

Iniciación al estudio del teorema del muestreo, fenómenos de aliasing y aspectos básicos del procesamiento de señales : Un enfoque práctico.

M. A. Rodríguez, M. Perera, F. Ramírez, L. S. Sánchez y R. García
Facultad de Informática y Estadística. Universidad de Sevilla.
Tlf: 95-4552779, Fax: 95-4552759, E-mail: rodriguj@drago.fie.us.es

RESUMEN.- En este trabajo se propone una metodología práctica para el aprendizaje de las bases y aplicaciones del teorema del muestreo, destacándose su gran importancia en la moderna tecnología. Se propone una serie de aplicaciones del teorema del muestreo con interés didáctico, que requieren labor de hardware y software, basadas en la transformada rápida de Fourier. En concreto, se ilustra la problemática del aliasing y su eliminación mediante filtrado, así como aplicaciones básicas de procesamiento de señales.

1.- INTRODUCCIÓN

La aplicación cada vez más generalizada del tratamiento de señales se presenta como paradigma tecnológico en el final del siglo XX. En la actualidad son muy comunes todo tipo de aparatos electrónicos, de uso masivo tanto en el campo profesional como en el doméstico, tales como la TV, el vídeo, la Hi-Fi, etc. Estos y otros muchos dispositivos poseen una capacidad de procesamiento de señales imbuida en su funcionamiento interno.

La Teoría de la Información de Shannon [6] ha supuesto una herramienta conceptual de gran alcance y aplicación a una gran diversidad de fenómenos y situaciones, que abarcan desde la criptografía hasta la evolución biológica y el comportamiento inteligente. Además, los grandes avances experimentados durante la segunda mitad de este siglo en el procesamiento de señales portadoras de información han hecho posible la concepción y el desarrollo de sistemas artificiales de tratamiento de la información cada vez más autónomos e inteligentes. Futuros avances en estas materias pueden influir decisivamente tanto en el desarrollo tecnológico como en la conceptualización de los fenómenos naturales.

El uso común y tan extendido del manejo digital de señales es resultado de múltiples factores, entre ellos la relativa simplicidad del diseño de circuitos digitales, la creciente utilización y disponibilidad de las técnicas de procesamiento digital, el extendido uso de computadores en el manejo de la información, y la habilidad de las señales digitales de ser codificadas y ser sometidas a tratamiento matemático.

Aunque algunas señales de comunicaciones son digitales por naturaleza, la inmensa mayoría (voz, televisión, ...) son analógicas, o funciones "suaves" en el tiempo. Para transmitirse y ser tratadas en forma digital, las señales analógicas precisan de un proceso de muestreo y cuantización. En resumen, de discretización. Este proceso debe realizarse con garantías de no producir alteraciones ni pérdidas en la señal original, bajo pena de eliminar información de partida e introducir información no deseada. El Teorema del Muestreo [5] establece que la frecuencia de muestreo debe ser superior al doble de la máxima componente espectral de la señal original. Por regla general se muestrea a una velocidad algo superior a la velocidad límite o de Nyquist, con el objeto de asegurar la separación del espectro de frecuencia y para

simplificar el problema del filtrado pasobaja necesario para recuperar la señal original.

El fenómeno conocido como aliasing se produce cuando se muestrea a una velocidad muy baja. Se puede perder información de la señal original, ya que ésta, al ser de mayor frecuencia, puede cambiar entre los instantes temporales de muestreo, por lo que se obtiene una señal no deseada con distorsiones.

Una comprensión básica, clara y completa, a ser posible basada en la práctica y experimentación, de los principios fundamentales del procesamiento de señales, es de suma importancia. Sin embargo, el aprendizaje clásico de estas nociones fundamentales se ha centrado sobre todo en el aspecto teórico de las mismas, obviando que una presentación práctica puede hacer más comprensibles e intuitivas las ideas implicadas que de otra forma necesitarían un mayor esfuerzo. Un acercamiento práctico a esta temática, además de consolidar los conocimientos básicos de estas materias, puede orientar al interesado hacia aplicaciones avanzadas.

Nuestra presente propuesta trata pues de hacer comprender los fenómenos básicos relacionados con el teorema del muestreo, a través de una experimentación y una actuación activa por parte de los alumnos, centrándose en el fenómeno de aliasing. Se presenta el estudio teórico-práctico de dos problemas con el fin de ilustrar la metodología empleada.

2.- OBJETIVOS

Los objetivos que se pretenden alcanzar con nuestra propuesta son fundamentalmente didácticos y educativos, motivados por la dificultad intrínseca en la comprensión de los fenómenos de filtrado, aliasing, etc. por el alumno medio de estudios técnicos. Éstos son:

a) Mostrar de una manera amena y didáctica los principios fundamentales en los que se basa el Teorema del Muestreo, haciendo hincapié en la presentación gráfica.

b) Ilustrar los fenómenos de aliasing asociados al muestreo digital de señales.

c) Tomar contacto con algunas de las soluciones estándares, usadas en instrumentación, al problema del aliasing. En concreto, dispositivos basados en filtros de capacidades conmutadas.

De forma secundaria se obtienen otra serie de objetivos, que pueden ser bastante útiles para consolidar conocimientos y destrezas, y para la introducción del alumno a la experimentación avanzada:

a) Afianzar conocimientos sobre las herramientas matemáticas usadas en el procesamiento frecuencial de señales (transformada rápida de Fourier [2]) y su aplicación a la simulación por software de los fenómenos y dispositivos citados.

b) Obtener experiencia en el manejo de material de laboratorio y montaje básico de circuitos electrónicos.

c) Mejorar el conocimiento de dispositivos ampliamente utilizados en aparatos de uso doméstico como son ecualizadores, reductores de ruido Dolby, acondicionadores de sonido, etc.

3.- METODOLOGÍA

Para alcanzar los objetivos propuestos se propone una metodología mixta basada en la implementación de soluciones hardware (filtros de capacidades conmutadas) y software (basado en la transformada rápida de Fourier, FFT).

Para ilustrarla se describe a continuación una de las propuestas de práctica de laboratorio, en donde el alumno experimentará con algunos de los efectos y resultados de aplicar el teorema del muestreo a un caso práctico.

3.1.- Conceptos teóricos

Se realizará una introducción teórica fundamental del teorema del muestreo y el problema del aliasing asociado a éste. Se puede ilustrar con algún ejemplo clásico, como el efecto de los radios de las ruedas de un carromato visto en cine, que al aumentar de velocidad de giro parece que lo hacen al revés debido a que la velocidad angular de la rueda es mayor que la velocidad de filmación. A continuación se describirá la transformada de Fourier, como herramienta fundamental durante toda la explicación, haciendo hincapié en la necesidad de tener una representación temporal y frecuencial de la señal en estudio a fin de poder estudiarla desde todos los puntos de vista posibles. Se discutirán los efectos negativos del aliasing y las soluciones que existen a fin de eliminarlo. Se explicará como actúa un filtro en este sentido y se ilustrará su funcionamiento mostrando su efecto en el dominio de la frecuencia.

3.2.- Diseño e implementación de una biblioteca de programas para realizar la FFT

Usando la bibliografía reseñada [2, 4], se explicarán todas las consideraciones relativas al diseño de algoritmos que realicen la FFT. Si se estima conveniente, pueden analizarse aspectos relativos a la implementación: eficiencia de código, velocidad, etc... Como resultado de esta actividad obtendremos una serie de rutinas útiles para acometer la segunda parte de la práctica que se realizará ya en el laboratorio. Principalmente se diseñará un algoritmo que realice la FFT de un conjunto de n muestras, donde n es potencia de 2, devolviendo una secuencia de n números complejos que corresponden a los coeficientes de Fourier (coseno y seno). Hay que tener presente que el mismo algoritmo de cálculo de la FFT sirve igualmente para realizar la antitransformada.

3.3.- Realización de un programa capturador de muestras

Como circuito de captura de señales se puede usar bien una tarjeta de adquisición de datos estándar, una tarjeta de sonido con capacidad de muestreo o un circuito específico que formaría parte de la práctica [1]. La señal se mostraría en pantalla en tiempo real, tanto en el dominio temporal como frecuencial.

En la visualización en pantalla de ordenador, la gráfica de las señales a mostrar se dibujaría mediante una técnica básica de interpolación lineal entre cada dos puntos muestreados. Hay que tener presente el posible fenómeno de distorsión gráfica debida a la naturaleza discreta de la pantalla. Este fenómeno sucede cuando el número de muestras a representar es mayor que el número de píxeles horizontales disponibles en pantalla. Ante este problema, puede optarse por disminuir el número de muestras que se toman, hacer que la señal de entrada no exceda de una frecuencia predeterminada, o bien implementar en el programa de representación gráfica alguna técnica de scrolling o pantalla virtual.

3.4.- Estudio de los filtros de capacidades conmutadas

Se suponen conocimientos básicos de filtros (RC y activos [7]). Se realizará una introducción a su funcionamiento, exponiendo sus ventajas frente a los filtros convencionales (facilidad de cambio de frecuencia de corte, gran orden de atenuación usando pocos componentes, etc...). Esta explicación podrá ser llevada a cabo en el propio laboratorio como prólogo a la realización de la práctica. Como resultado se construirá, usando el material de laboratorio o algún kit de montaje, un filtro pasa-bajos con frecuencia variable entre 700 y 3000 Hz [8],

cuyo esquema es el siguiente:

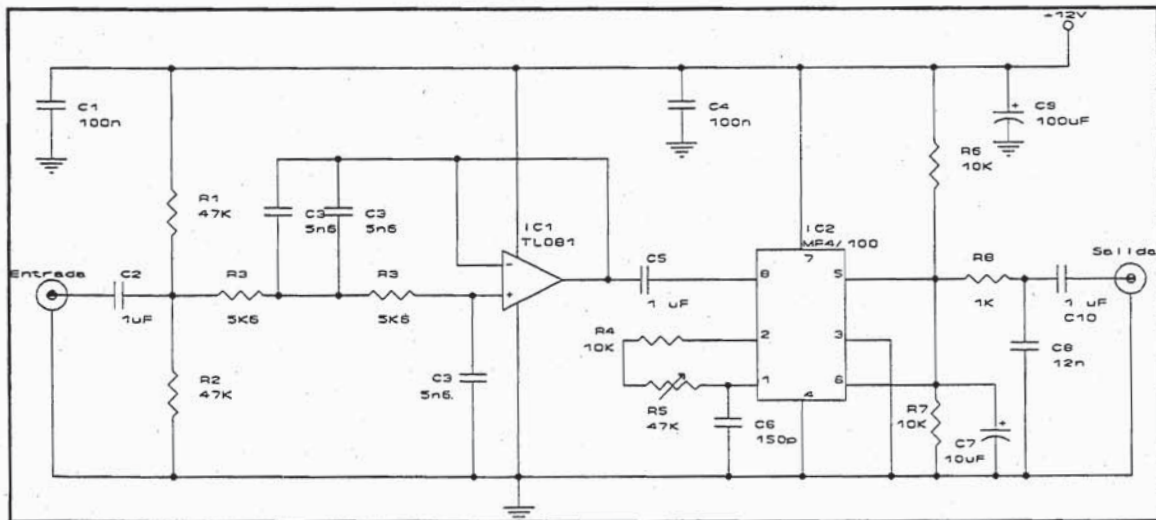


Figura 1.- Esquema del filtro

3.5.- Simulación software del filtro

Esta etapa es opcional, y consistiría en simular a nivel funcional, el comportamiento del filtro construido. Para ello se puede emplear la biblioteca de FFT implementada en la actividad 3.2. La simulación consistiría a grandes rasgos en muestrear una señal de audio a través de una tarjeta de captura de datos, realizar una FFT, truncar el espectro por el punto que corresponde a la frecuencia de corte y realizar una antitransformada, visualizando la señal resultante en el dominio del tiempo.

3.6.- Comprobación y eliminación del fenómeno de aliasing

El montaje a realizar consta de un generador de funciones cuya salida se conectará en principio a una entrada analógica de la tarjeta de adquisición de datos instalada en el PC, y en paralelo, a la entrada de un osciloscopio donde observaremos la verdadera señal. En el PC se ejecutará un programa que capture muestras a una frecuencia de muestreo de 10 KHz y muestre en pantalla la señal capturada en el dominio del tiempo y de la frecuencia. La señal que se inyectará será una senoide de 1 KHz. Se comprobará que la imagen dada por el osciloscopio y la generada por el programa son iguales. En la representación frecuencial se observará una línea espectral correspondiente al único armónico de la señal, y su componente alias situada a la derecha del espectro (en las figuras se han utilizado dos señales sinusoidales para acentuar más el efecto aliasing). La situación inicial es la de la figura 2.

La representación elegida en este ejemplo para la transformada de Fourier es la de la potencia. Cada línea espectral representa la potencia de la señal para una determinada frecuencia. Las frecuencias positivas empiezan de izquierda a derecha, hasta llegar al centro de la gráfica, donde se encuentra la componente de 5 KHz (la frecuencia de Nyquist para este ejemplo). Las frecuencias negativas (alias) empiezan a la derecha de la gráfica y se mueven de derecha a izquierda. Cuando una componente espectral sobrepasa la mitad del gráfico entra en la zona de frecuencias negativas, y a su vez, su componente alias entra en la zona de frecuencias

positivas provocando el aliasing. Asimismo se comprueba que la suma de las magnitudes de todas las componentes espectrales equivale a la magnitud de una línea espectral que ocupase toda la gráfica en la dirección del eje vertical (el eje de potencias).

Si se aumenta la frecuencia que entrega el generador de funciones llega un momento en el que la señal se encuentra con su alias en el centro de la gráfica. Si se mira la escala del generador se comprobará que la frecuencia entregada está alrededor de los 5 KHz. De esta manera se puede comprobar que realmente estamos muestreando a 10 KHz.

Si se sigue aumentando la frecuencia la señal (Figura 3), la representación temporal generada por el programa ya no será igual a la del osciloscopio, y la línea espectral que observaremos ya no será la de la señal sino la de su alias. Hecho esto, se repetirá el mismo experimento pero intercalando el filtro de capacidades conmutadas entre la salida del generador y los dispositivos de medida y captura. Se ajustará para una frecuencia de corte de 3000 Hz. Al aumentar la frecuencia del generador como antes se observará que la señal va decayendo al sobrepasar los 3000 Hz, reduciéndose su potencia (y la de su alias) tal y como se observará en el espectro. Se comprobará que esta vez no llega a producirse aliasing al no permitirse que entren al sistema señales de frecuencia mayor que 5 KHz.

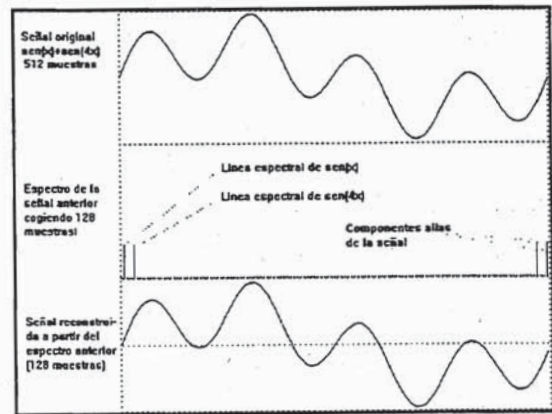


Figura 2.- Situación inicial.

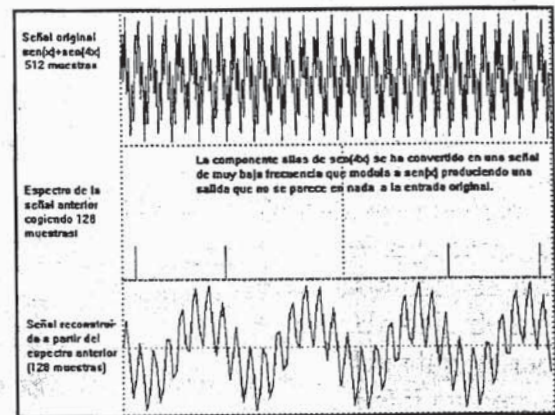


Figura 3.- Distorsión por aliasing

4.- EJEMPLO: INVERSIÓN DEL ESPECTRO DE UNA SEÑAL

La sencillez y rapidez del algoritmo de la FFT ha posibilitado su implementación eficiente en hardware, dando lugar a los procesadores digitales de señal (DSP), presentes en los equipos de procesamiento de señal. En el campo del audio, su aplicación va desde lo meramente artístico (generación de eco, reverberación, efectos phasing, etc) hasta aspectos de análisis en tiempo real. Nos proponemos mostrar una aplicación a la criptología de señales. En concreto, la decodificación de la señal de audio de una conocida emisora comercial de TV [3]. Dicha emisora emite su señal de audio muestreada a 25,6 KHz, a la que se le realiza una inversión de espectro en tiempo real, de forma que en los receptores de TV no equipados con el correspondiente decodificador, el sonido es ininteligible.

La práctica propuesta consiste en digitalizar una muestra de sonido proveniente de la emisora a la correspondiente frecuencia de muestreo, originando el correspondiente fichero de datos (.VOC, .WAV, etc), el cual es sometido a un programa de inversión de espectro, equivalente a la función del decodificador, que producirá como salida un nuevo fichero de audio inteligible que ya puede ser escuchado por medio de una tarjeta de sonido.

Invertir el espectro es un proceso sumamente sencillo: basta con multiplicar cada muestra por $\cos(\pi \cdot n)$, siendo n el contador de muestras. Esto es lo mismo que multiplicar cada muestra por 1, -1, 1, -1, etc, es decir, cambiar el signo de una de cada dos muestras.

Como ejemplo de este proceso, mostramos, tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia, una señal simple de audio normal e invertida.

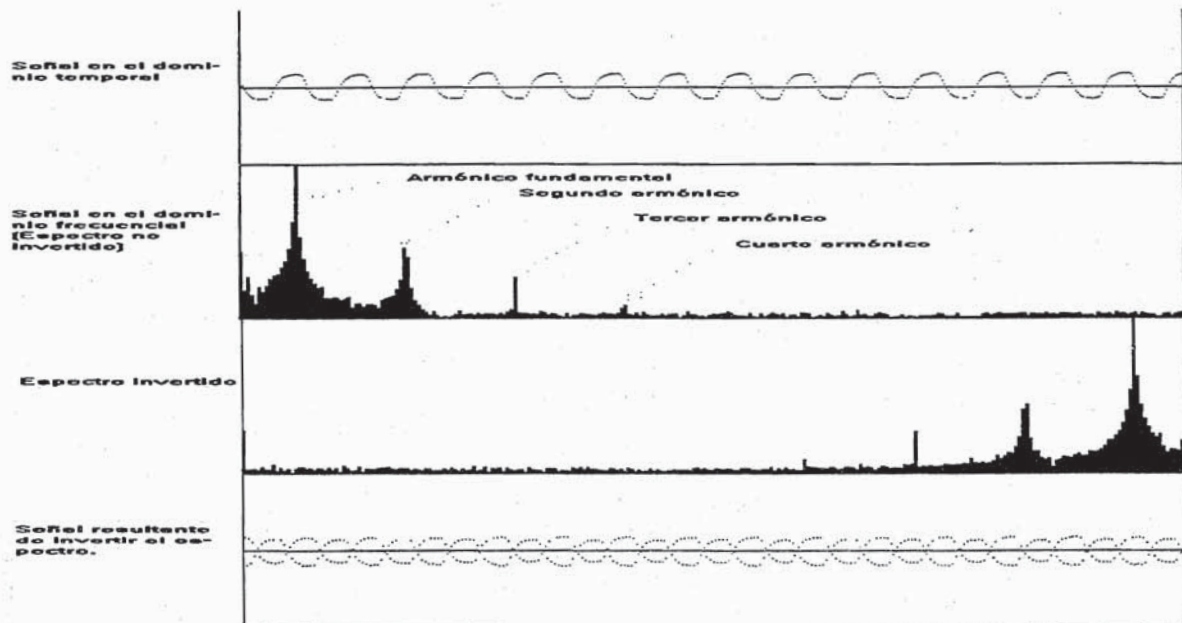


Figura 4.- Inversión del espectro de una señal.

5.- RESULTADOS

Tras la aplicación de la anterior metodología práctica, los resultados alcanzados coinciden a nivel general con los objetivos especificados. Además, a través de la realización del trabajo propuesto se obtiene de forma amena y práctica una serie de beneficios secundarios, como son experiencia en la programación de algoritmos de cálculo científico, experiencia en el manejo de material de laboratorio y montaje básico de circuitos electrónicos y mejor conocimiento de dispositivos ampliamente utilizados en aparatos de uso doméstico. Estos objetivos secundarios son, en el contexto de la enseñanza universitaria, de gran importancia para consolidar conocimientos y destrezas, realizar futuros proyectos fin de carrera o de investigación, y para el autoaprendizaje por parte de aquellas personas interesadas.

6.- REFERENCIAS

- [1] Angulo, J. M. "Electrónica digital moderna. Teoría y práctica". Ed. Paraninfo, 1990.
- [2] Brigham, E. O. "The Fast Fourier Transform and its Applications". Ed. Prentice-Hall, 1988.
- [3] Pérez, D. "Filtros digitales en tiempo real". *Solo Programadores*, nº 19, Marzo 1996.
- [4] Press, W. H. "Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing". Cambridge University Press, 1992.
- [5] Shannon, C. E. "Communication in the Presence of Noise". *Proceedings of the IEEE*, Vol. 72, nº 9, 1984.
- [6] Sloane, N. J. A. y Wyner, A. D. (eds). "Claude Elwood Shannon: Collected Papers". Ed. IEEE Press, 1993.
- [7] Tran Tien Lang. "Electronics of Measuring Systems". Ed. John Wiley, 1987.
- [8] "Filtros audio de capacidad conmutada". *Nueva Electrónica*, nº 110, Marzo 1993.