100cias@uned
Facultad de Ciencias
N.º 8 (2015)
ISSN: 1989-7189

Enseñanza

ENSEÑANZA Y DIVULGACIÓN DE LAS CIENCIAS

¿POR QUÉ EL CONCEPTO DE FUNCIÓN GENERA DIFICULTAD EN EL ESTUDIANTE?

INTRODUCCIÓN

> *Todas las ciencias matemáticas se basan en las relaciones entre las leyes físicas y las leyes de los números, por lo que el objetivo de la ciencia exacta es reducir los problemas de la naturaleza a la determinación de las cantidades mediante operaciones con números* [1].

Quizás pocas frases como ésta contengan la variedad de términos significativos y relevantes de la Matemática. Destacamos los términos *ciencia*, *naturaleza*, *física* y *matemática* como marco de referencia del trabajo intelectual humano. Los términos *relación*, *ley*, *números*, *operación* y *cantidad* como objetos básicos definidos en el marco matemático. Los términos *problema*, *determinación* y *reducción* como constructos matemáticos en los que se manipulan objetos básicos.

Disponer de una bonita frase no explica la razón básica por la cual los autores decidieron escribir este artículo. Por ello, el lector debe permitirnos unos párrafos de justificación donde el elemento conductor emerge de las palabras *ley* y *relación* mencionadas. No pretendemos tratar los términos en extensión, pero sí queremos ahondar algo en cierto tipo de relación y de ley; nos referimos al concepto de *función*.

Este trabajo surge de la colaboración de más de diez años entre UNED y CINVESTAV en materia de Enseñanza del Cálculo, que se ejemplifica en la colaboración de los autores en marcos como:

- *Encuentros Internacionales de la Enseñanza del Cálculo*. El próximo será el noveno encuentro.
- *Revista de la Enseñanza del Cálculo*. Revista de crecimiento en el contexto matemático educativo mexicano.
- *Seminarios de la Enseñanza del Cálculo*. Son encuentros internacionales quincenales con conexión mediante videoconferencia, desarrollados durante más de cinco cursos.

El lector puede hacerse la pregunta fundamental: ¿Es de verdad difícil de comprender el concepto matemático de función? Para responder a esta pregunta, Artigue [2] propone que nada mejor que realizar un análisis epistemológico, lo que permitiría al profesor tomar conciencia de la distancia entre el saber académico (saber sabio) y el saber que se enseña (saber enseñando). Esto es, examinar la historia y el desarrollo del concepto a enseñar, para dimensionar su verdadera complejidad. Sin duda, la concepción del concepto de función es importante en el desarrollo académico del estudiante.

Una vez realizado este análisis, la siguiente cuestión es: ¿Cómo tratar el concepto de función para promover un aprendizaje en los estudiantes? Esperamos que la lectura del trabajo sugiera algún tipo de respuesta válida del lector, pero debe saber que no es fácil obtenerla. No hablamos de conocer los procesos de manipulación de una función, nos referimos al propio concepto.

El concepto de función es de los primeros temas a tratar en los libros de texto del Análisis Matemático o Cálculo y uno de los conceptos más analizados en la investigación educativa. En este trabajo no se intentan emular a Nicolás Maquiavelo con una propuesta de formación al estudiante (Príncipe), sin embargo, entendemos que su frase, en [1], "*pocos ven lo que somos, pero todos ven lo que aparentamos*" podría ser dicha en una conversación entre funciones. Según Maquiavelo: *El cielo, el sol, los elementos, los hombres, han sido siempre los mismos.*

ESTUDIAR Y COMPRENDER LA FUNCIÓN

Las funciones no hablan, pero los profesores sí lo hacen. De ahí que en The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989/1991) de EEUU [3, 4], se remarcara la importancia del concepto de función. Queda patente que se trata de un "*concepto unificador en Matemáticas*" y que "*el lenguaje del cambio y la causalidad es expresado por el simbolismo de las funciones*" [3].

Sin duda, el significado de función para los profesores actuales es una consecuencia del trato histórico del concepto y del posicionamiento filosófico que los matemáticos impulsaron desde 1900, concerniente a los fundamentos de la Matemática. La cuestión controvertida en 1900 era que se cuestionaban los fundamentos del Análisis hasta esa fecha. Además, se querían precisar las definiciones de los objetos matemáticos, entre ellos, el concepto de función.

Desde cierto punto de vista resulta interesante, referente a función, la siguiente afirmación:

> *Las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades con el concepto parecen centrarse en su complejidad y generalidad, ya que presenta muchas facetas y contiene una multiplicidad de representaciones...* [5].

Preguntarnos sobre esas facetas y representaciones parece interesante, por ello, una pequeña muestra de libros conocidos de primeros cursos universitarios puede mostrarnos el primer tratamiento que se le da al concepto de función.

- *Una función de X a Y es una regla (o método) para asignar un (y sólo un) elemento de Y a cada elemento de X, donde se aclara que, por lo general, X e Y son conjuntos de números reales* [6].
- *Una función f de un conjunto D en un conjunto S es una regla que asigna un único elemento f(x) de S a cada uno de los elementos x de D* [7].
- *Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto B. Además, consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales* [8].
- *Sean X e Y dos conjuntos de números reales. Una función real f de una variable real x de X a Y es una correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y* [9].
- *Una relación entre los conjuntos A y B se denomina aplicación, o función, entre A y B si y sólo si cualquier elemento del conjunto inicial A está relacionado con un único elemento del conjunto final B* [10, 11].
- *Una función F es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tienen el mismo primer elemento. Esto es, si (x, y) pertenece a F y (x, z) pertenece a F, entonces y=z* [12].

Nos parece adecuado abordar la necesidad de destacar las representaciones del concepto de función desde una perspectiva educativa, principalmente por aquello que decía Borel para saber que el profesor y los estudiantes tratan el mismo concepto: el de función.

Si un profesor intenta enseñar el concepto de función, entonces usa algún registro de representación semiótica sobre el que visualiza dicho concepto; esto es, está obligado a clarificar el conjunto de signos empleados, la sintaxis usada para combinar esos signos y la semántica relativa a dicha sintaxis. El estudiante no necesariamente está familiarizado con el lenguaje formal, por lo que su presentación puede acarrear un sobreesfuerzo para adquirir el conocimiento; por ello, se suele mediar la enseñanza con algún tipo de representación visual.

Para saber que el profesor y el estudiante hablan de lo mismo, no hay más remedio que tratar las concepciones iniciales de estos. Nos centramos en cuatro concepciones, consecuencias de estudios anteriores y aprendizajes previos en gran medida, que pudieran ser distintas.

1. *Las creencias personales sobre los objetos de las Matemáticas.* Una posición dispar sobre estas creencias: El profesor habla del valor de la función para un número cualquiera, mientras que el estudiante piensa en el valor de la función para un número natural o entero. De alguna forma emerge que en lugar de tratar con funciones, el estudiante está inclinado a tratar con sucesiones, puesto que conoce perfectamente cómo determinar algunos términos de la sucesión.
2. *La creencia personal sobre el método matemático.* Otra posición disímil sobre estas creencias: Las expresiones simbólicas de dos funciones $f\left(x\right)=2x-x$ y $g\left(x\right)=x-1$, permiten al profesor explicar la función $f \div g$. Pero para el estudiante, este cociente de funciones no emerge como operación funcional si no que queda relegada a una división de polinomios $\left(2x-2\right)/\left(x-1\right)=2$, con el consecuente error en el plano funcional. En esencia, la disposición de unas reglas algebraicas conocidas hace invisible el concepto de operación de funciones.
3. *Los conocimientos de los contenidos matemáticos previos.* En descripción del cociente anterior queda patente que si el estudiante no ha adquirido la división de polinomios, entonces dividir las funciones carece de significado.
4. *La capacidad de adaptación pedagógica que muestre de forma contrastada.* Una situación observable: Se

solicita al estudiante representar la gráfica de una función afín $f(x)=3x+2$ una vez que el profesor ya ha establecido que se trata de una recta. La existencia o no de tabla de valores con más de dos puntos muestra si el estudiante asocia la gráfica de función afín con una recta o lo asocia a un proceso final después de calcular varios puntos de la gráfica.

Los ejemplos aludidos son relativos a funciones reales de variable real, con las cuales un estudiante científico-técnico está en contacto desde la Enseñanza Media. No cabe la menor duda de que estos mismos factores actúan intensamente cuando se tratan con otros tipos de funciones; por ejemplo, funciones reales de variable vectorial real, funciones vectoriales de variable real o funciones vectoriales de variable vectorial real. No suele ser fácil para el estudiante evolucionar conceptualmente de una única variable a varias. Se hace necesario familiarizar al estudiante con esos nuevos tipos de representaciones del concepto sin distorsionar el tipo de representación de las funciones reales de variable real. Tampoco podemos olvidar los distintos espacios de funciones de los cuales es necesario disponer, con algún tipo de representación, de funciones y de sus operaciones.

UNA INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Conviene hacer alguna breve aproximación epistemológica al concepto de función para fijar ideas, pues la función es la base para desarrollar temas matemáticos avanzados y permite modelar fenómenos físicos, químicos, socioeconómicos y biológicos, entre otros.

El estudio de la función es un contenido curricular obligado desde la enseñanza secundaria hasta la universitaria. Por ello, investigadores como Sierpinska [13] y Sfard [14] analizaron los utilizados en las escuelas y universidades en aquellos momentos y mostraron que se ofrecían versiones distintas del concepto que originan la invisibilidad de algunas características notables del mismo. Por los contenidos indicados anteriormente en los libros actuales, parece que la situación no ha cambiado mucho. Otros investigadores como Nicholas [15], Norman [16] y Goldenberg [17] presentaron un catálogo de dificultades y errores que prenden en el estudiante como consecuencia de la utilización de esas diferentes versiones de función. Se tiene que unas versiones facilitan algunos aspectos de la función, pero interfieren con el desarrollo y comprensión de otros. Véanse Selden [18]; Dubinsky y Harel [19]; Norman [16].

Pedersen opinaba que en la civilización babilónica se tenía un cierto "instinto de funcionalidad", que está presente en las tablas de cálculos. Sin embargo, Youschkevitch afirma que no hay sentido alguno de función en esa matemática y que el pensamiento matemático de la antigüedad no creó una noción general de cantidad variable o de una función [20].

Ya en el período medieval latino se hizo alguna contribución interesante de resaltar, pues a partir del siglo XIII aparecieron con regularidad tratados sobre proporciones; trabajos versados sobre relaciones del tipo $y=kx^n$, donde n tiene un valor racional. Debe interpretarse que esta teoría de proporciones fue básica en todas las ciencias cuantitativas. Piénsese que Oresme trataba (con funciones) tasas de cambio que no eran constantes, generando gráficas constituidas por líneas quebradas o curvilíneas. La latitud de formas representa una larvaria teoría de funciones con la dependencia de una cantidad variable sobre otra. Esto se hacía sin disponer del lenguaje algebraico para expresar la ley de variación o la correspondencia funcional [21].

Gracias a la acumulación de una secuencia de desarrollos matemáticos entre 1450 y 1650 se fraguó la base para que surgiera el concepto de función, mostrando un punto de vista dinámico y de naturaleza continua de la relación funcional, en oposición con cualquier visión estática y naturaleza discreta que se quiera reconocer en tiempos anteriores [22]. La palabra *función* apareció por primera vez en manuscritos de Leibniz: *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus* (1673). Con ella, se designaba a un objeto geométrico asociado con una curva. No se utilizaba para designar la relación formal entre la ordenada de un punto de una curva y su abscisa en el sentido moderno. En este sentido debemos reconocer que el cálculo de Newton y Leibniz no fue un *cálculo de funciones* sino un conjunto de *métodos para resolver problemas de curvas* [22].

En 1718 Johan Bernoulli dio la primera definición formal de función [23]:

> *Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes.*

La notación $f(x)$ fue introducida por Clauriant y fue muy utilizada por Euler alrededor del año 1734 [21], siendo éste el primero en darle al concepto de función un papel central y explícito en su obra *Introduction in Analysin Infinitorum*:

> *Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes* [23, p.72].

Lagrange (1736-1813) restringe la noción de función de Euler, tratando con nuestras funciones analíticas, las cuales están definidas por una serie de potencias en x.

> *Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas* [23, p. 73].

Podemos aplicar a nuestro objeto de estudio la frase de Maquiavelo [1]:

> *La historia es la ciencia de los hombres, de los hombres en el tiempo.*

LA EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Los conceptos matemáticos actuales son parte de una estructura lógico-formal que se ha construido con el tiempo. Por ello, los conceptos matemáticos evolucionaron para acomodarse a la evolución de la Matemática. Pero la evolución de ésta depende de los problemas a los que se enfrenta.

Un problema de interés, para estudiar la evolución del concepto de función, es el problema de la cuerda vibrante. El problema consiste en encontrar una función que modele la forma de la cuerda en un cierto tiempo t. Se trata de encontrar una función que modele la posición de la cuerda en un cierto instante t. En esos tiempos, se postulaba que:

> *Si dos expresiones analíticas coincidían en un intervalo, entonces ellas coincidían dondequiera.*

La solución de D'Alembert (1749) es la solución de la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \ ; \ y = y(x,t)$$

y a constante (ecuación de onda).

Esta solución debía tener una expresión analítica, por tanto dada por una fórmula. Se trataba de una función impar, periódica y dos veces diferenciable, y ésas deberían ser las únicas soluciones posibles según se creía. Aunque Euler coincidió con D'Alambert con la ecuación, éste difiere en la interpretación de la solución.

Otra solución del problema fue publicada por Daniel Bernoulli (1755) empleando argumentos físicos y hechos conocidos relativos a las vibraciones musicales.

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi a x}{l}\right)$$

Dos respuestas fueron obtenidas para el mismo problema y, con ello, aparece una contradicción insoluble:

Una función $f(x)$ definida en el intervalo $(0, l)$ podría ser expresada como la serie:

$$f(x) = y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Tanto Euler como D'Alambert indicaban que eso era absurdo, puesto que implicaría que cualquier función arbitraria tendría que ser impar y periódica. Así pues, la discusión entre matemáticos se focalizaba sobre el concepto de función y a la conexión entre dependencia funcional y la posibilidad de expresar esta dependencia por medio de una fórmula. Como consecuencia, se estaba obligado a extender la definición de función hacía las funciones definidas por partes. Existían funciones (el valor absoluto) que se podían expresar tanto como fórmula y como una función por partes.

La función se mantiene como una noción mucho más abstracta y universal que la idea inicial de Euler, desapareciendo la denominación "expresión analítica".

> *Sin embargo, si algunas cantidades dependen de otras, de tal modo que, si las últimas se cambian, las primeras también sufren cambios, entonces, las primeras cantidades son llamadas funciones de éstas últimas. Esta es una noción muy amplia y comprende en sí misma a todos los modos a través de los cuales, una cantidad puede ser determinada por otras. Por lo tanto, si x denota una cantidad variable, entonces, todas las cantidades que dependen de x, en cualquier forma que sea o que son determinadas por ella, son llamadas sus funciones* [23, p. 72].

Esta noción de función permaneció prácticamente sin cambio hasta 1797, pues aparece la definición de función dada por Lagrange. Sin embargo, hasta los inicios de 1800 no hay muchos cambios. Es Fourier y su trabajo sobre las series trigonométricas quien encontró relaciones más generales entre las variables. El trabajo sobre la conducción de calor, *Analytic Theory of Heat* publicado en 1822, hace evolucionar el concepto de función. Para Fourier en la definición de función lo principal era la asignación de valores de la función, sin importar si había una o varias fórmulas.

Las imprecisiones alrededor de los conceptos de función y de continuidad inquietaban a la comunidad científica en el siglo XIX. Destacamos dos definiciones de la época.

> *Permítasenos suponer que si* z *es cantidad variable la cual puede asumir, gradualmente, todos los posibles valores reales entonces, si a cada uno de estos valores le corresponde un único valor de la cantidad indeterminada* w*,* w *es llamada función de* z [23, p.74].

Como se puede ver, esta definición no establece límites en la relación entre las variables que definen a la función no eliminaba la imprecisión del concepto.

La otra definición es de G. L. Dirichlet, quien presenta por primera vez el concepto moderno de una función $y = f(x)$ en un intervalo $a < x < b$:

> $\boldsymbol{y}$ *es una función de una variable* $\boldsymbol{x}$*, definida en el intervalo* $a < \boldsymbol{x} < b$*, si a todo valor de la variable* $\boldsymbol{x}$ *en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable* $\boldsymbol{y}$*. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia* [22, p. 291].

En esta definición no se referencia dar la función por medio de una sola fórmula. Ni siquiera era necesario dar fórmula alguna, puesto que era irrelevante en qué forma de establecer la correspondencia. Sin duda esto causó más controversia aún. Conviene recordar que en esa época, si bien se admitía la naturaleza arbitraria de una función, hasta ese momento (incluido Cauchy) las funciones se consideraban explícita o implícitamente como producto de expresiones analíticas o expresiones que se pueden representar gráficamente como curvas. Sin duda, continuas, diferenciables y de dominio los números reales.

La célebre función de Dirichlet echó por tierra esa concepción:

$$f(x)=\begin{cases} 1, \textit{ si } x \textit{ es racional} \\ 0, \textit{ si } x \textit{ es irracional} \end{cases}$$

> *Me he alejado, como de cierta llaga lamentable, con miedo y horror de funciones continuas y derivables en ningún punto* [24, p. 65].

Un malestar en la comprensión y el uso del concepto de función se manifiesta en la frase:

> *Un texto define función de manera Euleriana; el otro que* $\boldsymbol{y}$ *debe cambiar con* $\boldsymbol{x}$ *de acuerdo con una regla, sin explicar este misterioso concepto; el tercero la define como Dirichlet; el cuarto no la define en absoluto; pero todos deducen de ellas, conclusiones que no están contenidas en ellas* [22, p. 293].

Para que el concepto de función evolucionara fue necesaria la evolución de otros conceptos como los de variable, número real, conjunto... La teoría de conjuntos de Cantor se infiltraba gradualmente en las matemáticas y, sin embargo, fue cuestionada y base de discusión. Dicha evolución se apoyó en el surgimiento del álgebra simbólica, de la geometría analítica, del cálculo diferencial e integral, etc. Hasta 1900 predominó la idea de que una función debería ser una expresión analítica. G. Boole definía función (1854) como:

> *Cualquier expresión algebraica envolviendo al símbolo* x *es llamada una función de* x*, y puede ser representada bajo la forma abreviada en general como* $f(x)$ [23, p. 75].

Además, prevalecía la no aceptación de las funciones discontinuas y funciones no-derivables como objetos matemáticos.

Trabajos como los de Borel, trabajos en teoría de funciones, estaban encaminados a definir con precisión los objetos matemáticos. Borel decía que:

> *Cualquier definición en matemáticas debería satisfacer la condición de que si dos matemáticos estuvieran hablando sobre un objeto matemático, deberíamos estar seguros de que ellos se refieren al mismo objeto* [23, p. 67].

Lebesgue desarrolla en su teoría de la medida y demuestra que existen funciones no representables analíticamente haciendo uso del axioma de Zermelo, de la teoría de cardinales y de algunos teoremas de Cantor:

> *Una función es analíticamente representable o expresable cuando uno puede construirla, siguiendo una ley sobre algunos funcionamientos, esta ley de construcción constituye una expresión analítica* [24, p. 72].

Para Borel los métodos no constructivos, como el de Lebesgue, no eran válidos en la Matemática.

Gran parte del debate fue sobre teoría de funciones. El punto crítico viene a ser cuando una definición de un objeto matemático (digamos un número o una función) dado, legitima la existencia de tal objeto [22, p. 296].

Muchos matemáticos dieron nuevos impulsos al continuo desarrollo histórico del concepto de función en un periodo muy fecundo entre finales del siglo XIX y principios del XX.

Para Carathéodory (1917) una función es una correspondencia de un conjunto con el conjunto de los números reales [24, p. 82]. Bourbaki (1939) presenta la función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios.

Sean E y F dos conjuntos, los cuales pueden ser o no distintos. A la relación entre una variable elemento x de E y una variable elemento y de F se le llama una relación funcional en y si, para todo $x \in E$, existe un único $y \in F$ el cual está en la relación dada con x.

Damos el nombre de función a la operación con la cual se asocia cada elemento $x \in E$ con el elemento $y \in F$ el cual está en la relación dada con x; y se dice ser el valor de la función para el elemento x, y la función se dice ser determinada por la relación funcional dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función [23, p. 77].

También Bourbaki definió a la función como un cierto subconjunto del producto cartesiano de E por F, es decir, la definición de una función como un conjunto de pares ordenados [22, p. 299]. El concepto de función matemática se identifica, como correspondencia, al concepto de aplicación (mapeo) y con el de transformación [25].

Debido a todo lo mencionado hasta este párrafo, la definición actual de función es la de un objeto sofisticado, consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años. Pero aún se considera un concepto en continua evolución. Se ha estudiado remplazar la teoría de conjuntos con la teoría de categorías como base fundamental de la Matemáticas, y con ello el concepto de *función juega un rol importante.*

La teoría de categorías describe una función como una asociación de un objeto A con otro objeto B. Los objetos A y B no necesitan tener elementos (no necesitan ser conjuntos). Una categoría puede definirse como consistente de funciones (aplicaciones), que son tomados como conceptos indefinidos (primitivos) que satisfacen ciertas relaciones o axiomas [22, p. 299].

Nos sorprende lo adecuado de la siguiente frase de N. Maquiavelo al afrontar la evolución del concepto de función.

En todas las cosas humanas, cuando se examinan de cerca, se demuestra que no pueden eliminarse los obstáculos sin que surjan otros.

DIFICULTADES DEL ESTUDIANTE PARA COMPRENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una buena parte de las dificultades que experimentan los estudiantes se debe a que el profesor, al explicar, visualiza el concepto de función de alguna forma, mientras que el estudiante, al aprender, no lo visualiza o lo visualiza de otra forma. Por ello, al estudiante le resulta difícil reconocer que intentan hablar del mismo concepto.

Ahora bien, ¿qué se entiende por visualizar? Algunos profesores entienden que el proceso de visualización matemática consiste en crear una representación visible de algo. Bien pudiera ser de un concepto, de una idea, de un conjunto de datos o de otro tipo de objeto. Esto es la denominada visualización científica, con la cual se pueden ver, sin invadir, las estructuras corporales de un paciente o representar imágenes tridimensionales y en color de planetas y satélites del sistema solar.

La visualización matemática no es la visualización científica, baste decir que visualizar en Matemática tiene múltiples interpretaciones en la literatura de Educación Matemática, véase las citas en la Ref. 10. "Visualizar" es:

Ver con la vista (Zimmermann, 1991; Davis, 1993).

Entrever a través de los diagramas (Dörfler, 2004; Arcavi, 2005). Véase Dörfler y su Pensamiento Diagramático.

Comunicar de un vistazo; vislumbrar demostraciones sin palabras (Arcavi, 2003; Alsina, 2006).

Conectar representaciones y lenguajes. Véase Hillel y sus Modos de descripción y lenguajes.

Intuir (Fischbein, 1987) y *pensar geométricamente* (Gueudet, 2002, Intuición geométrica).

Visibilizar: Concretar con ejemplos (Bill, 2006; Presmeg, 1997) y *transportar conocimientos a través de metáforas* (Presmeg, 2008; Steinbiring, 2005).

Imaginar en la mente (Presmeg, 2006), *construir un concepto imagen rico* (Tall y Vinner 1981).

Pensar geométricamente (Zimmermann, 1991; Davis, 1993; Guzman, 1996) y *una herramienta para resolver problemas*. Véase Sierpinska y sus Modos de Pensamiento.

Aprender a conectar marcos y puntos de vista, y construir una imagen mental rica. Véanse Marcos y puntos de vista en Alves Dias.

Aprender y conectar representaciones (Duval, 2006; Hitt, 2002).

Como puede apreciar el lector, si el concepto de función llevó varios siglos, no pretenderá que en este artículo le definamos lo que entendemos por visualizar en Matemáticas el concepto de función. ¡Es imposible hacerlo ahora! Esto requiere un nuevo artículo y lo dejaremos para el próximo número de la revista.

REFERENCIAS

[1] Frases y citas. http://akifrases.com y http://www.sabidurias.com.

[2] Artigue, M.: Épistémologie et didactique. Recherches en didactique des mathématiques, **10**, 23, 241-286 (1990).

[3] National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Author.

[4] National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional Standarts for Teaching Mathematics*. Reston, VA: The Author.

[5] Cuevas, A. & Díaz, J.L.: La historia de la matemática, un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. *El Cálculo y su Enseñanza*. Año 5. Vol.5. Cinvestav-IPN, México, 2014.

[6] Stein, S.K. & Barcellos, A.: *Cálculo y Geometría Analítica*. Ed. McGraw-Hill (5ª ed.), Vol. 1, Colombia, 1995.

[7] Adams, R.A.: *Cálculo*. Ed. Addison Wesley (6ª ed.), Madrid, 2009.

[8] Stewart, J.: *Cálculo de una variable*. International Thomson Editores (4ª ed.), México, 2001.

[9] Larson, R.E., Hostetler, R.P. & Edwards, B.H.: *Cálculo*. Ed. McGraw-Hill (6ª ed.), Vol. 1, Madrid, 1999.

[10] Delgado Pineda, M.: Registros para una función real cualquiera de variable real. El Cálculo y su Enseñanza. Vol. 6. Cinvestav-IPN, México, 2015.

[11] Delgado García, M. & Delgado Pineda, M.: *Análisis Matemático: Números, variables y funciones*. Ed. Sanz y Torres (2ª ed.), Madrid, 2015.

[12] Apostol, T.M.: *Análisis matemático*. Ed. Reverté (2ª ed.), Barcelona, 1976.

[13] Sierpinska, A.: On undesrtanding the notion of function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. *Mathematical Association of America*. Notes Series, Vol. 25, 23-58 (New York, 1992).

[14] Sfard, A.: Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. *Proceedings of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 151-158, (París, 1989).

[15] Nicholas, C.P.: A dilemma in definition. *American Mathematical Monthly*, **73**, 762-768 (1966).

[16] Norman, A.: Teacher's Mathematical Knowledge on the Concept of Function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. *Mathematical Association of America*. Notes Series, Vol. 25, 215-232 (1992).

[17] Goldenberg, P.: Mathematics, metaphors and human factors: mathematical, technical and pedagogical challenges in the graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behaviours*. 7(2), 135-174 (1988).

[18] Selden, A. & Selden, J.: Research perspectives on conceptions of function summary and overview. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. *Mathematical Association of America*. Notes Series, Vol. 25, 1-21 (1992).

[19] Dubinsky, E. & Harel, G.: The Nature of the Process Conception of Function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. *Mathematical Association of America*. Notes Series, Vol. 25, 85-106 (1992).

[20] Youschkevitch, A.P.: The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, **16**, 37-85 (1976).

[21] Boyer, C.B.: Proportion, equation, function. Three steps in the development of a concept. *Scripta Mathematica*, **12**, 5-13 (1946).

[22] Kleiner, I.: Evolution of the function concept: A brief survey. *The college Mathematics Journal*, **20**(4), 282-300 (1989).

[23] Rüting, D.: Some definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 6, No. 4 (1984).

[24] Monna, A.F.: The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. *Archive for History of Exact Sciences*, **9** (1972/73).

[25] Martínez, A.M.: *Knowledge and Development of Functions in a Technology-Enhanced High School Precalculus Class: A Case Study*. Doctoral Dissertation. The Ohio State University (1993).

Carlos Armando Cuevas Vallejo
Dpto. de Matemática Educativa, CINVESTAV
Miguel Delgado Pineda
Dpto. de Matemáticas Fundamentales