TALLER Y LABORATORIO

LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

Simulación con Maple del Teorema Fundamental del Cálculo

INTRODUCCIÓN

¿De cuántas ocasiones dispone un estudiante para actuar en un laboratorio y contrastar, experimentalmente, las tesis de un teorema? Contestar a esta pregunta, sin hacerlo fuera del ámbito académico, requiere establecer una serie de consideraciones. La primera consideración, sin duda, es determinar, qué se entiende por experimentar. Una vez definido, quedaría por establecer algunas precisiones para que tal experimentación fuera provechosa al alumno. En este caso, dejaremos al lector la posibilidad de que deduzca qué estamos entendiendo por experimentación en este trabajo.

En cualquier caso, hay que contestar a las siguientes cuestiones básicas: ¿Qué se experimenta?, ¿cómo se desarrolla el experimento?, ¿cuándo experimentar?, y ¿dónde realizar la experimentación?

¿Qué se experimenta?

En este trabajo, se experimenta con el *Teorema Fundamental del Cálculo*, que puede ser enunciado de la forma que se indica en el recuadro.

¿Dónde realizar la experimentación?

Los experimentos se realizan en un micro mundo especial: Un ordenador, que tiene instalado el programa Maple.

El programa Maple, al que nos referimos, puede ser empleado por nuestros alumnos, puesto que la UNED dispone de una licencia de uso para el campus y para el ordenador de cualquier estudiante que curse alguna de las asignaturas del Departamento de Matemáticas Fundamentales. La versión actual disponible es Maple 12, aunque el código que se presenta se puede ejecutar en versiones posteriores al Maple 7.

¿Cómo se desarrolla el experimento?

Con el citado programa, se puede trabajar de dos formas: Una numérica y otra simbólica. La forma numérica, permite intuir procesos y estudiar la estabilidad de los cálculos, mientras que la forma simbólica opera de forma exacta y con algoritmos análogos a los que empleamos en nuestros razonamientos al desarrollar los cálculos. Así pues, en esta experimentación, se emplean las dos formas de trabajar.

Conviene recordar, que los cálculos realizados por el programa pueden ser aproximados o exactos, pero estos se realizan en un entorno reducido del área matemática. No se puede olvidar, que una cosa es un número o una función, y otra cosa es, lo que Maple considera que es, un número o una función.

¿Cuándo experimentar?

Si un alumno quiere experimentar con el código, le recomendamos que lo haga después de estudiar la materia. Pensamos, que se requiere un mínimo de conocimientos para no generar usos incorrectos y crearse dificultades didácticas.

No nos cabe la menor duda de que los procesos visuales son necesarios en los procesos de aprendizaje, por ello, el código genera representaciones visuales, gráficas, imágenes estáticas, e imágenes dinámicas o animaciones.

Las imágenes tienen un fuerte impacto en el proceso de aprendizaje, pero la interpretación errónea de imágenes, puede acarrear grandes dificultades a tal aprendizaje. Cabe recordar que cualquier gráfica o cualquier dibujo generado por el ordenador no es nada más que una aproximación de la realidad. Para evitar algunas interpretaciones erróneas se aconseja otra

> Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable sobre el intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$, y la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, definida por $F(x)=\int_a^b f(t)dt$, para cualquier $x\in[a,b]$. Si la función f es una función continua en $[a,b]$, entonces la función F es una función derivable en (a,b) y con derivada lateral en los extremos del intervalo. Además se verifica $F'(x)=f(x)$.

vez que el estudiante experimente este laboratorio únicamente como refuerzo a lo estudiado.

EL LABORATORIO

En este laboratorio, el elemento esencial es la función que se utiliza. Evidentemente el usuario puede utilizar todas las formas posibles que permite Maple para definir funciones integrables o continuas. Así pues, el código tiene incluidas tres tipos de funciones, si bien sólo hay una activa a la hora de ejecutar la pila de instrucciones:

- Tipo 1: Función continua positiva.
- Tipo 2: Función continua.
- Tipo 3: Función integrable Riemann.

Los primeros resultados gráficos son: la generación de la gráfica de la función y la visualización de la integral.

Se puede ver la comparación de la integral de una función positiva y el área de la región delimitada por la gráfica con la parte correspondiente del eje OX. Además, se puede visualizar dinámicamente que el área de esa región es la integral del valor absoluto de la función.

Lo siguiente, que se trata de forma directa, es la función definida por una integral, mostrando su gráfica y observando que se trata de una función continua. En esta situación, se realiza una comprobación visual del enunciado del *Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral*. En el caso de tratar con una función continua se tiene asegurada la existencia de un punto que toma el valor medio, que se aproxima numéricamente.

La experimentación con el *Teorema Fundamental del Cálculo* se realiza con cálculo directo y con simulación gráfica.

En el cálculo directo, se muestran dos casos:

- Caso 1: Se utiliza la función del usuario, definida al inicio, como función integrando, para que Maple realice los cálculos oportunos.
- Caso 2: Se aplica un proceso de cálculo simbólico. Se define la función formalmente, sin dar valor al integrando ni al intervalo de integración.

En el proceso de simulación, se muestran otros dos casos:

- Caso 1: El cálculo de la derivada de la función definida con una integral de una función continua en un punto del dominio.
- Caso 2: La determinación de la derivada de la función definida con una integral de una función continua.

En los casos de simulación, se pueden visualizar los procesos mediante animaciones que con sucesivas imágenes determinan la recta tangente, y el valor de su pendiente, o reconstruyen, punto a punto, la función derivada; la función integrando.

Este laboratorio concluye con la Regla de Barrow, la fórmula de Newton-Leibniz, realizando de forma simbólica y de forma visual la diferencia de dos primitivas de una misma función.

EL CÓDIGO

El grueso de este laboratorio lo constituye el código desarrollado en su día, por el autor, para el trabajo titulado: "Simulación educativa del Teorema Fundamental del Cálculo", en colaboración con el Dr. José Ángel Dorta Díaz de la Universidad de La Laguna, que fue presentado en Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) de Canarias (2003).

El usuario del laboratorio puede solicitar por correo electrónico (miguel@mat.uned.es) una copia del archivo Maple con todo el código. A continuación se muestra las distintas secciones y subsecciones que se presentan en la pila constituyente del código, conteniendo en algunos casos la respuesta de Maple, ya sea gráfica o textual.

1. Función integrable Riemann & Integral de una función

Inicio de datos para la simulación (activar o modificar sólo un tipo) (puede cambiar la expresión de cada función)

1.1. Tipo 1:

Función continua positiva

f:=x->3+sin(x):	Función continua positiva
IdD:=[0,2*Pi]:	Intervalo de definición
IdA:=[0,4]:	Intervalo de alturas

1.2. Tipo 2:

Función continua

f:=x->x*(x-1)*(x+1):	Función continua
IdD:=[-1,1]:	Intervalo de definición
IdA:=[-1,1]:	Intervalo de alturas

1.3. Tipo 3:

Función integrable Riemann

p:=x->x*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4): Función auxiliar

f:=x->4*exp(-x)*Heaviside(p(x))+(2-exp(-x))*Heaviside(-1*p(x)): Función integrable Riemann

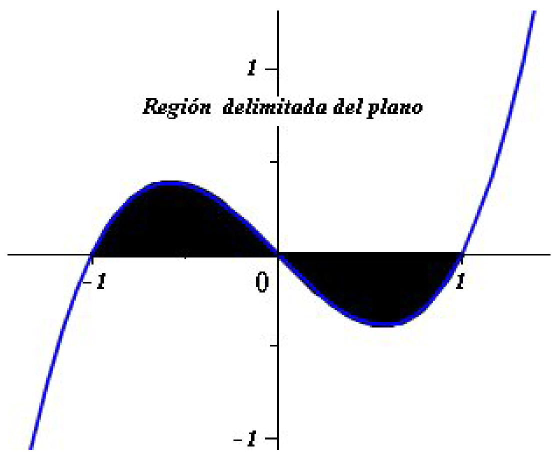
100cias@uned
Facultad de Ciencias
Enseñanza
Nº 1 (NUEVA ÉPOCA) | 2008

IdD:=[0,5]: Intervalo de definición
IdA:=[0,4]: Intervalo de altura

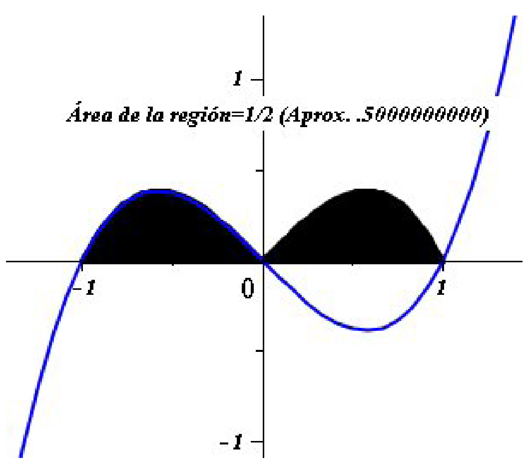
1.4. Gráfica de la función e integral

1.5. Interpretación geométrica de la integral

1.5.1. La integral de una función positiva representa el área de la región delimitada por la gráfica, con la parte correspondiente del eje OX



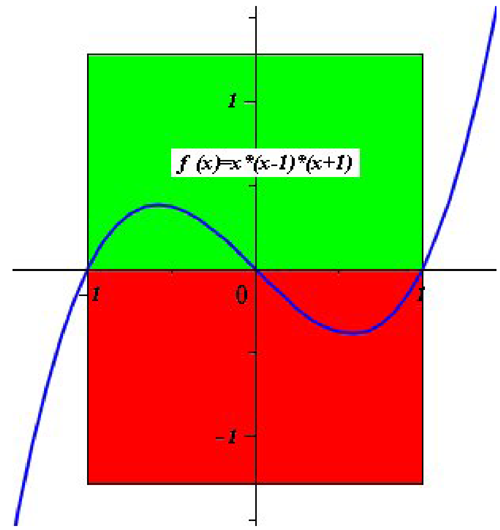
1.5.2. El área de la región delimitada por la gráfica, con la parte correspondiente del eje OX, es la integral del valor absoluto de la función



1.5.3. Simulación animada del cálculo del área de la región delimitada por la gráfica, con la parte correspondiente del eje OX

1.6. Lema: "Acotación de la integral"

1.6.1. Comprobación visual (animación)

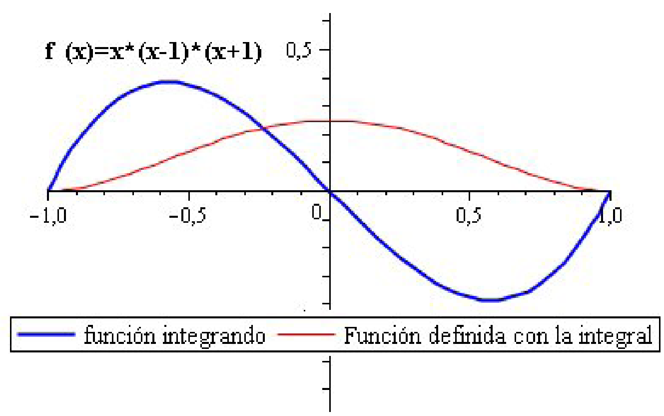


1.6.2. Razón: toda función continua en un compacto alcanza un valor máximo absoluto, M, y uno mínimo absoluto, m

Valores aproximados de x_1 y x_2, tales que, $m = f(x_1)$ y $M = f(x_2)$

2. Función definida por una integral

2.1. Definición y gráfica



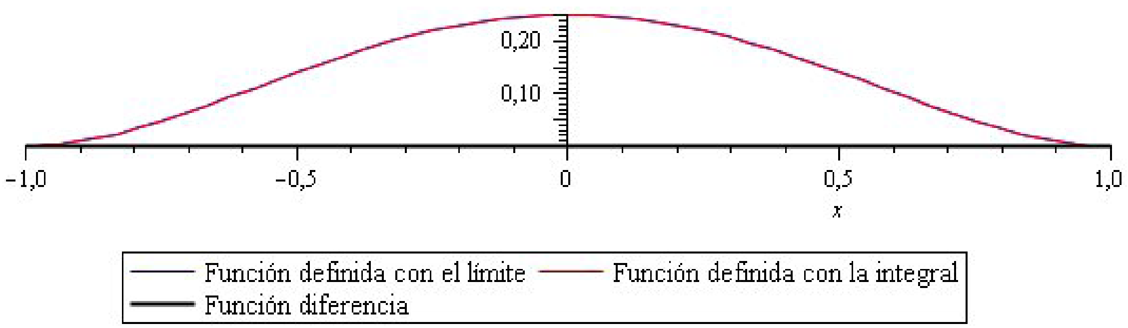
2.2. Es una función continua

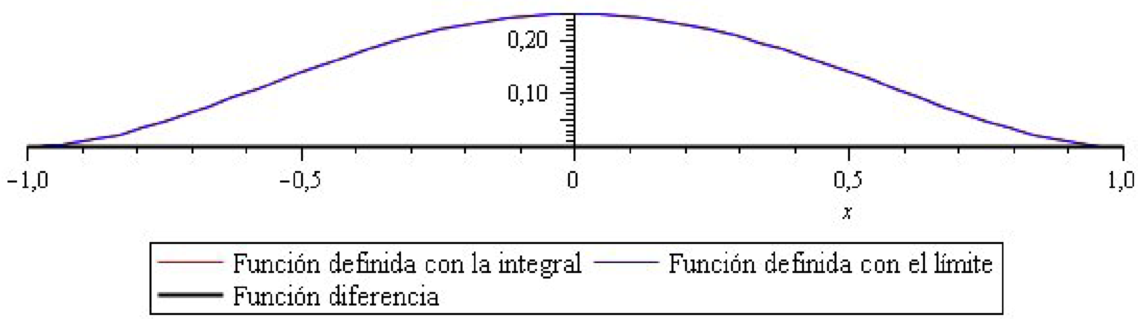
Comprobación de la **continuidad en un punto** del intervalo:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^{x} t\,(t-1)\,(t+1)\,dt \right) = 0.1406250000$$

Comprobación de la **continuidad en todo el intervalo:**

$$LimF := x \to \lim_{t \to x,\mathrm{real}} F(t)$$





2.3. Teorema del valor medio del cálculo integral

2.3.1. Cálculo valor medio: *El valor medio = 0 se alcanza en x =1*

2.3.2. Comprobación visual (animación)

3. Teorema fundamental del cálculo

3.1. Cálculo directo:

3.1.1. Caso 1: Función utilizada desde el inicio

La **función** definida con una integral

La **derivada** de la función en un punto genérico

La **función derivada** de la función en un punto genérico

3.1.2. Caso 2: Cálculo simbólico. Si se define la función formalmente, sin dar valor al integrando, ni al intervalo de integración.

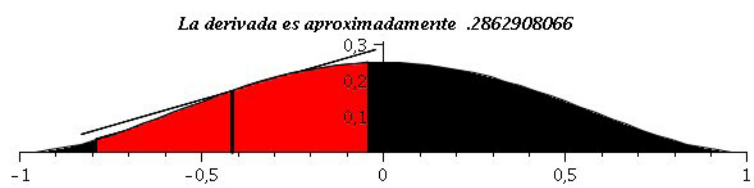
La **función** definida con una integral

La **derivada** de la función en un punto genérico

La **función derivada** de la función en un punto genérico

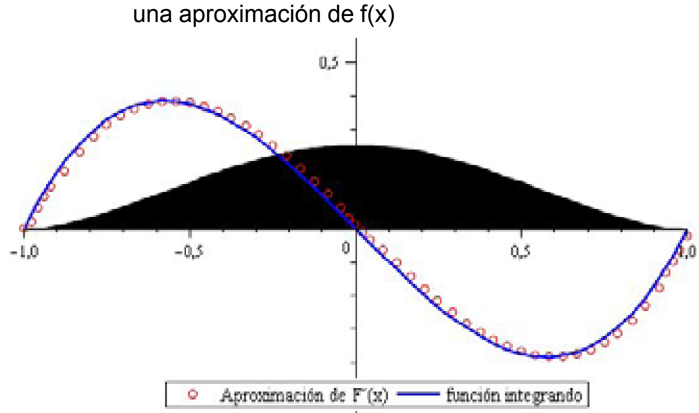
3.2. Simulación del teorema fundamental del cálculo: Se trata de aproximar tanto la deriva en un punto de la función F(x), como de la función derivada F´(x)

3.2.1. Caso 1: Determinación de la **derivada en un punto** de la función F(x) del dominio



3.2.2. Caso 2: Determinación de la **función derivada** de F(x) .

Se puede comprobar que la aproximación de F´(x) es una aproximación de f(x)



“F(x) es una función primitiva de la función f(x)”

4. Regla de Barrow (fórmula de Newton-Leibniz)

4.1. Cálculo usando G. Se considera la función G(x) como como una función primitiva de la función continua g
Cálculo de la **integral** de una función g en intervalo [r,s]
Ejemplo de la función f considerada inicialmente

4.2. Diferencia de dos primitivas. Se consideran las funciones H(x) y T(x) como dos funciones primitivas de la función continua g
La función diferencia es una función constante, pues la función derivada es nula
Conocida una función primitiva de una función, cualquier otra primitiva se obtiene sumando una constante a la función conocida

Miguel Delgado Pineda
Dpto. de Matemáticas Fundamentales