100cias@uned
Facultad de Ciencias
Vida científica
N.º 9 (2016)
ISSN: 1989-7189

COLABORACIONES EN FÍSICA

ANÁLISIS DE EMISIÓN DE CARGA ELÉCTRICA EN CONFIGURACIÓN CON SIMETRÍA PLANA

INTRODUCCIÓN

Es bien sabido de la Electrostática que un conductor [1] es un cuerpo sobre el que la carga eléctrica se puede mover libremente bajo la influencia de un campo eléctrico. Los casos más comunes son los metales, como el cobre, la plata, el oro, etc. En condiciones estáticas, es evidente a partir de esta definición que el campo eléctrico en el interior de un conductor debe ser nulo, pues de lo contrario se moverían las cargas. Esto implica que el campo eléctrico sobre la superficie del conductor debe ser normal a ella; y además, claramente el potencial eléctrico en el interior y sobre la superficie del conductor debe ser constante.

Consideremos dos superficies metálicas conductoras paralelas en vacío y entre las que se establece una diferencia de potencial, aplicada, por ejemplo, mediante una batería. Entre las placas existe entonces un campo eléctrico. Supongamos que sobre la superficie a mayor potencial hay disponibles iones positivos; en ese caso, el campo eléctrico sobre dicha superficie extraerá los iones y los acelerará hacia la superficie opuesta. Esta distribución de cargas en movimiento crea una corriente eléctrica entre las superficies; y a su vez, la nube de cargas determina el potencial eléctrico en la región de espacio entre las dos superficies. Cuando la densidad de carga se incrementa, el campo extractor sobre la superficie emisora disminuye. Claramente, debe existir una densidad de carga espacial máxima que produzca tal repulsión que impida la emisión de más carga; en estas condiciones, el campo eléctrico extractor sobre la superficie emisora será nulo y la corriente eléctrica será máxima. Esta corriente máxima se llama corriente limitada por la carga espacial.

El dispositivo físico consistente en las dos superficies conductoras se suele denominar diodo y las superficies conductoras se llaman electrodos (siendo el ánodo el electrodo a mayor potencial y el cátodo el electrodo a menor potencial). Según la geometría de los electrodos, tendremos distintos tipos de diodos. En particular, tres configuraciones especialmente sencillas se obtienen cuando los electrodos son plano-paralelos (diodo plano), esferas concéntricas (diodo esférico) o superficies cilíndricas (diodo cilíndrico).

El objetivo de este trabajo es hacer una descripción matemática del problema de la emisión de carga en un diodo. Esta descripción permite obtener la relación que existe entre la corriente y la diferencia de potencial aplicada en el diodo, en particular en el caso de corriente máxima. Esta relación se aplica en la práctica en Electrónica y en técnicas de detección de señales. Aunque desde un punto de vista cualitativo el problema es similar sea cual sea la geometría del diodo, sólo será considerado el caso del diodo plano [2,3], por ser el más sencillo de resolver matemáticamente.

Comenzaremos escribiendo las ecuaciones fundamentales que se deben considerar en un problema general de emisión de carga para después centrarnos con detalle en el caso del diodo plano.

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Un problema clásico de la Física Matemática consiste en determinar la distribución de carga espacial, el potencial eléctrico y la velocidad de los iones en un diodo con una configuración geométrica conocida.

Sean e y m la carga eléctrica y la masa de los iones. Abordaremos el problema usando una descripción Euleriana, esto es, tratando a los iones como un continuo; así, sean n la densidad numérica de iones, φ el potencial eléctrico y $\boldsymbol{v}$ la velocidad de las partículas, siendo estos campos funciones de la posición con respecto a un origen dado. El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ está dado entonces por $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ y la densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ por $\boldsymbol{J}=e\,n\,\boldsymbol{v}$.

Las ecuaciones que determinan el movimiento de la cargas son la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\varphi = -\frac{e\,n}{\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

donde ε_0=8.854·10^{-12} F/m es la permitividad eléctrica del vacío, la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{1}{2} m\, v^2 + e\, \varphi = constante, \tag{2}$$

y la ecuación de continuidad o ecuación de conservación de la carga

$$\nabla \cdot (e\, n\, \boldsymbol{v}) = 0. \tag{3}$$

Las ecuaciones anteriores se deben acompañar de condiciones de contorno apropiadas sobre los electrodos del diodo y que se obtendrán una vez conocida la geometría del mismo.

Es natural plantearse por qué este problema físico, el cuál involucra cargas móviles, está gobernado (entre otras) por la ecuación de Poisson (que es una ecuación de la Electrostática). La razón [2] es que la corriente eléctrica es independiente del tiempo y por esta razón, en cada punto del espacio entre los electrodos, debe ocurrir que la carga eléctrica que llegue por unidad de tiempo debe ser la misma que la que salga, de forma que la cantidad total de carga en el punto permanece constante. Entonces, si bien la identidad de las cargas en un volumen elemental $d\tau$ cambia, la cantidad de carga $e\, n\, d\tau$ no se modifica. Así pues, n es función sólo de la posición pero no del tiempo y la ecuación de Poisson podrá ser usada para obtener el potencial eléctrico φ el cual también es función del espacio pero no del tiempo. De esta forma, los tres campos (n, φ y $\boldsymbol{v}$) son funciones sólo del espacio.

El problema matemático anterior es especialmente sencillo en casos en los que la geometría del diodo también lo sea. En particular, como ya se ha comentado, el caso correspondiente al diodo plano será analizado con detalle en este trabajo.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

La Figura 1 muestra el esquema de un diodo plano, formado por dos placas paralelas y conductoras separadas por una distancia L y entre las que se establece una diferencia de potencial V (con V>0). Es claro que en esta configuración sólo hay una coordenada espacial independiente (por ejemplo, la coordenada cartesiana x); por tanto, los tres campos dependen sólo de esta coordenada y la velocidad de los iones tiene la dirección del eje X; más concretamente, podemos poner $n(x)$, $\varphi(x)$ y $\boldsymbol{v}(x)=v(x)\, \boldsymbol{u}_x$, siendo $\boldsymbol{u}_x$ un vector unitario en la dirección y sentido del eje X.

Figura 1. Esquema de un diodo plano.

En esta configuración, las ecuaciones (1-3) se deben considerar en la región 0<x<L y adoptan una forma muy sencilla. En primer lugar, la ecuación de Poisson, se reduce a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{e\, n}{\varepsilon_0}. \tag{4}$$

Por otra parte, asumiendo que los iones (positivos) son emitidos desde el ánodo con velocidad inicial nula, tenemos que la ecuación de conservación de la energía queda

$$\frac{1}{2} m\, v^2 + e\, \varphi = e\, V. \tag{5}$$

Finalmente, de la ecuación de continuidad obtenemos

$$J \equiv e\, n\, v = constante, \tag{6}$$

donde la constante J representa el módulo de la densidad de corriente. Así pues, el problema tiene realmente un grado de libertad dado por el parámetro J.

Las ecuaciones se pueden desacoplar fácilmente; en particular, después de operar, obtenemos que el potencial eléctrico φ cumple la siguiente ecuación

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{J}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2\, e}}\,(V-\varphi)^{-1/2} \tag{7}$$

la velocidad v está dada por

$$v = \sqrt{\frac{2\, e}{m}}\,(V-\varphi)^{1/2}, \tag{8}$$

y la densidad de carga se calcula mediante

$$e\, n = J\sqrt{\frac{m}{2\, e}}\,(V-\varphi)^{-1/2}, \tag{9}$$

Las condiciones de contorno se fijan prescribiendo el potencial eléctrico y su gradiente sobre el electrodo emisor

$$\varphi(0) = V, \tag{10}$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = -E_0, \tag{11}$$

donde $E_0 \geq 0$ es el módulo del campo eléctrico extractor, y el potencial eléctrico sobre el electrodo opuesto

$$\varphi(L) = 0. \qquad (12)$$

En total, fijando la magnitud del campo extractor E_0, debemos obtener las tres funciones incógnitas $n(x)$, $\varphi(x)$ y $v(x)$ y el valor de la densidad de corriente J. Para resolver este problema es útil formular el problema en forma adimensional. Para ello, introducimos las siguientes variables sin dimensiones

$$X \equiv \frac{x}{L}, \quad j \equiv \frac{J\,L^2}{\varepsilon_0 V^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{2\,e}}, \qquad (13)$$
$$\Phi \equiv j^{-2/3}\frac{V-\varphi}{V} \quad p \equiv j^{-2/3}\frac{E_0\,L}{V}.$$

Entonces, en las nuevas variables tenemos el siguiente problema para Φ

$$\frac{d^2\Phi}{dX^2} = \Phi^{-1/2} \quad (0 < X < 1), \qquad (14)$$

$$\Phi(0) = 0, \qquad (15)$$

$$\frac{d\Phi}{dX}(0) = p, \qquad (16)$$

con $p \geq 0$ y del que una vez resuelto, obtenemos

$$j = \Phi(1)^{-3/2}, \qquad (17)$$

$$\varphi(x) = V\left(1 - j^{2/3}\Phi(x/L)\right), \qquad (18)$$

$$v(x) = j^{1/3}\sqrt{\frac{2\,e}{m}}\,V^{1/2}\,\Phi(x/L)^{1/2}, \qquad (19)$$

$$e\,n(x) = j^{2/3}\frac{\varepsilon_0 V}{L^2}\,\Phi(x/L)^{-1/2}, \qquad (20)$$

$$J = j\frac{\varepsilon_0 V^{3/2}}{L^2}\sqrt{\frac{2\,e}{m}}, \qquad (21)$$

para un campo extractor E_0 dado por

$$E_0 = p\frac{V}{L}j^{2/3}. \qquad (22)$$

El plan entonces es resolver el problema definido por (14-16) para cada valor del parámetro p, lo que permite obtener el valor de la densidad de corriente J y los tres campos $\varphi(x)$, $v(x)$ y $n(x)$ por medio de (17-21) para el valor del campo extractor E_0 dado por (22).

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Resolvamos primero el caso trivial en el que no exista carga espacial, esto es, $n(x)=0$. Este caso es resoluble analíticamente como veremos a continuación. En efecto, como no existe corriente eléctrica entre las placas, solo debemos obtener la distribución del potencial eléctrico $\varphi(x)$; así, la ecuación de Poisson (4) se reduce a la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad (0 < x < L), \qquad (23)$$

que debe resolverse con las condiciones de contorno (10) y (12). Después de una sencilla integración, encontramos

$$\varphi(x) = V\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (0 \leq x \leq L), \qquad (24)$$

es decir, obtenemos que la distribución del potencial eléctrico es lineal.

Como hemos visto, para el caso en el que exista carga espacial debemos resolver el problema (14-16) para cada p. El problema es de orden dos, pero es posible integrar una vez y reducir el orden. En efecto, multiplicando los dos miembros de (14) por 2 $d\Phi/dX$, integrando y aplicando la condición (16) se obtiene el siguiente problema de orden uno para $\Phi(x)$

$$\frac{d\Phi}{dX} = \sqrt{4\,\Phi^{1/2} + p^2} \quad (0 < X < 1), \quad \Phi(0) = 0. \qquad (25)$$

El caso límite de corriente máxima (o corriente limitada por la carga espacial) se resuelve ahora de forma muy sencilla. En este caso, $p=0$, y el problema (25) tiene solución analítica dada por

$$\Phi(X) = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} X^{4/3} \quad (0 \leq X \leq 1), \qquad (26)$$

de donde $j=4/9$, y entonces

$$\varphi(x) = V\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^{4/3}\right] \quad (0 \leq x \leq L), \qquad (27)$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{2\,e}{m}}\,V^{1/2}\left(\frac{x}{L}\right)^{2/3} \quad (0 \leq x \leq L), \qquad (28)$$

$$e\,n(x) = \frac{4}{9}\frac{\varepsilon_0 V}{L^2}\left(\frac{x}{L}\right)^{-2/3} \quad (0 < x \leq L), \qquad (29)$$

$$J = \frac{4}{9}\frac{\varepsilon_0 V^{3/2}}{L^2}\sqrt{\frac{2\,e}{m}}. \qquad (30)$$

La ecuación (30) es conocida como ley de Child-Langmuir [4,5]. Es importante resaltar la relación no lineal que se obtiene entre la corriente eléctrica y el potencial. La relación puede ser obtenida para cualquier configuración geométrica de los electrodos, en particular para el caso cilíndrico y esférico [6,7], de forma que el único factor afectado por la geometría es el valor del parámetro j.

Finalmente, para el caso $p>0$, el problema dado por (25) debe abordarse numéricamente. En particular, la tabla siguiente muestra el valor del parámetro j obtenido para algunos valores del campo extractor adimensional $E_0/(V\,L^{-1})$.

$\dfrac{E_0}{V L^{-1}}$	0	0.471197	0.695758	0.802818
j	$\dfrac{4}{9}$	0.323448	0.205184	0.138434

Las Figuras 2, 3 y 4 muestran respectivamente las formas adimensionales del potencial eléctrico φ/V, la velocidad $v/(\sqrt{(2\ e/m)}\ V^{1/2})$ y la densidad de carga espacial $e\ n/(\varepsilon_0\ V\ L^{-2})$ en función de la coordenada espacial adimensional x/L para los valores del campo extractor adimensional $E_0/(V\ L^{-1})$ que se muestran en dicha tabla.

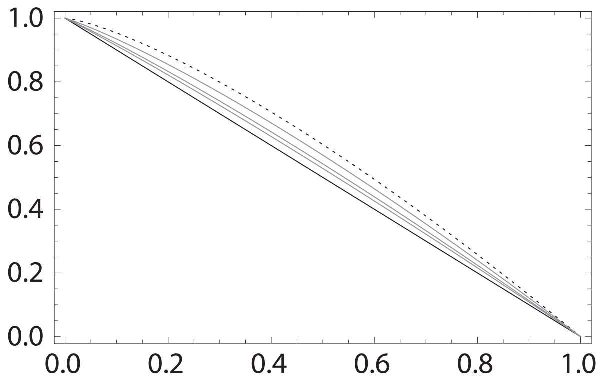

Figura 2. Potencial eléctrico adimensional en función de la coordenada espacial adimensional. De arriba hacia abajo, curvas del potencial eléctrico adimensional para los valores del campo extractor adimensional que aparecen en la tabla anterior tomados en orden creciente. La curva punteada representa el caso de corriente máxima. Se representa también el caso trivial en el que no existe carga espacial.

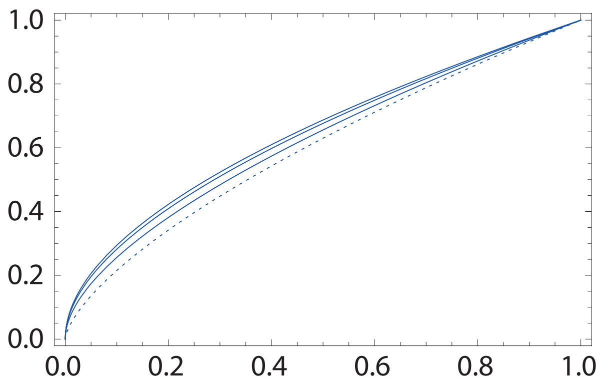

Figura 3. Velocidad de los iones adimensional en función de la coordenada espacial adimensional. De abajo hacia arriba, curvas de la velocidad adimensional para los valores del campo extractor adimensional que aparecen en la tabla anterior tomados en orden creciente. La curva punteada representa el caso de corriente máxima.

Como se puede apreciar, la densidad de carga se hace infinita sobre la placa emisora, lo cual ya se podía anticipar a partir de la ecuación (6). Por otra parte, el potencial eléctrico es una función decreciente de x indicando,

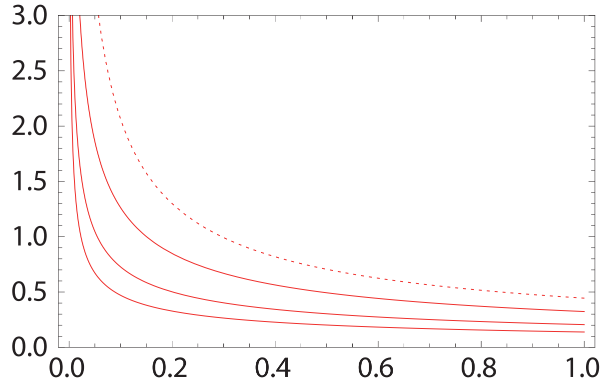

Figura 4. Densidad de carga adimensional en función de la coordenada espacial adimensional. De arriba hacia abajo, curvas de la densidad de carga adimensional para los valores del campo extractor adimensional que aparecen en la tabla anterior tomados en orden creciente. La curva punteada representa el caso de corriente máxima.

como era esperable, que el campo eléctrico tiene la dirección positiva del eje X. Notar, por último, que la velocidad de los iones es positiva indicando que su movimiento ocurre en la dirección y sentido del eje X, es decir, desde el ánodo al cátodo, lo cual también se esperaba al tener los iones carga positiva y ser emitidos con velocidad inicial nula desde el ánodo.

CONCLUSIONES

En esencia, un diodo consiste en el dispositivo formado por dos electrodos entre los que se establece una diferencia de potencial, de forma que si hay iones positivos disponibles en el electrodo a mayor potencial (ánodo), entonces serán acelerados hacia el electrodo a menor potencial (cátodo) originando una corriente eléctrica. La descripción matemática de este movimiento de carga puede realizarse de una forma euleriana mediante una función densidad, de forma que la ecuación de Poisson, la ecuación de conservación de la energía y la ecuación de continuidad determinan la densidad de carga, el potencial eléctrico y la velocidad de los iones. A partir de esta descripción se puede demostrar que existe un valor máximo de la corriente que puede ser emitida y cuyo valor depende de la geometría del diodo. En particular, se puede obtener la relación entre la corriente emitida y la diferencia de potencial para el caso límite de corriente máxima. El caso sencillo correspondiente a un diodo plano (electrodos plano-paralelos) ha sido analizado con detalle en este trabajo. De una forma análoga podría hacerse un análisis similar para el caso de otras configuraciones geométricas.

REFERENCIAS

[1] López Rodríguez, V.: *Electromagnetismo*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2002.

[2] Elliot, R.S.: *Electromagnetics. History, Theory, and Applications*. IEEE PRESS Series on Electromagnetic Waves, 1993.

[3] Hill P. & Peterson C.: *Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*. Addison Wesley Publishing Company, 1992.

[4] C.D. Child, *Phys. Rev.* 32, 492 (1911).

[5] I. Langmuir, *Phys. Rev.* 2, 450 (1913).

[6] I. Langmuir and K.B. Blodgett, *Phys. Rev.* 22, 347 (1923).

[7] I. Langmuir and K.B. Blodgett, *Phys. Rev.* 24, 49 (1924).

Casiano Hernández San José

Dpto. de Física Matemática y de Fluidos