100cias@uned
Facultad de Ciencias

N.º 8 (2015)
ISSN: 1989-7189

Nuestra Facultad

TESIS DOCTORALES

SUPERFICIES DE RIEMANN CON MORFISMOS P-GONALES IRREGULARES

La teoría de las superficies de Riemann es una de las joyas de la matemática clásica cuyas ramificaciones parecen no tener fin. Como se comprueba al analizar la lista de matemáticos, de primera línea, que han contribuido a su desarrollo: Weierstrass, Harnack, Fuchs, Picard, Hilbert, Poincare, Klein, Teichmüller,Weil, Ahlfors, Bers, etc. lista que llega hasta Maryam Mirzakhani, la primera mujer ganadora de una medalla Field (2014), por sus trabajos en un campo relacionado [1]: Los espacios móduli y de Teichmüller, siendo el mismo Riemann quien inició su estudio al establecer que asignando un punto a cada posible estructura analítica en una superficie compacta de género g, obtenemos una variedad real de dimensión $6g - 6$.

Una dificultad del análisis complejo era la existencia de funciones, muchas de ellas elementales como la raíz cuadrada, que no podían definirse en todo el plano complejo manteniendo la continuidad, existiendo incluso puntos en los que no podía hacerse en un disco alrededor suyo por pequeño que fuera su radio. Riemann resolvió esta dificultad "pegando trozos del plano complejo" y ampliando el análisis complejo al espacio formado de este modo que constituía una superficie.

Distintas funciones daban lugar a distintas superficies y esto establecía un nexo de unión entre el análisis y la geometría. Esta característica de las superficies de Riemann se vio ampliada de forma que relacionan ramas aparentemente muy alejadas de la matemática: Espacios de gérmenes de funciones holomorfas, cuerpos de funciones algebraicas, curvas afines y proyectivas, variedades analíticas complejas, o espacios de órbitas. No deja de ser sorprendente que alguno de sus teoremas como el de Riemann Roch, que conecta características analíticas y topológicas, pueda demostrarse mediante métodos puramente analíticos [2], topológicos (cohomología de haces [3]), o algebraicos ("adeles", [4]).

No todos los tipos de funciones complejas se pueden definir en todas las superficies y así las superficies compactas no admiten más funciones holomorfas (con derivada compleja en cada punto) que las constantes. Un resultado, en absoluto trivial, establece, sin embargo, que en toda superficie de Riemann se pueden definir funciones meromorfas [2,3], aquellas cuyo módulo tiende a infinito (de una manera "controlada") en un conjunto discreto de puntos (polos) y por tanto pueden ser consideradas como recubridores ramificado de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ (plano complejo al que se le ha añadido el punto del infinito).

Una superficie de Riemann compacta S que soporta una función meromorfa φ de grado p, es decir que cada punto regular (todos salvo un conjunto discreto) de $\hat{\mathbb{C}}$ tiene p preimágenes distintas, se denomina p-gonal. Si consideramos el conjunto de puntos $B \subset \hat{\mathbb{C}}$ con un número menor que p de preimágenes distintas y $E = \varphi^{-1}(B)$ tendremos que $S - E$ es un recubrimiento topológico de p hojas de $\hat{\mathbb{C}} - B$. Es decir alrededor de cada punto regular $\hat{\mathbb{C}}$ existe un disco cuya preimagen por φ son p discos idénticos disjuntos (idénticos salvo deformaciones contínuas).

Una curva cerrada "dibujada" en $\hat{\mathbb{C}} - B$ se "levanta" a varias curvas, según donde empecemos a "levantar", no necesariamente cerradas, en $S - E$. Toda curva cerrada en $S - E$ se proyecta en una curva, ahora si cerrada, de $\hat{\mathbb{C}} - B$ y así el grupo fundamental de $S - E$, conjunto de curvas cerradas con origen en un punto dado de $S - E$ (considerándose iguales dos de ellas si existe una deformación continua que transforma una en otra, ojo no se pueden atravesar los puntos de E), que se denota $\pi_1(S - E, x)$ se "proyecta" en un subgrupo del grupo fundamental de $\hat{\mathbb{C}} - B$.

En la actualidad, el caso mejor conocido es aquel en el que $\varphi_*(\pi_1(S - E, x))$ ("proyección") es un subgrupo normal de $\pi_1(\hat{\mathbb{C}} - B, z)$, dichos recubridores se denominan regulares, normales, o de Galois.

La razón principal es que en dichos recubridores el grupo cociente $\pi_1(\hat{\mathbb{C}} - B, z)/\varphi_*(\pi_1(S - E, x))$ es isomorfo al grupo de automorfismos de S compatibles con φ ("Deck Transformations"). Una explicación muy intuitiva de lo que esto significa, aunque quizás algo políticamente incorrecta, puede verse en los capítulos: "Men who don't realize that their wives have been interchanged" de la referencia [5], que esencialmente indica que el "levantamiento" de cualquier curva cerrada en $\hat{\mathbb{C}} - B$ da origen, en el caso de recubridores regulares, o bien a todo curvas cerradas o bien a todo curvas abiertas en $S - E$ independientemente de punto en que empiece el levantamiento.

El objeto de la tesis ha sido el estudio de las superficies de Riemann que no son de este tipo. *Es decir son un recubrimiento ramificado irregular de la esfera de Riemann. En estas superficies no son aplicables las técnicas estándar, aplicadas con éxito, a las superficies que son un recubrimiento regular.*

Por supuesto un estudio exhaustivo de dichas superficies sería un objetivo utópico, por lo que nos hemos limitado a analizar algunos aspectos determinados de algunos tipos específicos de dichas superficies.

Uno de los estudios se ha referido a las superficies p-gonales (p primo mayor que 2) tales que el grupo de monodromía $\varphi_*(\pi_1(S - E, x))$ correspondiente al morfismo p-gonal es isomorfo al grupo diédrico D_p (simetrías de un polígono de p lados). Concretamente se han estudiado las superficies reales.

Una superficie de Riemann real es un par (X, σ) donde X es una superficie de Riemann y σ una involución anticonforme. Hay una equivalencia functorial entre la categoría de las superficies de Riemann reales y la de las curvas algebraicas definidas por polinomios con coeficientes reales [6,7]. El estudio de las curvas algebraicas reales es clásico en matemáticas y tiene importantes aplicaciones como la criptografía.

Una primera aproximación a su clasificación se realiza mediante equivalencia topológica. Dos superficies de Riemann reales (X, σ) y (X', σ') son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X'$ tal que $\sigma = h^{-1}\sigma' h$.

Cada clase de equivalencia se caracteriza por la acción de la involución anticonforme σ en la superficie. Si (X, σ) es una superficie de Riemann real el conjunto de puntos fijados por σ ($Fix(\sigma)$) es o bien vacío o bien consiste en k curvas disjuntas denominadas "óvalos" (ver [8,9]). El tipo topológico, también conocido como "especie" de σ, viene dado por el número de óvalos y la orientabilidad o no de la superficie cociente $\frac{X}{<\sigma>}$. Si σ tiene k óvalos y $\frac{X}{<\sigma>}$ es orientable se dice que (X, σ) tiene especie $+k$, si $\frac{X}{<\sigma>}$ es no orientable se dice que (X, σ) tiene especie $-k$.

El teorema de Harnack [10] restringe las posibles especies de las superficies de Riemann reales, que pueden ser $1 \leq k \leq g + 1$, $k \equiv g + 1 \mod(2)$ cuando $\frac{X}{<\sigma>}$ es orientable y $0 \leq k \leq g$ cuando $\frac{X}{<\sigma>}$ es no orientable.

Las superficies de Riemann de alguna clase específica tienen, en general, mayores restricciones. Por ejemplo las posibles especies de las superficies de Riemann reales hiperelípticas fueron determinadas por Felix Klein. Una generalización de este resultado para superficies p-hiperelípticas puede verse en la referencia [11].

En la tesis se han obtenido las restricciones de las especies para el caso de las superficies p-gonales diédricas reales, y también las restricciones para los géneros de dichas superficies.

El otro estudio se refiere a superficies con más de un morfismo n-gonal. Un morfismo n-gonal es una aplicación holomorfa de grado n de X en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, si existe tal aplicación la superficie X se denomina n-gonal.

Como consecuencia de la desigualdad de Severi-Castelnuovo si n es primo y el género de la superficie cumple $g > (n - 1)^2$ entonces el morfismo n-gonal, si existe, es único. Es la denominada acotación de Accola [12].

Conocer la unicidad del morfismo n-gonal es en muchos casos importante, por ejemplo en el caso de una familia $\mathcal{F}$ de superficies de Riemann n-gonales en que el morfismo n-gonal es único, pues el estudio de dicha familia se reduce al estudio de la configuración de valores en puntos en la esfera de Riemann (los puntos de ramificación de los morfismos). Usando esta idea pueden estudiarse los grupos de automorfismos de superficies n-gonales.

Se quieren encontrar familias de superficies de Riemann, de género g, con varios morfismos p-gonales siendo p un entero primo y $g \leq (p - 1)^2$. Al ser p primo el morfismo p-gonal ha de ser irregular o cíclico.

El caso cíclico ha sido estudiado intensivamente, en [13,14] se construye una familia de superficies de Riemann de género $(p - 1)^2$ que admiten dos morfismos p-gonales cíclicos, mostrando de este modo que la acotación de Accola es óptima para las superficies p-gonales cíclicas. González Díez y Gromadzki han demostrado que, en el caso cíclico todos los morfismos p-gonales son conjugados [15,16] y en la referencia [17] se obtienen límites superiores para el número de morfismos p-gonales conjugados.

En la tesis se ha desarrollado un método para construir ejemplos concretos de superficies de Riemann con varios morfismos p-gonales. Aplicando este método, con ayuda de ordenador, hemos encontrado superficies irregulares con varios morfismos para los casos trigonal y pentagonal. Concretamente se construyen a familias de géneros 2 y 4 con 2 morfismos trigonales y familias de géneros 6 y 8 con dos morfismos pentagonales.

A continuación se extienden estos ejemplos a familias de superficies p-gonales, de género máximo, con dos morfismos para cualquier primo $p > 2$, y también para familias de superficies n-gonales, con dos morfismos, de género no acotado cuando n no es primo.

Se ha demostrando así que la acotación de Accola es óptima.

Estos resultados se han presentado en las referencias:

- Cortázar, I.; Costa, A.F.: Real Dihedral p-Gonal Riemann Surfaces. Moscow Mathematical Journal,13(4) (2013), 631-647.
- Cortázar, I.; Costa, A.F.: Finding Riemann surfaces with several p-gonal morphisms. RACSAM, 109(2) (2015), pp 395-405.

REFERENCIAS

[1] Mirzakhani, M.: Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces. Invent. Mathematicae 167 (2007), 179-222.

[2] Farkas, H.M.; Kra, I.: Riemann Surfaces. Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York 1980.

[3] Forster, O.: Lectures on Riemann Surfaces. Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York 1981.

[4] Miranda, R.: Algebraic Curves and Riemann Surfaces. Graduate studies in Math., A.M.S. 5, Providence 1997.

[5] Kuga, M.: Galois Dream: Group theory and dierential equations. Birkhäuser, Boston 1993.

[6] Natanzon, S.: Real meromorphic functions on real algebraic curves. (English. Russian original) Sov. Math., Dokl., 36(3) (1988), 425-427.

[7] Bujalance, E.; Cirre, F. J.; Gamboa, J. M.; Gromadzki, G.: Symmetries of compact Riemann surfaces. Lecture Notes in Mathematics 2007, Springer-Verlag, Berlin 2010.

[8] Harnack, A.: Uber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Kurven. Math. Ann., 10 (1876), 189-199.

[9] Natanzon, S.: Automorphisms and real forms of a certain class of complex algebraic curves. (Russian) Funkts. Anal. Prilozh., 13(2) (1979), 89-90.

[10] Costa, A.F.; Parlier, H: On Harnack's theorem and extensions: A geometric proof and applications. Conform. Geom. Dyn., 12 (2008), 174-186.

[11] Bujalance, E.; Costa, A. F.: On symmetries of p-hyperelliptic Riemann surfaces. Math. Ann., 308(1) (1997), 31-45.

[12] Accola, R D. M.: On the Castelnuovo-Severi inequality for Riemann surfaces. Kodai Math. J., 29 (2006), 299-317.

[13] Costa, A.F.; Izquierdo, M.; Ying, D.: On cyclic p-gonal Riemann surfaces with several p-gonal morphisms. Geometriae Dedicata, 147(1) (2010), 139-147.

[14] Costa, A.F.; Izquierdo,M.; Ying, D.: On the family of cyclic trigonal Riemann surfaces of genus 4 with several trigonal morphisms. RACSAM (2010), 81-86.

[15] Gonzalez-Diez, G.: On prime Galois coverings of the Riemann sphere. Ann. Mat. Pura Appl., 168 (1995), 1-15.

[16] Gromadzki, G.: On Conjugacy of p-gonal automorphisms of Riemann Surfaces. Rev. Mat. Complut., 21(1) (2008), 83-87.

[17] Gromadzki, G.: On the number of p-gonal coverings of Riemann surfaces. Rocky Mounting J. Math., 40 (2010), 1221-1226.

Ismael Cortázar Múgica

Dpto. de Matemáticas Fundamentales