

pos muy diferentes han estudiado este tipo de efectos: la alternancia de dinámicas puede suprimir el caos [15], puede dar lugar a patrones espaciales [16], o retardar la decoherencia de sistemas cuánticos [17]; la alternancia de subespecies de bacterias puede también aumentar las probabilidades de supervivencia [18].

También ha mostrado que los procesos estocásticos con probabilidades que dependen del capital o de la historia, dan lugar a muchos fenómenos interesantes, como los que hemos descrito en el caso de juegos colectivos.

Éstas son algunas de las aplicaciones de la *Paradoja* que han aparecido en los últimos años, pero aún invita a investigadores de muy diversas áreas a explorar los efectos de la combinación o alternancia de dinámicas, ya que los juegos nos están indicando que alguno de estos efectos puede ser sorprendentes y desafiar nuestra intuición. Cualquiera puede pensar ejemplos de combinaciones de este tipo: alternancia de estrategias económicas, alternancia de temperatura o luminosidad en reacciones químicas, o alternancia de presión ambiental en dinámica de poblaciones.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G.P. Harmer y D. Abbott: *Parrondo's paradox*. Statistical Science, **14**, 206 (1999).
- [2] G.P. Harmer y D. Abbott: *Game theory - Losing strategies can win by Parrondo's paradox*. Nature, **402**, 864 (1999).
- [3] J.M.R. Parrondo y L. Dinis: *Brownian motion and gambling: from ratchets to paradoxical games*. Contemporary Physics, **45**, 147 (2004).
- [4] S. Karlin y H.M. Taylor: *A first course in stochastic processes*. 2nd ed. 1975, New York: Academic Press.
- [5] J.M.R. Parrondo: *Juegos de azar paradójicos*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, **4**, 355 (2001).
- [6] A. Ajdari y J. Prost: *Drift Induced by a Spatially Periodic Potential of Low Symmetry - Pulsed Dielectrophoresis*. Comptes Rendus De L'Academie Des Sciences, Serie II, **315**, 1635 (1992).
- [7] P. Reimann: *Brownian motors: noisy transport far from equilibrium*. Physics Reports, **361**, 57 (2002).
- [8] R.D. Astumian y M. Bier: *Fluctuation Driven Ratchets - Molecular Motors*. Physical Review Letters, **72**, 1766 (1994).
- [9] J.M.R. Parrondo, G.P. Harmer y D. Abbott: *New paradoxical games based on Brownian ratchets*. Physical Review Letters, **85**, 5226 (2000).
- [10] R. Toral: *Capital redistribution brings wealth by Parrondo's paradox*. Fluctuation and Noise Letters, **2**, L305 (2002).
- [11] L. Dinis y J.M.R. Parrondo: *Inefficiency of voting in Parrondo games*. Physica A, **343**, 701 (2004).
- [12] L. Dinis y J.M.R. Parrondo: *Optimal strategies in collective Parrondo games*. Europhysics Letters, **63**, 319 (2003).
- [13] F.J. Cao, L. Dinis y J.M.R. Parrondo: *Feedback control in a collective flashing ratchet*. Physical Review Letters, **93**, (2004).
- [14] J.M.R. Parrondo *et al.*: *Collective decision making and paradoxical games*. European Physical Journal-Special Topics, **143**, 39 (2007).
- [15] J. Almeida, D. Peralta-Salas y M. Romera: *Can two chaotic systems give rise to order?* Physica D, **200**, 124 (2005).
- [16] J. Buceta, K. Lindenberg y J.M.R. Parrondo: *Stationary and Oscillatory Spatial Patterns Induced by Global Periodic Switching*. Physical Review Letters, **88**, 024103 (2001).
- [17] C.F. Lee *et al.*: *Quantum coherence, correlated noise and Parrondo games*. Fluctuation and Noise Letters, **2**, L293 (2002).
- [18] D.M. Wolf, V.V. Vazirani y A.P. Arkin: *Diversity in times of adversity: probabilistic strategies in microbial survival games*. Journal of Theoretical Biology, **234**, 227 (2005).

Juan M.R. Parrondo

Dpto. de Física Atómica, Molecular y Nuclear y GISC
Universidad Complutense de Madrid

Matemáticas

La conjetura de Poincaré: protagonista del ICM 2006

La conjetura de Poincaré con todo lo que ha girado en torno al anuncio de su solución por parte del matemático ruso Grisha Perelman y la otorgación a éste de la medalla Fields han sido los protagonistas del Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Madrid en agosto del año 2006.



Logo del ICM 2006.

Desde el punto de vista periodístico, lo más relevante son algunas peculiaridades «románticas» de Perelman: no apareció a recibir el preciado galardón (equivalente al Premio Nobel en Matemáticas) o bien se halla actualmente en una situación marginal, no perteneciendo a ninguna institución académica. También se ha dado mucho eco al hecho de ser la conjetura de Poincaré uno de los 7 problemas del Milenio y como tal merecer su solución un premio de un millón de dólares que pagará la Fundación Clay. Ahora bien, las matemáticas que hay detrás de todo esto son tan deslumbrantes como para eclipsar los hechos románticos o económicos por más espectaculares que sean.



Henri Poincaré.



Marie Curie y Henri Poincaré conversando.

La conjetura de Poincaré fue establecida en 1904 por Poincaré en un artículo de una serie donde originó un campo nuevo de las matemáticas que se conoce por Topología Algebraica y cuyos métodos se extendieron dentro y fuera de la Geometría y la Topología [Po]. Pero vamos primero a dar una idea de lo que es la Topología.

Precisamente el año pasado celebramos el centenario del matemático suizo Leonard Euler que fue uno de los primeros a estudiar problemas topológicos. Euler se dio cuenta de que hay una rama de la geometría que debe estudiar problemas donde lo importante no son las medidas de las figuras sino otro tipo de propiedades, como

el conocer de cuántos pedazos consta el objeto o si posee o no «agujeros». En la introducción del artículo de Euler, donde resuelve el problema de los puentes de Königsberg, dice: «Además de esa parte de la geometría que trata de las magnitudes y que siempre ha recibido la mayor de las atenciones, existe otra previamente casi desconocida, que Leibniz mencionó por primera vez llamándola *La Geometría de la Posición*. Esta parte de la geometría se ocupa de determinar solamente la posición y buscar propiedades que resulten de esta posición» (ver [E]).



Leonard Euler.

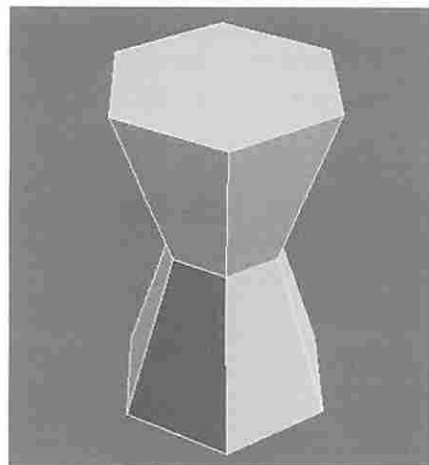
La geometría es el estudio de magnitudes y propiedades invariantes por cierto tipo de transformaciones y la topología es un tipo de geometría. Dependiendo del tipo de transformaciones se definen unas geometrías u otras: geometría euclidiana, geometría proyectiva, topología... Por ejemplo, la geometría euclidiana estudia invariantes de las figuras por movimientos rígidos; las medidas de segmentos y amplitudes de ángulos son invariantes y propiedades de la geometría euclidiana. La topología estudia invariantes de las figuras más profundos, invariantes por transformaciones que permiten deformar los objetos pero sin llegar a romperlos. En esta geometría una esfera y un cubo son indistinguibles, basta deformar el cubo «inflando» hasta redondearlo como la esfera. Un elipsoide es también lo mismo que una esfera, la superficie de un huevo de gallina o de una patata, pero no lo es la superficie de una rosquilla que es la superficie que los topólogos llaman un toro.

Si volvemos a Euler, uno de sus resultados más famosos es la fórmula para los poliedros que relaciona el número de caras, aristas y vértices. Si tomamos un poliedro convexo con C caras, A aristas y V vértices, entonces se verifica:

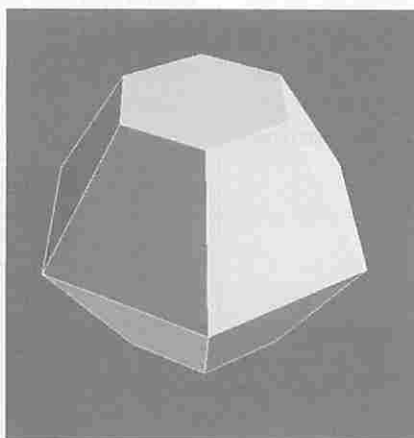
$$C - A + V = 2$$

Euler establece que esta fórmula es válida para poliedros convexos, es decir, poliedros cuyos ángulos diédricos tienen amplitud menor que 180° . Pero hay poliedros donde también se verifica la fórmula y no son convexos, por ejemplo, el poliedro P de la Figura 1a. Obsérvese que el poliedro de la Figura 1a se puede deformar sin romper, es

decir, transformar topológicamente en el poliedro P' de la Figura 1b. Es decir, los poliedros P y P' son topológicamente equivalentes. ¿Cuál es entonces la clase de poliedros en la que se verifica la fórmula de Euler? Por ejemplo, en la que el poliedro Q de la Figura 2 no verifica la fórmula de Euler, pues para él se tiene $C_Q - A_Q + V_Q = 0$.



(a)



(b)

Figura 1.

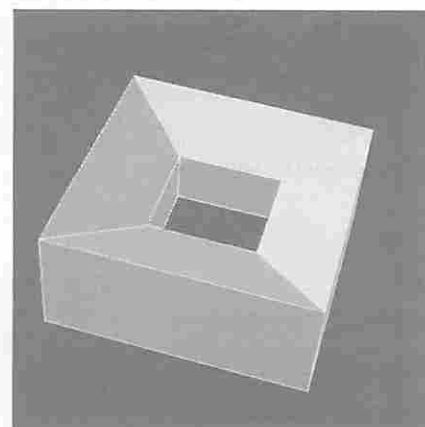


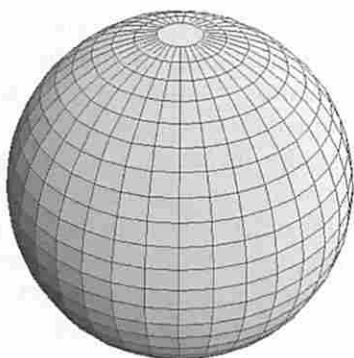
Figura 2.

Seguramente el lector ha observado ya que los poliedros P y P' son topológicamente esferas mientras que Q es topológicamente un toro. Lo que estos ejemplos nos ilustran es que la cantidad:

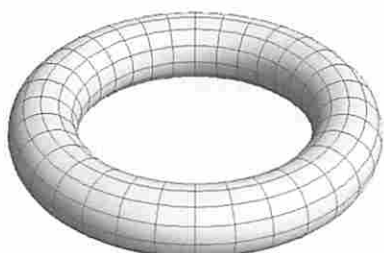
$$\text{Caras} - \text{Aristas} + \text{Vértices}$$

es un invariante topológico para los poliedros, este invariante se denomina *característica de Euler* y es uno de los más famosos y, por supuesto, más sencillos de definir. Por ejemplo, usando la característica de Euler se pueden clasificar topológicamente los poliedros y las superficies. Los tipos topológicos de superficies orientables son:

— Superficie con característica de Euler 2:



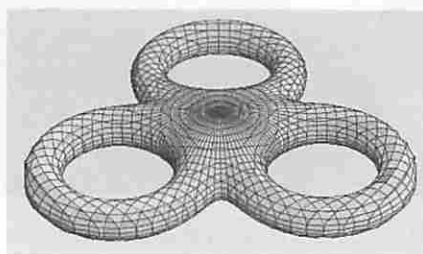
— Superficie con característica de Euler 0:



— Superficie con característica de Euler -2:



— Superficie con característica de Euler -4:



— etc...

La clasificación de las superficies es uno de los ejemplos donde la topología está perfectamente entendida y hay un invariante, la característica de Euler, que es completo para tal clasificación. Pero hay figuras y espacios importantes en geometría, y que provienen de problemas físicos o científicos en general, que son mucho más complicados que las superficies y que necesitan ser estudiados y clasificados topológicamente.

Un poliedro se puede construir a partir de un conjunto de triángulos donde a cada lado de cada uno de los

triángulos le «pegamos» el lado de otro triángulo. Con este tipo de construcciones hay que tener bastante cuidado, en los poliedros bidimensionales que hemos considerado antes había varias propiedades que no se verifican automáticamente si tomamos un conjunto de triángulos y empezamos a pegar los lados. Los poliedros se podían «inflar» de modo que desaparecieran las aristas y los vértices, es decir, mostrando que todos los puntos de un tal poliedro son iguales desde el punto de vista topológico. Los espacios que en topología son equivalentes a estos poliedros, es decir son topológicamente homogéneos en todos sus puntos, son las variedades bidimensionales. Otra propiedad que tenían nuestros poliedros es el hecho de ser bifaciales: con dos caras, una interna y otra externa. Dicho de otro modo una hormiga que se pasee por la superficie del «exterior» de nuestro poliedro no se encontrará con otra que se pasee por el interior. Esta característica de los poliedros viene dada por la orientabilidad. El hecho de que un poliedro sea variedad bidimensional y orientable son dos propiedades topológicas. Los espacios de las figuras anteriores, que están clasificados según la característica de Euler, son variedades bidimensionales orientables.

Una primera generalización es considerar en vez de triángulos, tetraedros y construir poliedros tridimensionales «pegando» las caras de tetraedros. Al igual que en dimensión dos, se pueden definir variedades tridimensionales orientables o 3-variedades.

Vamos a construir un ejemplo sencillo. Primero lo hacemos en el caso bidimensional. Consideramos un triángulo T y coloreamos sus caras con tres colores. Ahora consideramos otro triángulo T' igual al anterior y con la misma coloración de los lados. Pegamos los lados de los triángulos que tienen los mismos colores. El resultado son dos triángulos pegados por el borde, ahora «inflamos» el poliedro y obtenemos una esfera. Es decir el poliedro que hemos construido es topológicamente la esfera. Ahora consideremos dos tetraedros iguales, con las caras coloreadas y pegamos las caras con el mismo color. Obtenemos una variedad de dimensión tres que es topológicamente equivalente a una esfera de un espacio de dimensión cuatro, es decir, en un espacio tetradsimensional el conjunto de puntos que distan r de un punto dado. Esta variedad se llama la esfera tridimensional, se representa por S^3 y es precisamente sobre ella que versa la conjetura de Poincaré. Por lo tanto, S^3 es topológicamente la esfera unidad centrada en el origen de \mathbb{R}^4 :

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

Además, los poliedros y variedades bidimensionales y tridimensionales se generalizan a todas las dimensiones, usando en vez tetraedros los símlices n -dimensionales.

La característica de Euler para variedades tridimensionales se puede generalizar con la fórmula:

$$-n^\circ \text{ de tetraedros} + n^\circ \text{ de triángulos} - n^\circ \text{ de aristas} + n^\circ \text{ de vértices}$$

Una fórmula similar se usa para definir la característica de Euler para poliedros n -dimensionales y lo importante es que se puede demostrar que este número es un invariante topológico.

Pero la sorpresa es que si se calcula la característica de Euler de una variedad tridimensional orientable ¡siempre da cero! Así que desgraciadamente la característica de Euler sirve para muy poco en la clasificación de las variedades de dimensión tres orientables. Se necesitan invariantes topológicos mejores.

A principios del siglo xx , el matemático francés Henri Poincaré, en una serie de artículos sobre topología (ver [Po]), Análisis Situs en su época, define nuevos y potentes invariantes topológicos. En vez de asociar a cada espacio o figura simplemente un número, le asocia toda una estructura algebraica: un grupo o una colección de grupos. Es decir, en vez de asociar únicamente un número, hacer corresponder a cada espacio un conjunto donde hay definida una multiplicación. En una primera etapa los grupos que definió Poincaré eran grupos donde la multiplicación tenía la propiedad conmutativa y se llamaron grupos de homología. Lo importante es que los grupos de homología son los mismos desde el punto de vista algebraico para dos figuras que son topológicamente equivalentes, es decir, las estructuras algebraicas de los grupos de homología son invariantes topológicos. De este modo se origina la Topología Algebraica.

El mismo Poincaré se plantea el alcance de sus nuevos invariantes y en uno de los artículos de la serie construye una variedad de dimensión tres orientable que no es topológicamente equivalente a la esfera tridimensional pero con los grupos de homología de S^3 . La 3-variedad que construye Poincaré se obtiene de un dodecaedro pegando de un modo especial las caras opuestas y se llama la esfera homológica de Poincaré. Para distinguir S^3 y la esfera homológica, Poincaré construye otro invariante, que también es un grupo, pero en este caso no conmutativo en general. Este grupo invariante se llama primer grupo de homotopía, grupo fundamental o *grupo de Poincaré*. En el caso de la esfera tridimensional, el grupo de Poincaré es el grupo trivial que tiene un único elemento $\{1\}$ y la tabla de multiplicación no es muy difícil de adivinar $1 \times 1 = 1$. Un espacio con grupo fundamental trivial se suele decir que es simplemente conexo. El grupo de Poincaré se construye mediante clases de equivalencia de caminos cerrados en la variedad. Los alumnos de matemáticas que hayan cursado topología se recordarán de todos los ingredientes técnicos para dar con precisión la definición. Así, un espacio es simplemente conexo si cualquier camino cerrado se deforma continuamente a un punto.

Lógicamente, al igual que con los grupos de homología es importante saber cuál es la potencia de grupo fundamental y Poincaré entonces establece su conjetura:

«Una variedad de dimensión tres compacta (para nosotros: que se construye utilizando un número finito de tetraedros) y orientable con grupo funda-

mental trivial (o simplemente conexa) es topológicamente la esfera tridimensional.»

Esta conjetura ha dinamizado de modo importantísimo la topología y ha habido progresos y pasos que han ido abriendo el camino, es decir, la resolución de la conjetura de Poincaré es el resultado de un esfuerzo colectivo de muchos topólogos aunque, por supuesto, algunos de ellos deben ser justamente destacados.

La conjetura de Poincaré se puede enunciar en dimensiones superiores. Aunque no puede tener el mismo enunciado: es fácil construir variedades de dimensión cuatro con grupo de Poincaré trivial. La conjetura de Poincaré se enuncia en dimensiones superiores diciendo que *toda variedad compacta de dimensión n con el tipo de homotopía de una esfera* (para no especialistas: con los mismos invariantes definidos por la Topología Algebraica) *es topológicamente la esfera n -dimensional*. Es sorprendente saber que la conjetura de Poincaré fue demostrada para dimensiones superiores a cuatro por S. Smale en 1960 [S] mucho antes que en dimensión tres (mereciendo así la medalla Fields). A partir de esta fecha se trabajó mucho sobre las variedades de dimensiones superiores a cuatro y fueron bastante bien entendidas, sobre todo a partir de los trabajos de Smale, Milnor, Browder y Novikov, utilizando como herramientas principalmente cobordismo y teoría de la cirugía.

En dimensión 4 hubo que esperar hasta los años 80 para que M. Freedman demostrara la conjetura y también se hiciera con la medalla Fields. Pero en dimensión tres, que fue donde fue originalmente formulada por Poincaré, el problema permanecía abierto.

En la misma época, en el estudio de las variedades de dimensión tres había progresos importantes. En primer lugar y usando las técnicas clásicas de topología se demostró que cualquier variedad de dimensión tres se puede cortar de forma «canónica» por esferas y toros «esenciales» (son trabajos de Kneser-Haken-Milnor y de Jaco-Shalen-Johansson). Poco después, W. Thurston conjeturó además que las piezas resultantes de tales cortes admiten estructura geométrica, conjetura de geometrización de Thurston [T]. Por geometría sobre una variedad se entiende, de forma coloquial, una métrica que permite definir rectas (geodésicas), medir distancias y ángulos y que además es, completa y al menos localmente, homogénea, es decir, sin puntos privilegiados. Hay ocho posibles geometrías para las piezas de las variedades de dimensión tres, entre ellas la geometría esférica, la euclidiana y la hiperbólica, esta última la más rica. Thurston estableció algunos casos especiales de su conjetura y consiguió la medalla Fields en 1982. La conjetura de Thurston implica la conjetura de Poincaré y reorientó los trabajos de muchos topólogos, ofreciendo métodos geométricos en el estudio de las variedades tridimensionales. Por ejemplo, como fruto de estas ideas, se ha demostrado recientemente por M. Boileau, B. Leeb y J. Porti, siguiendo la intuición de Thurston, el teorema de geometrización de orbifolds, que implica en particular que de existir un contraejemplo a la conjetura de Poincaré sería una 3-variedad totalmente asimétrica.

El método de la prueba finalmente ha venido precisamente estudiando las métricas sobre las variedades de dimensión tres. La conjetura de Thurston afirmaba que las 3-variedades se podían cortar en pedazos y que dichos pedazos tenían una geometría o métrica «buena». La búsqueda de esta buena métrica se lleva a cabo usando métodos de geometría diferencial y de análisis matemático, es decir, hemos de salir del ámbito de la topología. La llave del avance en la demostración ha sido el uso del llamado flujo de Ricci, que de una forma análoga al flujo del calor nos permite comprender el método de evolución de las métricas sobre una variedad tridimensional. Este ataque a las conjeturas de Thurston y de Poincaré se debe a Richard Hamilton que es, sin duda, uno de los responsables más importantes para que toda esta historia llegue a su fin. La ecuación del flujo de Ricci es una ecuación no-lineal parabólica y Hamilton ha desarrollado métodos para el control de sus singularidades (ver [H], [L], [M]). Las singularidades del flujo de Ricci en cierto modo reproducen el proceso de corte en pedazos por esferas y toros de las 3-variedades.

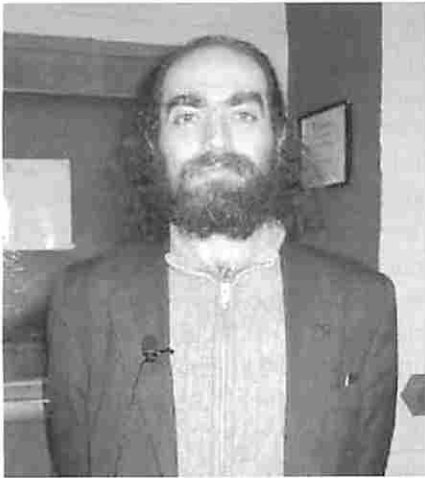


Richard Hamilton.

Sin embargo, Hamilton no consiguió un control suficiente sobre estas singularidades y es aquí donde aparece Perelman. Grisha Perelman introduce nuevas técnicas y conceptos y consigue el llamado flujo de Ricci con cirugía con el que demuestra la conjetura de Poincaré y también la conjetura de geometrización de Thurston (ver [L] y [M]). Los resultados de Perelman fueron dados a conocer en una serie de prepublicaciones que son accesibles a todo el mundo por Internet en una base de «preprints» [Pe1], [Pe2] y [Pe3]. Estas prepublicaciones no han sido enviadas a publicar a revistas especializadas y no están siendo reelaboradas por parte del autor siguiendo las indicaciones o críticas de editores y «referees», ésta es otra de las «peculiaridades románticas» por parte de Perelman. Así, la verificación y confirmación de la validez de la demostración de Perelman ha recaído sobre la comunidad matemática. También aquí ha habido polémicas; por ejemplo, la que ha desatado la publicación por parte de los matemáticos chinos Cao y Zhu de una demostración

de la conjetura de Poincaré siguiendo los artículos de Perelman en el Asian Journal of Mathematics (¡más de 300 páginas!: [CZ]), los autores califican su avance como ¡el más importante llevado a cabo por la matemática moderna china! Otros piensan que estos autores se atribuyen méritos que no les corresponden (ver el título de la referencia [CZ]).

De lo que no cabe duda es que uno de los momentos más importantes del pasado ICM 2006 fue cuando John W. Morgan, encargado de dar una de las conferencias plenarias del congreso sobre los avances en la conjetura de Poincaré, pronunció la frase: «Grigory Perelman has solved the Poincaré Conjecture» ([M]).



Grisha Perelman.

BIBLIOGRAFÍA

[BP] Boileau, Michel; Leeb, Bernhard; Porti, Joan. Geometrization of 3-dimensional orbifolds. *Ann. of Math.* **162** (2) no. 1 (2005), 195-290.

- [CZ] Cao, Huai-Dong; Zhu, Xi-Ping. A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures-application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. *Asian J. Math.* **10** (2006), no. 2, 165-492.
- [E] Euler, Leonard. «Solutio problematis ad Geometriam Situs pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, **8**, 1736, 128-140.
- [F] Freedman, Michael Hartley. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.*, **17** (1982), no. 3, 357-453.
- [H] Hamilton, Richard S. Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, **7** (1999), no. 4, 695-729.
- [L] Lott, John. The work of Grigory Perelman, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006. Volumen I, 66-76.
- [M] Morgan, John W. The Poincaré Conjecture, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006. Volumen I, 711-736.
- [Pe1] Perelman, Grisha. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, Preprint 2002, arXiv:math.DG/0211159.
- [Pe2] Perelman, Grisha. Ricci flow with surgery on three-manifolds, Preprint 2003, arXiv:math.DG/0303109.
- [Pe3] Perelman, Grisha. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, Preprint 2003, arXiv:math.DG/0307245.
- [Po] Poincaré, Henri. Cinquième complément à l'analysis situs, *Rend. Circ. Math. Palermo* **18** (1904), 45-110.
- [S] Smale, Stephen. Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Ann. of Math.*, **74** (2), 1961, 391-406.
- [T] Thurston, William P. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **6** (1982), no. 3, 357-381.

Antonio F. Costa González
Dpto. de Matemáticas Fundamentales

Química

Polimorfismo: diamante, hielo, fármacos y chocolate

La palabra *polimorfismo* proviene del griego (polu, j = mucho, numeroso, morf, -hj = forma, figura) y significa muchas formas. La primera aparición del término data de 1965, en relación con la diversidad en el mundo de la moda, desde entonces se ha empezado a utilizar en campos tan diversos como en biología, en química e incluso en lenguajes de programación para definir diferentes realidades.

En biología, el polimorfismo se refiere a un polimorfismo genético, es decir, los diferentes alelos de un gen entre una población normalmente expresados como diferentes fenotipos, por ejemplo, el color de la piel es un polimorfismo.

En el lenguaje de programación un objeto polimórfico es una entidad, como una variable o un objeto de un subprograma, a la que se permite tener valores de diferentes tipos en el curso de la ejecución.

En química, el polimorfismo es relativo a la ciencia de los materiales y a la química orgánica y se define como la capacidad de una especie química para existir en más de una forma o estructura cristalina.

En el estado cristalino, las moléculas presentan un alto orden estructural, dando lugar a la celdilla unidad, que puede ser monoclinica, triclinica, tetragonal, hexagonal, romboidal, ortorrómbica y cúbica, la repetición de la celdilla unidad en las tres direcciones da lugar a la for-