Tesis doctoral

La empresa con múltiples fuentes de incertidumbre. Una aplicación a la industria ganadera

Francisco Sebastiá Costa

Licenciado en Ciencias Físicas

Dpto. de Economía Aplicada Cuantitativa II
Facultad de C.C. Económicas y Empresariales
UNED
2015

Dpto. de Economía Aplicada Cuantitativa II

FACULTAD DE C.C. ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

La empresa con múltiples fuentes de incertidumbre. Una aplicación a la industria ganadera

Tesis Doctoral realizada por D. Francisco Sebastiá Costa (Licenciado en Ciencias Físicas) y dirigida por el Doctor D. Alberto Augusto Álvarez López y la Doctora Dª Inmaculada Rodríguez Puerta.

Madrid, noviembre de 2015

A mi familia

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento al doctor D. Alberto A. Álvarez López, director de esta tesis, y a la codirectora de la misma, doctora Dª. Inmaculada Rodríguez Puerta, por su guía, orientación y consejos en la elaboración de este trabajo, puesto que sin ellos este nunca hubiera podido llevarse a cabo.

De igual modo, quiero agradecer a los ganaderos Pedro Marín Miñano y Francisco Marín Juárez, de *Bovinos Paco El Conde*, las explicaciones desinteresadas referentes a la industria ganadera.

Índice general

Índice de tablas

Abreviaturas, acrónimos, siglas y símbolos

CARA: aversión absoluta constante al riesgo

DARA: aversión absoluta decreciente al riesgo

IARA: aversión absoluta creciente al riesgo

E: valor esperado

u: función de utilidad

$\mathbb{R}_+$: conjunto de los números reales no negativos

Introducción

Presentación

Existe una literatura muy amplia sobre la teoría de la empresa bajo incertidumbre. En uno de sus trabajos pioneros, publicado en 1971, se estudia una versión con incertidumbre del modelo clásico (determinista) de producción óptima de una empresa competitiva, al considerar que la empresa debe decidir su nivel de producción antes de conocer el precio al que se venderá su producto en el mercado. Este modelo básico, que cuenta con una sola variable de decisión y una única fuente de incertidumbre, se ha ido ampliando y modificando para dar lugar a modelos más complejos y, en alguna medida, más cercanos a la realidad de la empresa.

Los trabajos de Baron (1970) y Sandmo (1971) fueron pioneros en el estudio teórico sistemático de la empresa que opera en un entorno de incertidumbre. Ambos autores investigan el comportamiento de una empresa que debe decidir su nivel de producción antes de conocer el precio al cual se venderá su producto en el mercado, y cuyo objetivo es maximizar la utilidad esperada de su beneficio. En ambos casos, se trata, pues, de un problema de optimización en el que se tiene una única variable de decisión (el nivel de producción) y una sola fuente de incertidumbre, modelada por una variable aleatoria (el precio del producto).

Desde entonces, diversos autores han ido ampliando este supuesto original, lo que ha dado lugar a modelos más complejos, en los que aparecen varias variables, tanto aleatorias como de decisión. Por ejemplo, la empresa puede fabricar más de un producto, presentar costes variables de producción, o bien operar en un mercado de futuros.

De forma general, el problema puede plantearse del siguiente modo:

$$\max_{\mathbf{x}} E\left[u(\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p})\right], \text{ sujeto a } F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0},\ i = 1, ..., n,$$

donde π denota el beneficio (o incluso la riqueza) de la empresa, $\mathbf{x}$ es un vector de variables de decisión, $\mathbf{p}$ es un vector de variables aleatorias, $\mathbf{y}$ es un vector de parámetros que intervienen en el beneficio, u es la función de utilidad de la empresa (que se supone creciente en el beneficio), E denota el valor esperado, y las funciones F_i definen las relaciones que pueda haber entre el vector $\mathbf{y}$ y el conjunto de variables de decisión dado por $\mathbf{x}$.

A partir de este tipo de modelos es posible realizar estudios de diversos tipos. Por ejemplo: analizar el comportamiento de la empresa en comparación con el caso en que no haya incertidumbre; realizar un estudio de estática comparativa con respecto a los distintos parámetros; o analizar el efecto que produce un incremento del riesgo o de la aversión al riesgo.

En esta línea, y dado que, en el mundo empresarial, la incertidumbre suele estar presente en muchos ámbitos y, al mismo tiempo, la decisión tomada puede referirse a varios aspectos, se hace necesario considerar modelos que contemplen varias variables de decisión y/o varias fuentes de incertidumbre. Sin embargo, la consideración simultánea de todos estos elementos dificulta enormemente el análisis. De hecho, desde los comienzos de esta teoría hasta la actualidad, pocos son los autores que han avanzado en esta dirección, y las aportaciones realizadas se refieren, en la mayoría de los casos, a situaciones muy particulares.

Varios son los autores que han estudiado el comportamiento de una empresa competitiva que se enfrenta a diversas fuentes de incertidumbre. En la mayoría de casos, esta incertidumbre proviene de los precios de las mercancías que intervienen en la producción. Así, en Blair (1974) se considera que los precios de los factores productivos -es decir, de los bienes de los que hace uso la empresa en la elaboración de los productos que vende- son aleatorios. Otros autores han introducido el supuesto de que también el precio de venta del bien elaborado por la empresa puede sufrir variaciones según una distribución de probabilidad, como en Stewart (1978), Booth (1983), Chavas (1985), Grant (1985), Viaene y Zilcha (1998), Adrangi y Raffiee (1999), Dalal y Raju (2003), Hennessy (2006), Alghalith (2009), Dalal y Alghalith (2009), y Alghalith y Dalal (2009). Por otra parte, otros autores imponen la existencia de incertidumbre en la cantidad final elaborada por la empresa, como Grant (1985), Dalal y Alghalith (2009), Viaene y Zilcha (1998) y Alghalith y Dalal (2009). Finalmente, también se ha tratado el caso en que la empresa puede operar en el mercado de futuros, como en Holthausen (1980), Lapan y Moschini (1994), Sevi (2004) y Alghalith (2006a, 2006b, 2008a).

En los estudios que se han desarrollado hasta la fecha no aparecen simultáneamente los elementos que aproximan los posibles modelos a la realidad: incertidumbre en los precios de venta y compra y en la cantidad producida, junto con costes deterministas de producción generales. Por otro lado, en aquellos trabajos en que se ha hecho uso de una función de producción (es decir, la que determina cuánto produce la empresa a partir de los factores productivos), se ha supuesto que aquella era derivable; como se verá más adelante, dicha suposición no se verifica siempre, ni aun en un caso muy común bastante simple.

Por otra parte, los análisis de estática comparativa que se han llevado a cabo hasta el presente no consideran la posibilidad de cambios simultáneos en varias de las variables del modelo. Por ejemplo, no se ha estudiado el caso en que se produce una variación en más de uno de los precios de las mercancías que intervienen en el proceso de producción y venta.

Generalmente, las decisiones de compra y venta de una empresa cualquiera requieren de procesos que ocurren en diversas etapas, y estas, a su vez, en diferentes instantes de tiempo. Por ejemplo, la empresa ganadera dedicada a la producción cárnica decide en determinado momento adquirir un determinado número de animales jóvenes para su crianza y venta posterior. Durante este período, dicha empresa comprará con cierta frecuencia los alimentos y productos necesarios para la crianza, puesto que el tiempo que conlleva la producción es lo suficientemente largo como para que el ganadero no pueda almacenar todos esos bienes. Así, en este ejemplo se tiene un instante inicial de compra de unos bienes (animales jóvenes) y uno final de venta (animales ya adultos), y varios instantes de compra de productos (alimentos, vacunas,...) para el proceso de producción.

Si bien el proceso de producción de este ejemplo puede trasladarse, en cuanto a la operativa a lo largo del tiempo, a un gran número de empresas, son pocos los estudios acerca del comportamiento de la empresa que opera en diversos instantes de tiempo. Entre las causas de este escaso número de trabajos cabe citar la dificultad en la obtención de resultados significativos, tales como los de estática comparativa, como señala Antle (1983), debido a la complejidad de los métodos de solución general que se aplican a los problemas que involucran una dinámica temporal. Este tipo de formulación forma parte del ámbito de los problemas estocásticos de control, y sus soluciones se obtienen mediante la aplicación de algortimos de programación dinámica, como, por ejemplo, la ecuación de Bellman (1952). No obstante, estos métodos alcanzan una complejidad aún mayor en el caso de múltiples variables aleatorias.

Objetivos

En el presente trabajo se pretende, en primer lugar, aunar las diferentes fuentes de incertidumbre citadas -en los precios de venta y de compra, y en la cantidad producida- junto con costes de producción deterministas, y, al mismo tiempo, estudiar un modelo particular de empresa para la cual su función de producción no admite derivadas parciales, y, por tanto, tampoco el tipo de análisis estándar que se lleva a cabo en estos casos. En particular, dicha función de utilidad modeliza el comportamiento de aquella empresa en la que las cantidades de los elementos necesarios para la producción deben guardan entre sí unas proporciones fijas (como puede ser, por ejemplo, el caso de la elaboración de un producto químico, el ensamblaje de piezas para la fabricación de un dispositivo cualquiera, la fabricación de alimentos, etc.).

En segundo lugar, se quiere analizar el comportamiento a lo largo del período de producción de la empresa competitiva en un entorno de incertidumbre, para obtener a partir de dicho análisis algunos resultados de carácter económico.

Finalmente, se quiere aplicar el análisis realizado al estudio de un tipo de empresa ganadera muy común.

Metodología

En primer lugar se lleva a cabo una revisión de la literatura relacionada para determinar las variables consideradas en los diversos modelos estudiados, así como los distintos aspectos analizados. Se hace uso de la siguiente notación en relación a los diferentes tipos de comportamiento de la empresa frente al riesgo: CARA, para aquella empresa que muestra aversión absoluta al riesgo constante (del acrónimo en inglés *Constant Absolute Risk Aversion*), es decir, la función $-u''(x)/u'(x)$ es una función constante; DARA, para aversión absoluta decreciente al riesgo ($-u''(x)/u'(x)$ es decreciente); IARA, para aversión absoluta creciente al riesgo ($-u''(x)/u'(x)$ creciente); y *Ross*-DARA, para aversión absoluta decreciente al riesgo en el sentido de Ross.

Partiendo del modelo objeto de estudio y, una vez comprobados los aspectos innovadores que incorpora, se analizan los distintos efectos que se estudian en el área de la empresa bajo incertidumbre. Para ello, se hace necesario reformular un lema empleado en este área de investigación: el lema de Lipmann y McCall, que se generaliza, desde su versión original -de una variable aleatoria-, al caso en que haya tantas como se precise.

Para estudiar el comportamiento de la empresa a lo largo del tiempo se considera el caso de una empresa que obtiene el rendimiento de su producción después de varias etapas distintas en las que adquiere los bienes necesarios para llevar a cabo dicha producción.

Por último, para aplicar el modelo al caso particular de la empresa ganadera se adaptan el modelo y los resultados del capítulo precedente a una empresa ganadera de vacuno de producción cárnica. En este tipo de explotaciones ganaderas, la empresa adquiere terneros jóvenes que serán vendidos, aproximadamente, un año más tarde, después del período de engorde. Durante este período, el ganadero deberá decidir cuándo y a qué ritmo compra los productos necesarios para la cría de los animales (alimentos, medicinas, etc.), por lo que el proceso de producción puede modelizarse del modo en que se ha propuesto en el capítulo anterior. Es más, ninguno de los modelos estudiados en la literatura existente se adaptada a las condiciones particulares de este tipo de empresa.

Estructura del trabajo

En el capítulo 1 de este trabajo se hace una revisión de los diferentes modelos desarrollados en la literatura científica hasta la fecha acerca de la teoría de la empresa con múltiples fuentes de incertidumbre. Se explican tanto el fundamento teórico como los resultados más relevantes obtenidos por los diferentes investigadores.

En el capítulo 2 se estudia el modelo propuesto en este trabajo, y se obtienen diversas conclusiones tanto para la empresa que opera en el mercado de futuros como aquella que lo hace en ausencia de éste. En particular, se estudian las condiciones necesarias de óptimo del problema propuesto y el comportamiento de la empresa según su grado de aversión a la incertidumbre, se establece la comparación entre los resultados obtenidos en entornos de incertidumbre y de completa certidumbre, y se realiza un análisis de estática comparativa respecto de varios parámetros del modelo.

En el capítulo 3 se trasladan los resultados obtenidos en el apartado anterior al estudio de la empresa que opera a lo largo del tiempo, desde el momento en que inicia la producción hasta aquel en que se produce la venta del bien elaborado.

En el capítulo 4 se aplican los resultados obtenidos al estudio de un tipo de empresa ganadera muy común.

En el apartado de conclusiones se presentan los resultados más relevantes obtenidos en este trabajo, y se destacan aquellos que representan una aportación original respecto de la bibliografía existente en este campo.

En el apéndice A se presenta y se desarrolla la herramienta teórica que ha permitido la obtención de buena parte de los resultados de este trabajo, y se ilustra su utilización en un modelo reciente de la teoría de la empresa bajo incertidumbre.

Por último, en el apéndice B se muestra también la aplicación de lema desarrollado en este trabajo al estudio de determinadas propiedades en ciertos modelos de la teoría de la empresa en condiciones de incertidumbre.

Capítulo 1

Teoría de la empresa bajo múltiples fuentes de incertidumbre: una revisión

El problema general de una empresa bajo múltiples fuentes de incertidumbre se puede expresar, en términos generales, del siguiente modo:

$$\max_{\mathbf{x}} E\left[u(\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p})\right], \text{ sujeto a } F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0},\ i = 1, ..., n,$$

donde π denota el beneficio (o incluso la riqueza) de la empresa, $\mathbf{x}$ es un vector de variables de decisión, $\mathbf{p}$ es un vector de variables aleatorias, $\mathbf{y}$ es un vector de parámetros que intervienen en el beneficio, u es la función de utilidad de la empresa (que se supone creciente en el beneficio), E denota el valor esperado, y las funciones F_i definen las relaciones que pueda haber entre el vector $\mathbf{y}$ y el conjunto de variables de decisión dado por $\mathbf{x}$.

Este problema es estudiado por numerosos autores, y la mayoría de ellos centra su atención en aquella empresa que muestra aversión al riesgo (más aún, aquella tal que $u'' < 0$).

Los modelos estudiados en la literatura pueden ser clasificados, si se quiere, según se considere o no la posibilidad de que la empresa pueda operar en un mercado de futuros. En este capítulo se recogen, atendiendo a esta clasificación, los modelos de la teoría que consideran múltiples fuentes de incertidumbre, y se comentan los resultados más importantes obtenidos para cada uno, a la vez que se realiza un análisis comparativo de sus logros y carencias.

A lo largo de la exposición no se han analizado aquellos supuestos que tratan casos especialmente particulares, bien para funciones de utilidad, bien para las funciones de distribución de las diversas variables aleatorias. Para facilitar su comprensión y seguimiento, cada concepto o variable se ha representado mediante la misma letra en todos los modelos, lo que ha obligado a modificar, en algunos casos, la notación original empleada por el autor correspondiente. Además, se ha escrito en mayúscula las letras que hacen referencia a variables aleatorias.

1.1. Modelos sin mercados de futuros

1.1.1. Empresas que venden su producción en un único mercado

De forma esquemática, puede representarse el beneficio de cada empresa considerada en este apartado mediante:

$$\pi = pq - c,$$

donde q denota el nivel de producción de la empresa, p el precio unitario al que lo vende y c el coste total de producción. En general, estas variables tienen una expresión diferente para cada modelo, como se ve a continuación.

El primer trabajo en el que aparecen varias fuentes de incertidumbre es el de Blair (1974), donde se considera una empresa que produce un único bien a partir de n factores productivos $x_1, x_2, ..., x_n$, cuyos respectivos precios son desconocidos y vienen modelados mediante las variables aleatorias $R_1, R_2, ..., R_n$, y se supone que tanto la cantidad producida, q, como el precio de venta del producto fabricado, p, son función de la cantidad utilizada de cada factor productivo. Es decir, $p \equiv p(q)$y $q \equiv q(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Concretamente, la empresa busca el nivel óptimo de cada factor productivo que maximiza la utilidad esperada de su beneficio, es decir, resuelve:

$$\max_{\mathbf{x}} E\left[u\left(p(q) \cdot q(\mathbf{x}) - \sum\nolimits_{i=1}^{n} R_i \cdot x_i\right)\right],$$

por lo que se trata de un problema de optimización con n variables de decisión: x_1, x_2, ..., x_n. Con estas condiciones, se demuestra que una empresa que muestra aversión al riesgo compra menos de cada uno de los factores productivos que aquella que es neutra al riesgo, y que lo contrario sucede si la empresa es amante del riesgo.

En el modelo de Blair se supone que la incertidumbre está presente únicamente en el precio de los factores productivos. No obstante, si el precio de éstos es desconocido antes de iniciar el proceso productivo, parece lógico suponer que eso mismo pueda suceder con el precio al que se venderá el producto. Esto es lo que se considera en los siguientes modelos.

En efecto, en Stewart (1978) se estudia el caso de una empresa que vende y fabrica un único producto cuyo precio de mercado viene modelado por una variable aleatoria P, para cuya elaboración necesita de dos bienes, uno de precio conocido, r_1, y el otro de precio desconocido, modelado por la variable aleatoria R_2. La cantidad de producción obtenida, q, es función de las cantidades empleadas, x_1 y x_2, de los respectivos factores productivos; es decir, $q \equiv q(x_1, x_2)$. En este caso, la empresa busca los niveles óptimos de x_1 y x_2 , que son solución del problema:

$$\max_{x_1, x_2} E\left[u(P \cdot q(x_1, x_2) - r_1 x_1 - R_2 x_2)\right].$$

El primer resultado de este trabajo establece que una empresa aversa al riesgo hará menos uso del factor productivo de precio aleatorio y más de aquel de precio conocido. Además, cuanto más aversa al riesgo es la empresa más uso hará de los factores productivos de coste conocido y menos de los de coste aleatorio. Así, este tipo de empresa declina la posibilidad de obtener beneficios altos con el fin de evitar grandes pérdidas. Stewart generaliza estos resultados al caso en que haya tantos factores productivos de precio aleatorio y precio conocido como se quiera. Como consecuencia, las empresas aversas al riesgo invierten una cantidad menor en los factores productivos cuyo precio es aleatorio que aquellas que son neutras al riesgo.

En Alghalith (2009) se estudia también este mismo modelo, y se demuestra que se produce una disminución de los niveles óptimos de cada uno de los dos factores productivos respecto a los que se obtienen en un ambiente de completa certidumbre si $\partial^2 q/\partial x_1 \partial x_2 \geqslant 0$ y los dos precios, P y R_2, son (estadísticamente) independientes. También se verifica que en un entorno de precios de compra aleatorios, la aparición de incertidumbre en el precio de venta reduce el nivel óptimo de cada factor productivo si se verifican las dos condiciones anteriores. Por otra parte, si el precio de venta es aleatorio, la aparición de incertidumbre en el precio de compra lleva aparejada una reducción en el nivel óptimo del factor productivo cuyo precio es variable. En cuanto al comportamiento de la empresa en función de su actitud frente al riesgo, se demuestra también que, si los dos precios son independientes, entonces un aumento de la aversión al riesgo conlleva una disminución del nivel óptimo de cada factor productivo si estos son independientes.

En los modelos anteriormente citados se puede considerar el caso particular en que los factores determinantes de la producción sean sólo dos: el capital y el trabajo invertidos. En ese caso, se trata de un modelo con $n = 2$ factores productivos. Esta situación particular se estudia ya en el primero de los modelos citados y, más tarde, en Adrangi y Raffiee (1999).

Concretamente, Blair (1974) considera este caso particular en su modelo y compara el uso de estos dos factores en función de la aversión al riesgo de la empresa. Por su parte, Adrangi y Raffiee (1999) consideran además que el precio de venta del producto es desconocido en el momento en que se toma la decisión. Se tiene, pues, un modelo con tres variables aleatorias (P,R_1 y R_2) y dos variables de decisión (x_1 y x_2), en el que el problema de optimización consiste en resolver:

$$\max_{x_1,x_2} E\left[u(P \cdot q(x_1,x_2) - R_1x_1 - R_2x_2)\right].$$

En este trabajo se demuestra que, cuando las tres variables aleatorias son independientes, la actitud de la empresa frente al riesgo es suficiente para obtener las condiciones de equilibrio a largo plazo, que en el caso de empresas aversas al riesgo se concretan en:

$$E[P] \cdot \partial q/\partial x_i - E[R_i] > 0, \; i = 1, 2.$$

Asimismo, se obtiene que dicha actitud es necesaria pero no suficiente para la obtención de estas condiciones de equilibrio si las variables aleatorias no son independientes.

En todos los trabajos citados hasta el momento, el objetivo de la empresa es maximizar la utilidad esperada de su beneficio π. En este sentido, el siguiente modelo marca una diferencia en el planteamiento del problema, ya que ahora el objetivo será maximizar la utilidad esperada de su riqueza: $\pi + w_0$, donde w_0 representa el nivel de riqueza inicial. Además, en este modelo se tiene que la riqueza inicial de la empresa está sometida a algún tipo de situación arriesgada, por lo que vendrá modelada por una variable aleatoria que se denotará (en mayúsculas) por W_0[1].

Este es el caso del trabajo de Chavas (1985). En él se considera que el precio de venta del producto viene modelado por una variable aleatoria P. Dicho producto se elabora a partir de n factores productivos, y el nivel de producción q depende funcionalmente del nivel empleado de cada uno de ellos: $q = f(\mathbf{x})$. El objetivo de la empresa es:

$$\max_{\mathbf{x},q} E\left[u\left(Pq - \sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i \cdot x_i + W_0\right)\right] \text{ sujeto a } q = f(\mathbf{x}).$$

Chavas lleva a cabo un análisis de estática comparativa suponiendo que la empresa manifiesta, por un lado, CARA, por lo que la función de utilidad tiene una expresión analítica concreta, y, por otro, *Ross*-DARA[2]. Más concretamente, estudia el efecto que

[1]Esta situación puede darse, por ejemplo, en el caso de que la empresa invierta parte de su capital en algún producto de renta variable.

[2]El concepto de aversión absoluta al riesgo decreciente introducido y caracterizado por Ross (1981) (Ross-DARA), es más restrictivo que el de aversión absoluta al riesgo decreciente (DARA) de Arrow-Pratt, contenido en Arrow (1974) y en Pratt (1964). La caracterización de la aversión absoluta al riesgo constante (CARA) de Ross es idéntica a la de Arrow-Pratt, por lo que en ambos casos se denota por

produce una variación del precio de venta y de la riqueza inicial esperada sobre la cantidad óptima de producción y de factores productivos.

Los siguientes autores incorporan una novedad en este tipo de modelos: la introducción de incertidumbre en la producción de la empresa. Esto es algo muy habitual en explotaciones agrícolas y ganaderas, donde el productor sólo puede planificar la cantidad que desea producir, pues el propio proceso productivo está sometido a factores de riesgo. Varios son los autores que han estudiado esta situación.

Grant (1985) considera una empresa en la que el precio al que se vende el producto y la cantidad producida de este vienen modeladas por sendas variables aleatorias. La empresa buscar resolver:

$$\max_{y} E\left[u(PVy - c(y))\right],$$

donde P es el precio aleatorio de venta del producto elaborado, y es la producción programada, V es una variable aleatoria que modela la variabilidad de la producción, y $c(y)$ es el coste de producción.

Obsérvese que, en este modelo, la variable de optimización no es, como en los modelos anteriores, la cantidad invertida de factores productivos, sino, por el contrario, la cantidad programada. Cabe destacar que el propio autor reconoce la dificultad de obtener condiciones aplicando los métodos habitualmente utilizados en la literatura, debido

las mismas siglas.

a la presencia del producto de dos variables aleatorias.

El resultado más significativo de este autor es que el óptimo de producción programada es mayor cuanto menor aversión al riesgo muestre la empresa.

En Dalal y Alghalith (2009) se presenta un modelo en el que también existe incertidumbre en la producción. Pero, a diferencia del anterior, la empresa maximiza la utilidad esperada de su riqueza. Además, la función de costes depende no sólo de la cantidad programada, y, sino también del vector de n precios, $\mathbf{r}$, correspondientes a los n factores productivos empleados. El objetivo de la empresa es obtener:

$$\max_{y} E\left[u(PVy - c(y, \mathbf{r}) + w_0)\right],$$

donde w_0 es su estado de cuentas inicial.

En el principal resultado de este trabajo se comparan los respectivos niveles óptimos que programa la empresa con y sin incertidumbre. En este estudio se deja patente de nuevo que la inclusión de un producto de variables aleatorias dificulta el análisis del modelo. De hecho, estos autores conjugan métodos analíticos con métodos gráficos, debido a la falta de herramientas analíticas que permitan un estudio más directo.

Por otro lado, hay que mencionar que algunos resultados de este trabajo hacen referencia a condiciones específicas de aversión al riesgo.

Otro estudio que también considera en su modelo incertidumbre en la producción y en el precio es el de Viaene y Zilcha (1998). En su artículo introducen, además, costes aleatorios de producción. Así, su trabajo versa sobre una empresa que opera en un entorno de incertidumbre determinado por tres variables aleatorias, si bien no simultáneas (se considera el efecto conjunto de estas variables tomadas de dos en dos): el precio de venta del producto que elabora, la cantidad elaborada y el coste de fabricación.

Estos autores comparan el nivel óptimo del factor productivo entre diferentes situaciones de incertidumbre y de relación de dependencia entre las variables aleatorias presentes, así como para determinadas funciones de utilidad.

Por otra parte, sus conclusiones son válidas para determinadas situaciones no especialmente generales. Puede decirse que este trabajo presenta resultados menos significativos que los de Dalal y Alghalith (2009) debido a las condiciones particulares que se imponen sobre la función de utilidad. Además, si bien el modelo es similar al de los autores citados, en Viaene y Zilcha (1998) no se establecen resultados de estática comparativa.

1.1.2. Empresas que venden su producción en varios mercados

Otro caso de interés es aquel en el que la empresa vende el objeto de su producción a diferentes precios (o bien, produce varios bienes de precios distintos). Tal supuesto no ha sido tratado por los autores hasta aquí mencionados. Los siguientes trabajos introducen esta característica.

En primer lugar, Dalal y Raju (2003) suponen que la empresa puede vender el bien que fabrica en dos mercados diferentes –el mercado nacional y uno extranjero–, para los que los respectivos precios de venta son aleatorios. Por ello, las variables de decisión son dos: las cantidades del bien que producen destinadas a cada uno de esos dos mercados. El objetivo de la empresa se expresa:

$$\max_{q_1,q_2} E\left[u(P_1q_1 + P_2q_2 - c(q_1+q_2,\mathbf{r}) + h)\right],$$

donde h es un parámetro que puede ser considerado una tasa impositiva o un subsidio. La presencia de incertidumbre en ambos mercados dificulta en gran medida el análisis, y no permite obtener fácilmente conclusiones con los métodos habituales, por lo que estos autores hacen uso de una combinación de métodos analíticos y gráficos para obtener sus resultados. Este tipo de tratamiento es aplicable –al menos de manera relativamente sencilla– cuando las variables de decisión son dos.

En su trabajo asumen, además, que la aversión al riesgo que muestra la empresa es de tipo CARA, por lo que se tiene una función de utilidad particular, o bien *Ross*-DARA.

Estos autores realizan un estudio de estática comparativa respecto de varios parámetros de su modelo, tales como el valor esperado del precio de venta en el mercado nacional y en el extranjero, dispersión de estos mismos precios, o precios de los factores productivos.

Hennessy (2006) considera que la empresa produce un número n de bienes y que cada uno de ellos es vendido en un mercado distinto. El modelo propuesto por este autor viene determinado por:

$$\max_{\mathbf{q}} E\left[u\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} P_i q_i - c(\mathbf{q})\right)\right],$$

donde las componentes del vector $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ son las cantidades producidas de cada bien, P_i es el precio aleatorio de cada uno de esos bienes, y c es el coste (determinista) de producción.

El primer resultado que obtiene es bastante general, pues no impone ninguna condición sobre la función de distribución de los precios:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^*(E[P_i] - c_{q_i}(\mathbf{q})) \geqslant 0,$$

donde el asterisco denota el nivel óptimo. Esta expresión muestra una condición necesaria que deben satisfacer las variables del modelo en el punto óptimo de producción. Hennessy es de los pocos investigadores –quizá el único– que en modelos generales de un número cualquiera de variables aleatorias presenta condiciones que deben satisfacer los valores óptimos del problema; el conocimiento de dichas condiciones es una herramienta que permite a la empresa decidir si debe o no iniciar la producción.

Además, establece condiciones para la función de coste que permiten comparar los óptimos de producción de cada uno de los bienes que fabrica con el caso en que la empresa opere, o bien en condiciones de incertidumbre, o bien en un entorno de completa certidumbre (de precios).

En este trabajo se imponen también condiciones particulares, tales como aversión al riesgo de tipo CARA, o bien funciones de distribución de probabilidad específicas. Por otra parte, no se consideran costes de producción aleatorios, ni tampoco incertidumbre en la producción.

Más recientemente, Rodríguez-Puerta y Álvarez-López (2014) consideran la empresa que acaba de obtener una cantidad determinada de producción, dada por q_T, y puede destinarla hacia dos fines distintos: uno con un precio cierto p, y el otro con un precio incierto P. El modelo viene dado por:

$$\max_{\mathbf{q}\in[\mathbf{0},\mathbf{q_T}]} E\left[u\left(pq + P(q_T - q) + B\right)\right],$$

donde q es la cantidad que la empresa destina al fin de precio conocido y B es un parámetro que incluye los costes de producción.

El primer resultado que obtienen estos autores es la existencia de un *precio frontera* para el fin de precio conocido, por debajo del cual la empresa decide destinar toda su producción al fin de precio incierto. A continuación, estudian distintos efectos de estática comparativa para los distintos parámetros del modelo, incluyendo el precio frontera.

1.2. Modelos con mercados de futuros

1.2.1. Mercado de futuros para la producción

En Alghalith (2006a) se estudia el comportamiento de una empresa cuyo nivel de producción es desconocido en el momento en que se toma la decisión, y viene dado por:

$$Q \equiv Q(\mathbf{x},\eta)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ es el vector de cantidades empleadas de cada uno de los n factores productivos determinantes de la producción, y η es una componente aleatoria. Dicha empresa puede operar en ese mismo instante en un mercado de futuros vendiendo una parte h de su producción a un precio conocido b, o bien, puede esperar a venderla en el mercado abierto una vez producida. El precio del mercado de contado es aún desconocido y viene modelado por la variable aleatoria P. El objetivo de la empresa es resolver el problema:

$$\max_{\mathbf{x},h} E\left[u\left(P\cdot(Q(\mathbf{x},\eta)-h)+bh-\sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i x_i\right)\right],$$

donde $(r_1, r_2, ..., r_n)$ es el vector de precios de los n factores productivos. Se trata pues de un problema de optimización con $n+1$ variables de decisión, y en el que las dos variables aleatorias aparecen multiplicándose.

En este trabajo se demuestra que la introducción de incertidumbre en la producción no afecta a la decisión de la empresa acerca de operar en el mercado de futuros, vendiendo su propia producción o especulando.

En Alghalith (2006b) se considera este mismo modelo, pero se supone que la función de producción está libre de incertidumbre y viene dada por $q \equiv q(\mathbf{x})$. Por el contrario, el coste de uno de los factores productivos (el primero de ellos) es desconocido en el momento de la toma de decisión. Por tanto, el objetivo de la empresa es resolver:

$$\max_{\mathbf{x},h} E\left[u\left(P\cdot(q(\mathbf{x})-h)+bh-R_1x_1-\sum\nolimits_{i=2}^{n} r_ix_i\right)\right],$$

Así pues, se tienen dos variables aleatorias (el precio de venta del producto elaborado y el precio de compra de uno de los factores productivos) y $n+1$ variables de decisión (las cantidades empleadas de cada uno de los factores y la cantidad destinada al mercado de futuros).

El estudio de este modelo permite a su autor determinar el impacto que produce la introducción de incertidumbre en el coste de uno de los factores productivos sobre: las decisiones de producción, de comercialización de futuros y de comercialización en el mercado de contado, y sobre el ratio de cobertura. El último de estos efectos se estudia sin suponer condiciones adicionales; por el contrario, para el resto se considera independencia entre las variables aleatorias.

1.2.2. Mercado de futuros para los factores productivos y la producción

En Alghalith (2008a) se parte del modelo de Alghalith (2006b) suponiendo además que existe un mercado de futuros para el primer factor productivo. Por tanto, la empresa debe decidir, además, la cantidad z del primer factor que comprará en el mercado de futuros al precio conocido g. El objetivo de la empresa es el siguiente:

$$\max_{\mathbf{x},\mathbf{z},h} E\left[u\left(P\cdot(q(\mathbf{x})-h)+bh-R_1(x_1-z)-gz-\sum\nolimits_{i=2}^{n} r_i x_i\right)\right].$$

Con estas condiciones se demuestra que la decisión óptima de la empresa no está determinada por la distribución de probabilidad de los precios o por su actitud frente al riesgo. Así, este resultado, conocido ya para el caso en que la única variable aleatoria es el precio de venta del producto elaborado por la empresa, se verifica también cuando la incertidumbre aparece tanto en el precio de venta como en el precio de uno de los factores productivos. Esto se debe al hecho de que un mercado de futuros para el factor productivo de precio aleatorio estabiliza la producción. En general, esta conclusión puede extenderse al caso en que los factores productivos de precio aleatorio puedan operarse en sendos mercados de futuros.

En el trabajo de Holthausen (1980), se estudia el caso de una empresa que fabrica n productos a partir de m factores, con arreglo a una función de producción, y para los cuales los precios de mercado son variables aleatorias. La empresa puede vender y comprar en el mercado de futuros tanto los productos que elabora como los que necesita para dicha elaboración, a precios fijos conocidos de antemano. Concretamente, el objetivo de la empresa de este modelo es obtener:

$$\max_{\{q_i, x_j, q_i^f, x_j^f\}} E\left[u\left(\sum_{i=1}^{n} P_i(q_i - q_i^f) + \sum_{i=1}^{n} p_i^f q_i^f - \sum_{j=1}^{m} R_j(x_j - x_j^f) - \sum_{j=1}^{m} r_j^f x_j^f\right)\right],$$

donde:

q_i: cantidades obtenidas de cada producto,

P_i: precios aleatorios de cada uno de los productos,

x_j: cantidades de cada factor productivo comprado,

R_j: precios aleatorios de cada uno de los factores productivos en el mercado abierto,

q_i^f: cantidades de cada producto vendidas a futuro,

p_i^f: precios de venta a futuro de cada producto,

x_j^f: cantidades de cada factor productivo compradas a futuro,

r_j^f: precios de cada uno de los factores productivos comprados a futuro.

Pese a su antigüedad, este trabajo es el único en el que aparecen tantas variables aleatorias y de decisión (tanto de compra como de venta) como se precisen. Además, las suposiciones que en él se realizan son, en la mayoría de los casos, las más generales. Más concretamente, Holthausen no impone ninguna condición adicional sobre la función de utilidad de la empresa, ni sobre la distribución de probabilidad, además de suponer un número cualquiera tanto de variables de decisión como aleatorias. Sin embargo, se considera una forma particular para los costes de producción[3] y no se considera la posibilidad de que exista incertidumbre sobre la propia producción.

Holthausen (1980) y Alghalith (2008a) obtienen en algunos casos resultados equivalentes. Por ejemplo, ambos demuestran que las decisiones de producción no dependen de los valores esperados de los precios ni del grado de aversión al riesgo de la empresa. Además, en los dos trabajos se obtienen expresiones que ligan a través de la función de producción el óptimo del problema con los precios que intervienen en el mismo. Sin embargo, el hecho de contar con un menor número de variables permite a Alghalith llevar a cabo otro tipo de análisis no realizado por Holthausen: el impacto que produce la introducción de incertidumbre en los costes de producción.

1.3. Estudio dinámico de la empresa

Por tratamiento dinámico de la empresa se entiende el estudio de aquella empresa en la que se considera que los instantes en que la misma toma decisiones acerca de su

[3]En realidad, la mayoría de los autores estudiados en modelos de empresa con múltiples fuentes de incertidumbre consideran una función de costes particular, que viene dada por el producto del vector de factores productivos y su vector de precios correspondientes.

proceso de producción (salvo los que se refieren al inicio de la misma y a la venta de los bienes fabricados) son múltiples. Así, por ejemplo, puede haber varios instantes a lo largo de un período de tiempo en los cuales la empresa decide los bienes que necesita para la producción.

Los estudios sobre el comportamiento dinámico de la empresa en presencia de varias fuentes de incertidumbre son escasos. Esto es debido a que los métodos empleados para el estudio de esta situación conducen a ecuaciones que, en situaciones no especialmente particulares, son irresolubles. Además, aun en el supuesto de que la solución no sea el objetivo del estudio, tampoco permiten obtener resultados acerca del comportamiento de la empresa en relación a las variables de interés. Debe tenerse en cuenta, por ejemplo, que en cada uno de los instantes en los que la empresa puede tomar decisiones de producción, la historia de la misma, es decir, el conjunto de precios y de valores de las variables de instantes anteriores, debe incorporarse a tal decisión, lo que conlleva la existencia de funciones de distribución de probabilidad condicionadas por los valores que se conocen de esos instantes.

Por todo ello, los autores de los trabajos que se han llevado a cabo en este campo tan solo señalan a muy grandes rasgos el procedimiento que debe seguirse para el estudio de tal situación, y lo aplican a casos muy especiales, como por ejemplo funciones de utilidad muy particulares (tales como la función identidad), o bien dejan de lado la optimización de valores esperados de la utilidad para buscar el óptimo de la misma (cuando esta depende de algún parámetro determinado y pierde su carácter aleatorio).

Entre los autores que han investigado el comportamiento dinámico de la empresa en condiciones de incertidumbre puede citarse a Antle (1983), Fama (1970) y Wolak y Kolstad (1991).

Antle (1983) estudia el caso de una producción agrícola, y observa que pueden darse tres etapas, siembra, cultivo y cosecha, y considera que cada una de estas dos últimas depende de la anterior. Para una empresa tal propone la optimización del valor esperado de la utilidad del beneficio, pero asume que presenta una aversión neutra al riesgo; en particular, supone que su función de utilidad es la función identidad. Dicha función le permite tratar de una manera mucho más sencilla el problema general. Además, para ilustrar el método propuesto considera una empresa con dos etapas de producción, en la que la función de producción de la primera etapa es lineal respecto del input (considera un solo input en esta etapa), y cuadrática en la segunda etapa respecto de otro input y la producción de la primera etapa. Aún en este caso, con condiciones ad hoc, no es posible resolver las ecuaciones estocásticas propuestas.

Fama (1970) estudia el caso en el que un inversor debe decidir en múltiples períodos de tiempos qué cantidad de sus bienes debe conservar y qué cantidad debe invertir en otros bienes de consumo al inicio de cada uno de esos períodos, de tal manera que optimice el valor esperado de la utilidad de su inversión al final del conjunto de esos instantes de tiempo. Para el estudio de este problema hace uso de la metodología propia de la resolución de problemas en los que la inversión en un instante está afectada por las decisiones tomadas en los instantes anteriores: optimiza en primer lugar el último periodo para todos los posibles estados de los períodos anteriores, y aplica el mismo método para el penúltimo período. Así, la optimización se efectúa desde el último período hasta el primero, en sentido inverso a la ocurrencia temporal del conjunto de instantes de decisión. Este autor demuestra que el comportamiento en cada uno de los períodos de un inversor cuya función de utilidad sea estricamente cóncava es indistinguible de aquel cuyo horizonte de optimización está compuesto por un único período. Aunque la profundidad de las implicaciones de este resultado es considerable, este no permite establecer de por sí resultados de carácter económico tales como, por ejemplo, análisis de estática comparativa.

Wolak y Kolstad (1991) consideran el caso de una empresa que hace uso de varios inputs y outputs de precios conocidos de antemano en el proceso de fabricación, salvo el de uno de los inputs, cuyo precio es aleatorio, y que puede ser adquirido a diferentes precios de diferentes proveeedores. El objetivo de esta empresa es la optimización en términos económicos de dicho proceso, que se repite a lo largo del tiempo. No obstante, estos autores suponen que la empresa optimiza la utilidad del valor esperado en lugar del valor esperado de la utilidad, con lo que se apartan de la teoría clásica de la utilidad esperada. Consideran, además, que la utilidad depende tanto del beneficio de la producción como de la varianza de ese beneficio.

1.4. Estado de la cuestión

A partir de la revisión realizada se puede observar que todos los autores consideran condiciones generales, al menos, en algunos aspectos del modelo; por el contrario, para otros aspectos, se ven obligados a imponer condiciones muy particulares. Esto es debido a que la introducción de supuestos demasiado generales puede impedir la obtención de resultados. Por ejemplo, esto sucede cuando se parte de un número cualquiera de variables de decisión, ya que no es fácil establecer relaciones entre las diversas condiciones que se derivan al aplicar los métodos clásicos de optimización. Así, en cada uno de los modelos pueden observarse condiciones generales en determinados aspectos, pero no existe ninguno en el que se consideren simultáneamente todas ellas. A continuación se recogen estas consideraciones de carácter general:

- una función de utilidad general (en algunos casos se considera una función particular, como es, por ejemplo, la de una empresa que manifiesta CARA. Sin embargo, debido a la dificultad que entraña, el caso en que la empresa manifiesta aversión absoluta al riesgo decreciente es ignorado por algunos autores, a pesar de ser el tipo de aversión más cercano a la realidad);

- una función general de costes (en muchos casos se supone que el coste de producción es una función lineal en la cantidad de factores productivos empleada);
- una función de distribución de probabilidad general para las variables aleatorias;
- incertidumbre tanto en el precio de venta del producto fabricado como en la cantidad elaborada y en los costes de producción; también debe tenerse presente que estos últimos tienen una parte no aleatoria;
- un número cualquiera de variables aleatorias (en la mayoría de los casos se consideran sólo dos);
- un número cualquiera de variables de decisión (en muchos casos se consideran como máximo dos);
- tratamiento dinámico de las condiciones de incertidumbre (en términos prácticos, no todas las decisiones se toman en un mismo instante de tiempo).

Así pues, los estudios futuros podrían orientarse a la inclusión simultánea en los modelos de los puntos citados. Por otra parte, se ha observado que algunos autores recurren a métodos gráficos para el análisis de su modelo. Esto nos lleva a pensar en la necesidad de desarrollar métodos analíticos adecuados que permitan, a la larga, analizar modelos más generales. Este es el objetivo que se persigue en los próximos capítulos.

Capítulo 2

Un modelo de empresa con múltiples fuentes de incertidumbre

Como se ha estudiado en el capítulo anterior, todos los modelos analizados en la literatura consideran una función de producción que admite derivadas parciales en las diferentes variables de decisión. Sin embargo, esta suposición no se ajusta a determinados casos. Como ejemplo de ello, puede considerarse aquella empresa en la que las proporciones en que deben combinarse los factores productivos son constantes, tal como sucede, por ejemplo, en la industria química, en la que los diferentes reactivos utilizados en la elaboración de un producto deben mantenerse ligados por unas proporciones fijas. De igual modo sucede en la industria ganadera de producción cárnica, puesto que las proporciones de las cantidades de alimentos necesarios para el engorde de los animales guardan una relación constante.

En este capítulo se presenta y analiza un modelo general de empresa cuya función de producción no admite derivadas parciales, y, por tanto, tampoco el tipo de análisis estándar que se lleva a cabo en estos casos. Se ha intentado que el estudio sea lo más general posible para que pueda abarcar un gran número de empresas o situaciones de producción. Concretamente, se ha considerado que la incertidumbre aparece tanto en los costes de producción como en los precios de venta, y admite además costes deterministas de producción. Por otro lado, incorpora tantas variables aleatorias como se precise, y, con determinados supuestos, se obtienen también algunos resultados en los que hay múltiples variables de decisión.

2.1. Descripción del modelo

Considérese una empresa que fabrica n productos, y que hace uso, para su elaboración, de m factores productivos, que debe comprar en el mercado. Los precios unitarios tanto de los factores productivos como de los bienes elaborados son desconocidos en el momento de iniciar la producción, y vienen representados por sendas variables aleatorias q_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ y p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, respectivamente.

Sea $k_{ij} \geqslant 0$, $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., m\}$ el número de unidades del factor productivo j que se necesitan para producir una unidad del bien i. Se supondrá que estas proporciones se mantienen en la elaboración de un número cualquiera de unidades, de modo que la cantidad que se utiliza de cada factor productivo es directamente proporcional a la cantidad fabricada. La empresa debe elegir el nivel final deseado de producción, que se denotará por $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$. No obstante, se supondrá que este nivel de producción final está afectado por un componente incierto, de tal manera que $\mathbf{x}$ será la producción final esperada, y $c_i x_i$, donde c_i es una variable aleatoria de media 1 que modela la incertidumbre en la producción, denotará la producción real final.

Con estos supuestos, el beneficio de la empresa viene dado por:

$$\begin{aligned}\pi(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n} p_i c_i x_i - \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} k_{ij} x_i \right) q_j - C(\mathbf{x}) - B \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i c_i - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_i \right) \cdot x_i - C\left(\mathbf{x}\right) - B,\end{aligned}$$

donde $\mathbf{k}_i = (k_{i1}, ..., k_{im})$, C es la parte no aleatoria de los gastos, y B los gastos fijos de la empresa.

El objetivo de la empresa es hallar $\mathbf{x}$ tal que

$$\max_{\mathbf{x}} E\left[u\left(\pi\left(\mathbf{x}\right)\right)\right], \tag{2.1}$$

donde la función de utilidad de la empresa, u, es tal que $u' > 0$ y $u'' < 0$.

Algunos autores, como Blair (1974), Stewart (1978), Booth (1983), Chavas (1985), Viaene y Zilcha (1998), Adrangi y Raffiee (1999), Sevi (2004) y Alghalith (2006a, 2006b, 2008a, 2009), realizan el análisis de su modelo a partir de una función de producción, que relaciona las cantidades de bienes elaborados con las unidades de factores productivos utilizadas. Este proceder no es aquí de aplicación, pues, como se demuestra a continuación, no existen las derivadas parciales para la función de producción, de las que hacen uso los citados autores.

Para hallar una expresión de la función de producción y determinar sus características se considera el caso más sencillo, es decir, aquel en el cual la empresa produce un único bien. Se ha supuesto que las proporciones para la fabricación son las siguientes: para producir 1 unidad del bien que se desea vender se precisan $k_{1j} > 0$ unidades del factor productivo j, para cada $j = 1, ...m$. Por otra parte, dado k_{11}, cualquier exceso del resto de factores productivos por encima de su valor respectivo k_{1j} produce también 1 unidad, puesto que tan solo se tienen k_{11} unidades del producto 1 y un exceso de los demás. Argumentos análogos pueden darse para excesos o defectos de los demas factores productivos. Por todo ello, si se denota por $(y_1, ..., y_m)$ las cantidades de los respectivos factores productivos utilizados por la empresa, la función de producción (es decir, la cantidad elaborada a partir de ellos) viene dada en este caso por:

$$f\left(y_1, ..., y_m\right) = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \{y_j / k_{1j}\} \quad \text{si} \quad y_1, ..., y_m \geqslant 0.$$

Esta función carece de derivadas parciales en determinados puntos, puesto que para $\mathbf{y} = (k_{11}x_1, ..., k_{1m}x_m)$, $x_1 \geqslant 0$ se tiene que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(y_1 + t, ..., y_m) - f(\mathbf{y})}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\min\left\{\frac{k_{11}x_1 + t}{k_{11}}, ..., \frac{k_{1m}x_1}{k_{1m}}\right\} - x_1}{t} = 0$$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(y_1 + t, ..., y_m) - f(\mathbf{y})}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{\min\left\{\frac{k_{11}x_1 + t}{k_{11}}, ..., \frac{k_{1m}x_1}{k_{1m}}\right\} - x_1}{t} = \frac{1}{k_{11}}$$

Este hecho supone una diferencia respecto al análisis que siguen los autores citados; consideran que la función de producción tiene derivadas parciales, de las que hacen uso en el proceso de optimización. Se ha probado aquí que tal proceder no es de aplicación para una función de producción como la propuesta.

De aquí en adelante, y para no abusar de la notación, se escribirá $k_1, k_2, ...$ en lugar de $k_{11}, k_{12}, ...$, respectivamente, en el caso en que se considere una empresa que elabora un único producto (es decir, si $n = 1$). Así, según se han definido anteriormente $k_{ij}, i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$, se tiene que k_i es el número de unidades del factor productivo $i-$ésimo que se necesitan para producir una unidad del bien elaborado.

2.2. Condiciones necesarias de óptimo

A continuación se establecen las condiciones necesarias que debe cumplir el óptimo del problema. Curiosamente, estas condiciones, que determinan si la empresa debe entrar en la producción o no si desea alcanzar el objetivo propuesto en (2.1), no han sido estudiadas previamente por ningún autor en modelos similares a este.

Se supondrá que el máximo se alcanza en un punto interior, que se denotará por $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$; es decir, $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0, ...$, $x_n^* > 0$. Así, la condición de primer orden de máximo será:

$$E\left[u'\left(\pi\left(\mathbf{x}^*\right)\right)\left(p_i c_i - \mathbf{q}\cdot\mathbf{k}_i - C_{x_i}(\mathbf{x}^*)\right)\right] = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.2}$$

Se supondrá, además, que se cumplen las condiciones suficientes de segundo orden para dicho máximo.

Proposición 2.2.1. *Si en la elaboración del producto $i-$ésimo no intervienen los factores productivos utilizados en los demás bienes, y la producción y los precios relativos al proceso de venta y fabricación de ese bien son independientes del resto de la fabricación y de los precios de todo el proceso, entonces ha de cumplirse que el valor esperado del precio unitario de venta del bien $i-$ésimo ponderado por la producción, c_i, sea mayor o igual que la suma de su coste marginal en $\mathbf{x}^*$ y los valores esperados ponderados de los precios unitarios de los productos que compra para su elaboración, es decir,*

$$\overline{p_i c_i} > C_{x_i}(\mathbf{x}^*) + \overline{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i, \tag{2.3}$$

con $\overline{\mathbf{q}} = (\overline{q_1}, ..., \overline{q_m})$ *y* $\mathbf{k}_i = (k_{i1}, ..., k_{im})$.

Demostración. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que el bien $i-$ésimo es el primero, y que para su elaboración se hace uso de los primeros α factores productivos únicamente (el orden en que se toman los bienes elaborados y los factores productivos no altera el resultado), y que no intervienen los factores productivos utilizados en los demás bienes; es decir, la distribución de k_{ij} queda de la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1\alpha} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & k_{2,\alpha+1} & \cdots & k_{2m} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n,\alpha+1} & \cdots & k_{nm}
\end{array}$$

Sean $\mathbf{Y}$=$(p_2, ..., p_n, c_2, ..., c_n, q_{\alpha+1}, ..., q_m)$ y $\mathbf{Z}$=$(p_1$,c_1,$q_1, ..., q_\alpha)$, que, como se ha supuesto, son variables aleatorias independientes, y defínanse las funciones

$$e(s_1, ..., s_{n-1}, t_1, ..., t_{n-1}, \gamma_1, ..., \gamma_{m-\alpha}) = \sum_{j=1}^{n-1} [s_j t_j - (\gamma_1, ..., \gamma_{m-\alpha}) \cdot (k_{j+1,\alpha+1}, ..., k_{j+1,m})] \cdot x_{j+1}^*$$

y $f(s,t,\beta_1, ..., \beta_\alpha) = st - \sum_{j=1}^{\alpha} \beta_j \cdot k_{1j} - C_{x_1}(\mathbf{x}^*)$, $g\,(t, w) = u'((t + C_{x_1}(\mathbf{x}^*))x_1^* + w - C\,(\mathbf{x}^*) - B)$ y $h \equiv 1$. Puesto que f es continua (y, por tanto, medible) y g es estrictamente decreciente en t, puede aplicarse el Lema A.4.1 con estas variables aleatorias y con las funciones definidas: $E\,[f\,(\mathbf{Z}) \cdot g\,(f\,(\mathbf{Z})\,, e(\mathbf{Y}))] < g\,(0, e(\mathbf{Y})) \cdot E\,[f\,(\mathbf{Z})]$. Pero $E\,[f\,(\mathbf{Z}) \cdot g\,(f\,(\mathbf{Z})\,, e(\mathbf{Y}))] = \partial E\,[u\,(\pi\,(\mathbf{x}^*))]\,/\partial x_1 = 0$, y, por tanto, $0 < u' \cdot E\,[f\,(\mathbf{Z})]$. Y dado que $u' > 0$, se tiene que $E\,[f\,(\mathbf{Z})] = \overline{p_1 c_1} - \sum_{j=1}^{\alpha} p_j \cdot k_{1j} - C_{x_1}(\mathbf{x}^*) = \overline{p_1 c_1} - \overline{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_1 - C_{x_1}(\mathbf{x}^*) > 0$, donde la última igualdad proviene del hecho de que $k_{1j} = 0$ para $j = \alpha + 1, ..., m$. $\square$

Pudiera parecer en un principio que este es un resultado predecible debido a la independencia del bien $i-$ésimo respecto del resto de la producción. No obstante, debe tenerse presente que la optimización del problema engloba a la utilidad del beneficio de toda la producción como un todo, y no de cada uno de los bienes elaborados por separado. Aun así, con la independencia mencionada, dicha optimización conduce al mismo resultado, en cuanto a las condiciones necesarias de óptimo, que se obtendría para la optimización del bien $i-$ésimo si su producción se mantuviera ajena al resto del proceso, tal como acaba de probarse.

Corolario 2.2.1. *Esta misma conclusión se obtiene si se supone que la empresa elabora un único producto, pero sin la necesidad de que las variables aleatorias mencionadas sean independientes.*

Corolario 2.2.2. *Con las suposiciones de la proposición anterior, si p_i y c_i son independientes, entonces se satisface la relación $\overline{p_i} > C_{x_i}(\mathbf{x}^*) + \overline{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{k}_i$.*

Demostración. Se deduce inmediatamente de la proposición anterior, de la independencia entre p_i y c_i, y del hecho de que $\overline{c_i} = 1$. $\square$

2.3. Incertidumbre *vs* certidumbre

Proposición 2.3.1. *Si se verifican las condiciones de la Proposición 2.2.1 y las variables p_i y c_i son independientes, entonces el coste marginal no aleatorio del bien $i-$ésimo en el óptimo en condiciones de incertidumbre es inferior al que se precisa en un entorno de completa certidumbre.*

Demostración. En ausencia de incertidumbre en la producción (es decir, tomando $c_j = \overline{c_j} = 1$ para todo $j = 1, ...n$), si tanto los precios de compra como el de venta son conocidos de antemano e iguales a sus respectivos valores esperados, el objetivo de la empresa será ahora maximizar su utilidad:

$$\max_{\mathbf{x}} u\left(\pi\left(\mathbf{x}\right)\right) = \max_{\mathbf{x}} u\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n}\left(\overline{p_j} - \overline{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{k}_j\right)\cdot x_j - C\left(\mathbf{x}\right) - B\right).$$

Si tal máximo se alcanza en el punto interior $\mathbf{x}_c^*$, entonces las condiciones de primer orden serán $\left(\overline{p_j} - \overline{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{k}_j - C_{x_j}(\mathbf{x}_c^*)\right) u'(\pi\left(\mathbf{x}_c^*\right)) = 0$ para todo $j = 1, ..., n$, de lo que se deduce que $\overline{p_j} - \overline{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{k}_j = C_{x_j}(\mathbf{x}_c^*)$ para todo $j = 1, ..., n$. De esta igualdad y del hecho de que para el bien $i-$ésimo se verifica la relación del corolario anterior se deduce que $C_{x_i}(\mathbf{x}^*) < C_{x_i}(\mathbf{x}_c^*)$. $\square$

Corolario 2.3.1. *Si una empresa produce un único bien (es decir, $n = 1$) con coste marginal determinista creciente, y el precio de venta y la producción son independientes, entonces la producción esperada en condiciones de incertidumbre es inferior a la que se obtiene en un entorno de completa certidumbre.*

Demostración. Por la proposición anterior se tiene que $C'\left(x^*\right) < C'\left(x_c^*\right)$. Como se ha supuesto que el coste marginal determinista es creciente, se concluye que $x^* < x_c^*$. $\square$

2.4. Comportamiento según el grado de aversión al riesgo

En este apartado se hace uso de la medida de aversión al riesgo de Arrow-Pratt, que se denotará por r, y que viene dada por $r\left(t\right) = -u''(t)/u'(t)$.

Proposición 2.4.1. *Sean dos empresas, cuyas funciones de utilidad se denotan por* u_1 *y* u_2 *respectivamente, que fabrican un único producto* ($n = 1$) *y tales que la primera manifiesta menor aversión al riesgo que la segunda, es decir,* $r_1(t) = -u_1''(t)/u_1'(t) < -u_2''(t)/u_2'(t) = r_2(t)$*, para* $t \in \mathbb{R}$*, y para las que* $C''(x) \geqslant 0$*. Entonces se cumple que* $x_1^* > x_2^*$*.*

Demostración. Sea la variable aleatoria $\mathbf{Z} = (p,c,\mathbf{q})$ y defínanse las funciones

$$k(t) = u_1'((t + C'(x_2^*))x_2^* - C(x_2^*) - B)$$

$$h(t) = u_2'((t + C'(x_2^*))x_2^* - C(x_2^*) - B)$$

y $g(t) = \frac{k(t)}{h(t)}$, que es estrictamente creciente, puesto que

$$\frac{dg(t)}{dt} = x_2^* \frac{u_1''u_2' - u_1'u_2''}{u_2'^2} = x_2^* g(t)\left(r_2(t) - r_1(t)\right) > 0$$

Sea la función $f(s, t, \beta_1, ..., \beta_m) = st - \beta \cdot \mathbf{k} - C'(x_2^*)$, que es continua y, por tanto, medible. Puede aplicarse, pues, el Lema A.4.1 con las funciones y la variable aleatoria definidas:

$$E\left[f(p,c,\mathbf{q}) \cdot g(f(p,c,\mathbf{q})) \cdot h(f(p,c,\mathbf{q}))\right] > E\left[g(0)\right] \cdot E\left[f(p,c,\mathbf{q}) \cdot h(f(p,c,\mathbf{q}))\right],$$

donde se ha hecho $g(t, w) = g(t)$. Es decir,

$$E\left[f(p,c,\mathbf{q}) \cdot k(f(p,c,\mathbf{q}))\right] > g(0) \cdot E\left[f(p,c,\mathbf{q}) \cdot h(f(p,c,\mathbf{q}))\right].$$

Pero

$$E\left[f\left(p{,}c,\mathbf{q}\right)\cdot k\left(f\left(p{,}c,\mathbf{q}\right)\right)\right]=\frac{\partial E\left[u_1\left(\pi\left(x_2^*\right)\right)\right]}{\partial x}$$

y

$$E\left[f\left(p{,}c,\mathbf{q}\right)\cdot h\left(f\left(p{,}c,\mathbf{q}\right)\right)\right]=\frac{\partial E\left[u_2\left(\pi\left(x_2^*\right)\right)\right]}{\partial x}=0,$$

donde la igualdad se verifica por la condición de primer orden de máximo. Por todo ello se tiene que $\partial E\left[u_1\left(\pi\left(x_2^*\right)\right)\right]/\partial x>0$, y de aquí que

$$\frac{\partial E\left[u_1\left(\pi\left(x_2^*\right)\right)\right]}{\partial x}>0=\frac{\partial E\left[u_1\left(\pi\left(x_1^*\right)\right)\right]}{\partial x}.$$

Pero puesto que la función $x\to\partial E\left[u_1\left(\pi\left(x\right)\right)\right]/\partial x$ es estrictamente decreciente (en x), dado que su derivada es

$$E\left[\left(pc-\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}-C'\left(x\right)\right)^2u_1''\left(\pi\left(x\right)\right)-C''\left(x\right)u_1'\left(\pi\left(x\right)\right)\right]<0,$$

se concluye que $x_2^*<x_1^*$. □

Así pues, con los supuestos de esta proposición, la empresa que manifiesta menor aversión al riesgo tiene una producción mayor.

Si bien este resultado es una extensión del demostrado por Dalal y Alghalith (2009), la conclusión no podía, en un principio, establecerse directamente, debido al hecho de que en el presente modelo la empresa se enfrenta a costes aleatorios, y los efectos que estos pudieran tener eran desconocidos. Como conclusión, puede decirse que los costes de producción variables no afectan al comportamiento de la empresa atendiendo a su grado de aversión al riesgo.

2.5. Análisis de estática comparativa

En este apartado se estudia el comportamiento de la empresa frente a cambios en algunos de sus parámetros y variables.

¿Qué influencia tienen los costes fijos en la producción? Como se verá, el resultado que se obtiene confirma el demostrado por Sandmo, en cuyo modelo la única variable aleatoria es el precio de venta del producto elaborado por la empresa. Esta coincidencia es, en parte, lógica, pues de algún modo puede *verse* el conjunto de las diversas variables aleatorias como una sola. Como conclusión, se observa que la empresa responde del mismo modo a una variación en los costes fijos tanto si hay costes aleatorios como si no.

Proposición 2.5.1. *Si una empresa que fabrica un único producto presenta aversión absoluta decreciente al riesgo, entonces se cumple que* $dx^*/dB < 0$.

Demostración. La ganancia de la empresa como función de la producción esperada y de los costes fijos es $\pi(x,b) = (pc - \mathbf{q}\cdot\mathbf{k})\,x - C(x) - b$. La función $L_3(x,b) = E\left[u'(\pi(x,b))\,(pc - \mathbf{q}\cdot\mathbf{k} - C'(x))\right]$ se anula en el punto (x^*, B) por la condición de primer orden, y por la condición de segundo orden se cumple que $\partial L_3(x^*,B)/\partial x < 0$. Con todo ello, por el teorema de la función implícita existe un entorno del punto $b = B$

en el que está definida una única función $x = x(b)$ para la que se verifica que $\frac{dx(B)}{db} = -\frac{\partial L_3(x^*,B)}{\partial b} / \frac{\partial L_3(x^*,B)}{\partial x}$, por lo que $\operatorname{sgn} dx(B)/db = \operatorname{sgn} \partial L_3(x^*, B)/\partial b$.

Pero $\partial L_3(x^*, B)/\partial b = -E[u''(\pi(x^*, B))(pc - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - C'(x^*))] < 0$. En efecto, defínase $\bar{\pi} = C'(x^*)x^* - C(x^*) - B$, y sea $(p,c,\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2+m}$ tal que $pc - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} \geqslant C'(x^*)$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
r(\pi(x^*, B)) &= r((pc - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k}) \cdot x^* - C(x^*) - B) \\
&\leqslant r(C'(x^*)x^* - C(x^*) - B) = r(\bar{\pi})
\end{aligned}
$$

por el decrecimiento de r. Por ello, se llega a

$$
\begin{aligned}
&u''(\pi(x^*, B))(pc - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - C'(x^*)) = \\
&\qquad - u'(\pi(x^*, B))(pc - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - C'(x^*))\, r(\pi(x^*, B)) \geqslant \\
&\qquad\qquad - u'(\pi(x^*, B))(pc - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - C'(x^*))\, r(\bar{\pi})
\end{aligned}
$$

Del mismo modo se prueba que esta desigualdad (ahora estricta) es válida para cualquier $(p,c,\mathbf{q})$ tal que $pc - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} < C'(x^*)$, y, por ende, para todo $(p,c,\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2+m}$. Por ello, se puede tomar valores esperados a ambos lados y concluir que

$$
\begin{aligned}
&E[u''(\pi(x^*, B))(pc - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - C'(x^*))] > \\
&\qquad r(\bar{\pi}) \cdot E[-u'(\pi(x^*, B))(pc - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - C'(x^*))] = 0, \quad (2.4)
\end{aligned}
$$

puesto que $r(\bar{\pi})$ es una constante, y la igualdad proviene de la condición de primer orden.

De (2.4) se deduce que $dx\,(B)\,/db < 0$, o, con la notación habitual en este tipo de problemas, $dx^*(B)/db < 0$. $\square$

Se ha demostrado, pues, que un incremento en los gastos fijos conlleva una disminución de la cantidad producida.

¿Qué efecto en la producción conlleva una variación en alguno de los precios? Se estudia en primer lugar el caso en que tal cambio se produce en uno de los factores productivos.

Para expresar matemáticamente una variación en uno de los precios se puede suponer que se suma una constante a dicho precio, es decir, que el nuevo precio es ahora de la forma $q_i + \theta_i$ para algún $i \in \{1, 2, ..., m\}$, donde θ_i es una constante.

Proposición 2.5.2. *Sea una empresa que produce un único bien y que presenta aversión absoluta decreciente al riesgo. Si uno de los precios de los factores productivos es de la forma $q_j + \theta_j$ para algún $j \in \{1, 2, ..., m\}$, donde θ_j es una constante aditiva, y la empresa maximiza su producción en el punto denotado por $x^*_{\theta_j}$, entonces se cumple que* $\dfrac{dx^*_{\theta_j}\,(\theta_j = 0)}{d\theta_j} < 0$.

Demostración. La ganancia de la empresa será en este caso:

$$\pi\,(x, \theta_j) = \left(pc - \sum\nolimits_{i=1, i\neq j}^{m} k_i q_i - k_j\,(q_j + \theta_j)\right) x - C\,(x) - B$$

De manera análoga a la proposición anterior, la función

$$L_4(x,\theta_j) = E\left[u'(\pi(x,\theta_j))\left(pc - \sum\nolimits_{i=1,\, i\neq j}^{m} k_i q_i - k_j(q_j+\theta_j) - C'(x)\right)\right],$$

se anula en $(x^*,0)$. Además,

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}\frac{dx(0)}{d\theta_j} &= \operatorname{sign}\frac{\partial L_4(x^*,0)}{\partial\theta_j}\\ &= \operatorname{sign}\left[-k_j\left(x^*E\left[u''(\pi(x^*,0))\left(pc-\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}-C'(x^*)\right)\right]+E\left[u'(\pi(x^*,0))\right]\right)\right]<0,\end{aligned}$$

en donde se prueba, con un procedimiento similar al utilizado en la proposición anterior, que el primer valor esperado de la última parte de esta expresión es positivo . Por tanto, $dx^*_{\theta_j}(\theta_j=0)/d\theta_j < 0$. □

Este resultado nos dice que un aumento en alguno de los precios de compra lleva asociado una disminución de la producción.

¿Qué sucede si la variación se produce en el precio de venta del producto que elabora la empresa?

Proposición 2.5.3. *Sea una empresa que produce un único bien y que presenta aversión absoluta decreciente al riesgo, y cuya producción no es aleatoria. Entonces, si el precio de venta es de la forma $p+\theta$, donde θ es una constante aditiva, y la empresa maximiza su producción en el punto denotado por x^*_θ, se cumple que* $\dfrac{dx^*_\theta(\theta=0)}{d\theta} > 0.$

Demostración. La ganancia de la empresa es $\pi(x,\theta) = (p + \theta - \mathbf{q}\cdot\mathbf{k})\,x - C(x) - B$. Sea $L_5(x,\theta) = E[u'(\pi(x,\theta))(p + \theta - \mathbf{q}\cdot\mathbf{k} - C'(x))]$, y procédase como en la proposición anterior, para concluir que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}\frac{dx(0)}{d\theta} &= \operatorname{sign}\frac{\partial L_5(x^*,0)}{\partial\theta} \\
&= \operatorname{sign}\left[c\left(x^* E\left[u''(\pi(x^*,0))(p - \mathbf{q}\cdot\mathbf{k} - C'(x^*))\right] + E\left[u'(\pi(x^*,0))\right]\right)\right] > 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Por tanto, un aumento en el precio de venta supone un aumento de la cantidad producida.

Por último, ¿qué efecto tiene una variación simultánea en más de un precio? Este punto no ha sido tratado hasta la fecha por ninguno de los autores que estudian el comportamiento de la empresa con varias fuentes de incertidumbre.

Proposición 2.5.4. *Sea una empresa que elabora un único producto y que presenta aversión absoluta decreciente al riesgo. Si se produce un cambio simultáneo en algunos de los precios -denotado por $\theta = (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_m)$- que intervienen en la producción y esta no es aleatoria, entonces la variación de la cantidad producida verifica la siguiente relación:*

$$x(\theta) - x^* = K \cdot \left(\theta_0 - \sum_{j=1}^{m} \theta_j k_j\right) + \alpha(\theta),$$

con $K > 0$*, y* $\alpha(\theta) \to 0$ *cuando* $\theta \to \mathbf{0}$*.*

Demostración. La ganancia de la empresa es

$$\pi(x, \theta) = p + \theta_0 - \sum\nolimits_{i=1}^{m} (q_i + \theta_i) k_i x - C(x) - B.$$

Dada la función de $m + 2$ variables:

$$L_T(x, \theta) = E\left[u'(\pi(x, \theta)) \left(p + \theta_0 - \sum\nolimits_{i=1}^{m} (q_i + \theta_i) k_i - C'(x)\right)\right],$$

por el teorema de la función implícita y las condiciones de primer orden se concluye que $\frac{\partial x(\mathbf{0})}{\partial \theta_j} = -\frac{\partial L_T(x^*, \mathbf{0})}{\partial \theta_j} / \frac{\partial L_T(x^*, \mathbf{0})}{\partial x}$ para todo $j \in \{0, 1, 2, ..., m\}$.

Si se suponen condiciones suficientes de diferenciabilidad (por ejemplo, la continuidad de las derivadas parciales $\partial x(\theta) / \partial \theta_j$ en el punto $\mathbf{0}$) puede escribirse lo siguiente:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x(\mathbf{0}) + \sum\nolimits_{j=0}^{m} \frac{\partial x(\mathbf{0})}{\partial \theta_j} \cdot (\theta_j - 0) + \varepsilon_0(\theta) \|\theta - \mathbf{0}\| \\ &= x^* - \frac{1}{\partial L_T(x^*, \mathbf{0}) / \partial x} \sum\nolimits_{j=0}^{m} \frac{\partial L_T(x^*, \mathbf{0})}{\partial \theta_j} \cdot \theta_j + \varepsilon_0(\theta) \|\theta\|, \end{aligned}$$

con $\lim_{\theta \to \mathbf{0}} \varepsilon_0(\theta) = 0$, y $x(\mathbf{0}) = x^*$.

Pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_T(x^*, \mathbf{0})}{\partial \theta_0} &= E\left[x^* u''(\pi(x^*, \mathbf{0})) \left(p - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - C'(x^*)\right) + u'(\pi(x^*, \mathbf{0}))\right] \\ \frac{\partial L_T(x^*, \mathbf{0})}{\partial \theta_j} &= -k_j E\left[x^* u''(\pi(x^*, \mathbf{0})) \left(p - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - C'(x^*)\right) + u'(\pi(x^*, \mathbf{0}))\right], \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{\partial L_T(x^*, \mathbf{0})}{\partial \theta_j} \cdot \theta_j =$$
$$\left(\theta_0 - \sum_{j=1}^{m} \theta_j k_j\right) \cdot \left\{ E\left[x^* u''(\pi(x^*, \mathbf{0}))\left(p - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - C'(x^*)\right) + u'(\pi(x^*, \mathbf{0}))\right]\right\}$$

Como ya se ha probado anteriormente, la expresión entre llaves es positiva. Por ello, se verifica que

$$x(\theta) - x^* = K \cdot \left(\theta_0 - \sum_{j=1}^{m} \theta_j k_j\right) + \varepsilon_0(\theta) \|\theta\|,$$

con

$$K = -\frac{E\left[u''(\pi(x^*, \mathbf{0}))x^*\left(p - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} - C'(x^*)\right) + u'(\pi(x^*, \mathbf{0}))\right]}{\partial L_T(x^*, \mathbf{0}) / \partial x} > 0$$

□

Corolario 2.5.1. *En un entorno suficientemente pequeño del óptimo (es decir, en un entorno de $\theta = \mathbf{0}$) se verifica que $x(\theta) - x^* \simeq K \cdot (\theta_0 - \sum_{j=1}^{m} \theta_j k_j)$.*

Así, en las condiciones de la proposición anterior, una variación de los precios - tanto del bien elaborado por la empresa como los de los factores productivos- conlleva un desplazamaniento del punto óptimo de producción directamente proporcional a la variación ponderada de esos precios. Obsérvese que este es un resultado de estática comparativa en el que se estudia la variación del óptimo de producción en función de un cambio simultáneo de varias variables aleatorias (los precios en este caso). Los trabajos de estática comparativa llevados a cabo hasta la fecha en la literatura estudian la variación producida por un cambio en tan solo una de las variables aleatorias.

De este corolario (aunque también de las proposiciones 2.5.3 y 2.5.2) puede deducirse fácilmente qué impacto tiene una variación en el óptimo de uno de los precios respecto de la variación total.

2.6. La empresa en el mercado de futuros

Supóngase ahora que la empresa puede vender parte de su producción en el mercado de futuros, y que también puede comprar en ese mercado todos los productos que necesita o parte de ellos.

Un estudio destacado en relación a la operativa de una empresa en el mercado de futuros es el que se muestra en Holthausen (1980). No obstante, su método no es directamente aplicable al modelo que en este trabajo se ha presentado; por un lado, Holthausen supone que la función de producción tiene derivadas parciales, condición que, como ya se ha demostrado, aquí no se verifica; por otro, no considera costes deterministas de producción. A pesar de ello, se verá que algunos de los resultados del modelo presentado aquí coinciden con los de ese autor.

La ganancia de la empresa que opera en el mercado de futuros será:

$$\begin{aligned}\pi = &\sum_{i=1}^{n} p_i \left(c_i x_i - h_i\right) + \sum_{i=1}^{n} p_i^f h_i - C\left(\mathbf{x}\right) - B \\ &- q_1 \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} k_{i1} x_i - s_1\right) - q_1^f s_1 - ... - q_m \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} k_{im} x_i - s_m\right) - q_m^f s_m,\end{aligned}$$

donde h_i es la parte de las x_i unidades producidas del bien i destinada a la venta en el mercado de futuros al precio fijo y conocido p_i^f, y de manera análoga se definen s_i y q_i^f para los productos comprados.

La empresa elegirá aquellos valores de $(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{s})$ que maximicen el valor esperado de la utilidad de las ganancias. Por ello, las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} E\left[u'(\pi(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}^*, \mathbf{s}^*)) \left(p_i c_i - \mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_i - C_{x_i}(\mathbf{x}^*)\right)\right] &= 0,\ i = 1, ..., n, \\ E\left[u'(\pi(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}^*, \mathbf{s}^*)) \cdot (-p_i + p_i^f)\right] &= 0,\ i = 1, ..., n, \\ E\left[u'(\pi(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}^*, \mathbf{s}^*)) \cdot (q_j k_{ij} - q_j^f k_{ij})\right] &= 0,\ j = 1, ..., m;\ i = 1, ..., n, \end{aligned}$$

donde se ha supuesto que se verifican en el punto $(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}^*, \mathbf{s}^*)$, con $x_i^* > 0$ para todo $i = 1, ..., n$.

2.6.1. La empresa que elabora múltiples bienes con factores de producción constantes

Considérese ahora el caso general de una empresa con factores de producción constantes ($c_i = 1$, $i = 1, ..., n$): la empresa fabrica n bienes a partir de m productos, con constantes de proporcionalidad k_{ij}, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$. Sumando las tres condiciones para un $i \in \{1, ..., n\}$ particular y para cada $j = 1, ..., m$ se tiene:

$$E\left[u'(\pi(\mathbf{x}^*, \mathbf{h}^*, \mathbf{s}^*)) \cdot \left\{p_i^f - \sum\nolimits_{j=1}^m q_j^f k_{ij} - C_{x_i}(\mathbf{x}^*)\right\}\right] = 0, \; i = 1, ..., n,$$

y, por tanto,

$$C_{x_i}(\mathbf{x}^*) = p_i^f - \sum_{j=1}^m q_j^f k_{ij}, \; i = 1, ..., n$$

De aquí puede afirmarse que:

Proposición 2.6.1. *El nivel de producción de una empresa con producción no aleatoria que puede operar en sendos mercados de futuros para todos los bienes que intervienen en el proceso productivo (tanto los que compra como los que vende), no depende ni de su grado aversión al riesgo, ni de la distribución de los precios, ni de los valores esperados de estos.*

Corolario 2.6.1. *Para una empresa con factores de producción constantes y sin costes deterministas (es decir, $C(\mathbf{x}) = 0$), y que opera en sendos mercados de futuros para todos los bienes que intervienen en el proceso de fabricación (tanto los que compra como los que vende), una condición necesaria para alcanzar el óptimo de producción es que el coste en el mercado de futuros para cada uno de los bienes que produce coincida con el respectivo coste a futuros de dicha elaboración, es decir, $p_i^f = \sum_{j=1}^m q_j^f k_{ij}$, $i = 1, ..., n$.*

2.6.2. Posición en el mercado de futuros

Proposición 2.6.2. *Sea una empresa con aversión al riesgo para la que el precio del bien elaborado $i-$ésimo es independiente del resto de variables aleatorias (precios y factores de producción), y tal que su fabricación no es aleatoria ($c_i = 1$). Entonces, la relación entre la cantidad de ese bien vendida al precio futuro y la vendida al precio de mercado sigue el siguiente esquema:*

$$\begin{array}{lcl} p_i^f = E\left[p_i\right] & \Longleftrightarrow & h_i^* = x_i^* \\ p_i^f < E\left[p_i\right] & \Longleftrightarrow & h_i^* < x_i^* \\ p_i^f > E\left[p_i\right] & \Longleftrightarrow & h_i^* > x_i^* \end{array}$$

Demostración. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que el bien $i-$ésimo es el primero.

Sean $\mathbf{Y}=(p_2, ..., p_n, c_2, ..., c_n, q_1, ..., q_m)$ y $\mathbf{Z} = p_1$, que, como se ha supuesto, son variables aleatorias independientes.

Sea $g\left(t, w\right) = u'(t\left(h_1^* - x_1^*\right) + w + p_1^f x_1^* - C\left(\mathbf{x}^*\right) - B)$, que es estrictamente creciente o decreciente en t según sea $h_1^* < x_1^*$ o $h_1^* > x_1^*$.

Defínanse las funciones $f\left(s\right) = p_1^f - s$, $h \equiv 1$ y

$$\begin{aligned} e(s_1, ..., s_{n-1}, t_1, ..., t_{n-1}, \gamma_1, ..., \gamma_m) = \\ & \sum\nolimits_{i=2}^{n} s_i\left(t_i x_i^* - h_i^*\right) + \sum\nolimits_{i=2}^{n} p_i^f h_i^* \\ & - \gamma_1\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} k_{i1} x_i^* - s_1^*\right) - q_1^f s_1^* - ... \\ & - \gamma_m\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} k_{im} x_i^* - s_m^*\right) - q_m^f s_m^* \end{aligned}$$

Puesto que la función f es medible y que se ha supuesto que p_1 es independiente de la variable aleatoria $(\mathbf{p}-\{p_1\}, \mathbf{c}-\{c_1\}, \mathbf{q})$, puede aplicarse el Lema A.4.1 con las funciones y las variables definidas:

$$E\left[f(\mathbf{Z})\cdot g\left(f(\mathbf{Z}),e(\mathbf{Y})\right)\right] \overset{\geq}{\underset{<}{=}} E\left[g\left(0,e(\mathbf{Y})\right)\right]\cdot E\left[f(\mathbf{Z})\right] \text{ si } h_1^* \overset{\leq}{\underset{>}{=}} c_1x_1^*$$

Pero $E\left[f(\mathbf{Z})\cdot g\left(f(\mathbf{Z}),e(\mathbf{Y})\right)\right] = \partial E\left[u\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{h}^*,\mathbf{s}^*\right)\right]/\partial h_1 = 0$, y

$$E\left[g\left(0,e(\mathbf{Y})\right)\right]\cdot E\left[f(\mathbf{Z})\right] = E\left[u'\right]\cdot(p_1^f - E\left[p_1\right]),$$

donde no se ha hecho explícito en qué punto se evalúa la función u', puesto que, como se verá enseguida, carece de importancia.

En consecuencia, y dado que $u' > 0$, se deducen los tres casos siguientes: (a) si $h_1^* < x_1^*$, entonces $0 > E\left[u'\right]\cdot(p_1^f - E\left[p_1\right])$, y de aquí que $p_1^f < E\left[p_1\right]$, (b) si $h_1^* > x_1^*$ se tiene que $p_1^f > E\left[p_1\right]$, y (c) si $h_1^* = x_1^*$, entonces $p_1^f = E\left[p_1\right]$. De esto se concluye la proposición. $\square$

De acuerdo con este resultado, puede afirmarse que si $p_i^f < E\left[p_i\right]$, entonces la empresa decide cubrir parte de su producción $(0 < h_i^* < c_ix_i^*)$, o no entrar en absoluto en el mercado de futuros $(h_i^* = 0)$, o especular comprando en este mercado $(h_i^* < 0)$. Si $p_i^f = E\left[p_i\right]$, entonces la empresa decide cubrirse totalmente $\left(h_i^* = x_i^*\right)$. Finalmente, si $p_i^f > E\left[p_i\right]$, entonces la empresa decide especular vendiendo a futuro más de lo que produce $(h_i^* > x_i^*)$.

Obsérvese, por otra parte, que la producción puede ser aleatoria en los demás productos.

De un modo similar se demuestra el siguiente resultado:

Proposición 2.6.3. *Sea una empresa con aversión al riesgo que puede operar en el mercado de futuros. Si el precio del producto de compra $j-$ésimo en el mercado ordinario es independiente del resto de variables aleatorias (tanto precios como factores de producción), entonces la relación entre la cantidad comprada de ese producto al precio futuro y la comprada al precio de mercado sigue el siguiente esquema*:

$$\begin{array}{lcl} E\left[q_j\right] < q_j^f & \iff & s_j^* < \sum_{i=1}^n k_{ij} x_i^* \\ E\left[q_j\right] = q_j^f & \iff & s_j^* = \sum_{i=1}^n k_{ij} x_i^* \\ E\left[q_j\right] > q_j^f & \iff & s_j^* > \sum_{i=1}^n k_{ij} x_i^* \end{array}$$

Obsérvese que este resultado es independiente del hecho de que los factores de producción sean variables aleatorias o no.

Los resultados obtenidos hasta aquí para la empresa que opera en el mercado de futuros actualizan los hallados por Holthausen (1979), -si bien en el trabajo de este autor no aparecen costes variables en los inputs-, y confirman los desarrollados por Holthausen (1980) aun en el caso, como ya se ha dicho, en que la función de producción no presenta derivadas parciales.

Capítulo 3

Tratamiento de la empresa a lo largo del tiempo

De manera general, el estudio del comportamiento a lo largo del tiempo de una empresa debiera hacer uso de la herramienta adecuada a tal fin: la ecuación de Bellman (1952), bien en su versión determinista, bien en la estocástica. Esta última sería la apropiada para el tratamiento del modelo de empresa propuesto en este trabajo, pues este considera la posibilidad de que algunas de sus variables sean aleatorias. Sin embargo, dicha ecuación, aplicada a las condiciones que se le suponen a tal empresa, y aun en condiciones mucho más suaves y particulares, no permite, debido a su complejidad, obtener resultados útiles de carácter económico. Por ello, en este capítulo se analiza la operativa de la empresa a lo largo de varios períodos de tiempo desde un punto de vista diferente al considerado por otros autores. Así, se extienden los resultados del capítulo anterior, con las mismas suposiciones de aversión al riesgo y de producción, a aquella empresa que toma una decisión inicial de producción, y que debe pautar diversos instantes de inversión intermedia entre esa decisión inicial y el momento en que vende el bien final elaborado objeto de esa producción. El tratamiento que aquí se da permite comparar el comportamiento de la empresa en función de su grado de aversión al riesgo y llevar a cabo estudios de estática comparativa, así como estudiar su comportamiento comparado según aquella opere en mercados con incertidumbre o de completa certidumbre.

3.1. Descripción del modelo temporal

Por cuestiones de sencillez, se considerará que la empresa elabora un único producto.[1] Supóngase ahora que la empresa ha de comprar a lo largo del tiempo los productos que necesita, y que puede hacerlo en los instantes $t_0, t_1, ..., t_N$, de tal manera que en el instante t_N haya adquirido cada una de las cantidades necesarias para la fabricación de su producto. El final del proceso de producción ocurre en el instante t_{N+1} (en el cual la empresa ya no adquiere ninguna cantidad de los factores productivos), y es entonces cuando vende el objeto de su producción. En esta situación, ¿cómo suele operar la empresa?

Se supondrá que la empresa es tal que el ritmo al cual se consume cada uno de los productos comprados es directamente proporcional a la cantidad total que ha de

[1] Y en tal caso, y como ya se ha dicho anteriormente, se tiene que $n = 1$ y que k_i es el número de unidades del factor productivo $i-$ésimo que se necesitan para producir una unidad del bien elaborado.

comprarse de cada uno de ellos, y que el empresario no tiene control sobre el mismo. Se definen a continuación -y se recuerdan en algún caso- algunos parámetros y funciones de los que se hará uso en este capítulo:

- $t_0, t_1, ..., t_N$: instantes en los que la empresa puede comprar los factores productivos.

- t_{N+1}: instante de venta del producto elaborado (en este instante ya no se compra ninguna cantidad de ningún factor productivo).

- q_{ij}: precio del factor productivo $i-$ésimo en el instante t_j, para $i = 1, ..., m$, $j = 1, ...N$.

- k_i: número de unidades del factor productivo $i-$ésimo que se necesitan para producir una unidad de producto. Puesto que se denota por x la variable de decisión, $k_i x$ será la cantidad total comprada del factor productivo $i-$ésimo en todo el proceso productivo, para $i = 1, ..., m$.

- $a_i(t_j)$: proporción de $k_i x$ que se ha consumido hasta el instante t_j. Es decir, es la cantidad consumida del factor productivo $i-$ésimo desde el instante t_0 hasta el t_j, dividida entre la cantidad total comprada de ese factor productivo en todo el proceso productivo (que, como se ha dicho, es $k_i x$). Es una función definida en el intervalo $[0, t_{N+1}]$ y que va de 0 a 1 para todo $i = 1, ..., m$, $j = 1, ...N$. Obsérvese que esta función ha de verificar las siguientes condiciones:

- $a_i(t_0) = 0$, $i = 1, ..., m$: el proceso de producción comienza en el instante t_0, y, por ello, no se ha consumido nada en ese momento,
- $a_i(t_{N+1}) = 1$, $i = 1, ..., m$: en el instante final del proceso de producción (es decir, en t_{N+1}) ha de quedar totalmente consumido el factor productivo $i-$ésimo.

Como ya se ha señalado, la empresa no tiene control sobre esta función: queda definida para todo $t \in [0, t_{N+1}]$ en el momento en que comienza la producción.

- s_{ij}: proporción de $k_i x$ que se tiene de stock en el instante t_j. Es decir, es el stock del factor productivo $i-$ésimo que queda en el instante t_j, dividido entre la cantidad total comprada de ese factor en todo el proceso productivo, para todo $i = 1, ..., m$, $j = 1, ...N$.[2]

Aquí se supondrá -no sin cierto fundamento- que en cada uno de los instantes en los que puede hacerse la compra de los factores necesarios para la producción, la empresa se pregunta si el precio que debe pagar en ese momento es elevado o no, y que tiene presente

[2]Esta cantidad s_{ij} es la que queda en el instante t_j antes de comprar de nuevo la cantidad de ese factor productivo en el instante t_j.

el remanente de cada factor productivo. Por ello, la cantidad comprada de cada uno de los factores en un determinado instante dependerá del precio del factor productivo y del stock de ésta por unidad total que ha de utilizarse a lo largo de todo el proceso de producción. Se supondrá, además, que dicha cantidad es proporcional a la cantidad total de ese mismo producto que debe comprarse para todo el proceso productivo. Por ello, se puede introducir la siguiente función:

> $g_{ij} : (q_{ij}, s_{ij}) \in \mathbb{R}^2_+ \to [0, 1]$, que representa la proporción de $k_i x$ que se compra en el instante t_j, es decir, la cantidad comprada del factor productivo $i-$ésimo en el instante t_j, dividido entre la cantidad total comprada de ese factor en todo el proceso. Como se ve, el primer subíndice hace referencia al factor productivo comprado, y el segundo al instante de compra.

¿Por qué la cantidad que compra la empresa en cada instante no depende del stock total del momento de cada uno de los factores productivos sino de ese mismo stock dividido entre $k_i x$, para cada $i = 1, ...m$? La pregunta que debe hacerse el empresario en relación al stock en el momento de las compras es la siguiente: ¿cuánto dura este remanente? Esta duración depende, lógicamente, de la cantidad total que haya de utilizarse de cada producto. Pero, tal como se ha supuesto anteriormente, el ritmo de consumo de los factores productivos es directamente proporcional a las compras totales, por lo que el stock deberá repartirse entre ese total. Por tanto, la magnitud que debe tenerse en cuenta no es el stock total, sino éste repartido entre $k_i x$, para cada $i = 1, ..., m$.

Pudiera parecer que estas condiciones son especialmente particulares. No obstante, como se verá en el ejemplo que se describe a continuación, estas son, precisamente, las condiciones que verifican determinadas empresas. Considérese el caso de un empresario ganadero que se dedica a la compra de animales jóvenes para el engorde con el fin de venderlos al cabo de un tiempo. Una vez el ganadero ha decidido cuántos animales comprará al principio del proceso de producción, el resto de este queda definido: debe comprar las cantidades correctas de alimentos y distribuirlas en el tiempo según los animales las necesitan, y sobre esto no tiene control (si quiere mantener la calidad de su producto final). Además, al hacer las compras de esos alimentos se preguntará cuánto stock de cada uno de esos alimentos queda por animal (en lugar del stock total de cada alimento), y cuánto tiempo durará ese remanente.

Algunas de las propiedades de la función $g_{ij}(q_{ij}, s_{ij})$, que se supondrá continua, son las siguientes:

(a) es decreciente en la variable q_{ij}; es decir, cuanto más caro sea el factor productivo en el instante de compra menos de este adquirirá la empresa en ese momento:

$$g_{ij}\left(a, s_{ij}\right) \geqslant g_{ij}\left(b, s_{ij}\right) \text{ si } a < b,\ j = 0, 1, 2, ..., N-1,$$

para cada producto comprado i,

(b) es decreciente en la variable s_{ij}: cuanto mayor sea el stock en el instante de compra menor será la cantidad adquirida en ese instante:

$$g_{ij}\left(q_{ij}, a\right) \geqslant g_{ij}\left(q_{ij}, b\right) \text{ si } a < b,\ j = 0, 1, 2, ..., N-1,$$

para cada producto comprado i,

(c) tiene cotas superior e inferior: como mínimo, la empresa deberá comprar siempre la cantidad suficiente para no tener que parar la producción hasta el siguiente instante de compra, y, como máximo, no adquirirá más cantidad de factor productivo del necesario para poder llegar al final de todo el proceso de producción,

(d) la cantidad que ha de comprarse del factor productivo $i-$ésimo en el último instante posible de compra (es decir, en t_N) ha de ser igual a la cantidad necesaria de ese factor para llevar a cabo la producción menos el stock que queda en ese mismo instante:

$$g_{iN}(q_{iN}, s_{iN}) \cdot k_i x = k_i x - s_{iN} \cdot k_i x - a_i(t_N) \cdot k_i x,\ \ i = 1, ..., m. \tag{3.1}$$

(e) puesto que al final del proceso se ha comprado la cantidad total necesaria del factor $i-$ésimo, se verifica que

$$\sum_{j=0}^{N} g_{ij}(q_{ij}, s_{ij}) = 1. \tag{3.2}$$

Con todo esto, un esquema de las compras a lo largo de todo el proceso es el siguiente:

Cantidad comprada en cada uno de los instantes			
t_0	...	t_N	*Cantidad total comprada*
$g_{10}(q_{10}, s_{10}) \cdot k_1 x$	...	$g_{1N}(q_{1N}, s_{1N}) \cdot k_1 x$	$k_1 x$
$g_{20}(q_{20}, s_{20}) \cdot k_2 x$	...	$g_{2N}(q_{2N}, s_{2N}) \cdot k_2 x$	$k_2 x$
$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$g_{m0}(q_{m0}, s_{m0}) \cdot k_m x$	...	$g_{mN}(q_{mN}, s_{mN}) \cdot k_m x$	$k_m x$

Tabla 3.1: Cantidades compradas a lo largo del tiempo

Recuérdese que la empresa compra las unidades descritas en la tabla anterior para producir una cantidad x del producto que fabrica.

El stock que queda en el instante t_j es igual a la suma de las cantidades compradas en los instantes anteriores menos la cantidad consumida hasta ese momento:

$$s_{ij} \cdot k_i x = \left[\sum_{l=0}^{j-1} g_{il}(q_{il}, s_{il}) \cdot k_i x\right] - a_i\left(t_j\right) \cdot k_i x \geqslant 0, \; i = 1, ..., m, \; j = 1, ..., N,$$

y, por tanto:

$$s_{ij} = \left[\sum_{l=0}^{j-1} g_{il}(q_{il}, s_{il})\right] - a_i\left(t_j\right) \geqslant 0$$

De aquí se deduce que para t_1 se tiene la siguiente relación:

$$s_{i1} = g_{i0}(q_{i0}, s_{i0}) - a_i(t_1),$$

Puesto que $a_i(t_j)$ es una constante para todo $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., N$, se tiene que s_{i1} es una función de (q_{i0}, s_{i0}):

$$s_{i1} = s_{i1}(q_{i0}, s_{i0}).$$

Del mismo modo, s_{i2} es una funció de (q_{i0}, q_{i1}, s_{i0}), puesto que:

$$\begin{aligned} s_{i2} &= g_{i0}(q_{i0}, s_{i0}) + g_{i1}(q_{i1}, s_{i1}) - a_i(t_2) \\ &= g_{i0}(q_{i0}, s_{i0}) + g_{i1}(q_{i1}, s_{i1}(q_{i0}, s_{i0})) - a_i(t_2). \end{aligned}$$

Procediendo de la misma manera se concluye que s_{ij} es una función de $(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{i,j-1}, s_{i0})$:

$$s_{ij} = s_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{i,j-1}, s_{i0}).$$

Por otra parte, como g_{ij} es una función de (q_{ij}, s_{ij}), se llega a

$$g_{ij} = g_{ij}(q_{ij}, s_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{i,j-1}, s_{i0})),$$

que, como se ve, es función de $(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{i,j-1}, q_{ij}, s_{i0})$. Se denotará esta función por r_{ij}:

$$r_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{i,j-1}, q_{ij}, s_{i0}) = g_{ij}(q_{ij}, \sigma_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{i,j-1}, s_{i0})),\ \ i = 1, ..., m,\ \ j = 1, ..., N$$

Por la definición de g_{ij} se ve que r_{ij} es la cantidad comprada del factor productivo $i-$ésimo en el instante t_j, dividido entre la cantidad total comprada de ese factor en todo el proceso productivo.

Así, la relación (3.2) conduce a la igualdad siguiente:

$$\sum_{j=0}^{N} r_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{ij}, s_{i0}) = 1,$$

por lo que

$$r_{iN}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{iN}, s_{i0}) = 1 - \sum_{j=0}^{N-1} r_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{ij}, s_{i0})$$

Adviértase que r_{iN} es una función de $(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{i,N-1}, s_{i0})$, y no depende de q_{iN}, puesto que en el instante último de compra, t_N, la empresa debe adquirir al precio determinado por el mercado cuanto haga falta para llevar a cabo la producción, con independencia de que aquel sea alto o no.

Por otra parte, como resultado de las características de las funciones g_{ij}, se deduce que

$$\frac{\partial r_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{ij}, s_{i0})}{\partial q_{ij}} \leqslant 0, \; j = 0, ..., N-1$$

si se supone que las funciones $r_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{ij}, s_{i0})$ son diferenciables. Y, por otra parte, cuanto mayor sea el precio del factor productivo i-ésimo en un instante de compra cualquiera anterior al momento presente, mayor será la cantidad de ese producto que se comprará en el momento, puesto que anteriormente se habrá adquirido menos debido a su alto precio. Matemáticamente este propiedad se expresa como

$$\frac{\partial r_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{ij}, s_{i0})}{\partial q_{i\beta}} \geqslant 0, \text{ si } \beta < j; \; j = 0, ..., N-1$$

si se admite la diferenciabilidad de las funciones $r_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{ij}, s_{i0})$.

Tal como ya se ha dicho, la cantidad del factor productivo $i-$ésimo adquirido por la empresa en el instante t_j es una función, que aquí se denota por $r_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{ij}, s_{i0})k_i x$, que depende de los precios de compra desde t_0 a t_j, y que es directamente proporcional a la cantidad total de la misma que se consumirá en el proceso de producción.

Bajo estas condiciones, la ganancia de la empresa después de vender el objeto de su producción será:

$$\begin{aligned}\pi(x) &= pcx - \sum_{j=0}^{N} q_{1j} r_{1j}(q_{10}, q_{11}, ..., q_{1j}, s_{10}) \cdot k_1 x \\ &- ... \\ &- \sum_{j=0}^{N} q_{mj} r_{mj}(q_{m0}, q_{m1}, ..., q_{mj}, s_{m0}) \cdot k_m x - C(x) - B \\ &= \left(pc - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{N} q_{ij} r_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{ij}, s_{i0}) k_i\right) \cdot x - C(x) - B,\end{aligned}$$

donde:

- p es el precio de venta (aleatorio) del bien elaborado,
- c es una variable aleatoria de media 1 que modela la incertidumbre en la producción,
- x es la variable de decisión del problema, y corresponde al nivel deseado de producción,
- q_{ij} es el precio (aleatorio) unitario de compra del factor $i-$ésimo en el instante de compra t_j, para $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., N$,

- $k_i \geqslant 0$, $i \in \{1, ..., m\}$ es el número de unidades del factor productivo $i-$ésimo que se necesitan para producir una unidad del bien elaborado por la empresa,
- r_{ij} es la proporción comprada del factor productivo $i-$ésimo en el instante t_j,
- s_{i0} es el stock inicial del factor productivo $i-$ésimo,
- $C(x)$ es una función que representa los costes no aleatorios derivados de la producción de x unidades,
- B son los gastos fijos del proceso de producción.

A continuación, se aplican los resultados obtenidos en el capítulo anterior al caso de la empresa que nos ocupa.

3.2. Condiciones necesarias de óptimo

Como siempre, se supone que la empresa tiene como objetivo la maximización del valor esperado de la utilidad de sus ganancias, es decir,

$$\max_x E\left[u\left(\pi\left(x\right)\right)\right] =$$
$$\max_x \int_{\mathbb{R}^{2+m\cdot(N+1)}} u\left(\pi\left(x\right)\right) dF\left(p, c, q_{10}, q_{11}, ..., q_{1N}, ..., q_{m0}, q_{m1}, ..., q_{mN}, s_{10}, ..., , s_{m0}\right)$$

Conviene recalcar aquí que esta optimización se lleva a cabo respecto de todo el proceso de producción, es decir, desde t_0 -momento inicial de compra- hasta t_{N+1} -momento de venta-.

De ahora en adelante se utiliza la siguiente notación, con el fin de abreviar:

$$\mathbf{q}_{ij} := (q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{ij}), \; i = 1, ..., m; \; j = 0, ..., N,$$

donde, como ya se ha apuntado, el primer subíndice se refiere al producto comprado y el segundo al instante de compra.

Con esta notación, la ganancia de la empresa se escribe como

$$\pi(x) = \left(pc - \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{N} q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0}) k_i\right) \cdot x - C(x) - B$$

Si se supone que el valor de x que optimiza esta expresión, que se denotará por x^*, es un punto interior (es decir, $x^* > 0$), entonces la condición de primer orden de óptimo es la siguiente:

$$E\left[u'(\pi(x^*))\left(pc - \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{N} q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0}) k_i - C'(x^*)\right)\right] = 0$$

Se supondrá que se verifica la condición suficiente de segundo orden para un máximo:

$$E\left[u''(\pi(x^*))\left(pc - \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{N} q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0}) k_i - C'(x^*)\right)^2 - u'(\pi(x^*))\, C''(x^*)\right] < 0$$

Proposición 3.2.1. *El valor esperado del precio unitario de venta ponderado por el factor de aprovechamiento ha de ser mayor o igual que la suma de su coste marginal en x^* y los valores esperados ponderados de los precios unitarios de los productos que compra a lo largo del tiempo, es decir,*

$$C'(x^*) + \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{N} \overline{q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0})} k_i \leqslant \overline{pc}$$

Demostración. Es una consecuencia directa del corolario 2.2.1, sin más que sustituir $\overline{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{k}$ por $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{N}\overline{q_{ij}r_{ij}(\mathbf{q}_{ij},s_{i0})}k_i$. □

Corolario 3.2.1. *Si el precio de venta del producto que fabrica la empresa es independiente de c, entonces se satisface la siguiente relación:*

$$\overline{p} \geqslant C'\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{N}\overline{q_{ij}r_{ij}(\mathbf{q}_{ij},s_{i0})}k_i$$

Demostración. Se deduce inmediatamente de la proposición anterior, de la independencia entre las variables aleatorias p y c y del hecho de que $\overline{c} = 1$. □

3.3. Incertidumbre *vs* certidumbre

Proposición 3.3.1. *Si una empresa produce un único bien con coste marginal determinista creciente, y el precio de venta y la producción son independientes, entonces la producción esperada en condiciones de incertidumbre es inferior a la que se obtiene en un entorno de completa certidumbre.*

Demostración. Es una extensión de la Proposición (2.3.1) y de su corolario. □

3.4. Comportamiento según el grado de aversión

Proposición 3.4.1. *Sean dos empresas, cuyas funciones de utilidad se denotan por u_1 y u_2 respectivamente, tales que la primera manifiesta menos aversión al riesgo que la* *segunda, es decir,* $r_1(t) = -u_1''(t)/u_1'(t) < -u_2''(t)/u_2'(t) = r_2(t)$*, para* $t \in \mathbb{R}$*, y para las que* $C''(x) \geqslant 0$*. Entonces se cumple que* $x_1^* > x_2^*$*.*

Demostración. La demostración es idéntica a la de la Proposición 2.4.1 si se sustituye $\sum_{i=1}^{m} k_i q_i$ por $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{N} q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0}) k_i$. □

3.5. Análisis de estática comparativa

Proposición 3.5.1. *Si la empresa presenta aversión absoluta decreciente al riesgo, entonces se cumple que* $dx^*/dB < 0$*.*

Demostración. La demostración es idéntica a la de la Proposición 2.5.1 si se sustituye $\sum_{i=1}^{m} k_i q_i$ por $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{N} q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0}) k_i$. □

Proposición 3.5.2. *Sea una empresa que presenta aversión absoluta decreciente al riesgo. Supóngase que la producción no es aleatoria, es decir,* $c = cte$*. Si el precio de venta del producto que comercializa la empresa es de la forma* $p + \theta$*, donde* θ *es una constante aditiva, y la empresa maximiza su producción en el punto denotado por* x_θ^**, entonces se cumple que*

$$\frac{dx_\theta^*(\theta = 0)}{d\theta} > 0$$

Demostración. La demostración es idéntica a la de la Proposición 2.5.3 si se sustituye $\sum_{i=1}^{m} k_i q_i$ por $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{N} q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0}) k_i$. □

Capítulo 4

Aplicación a la industria ganadera

4.1. Introducción

En este capítulo se aplican algunos de los resultados obtenidos en los capítulos precedentes a un determinado tipo de industria ganadera de producción de carne de vacuno. A continuación, se describe a grandes rasgos este sector productivo.

El sector productor de carne de vacuno en España está compuesto, en términos generales, por dos subsectores con características propias y diferentes, aunque complementarias (véase EUROCARNE DIGITAL, “Libro blanco de la carne de vacuno”, www.eurocarne.com, “Sistema de explotación de carne”, www.magrama.gob.es, Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente, y ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE PRODUCTORES DE GANADO DE CARNE (ASOPROVAC) (2007), “Guías de prácticas correctas de higiene: vacuno de cebo”, Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación: Dirección General de Ganadería, 2a edición):

- el sector productor de terneros, constituido por las explotaciones que tienen las vacas madres y en las que nacen los animales que serán engordados,

- el sector cebador de terneros, constituido por las explotaciones que engordan esos terneros para obtener la carne que se consume.

Existen, no obstante, explotaciones de vacas madres que engordan hasta el final sus propios terneros.

4.1.1. Subsector de las vacas madres

Este sector es el que suministra la materia prima para la producción de carne: el ternero.

A su vez, este subsector agrupa a dos tipos diferentes de vacas:

- vacas de producción de leche. Debido a que la actividad principal es la producción láctea, el ternero es inmediatamente separado de la madre y vendido con menos de tres semanas a explotaciones de cebo,

- vacas nodrizas, es decir, aquellas vacas que pertenecen a una raza cárnica o que proceden de un cruce con alguna de esas razas y que forman parte de un rebaño destinado a la cría de terneros para la producción de carne. El ternero que se produce está siempre destinado a la producción de carne, y su calidad y rendimiento varía mucho según la raza utilizada. En este sistema de producción, el ternero permanece junto a la madre hasta los 5 o 6 meses de edad, momento en el que se vende para su cebo en explotaciones especializadas.

4.1.2. Subsector de cebo de terneros

Las condiciones climáticas de nuestro país son determinantes para que, excepto en la cornisa cantábrica, la producción de pastos y forrajes sea muy escasa. Esta escasez de recursos pastables ha determinado la imposibilidad de cebar a los animales de manera natural. Por ello, en España tuvo que buscarse otro tipo de alimentos, y, ante esta necesidad, los productores recurrieron a la alimentación basada en cereales.

Durante la década de los años 60 del siglo pasado, el gran desarrollo económico y demográfico hizo necesario aumentar rápidamente la producción de carne. Ante la imposibilidad de cebar los animales con recursos naturales, se fomentó la aparición de cebaderos especializados que compraban los terneros y los cebaban de una manera más eficaz utilizando como materia prima el cereal.

Estos cebaderos se situaron fundamentalmente en lugares cercanos a las zonas de consumo y a regiones con una elevada producción de cereal (Aragón, Cataluña, Toledo, Castilla-León).

En general, estos cebaderos se surten de dos tipos de animales:

- terneros de aproximadamente 21 días de edad procedentes de explotaciones de vacas de leche,

- terneros de explotaciones de vacas nodrizas (llamados pasteros), de entre 5 - 6 meses y 200 Kg de peso vivo.

En este capítulo se hace un estudio económico de una de estas explotaciones ganaderas, que se describe a continuación.

4.2. Descripción del modelo

En esta sección se aplican los resultados obtenidos anteriormente a un tipo de empresa ganadera de producción cárnica muy común, que se describe a continuación.

El empresario ganadero compra terneros (de ambos sexos) de un mismo tipo, de entre ocho y quince días de vida aproximadamente (este plazo a veces tiene un margen superior). El peso aproximado de cada uno de estos terneros es de unos 40 kg para las hembras y de unos 50 kg para los machos en el momento de la compra. Una vez en su propia ganadería, el empresario los alimenta hasta una edad de entre 12 y 14 meses, puesto que a partir de entonces el ternero se alimenta a un ritmo que no produce un beneficio satisfactorio en relación a su aumento de peso (véase "Libro blanco de la carne de vacuno", www.eurocarne.com y Espadas, M., "Recría y cebo de terneros/as para la producción cárnica", www.remugants.cat). Su peso aproximado es ahora de unos 400 kg. En este momento vende el animal a un matadero, y este le paga su peso *en canal* por kilogramos. La canal se define como el cuerpo entero del animal sacrificado tal como se presenta después de las operaciones de sangrado, eviscerado y desollado, procedente de bovinos sacrificados conforme a lo establecido en el Anexo III del Reglamento (CE) 853/2004 del Parlamento Europeo y del Consejo de 29 de abril por el que se establecen normas específicas de higiene de los alimentos de origen animal. Esta canal será presentada a clasificación:

1^o Sin cabeza ni patas; la cabeza separada de la canal por la articulación atloide-occipital; las patas cortadas por las articulaciones carpometacarpianas y tarsometatarsianas.

2^o Sin los órganos contenidos en las cavidades torácica y abdominal con o sin los riñones, la grasa de riñonada, así como la grasa pélvica.

3^o Sin los órganos sexuales externos ni músculos unidos, sin la ubre ni la grasa mamaria.

La clasificación de canales se realiza en el interior del matadero a más tardar en el plazo de una hora desde el inicio de las operaciones de sacrificio. Se define el rendimiento a la canal como el porcentaje en peso de la canal respecto al peso vivo del animal antes del sacrificio. En él interviene factores genéticos, como las razas y cruces, y de manejo como los sistemas de cebo. Como norma general, puede decirse que el rendimiento cárnico de un bovino vivo está comprendido entre un 50 % y un 55 % (véase “La clasificación de canales de vacuno pesado. Base legislativa y manual gráfico", NIPO: 770-08-143-4, Depósito Legal: M. 58.543-2008, Ministerio de Medio Ambiente, y Medio Rural y Marino).

Por otra parte, el precio de la canal depende, entre otros factores, de la conformación física de esta y del tipo la categoría del animal, que, según BOE núm. 27, 31 de enero de 2009, Sec. I. Pág. 10438, se clasifican del siguiente modo:

Denominación de venta	Sexo. Edad
Ternera blanca o Carne de ternera blanca	Macho o hembra. Menor o igual a 8 meses
Ternera o Carne de ternera	Macho o hembra. Mayor de 8 meses hasta 12 meses
Añojo o Carne de añojo	Macho o hembra. Mayor de 12 meses hasta 24 meses
Novillo o novilla, o Carne de novillo o Carne de novilla	Macho o hembra. Mayor de 24 meses hasta 48 meses
Cebón o Carne de cebón	Macho castrado. Menor o igual a 48 meses
Buey o Carne de buey	Macho castrado. Mayor de 48 meses
Vaca o Carne de vaca	Hembra. Mayor de 48 meses
Toro o Carne de toro	Macho. Mayor de 48 meses

Tabla 4.1: Denominación de venta aplicable a la carne de vacuno en relación con la categoría del animal establecida en función de su sexo y edad

Los factores que intervienen desde el punto de vista económico en este tipo de ganaderías son los siguientes:

- terneros, que el ganadero compra para su engorde,
- transporte de los animales,
- productos de alimentación del ganado: agua, leche en polvo, soja, vitaminas, maíz,

cebada, grasa hidrogenada, manteca de cerdo, salvado de avena, bicarbonato, carbonato cálcico, fosfato bicálcico, sal, paja de avena, etc.,

- productos sanitarios (vacunas y medicinas),
- impuestos,
- suministros de agua y electricidad,
- subvenciones (ya sean comunitarias, locales o autonómicas).

Los precios de los terneros, del transporte de animales y de los productos de alimentación son variables aleatorias, y no se conocen hasta el momento en que se realiza la operación de compra. El precio que el ganadero obtiene por la venta de la canal de los terneros es también una variable aleatoria.

En cuanto a los costes deterministas -es decir, no aleatorios- que dependen del número de animales que intervienen en la producción, pueden citarse las vacunas y los productos sanitarios, y los derivados de los suministros de agua y electricidad.

4.3. Planteamiento matemático del modelo

Para plantear el objetivo de la empresa en términos matemáticos se adopta la siguiente notación:

- p : precio por kilogramo de venta de la carne en canal,

- q_1 : precio por kilogramo de compra de los terneros; es una variable aleatoria debido a las fluctuaciones de precios del mercado y a la variabilidad del peso de los animales, pues estos se compran por cabezas, y no por peso,

- q_i, $i \geqslant 2$: precio por kilogramo de cada uno de los productos que compra el ganadero para la alimentación,

- a : *factor de aprovechamiento* del ganado. Se introduce en este trabajo y se define como la relación entre el número de kilogramos de carne en canal que se le pagarán al ganadero por la venta de los terneros y el peso inicial de estos (en el momento en que los compró). Así, si el ganadero compra un determinado número de terneros que suman un total de x kilogramos, finalmente se le pagará en el matadero por una cantidad total de ax kilogramos de carne en canal.

  Una estimación de este factor puede derivarse del siguiente razonamiento, aplicado a la variedad de terneros *pintos*: el ganadero compra n terneros de un peso aproximado de 45 kg cada uno, y, de estos, muere por término medio un 6 % [1]casi al comienzo de la producción (las muertes en edad más avanzada son esporádicas). Así, después de aproximadamente un año, momento en el que se produce la venta, el número de terneros es de 0,94n, cuyo peso total en el instante de su compra era de 0,94n·45 kg. El peso de uno de esos terneros en el momento de la venta -unos 12

[1]Datos aportados por la ganadería *Bovinos Paco el Conde, S.L.*

meses después- es, aproximadamente, de 400 kg, por lo que todos ellos representan 0,94n·400 kg. Si se considera que, en promedio, de cada ternero que se vende en el matadero se obtiene un peso en canal del 52 % de su peso en vivo, el número total de kilogramos por los que el ganadero obtiene un beneficio es de 0,52·0,94n·400. Tal como se ha definido el factor de aprovechamiento, el valor esperado de dicho factor podría ser:

$$\overline{a} = \frac{0{,}52 \cdot 0{,}94n \cdot 400}{n \cdot 45} \simeq 4{,}34 \tag{4.1}$$

Como se ve, este factor puede considerarse siempre mayor que 1. Se supone, además, que es independiente de todos los precios (esta es una premisa bastante lógica).

- $C(x)$: tal como se ha denotado en este trabajo, $C(x)$ son los costes no aleatorios que dependen del número de unidades del input; en este capítulo, tales unidades corresponden al peso en kilogramos de los terneros adquiridos inicialmente por el ganadero.

- B : aquellos gastos constantes y que no dependen de ningún otro factor.

Como ya se ha comentado, el tiempo que los terneros permanencen en la ganadería está en torno a un año. Durante ese tiempo el ganadero debe ir comprando los alimentos necesarios, y, por lo general, no tiene capacidad suficiente para almacenar en su ganadería las cantidades necesarias de aquellos que no son perecederos, por lo que ha de ir comprándolos a lo largo del tiempo. Lo mismo ocurre, por supuesto, con los productos percederos. Por ello, para el estudio de esta empresa es necesario adoptar un tratamiento que tenga en cuenta el factor temporal.

¿Cómo se formaliza desde el punto de vista matemático el objetivo de esta empresa? Para ello, se introducen en primer lugar cómo las funciones $r_{ij}(q_{i0}, q_{i1}, ..., q_{ij}, s_{i0})$ definidas en el estudio de la empresa en función del tiempo. Recuérdese que esta función representa la cantidad del producto $i-$ésimo que la empresa compra en el instante t_j, y que esta cantidad depende, una vez definido el objetivo de la empresa, de los precios desde el instante t_0 hasta el t_j. Así pues, en el caso de una ganadería, se tiene una función r_{ij} para cada uno de los productos de alimentación mencionados anteriomente y otras para las medicinas y vacunas, todo ello definido en los instantes $t_0, t_1, ..., t_N$.

En lo que sigue se supondrá que el ganadero busca la optimización del valor esperado de la utilidad de las ganancias obtenidas en la venta de cada remesa de terneros comprada tiempo atrás (en torno a un año). Por lo general, este punto de vista no se aleja del objetivo real del ganadero, puesto que éste tiene muy en cuenta qué beneficio obtiene en cada remesa particular.

El ganadero compra un determinado número de cabezas de ganado, que suman un total de x kilogramos y, debido a la alimentación del ganado, vende finalmente

ax kilogramos en canal. De aquí en adelante, se toma como q_1 el precio unitario (por kilogramo) que paga el ganadero en la compra del ganado. En tal caso, si se hace $k_1 = 1$, sus ganancias serán:

$$\begin{aligned} \pi(x) &= pax - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{N} q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0}) k_i x - C(x) - B \\ &= \left(pa - \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{N} q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0}) k_i \right) x - C(x) - B, \end{aligned}$$

donde se supone que las compras de ganado y alimentos se hacen en los instantes $t_0, t_1, ..., t_N$, y m es el número total de productos que compra el ganadero a lo largo del periodo de engorde de los animales, incluyendo las cabezas de ganado, que se compran en t_0, y que, como se ha dicho, quedan denotadas por el subíndice 1. Por ello,

$$\begin{aligned} r_{10}(q_{10}, s_{10}) &= x, \\ r_{1j}(\mathbf{q}_{1j}, s_{10}) &= 0, \ j = 1, ..., N, \end{aligned}$$

puesto que en cada remesa sólo se adquieren las cabezas de ganado en el instante inicial. Además, debido al hecho de que todos los terneros comprados en el instante inicial son vendidos al final del proceso, el stock de terneros para el siguiente periodo de producción es nulo, por lo que se tiene que

$$s_{10} = 0.$$

Por otra parte, obsérvese que, además de desconocerse el precio final de venta de la carne hasta el momento en que esta se lleva a término, la cantidad total vendida es también un factor aleatorio que no queda determinado hasta que el ganadero decide vender el objeto de su producción. Con todo ello, la operativa de esta empresa y la función de las ganancias tienen, exactamente, la forma estudiada en el capítulo anterior. Así, los resultados allí obtenidos pueden trasladarse sin más a nuestra empresa ganadera. Nótese, además, que el hecho de que $\overline{a} \neq 1$ no altera las conclusiones que puedan extraerse de aquellos resultados.

Por otro lado, una vez expresado en términos matemáticos el valor de la ganancia del proceso productivo, nótese que no existen costes deterministas dependientes de la cantidad de input comprada inicialmente por el ganadero, o, si se quiere,

$$C(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

En efecto, tal como se ha comentado más arriba, en este proceso productivo el ganadero compra los terneros por cabezas, pero el beneficio obtenido por este depende del número de kilogramos que resulten en canal en el matadero. Así, puesto que el beneficio debe formularse en las mismas unidades -aquí se ha tomado el kilogramo como unidad, y no el número de animales-, los costes de las medicinas y de las vacunas, por ejemplo, que se administran por cabezas y no según el peso del animal, y que no son aleatorios, pueden -y deben- tratarse como tales, puesto que el peso del animal sí es una variable aleatoria. Así, si se considera que el peso de los animales en el momento en que se administra esa vacuna -que se supondrá que tiene un precio conocido v- es una variable aleatoria de media μ, el precio pagado por kilogramo del animal por el ganadero es una variable aleatoria de media v/μ.

El objetivo de la empresa ganadera será comprar aquella cantidad inicial de ganado que maximice el valor esperado de la utilidad de sus ganancias:

$$\max_x E\left[u\left(\pi\left(x\right)\right)\right]$$

Se supondrá que el problema tiene una solución interior x^* (es decir, $x^* > 0$), por lo que puede plantearse la siguiente condición de primer orden para el óptimo:

$$E\left[u'\left(\pi\left(x^*\right)\right)\left(pa - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^N q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0}) k_i\right)\right] = 0$$

Obsérvese, por otra parte, que se verifica la condición suficiente de segundo orden para dicho máximo:

$$E\left[u''\left(\pi\left(x^*\right)\right)\left(pa - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^N q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0}) k_i\right)^2\right] < 0$$

4.4. Condiciones necesarias de óptimo

Si se aplica la Proposición 3.2.1, se obtienen las condiciones que deben satisfacer los precios que intervienen en el proceso productivo de la ganadería:

Proposición 4.4.1. *Para una empresa ganadera ha de cumplirse que el valor esperado del precio unitario de venta de la carne ponderado por el factor de aprovechamiento ha* *de ser mayor o igual que la suma de los valores esperados ponderados de los precios unitarios de los productos que compra, es decir,*

$$ {}^{m}_{i=1} \sum_{j=0}^{N} \overline{q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0})} k_i \leqslant \overline{pa} \tag{4.3} $$

Dicho de otro modo, el beneficio promedio obtenido en la venta no puede ser menor que el promedio de los costes aleatorios.

De este último resultado se obtiene la siguiente conclusión:

Corolario 4.4.1. *El valor esperado del factor de aprovechamiento del ganado ha de satisfacer la siguiente relación:*

$$ \overline{a} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{N} \overline{q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0})} k_i}{\overline{p}} $$

Aquí se ha supuesto que el factor de aprovechamiento del ganado es independiente del precio de venta de la carne en canal. Obsérvese que dicho factor depende del crecimiento de cada uno de los animales, por lo que es lógico suponer que no depende del precio de venta de la carne.

En particular, si se acepta como una buena aproximación del valor de $\overline{a}$ el hallado en (4.1), esta última condición se escribe como

$$ 4{,}34 \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{N} \overline{q_{ij} r_{ij}(\mathbf{q}_{ij}, s_{i0})} k_i}{\overline{p}} $$

Es decir, el promedio del coste de engordar un kilogramo de ternero desde el momento de la compra no puede ser superior al promedio de la cantidad de dinero obtenida por el ganadero en la venta de 4,34 kilogramos -es decir, una cantidad de kilogramos equivalente al valor numérico del factor de aprovechamiento- de carne en canal.

4.5. Comportamiento según el grado de aversión

La aplicación de la Proposición 3.4.1 conduce al siguiente resultado:

Proposición 4.5.1. *Sean dos empresas ganaderas, cuyas funciones de utilidad se denotan por u_1 y u_2 respectivamente, tales que la primera manifiesta menos aversión al riesgo que la segunda, es decir, $r_1(t) = -u_1''(t)/u_1'(t) < -u_2''(t)/u_2'(t) = r_2(t)$, para $t \in \mathbb{R}$. Entonces se cumple que $x_1^* > x_2^*$.*

Así pues, con los supuestos de esta proposición, la ganadería más arriesgada comprará un peso inicial menor para el total de terneros adquiridos.

4.6. Comportamiento respecto de gastos fijos

Proposición 4.6.1. *Si la empresa ganadera presenta una aversión absoluta decreciente al riesgo, entonces se cumple que*

$$\frac{dx^*}{dB} < 0$$

Se ha demostrado, pues, que un incremento en los gastos fijos conlleva una disminución del número de terneros que el ganadero debe comprar (en realidad, del peso total de esos terneros).

4.7. Comportamiento según el precio de venta

Si se asume que el comportamiento de una empresa con factor de aprovechamiento poco variable no cambia respecto del que esta observaría si dicho factor fuera constante, puede concluirse que se verifica el siguiente resultado:

Proposición 4.7.1. *Sea una empresa ganadera que presenta aversión absoluta decreciente al riesgo. Supóngase que el factor de aprovechamiento tiene un rango de variación suficientemente pequeño, es decir:*

$$a \in [a_0, a_0 + \delta],$$

con a_0 y δ positivos y δ suficientemente pequeño. Entonces, si el precio de venta de la carne es de la forma $p + \theta$, donde θ es una constante aditiva, y la empresa maximiza su producción en el punto denotado por x_θ^*, se cumple que

$$\frac{dx_\theta^*(\theta = 0)}{d\theta} > 0$$

Por tanto, un aumento en el precio de venta de la carne supone un aumento de la cantidad de terneros (en realidad, de su peso total) que inicialmente comprará el ganadero.

Conclusiones

En este trabajo se ha ampliado el conjunto de resultados referentes a la teoría de la empresa que presenta aversión al riesgo en condiciones de incertidumbre. Por un lado, se ha generalizado el modelo de empresa incluyendo tantas variables aleatorias como se precisen -diferentes precios de compra y de venta, y producción final no determinista-, y, por otro, se ha ampliado el número -en ciertos casos- de variables de decisión.

En primer lugar se han establecido las condiciones necesarias que debe cumplir una empresa que se enfrenta a tres fuentes básicas de incertidumbre -el precio de venta, el de compra y la producción- para que aquella pueda alcanzar el óptimo que busca. De modo general, puede asegurarse que dicho óptimo sólo puede ser alcanzado si el promedio del precio de venta del producto elaborado por la empresa es superior a la suma de los costes marginales de ese producto y el promedio de sus costes aleatorios. Por otra parte, en determinadas condiciones, los costes marginales deterministas de fabricación de un producto son inferiores en presencia de incertidumbre de precios y producción que en su ausencia. De aquí se deriva que si la empresa elabora un único bien, su producción es inferior en un entorno de incertidumbre.

En relación al comportamiento de la empresa según su grado de aversión al riesgo (en el sentido de Arrow-Pratt), puede afirmarse que su producción es mayor cuanto menor es su riesgo.

Se ha analizado también el comportamiento de la empresa frente a la variación de los parámetros del modelo. En particular, se ha probado que si una empresa que fabrica un único producto presenta aversión absoluta decreciente al riesgo, entonces un incremento en los gastos fijos conlleva una disminución de la cantidad producida. Si el aumento en alguno de los precios de compra, entonces se disminuye la producción, y ocurre lo contrario si se aumenta el precio de venta.

Curiosamente, las conclusiones hasta aquí citadas son las mismas, desde un punto de vista cualitativo, que las que se obtienen sin precios de compra ni producción aleatorios. Más aún, coinciden con las obtenidas en el tratamiento temporal de la empresa, y también en su aplicación a la empresa ganadera estudiada en este trabajo. Así, podría decirse que, en las mismas condiciones, la presencia de incertidumbre en los precios de compra y en la producción no alteran, desde un punto de vista cualitativo, el comportamiento de la empresa aversa al riesgo.

Entre los resultados que se han obtenido cabe destacar la variación del óptimo frente a un cambio simultáneo de todos los precios implicados en el proceso productivo: si la variación de todos los precios se mantiene contenida en un cierto margen, la variación en el óptimo de producción es directamente proporcional a la variación ponderada de esos precios. Esto supone una novedad respecto de la literatura existente acerca de la teoría de la empresa en condiciones de incertidumbre.

También se ha estudiado la operativa de la empresa en el mercado de futuros, y se han ampliado los resultados de Holthausen a una empresa que opera en un mercado de futuros y que fabrica n bienes a partir de m de productos, y que, a diferencia de este autor, su producción viene determinada por una función que no admite derivadas parciales. De nuevo, se llega a las mismas conclusiones que este autor, si bien las funciones de producción en uno y otro caso no pueden siquiera parecerse: una es derivable y la otra carece de derivadas parciales.

En el capítulo 3 se ha introducido el factor temporal en el estudio de dicha empresa. Los tratamientos dinámicos llevados a cabo hasta la fecha no permitían obtener resultados significativos debido a la complejidad de los problemas de índole matemática que debían resolverse. En el modelo aquí presentado, el análisis llevado a cabo ha permitido la realización de estudios de estática comparativa, además de establecer las condiciones necesarias para alcanzar la producción óptima a lo largo del tiempo, y que ya se ha comentado en estas conclusiones.

Finalmente, el modelo dinámico de empresa propuesto se adapta a determinados modelos reales de empresa ganadera. Los resultados presentados en el último capítulo son una traslación a la empresa ganadera de los obtenidos en el capítulo precedente.

Para llevar a término parte del análisis realizado en este trabajo se ha tenido que desarrollar una herramienta a tal efecto: se ha generalizado un lema de Lippman-McCall para el supuesto en que el número de variables aleatorias es múltiple. Este lema, que se presenta en el Apéndice A, ha permitido dejar de lado los métodos gráficos de los que hacen uso algunos autores, y establecer conclusiones de manera analítica aun para modelos de empresa más generales.

En el Apéndice B se aplica también la generalización de ese lema al estudio de propiedades y efectos de estática comparativa en modelos de decisión con incertidumbre en relación con sus aplicaciones a la teoría de la empresa.

Apéndices

Apéndice A

Reformulación del lema de Lippman y McCall (1981)

Para la obtención de una parte considerable de los resultados de este trabajo ha tenido que desarrollarse una generalización *ad hoc* de un lema de Lippman y McCall (1981) acerca de valores esperados de una única variable aleatoria. La extensión de este resultado que aquí se ha desarrollado considera un número cualquiera de variables aleatorias, debido a la necesidad de estudiar el comportamiento de la empresa en condiciones de incertidumbre más generales, tales como las derivadas de precios de compra y venta y de producción aleatorios. El lema original de estos autores es el siguiente:

Lema A.0.1. ***(Lippman-McCall)*** *Si h es una función real estrictamente positiva y estrictamente decreciente sobre $\mathbb{R}$ y Z una variable aleatoria, entonces se verifica que*

$$E\left[Z \cdot h\left(Z\right)\right] < h(0) \cdot E\left[Z\right]$$

A continuación, se presenta una reformulación de este lema -inicialmente planteado para una única variable aleatoria- que permite su aplicación al caso de varias variables aleatorias, y se ilustra su utilización en la teoría de la empresa bajo incertidumbre. Esto se lleva a cabo en un modelo reciente de la teoría, para el cual se muestras cómo el lema permite comparar, de forma más directa que la utilizada por sus autores, los respectivos niveles óptimos que elige la empresa con y sin incertidumbre. También se hace uso del lema, en este mismo modelo, para estudiar el efecto de una variación en la aversión al riesgo, el cual no había sido estudiado anteriormente.

A.1. Introducción

En la teoría de la empresa bajo incertidumbre, se estudian distintos aspectos sobre la decisión óptima que debe tomar una empresa que opera bajo incertidumbre en una o varias de las variables que intervienen en su función beneficio. Una de las primeras cuestiones que se plantean es la relación que presenta esta decisión óptima en comparación con la que se tomaría en el caso de certidumbre total. Esto es lo primero que analiza Sandmo (1971) en su modelo seminal. Para este modelo básico, en el que se considera una única fuente de incertidumbre (en el precio al que será vendido el producto), se puede demostrar que la introducción de incertidumbre induce una reducción en el nivel de producción óptimo con respecto a la situación sin incertidumbre. Este resultado es obtenido por Sandmo mediante una técnica de McCall (1967), pero puede demostrarse también mediante la aplicación de un lema recogido en Lippman y McCall (1981), el cual se incluye en el apéndice de este trabajo, y que es válido para el caso de una única variable aleatoria.

Sin embargo, a pesar de la antigüedad del citado lema, no se ha encontrado ningún autor que lo aplique en modelos de empresa bajo incertidumbre. Más aún, incluso en Lippman y McCall (1981), se demuestra el resultado de Sandmo comentado anteriormente con otro método diferente.[1]

En su lugar, el método más frecuentemente utilizado es el estudio del signo de ciertas covarianzas. Por ejemplo, en el caso del modelo de Sandmo, en el cual la función beneficio viene dada por $\pi(x) = Px - C(x)$, donde P es la variable aleatoria precio, dicho lema permite obtener la desigualdad:

$$E\big[u'(\pi)P\big] < E\big[u'(\pi)\big]E[P],$$

para el caso de una empresa con aversión al riesgo (más aún, tal que $u'' < 0$). Sin embargo, puesto que $E\big[u'(\pi)P\big] = E\big[u'(\pi)\big]E[P] + \mathsf{cov}\big(u'(\pi), P\big)$, tal desigualdad es obtenida habitualmente en la literatura mediante el estudio del signo de $\mathsf{cov}\big(u'(\pi), P\big)$. Este análisis es sencillo cuando se trabaja en modelos con una sola variable aleatoria que sea fuente de incertidumbre, pero cuando el número es superior puede resultar difícil obtener conclusiones de un modo analítico. Un ejemplo de este hecho se encuentra en

[1]Una excepción son Álvarez-López y Rodríguez-Puerta (2009, 2011), donde se aplica ese lema en modelos con una sola fuente de incertidumbre.

Dalal y Alghalith (2009), donde se desarrolla un método gráfico para llevar a cabo un estudio de esta índole.

En este trabajo se obtiene el resultado básico de Dalal y Alghalith (2009) de una forma analítica y más directa, mediante una adecuada reformulación del lema original de Lippman y McCall (1981) que permite su aplicación al caso de varias variables. Asimismo, con la ayuda de esta reformulación del lema, se enuncia y demuestra, para el modelo citado, un resultado nuevo sobre el efecto de una variación en la aversión al riesgo.[2]

En la Sección A.2 se enuncia y demuestra el lema, y en la Sección A.3 se recogen sus aplicaciones al modelo de Dalal y Alghalith (2009). La última sección está dedicada a las conclusiones.

A.2. Reformulación del lema de Lippman y McCall

A continuación se enuncia y demuestra el lema que va a utilizarse:

Lema A.2.1. *Sea g y h dos funciones reales definidas sobre $\mathbb{R}$, con g estrictamente creciente y h estrictamente positiva, y sea f una función real medible definida sobre $\mathbb{R}^p$. Si Z es una variable aleatoria p-dimensional tal que las esperanzas de $f(Z)\,h\big(f(Z)\big)$ y $f(Z)\,g\big(f(Z)\big)\,h\big(f(Z)\big)$ son finitas, y tal que el conjunto $\{f(Z) \neq 0\}$ tiene probabilidad*

[2]Un efecto de este tipo no se ha estudiado para el modelo de Dalal y Alghalith (2009).

positiva, entonces:

$$E\big[f(Z)\,g\big(f(Z)\big)\,h\big(f(Z)\big)\big] > g(0)E\big[f(Z)\,h\big(f(Z)\big)\big],$$

y se tiene la desigualdad en el sentido contrario si g es estrictamente decreciente.

Demostración. Denótese por A^+, A^- y A^0 el conjunto de los vectores z de $\mathbb{R}^p$ tales que $f(z) > 0$, $f(z) < 0$ y $f(z) = 0$, respectivamente, y por F la función de distribución de la variable aleatoria Z. Entonces:

$$\begin{aligned}
E\big[f(Z)\,g\big(f(Z)\big)\,h\big(f(Z)\big)\big] &= \int_{A^+} f(z)\,g\big(f(z)\big)\,h\big(f(z)\big)\,dF(z) \\
&\quad + \int_{A^-} f(z)\,g\big(f(z)\big)\,h\big(f(z)\big)\,dF(z) \\
&\quad + \int_{A^0} f(z)\,g\big(f(z)\big)\,h\big(f(z)\big)\,dF(z) \\
&> g(0)\Big(\int_{A^+} f(z)\,h\big(f(z)\big)\,dF(z) + \int_{A^-} f(z)\,h\big(f(z)\big)\,dF(z)\Big) \\
&= g(0)E\big[f(Z)\,h\big(f(Z)\big)\big].
\end{aligned}$$

Nótese que la hipótesis de probabilidad positiva del conjunto $\{f(Z) \neq 0\}$ asegura que la desigualdad anterior es efectivamente estricta. □

A.3. Aplicación al modelo de Dalal y Alghalith (2009)

En el modelo de Dalal y Alghalith (2009) se considera incertidumbre simultáneamente en dos variables: el precio y la producción. La riqueza de la empresa (de forma simplificada) viene dada por:

$$W(y) = pvy - c(y) + W_0,$$

donde y es el nivel de producción en ausencia de incertidumbre (el cual también puede ser interpretado como el nivel de producción programado por la empresa), v es un factor aleatorio con $E[v] = 1$ (de modo que yv es la producción finalmente obtenida), y p es el precio al que se venderá la producción, con $\bar{p} \equiv E[p]$. La función de costes es denotada por c, con $c' > 0$ y $c'' \geqslant 0$, y W_0 es la riqueza inicial de la empresa.

Se considera que la empresa es aversa al riesgo (más en concreto: $u'' < 0$), tal que $u' > 0$ y que elige el nivel de producción y de modo que maximiza la utilidad esperada de su riqueza. Es decir, resuelve el problema:

$$\max_y E\big[u\big(W(y)\big)\big].$$

La condición de primer orden viene dada por:

$$E\big[u'\big(W(y^*)\big)\big(pv - c'(y^*)\big)\big] = 0,$$

donde y^* denota el valor óptimo. Obsérvese que, en caso de certidumbre, la cantidad óptima y_c^* que elige la empresa satisface: $\bar{p} - c'(y_c^*) = 0$.

El óptimo y^* puede verse como la abscisa del punto de intersección de las gráficas de las siguientes funciones:

$$G(y) \equiv \bar{p} - E\big[u'\big(W(y)\big)\, pv\big]/E\big[u'\big(W(y)\big)\big] \quad \text{y} \quad F(y) \equiv \bar{p} - c'(y).$$

La segunda es conocida, y los autores estudian las distintas posibilidades para la primera. Teniendo en cuenta que el punto de intersección de la gráfica de la función F con el eje de abcisas es $(y_c^*, 0)$ (pues $\bar{p} - c'(y_c^*) = 0$), los autores determinan finalmente la posición relativa entre y^* e y_c^* en función del signo de $\mathsf{cov}(p, v)$.[3]

Este resultado se puede obtener analíticamente, sin necesidad de recurrir a cuestiones de representación gráfica. Si se aplica el Lema A.2.1 a la variable aleatoria bidimensional $Z = (p, v)$, a la función $g(x) = u'\big((x + E[pv])y^* - c(y^*) + W_0\big)$, que es estrictamente decreciente (pues $u'' < 0$), a la función $h \equiv 1$, y a la función continua (y por tanto medible) $f(s, t) = st - E[pv]$, se obtiene:

$$E\big[u'\big(W(y^*)\big)\big(pv - E[pv]\big)\big] < 0,$$

desigualdad que es equivalente a:

$$\frac{E\big[u'\big(W(y^*)\big)pv\big]}{E\big[u'\big(W(y^*)\big)\big]} < E\left[pv\right],$$

pues $u' > 0$. Teniendo en cuenta que el primer miembro de esta desigualdad es igual a $c'(y^*)$ (por la condición de primer orden del problema), y que $E[pv] = \bar{p} + \mathsf{cov}(p, v)$, se obtiene:

$$c'(y^*) < \bar{p} + \mathsf{cov}(p, v).$$

[3]Cf. Dalal y Alghalith (2009), Proposición 1, p. 86. Nótese que $G(0) = \mathsf{cov}(p, v)$. La notación para F es nuestra.

Si se considera ahora la función creciente $H(y) \equiv c'(y) - \bar{p}$, entonces:

$$H(y_c^*) = 0, \quad \text{y} \quad H(y^*) = c'(y^*) - \bar{p} < \mathsf{cov}(p, v).$$

Si $\mathsf{cov}(p, v) \leqslant 0$, entonces $H(y^*) < 0 = H(y_c^*)$, de donde $y^* < y_c^*$. Pero si fuera $\mathsf{cov}(p, v) > 0$, podría darse cualquiera de los tres casos: $y^* < y_c^*$, $y^* = y_c^*$ o $y^* > y_c^*$. Este es exactamente el resultado principal obtenido en Dalal y Alghalith (2009).

Por otra parte, los autores citados llevan a cabo un detallado estudio del efecto en el nivel óptimo y^* de la variación de distintos parámetros del modelo (por ejemplo, la riqueza inicial W_0, o las varianzas de las variables aleatorias p y v), pero no estudian el comportamiento de la empresa ante una variación en la aversión al riesgo. Con la ayuda del Lema A.2.1, se puede obtener un resultado sobre este efecto. Para ello, se consideran dos posibles funciones de utilidad en las condiciones del modelo: u_1, u_2, y se compara el nivel óptimo obtenido a partir de cada una, respectivamente: y_1^*, y_2^*, bajo la hipótesis de que la aversión absoluta al riesgo para la primera es menor que para la segunda, es decir: $r_1 < r_2$, donde $r_i = -u_i''/u_i'$ para $i \in \{1, 2\}$. La siguiente proposición especifica el resultado.

Proposición A.3.1. *Si $r_1 < r_2$, entonces $y_1^* > y_2^*$.*

Demostración. Para cada $i \in \{1, 2\}$, hágase $U_i(y) \equiv E\big[u_i\big(W(y)\big)\big]$; entonces:

$$U_i'(y) = E\big[u_i'\big(W(y)\big)\big(pv - c'(y)\big)\big],$$

y de acuerdo con la condición necesaria de primer orden: $U_i'(y_i^*) = 0$.

Considérense las funciones reales de variable real $h(s) = u_2'\big([s+c'(y_2^*)]y_2^* - c(y_2^*) + W_0\big)$, y $g(s) = k\big([s + c'(y_2^*)]y_2^* - c(y_2^*) + W_0\big)$ donde $k \equiv u_1'/u_2'$. Entonces ambas funciones son estrictamente positivas, y además g es estrictamente creciente. En efecto, se tiene:

$$g'(s) = y_2^* \, k'\big([s + c'(y_2^*)]y_2^* - c(y_2^*) + W_0\big),$$

pero $k' = k \cdot (r_2 - r_1) > 0$, de acuerdo con la hipótesis. Aplicando el Lema A.2.1 a estas funciones h y g, y a la variable aleatoria $Z = (p, v)$ y a la función continua (y, por ende, medible) $f(s, t) = st - c'(y_2^*)$, se obtiene:

$$U_1'(y_2^*) = E\big[u_1'\big(W(y_2^*)\big)\big(pv - c'(y_2^*)\big)\big] > g(0)\, E\big[u_2'\big(W(y_2^*)\big)\big(pv - c'(y_2^*)\big)\big] = g(0)\, U_2'(y_2^*) = 0;$$

de donde $U_1'(y_2^*) > 0 = U_1'(y_1^*)$. El resultado se concluye del hecho de que la función $y \mapsto U_1'(y)$ es estrictamente decreciente. Nótese que la derivada de esta última función es:

$$E\big[u_1''\big(W(y)\big)\big(pv - c'(y)\big)^2 - u_1'\big(W(y)\big)\, c''(y)\big],$$

la cual es estrictamente negativa al ser $u_1'' < 0$, $u_1' > 0$ y $c'' \geqslant 0$. □

A.4. Generalización del lema

Finalmente, en este trabajo se ha generalizado este lema al caso en el que aparecen variables aleatorias multidimensionales independientes:

Lema A.4.1. *Sean h una función real estrictamente positiva definida sobre $\mathbb{R}$ y $g(t,w)$ una función real definida sobre $\mathbb{R}^2$ estrictamente creciente en t, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{\omega}$ y $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{\nu}$ variables aleatorias multidimensionales independientes, y sea $e(\mathbf{Y})$ una función real de $\mathbf{Y}$. Si existe una función medible $f : \mathbb{R}^{\nu} \to \mathbb{R}$ tal que $P\{f(\mathbf{Z}) \neq 0\} \neq 0$, y tal que las esperanzas $E[f(\mathbf{Z}) \cdot g(f(\mathbf{Z}), e(\mathbf{Y})) \cdot h(f(\mathbf{Z}))]$ y $E[g(0, e(\mathbf{Y}))]$ y $E[f(\mathbf{Z}) \cdot h(f(\mathbf{Z}))]$ son finitas, entonces se verifica que*

$$E[f(\mathbf{Z}) \cdot g(f(\mathbf{Z}), e(\mathbf{Y})) \cdot h(f(\mathbf{Z}))] > E[g(0, e(\mathbf{Y}))] \cdot E[f(\mathbf{Z}) \cdot h(f(\mathbf{Z}))],$$

y se tiene la desigualdad en el otro sentido si g es estrictamente decreciente en t.

Demostración. Defínanse los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A^{+} &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\nu} \mid f(\mathbf{z}) > 0\} \\ A^{-} &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\nu} \mid f(\mathbf{z}) < 0\} \\ A^{0} &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\nu} \mid f(\mathbf{z}) = 0\} \end{aligned}$$

Si $\mathbf{z} \in A^{+}$ se tiene que $f(\mathbf{z})g(f(\mathbf{z}), e(\mathbf{y}))h(f(\mathbf{z})) > f(\mathbf{z})g(0, e(\mathbf{y}))h(f(\mathbf{z}))$, y lo mismo sucede si $\mathbf{z} \in A^{-}$. Si por $F_{\mathbf{Z}}$ y $F_{\mathbf{Y}}$ se denotan las respectivas funciones de distribución de las variables aleatorias $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&E\left[f(\mathbf{Z}) \cdot g\left(f(\mathbf{Z}), e(\mathbf{Y})\right) \cdot h\left(f(\mathbf{Z})\right)\right] = \\
&\qquad \int_{A^+ \times \mathbb{R}^\omega} f(\mathbf{z}) g(f(\mathbf{z}), e(\mathbf{y})) h\left(f(\mathbf{z})\right) dF_{\mathbf{Z}} dF_{\mathbf{Y}} \\
&\qquad + \int_{A^0 \times \mathbb{R}^\omega} f(\mathbf{z}) g(f(\mathbf{z}), e(\mathbf{y})) h\left(f(\mathbf{z})\right) dF_{\mathbf{Z}} dF_{\mathbf{Y}} \\
&\qquad + \int_{A^- \times \mathbb{R}^\omega} f(\mathbf{z}) g(f(\mathbf{z}), e(\mathbf{y})) h\left(f(\mathbf{z})\right) dF_{\mathbf{Z}} dF_{\mathbf{Y}} > \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}^\omega} \left\{ \int_{A^+} f(\mathbf{z}) g\left(0, e(\mathbf{y})\right) h\left(f(\mathbf{z})\right) dF_{\mathbf{Z}} \right\} dF_{\mathbf{Y}} \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^\omega} \left\{ \int_{A^-} f(\mathbf{z}) g\left(0, e(\mathbf{y})\right) h\left(f(\mathbf{z})\right) dF_{\mathbf{Z}} \right\} dF_{\mathbf{Y}} = \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}^\omega} \left\{ g\left(0, e(\mathbf{y})\right) \int_{A^+} f(\mathbf{z}) h\left(f(\mathbf{z})\right) dF_{\mathbf{Z}} \right\} dF_{\mathbf{Y}} \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^\omega} \left\{ g\left(0, e(\mathbf{y})\right) \int_{A^-} f(\mathbf{z}) h\left(f(\mathbf{z})\right) dF_{\mathbf{Z}} \right\} dF_{\mathbf{Y}} = \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^\omega} g\left(0, e(\mathbf{y})\right) dF_{\mathbf{Y}} \right) \cdot \left(\int_{A^+} f(\mathbf{z}) h\left(f(\mathbf{z})\right) dF_{\mathbf{Z}} + \int_{A^-} f(\mathbf{z}) h\left(f(\mathbf{z})\right) dF_{\mathbf{Z}} \right) \\
&\qquad = E\left[g\left(0, e(\mathbf{Y})\right)\right] \cdot E\left[f(\mathbf{Z}) \cdot h\left(f(\mathbf{Z})\right)\right]
\end{aligned}
$$

$\square$

Conclusión

Se ha demostrado que el nivel óptimo de producción que la empresa planifica disminuye cuando aumenta la aversión al riesgo, y aumenta cuando disminuye la aversión al riesgo.

Como puede verse, se ha llevado a cabo una reformulación de un lema debido a Lippman y McCall (1981) para que sea aplicable al caso de varias variables aleatorias, y se ha presentado el nuevo lema como una herramienta que puede ser de utilidad en modelos de empresa bajo incertidumbre.

En particular, en el modelo de Dalal y Alghalith (2009), en el que existe incertidumbre tanto en el precio como en la producción, es posible realizar un estudio comparativo entre la decisión óptima que tomaría una empresa en presencia de incertidumbre y la que tomaría en ausencia de ella. Este análisis es realizado por sus autores con ayuda de un método gráfico. En el presente trabajo se ha demostrado el mismo resultado mediante la aplicación del lema citado, de una forma analítica y más directa.

Asímismo, se ha ilustrado la aplicabilidad del lema demostrando un resultado nuevo, dentro del marco del modelo de Dalal y Alghalith (2009): al aumentar la aversión al riesgo de la empresa, ésta planifica un nivel óptimo de producción menor.

Apéndice B

Propiedades y efectos de estática comparativa en modelos de decisión con incertidumbre: aplicaciones a la teoría de la empresa

El lema desarrollado en la Sección A.2 se ha aplicado también al estudio de determinadas propiedades en ciertos modelos de la teoría de la empresa en condiciones de incertidumbre, como se presenta a continuación.

Se considera aquí un modelo simple de decisión en condiciones de incertidumbre, en el que un agente que manifiesta aversión al riesgo maximiza el valor esperado de la utilidad de un nivel de riqueza aleatorio. Esta riqueza se introduce de una manera general, especialmente en relación con el efecto de la variable de decisión, de tal modo que otros problemas de decisión en entornos de incertidumbre pueden considerarse como casos particulares del modelo aquí propuesto. En este marco general se propone un nuevo método que permite obtener de manera sencilla tanto propiedades de la solución óptima como resultados de estática comparativa. Se ilustra la utilidad de esta formulación mediante su aplicación a dos modelos de la teoría de la empresa en condiciones de incertidumbre. En tales modelos se derivan fácimente sus propiedades esenciales, y se obtienen también nuevos resultados.

B.1. Introducción

Muchos modelos de decisión en condiciones de incertidumbre, en especial los de la teoría de la empresa, pueden considerarse como casos particulares de una formulación general: un agente maximiza la utilidad de un nivel de "riqueza" aleatorio, en el que esta es un balance entre unos "ingresos" y unos "costes", definidos aquellos como el producto de un "nivel de producción" y un "precio" (y en el que estos tres elementos -producción, precio y coste- se interpretan en un sentido amplio).

En lo que sigue se formula un modelo de decisión siguiendo este patrón, con una única variable de decisión y una única fuente de incertidumbre, independiente de dicha variable de decisión. Gracias a esta simplificación, el modelo es simple y fácil de estudiar, pero, no obstante, puede considerarse bastante general. De hecho, la riqueza se introduce de una forma general en relación a la variable de decisión, de tal modo que la formulación resultante es fácilmente aplicable en modelos de diferentes situaciones.

Para este modelo general, se presenta un método para estudiar sus propiedades -en especial los efectos de estática comparativa- de un modo sistemático. Este método es analítico, en contraposición a los métodos geométricos utilizados habitualmente en muchos otros modelos. Uno de los puntos clave de este método es el Lema A.2.1, que generaliza el Lema A.0.1, extensamente utilizado en la literatura.

En la Sección B.2 se formula el modelo y se presenta el método. Se obtiene una caracterización de una solución de esquina, y se compara la solución óptima con la que se obtiene en ausencia de incertidumbre. Se estudian también los efectos de estática comparativa. Como aplicación, se estudia el efecto de la introducción de un impuesto proporcional al nivel de riqueza y se analiza el efecto de una variación en la tasa de aquel.

En la Sección B.3 se aplican los resultados previos a dos modelos de la teoría de la empresa en condiciones de incertidumbre. En ambos modelos se obtienen de manera sencilla los resultados clave. En particular, el efecto de una tasa proporcional a la riqueza en el segundo modelo es un resultado nuevo en la literatura.

B.2. El modelo general y sus propiedades

B.2.1. El modelo

Se considera un agente económico que se enfrenta a algún tipo de incertidumbre, y una única variable de decisión: x. Para cada posible valor de x se define un nivel aleatorio de riqueza, $W(x)$. El agente busca maximizar la utilidad esperada de esa riqueza.

Se supondrá que la variable x pertenece a un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, acotado o no, tal que $0 \in I$. Para cada $x \in I$ se considera que la riqueza está dada por[1]

$$W(x) = l(x)Z - m(x),$$

donde $Z \geqslant 0$ es una variable aleatoria no degenerada de media $\mu > 0$, y l y m son funciones no aleatorias de clase C^2 en I tales que $l' > 0$, $m' > 0$, y l es cóncava y m convexa (en I). Además, se supone que $l(0) = 0$, y, así, $l(x) > 0$ si $x \neq 0$.

La actitud del agente frente al riesgo está modelizada por una función de utilidad de Bernouilli u, suficientemente regular (al menos de clase C^2 en $\mathbb{R}$) y tal que $u' > 0$ y $u'' < 0$. En particular, el agente presenta aversión al riesgo.

Para cada $x \in I$, la utilidad esperada al elegir x viene dada por $U(x) \equiv E[u(W(x))]$. El agente maximiza esta función U en el intervalo I:

$$\max_{x \in I} U(x). \tag{B.1}$$

Las derivadas primera y segunda de U son:

$$U'(x) = E[u'(W)(l'(x)Z - m'(x))],$$

$$U''(x) = E[u''(W)(l'(x)Z - m'(x))^2 + u'(W)(l''(x)Z - m''(x))].$$

[1]Para simplificar la notación se escribirá, cuando sea posible, W en lugar de $W(x)$.

De acuerdo con las hipótesis, se tiene que $U'' < 0$ en I, por lo que la función U es estrictamente cóncava en I: si el problema (B.1) admite solución, esta es única. Adviértase que la igualdad $U' \equiv 0$ es una condición suficiente para que un punto $x \in I$ sea la (única) solución del problema.

De aquí en adelante se considerará la función $n \equiv m'/l'$. En términos de esta función n y de la media μ de la variable aleatoria Z, la siguiente proposición aporta una condición suficiente de existencia de una solución y una caracterización de una solución de esquina.

Proposición B.2.1. *Si existe algún $x_0 \in I$ tal que $\mu \leqslant n(x_0)$, o bien el intervalo I es acotado, entonces el problema de maximización (B.1) tiene una solución única. Además, si dicho problema tiene solución, esta será positiva si y sólo si $\mu > n(0)$.*

Demostración. Si $\mu \leqslant n(x_0)$ para algún $x_0 \in I$, la aplicación del Lema A.2.1 tomando $f(Z) = l'(x_0)Z - m'(x_0)$ y las funciones reales

$$\begin{aligned} h &\equiv 1 \\ g(s) &= u'([s + m'(x_0)][l(x_0)/l'(x_0)] - m(x_0)), \end{aligned}$$

puesto que la función g es positiva y decreciente, conduce a:

$$\begin{aligned} E[u'(W(x_0))(l'(x_0)Z - m'(x_0))] &\leqslant g(0)E[l'(x_0)Z - m'(x_0)] \\ &= g(0)l'(x_0)(\mu - n(x_0)); \end{aligned}$$

esto es: $U'(x_0) \leqslant 0$. Así, $U(x_0) > U(x)$ si $x > x_0$, y la única solución del problema (B.1) es precisamente la del problema $\max_{x\in[0,x_0]} U(x)$, que existe por la continuidad de U.

Por otra parte, nótese que $W(0) = -m(0)$ es no aleatorio, por lo que:

$$U'(0) = u'(-m(0)) \cdot (l'(0)Z - m'(0)) = u'(-m(0)) \cdot l'(0) \cdot (\mu - n(0)),$$

y, por tanto, $\mu > n(0)$ es equivalente a $U'(0) > 0$. Si el problema tiene una única solución x^*, la desigualdad $U'(0) > 0$ es equivalente a $x^* > 0$. □

B.2.2. Una función auxiliar

La siguiente función será útil en el análisis que sigue:

$$F(x) = \frac{E[u'(W(x))Z]}{E[u'(W(x))]},\ x \in I.$$

Su función derivada es:

$$F'(x) = \frac{E[u''(W(x))(Z - n(x))(Z - F(x))]l'(x)}{E[u'(W(x))]}.$$

La función F y la utilidad marginal U' están estrechamente relacionadas:

$$U'(x) = E[u'(W)]l'(x)(F(x) - n(x)),$$

por lo que la solución óptima queda caracterizada per la siguiente igualdad:

$$F(x^*) = n(x^*). \tag{B.2}$$

También se verifica que:

$$F(0) = \mu, \qquad \text{y} \qquad F(x) < \mu \;\; \text{si} \;\; x \in I - \{0\}. \tag{B.3}$$

Esta desigualdad puede demostrarse aplicando el Lema A.2.1 a la función $f(Z) = Z - \mu$ y a las funciones reales $h \equiv 1$ y $g(s) = u'(l(x)(s + \mu) - m(x)$: puesto que $l(x) > 0$, la función g es estrictamente decreciente, y se obtiene:

$$E[u'(W(x))(Z - \mu)] < g(0) \cdot E[Z - \mu] = 0,$$

por lo que $F(x) < \mu$.

Una interpretación Puede darse una interpretación del número $F(x^*)$. Por el momento, atiéndase a un problema de maximización no aleatorio: aquel que resulta de sustituir la variable aleatoria Z en (B.1) por un número positivo z; esto es:

$$\max_{x \in I} u(l(x)z - m(x)). \tag{B.4}$$

Nótese que si el problema admite una solución interior x_z, esta es única (la función objetivo es estrictamente cóncava) y queda caracterizada por la condición $l'(x_z)z - m'(x_z) = 0$, o, de manera equivalente, por $n(x_z) = 0$.

Por tanto, en vista de la caracterización (B.2) de la solución óptima x^* del problema (B.1), puede afirmarse que x^* es también la solución de un problema no aleatorio: el problema (B.4) con $z = F(x^*)$, o, equivalentemente, el problema que resulta de sustituir Z por $F(x^*)$ en (B.1).

Dicho de otro modo, si el agente pudiera operar en un entorno de certidumbre, $F(x^*)$ sería el valor de Z para el cual el agente elegiría exactamente el nivel x^*.

B.2.3. El problema en ausencia de incertidumbre

Se desea comparar la solución del problema (B.1) con la del problema (B.4) para $z = \mu$:

$$\max_{x \in I} u(l(x)\mu - m(x)), \tag{B.5}$$

dado que dicha solución existe. SE designa a este problema como el *problema respectivo sin incertidumbre*. La siguiente proposición establece una comparación entre ambas soluciones. Adviértase que se asume que la solución x^* del problema (B.1) es interior, por lo que se verifica la igualdad (B.2).

Proposición B.2.2. *Si el problema B.5 admite una solución x_c^*, entonces $x^* < x_c^*$.*

Demostración. Se sabe que la solución x_c^* es única; puede asumirse que es interior. En efecto, sea $U_c(x) = u(l(x)\mu - m(x))$. Puesto que x^* es interior, se tiene que $\mu > n(0)$ (por la Proposición B.2.1), y, así, $U_c'(0) > 0$, esto es, $x_c^* > 0$. Si el intervalo I fuera acotado y cerrado, siendo x_c^* su extremo derecho, la tesis de la proposición también sería cierta, puesto que x^* sería menor que ese extremo derecho. Por tanto, la solución x_c^* queda caracterizada por la condición $U_c'(x_c^*) = 0$, o, de modo equivalente, por $n(x_c^*) = \mu$.

Puesto que la función n es estrictamente creciente, el signo de n' es el mismo que el de $m''l' - m'l''$, que es positivo por las condiciones impuestas a l y m.[2] Por (B.3) se puede escribir:

$$n(x_c^*) = \mu > F(x^*) = n(x^*),$$

y, por tanto, $x^* < x_c^*$. □

Esto es, la solución óptima para un entorno de incertidumbre es menor que la solución óptima en ausencia de aquella.

En este modelo general se ha probado que la incertidumbre reduce la cantidad óptima de la variable de decisión elegida por el agente económico.

B.2.4. Efectos de estática comparativa

La función F también puede ser utilizada para el estudio de los efectos de estática comparativa. Si ν denota un parámetro de modelo, puede escribirse $F(x;\nu)$ y $n(x;\nu)$ en lugar de $F(x)$ y $n(x)$, respectivamente, para introducir la dependencia de ν de estas funciones.

Proposición B.2.3. *El signo de* $\frac{dx^*}{d\nu}$ *es el mismo que el de* $F'_\nu(x^*;\nu) - n'_\nu(x^*;\nu)$.

Demostración. De la caracterización $F(x^*;\nu) = n(x^*;\nu)$ (véase (B.2)) se tiene:

$$\frac{dx^*}{d\nu} = -\frac{F'_\nu(x^*;\nu) - n'_\nu(x^*;\nu)}{F'_x(x^*;\nu) - n'_x(x^*;\nu)},$$

[2]Realmente, debería ser $m''l' - m'l'' \geqslant 0$, ya que $l'' \leqslant 0$ y $m'' \geqslant 0$. Pero si tanto l'' como m'' fueran nulas simultáneamente (n sería constante), el problema (B.5) admitiría la solución x_c^* si y solo si $I = [0, x_c^*]$, y en este caso el resultado se mantendría.

donde el denominador es negativo, puesto que $n' > 0$ y:

$$\begin{aligned} F'_x(x^*) &= \frac{E[u''(W^*)(Z - n(x^*))(Z - F(x^*))]l'(x^*)}{E[u'(W^*)]} \\ &= \frac{E[u''(W^*)(Z - F(x^*))^2]l'(x^*)}{E[u'(W^*)]} < 0, \end{aligned}$$

donde $W^* \equiv W(x^*)$. □

Una aplicación: tasa proporcional a la riqueza Para ilustrar este resultado, supóngase que el nivel de riqueza viene dado por:

$$W(x) = (1 - \tau)(l_0(x)Z - m_0(x)),$$

donde $0 < \tau < 1$ y l_0 y m_0 cumplen las mismas condiciones que l y m, respectivamente. Se puede interpretar este nivel de riqueza como el resultado de aplicar una tasa de razón τ proporcional a la riqueza. Se quiere estudiar el efecto de una variación de τ en el valor óptimo x^*.

Nótese que $n = m'_0/l'_0$ no depende de τ, y, por ello, el signo de $dx^*/d\tau$ es el de $F'_\tau(x^*;\tau)$ (véase Proposición B.2.3). Se tiene que $F(x^*;\tau) = E[u''(W^*)Z]/E[u''(W^*)]$, donde $W^* = W(x^*) = (1 - \tau)(l_0(x^*)Z - m_0(x^*))$, y se concluye que (véase (B.2)):

$$F'_\tau(x^*;\tau) = -\frac{E[u''(W^*)W^*(Z - n(x^*))]}{(1 - \tau)E[u'(W^*)]}.$$

Si r_u denota la medida de Arrow-Pratt de aversión al riesgo del agente, puede escribirse:

$$-E[u''(W^*)W^*(Z - n(x^*))] = E[r_u(W^*)u'(W^*)(Z - n(x^*))].$$

Si se consideran las funciones reales:

$$\begin{aligned} h(s) &= u'\left((1-\tau)[l(x^*)(s+n(x^*))-m(x^*)]\right), \\ g(s) &= r_u\left((1-\tau)[l(x^*)(s+n(x^*))-m(x^*)]\right), \end{aligned}$$

se tiene que $h > 0$ y que g es creciente, constante o decreciente según el agente muestre IARA, CARA o DARA,[3] respectivamente. Para IARA, por ejemplo, la aplicación del Lema A.2.1 a la función $f(Z) = Z - n(x^*)$ conduce a:

$$E[r_u(W^*)u'(W^*)W^*(Z-n(x^*))] \geqslant g(0)E[u'(W^*)(Z-n(x^*))] = 0,$$

donde la igualdad proviene de la condición de primer orden para la maximización del problema. Para CARA y DARA puede procederse, *mutatis mutandi*, del mismo modo.

Finalmente, se puede afirmar que al aumentar la tasa τ, el nivel óptimo x^* aumenta, permanece constante o se reduce según el agente muestre IARA, CARA o DARA, respectivamente.

B.3. Aplicación a la teoría de la empresa en condiciones de incertidumbre

En esta sección se aplican los resultados de la sección precedente a dos modelos de la teoría de la empresa en condiciones de incertidumbre. El primero, debido a Sandmo,

[3]Como es común en la literatura, estos acrónimos significan aversión absoluta al riesgo creciente (increasing), constante (constant) o decreciente (decreasing), respectivamente.

es uno de los modelos seminales de la teoría; aquí se obtendrán de manera sencilla la mayoría de sus resultados más importantes. El segundo, de Dalal y Alghalith, es un modelo importante de la teoría que difiere del de Sandmo por el hecho de considerar dos fuentes de incertidumbre; para este modelo se deriva también fácilmente su resultados más destacados y se obtiene una nueva propiedad.

B.3.1. Sobre el modelo de Sandmo

En el modelo de Sandmo, tal como se presenta en Sandmo (1971), se estudia el caso de una empresa competitiva que produce un único bien cuyo precio de venta es una variable aleatoria. La empresa debe decidir la cantidad que debe elaborar de ese bien antes de la fecha de venta, y, por tanto, antes de conocer el precio al cual se venderá.

Desde el punto de vista de la empresa, el precio de venta es una variable aleatoria no degenerada $P \geqslant 0$ de media $\mu > 0$, y el coste total de elaboración de una cantidad $q \geqslant 0$ de aquel bien es $C(q) + B$, donde $C(q)$ representa el coste variable (con $C(0) = 0$) y B un coste fijo. La actitud de la empresa frente al riesgo viene modelada por una función de utilidad de Bernouilli u. Para las funciones C y u se asume que $C' > 0$, $C'' \geqslant 0$, $u' > 0$ y $u'' \leqslant 0$, por lo que la empresa presenta aversión al riesgo. El beneficio de la empresa por la elaboración de q unidades viene dada por $\pi(q) = Pq - C(q) - B$, y el objetivo de la empresa es producir aquella cantidad que maximice el valor esperado de la utilidad de ese beneficio.

Este modelo puede considerarse como un caso particular del modelo general presentado en la Sección B.2 si se toma $Z = P$, $x = q$, $I = \mathbb{R}_+$, $l(q) = q$ y $l(q) = C(q) + B$, y $W = \pi$. Obsérvese que $n = C'$; es decir, la función n es precisamente el coste marginal.

Sandmo asume que existe una solución óptima q^* para el correspondiente problema de maximización, y analiza la posibilidad de una solución de esquina. La Proposición B.2.1 establece que esa solución óptima será positiva si y solo si la media del precio es mayor que el coste marginal del nivel de producción nulo: $\mu > C'(0)$. Nótese también que, cuando la solución óptima q^* es positiva, dicha solución queda caracterizada por la condición $F(q^*) = C'(q^*)$ (véase (B.2)). Así, si la empresa pudiera vender su producción a un precio determinado, el número $F(q^*)$ sería el valor de ese precio para el cual la firma decidiría producir exactamente q^* unidades de producto.

Por otra parte, el principal resultado obtenido por Sandmo es el siguiente: "en un entorno de incertidumbre, el nivel de producción es menor que en ausencia de aquella"(véase Sandmo (1971), págs. 66-67). Más precisamente, la empresa reduce su producción respecto a la que se obtiene si el precio de venta es igual a la media de ese precio. En el nuevo contexto de la Sección B.2, este resultado clave es una simple consecuencia de la Proposición B.2.2.

Finalmente, entre otros efectos de estática comparativa, Sandmo estudia la influencia en la solución óptima q^* de un impuesto proporcional al beneficio y una variación de su cuantía. Este autor demuestra que un aumento en la tasa de ese impuesto conlleva un aumento, o no produce variación, o una disminución de la cantidad elaborada por la empresa según su grado relativo de aversión al riesgo sea creciente, constante o decreciente, respectivamente"(véase Sandmo (1971), pág. 70). Este resultado puede ser obtenido fácilmente de lo hallado para este efecto en la Sección B.2.4.

B.3.2. Un modelo con dos fuentes de incertidumbre. Un nuevo resultado

Se aplican ahora los resultados previos a un modelo de la teoría de la empresa en condiciones de incertidumbre de Dalal y Alghalith (2009). Este modelo ha devenido una referencia relevante en la teoría, debido a que es un estudio muy completo de la empresa con dos fuentes simultáneas de incertidumbre: el precio de venta y la cantidad producida por la empresa. A pesar de introducir dos fuentes de incertidumbre, el modelo puede ser tratado como un caso particular del modelo general presentado en la Sección B.2.

El nivel de riqueza de la empresa vienen dado por:[4]

$$W(y) = pvy - c(y) + W_0,$$

donde y, la variable de decisión, es el nivel de producción deseado, v es un factor aleatorio tal que el producto vy puede ser interpretado como el nivel *real* de producción, c es la

[4] Aquí se estudia una versión ligeramente simplificada de la original presentada por Dalal y Alghalith (2009), que, para nuestros propósitos, es suficiente.

función de coste, y W_0 es el nivel inicial de riqueza. Se supone que $E[v] = 1$, y que $c' > 0$ y $c'' > 0$. Se supone también que el nivel inicial de riqueza W_0 es tal que $W(y) \geqslant 0$ para todo y. El valor esperado del precio de venta se denota por $\bar{p}$: $E[p] = \bar{p}$. La empresa quiere maximizar el valor esperado de la utilidad de su riqueza, considerando que su actitud hacia el riesgo viede modelada por una función de utilidad de Bernouilli u tal que $u' > 0$ y $u'' < 0$.

Se considera aquí este modelo en el contexto de la Sección B.2, con $Z = pv$, $l(y) = y$ y $m(y) = c(y) - W_0$, por lo que $n(y) = c'(y)$. Se quiere aplicar la Proposición B.2.2, que compara el nivel óptimo de producción y^* en el problema original (con incertidumbre en ambas variables) con el nivel óptimo de producción y_c^* en el problema respectivo sin incertidumbre (en el sentido dado en la Sección B.2.3), que resulta de sustituir $E[pv]$ en lugar de pv. Por la Proposición B.2.2 se concluye que $y^* < y_c^*$.

Pero Dalal y Alghalith centran su atención en un problema respectivo sin incertidumbre diferente: el que resulta de tomar $E[v] = 1$ en lugar de v, y $\bar{p}$ en lugar de p; denotan la solución correspondiente por y_c. Obsérvese que y_c está caracterizada por la condición $n(y_c) = \bar{p}$, y, según (B.2) y (B.3), se verifica que $n(y^*) < E[pv]$. Con la hipótesis de que $cov(p, v) \leqslant 0$, se tiene que $E[pv] = cov(p, v) + \bar{p} \leqslant \bar{p}$, por lo que se puede escribir:

$$n(y^*) < E[pv] \leqslant \bar{p} = n(y_c),$$

y, de aquí, $y^* < y_c$. Esta es exactamente la afirmación de la Proposición 1 en Dalal y Alghalith (2009).

La Proposición 2 en Dalal y Alghalith (2009), acerca de incertidumbre en la producción pero no en el precio, es también una consecuencia inmediata de nuestro análisis.

Finalmente, trasladando a este modelo los efectos de estática comparativa de la introducción de un impuesto (véase Sección B.2.4), se obtiene una nueva propiedad de este modelo: Considérese que el nivel de riqueza viene dado por:

$$W(y) = (1 - \tau)\left(pvy - c(y) + W_0\right),$$

donde $0 < \tau < 1$, de tal modo que la riqueza final de la empresa queda reducida por un impuesto de tasa τ. Puede afirmarse que *la tasa aumenta, deja constante, o reduce el nivel óptimo de producción y^* según la empresa muestre IARA, CARA o DARA, respectivamente.*

Conclusión

Como se ve, se ha considerado aquí un modelo de empresa con incertidumbre, de una variable de decisión, cuyo nivel de riqueza -del cual se desea optimizar el valor esperado de su utilidad- viene expresado de un modo bastante general. Se ha propuesto aquí un método para obtener diversas propiedades de este modelo. Este método requiere la utilización de la función $F(x) = E[u'(W)Z]/E[u'(W)]$, que permite establecer una caracterización simple de la solución óptima. Conviene destacar el hecho de que el número $F(x^*)$, donde x^* es la solución óptima, permite al agente -al menos en el plano teórico- considerar un problema de decisión sin incertidumbre equivalente al problema original con incertidumbre, en el sentido de que ambos problemas comparten el óptimo en el mismo punto.

Se ha estudiado, además, el así llamado problema respectivo sin incertidumbre, que resulta de escribir, en lugar de la variable aleatoria Z, su media μ. Se ha visto que la solución óptima del problema original es menor que en el caso no aleatorio; esto es, la incertidumbre reduce la cantidad óptima elegida por el agente.

De la caracterización de la solución óptima pueden obtenerse también resultados de estática comparativa. Se ha estudiado el efecto en la solución óptima de la introducción de un impuesto proporcional al nivel de riqueza.

El método presentado aquí se ha aplicado a dos modelos de la teoría de la empresa en condiciones de incertidumbre. Para el primero de ellos (debido a Sandmo (1971), uno de los modelos seminales de la teoría), el método ha permitido obtener de manera sencilla sus resultados clave. El segundo modelo, de Dalal y Alghalith (2009), un modelo relevante en la teoría, presenta el hecho destacado de que considera dos fuentes simultáneas de incertidumbre (precio de venta y producción). Formalmente, se tienen dos variables aleatorias, pero estas aparecen como un producto, de tal manera que es posible estudiar el problema en el contexto de la Sección B.2. Se obtiene aquí de manera sencilla una propiedad importante: en condiciones de incertidumbre, la cantidad óptima de la variable de decisión (el nivel de producción esperado) se reduce. Finalmente, se traslada a este modelo el resultado general del efecto de una tasa impositiva, que nos permite establecer una propiedad que no había sido estudiada por aquellos autores.

Bibliografía

Adrangi, B., Raffiee, K. (1999), "On total price uncertainty and the behavior of a competitive firm", American Economist, vol. 32 (2), pp. 59—65.

Alghalith, M. (2006a), "Hedging decisions with price and output uncertainty", Annals of Finance, vol. 2, pp. 225—227.

Alghalith, M. (2006b), "A note on output hedging with cost uncertainty", Managerial and Decision Economics, vol. 27, pp. 387—389.

Alghalith, M. (2008a), "Simultaneous output and input hedging: a decision analysis", The Journal of Risk Finance, vol. 9 (2), pp. 200—205.

Alghalith, M. (2009), "Theory of the firm under multiple uncertainties", MPRA Paper No. 19320, http://mpra.ub.uni-muenchen.de/19320/.

Alghalith, M., Dalal, A. (2009), "The choice between multiplicative and additive production uncertainty", Economic Modelling, vol. 26 (1), pp. 1129—1133.

Álvarez-López, A.A., Rodríguez-Puerta, I. (2009), "Teoría de la empresa bajo incertidumbre con mercado de futuros: el papel de los costes fijos y de un impuesto sobre los beneficios". *Rect@*, vol. 10 (1), pp. 253—265.

Álvarez-López, A.A., Rodríguez-Puerta, I. (2011), "A Methodological Contribution in the Theory of the Firm under Uncertainty". En *Dynamics, Games and Sciences II (DYNA 2008, in honor of M. Peixoto and D. Rand)*, A. A. Pinto, M. M. Peixoto y D. A. Rand (editores), Springer Proceedings in Mathematics, vol. 2, Springer, cap. 7.

Antle, J.M. (1983), "Incorporating risk in production analysis", American Journal of Agricultural Economics, vol. 65 (5), Proceedings Issue, pp. 1099—1106.

Arrow, K.J. (1974), "The Theory of Risk Aversion", pp. 90—120 en Essays in the Theory of Risk-Bearing, Chicago: Markham Publishing Company (1974).

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE PRODUCTORES DE GANADO DE CARNE (ASOPROVAC) (2007), "Guías de prácticas correctas de higiene: vacuno de cebo", Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación: Dirección General de Ganadería, 2^a edición.

Baron, D.P. (1970), "Price uncertainty, utility, and industry equilibrium in pure competition", International Economic Review, vol. 11 (3), pp. 463—480.

Bellman, R. (1952), "On the Theory of Dynamic Programming", Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 38, pp. 716—719.

Blair, R.D. (1974), “Random input prices and the theory of the firm”, Economic Inquiry, vol. 12 (2), pp. 214—226.

Boletín Oficial del Estado, núm. 27, 31 de enero de 2009, Sec. I, pág. 10438, “Real Decreto 75/2009, de 30 de enero, por el que se modifica el Real Decreto 1698/2003, de 12 de diciembre, por el que se establecen las disposiciones de aplicación de los Reglamentos comunitarios sobre el sistema de etiquetado de la carne de vacuno, y el Real Decreto 1799/2008, de 3 de noviembre, por el que se establecen las bases reguladoras para la concesión de ayudas destinadas a la reconversión de plantaciones de determinados cítricos”.

Booth, L.D. (1983), “Total Price Uncertainty and the Theory of the Competitive Firm”, Economica, vol. 50 (198), pp. 183—191.

Chavas, J-P. (1985), “On the theory of the competitive firm under uncertainty when initial wealth is random”, Southern Economic Journal, vol. 51 (3), pp. 818—827.

Dalal, A., Alghalith, M. (2009), “Production decisions under joint price and production uncertainty”, European Journal of Operational Research, vol. 197, pp. 84—92.

Dalal, A.J., Raju, S.S. (2003), “Domestic and foreign sales when prices in both markets are uncertain”, Bulletin of Economic Research, vol. 55 (2), pp. 125—148.

Diario Oficial de la Unión Europea, L139/55, 30 de abril de 2004, "Reglamento (CE) N^o 853/2004 del Parlamento Europeo y del Consejo de 29 de abril de 2004, por el que se establecen normas específicas de higiene de los alimentos de origen animal".

Espadas, M., "Recría y cebo de terneros/as para la producción cárnica", www.remugants.cat.

EUROCARNE DIGITAL, "Libro blanco de la carne de vacuno", www.eurocarne.com.

Fama, E.F. (1970), "Multiperiod consumption-investment decisions", The American Economic Review, vol. 60 (1), pp. 163—174.

Grant, D. (1985), "Theory of the firm with joint price and output risk and a forward market", American Journal of Agricultural Economics, vol. 67 (3), pp. 630—635.

Hennessy, D.A. (2006), "Multioutput firm under price uncertainty", Journal of Economics and Business, vol. 58, pp. 181—201.

Holthausen, D.M. (1979), "Hedging and the competitive firm under price uncertainty", The American Economic Review, vol. 69 (5), pp. 989—995.

Holthausen, D.M. (1980), "Forward markets and the multiproduct, multifactor firm under price uncertainty", Economics Letters, vol. 6, pp. 217—223.

Lapan, H., Moschini, G. (1994), "Futures Hedging under Price, Basis, and Production Risk", American Journal of Agricultural Economics, vol. 76 (3), pp. 465—477.

Lippman, S.A., McCall, J.J. (1981), “The economics of uncertainty: selected topics and probabilistic methods”, Chapter 6, 211-284, en Handbook of Mathematical Economics (vol. 1), Arrow and Intriligator (Eds.), North-Holland (1981).

McCall, J.J. (1967), ”Competitive production for constant risk utility functions”, The Review of Economic Studies, vol 34 (4), pp. 417—420.

MINISTERIO DE MEDIO AMBIENTE, Y MEDIO RURAL Y MARINO (2008), “La clasificación de canales de vacuno pesado. Base legislativa y manual gráfico”, NIPO: 770-08-143-4, Depósito Legal: M. 58.543-2008.

MINISTERIO DE AGRICULTURA, ALIMENTACIÓN Y MEDIO AMBIENTE, “Sistema de explotación de carne”, www.magrama.gob.es.

Pratt, J.W. (1964), “Risk aversion in the small and the large”, Econometrica, vol. 32 (1-2), pp. 122—136.

Rodríguez-Puerta, I., Álvarez-López, A. A., (2014), “Optimal allocation of a fixed production under price uncertainty”, Annals of Operations Research, 1–22. doi: 10.1007/s10479-014-1702-7.

Ross, S.A. (1981), “Some stronger measures of risk aversion in the small and the large with applications”, Econometrica, vol. 49 (3), pp. 621—638.

Sandmo, A. (1971), “On the theory of the competitive firm under price uncertainty”, The American Economic Review, vol. 61 (1), pp. 65—73.

Sevi, B. (2004), “The competitive firm under both input and output price uncertainties with future markets and basis risk”, Cahiers de recherche, number 04.01.44, Centre de Recherche en Economie et Droit de l’Energie, Université de Montpellier I.

Stewart, M.B. (1978), “Factor-price uncertainty with variable proportions”, The American Economic Review, vol. 68 (3), pp. 468—473.

Viaene, J-M., Zilcha, I. (1998), “The behavior of competitive exporting firms under multiple uncertainty”, International Economic Review, vol. 39 (3), pp. 591—609.

Wolak, F.A., Kolstad, C.D. (1991), “A model of homogeneous input demand under price uncer-tainty”, The American Economic Review, vol. 81 (3), pp. 514—538.