beta}{2x_B} (z_A + z_B) \frac{\rho_B}{\sqrt{\rho_B^2 - \rho_m^2}}$$

<sup>2</sup> Esto es debido a que  $\cosh(\alpha X) = \cosh(-\alpha X)$ .

<sup>3</sup> En todo caso hacemos la hipótesis de que esto es cierto.

Esta expresión nos permite conocer el parámetro  $\alpha$  si conocemos  $x_B$  y  $z_m$ . La primera podemos obtenerla directamente del experimento (mediante una fotografía, por ejemplo). La segunda habría que determinarla a partir de otras condiciones que la relacionan con el índice de refracción. Como el parámetro  $n_p$  no lo conocemos, vamos a seguir otro procedimiento distinto, que indicamos a continuación. Se trata de lo siguiente:

- Determinamos experimentalmente la distancia  $x_B$  entre nosotros y el objeto (a partir de la fotografía).
- Elegimos un valor de la coordenada  $z_m$  y calculamos el valor de  $\rho_m$ .
- A partir de la expresión que acabamos de indicar calculamos  $\alpha$ .
- Conocidos estos dos últimos valores, determinamos  $x_m$  a través de las dos fórmulas siguientes, que se deducen de las condiciones de contorno (1) y (2):

Punto A:

$$x_m = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{\rho_A}{\rho_m} + \sqrt{\frac{\rho_A^2}{\rho_m^2} - 1} \right]$$

Punto B:

$$x_m = x_B - \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{\rho_B}{\rho_m} + \sqrt{\frac{\rho_B^2}{\rho_m^2} - 1} \right]$$

Si hemos elegido el  $z_m$  correcto, el valor que obtenemos para  $x_m$  en ambos casos debe ser el mismo. Por el contrario, si  $z_m$  no es el correcto, obtenemos dos valores distintos para  $\alpha$ , puesto que las Matemáticas demuestran que la solución de la ecuación diferencial debe ser única. Procediendo por tanteo se obtiene el trío de valores de los parámetros  $z_m$ ,  $\alpha$  y  $x_m$  que permiten representar la curva  $z(x)$  que da origen a la imagen especular del punto A. Es lo que viene representado en la Figura 3, donde se ha utilizado el siguiente conjunto de parámetros:

$$z_A = 1,5 \text{ m} ; x_A = 0 ; z_B = 1 \text{ m} ; x_B = 175 \text{ m}$$

$$z_m = 0,3808 \text{ m} ; \alpha = 0,01887272 \text{ m}^{-1} ; x_m = 103,993 \text{ m}$$

Como puede verse, los rayos que parten de A llegan al punto B describiendo una curva (línea continua) e inciden en el ojo del observador con un ángulo tal que parecen provenir del punto A', simétrico del punto A respecto del asfalto. Por esta razón parece que sobre la carretera hay una superficie especular (aspecto mojado).

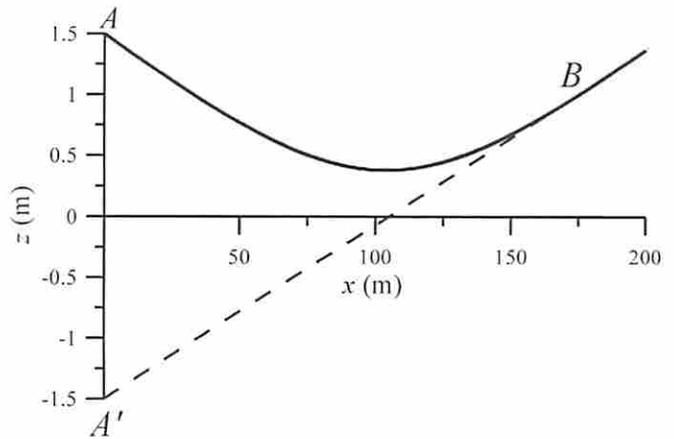


Figura 3. Trayectoria de los rayos que forman la imagen especular.

### IMAGENES DIRECTAS

Las imágenes directas se interpretan también con las soluciones  $z(x)$  encontradas, pero en este caso la condición de contorno relativa a la pendiente de la curva al llegar al ojo del observador es diferente. Podemos admitir que las pendientes de  $z(x)$  en los puntos A y B son prácticamente iguales. Es decir:

$$-\frac{2\alpha \sinh \alpha x_m}{\beta \cosh \alpha x_m} \cong \frac{2\alpha \sinh \alpha (x_B - x_m)}{\beta \cosh \alpha (x_B - x_m)}$$

Esto es posible siempre que  $\alpha x_m$  sea suficientemente grande y mucho mayor que  $\alpha x_B$ . En este caso las dos pendientes tienden al siguiente valor:

$$\left( \frac{dz}{dx} \right)_A = \left( \frac{dz}{dx} \right)_B = -\frac{2\alpha}{\beta} = \frac{z_B - z_A}{x_B}$$

A partir de esta fórmula se puede calcular el parámetro  $\alpha$ . Para determinar los otros dos,  $z_m$  y  $x_m$ , podemos hacer uso de la condición de contorno (1), de la que se puede extraer la siguiente relación entre  $z_m$  y  $x_m$ :

$$z_m = \frac{2}{\beta} \ln \frac{\rho_A}{\cosh \alpha x_m}$$

Como  $z_m > 0$ , el mayor valor que podemos asignar a  $\cosh \alpha x_m$  es  $\rho_A$ . Tomando  $\cosh \alpha x_m = \rho_A$ , obtenemos:

$$z_m = 0 ; x_m = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \rho_A + \sqrt{\rho_A^2 - 1} \right]$$

Utilizando de nuevo  $x_B = 175 \text{ m}$ , se obtiene  $\alpha = 0,00329 \text{ m}^{-1}$  y  $x_m = 733,25 \text{ m}$ . Con estos datos se repre-

senta la curva  $z(x)$  entre  $A$  y  $B$  en la Figura 4<sup>4</sup>. Como puede verse, se trata de una línea recta.

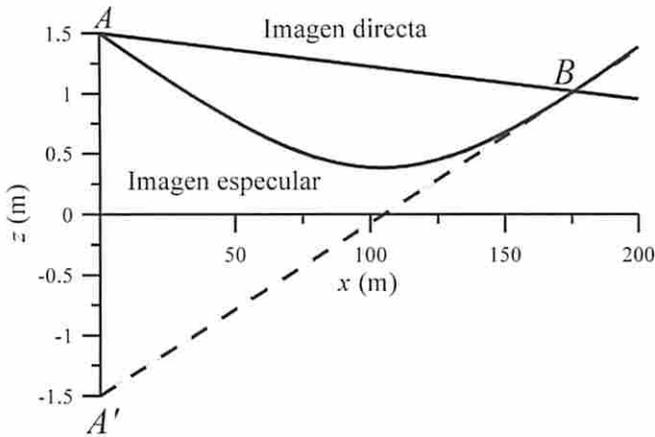


Figura 4. Trayectoria de los rayos que forman las imágenes directa y especular.

Por último, al representar el rayo directo hemos tomado  $z_m = 0$ , lo que simplifica la expresión del parámetro  $\alpha$  (ya que para esta solución  $z(x)$ ,  $a^2 = n_0^2$ ):

$$\alpha = \frac{\beta n_p}{2n_0}$$

Esto nos permite calcular  $n_p$  (que en este caso resulta ser  $n_p = 0,00286$ ) y representar la curva  $n(z)$ , que es lo que se hace en la Figura 5.

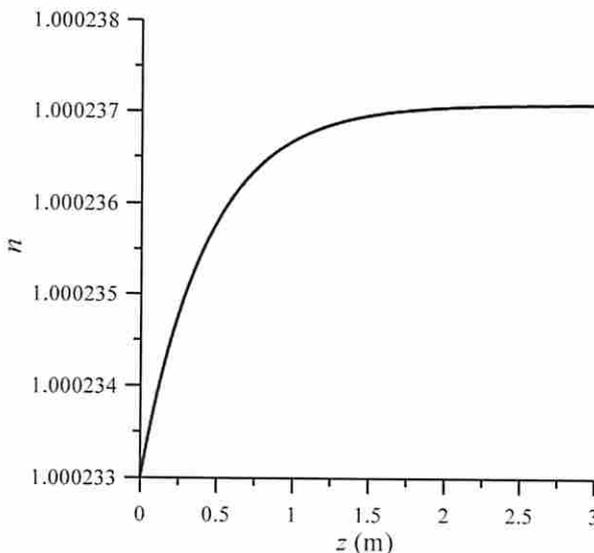


Figura 5. Variación del índice de refracción con la altura sobre el asfalto.

Como puede verse, la variación de  $n(z)$  se satura hacia los tres metros de altura y no sobrepasa el 0,0004% del valor sobre el asfalto, a pesar de lo cual puede ser observado el espejismo con nitidez.

## CONCLUSIONES

En este ejemplo hemos podido constatar la ayuda fundamental que presta el lenguaje matemático en la resolución de los problemas físicos. Se puede afirmar categóricamente que la Física no habría alcanzado el grado de desarrollo que tiene en la actualidad sin el concurso de la Matemática. También es cierto que gran parte del desarrollo de ésta última ha sido propiciado por el intento de resolver los problemas que la Física, la Técnica y las otras Ciencias han ido planteando a lo largo de la Historia. Por eso queremos terminar con un ruego a todos los estudiantes de Ciencias, en general, y en particular a los de Física: ¡Estudien Matemáticas, por favor!

## BIBLIOGRAFÍA

1. Greenler, R.: *Rainbows, Halos, and Glories* (Chap. 7). Cambridge University Press (USA), 151-177 (1980).
2. Carreras, C. y Yuste, M.: Guía didáctica del vídeo: "La luz a través de la Historia". Apéndice C, págs. 119-132. CEMAV-UNED, 1.ª edición (1995).
3. Puig Adam, P.: *Curso teórico-práctico de ecuaciones diferenciales aplicado a la Física y Técnica* (Capítulo XI). Ed. Biblioteca Matemática. Madrid (1962).
4. Kosa, T. & Palfy-Muhoray, P.: *Mirage mirror on the wall*. American Journal of Physics, **68** (12), 1120-1122 (2000).
5. Khular, E., Thyagarajan, K. & Ghatak, A.K.: *A note of mirage formation*. American Journal of Physics, **45** (1), 90-92 (1977).
6. Edlen, B.: *Metrología*, **2**, 71 (1966), de la que se hace referencia en *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 75.ª edición, p. 10-302, CRC Press (1994).

Manuel Yuste Llandres y Carmen Carreras Béjar  
Dpto. de Física de los Materiales

<sup>4</sup> Se ha incorporado también la curva de la Figura 3.