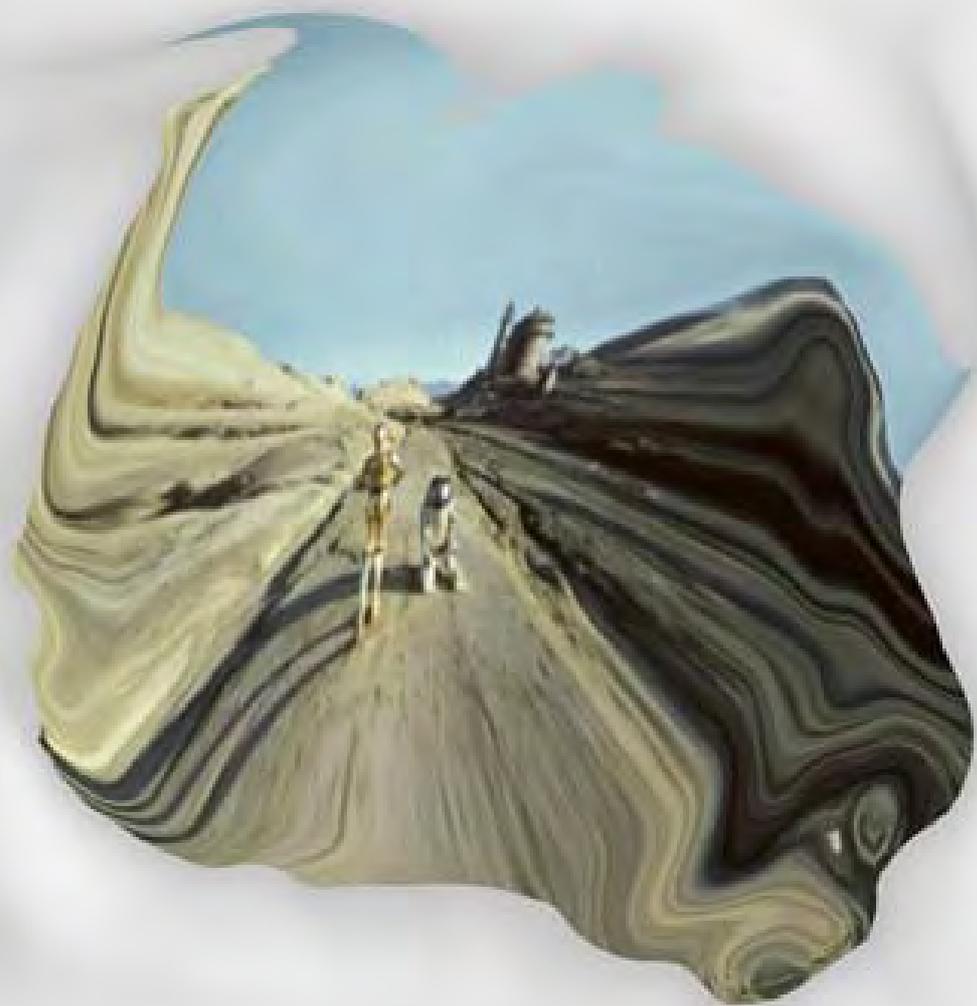


INTELIGENCIA Y EMBODIMENT: UN ENFOQUE BASADO EN TÉCNICAS DE MECÁNICA ESTADÍSTICA

UNED



TESIS DOCTORAL
Inteligencia y Embodiment: Un Enfoque Basado en Técnicas de Mecánica Estadística
Alejandro Chinaa Manrique de Lara (Ingeniero de Telecomunicaciones)
Departamento de Física Fundamental
Facultad de Ciencias de la UNED
Año 2013

Tesis Doctoral

**“Inteligencia y Embodiment: Un Enfoque
Basado en Técnicas de Mecánica
Estadística”**

Alejandro China Manrique de Lara (Ingeniero de
Telecomunicaciones)

Departamento de Física Fundamental

Facultad de Ciencias de la UNED

Año 2013

Departamento de Física Fundamental
Facultad de Ciencias de la UNED

Tesis Doctoral: “Inteligencia y Embodiment: Un Enfoque Basado en Técnicas de Mecánica Estadística”

Autor: Alejandro China Manrique de Lara (Ingeniero de Telecomunicaciones)

Director/a: Elka Radosladova Korutcheva

Lista de Tablas y Figuras

Capítulo 2	página
Figura 2.1. Proceso de inferencia y de transferencia realizado por el sistema perceptivo humano. El sistema de visión humano representa el cuadrado generativamente.21
Figura 2.2. Ejemplo de una estructura simbólica usada en el modelo para capturar algunas de las características de procesamiento de la información comunes a las operaciones cognitivas del cerebro. Los nodos de la estructura representan símbolos, es decir, representaciones de conocimiento codificadas como estados de redes atractoras. Cada nivel del árbol está asociado con un nivel de procesamiento de la información el cual se haya en correspondencia directa con estructuras neuroanatómicas específicas (por ejemplo, capas). Las flechas circulares representan las operaciones combinatorias (primitivas de movimiento) comunes a las funciones cognitivas cerebrales las cuales se ha postulado que se han conservado a lo largo del proceso evolutivo.22
Figura 2.3. Representación de la estructura de la figura 2.2 en términos de variables multi-estado. El factor de bifurcación asociado con cada uno de los niveles que componen la estructura determina el número de estados asociados a las variables multi-estado los cuales se representan entre llaves. Paralelamente, el número de nodos asociado a cada uno de los niveles de la estructura dibujada determina el número de variables multi-estado perteneciente a cada uno de los niveles que componen la estructura. A la derecha de la figura se muestra una tabla que ilustra el mapeo entre configuraciones de símbolos y estados de energía para una permutación de tamaño 3.31

Capítulo 3

Tabla 3.1. Caracterización de las estructuras a partir de los valores obtenidos de energía libre en función de las variables congeladas m (factor de bifurcación) y k (profundidad de las estructuras).45
Figura 3.1. Caracterización de las estructuras a partir de los valores obtenidos de energía libre en función de las variables congeladas m (factor de bifurcación) y k (profundidad de las estructuras).48
Figura 3.2. Caracterización de las estructuras a partir de los valores obtenidos de entropía en función de las variables congeladas m (factor de bifurcación) y k (profundidad de las estructuras).53
Figura 3.3. Ilustración gráfica de las extensas capacidades de los delfines para imitar sonidos y comportamientos. En esta ilustración gráfica un delfín imita el comportamiento de un humano usando su cola como analogía de una pierna (se recomienda al lector consultar Marino et al. (2007) para mayores detalles).59
Figura 3.4. Elefantes en las condiciones experimentales diseñadas para medir la creatividad y comportamiento proactivo (se colocó comida en una rama de bambú fuera del alcance de la trompa de los elefantes, se recomienda al lector consultar Foerder et al. (2011) para mayores detalles). La parte izquierda de la figura muestra una visión parcial del lugar donde se colocaron varias herramientas, como palos, un taburete etc por los investigadores los cuales están siendo inspeccionados por uno de los elefantes asiáticos utilizados en el experimento. La parte derecha de la figura muestra a un joven elefante macho llamado Kandula subido en un cubo desde el cual podía acceder a la fruta colgada de la rama de bambú. En cada caso Kandula exhibió un comportamiento de búsqueda y posicionamiento del cubo, esto es, desplazando el cubo desde su posición original hasta el lugar donde se encontraba suspendida la comida. Sin embargo, en ninguno de los casos los elefantes usaron los palos para conseguir la comida.66

Capítulo 4

Figura 4.1. Representación esquemática de una transducción de entrada-salida entre dos dominios estructurados realizadas. De forma práctica este tipo de transducción podría representar, por ejemplo, un sistema de traducción instantáneo de lenguaje natural entre español y japonés, o un problema de predicción terciario de proteínas en bio-informática.87
Figura 4.2. Representación gráfica esquematizada de una red neuronal recursiva. Las redes neuronales recursivas son una extensión natural de las redes neuronales recurrentes. Una neurona recurrente puede considerarse como una neurona recursiva aplicada a una lista, esto es, una secuencia de datos.89

Figura 4.3. Representación gráfica esquematizada del proceso de despliegue de una red neuronal recursiva para adaptarse a la estructura del grafo que se le presenta a la entrada.91
Figura 4.4. Ilustración gráfica del proceso de representación de la información de un dominio estructurado, como lo son las imágenes, mediante la construcción de un grafo etiquetado. Los nodos del grafo se dice que están “etiquetados” dado que contienen conjuntos de variables del dominio en cuestión, este caso dos variables que dan cuenta del área y del perímetro de la figura geométrica en cuestión y una variable simbólica que da cuenta del tipo de figura geométrica. El resultado es una estructura de información mucho más rica en comparación con modelos clásicos que no explotan la información que viene codificada en la propia estructura del problema.92
Figura 4.5. Ilustración gráfica del proceso de construcción de un grafo de adyacencia el cual se utiliza en problemas de clasificación de imágenes, es decir, el proceso de construcción del grafo (patrones del conjunto de entrenamiento de la red). El procedimiento de codificación de la información redundante no solamente en una ganancia en cuanto a representación de la información sino en cuanto a contenido de la misma.94
Figura 4.5. Representación gráfica de la varianza del promedio de n variables aleatorias distribuidas uniformemente, donde n a su vez representa el tamaño del conjunto de patrones de entrenamiento, frente a su aproximación asintótica.109
 Apéndice B	
Tabla B.1a. Ejemplo de mapeo entre configuraciones posibles de símbolos para una permutación de tamaño 4 ($4! = 24$ configuraciones posibles) y estados de energía asociados de acuerdo con el modelo definido en la sección 2.4. El estado denotado mediante el entero “1” representa el estado de reposo.159
Tabla B.1b. Primeros 10 valores de los coeficientes (“derangements”) de la expresión 2.4 del capítulo 2.161
Figura B.2a. Ilustración gráfica de los valores de energía locales para una configuración consistente en dos variables multi-estado que pueden a su vez encontrarse en 3 estados diferentes, los cuales se indican entre llaves.164
Figura B.2b. Ilustración gráfica de los valores de energía locales para una configuración consistente en tres variables multi-estado que pueden a su vez encontrarse en 2 estados diferentes, los cuales se indican entre llaves.165
Figura B.2c. Ilustración gráfica de los valores de energía locales para una configuración consistente en dos variables multi-estado que pueden a su vez encontrarse en 4 estados diferentes, los cuales se indican entre llaves.166
Tabla B.2a. Especificación combinatoria de los ejemplos (a), (b) y (c) junto con las funciones generadoras resultantes de tales especificaciones.169

Tabla B.2b. Mapeo entre configuraciones de símbolos y estados para una permutación de tamaño igual a 3, la cual se correspondería, por ejemplo, con las configuraciones asociadas a los símbolos del segundo nivel de la estructura de la figura 2.2. Como se puede apreciar los estados son degenerados dado que varias combinaciones de símbolos dan lugar al mismo estado. Por ejemplo, los objetos combinatorios α_2 , α_3 y α_6 dan lugar al estado con valor de energía asociado igual a 2.170
Figura B.2d. Ilustración gráfica de un nivel genérico k de una estructura simbólica de las descritas por el modelo representado en función de las variables multi-estado. Recordemos que el número de estados asociado a las variables multi-estado depende del valor del factor de bifurcación asociado al nivel, m en este caso. De forma similar, el número de variables multi-estado que podemos encontrar en un nivel genérico k de una estructura simbólica es igual al producto de todos los factores de bifurcación de los niveles superiores en la estructura con respecto del nivel considerado.175
Figura B.5a. Evolución del promedio congelado de la energía libre en función del número medio de símbolos (μ_k) usado para operaciones simbólicas de movimiento para estructuras con un número medio de niveles de procesamiento de la información igual a 2.183
Figura B.5b. Evolución del promedio congelado de la energía libre en función del número medio de símbolos (μ_k) usado para operaciones simbólicas de movimiento para estructuras con un número medio de niveles de procesamiento de la información igual a 3.184
Figura B.5c. Evolución del promedio congelado de la energía libre en función del número medio de símbolos (μ_k) usado para operaciones simbólicas de movimiento para estructuras con un número medio de niveles de procesamiento de la información igual a 5.185
 Apéndice C	
Figura c.1. Ejemplo de un grafo ordenado posicional y acíclico para ilustrar la notación utilizada comúnmente en los modelos gráficos.187
Figura c.2. Ejemplo de grafos para ilustrar su clasificación en base a su estructura o esqueleto.188
Figura c.3. Ejemplos de estructuras pertenecientes a las clases $\#^{(1,2)}$ (árboles binarios) y $\#^{(2,2)}$ (rejilla bidimensional).188
Figura c.4. Ilustración gráfica del concepto de operador de desplazamiento generalizado.189
Figura c.5. Ilustración gráfica del concepto de transducción isomorfa.190

Figura c.6. Redes recursivas que implementan estructuras correspondientes a árboles binarios (parte izquierda de la figura) y rejillas bidimensionales (parte derecha) como los presentados en la figura c.3.191

INDICE

Objetivos de la Investigación.....	1
Antecedentes y Estado Actual de los Conocimientos Científico-Técnicos...	3
Prólogo.....	6
1. Introducción.....	9
1.1 Introducción al Concepto de Inteligencia Biológica.....	9
1.2 Inteligencia y Evolución.....	10
1.3 Inteligencia y Embodiment.....	11
1.4 Hipótesis de Inteligencia con Base en el Embodiment.....	14
1.5 Conclusiones.....	18
2. Planteamiento y Desarrollo del Modelo.....	19
2.1 Introducción.....	19
2.2 Definiendo del Modelo: Aspectos Estructurales.....	20
2.3 Formulación Basada en Mecánica Estadística.....	30
2.4 El Modelo de Energía.....	32
2.5 La Función de Partición.....	38
2.6 Promedios Congelados.....	39
2.7 Conclusiones.....	42
3. Interpretación Física del Modelo.....	43
3.1 Introducción.....	43
3.2 Energía Libre.....	44
3.3 Entropía.....	51
3.4 Implicaciones del Modelo.....	55
3.5 Aplicaciones Prácticas del Modelo.....	57
3.5.1 Delfines (<i>Lagenorhynchus Obliquidens</i> y <i>Tursiops Truncatus</i>).....	57
3.5.2 Elefantes (<i>Elephas Maximus</i> y <i>Loxodonta Africana</i>).....	63
3.6 Comparativa frente a Teorías Modernas de Inteligencia.....	71
3.7 Conclusiones.....	79
4. Inteligencia y Redes Recursivas.....	82
4.1 Introducción.....	82
4.2 Redes Neuronales Recursivas.....	88
4.3 Redes Neuronales Recursivas como Modelos Generativos.....	91
4.4 Regla de Aprendizaje Estocástica Vario-Eta.....	95
4.4.1 Descripción Matemática.....	96
4.4.2 Virtudes y Limitaciones de la Aproximación.....	99
4.5 Análisis de Complejidad.....	101
4.5.1 Funciones Generadoras.....	102
4.5.2 Análisis de Singularidades.....	106
4.6 Resultados Prácticos.....	108
4.7 Conclusiones.....	111
5. Conclusiones.....	114

Bibliografía.....	121
Apendice A: Notación y Definiciones.....	154
Apéndice B: Derivación de Ecuaciones.....	158
Apéndice C: Modelos Recursivos: Notación y Definiciones.....	186
Publicaciones Realizadas: Periodo Doctoral.....	193

Objetivos de la Investigación

Los objetivos globales que se han planteado para la realización satisfactoria del presente proyecto de tesis doctoral son los siguientes:

- Documentación y estudio de bibliografía actual relativa a los campos de Psicología Cognitiva, Neurociencia evolutiva, Antropología y Matemática Discreta. Concretamente y relativo al campo de la psicología cognitiva se hizo énfasis en las teorías relativas al concepto de “embodiment”. Paralelamente, con respecto a los campos de neurociencia evolutiva y antropología se recopiló y estudió información de teorías que aportaban una mayor comprensión y pistas en el desarrollo evolutivo de la inteligencia. Por último, con respecto a las técnicas de matemática discreta se recopiló información concerniente a técnicas de analítica combinatoria con aplicación directa en el campo de la mecánica estadística.

- Aplicación de técnicas modernas de matemática discreta en el estudio de modelos específicos del campo de investigación relativo al aprendizaje de máquinas que implementan funciones recursivas parciales las cuales se estima forman parte de las funciones cognitivas superiores en los mamíferos, es decir, se trata de modelos dinámicos con capacidad de aprendizaje y generalización que más se aproximan al concepto de inteligencia.

- Planteamiento de un modelo basado en mecánica estadística que explique las bases biológicas de la inteligencia. Concretamente se tratará de construir un modelo que aporte explicaciones plausibles sobre los mecanismos necesarios para la emergencia de la inteligencia así como las diferencias cognitivas que se observan en la naturaleza entre las diferentes especies.

Antecedentes y Estado Actual de los Conocimientos Científico-Técnicos

Uno de los conceptos que tradicionalmente ha provocado mayor controversia y debate es sin lugar a dudas el concepto de inteligencia (Stanovich, 2009; Jensen, 1998; Eysenck, 1988; Flynn, 2007). Cabe destacar, entre otros, que una de las principales razones ha sido la variedad de definiciones que se han formulado al respecto (Sternberg & Kaufman, 2011) así como la discrepancia entre las mismas. Dicha complejidad ha hecho que los esfuerzos en investigación se hayan dirigido mayormente a la emulación de ciertos aspectos de la inteligencia más que en investigar propiamente los mecanismos que operan y permiten la aparición de la misma. Actualmente las teorías y modelos que existen al respecto provienen principalmente del campo de la psicología (Jung & Haier, 2007; Newman & Just, 2005; Garlick, 2002; Garlick, 2003), esto es, no existe actualmente, salvo opinión contraria, ningún modelo matemático que plasme o explique de manera clara el citado concepto o cuando menos sus principios.

No obstante, es importante resaltar la existencia toda una gran variedad de modelos que si bien no representan o dan cuenta de forma explícita del concepto de inteligencia lo hacen de alguna de sus características. Por ejemplo, en el campo de la neurociencia existen una infinidad de modelos (Hecht-Nielsen & Mackenna, 2003) que tratan de explicar algunos aspectos de las funciones cognitivas. En el campo de la mecánica estadística se estudiaron las propiedades de toda una serie de modelos (Mezard et al., 2004; Engel & Van den Broeck, 2001) de redes neuronales artificiales. De forma similar, en el área de investigación del aprendizaje de máquinas (Haykin, 1999; Bishop, 1997, 2006) se propusieron también una gran variedad de modelos (por ejemplo, de redes neuronales artificiales) que contaban, aunque de forma muy simplificada, con las características comunes a los sistemas biológicos inteligentes como son la capacidad de aprendizaje y generalización.

El modelo que plantea este proyecto de tesis, el cual suscribimos a lo largo de este escrito, incorpora, amén de tratarse de un modelo matemático propiamente dicho, una serie de novedades y mejoras sobre los modelos y teorías de inteligencia actuales. Tales mejoras descansan fundamentalmente sobre las hipótesis que se formulan a continuación:

- La comprensión de la inteligencia biológica, esto es, de las formas de inteligencia que pueden apreciarse en la naturaleza, entendemos, no puede realizarse sin un estudio detallado de los aspectos evolutivos asociados al substrato biológico de la misma, esto es al cerebro.

- El uso de un conjunto de técnicas recientes y avances en el campo de la matemática discreta las cuales aportan un nuevo enfoque a problemas matemáticos hasta ahora imposibles o muy difíciles de resolver mediante el uso de técnicas tradicionales de mecánica estadística.

Prólogo

La palabra inteligencia procede del latín “Intelligentiam” la cual describe cualquier habilidad, destreza, o facultad de entender con objeto de elegir las mejores opciones para resolver una situación. La inteligencia es la aptitud para crear relaciones, aprender y proyectar de los mamíferos superiores y especialmente del hombre (Sternberg & Kaufman, 2011). Por ejemplo, el campo de la Inteligencia Artificial arguye que para que un sistema pueda calificarse de inteligente, éste debe poseer habilidades cognitivas tales como razonar, planear, resolver problemas, capacidad de abstracción, comprender ideas, lenguajes y aprender. En este sentido, el concepto de inteligencia ha generado toda una serie de polémicas, y hasta muy recientemente las definiciones de ésta se centraban fundamentalmente en conceptos antropomórficos, esto es, se entendía la inteligencia como un concepto intrínseco al ser humano pero ajeno al resto de las especies.

No obstante, en términos generales, el concepto de inteligencia siempre puede interpretarse como un proceso emergente resultado de la interacción de componentes más simples (por ejemplo de las neuronas). Dentro de este contexto se desarrolla el presente proyecto, cuyo tema principal, como su título indica, versa sobre el análisis y estudio de las bases biológicas de la inteligencia entendida ésta como un proceso emergente. Este enfoque particular conlleva al planteamiento de modelos basados en técnicas de mecánica estadística (Chandler, 1989; Reichl, 1998). Concretamente, esta rama de la física tiene por objeto el tratar de explicar el comportamiento de sistemas compuestos por un gran número de partículas (se habla de sistemas macroscópicos) a partir de las características de sus elementos constituyentes microscópicos (las partículas).

Tras la presentación de tanto a teorías recientes de neurociencia evolutiva (Hecht-Nielsen, 2007; Canfield et al., 2007; Fike et al., 2006; Kerr, 2006) y antropología evolutiva (Tomasello, 2008) como a recientes teorías del campo de la psicología cognitiva centradas en torno al concepto de “Embodiment” , el cual, a grandes rasgos, viene a expresar la profunda acción que tiene el sistema motor en la cognición humana (Zwaan, 2004; Gallese and Lakoff, 2005; Glenberg and Kaschak, 2003; Vigliocco et al., 2004; Tyler and Moss, 2001; Simmons and Barsalou, 2003; Pulvermüller, 1999; Mahon and Caramazza, 2008; Patterson et al., 2007; Rogers et al., 2004), se propone un modelo que aporta luz a los mecanismos de base que fundamentan la emergencia de la inteligencia biológica, constituyendo éste el objetivo fundamental perseguido por el presente trabajo de investigación. En cuanto a la metodología se refiere se hace uso de un conjunto de técnicas recientes y avances en el campo de la matemática discreta (Flajolet and Sedgewick, 2009). Seguidamente, se pasa a describir las redes neuronales recursivas (Frasconi et al., 1998, Baldi & Rosen-Zvi, 2005;

Scarselli et al., 2005; Micheli et al., 2004; Bianchini et al., 2006) y como demostración práctica de las técnicas de matemática discreta utilizadas en el desarrollo del modelo, se aplican éstas en la reducción de la complejidad de la fase de aprendizaje de dichos modelos. Por último, los capítulos que componen cada uno de los puntos esbozados con anterioridad permitirán ir clarificando poco a poco, tal y como veremos, el bosquejo realizado sobre los objetivos definidos previamente.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción al Concepto de Inteligencia Biológica

La habilidad para relacionar diferentes fragmentos de información aparentemente no conectados de nuevas formas y aplicar los resultados de forma adaptativa se corresponde con una de las múltiples definiciones de inteligencia (Sternberg & Kaufman, 2011; Flynn, 2007). A pesar de que la naturaleza nos brinda múltiples ejemplos de inteligencia en una gran variedad de especies diferentes, no cabe duda que comparar sus capacidades cognitivas resulta una tarea complicada. (Striedter, 2005). Históricamente, uno de los marcadores de inteligencia para animales ha sido la habilidad de éstos para usar y/o crear herramientas, esto es, una especialización altamente compleja de la manipulación.

Los mamíferos y en especial los primates (Tomasello, 2008) poseen capacidades cognitivas remarcablemente sofisticadas como por ejemplo lenguaje, capacidad de planificación o de razonamiento cuando los comparamos con otras especies animales.

Quizás de forma sorprendente, los pájaros constituyen otra de las especies donde se han documentado múltiples ejemplos de inteligencia (Lefebvre & Nikolakakis, 2002; Emery & Clayton, 2004). A título ilustrativo, algunos cuervos y urracas son capaces de fabricar y utilizar herramientas, mientras que algunos loros son capaces de usar vocalizaciones aprendidas con objeto de etiquetar o clasificar objetos materiales. El pez arquero utiliza su boca y faringe para disparar chorritos de agua a insectos terrestres (Churchland & Sejnowski, 1992), en otras palabras, una forma elemental de uso de herramientas. Por otra parte, animales invertebrados tales como los pulpos son capaces de manipular objetos con sus tentáculos en formas y complejidad sorprendentes (Mather et al., 2010). Incluso, una abeja posee varias habilidades cognitivas que se creían solamente posibles en vertebrados superiores tales como: formas simples de aprendizaje de reglas y categorización (Menzel & Giurfa, 2001; Giurfa et al., 2001; Gould, 1986), procesos de atención (Zhang et al., 2004) o varios tipos de aprendizaje social (Leadbeater & Chittka, 2007; Mery et al., 2009).

1.2 Inteligencia y Evolución

De forma general, resulta evidente comprender que cualquier modificación evolutiva que aparece se realiza dentro del contexto de una arquitectura ya existente. Por lo tanto, desde el punto de vista del procesamiento de la información, el conjunto de sistemas nerviosos resultado del proceso evolutivo deben seguir ciertos principios comunes o regularidades fuertemente relacionadas con su microestructura y organización (Churchland & Sejnowski). Las teorías modernas de neurociencia evolutiva (Hecht-Nielsen, 2007; Canfield et al., 2007; Fike et al., 2006; Kerr, 2006) han postulado que el comportamiento inteligente en animales, esto es la cognición, emergió como una extensión filogenética del movimiento. Concretamente, desde un punto de vista

evolutivo, se ha demostrado recientemente que un aumento sostenido de la concentración de oxígeno en la atmósfera durante el periodo Cámbrico fue la razón de la proliferación de una innumerable cantidad de animales macroscópicos los cuales evolucionaron durante dicho periodo. La competición por comida y recursos hizo que el proceso evolutivo se orientara de manera muy rápida en la producción de organismos compuestos por una sofisticada maquinaria neuronal diseñada para poder mover el cuerpo de tales animales de forma apropiada ya que dichos organismos eran favorecidos cuando huían o luchaban contra depredadores o de cara a la obtención de presas. La extensa maquinaria neuronal desarrollada para el control del movimiento del animal podía expandirse de forma muy sencilla y servir para el control de nuevos módulos cerebrales. Sobre este particular, cuerpos discretos de tejido neuronal evolucionaron de forma muy específica con objeto de explotar los mecanismos pre-existentes diseñados para el control de músculos. No obstante, los procesos de “movimiento” asociados a dichos nuevos módulos cerebrales en lugar de conferir movilidad darían lugar a un nuevo tipo de procesamiento de la información, al cual denotamos actualmente como cognición o en el caso de los seres humanos como pensamiento.

1.3 Inteligencia y Embodiment

El concepto de “embodiment” proviene del campo de la psicología cognitiva y expresa la idea fundamental de que el sistema motor tiene una influencia capital en la cognición similar a la que ejerce la mente sobre las acciones que realiza nuestro cuerpo. Actualmente el campo de la psicología cognitiva nos brinda una ingente cantidad de teorías (Zwaan, 2004; Gallese & Lakoff, 2005; Glenberg & Kaschak, 2003; Vigliocco et al., 2004; Tyler & Moss, 2001; Simmons & Barsalou, 2003; Pulvermüller, 1999; Mahon & Caramazza, 2008; Paterson et al., 2007; Rogers et al., 2004) al respecto, las

cuales avalan la visión descrita con anterioridad sobre el proceso evolutivo de la cognición. En este sentido existen innumerables evidencias experimentales que dan cuenta de la mencionada visión de la cognición basada en el embodiment. Por ejemplo, en experimentos recientes sobre la profunda influencia del lenguaje en la acción y percepción (Pecher & Zwaan, 2005). En psicolingüística (Glenberg & Kaschak, 2002) se ha demostrado la existencia de la activación del sistema motor en sujetos en el momento de leer o pronunciar frases en las cuales el verbo implicara una acción, es decir, los datos avalan la teoría del embodiment con respecto al significado de una frase y su relación con activaciones en el sistema motor. Dichos trabajos son también consistentes con investigaciones del campo de la neurociencia sobre acción y lenguaje (Meteyard & Vigliocco, 2008), tales como la participación del sistema de neuronas espejo para el aprendizaje de acciones y del lenguaje (Rizzolatti & Arbib, 1998; Arbib, 2005).

Por otra parte, en neurociencia social (Rizzolatti & Craighero, 2004; Decety & Grèzes, 2006) demostraron que los primates humanos y no humanos perciben y entienden situaciones sociales mediante simulaciones en su sistema motor y afectivo con objeto de comprender situaciones sociales, generar empatía e involucrarse en otros procesos sociales. En lingüística, el enlace entre las propiedades del lenguaje y su relación con los procesos cognitivos asociados ha sido formalizada por teorías constructivistas y cognitivas (Talmy, 2000). Dentro de la línea argumental seguida hasta el momento resultan importantes ciertos estudios sobre inteligencia (Thelen & Smith, 1994; Smith, 2005; Smith & Gasser, 2005) los cuales demostraron que el entorno, el cuerpo y el sistema motor desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de la inteligencia. De forma general, todas las teorías anteriores comparten la idea de que el cerebro no es simplemente un sistema de almacenamiento de experiencias preceptuales

sino que la interpretación simbólica de dichas experiencias perceptuales es fundamental para poder desarrollar un comportamiento inteligente. Las operaciones simbólicas proporcionan a un sistema inteligente de una potencia considerable para interpretar sus experiencias. En este sentido, la cognición simbólica solamente es posible (ver De Vega et al., (2008) para una excelente discusión sobre este tópico) si la información sensorial y motora se transforma en un formato cualitativamente diferente, esto es, en símbolos de forma que éstos puedan ser manipulados por los procesos cognitivos. Como nota aclaratoria, la semántica no sería posible sin la capacidad para crear representaciones de conocimiento independientes del contexto. La tarea de conectar los símbolos o representaciones mentales, usadas en el razonamiento interno, con estímulos físicos externos o con otras representaciones internas de conocimiento recibe el nombre de asentamiento de representaciones simbólicas (del inglés “symbol grounding”), es decir, se trata del proceso a través del cual los símbolos adquieren significado. Como colofón a lo anterior, es importante enfatizar que la habilidad para representar el mundo o el entorno de forma simbólica y por consiguiente el pensamiento abstracto evolucionó a partir de formas más concretas de representación. Los animales (y en especial los primates) son capaces de representar el mundo en términos de registros generalizados de experiencias pasadas, los cuales les permiten reaccionar ante situaciones de una forma que sintetiza su experiencia con respecto de esa situación particular. En otras palabras, la forma con la cual los animales representan o crean representaciones simbólicas de su entorno en sus mentes sigue una secuencia ordenada, tanto filogenéticamente como ontogenéticamente hablando.

1.4 Hipótesis de Inteligencia con base en el Embodiment

Hallazgos recientes en el campo de la neurociencia (Pulvermüller & Knoblauch, 2009; Pulvermüller, 2003; Pulvermüller & Assadollahi, 2007) han demostrado la existencia de un mecanismo combinatorio discreto asociado a los circuitos neuronales del cerebro para el procesamiento del lenguaje. A decir verdad, hasta la aparición de los mencionados estudios, la neurociencia no había sido capaz de vislumbrar la habilidad del cerebro del ser humano para combinar de forma variable unidades discretas de significado en lo que podemos denominar “reglas” para la composición de estructuras de mayor orden, esto es, estructuras más complejas. Quizás lo más sorprendente de estos estudios es que revelaron que los detectores de secuencia constituían el circuito “plantilla” en la realización de tales operaciones combinatorias, como las necesarias para el procesamiento del lenguaje. De forma similar, desde un punto de vista de implementación física, la auto-asociatividad y la hetero-asociatividad se revelaron como una característica dominante en este tipo de circuitos.

La sorpresa queda patente si tenemos en cuenta que tales circuitos son comunes en el sistema nervioso de insectos, como por ejemplo los detectores de movimiento que posee el sistema visual de una mosca doméstica, aunque su implementación y complejidad a nivel neuronal difiera de la que podría encontrarse en el cerebro de los vertebrados. A pesar de todo, la arquitectura, por ejemplo, del sistema motor es similar en insectos y vertebrados (Orlovsky et al., 1999; Pearson, 1993). De hecho, la mayoría de los componentes moleculares de las neuronas como por ejemplo los canales de iones, neurotransmisores, proteínas etc se encuentran presentes tanto en vertebrados como en insectos (Chitkka & Niven, 2009). También es importante mencionar que la auto-

asociatividad y la hetero-asociatividad constituye una de las características dominantes en la circuitería del cerebro de los animales.

Los seres vivos empezaron a tener movilidad hace billones de años. El mecanismo para un control flexible y adaptativo de movimientos surgió de forma muy temprana y se expandió rápidamente, pero al mismo tiempo, es importante enfatizar que las modificaciones fruto del proceso evolutivo no pueden dismantelar una configuración existente y empezar de cero con un diseño mejor o simplemente utilizando mejores materiales (Churchland & Sejnowski, 1992). El principio más importante en el proceso de evolución del cerebro (Striedter, 2005) es que muchos aspectos de la estructura y funcionamiento cerebral se conservan entre especies, siendo las especies más próximas filogenéticamente hablando aquellas que conservan un mayor número de similitudes. Concretamente, el grado de conservación es mayor cuanto más bajo es el nivel de organización observado.

Por tanto, si asumimos que la mencionada reorganización evolutiva del movimiento fue la base de la cognición en los animales macroscópicos, parece plausible postular la existencia de un sistema de procesamiento común de la información en los sistemas nervioso superior de los animales fruto del proceso evolutivo. Sobre este particular, tales principios podrían estar fundamentados en un conjunto de operaciones combinatorias realizadas sobre representaciones de conocimiento las cuales tienen por objetivo la creación de estructuras de información o conocimiento mucho más complejas o dicho de otra forma de niveles de abstracción superior. Esta última afirmación constituye la hipótesis de inteligencia animal con base en el embodiment mientras que las hipotéticas operaciones combinatorias se denotarán en lo sucesivo como primitivas de movimiento para hacer énfasis en la visión de la inteligencia como una extensión filogenética del movimiento (Hecht-Nielsen, 2007). Argumentos

adicionales a favor de la hipótesis formulada provienen del campo de la biología experimental (Wolf, 2011; Steck et al., 2009) donde se ha demostrado recientemente que incluso insectos como las hormigas del desierto (*Cataglyphis fortis*) son capaces de realizar tareas consideradas como de alto nivel cognitivo como contar de una manera robusta. De hecho, habilidades numéricas básicas también se habían encontrado con anterioridad en abejas (Dacke & Srinivasan, 2008).

Por otra parte, resulta particularmente sorprendente observar que las operaciones realizadas por el sistema nervioso de cualquier animal se encuentran limitadas por los recursos energéticos disponibles y en ese sentido los cerebros fruto del proceso evolutivo son extremadamente eficientes (Churchland & Sejnowski, 1992). El procesamiento de información llevado a cabo por las neuronas resulta caro desde el punto de vista metabólico. Por tanto, si la cantidad de recursos metabólicos es limitada no resulta difícil postular que tanto las neuronas, los códigos empleados por las neuronas para transmitir información y los circuitos neuronales podrían haber evolucionado en aras de reducir los costes metabólicos. En este sentido existen estudios que avalan la hipótesis anterior, a saber, la profunda influencia de la eficiencia metabólica en los códigos de codificación de la información (Laughlin et al., 1998; Niven & Laughlin, 2008). Sobre este particular, según Levy y Baxter (1996) la minimización de los costes metabólicos promueve la distribución de señales sobre una población de neuronas débilmente activas. Queda patente, por tanto, la enorme importancia que tiene la eficiencia en relación con las capacidades cognitivas o el grado de inteligencia que podemos esperar de un determinado organismo. En este sentido, el argumento de la eficiencia cerebral no es nuevo y de hecho forma parte de las teorías modernas de inteligencia (Jung & Haier, 2007; Newman & Just, 2005; Garlick, 2002, 2003). A título ilustrativo, estudios sobre inteligencia humana realizados con la técnica

de tomografía por emisión de positrones (PET) mostraron que individuos que obtenían puntuaciones muy altas en las pruebas de inteligencia, en otras palabras, individuos con coeficientes intelectuales (IQ) altos, poseían cerebros que consumían menos energía y consecuentemente menos glucosa que en el caso de los individuos con coeficientes intelectuales más bajos (Haier et al., 1988). De forma similar, estudios llevados a cabo con la técnica de electroencefalografía (EEG) demostraron de forma sistemática que los individuos más inteligentes exhibían una activación cortical más concentrada así como una menor activación global, con respecto a individuos menos inteligentes (Neubauer & Fink, 2005). En este sentido, un conjunto de estudios realizados con objeto de vislumbrar los efectos del aprendizaje en la eficiencia cerebral revelaron que se producía de forma sistemática una disminución de la actividad cerebral en algunas áreas después de un proceso de aprendizaje (Haier et al, 2003, 2008, 2009, 1992a, b, 1993). Concretamente, la disminución global en la actividad cerebral después del aprendizaje era observada independientemente del coeficiente intelectual del sujeto, aunque en los individuos con coeficientes intelectuales más altos mostraron la mayor eficiencia con el proceso de aprendizaje, es decir, la mayor disminución en la actividad cerebral o lo que es lo mismo un menor consumo global de glucosa. Estos estudios dan fe de la importancia del concepto de eficiencia en su relación con la inteligencia, en otras palabras, la importancia de la hipótesis de la eficiencia como elemento clave dentro del concepto de inteligencia biológica.

Por consiguiente, de acuerdo con esta visión particular de la inteligencia, las propiedades computacionales que emergen a nivel macroscópico como consecuencia de la hipótesis formulada son también estudiadas con objeto de evaluar si éstas proporcionan alguna pista sobre el género o tipo de operaciones computacionales adoptado por los sistemas nerviosos resultado del proceso evolutivo.

1.5 Conclusiones

Sin lugar a dudas, la neurociencia evolutiva ha estado dominada principalmente por el principio de conservación filogenética, a saber, por la búsqueda de similitudes en organización cerebral. Este principio postula que las especies con ancestros comunes guardan un cierto grado de parecido o similitud entre las mismas. Sin embargo, explicar, por ejemplo las diferencias cognitivas entre seres humanos y chimpancés se ha revelado como una tarea, cuando menos, extremadamente compleja. En este capítulo hemos planteado la hipótesis de un principio de procesamiento común de la información presente en el cerebro de vertebrados e invertebrados fruto del proceso evolutivo, el cual tiene su base en el principio de conservación filogenética.

En aras de comprobar la validez de la hipótesis en el siguiente capítulo presentamos un modelo que combina los avances recientes en psicología cognitiva y neurociencia evolutiva presentados en este capítulo introductorio. Posteriormente, los efectos macroscópicos derivados de las estructuras de inteligencia propuestas por el modelo se analizan desde el punto de vista ofrecido por la mecánica estadística. Tal y como veremos, como resultado de dicho análisis seremos capaces de explicar las similitudes y discrepancias en los niveles cognitivos o de inteligencia que podemos observar en la naturaleza a través de las diferentes especies animales, amén de ofrecer una explicación razonable relativa a la eficiencia de las computaciones realizadas por el cerebro.

Capítulo 2

Planteamiento y Desarrollo del Modelo

2.1 Introducción

A partir de la visión expuesta en el capítulo anterior, los principios y/o mecanismos básico de la cognición son idénticos en las diferentes especies de vertebrados y posiblemente también en invertebrados tales como cefalópodos e insectos, aunque la implementación neuronal de tales principios varíe considerablemente. A modo de recordatorio, la postulada reorganización del movimiento (Hecht-Nielsen, 2007) se describió en términos de operaciones combinatorias realizadas sobre representaciones simbólicas de conocimiento. Dichas operaciones combinatorias se denotaron con el nombre de primitivas de movimiento, basándonos en el principio de conservación filogenético, y con objeto de reflejar el hecho de que se trata de un mecanismo que ha sido conservado por el proceso evolutivo, esto es, que ha sido heredado de animales primitivos.

Con objeto de investigar de una manera más formal las ideas e hipótesis introducidas hasta el momento, seguidamente presentamos unas estructuras simbólicas organizadas de forma jerárquica de tamaño y complejidad variables con objeto de modelar ciertas diferencias neurobiológicas que existen en las especies como consecuencia del proceso evolutivo. Tal y como veremos, la característica más notable de dichas estructuras la constituye las interacciones entre símbolos, las cuales reflejan el concepto representado por las primitivas de movimiento. Seguidamente presentaremos una formulación basada en mecánica estadística con la finalidad de estudiar las capacidades, desde el punto de vista del procesamiento de la información y también para tratar de vislumbrar, en la medida de lo posible, los principios computacionales que emergen a nivel macroscópico.

2.2 Definiendo el Modelo: Aspectos Estructurales

Estudios llevados a cabo en el campo de la psicología cognitiva (Leyton, 1986a,b) hace ya casi tres décadas demostraron que el sistema perceptivo en los seres humanos organiza cualquier estímulo percibido de forma generativa, esto es, en términos de una jerarquía de transferencia recursiva. Concretamente los estudios de Leyton demostraron como el sistema perceptivo humano al percibir un cuadrado (ver figura 2.1) lo hace considerando a éste como múltiples estados (posiciones) de un “lado” de dicho cuadrado, y previamente un “lado” del cuadrado a su vez se interpreta como los múltiples estados (posiciones) de un punto. En otras palabras, para reconocer un cuadrado, el sistema perceptivo infiere internamente (identifica) un lado del cuadrado (una línea) como las translaciones sucesivas de un punto. Seguidamente, una vez que el sistema perceptivo ha reconocido el objeto lado, esto es, una línea, el sistema perceptivo infiere internamente el cuadrado mediante rotaciones sucesivas del objeto lado hasta la

completa generación de la forma del cuadrado. A título ilustrativo, la figura 2.1 muestra el proceso descrito, correspondiente al experimento generativo del cuadrado, de forma esquemática, el cual tendemos a pensar que es un objeto, o al menos lo reconocemos o percibimos como tal, en realidad nuestro sistema perceptivo lo interpreta como un conjunto de acciones. A saber, el cuadrado es generado (reconocido) por el sistema perceptivo paulatinamente a partir de cuatro rotaciones de uno de sus lados (es lo que representamos en la parte superior de la figura). No obstante, tal y como comentamos con anterioridad, lo que a su vez percibimos o interpretamos como otro objeto, esto es, el lado del cuadrado, se representa internamente como translaciones de un punto. En resumen, el sistema perceptivo identifica la forma del cuadrado generativamente a través de un proceso de inferencia que determina el conjunto de acciones necesarias para generarlo.

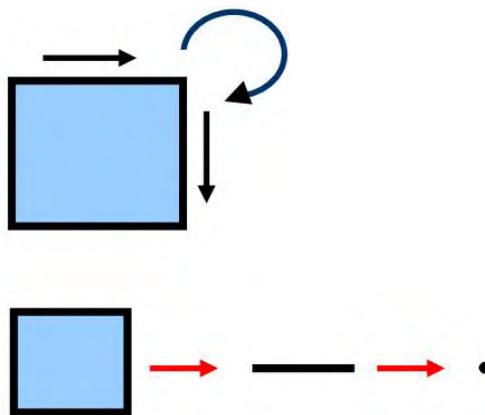


Figura 2.1. Proceso de inferencia y de transferencia realizado por el sistema perceptivo humano. El sistema de visión humano representa el cuadrado generativamente.

Estos experimentos son de un interés particular dado que éstos reflejan la visión postulada de la cognición basada en el concepto de primitivas de movimiento. En particular, objetos diferentes, esto es, estímulos diferentes pueden ser tanto reconocidos como aprendidos como reconfiguraciones basadas en movimientos (por ejemplo,

rotaciones y translaciones) de representaciones de objetos más básicos, esto es, en términos de conocimiento ya adquirido y/o integrados (recordemos una vez más el ejemplo anterior relativo al experimento generativo del cuadrado). De este modo, el concepto de primitivas de movimiento debe interpretarse en estos términos. La reorganización evolutiva del movimiento la modelaremos mediante permutaciones realizadas sobre representaciones simbólicas, esto es, conocimiento. De forma similar al movimiento de un cuerpo, el cual siempre puede expresarse en términos de translaciones y rotaciones, la diferencia entre dos permutaciones arbitrarias también puede siempre expresarse en términos de operaciones de translación y rotación. A título ilustrativo, la permutación simbólica “bcda” puede obtenerse a partir de la permutación “cbad” mediante dos rotaciones de símbolos (letras en este ejemplo) que componen la permutación original.

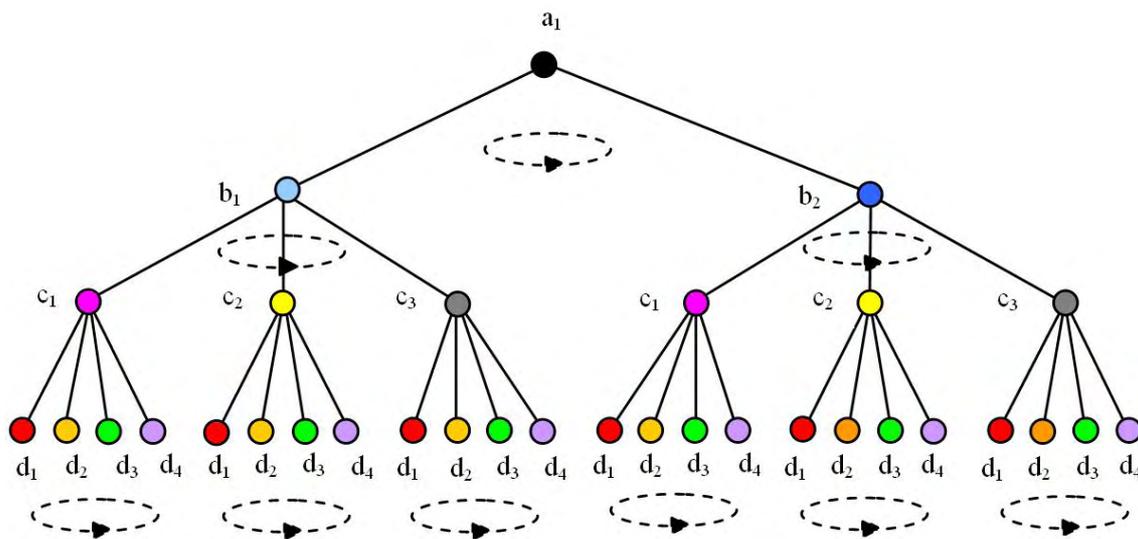


Figura 2.2. Ejemplo de una estructura simbólica usada en el modelo para capturar algunas de las características de procesamiento de la información comunes a las operaciones cognitivas del cerebro. Los nodos de la estructura representan símbolos, es decir, representaciones de conocimiento codificadas como estados de redes atractoras. Cada nivel del árbol está asociado con un nivel de procesamiento de la información el cual se haya en correspondencia directa con estructuras neuroanatómicas específicas (por ejemplo, capas). Las flechas circulares representan las operaciones combinatorias (primitivas de movimiento) comunes a las funciones cognitivas cerebrales las cuales se ha postulado que se han conservado a lo largo del proceso evolutivo.

La figura 2.2 presenta un posible ejemplo de las estructuras que pretenden modelar algunos aspectos de las funciones cognitivas en relación con la hipótesis formulada sobre la inteligencia biológica. Dichas estructuras representan una organización jerárquica de símbolos con interacciones muy específicas. La organización jerárquica refleja la idea de que el conocimiento se organiza de forma jerárquica. Los nodos de la estructura representan símbolos, donde cada símbolo se representa mediante una letra con un índice numérico y han de interpretarse como entidades físicas que codifican una cierta cantidad de información. El objetivo de estas estructuras es el de capturar, con un cierto nivel de abstracción, los aspectos más relevantes asociados a los principios de organización de la información a los que atiende la hipótesis formulada. Seguidamente pasamos a describir los detalles necesarios para comprender como árboles de símbolos de diferente complejidad y con interacciones simbólicas específicas se mapean en estructuras fisiológicas concreta junto con las operaciones cognitivas realizadas por éstas. En primer lugar y a modo de inciso, recordemos que dichas estructuras modelaban operaciones cognitivas en las estructuras cerebrales que emergieron como consecuencia de la hipótesis de reorganización del movimiento. Dicha precisión nos lleva a considerar al neocortex y sus homólogos, esto es, estructuras similares al neocortex desde el punto de vista funcional existentes en otras especies, como las estructuras cerebrales más plausibles. Desde el punto de vista evolutivo estas estructuras son relativamente recientes y presentan además el patrón de conectividad sugerido en base a las evidencias empíricas presentadas en el capítulo introductorio.

Por otra parte, los parámetros que definen tales estructuras son el número de niveles o profundidad de las estructuras del árbol, el cual se encuentra acotado finitamente, y el factor de bifurcación asociado a cada nivel, el cual controla la cantidad

de símbolos de más bajo nivel que participan en la manipulación de un símbolo en el nivel inmediatamente superior. En otras palabras, describe la conectividad entre representaciones de conocimiento. La profundidad de las estructuras representa la idea de varios niveles de procesamiento de la información. En este sentido es importante comentar que la evolución favoreció la aparición de estructuras laminares en el cerebro. Concretamente, las susodichas láminas o capas de las estructuras cerebrales guardan relación con diferentes niveles de procesamiento de la información. Los procesos de laminación (aparición de capas en las estructuras cerebrales) tienden a minimizar las longitudes del conexionado entre neuronas, y ello a su vez, conserva espacio y energía la cual empieza a ser cada vez más limitada en la medida que el número de neuronas se incrementaba en las estructuras cerebrales fruto del proceso evolutivo (Murre & Sturdy, 1995). De forma similar, la laminación permitió formas temporales precisas de procesamiento de la información que son muy difíciles de realizar en estructuras no laminares. A título ilustrativo, en mamíferos terrestres el neocortex es una estructura de 6 capas (Nieuwenhuys et al., 2008). En cetáceos (delfines, ballenas y marsopas) el neocortex es una estructura de 5 capas (Butti et al., 2011; Perrin et al., 2002). Paralelamente, en el caso de los anfibios, estudios en el campo de la neurociencia evolutiva (Striedter, 2005) revelaron que el pallium dorsal del cerebro anfibio es la estructura más plausible como homólogo del neocortex de los mamíferos y se trata de una estructura de 2 capas. De forma similar, aves y reptiles comparten una estructura de 3 capas denominada el ventrículo dorsal serrado (del inglés “dorsal ventricular ridge” y el cual denotaremos en lo sucesivo mediante las siglas DVR) la cual se cree realiza funciones similares a la del neocortex de los mamíferos, esto es, se trata de la estructura homóloga al cortex en aves y reptiles. Como curiosidad, parece importante señalar que el DVR se encuentra particularmente desarrollado en las aves cuando comparamos con

los reptiles siendo esta estructura enorme desde el punto de vista relativo en búhos y cuervos, esto es, en aves que son particularmente inteligentes. Dentro del contexto del modelo se asume que el número de niveles de procesamiento de la información es una función del número físico de capas asociadas a las mencionadas estructuras neuroanatómicas.

También es importante mencionar que la capacidad o habilidad para exhibir un comportamiento inteligente en una especie concreta se encuentra en concordancia con aquellas especies con cerebros relativamente grandes y complejos. Es importante hacer un inciso para comentar que el término “cerebro relativamente grande” será utilizado de aquí en adelante para reflejar que la creencia intuitiva que nos hace pensar que las especies con cerebros más grandes son las más inteligentes sólo es parcialmente cierta (Striedter, 2005). Por otra parte, el tamaño relativo y la complejidad de las mencionadas estructuras neuroanatómicas se representa de forma abstracta en función del número de símbolos y su conectividad, esto es, el factor de bifurcación de las estructuras jerárquicas definidas por el modelo. Concretamente, el número de símbolos proporciona una estimación razonable de la potencia descriptiva o capacidad de representación de una estructura y por tanto de la potencia cognitiva de la estructura neuroanatómica modelada. Intuitivamente, cuanto mayor es el tamaño relativo de las mencionadas estructuras neuroanatómicas mayor es la cantidad de símbolos que éstas implementan, sobre este particular los símbolos se encuentran distribuidos a lo largo de dichas estructuras dado que éstos físicamente se encuentran implementados, como los puntos fijos o “atractores”, en terminología de física no lineal, de las redes neuronales que las componen, es decir, como estados diferentes en los que pueden encontrarse dichas redes formadas por pequeñas asambleas de neuronas. Por otra parte, llegados a este punto es importante comentar que una instancia propiamente dicha de los árboles simbólicos que

pretende reflejar la figura 2.2 se corresponderían de forma simplificada (a modo de abstracción) con las jerarquías temporales y espaciales de activación que pueden observarse, por ejemplo, en el neocórtex de cualquier ser humano haciendo uso de técnicas de resonancia magnética funcional, esto es, en las estructuras neuroanatómicas postuladas. El modelo considera a los símbolos como representaciones del conocimiento, independientemente de si dichas representaciones de conocimiento se encuentran directa o indirectamente enlazadas a experiencias perceptivas. De este modo, dentro del contexto que nos ocupa los símbolos codifican no solamente estímulos externos sino también representaciones internas de conocimiento. Tal y como hemos comentado previamente, los símbolos se encuentran organizados de forma jerárquica, donde el número de símbolos que cuelgan de un nodo concreto es idéntico para los nodos pertenecientes a ese mismo nivel de procesamiento de la información de la estructura. Desde un punto de vista de implementación física, tal y como comentamos con anterioridad los símbolos han de interpretarse como los estados de redes neuronales atractoras. Recordemos que la característica fundamental de los circuitos o redes neuronales “plantilla” mencionados en el capítulo introductorio, encargados de combinar unidades discretas de conocimiento, era la auto-asociatividad, esto es, se trata de redes muy robustas al ruido y que codifican la información en forma de puntos fijos dentro del espacio de parámetros que describiría la evolución dinámica de las mismas.

Sobre este particular, y como curiosidad al respecto, es importante mencionar que algunos de dichos estados vienen determinados genéticamente, activándose sólo ante la presencia de estímulos muy específicos. Por ejemplo, experimentos realizados con niños de muy corta edad demostraron que los seres humanos han codificado genéticamente la predisposición a asociar serpientes con miedo (LoBue & DeLoache,

2008; Masataka et al., 2010), esto es, a generar una respuesta de estrés que nos alerta de un peligro inminente.

El proceso de representación de un estímulo externo en función de símbolos y también la generación de representaciones simbólicas más complejas de conocimiento hace uso del concepto de las primitivas de movimiento. Recordemos que las operaciones simbólicas asociadas a las primitivas de movimiento consistían en la realización de permutaciones arbitrarias (este hecho se simboliza en la figura 2.2 mediante las flechas circulares) sobre el conjunto de nodos hijo o en otras palabras, representaciones más complejas de conocimiento son creadas combinando representaciones de conocimiento más simples. También, es importante volver a señalar que la organización jerárquica de las estructuras refleja la idea de que el conocimiento se encuentra organizado jerárquicamente. Concretamente, los símbolos pertenecientes a niveles altos en la jerarquía están representados mediante permutaciones de símbolos de niveles inferiores. Paralelamente, el conocimiento proveniente de las entradas sensoriales se asume que se codifica en los nodos hoja, los cuales representan también símbolos, de las estructuras jerárquicas en forma de árbol presentadas. Por el contrario, las representaciones más profundas de conocimiento se modelan mediante símbolos cercanos al nodo raíz del árbol. La idea principal es cualquier instancia particular de una estructura de dichas características experimenta cambios que obedecen a las operaciones simbólicas representadas mediante el concepto de primitivas de movimiento. Las mencionadas operaciones simbólicas de “movimiento” se ejecutan en paralelo y son el resultado de un flujo de información entre los nodos que comprenden la estructura el cual se encuentra controlado por estructuras sub-corticales. En este sentido es importante comentar que la conectividad entre representaciones simbólicas, esto es, el factor de bifurcación asociado a cada nivel de las estructuras varía según las

particularidades de la función cognitiva involucrada en el proceso. Además, tal y como comentamos con anterioridad, la profundidad de las estructuras en el modelo también varía con objeto de tener en cuenta las diferencias neurobiológicas entre especies las cuales se traducen en diferentes niveles de procesamiento de la información. Por otra parte, se asume que dicho mecanismo es compartido por diferentes procesos cognitivos incluyendo percepción, memoria implícita, memoria de trabajo, memoria a largo plazo y conocimiento conceptual entre otros. En otras palabras, cualquier función cognitiva hace uso de los susodichos principios. Por ejemplo, una tarea cognitiva superior como la planificación puede interpretarse como un intento de encontrar una ordenación de símbolos dentro del universo cognitivo del animal. Dicha ordenación óptima vendría expresada como una configuración particular de una jerarquía de símbolos como la representada en la figura 2.2. Partiendo de una configuración de partida la estructura iría cambiando paulatinamente y en paralelo las configuraciones locales de sus símbolos a través de los mecanismos combinatorios ya descritos (primitivas de movimiento) hasta alcanzar una configuración final que representaría la realización de la tarea. Por tanto, esto significa que las representaciones de conocimiento, esto es, símbolos se aprenden, se almacenan y se recuerdan siguiendo los mecanismos ya descritos con anterioridad. Por ejemplo, el mecanismo por el cual los símbolos se asientan, esto es, adquieren significado también hace uso de las primitivas de movimiento, es decir, una representación más abstracta de conocimiento se crea a partir de un conjunto de reglas modeladas en términos de las primitivas de movimiento que manipulan representaciones más sencillas de conocimiento. De forma similar, la activación de un símbolo bien sea como consecuencia de un estímulo externo o bien como resultado de la activación de otra representación interna de conocimiento da lugar a que se rememore o simule la secuencia generativa que dió lugar a la creación del mismo, esto es, en base

a combinaciones de representaciones más simples de conocimiento. A su vez, tal y como veremos en el próximo capítulo, el aprendizaje se interpreta como una optimización del número de operaciones combinatorias necesarias para la expresión del conjunto de símbolos implicados en la tarea de aprendizaje en cuestión.

En resumen, el modelo teórico propuesto no pretende proporcionar una explicación completa de la cognición, sino capturar los aspectos más relevantes de la hipótesis de inteligencia animal con base en el embodiment para permitir la evaluación de la misma. Llegados a este punto de la exposición, estimamos conveniente volver a recordar que el objetivo fundamental es el de vislumbrar si la inteligencia animal puede explicarse como un fenómeno emergente resultado de una gran número de interacciones simbólicas basadas en el concepto de primitivas de movimiento. Con este fin, se hará uso de una formulación basada en mecánica estadística dado que ésta permite realizar predicciones a nivel macroscópico del comportamiento de un sistema a partir de las interacciones a nivel microscópico de los elementos constituyentes del sistema, esto es, partículas, átomos, moléculas o símbolos en nuestro caso.

Seguidamente, la idea a desarrollar consiste en estudiar el contenido de información resultante en las estructuras simbólicas presentadas como una manifestación colectiva del número casi infinito de grados de libertad microscópicos representados por las configuraciones de símbolos (en nuestro caso los símbolos son los constituyentes del sistema físico a estudiar). Con este fin, se usará la entropía como una medida aproximada al concepto de inteligencia. Intuitivamente, dado que las estructuras simbólicas presentadas están modelando operaciones cognitivas, cuanto mayor sea el contenido de información de las estructuras, esto es, su entropía mayor será el nivel de inteligencia que se les puede asociar a las mismas. Paralelamente, se calculará también la energía libre de dichas estructuras, a saber, la interpretación de este concepto

enraizado en mecánica estadística se usará dentro del contexto del modelo para analizar las propiedades computacionales que emergen a escala macroscópica como resultado de las interacciones simbólica propuestas. Los resultados teóricos se utilizarán para generar predicciones de forma cuantitativa de las capacidades cognitivas observadas en la naturaleza en las diferentes especies, proporcionando al mismo tiempo explicaciones plausibles sobre el género computacional adoptado por el cerebro animal fruto del proceso evolutivo.

2.3 Formulación Basada en Mecánica Estadística

La mecánica estadística (Chandler, 1987; Reichl, 1998) constituye uno de los grandes campos en el panorama de investigación actual donde ha encontrado innumerables aplicaciones desde la optimización combinatoria (Hartmann & Weigt, 2005), el aprendizaje de máquinas (Engel & Van den Broeck, 2001), o en neuroeconomía (Bourgine & Nadal, 2004) entre otros. Dentro del contexto del modelo presentado en la sección anterior, las estructuras simbólicas introducidas pueden representarse como una jerarquía de variables multi-estado tal y como se ilustra en la figura 2.3.

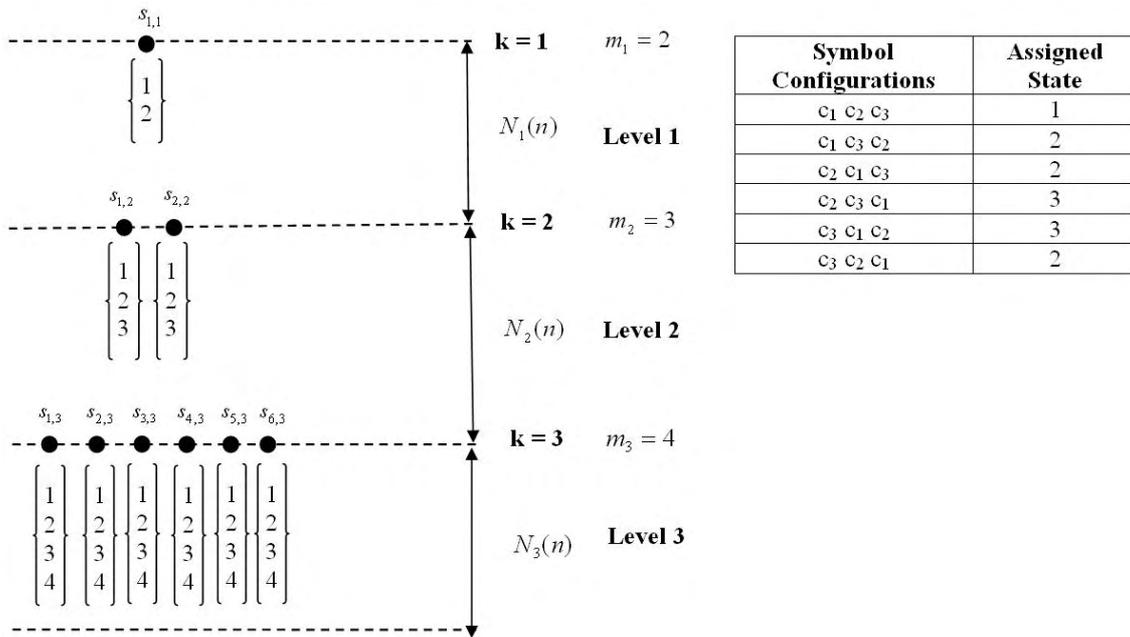


Figura 2.3. Representación de la estructura de la figura 2.2 en términos de variables multi-estado. El factor de bifurcación asociado con cada uno de los niveles que componen la estructura determina el número de estados asociados a las variables multi-estado los cuales se representan entre llaves. Paralelamente, el número de nodos asociado a cada uno de los niveles de la estructura dibujada determina el número de variables multi-estado perteneciente a cada uno de los niveles que componen la estructura. A la derecha de la figura se muestra una tabla que ilustra el mapeo entre configuraciones de símbolos y estados de energía para una permutación de tamaño 3.

En dicha figura cada nivel se representa por un cierto número de variables las cuales pueden encontrarse en un número de estados finito, los cuales se indican entre llaves. La cardinalidad del conjunto de estados se encuentra en relación directa con el factor de bifurcación asociado a cada nivel al cual la variable multi-estado pertenece. Concretamente, la estructura de la figura 2.3 posee 3 niveles, el primer nivel lo constituye el nodo raíz del árbol el cual contiene una única variable multi-estado $s_{1,1}$ la cual puede estar en dos estados tal y como indica el factor de bifurcación m_1 que es igual a 2. El segundo nivel posee 2 variables multi-estado $s_{1,2}$ y $s_{2,2}$ y el número de estados $m_2 = 3$. Finalmente, el tercer nivel posee 6 variables multi-estado las cuales pueden estar en 4 estados (m_3). De forma similar, la variable multi-estado $s_{1,2}$ se

correspondería con el símbolo b_1 y pertenece al segundo nivel de la estructura ($k = 2$). El símbolo b_1 está conectado a los símbolos c_1 , c_2 y c_3 . De acuerdo con el esquema propuesto en la sección anterior existen $m_2!$ configuraciones posibles de símbolos. La configuración de símbolos correspondiente al estado de reposo se representa mediante la permutación de punto fijo, esto es, el subíndice asociado con cualquiera de los símbolos se encuentra en concordancia con su posición relativa, por ejemplo la permutación $c_1c_2c_3$. Por otra parte, el mecanismo de asignación de configuraciones de símbolos a estados de las variables multi-estado se basa en la idea de que mover al sistema de su estado de reposo conlleva un coste energético asociado. Cada estado viene representado por un valor entero el cual indica el coste energético asociado. Cuanto mayor es la energía del estado mayor es el valor de energía asociado, esto es, el valor entero asociado. La configuración del estado de reposo siempre tiene como valor de energía asociado el 1. Además es importante comentar que los estados asociados a las variables multi-estados son degenerados ya que el número de configuraciones posibles de símbolos es mayor que la cardinalidad de su conjunto de estados.

2.4 El Modelo de Energía

La idea principal en mecánica estadística es que cada configuración microscópica C , a saber, la posición de las partículas, orientaciones de espines o las configuraciones de símbolos en el caso que nos ocupa se les asigna una probabilidad $p(C)$ la cual depende de su energía $H(C)$ la cual se expresa en términos de la distribución de Boltzmann-Gibbs. En este sentido, la función de partición del sistema se define como el factor de normalización de dicha distribución y éste puede interpretarse como una función generadora de energías (Hartmann & Weigt, 2005):

$$Z = \sum_C e^{-\beta H(C)} = \sum_n N(n) e^{-\beta n} \quad (2.1)$$

En la expresión anterior β es igual al inverso de la temperatura T mientras que $N(n)$ representa el número de configuraciones C que poseen un valor de energía exactamente igual a n , esto es, $n = H(C)$. Por consiguiente, la función de energía $H(C)$ se define en función de la ordenación particular de los símbolos en la estructura. Concretamente, en función de los estados asociados a las variables multi-estado. También es importante mencionar que el modelo de energía es aditivo tratando de reflejar las evidencias empíricas que avalan el hecho de que las operaciones realizadas por el sistema nervioso de cualquier animal están limitadas por el consumo energético. Esta es la razón por la cual un movimiento de una permutación de símbolos a otra tiene un coste energético proporcional a la distancia con respecto de la configuración de reposo, puesto que bajo la formulación de mecánica estadística, la distribución de Boltzmann-Gibbs nos indica que los sistemas físicos “prefieren” visitar los estados de baja energía que los de alta energía. De este modo, la energía se expresa como el sumatorio de los valores de energía locales asociados a cada una de las variables multi-estado que modelan una estructura completa.

Por otra parte, el mecanismo de asignación de configuraciones locales de símbolos a las variables multi-estado, esto es, los valores de energía locales, se describe en la parte derecha de la figura 2.3 y se basa en la idea comentada previamente sobre que desplazar al sistema de su configuración de reposo (representada por la permutación de punto fijo) tiene un coste energético. Dicho coste se define en términos de la distancia de la configuración local de símbolos con respecto de la configuración de símbolos asociada a la posición de reposo. Concretamente, la función de distancia da

cuenta del número de discrepancias en las posiciones de los símbolos con respecto de la permutación de punto fijo (por ejemplo, $c_1c_2c_3$ o también $d_1d_2d_3d_4$). A título ilustrativo, para la configuración $c_1c_3c_2$ existen dos discrepancias: el símbolo c_3 se encuentra en la posición 2 y el símbolo c_2 se encuentra en la posición 3. De forma similar, existen también dos discrepancias para la configuración $c_2c_1c_3$ y tres para la configuración $c_3c_1c_2$. Por otra parte, es importante comentar que en mecánica estadística (Chandler, 1987; Reichl, 1998) se define la temperatura de cualquier sistema físico como la derivada de la energía con respecto de la entropía. Aunque el concepto de calor no forma parte del modelo, la entropía en el modelo puede justificarse desde un punto de teoría de la información. Concretamente, el sistema bajo estudio contiene información la cual se representa mediante símbolos y operaciones simbólicas. De forma similar, el modelo físico descrito posee una función de energía. Por lo tanto, el concepto de temperatura puede aplicarse en este contexto incluso cuando el modelo no guarde relación con los sistemas físicos (por ejemplo, los átomos o las moléculas de un gas) donde se formuló por primera vez este concepto termodinámico.

Además, con objeto de calcular la cuenta $N(n)$ es conveniente formular el problema desde el punto de vista de la analítica combinatoria (Flajolet & Sedgewick, 2009). Concretamente, la estructura auto-similar del modelo representado en la figura 2.3 puede explotarse mediante la descomposición del cálculo por niveles. En este sentido si denotamos como $N_k(n)$ la secuencia contadora de la clase combinatoria N_k (se ruega al lector consultar el apéndice A para recavar información sobre las definiciones y la notación seguida en el desarrollo subsiguiente, así como el apéndice B para consultar los desarrollos asociados en la obtención de la mayoría de ecuaciones que se muestran en el presente capítulo) que da cuenta de los valores de energía asociados al

nivel k-ésimo, es fácil deducir que la cuenta total $N(n)$ puede expresarse en términos de la convolución:

$$N(n) = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \sum_{n_3=0}^{n-n_1-n_2} \dots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}} N_1(n_1)N_2(n_2)N_3(n_3)\dots N_k(n_k) \quad (2.2)$$

Por consiguiente, la función generadora asociada a la cuenta $N(n)$ se expresa mediante el producto de las funciones generadoras asociadas a las clases combinatorias que describen el número de configuraciones de símbolos para los valores de energía asociados con cada uno de los niveles que componen las estructuras. El primer paso para calcular la forma de las funciones generadoras $N_k(u)$ es obtener una expresión de la función generadora asociada al mapeo entre configuraciones de símbolos y las variables multi-estado. Denotemos dicha clase combinatoria como A. Se puede demostrar que la secuencia contadora A_m^l que expresa dichos mapeos tiene por expresión:

$$A_m^l = \begin{cases} 1 & l = 1 \\ \binom{m}{l} A_l^l & 1 < l \leq m \end{cases} \quad (2.3)$$

Donde los coeficientes A_l^l vienen dados por la expresión:

$$A_l^l = \sum_{j=2}^l (-1)^j \frac{l!}{j!} \quad (2.4)$$

De forma más específica el coeficiente A_m^l describe el número de configuraciones de símbolos asociadas con el estado l para una variable multi-estado de m estados. Si

suponemos que el nivel k -ésimo de una estructura genérica contiene j variables multi-estado de m estados, la función generadora asociada a la clase combinatoria N_k puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 N_k(u) &= \sum_{n_1}^m \sum_{n_2}^m \sum_{n_3}^m \dots \sum_{n_j}^m A_{m,n_1} A_{m,n_2} A_{m,n_3} \dots A_{m,n_j} u^{n_1+n_2+n_3+\dots+n_j} = \\
 &= \left(\sum_{n_1}^m A_{m,n_1} u^{n_1} \right) \left(\sum_{n_2}^m A_{m,n_2} u^{n_2} \right) \left(\sum_{n_3}^m A_{m,n_3} u^{n_3} \right) \dots \left(\sum_{n_j}^m A_{m,n_j} u^{n_j} \right) = [A_m(u)]^j
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

El resultado obtenido en la expresión (2.5) nos permite expresar la función generadora asociada a la función de energía para una estructura de k niveles como:

$$N(u) = A_{m_1}(u) A_{m_2}(u)^{m_1} A_{m_3}(u)^{m_1 m_2} \dots A_{m_k}(u)^{m_1 m_2 m_3 \dots m_{k-1}} \tag{2.6}$$

En la expresión anterior las variables m_i se corresponden a los factores de bifurcación del nivel i donde $1 \leq i \leq k$. Como puede deducirse el procedimiento de extracción de coeficientes para la expresión (2.5) se complica por la presencia del desorden introducido por los parámetros estructurales m_i (factores de bifurcación) y k (profundidad de las estructuras). Los susodichos parámetros pueden considerarse desde un punto de vista práctico como variables aleatorias, esto es, variables congeladas en la terminología de física estadística y dentro del contexto que nos ocupa tales parámetros pueden considerarse independientes de la temperatura. Sobre este particular, es importante enfatizar el hecho de que nuestro interés se centra en estudiar el comportamiento típico del sistema o en presencia de pequeñas fluctuaciones alrededor de su comportamiento típico. Por tanto, a efectos prácticos los factores de

bifurcación m_i asociados a una instancia concreta de las estructuras se consideran como realizaciones de una variable aleatoria m , luego: $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_k = m$. Substituyendo los valores m_i por m en la expresión (2.6) y después de efectuar un poco de álgebra (recordemos que la derivación completa de ésta y el resto de ecuaciones de este capítulo se realiza en el apéndice B) puede demostrarse que el número de configuraciones de símbolos para la estructura completa poseyendo un valor de energía igual a n puede expresarse de forma cerrada en función de los polinomios parciales exponenciales de Bell (Comtet, 1974):

$$N(n) = \frac{\lambda!}{n!} B_n^\lambda(x_1, x_2, \dots, x_{n-\lambda+1}) \quad (2.7)$$

Donde el parámetro λ tiene por expresión:

$$\lambda = \frac{1 - m^k}{1 - m} \quad (2.8)$$

Por otra parte, las variables x_l del polinomio de la expresión (2.7) atienden a la siguiente expresión:

$$x_l = \begin{cases} l! A_{m,l} & l \leq m \\ 0 & l > m \end{cases} \quad (2.9)$$

2.5 La Función de Partición

En aras de calcular el contenido medio de información de las estructuras simbólicas estudiadas con anterioridad, el primer paso a realizar es el de obtener una expresión para la función de partición del sistema. En este sentido, es importante mencionar que cantidades macroscópicas tales como la entropía o la energía libre, esto es, los potenciales termodinámicos en la terminología usada en mecánica estadística, pueden obtenerse a partir del cálculo de la función de partición del sistema físico. El estado de reposo (del inglés “ground state”) de las estructuras simbólicas descritas tiene asociado un valor de energía n_{\min} el cual es igual al parámetro λ definido en la expresión (2.8). De forma similar, el valor máximo de energía en el cual puede encontrarse cualquiera de las estructuras descritas n_{\max} es igual a $m\lambda$. Haciendo uso de la expresión de las cuentas $N(n)$ obtenida en la expresión (2.7) junto con la definición (2.1) de la función de partición particularizada para los valores mínimos y máximos de la energía, podemos obtener una expresión cerrada para la función de partición Z :

$$Z = \sum_{n \geq \lambda}^{m\lambda} N(n) e^{-\beta n} = e^{-\beta \frac{1-m^k}{1-m}} \left(1 + \sum_{l \geq 2}^m \binom{m}{l} e^{-\beta(l-1)} A_l^l \right)^{\frac{1-m^k}{1-m}} \quad (2.10)$$

La expresión anterior nos permite, tal y como indicamos con anterioridad, el cálculo de los potenciales termodinámicos. En particular, la energía libre F y la entropía S pueden calcularse a partir de las fórmulas:

$$F(\beta, m, k) = -\frac{1}{\beta} \log(Z(\beta, m, k)) \quad (2.11)$$

$$S(\beta, m, k) = \beta^2 \frac{\partial F(\beta, m, k)}{\partial \beta} \quad (2.12)$$

2.6 Promedios Congelados

Las expresiones (2.11) y (2.12) correspondientes a la energía libre y la entropía resultan ser variables aleatorias como consecuencia del desorden introducido por los parámetros estructurales m y k . En aras de obtener el comportamiento típico del sistema, la esperanza de dichas variables aleatorias, esto es, los promedios congelados (Mezard et al., 2004; Dotsenko, 2005) en la terminología de mecánica estadística deben calcularse:

$$\langle F(\beta, m, k) \rangle = \sum_m \sum_k P(m, k) F(\beta, m, k) = \sum_m \sum_k P(m) P(k) F(\beta, m, k) \quad (2.13)$$

$$\langle S(\beta, m, k) \rangle = \sum_m \sum_k P(m, k) S(\beta, m, k) = \sum_m \sum_k P(m) P(k) S(\beta, m, k) \quad (2.14)$$

En las expresiones (2.13) y (2.14) $P(m)$ y $P(k)$ son funciones de distribución de probabilidad de las variables aleatorias m (factor de bifurcación) y k (profundidad de las estructuras). En este sentido y sin pérdida de generalidad se asume que las variables aleatorias m y k son independientes. De forma similar, se considera que las funciones de distribución de probabilidad $P(m)$ y $P(k)$ son distribuciones gaussianas límite, esto es, distribuciones gaussianas cuya moda se sitúa en torno al valor medio de la misma o lo que es lo mismo con una desviación típica muy pequeña.

Con objeto de justificar esta aproximación, es importante recordar, por un parte, que la variable aleatoria k modelaba el número de niveles de procesamiento de la información el cual estaba correlacionado con el número de capas asociado a las

estructuras neuroanatómicas estudiadas con anterioridad, siendo éste un número fijo (constante) para cada especie. De forma similar, respecto de la variable aleatoria m (factor de bifurcación), estudios realizados con técnicas de resonancia magnética funcional (fMRI) sobre la estructura funcional de las redes cerebrales realizados en especies tales como seres humanos (Bullmore & Sporns, 2009), felinos y primates (Hilgetag et al., 2000) o en roedores (Schwarz et al., 2008) revelaron lo siguiente:

- La principal característica funcional de las redes cerebrales es que ésta presenta una arquitectura modular y jerárquica del tipo "small-world" (Watts & Strogatz, 1998), la cual se caracteriza por poseer una eficiencia topológica y de conectividad.
- El patrón de conectividad funcional entre áreas corticales, a pesar de sufrir fluctuaciones espontáneas y de ser altamente sensibles a perturbaciones en escalas de cientos de milisegundos, tales como las inducidas por estímulos sensoriales o tareas cognitivas, no afectan la estabilidad de sus características topológicas globales (Basset et al., 2006; Valencia et al., 2008). Dicho de otra forma, en escalas temporales mayores, esto es, segundos o minutos, las correlaciones entre las fluctuaciones espontáneas en la actividad cerebral forman redes funcionales particularmente robustas (Raichle et al., 2001; Gusnard & Raichle, 2001; Fox & Raichle, 2007).

En resumidas cuentas, las consideraciones anteriores son el reflejo, una vez más, de la hipótesis de eficiencia asociada a la inteligencia presentada en el capítulo introductorio, puesto que, tal y como esbozamos con anterioridad, desde el punto de

vista de teoría de grafos, la arquitectura “small-world” se caracteriza por poseer una eficiencia topológica y de conectividad. Por consiguiente, con objeto de simular una distribución gaussiana con la moda en torno al valor medio de la misma, esto es, con una desviación típica muy pequeña se hace uso de funciones delta de Dirac (ver expresión 2.15). Esta aproximación nos permite capturar la esencia de los procesos modelados, permitiéndonos a su vez una considerable simplificación en los cálculos:

$$\begin{aligned}
 P(m, k) &= P(m)P(k) = & (2.15) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} e^{-\frac{(m-\mu_m)^2}{2\sigma_m^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{(k-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}} \cong \\
 &\cong \delta(m - \mu_m)\delta(k - \mu_k)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.13) y (2.14) relativas al comportamiento típico de la energía libre y de la entropía atienden finalmente a las expresiones:

$$\langle F(\beta, m, k) \rangle = \frac{1 - \mu_m^{\mu_k}}{1 - \mu_m} \left\{ 1 - \frac{1}{\beta} \log \left(1 + \sum_{l \geq 2}^{\mu_m} \binom{\mu_m}{l} e^{-\beta(l-1)} A_l^l \right) \right\} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
 \langle S(\beta, m, k) \rangle &= \beta \frac{1 - \mu_m^{\mu_k}}{1 - \mu_m} \left\{ \frac{\sum_{l \geq 2}^{\mu_m} \binom{\mu_m}{l} l e^{-\beta(l-1)} A_l^l}{1 + \sum_{l \geq 2}^{\mu_m} \binom{\mu_m}{l} e^{-\beta(l-1)} A_l^l} + \right. & (2.17) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\beta} \log \left(1 + \sum_{l \geq 2}^{\mu_m} \binom{\mu_m}{l} e^{-\beta(l-1)} A_l^l \right) \right\}
 \end{aligned}$$

2.7 Conclusiones

En este capítulo hemos modelado y desarrollado la hipótesis de inteligencia con base en el embodiment, a saber, si la inteligencia animal puede explicarse como resultado de un fenómeno emergente resultado de la interacción de una gran cantidad de símbolos basada en el concepto de primitivas de movimiento. Sobre este particular definimos los aspectos estructurales del modelo haciendo uso de estructuras simbólicas organizadas de forma jerárquica. De forma similar, el concepto de primitivas de movimiento se modeló en términos de permutaciones sobre representaciones simbólicas de conocimiento. Seguidamente, a raíz del planteamiento anterior presentamos la formulación del problema en términos de mecánica estadística, lo cual nos condujo a definir en primer lugar un modelo de energía apropiado para dar cuenta de los fenómenos empíricos observados. Posteriormente, haciendo uso de técnicas modernas de matemática discreta se calculó la función de partición del sistema de forma exacta para de esta forma poder deducir los potenciales termodinámicos. Concretamente, se calculó la entropía y la energía libre. La idea subyacente detrás de estos cálculos estribaba en utilizar, por una parte la entropía como una medida aproximada de inteligencia y por otro la energía libre para tratar de vislumbrar las propiedades a nivel computacional que podrían eventualmente emerger como resultado de la hipótesis formulada.

En el siguiente capítulo, pasamos a analizar e interpretar de forma detallada los resultados teóricos obtenidos en el presente capítulo.

Capítulo 3

Interpretación Física del Modelo

3.1 Introducción

Con objeto de examinar las propiedades del modelo presentado en el capítulo anterior en este capítulo presentamos un análisis e interpretación física detallada de la formulación matemática con la que concluíamos el precedente capítulo. Empezaremos, para ello, analizando los resultados relativos a los promedios congelados de la energía libre y la entropía (ver expresiones 2.16 y 2.17). Sobre este particular es importante hacer un inciso para recordar la equivalencia existente el factor medio de bifurcación, el número medio de símbolos utilizado para realizar operaciones simbólicas de movimiento y la conectividad media entre representaciones símbolos. A lo largo del presente capítulo, dichos conceptos se utilizarán indistintamente.

3.2 Energía Libre

El promedio congelado de la energía libre se representa en la figura 3.1 en función de los parámetros que definen el comportamiento del modelo. Concretamente, se representa la esperanza de la energía libre (para un valor del inverso de la temperatura $\beta = 1$) en función del valor medio de la profundidad de las estructuras μ_k dentro del conjunto de enteros $\{2,3,5,6\}$. Las muestras asociadas a la evaluación de dicha función se normalizaron en el intervalo $[0,-1]$ como consecuencia de las grandes diferencias en órdenes de magnitud de los valores muestreados obtenidos resultado de la asignación de parámetros anterior. Si observamos la gráfica en detalle apreciaremos que independientemente del valor particular de μ_k , esto es, de la profundidad media de las estructuras, la energía libre permanece constante hasta un cierto valor de μ_k y seguidamente decrece de forma monótona. Por ejemplo, para $\mu_k = 2$ la energía libre permanece constante aproximadamente hasta un valor de μ_m igual a 7. De forma similar, para valores de $\mu_k = 3$, $\mu_k = 5$ y $\mu_k = 6$ la energía libre permanece constante hasta valores de $\mu_m = 12$, $\mu_m = 20$ y $\mu_m = 24$ respectivamente. En otras palabras, independientemente del valor de μ_k el sistema físico modelado presenta principalmente dos regiones de operación (ver tabla 3.1). A saber, una primera región donde la energía libre parece no depender del factor medio de bifurcación dado que es prácticamente constante y una segunda región caracterizada por un decrecimiento mantenido de los valores asociados a la energía libre en la medida que el factor medio de bifurcación aumenta.

Tabla 3.1. Caracterización de las estructuras a partir de los valores obtenidos de energía libre en función de las variables congeladas m (factor de bifurcación) y k (profundidad de las estructuras).

	Región Adiabática	Región Disipativa
$\mu_k = 2$	$\mu_m \in [2,7]$	$\mu_m \geq 8$
$\mu_k = 3$	$\mu_m \in [2,12]$	$\mu_m \geq 13$
$\mu_k = 5$	$\mu_m \in [2,20]$	$\mu_m \geq 21$
$\mu_k = 6$	$\mu_m \in [2,24]$	$\mu_m \geq 25$

Desde el punto de vista de la termodinámica, la primera región es particularmente interesante dado que sugiere que el sistema físico modelado se encontraría cerca de un régimen de funcionamiento adiabático, esto es, un proceso termodinámico en el cual no existe disipación de calor. Por el contrario, la segunda región de funcionamiento sugiere la existencia de disipación dado que la energía libre no es constante tal y como ocurría en el caso anterior. Con objeto de reflejar dichas observaciones, la primera región del espacio de fases del sistema la denotaremos (ver tabla 3.1) como región adiabática mientras que la segunda región como región disipativa. Llegados a este punto es importante precisar que las afirmaciones anteriores no pueden ser probadas de una manera rigurosa sin el conocimiento exacto de las ecuaciones dinámicas que describirían la evolución temporal del sistema. No obstante, dichas afirmaciones proporcionan, tal y como se demuestra a continuación, explicaciones plausibles de los aspectos más relevantes observables de las operaciones computacionales realizadas por el cerebro.

Por otra parte, los términos físicos “disipación” y “adiabático” deben interpretarse dentro del contexto en el que se encuentra el sistema físico modelado. Concretamente, el término físico “disipación” puede interpretarse como un coste

metabólico como consecuencia de consideraciones neurofisiológicas. Recordemos que las estructuras simbólicas propuestas modelan operaciones cognitivas que se realizan en los cerebros de los animales como resultado del proceso evolutivo. Cada operación cognitiva se encuentra caracterizada por un conjunto de operaciones simbólicas. Desde un punto de vista de procesamiento de la información se dice que una operación es lógicamente reversible si las entradas a la operación pueden ser siempre deducidos a partir del resultado de dicha operación. Por ejemplo, borrar información es una operación lógicamente no reversible. A tenor del principio de Landauer (Li & Vitányi, 2008), cuando efectuamos operaciones con la información no reversibles, tales como el borrado de la misma, dichas operaciones deben estar acompañadas de un aumento en la entropía en los grados de libertad carentes de información del aparato o sistema de procesamiento de la información o bien en su entorno, esto es, mediante generación o disipación de calor. Resulta nuevamente de un interés particular volver a recordar que la idea de operaciones lógicamente reversibles, por su propia definición, requiere la existencia de un almacenamiento temporal de la información, en otras palabras, memoria dentro del contexto que nos ocupa. De hecho, la reversibilidad lógica expresa la idea de computaciones adiabáticas (Li & Vitányi, 1992, 1996), esto es, dispositivos de procesamiento de la información que trabajan sin disipar calor (Vieri, 1999; Merkle, 1993). En el campo de la biología de sistemas se ha demostrado (Bennett, 1982) que algunas etapas en el procesado de información molecular, tales como la transcripción del ADN en ARN, se realizan mediante operaciones lógicamente reversibles no solamente desde un punto de vista teórico sino también práctico. De hecho, se ha demostrado que la replicación del ADN, sus operaciones de transcripción así como la síntesis de proteínas se realiza con una alta eficiencia energética.

Por consiguiente, atendiendo a los razonamientos anteriores, desde un punto de vista de procesamiento de la información, la primera región sería típica de un sistema operando bajo un régimen de operaciones cercano a la reversibilidad como consecuencia de la ausencia prácticamente de disipación, esto es, la disipación es muy pequeña aunque esto no se aprecia en la figura 3.1. En este sentido, es importante volver a recordar que estamos tratando con un sistema simbólico, donde cada símbolo se supone que codifica una cierta cantidad de información o conocimiento. En consecuencia, los resultados teóricos obtenidos estarían de acuerdo con el hecho de que el cerebro de cualquier animal es una estructura intensiva de almacenamiento de información, una condición suficiente para la existencia de reversibilidad lógica. De forma similar, también es importante tener en cuenta que el género computacional adoptado por los sistemas nerviosos resultado del proceso evolutivo se encuentra limitado por el consumo o requerimientos energéticos, y tal y como comentamos con anterioridad, en esta línea el cerebro de cualquier animal se caracteriza por ser extremadamente eficiente. Una consecuencia directa de su eficiencia energética es que éstos pueden realizar una gran cantidad de operaciones por segundo. A título ilustrativo el cerebro de una mosca realiza aproximadamente 10^9 operaciones por segundo cuando la mosca está simplemente quieta o descansando (Mead, 1989).

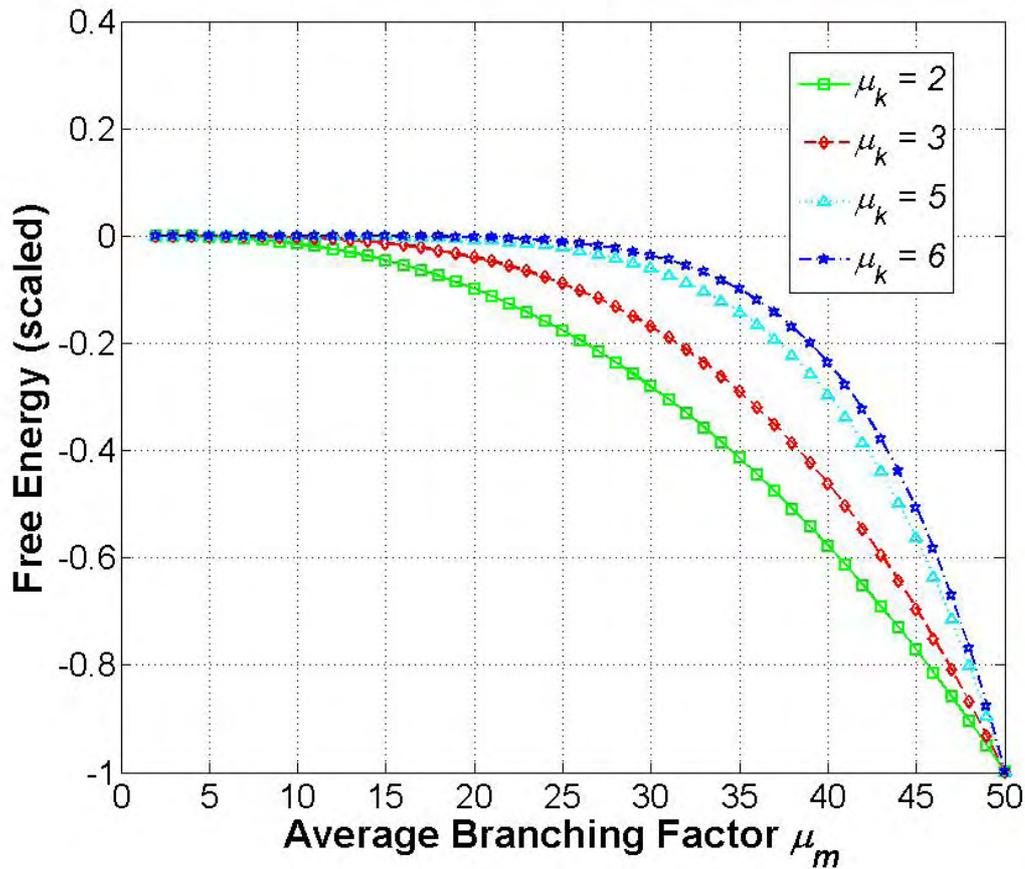


Figura 3.1. Caracterización de las estructuras a partir de los valores obtenidos de energía libre en función de las variables congeladas m (factor de bifurcación) y k (profundidad de las estructuras).

Por otra parte, a partir de la visión o interpretación de la inteligencia en términos de eficiencia computacional, los resultados anteriores nos permitirían también interpretar las evidencias experimentales presentadas en el capítulo de introducción. Específicamente, en términos del modelo, para individuos inteligentes el número medio de operaciones motoras requeridas para cambiar el estado de cualquier nodo arbitrario de las estructuras (ver figura 3.1) de una configuración de símbolos a otra se realiza con un menor número de operaciones combinatorias en comparación con individuos menos inteligentes. El razonamiento anterior también sería válido para explicar el proceso de aprendizaje, ya que en términos del modelo éste puede interpretarse como un proceso de optimización el cual tiene por objetivo reducir el número medio de operaciones

combinatorias necesarias para cambiar el estado de las estructuras simbólicas. Paralelamente, el substrato neuronal que da cuenta de la eficiencia en las operaciones simbólicas estaría basado en factores fisiológicos tales como la velocidad de transmisión neuronal, el grado de mielina existente en las neuronas colindantes, la eficiencia de la conectividad, la densidad neuronal o el empaquetamiento de neuronas y la precisión de las transmisiones neuronales. De este modo, los individuos más inteligentes tendrían una mayor eficiencia de las redes neuronales que componen sus cerebros. Por ejemplo, un estudio en el pasado reciente realizado por Diamond et al. (1985) demostró que el cerebro de Albert Einstein, la materia blanca del área de Brodmann 39, esto es, el giro angular cerca de la unión de los lóbulos temporales, occipitales y parietales difería de los controles. En particular, los axones de las neuronas pertenecientes a dicha área poseían un mayor grado de mielina en el cerebro de Einstein en comparación con el resto de individuos utilizados en el experimento. Trabajos más recientes en inteligencia humana (Li et al., 2009; Van Den Heuvel et al., 2009; Song et al., 2008) han documentado el hecho de que individuos con índices altos de inteligencia siempre poseen redes neuronales más eficientes en sus cerebros en cuanto a conectividad y eficiencia se refiere, indicadores de una transferencia en paralelo de la información en el cerebro mucho más eficiente.

Llegados a este punto, es también importante resaltar que un incremento en el número de operaciones combinatorias se traduce automáticamente en un incremento en los costes metabólicos asociados (ver capítulo 2). A partir de la figura 3.1 también es fácil deducir que en la medida que aumenta la conectividad media entre símbolos los costes metabólicos aumentan también considerablemente, siendo dichos costes aun mayores, cuanto mayor es el número medio de niveles de procesamiento considerados. Intuitivamente, cuanto mayor es el factor de bifurcación medio, mayor es el número

medio de símbolos empleados en operaciones simbólicas de “movimiento”. Esto a su vez implica que cambiar el estado de una de las estructuras de una configuración de símbolos a otra se realiza en promedio con un mayor número de operaciones combinatorias independientemente de si tales operaciones se realizan de forma óptima, esto es, con número reducido de operaciones de “movimiento” simbólicas.

La existencia de una región adiabática para cualquier valor del número medio de niveles de procesamiento de la información considerado, parece indicar que aquellos cerebros cuyas características de trabajo dan lugar a valores de la parametrización μ_k y μ_m cerca del límite entre la zona adiabática con la zona disipativa serán óptimos en el sentido de que consiguen el valor máximo posible de entropía, esto es, el contenido de información es máximo, para valores relativamente pequeños de la energía libre (en valor absoluto) cuando comparamos éstos con puntos que pertenecen a la región disipativa. En otras palabras, tales cerebros consiguen un buen compromiso entre las capacidades cognitivas alcanzadas con respecto de los costes metabólicos incurridos.

De este modo, el hecho que las neuronas corticales en los grandes simios, esto es, chimpancés, bonobos, gorilas y orangutanes, así como en los humanos han evolucionado, con objeto de mantener un nivel óptimo de interconectividad y un tiempo de conducción de impulsos nerviosos mínimo, manteniendo conexiones menos globales y aumentando la conectividad entre circuitos locales o módulos (Kaas, 2000, 2007; Chanzigi & Shimojo, 2005) sugiere a tenor de la parametrización del modelo que sus cerebros se encontrarían situados en la región adiabática de la gráfica 3.1.

En resumen, los resultados obtenidos sugieren que el cerebro como órgano fruto de un proceso evolutivo se encuentra cerca de un régimen de funcionamiento caracterizado por las operaciones reversibles desde un punto de vista lógico con objeto de minimizar el consumo de energía o lo que es lo mismo los costes metabólicos. La

existencia de una región disipativa parece corroborar argumentos neurofisiológicos muy fuertes que implican que el tamaño de un cerebro no puede crecer de forma indefinida debido a consideraciones metabólicas. Concretamente se ha demostrado (Striedter, 2005) que desde el punto de vista evolutivo incrementos en el tamaño relativo del cerebro van acompañados de otros cambios para hacer posible la existencia de tales cerebros como por ejemplo cambios de dieta en el animal, cambios en el tamaño de algunos órganos o en la tasa neuronal de consumo de energía.

3.3 Entropía

Con respecto a la entropía (ver figura 3.2) la característica más importante de la gráfica es que crece de forma exponencial con respecto de μ_m (factor de bifurcación promedio), independientemente de la profundidad de las estructuras bajo consideración. La profundidad media de las estructuras tiene también una enorme influencia en los valores de entropía observados. Concretamente, a medida que la profundidad media de las estructuras aumenta las diferencias en los valores de entropía observados también aumentan de forma exponencial (es importante resaltar que el eje vertical de la gráfica representa una escala logarítmica). Para cualquier valor de μ_k , una pequeña diferencia en el número medio de símbolos empleados para operaciones de “movimiento” simbólicas se traduce en una diferencia exponencial en los valores asociados de entropía de varios órdenes de magnitud. Paralelamente, dados dos valores cualesquiera de μ_m la diferencia se incrementa en la medida que aumenta el valor de μ_k considerado.

Denotemos la entropía y la energía libre con las letras S y F respectivamente. Si fijamos un valor concreto de la entropía, el factor medio de bifurcación necesario para alcanzar dicho valor, aumenta (disminuye) drásticamente cuando disminuimos

(aumentamos) el número medio de niveles de procesamiento de la información considerado. También ocurre que en la medida que aumentamos (disminuimos) el valor de entropía seleccionado, el valor correspondiente de μ_m necesario para alcanzar dicho valor aumenta (disminuye) exponencialmente cuando disminuimos (aumentamos) el valor de μ_k . Por ejemplo, el valor de entropía $S(\mu_k, \mu_m)$ alcanzado para $\mu_k = 6$ y $\mu_m = 19$, esto es, $S(6,19)$, se alcanza para un valor de $\mu_k = 5$ y $\mu_m = 33$, esto es para un valor de entropía $S(5,33)$. De forma similar, el valor de entropía $S(6,27)$ se alcanza para un valor de $\mu_k = 5$ y $\mu_m = 50$, esto es, un valor de entropía $S(5,50)$.

Una consecuencia directa de las observaciones previas es que la diferencia (en valor absoluto) en los valores de energía libre asociados a diferentes valores de μ_k , pero correspondientes al mismo valor de entropía, aumenta de forma exponencial cuando se incrementa el valor de entropía considerado. Por ejemplo, la diferencia en los valores de energía libre $\Delta_1 = |F(6,19) - F(5,33)|$ y $\Delta_{21} = |F(6,27) - F(5,50)|$ aumenta de forma muy rápida ($\Delta_2 \gg \Delta_1$). Precisamente, un aumento aproximado de un orden de magnitud en los valores de entropía (por ejemplo cuando nos movemos de $S(6,19)$ a $S(6,27)$) da lugar a un aumento de varios órdenes de magnitud en los valores asociados de energía libre (recordemos que los valores de energía libre de la gráfica 3.1 están normalizados). Por tanto, partiendo de la interpretación de las diferencias en energía libre como indicadoras de costes metabólicos asociados, podemos deducir que un incremento en el número medio de niveles de procesamiento de la información permite alcanzar valores de entropía más altos, esto es, capacidades cognitivas sin que se produzca un incremento excesivo en los costes metabólicos asociados, especialmente cuando este incremento en μ_k se produce en la región adiabática (o próxima a ella) de la gráfica. Las observaciones anteriores son de una importancia capital dado que

proporcionarían una justificación teórica a los argumentos presentados en el capítulo anterior (concretamente en la sección 2.2). De forma específica, la idea de que el proceso evolutivo podría haber favorecido la laminación de las estructuras cerebrales comúnmente observadas en el cerebro de los animales como una estrategia para incrementar las capacidades cognitivas y/o las capacidades de representación del conocimiento sin un incremento substancial en los costes metabólicos asociados.

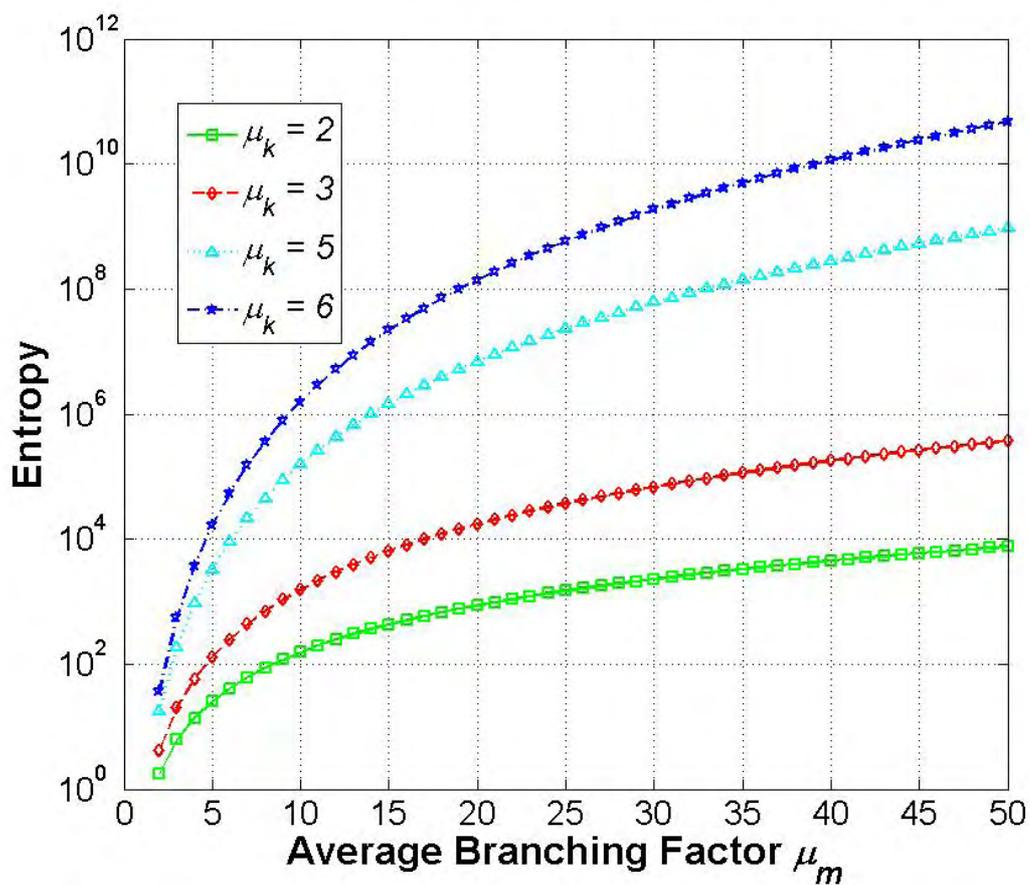


Figura 3.2. Caracterización de las estructuras a partir de los valores obtenidos de entropía en función de las variables congeladas m (factor de bifurcación) y k (profundidad de las estructuras).

Dicho esto, es importante recordar que los aspectos más relevantes de la hipótesis formulada de inteligencia animal basada en el concepto de embodiment, se definió dentro del espacio de la complejidad de una arquitectura cognitiva definida

mediante el número de niveles en un árbol y el número de símbolos disponible para realizar operaciones simbólicas de movimiento o motoras. En particular, el número de niveles de procesamiento de la información se definió como una función del número de capas asociadas a las estructuras neuroanatómicas específicas descritas en el modelo. De forma intuitiva, cuanto mayor es el número de capas de dichas estructuras mayor será el número de niveles de procesamiento de la información. Desafortunadamente, si bien el número de niveles o capas que poseen dichas estructuras neuroanatómicas se conoce en detalle para el caso de las aves, anfibios y mamíferos, no ocurre lo mismo, por supuesto, en base a nuestro conocimiento actual, con el número de niveles de procesamiento de la información y el número de símbolos que pueden asociarse a un cerebro en particular. Por tanto, en aras de reinterpretar los resultados obtenidos relativos a la entropía, en lo sucesivo supondremos la existencia de una correspondencia directa entre el número de capas y el número de niveles de procesamiento de la información. En este sentido es importante enfatizar que la afirmación anterior no altera la verosimilitud de los razonamientos obtenidos siempre y cuando éstos se presenten de forma cuantitativa. Como colofón a todo lo anterior, recordemos también que la característica más importante de la gráfica de entropía es que el contenido de la información crece de forma exponencial con el número de símbolos utilizados para operaciones motoras. Paralelamente, si fijamos el valor del factor medio de bifurcación, la diferencia en el contenido de información de las estructuras varía de forma exponencial cuando se tiene en consideración el número medio de niveles de procesamiento de la información. De acuerdo con el modelo propuesto, este hecho es sobremanera importante dado que permite explicar desde un punto de vista cuantitativo las innumerables diferencias y similitudes que existen a nivel cognitivo entre las diferentes especies. A título ilustrativo, la gráfica de entropía para un valor de $\mu_k = 6$ estaría modelando el valor

medio de entropía empleado por mamíferos terrestres en operaciones cognitivas. El cortex en el cerebro de los humanos es ligeramente mayor cuando lo comparamos con el de los chimpancés, especialmente el cortex lateral pre-frontal. Sorprendentemente el cerebro humano es idéntico en un 98.5% al del chimpancé. Sin embargo, desde un punto de vista cognitivo las diferencias entre ambas especies son enormes. Por ejemplo, los seres humanos dominan vocabularios de palabras compuestos de decenas de miles de palabras y símbolos, mientras que nuestros vecinos más cercanos filogenéticamente hablando, esto es, los chimpancés usan un máximo de 40 signos (Tomasello & Call, 2007). La explicación a este hecho es simple si lanzamos la hipótesis de que los chimpancés están utilizando en promedio un número inferior de símbolos en operaciones cognitivas comparado con los seres humanos. Por lo tanto, un ligero descenso en la conectividad media entre símbolos, digamos 5 por ejemplo, da lugar a un descenso de varios órdenes de magnitud en los valores de entropía observados para cualquier valor de μ_m . Un argumento similar podría utilizarse para explicar las diferencias cognitivas observables entre las aves y los reptiles, ya que aquellas que poseen cerebros relativamente más grandes como los cuervos estarían usando una mayor cantidad de símbolos. Finalmente, las diferencias cognitivas entre especies como los cetáceos ($\mu_k = 5$), aves ($\mu_k = 3$) y anfibios ($\mu_k = 2$) son en general debidas a las restricciones impuestas por el número medio de niveles de procesamiento de la información.

3.4 Implicaciones del Modelo

La búsqueda por parte de la comunidad científica de indicadores neuronales relacionados con la inteligencia ha estado plagada de dificultades, y en especial teniendo en cuenta el conocimiento actual que existe sobre las impresionantes

habilidades cognitivas de los insectos (Chittka & Niven, 2009; Strausfeld, 2009; Wolf et al. 1992). En este sentido se han propuesto varios marcadores neuronales de la inteligencia tales como el tamaño absoluto/relativo del cerebro, el número de neuronas existentes en el cortex, o el coeficiente de encefalización entre otras. Desafortunadamente, ninguna de las medidas propuestas hasta la fecha explica de forma óptima las diferentes capacidades cognitivas que se observan en las diferentes especies animales (Roth & Dicke, 2005).

Por el contrario, el modelo presentado nos ha permitido proporcionar algunas respuestas no solamente a la eficiencia de las operaciones realizadas por el cerebro sino proporcionar argumentos plausibles en aras de explicar desde un punto de vista cuantitativo los saltos y al mismo tiempo el conjunto de similitudes que existen a nivel cognitivo entre las diferentes especies. Paralelamente, puesto que la hipótesis central de este proyecto de tesis doctoral se formuló en términos del principio de conservación filogenética, parece razonable discutir los resultados proporcionados por el modelo frente a la visión actual que se tiene respecto del proceso evolutivo asociado a la inteligencia biológica. Concretamente, sobre este particular se cree que la inteligencia evolucionó de forma independiente en diferentes clases de vertebrados, así como en diferentes familias del mismo orden siguiendo un proceso de evolución divergente del cerebro pero con una convergencia en cuanto a habilidades cognitivas de alto nivel se refiere (Roth & Dicke, 2005; Emery & Clayton, 2004; Hof et al., 2005; Byrne, 1995). Los resultados presentados con anterioridad harían más precisa dicha visión sugiriendo que la inteligencia habría evolucionado siguiendo los mismos principios funcionales, esto es, basados en el concepto de primitivas de movimiento, a pesar de que la implementación neuronal de dichos principios difiera en las diferentes especies, tal y como también postulara Hecht-Nielsen (2007).

3.5 Aplicaciones Prácticas del Modelo

Tanto los elefantes como los delfines pertenecen a varios de los grupos de especies salvajes, además de los grandes simios, cuyas habilidades cognitivas, el gran tamaño relativos de sus cerebros junto con la peculiar citoarquitectura de sus cerebros ha intrigado a los investigadores durante mucho tiempo. Seguidamente, desde la nueva perspectiva introducida por el modelo, discutimos diferentes cuestiones relativas a las operaciones cognitivas y las capacidades cognitivas resultantes de estas especies sofisticadas desde el punto de vista cognitivo, esto es, delfines y elefantes.

3.5.1 Delfines (*Lagenorhynchus Obliquidens* y *Tursiops Truncatus*)

El origen e historia evolutiva de los cetáceos, esto es, delfines, ballenas y marsopas, ha sido uno de los tópicos que ha generado, sin lugar a dudas, múltiples debates y discusiones científicas de índoles diferentes durante décadas. Según Marino (2004) durante los pasados 55 a 60 millones de años el cerebro de los cetáceos se expandió de forma desmesurada de forma que el cerebro de los cetáceos actuales se encuentra entre los más grandes de todos los mamíferos no sólo en tamaño absoluto sino también en tamaño relativo con respecto al cuerpo del animal. Por otra parte, los cetáceos poseen un esquema de organización neocortical único que resulta intrigante ya que éstos exhiben una complejidad cognitiva y un comportamiento al menos igual en media al exhibido por los grandes simios.

En términos de citoarquitectura, el cortex de los cetáceos (Butti et al., 2011; Marino, 2002) carece de una de las seis capas que caracterizan el cortex de los mamíferos terrestres, concretamente la capa IV. En general, el patrón que se observa en el cortex de los cetáceos se caracteriza por poseer una primera capa (capa I) muy fina

pero con una densidad celular mucho mayor que la observada en los mamíferos terrestres. Una segunda capa (capa II) también densamente poblada de neuronas cuyas dendritas se extienden hasta la capa I, una tercera capa (capa III) compuesta por neuronas piramidales, una quinta capa (capa V) compuesta por innumerables agrupaciones de neuronas piramidales y por último una sexta capa (capa VI) multiforme. Relativo al cortex de los cetáceos, resulta de un interés particular el alto grado de convoluciones cerebrales que posee éste, lo cual redundará en un área cortical muy grande. A título ilustrativo, los delfines denominados de nariz de botella (*Tursiops truncatus*) poseen un área cortical de aproximadamente 3745 cm², la cual ni siquiera es sobrepasada por el cortex de los seres humanos el cual posee un área de aproximadamente 2275 cm². Sobre este particular, los cerebros de las orcas y delfines son significativamente más grandes que los de cualquier primate no humano y solamente segundos en medidas relativas del tamaño del cerebro tales como el coeficiente de encefalización. El coeficiente de encefalización (EQ) es una medida que cuantifica la diferencia entre el tamaño real de un cerebro con respecto del tamaño que observaríamos en base a una regresión hecha sobre el peso del cerebro y del cuerpo para una muestra de especie concreta (Jerison, 1973). De hecho, éste mide cuán grande o pequeño es el peso total del cerebro de una especie concreta en base al tamaño esperado solamente sobre la base de una alometría entre el peso del cerebro frente al peso del cuerpo. Por ejemplo, los seres humanos poseen el EQ mayor de todas las especies con valores de 7.4 a 7.8, lo cual implica que el cerebro humano es entre 7 a 8 veces más grande de lo que se podría esperar. Tal y como comentamos con anterioridad, en cuanto al coeficiente de encefalización se refiere los humanos (*Homo sapiens*) son seguidos por varias especies de delfines con EQs ligeramente por encima de 4.0. Entre ellos se encuentran los delfines de nariz de botella (*Tursiops truncatus*) y los delfines del

pacífico de costado blanco (*Lagenorhynchus obliquidens*) con EQs de 4.26 y 4.55 respectivamente (Marino, 2002).

Existe una amplia gama de estudios científicos y datos que demuestran las extensas habilidades cognitivas de los delfines (Marino, 2002, 2004; Marino et al., 2008; Perrin et al., 2002). Estos estudios ponen de manifiesto la increíble capacidad de aprendizaje y flexibilidad de comportamientos exhibidas por los delfines. A título ilustrativo, los delfines han demostrado la habilidad para aprender una variedad de tipos de reglas que gobiernan una serie de problemas abstractos. Por ejemplo, éstos son capaces de clasificar una pareja de objetos como "iguales" o "distintos" (Herman & Gordon, 1974; Mercado et al., 2000). También los delfines son capaces de aprender conceptos numéricos (Jaakkola et al., 2005; Kilian et al., 2003). De forma similar pueden elegir el objeto apuntado por un sujeto informante o indicado por éste con un movimiento de cabeza (Pack & Herman, 2004, 2006, 2007; Tschudin et al., 2001).



Figura 3.3. Ilustración gráfica de las extensas capacidades de los delfines para imitar sonidos y comportamientos. En esta ilustración gráfica un delfín imita el comportamiento de un humano usando su cola como analogía de una pierna (se recomienda al lector consultar Marino et al. (2007) para mayores detalles).

Los delfines constituyen una de las pocas especies que pueden imitar sonidos y comportamientos arbitrarios (Richards et al., 1984, Reiss & McCowan, 1993; Herman, 2002). Por ejemplo, éstos son capaces de imitar sonidos generados de forma electrónica correspondientes a una gran variedad de formas de onda y pueden imitar el comportamiento motor de otro delfín o el de un ser humano (ver figura 3.3) independientemente de si lo están observando físicamente o a través de imágenes en una televisión (Herman, 2002). Paralelamente, los delfines también son capaces de entender de forma espontánea la substitución de gestos que indican la señalización de algún objeto por gestos simbólicos en tareas de aprendizaje de lenguaje (Herman et al., 1999). Curiosamente, los delfines también son capaces de producir gestos haciendo uso de su rostro o la posición de su cuerpo para comunicar a un observador humano objetos que desean (Xitco et al., 2001). De hecho, lo más sorprendente, es que éstos entienden perfectamente que el observador humano debe estar presente para que la comunicación sea efectiva (Xitco et al., 2004). Sorprende también, sus habilidades para, de forma rápida y espontánea, imitar sonidos vocales o la habilidad para aprender asociaciones temporales entre parejas de eventos en ausencia de un entrenamiento específico al respecto (Hooper et al., 2006; Reiss & McCowan, 1993). Con respecto al uso y fabricación de herramientas, se ha también documentado, entre familias de delfines con nariz de botella, el uso de trozos de esponjas a modo de sonda para explorar en hendiduras en busca de presas y al parecer son capaces de transmitir la técnica culturalmente (Krützen et al., 2005). En esta línea, de acuerdo con Marino et al. (2008) la relación social más compleja entre animales, excluyendo al ser humano, documentada hasta el momento ha sido entre delfines en la bahía del tiburón (del inglés “Shark Bay”) en el oeste de Australia (Connor et al., 1992a,1992b).

Teniendo en cuenta la exposición anterior, la interpretación de las capacidades de los delfines en términos del modelo es inmediata. El primer hecho a considerar es que la citoarquitectura del cortex en los delfines se caracteriza por la presencia únicamente de 5 capas. Suponiendo que las capacidades cognitivas de los mismos son iguales a las de los grandes simios ello implicaría que el factor de bifurcación medio, esto es, la conectividad media entre representaciones simbólicas de conocimiento sería mayor que el factor medio de bifurcación asociado al cerebro de los grandes simios. Es importante recordar (ver secciones 3.2 y 3.3) que el factor medio de bifurcación necesario para alcanzar un valor de entropía concreto se incrementa en la medida que disminuimos el número medio de niveles de procesamiento de la información. Por otra parte, cuanto mayor es la conectividad media entre símbolos mayores son los costes metabólicos asociados. De este modo, atendiendo al modelo deberíamos observar experimentalmente mayores costes metabólicos en delfines al compararlos con los grandes simios e incluso con los seres humanos. Sobre este particular, los seres humanos (*Homo sapiens*) gastan una gran cantidad de su presupuesto energético en el metabolismo cerebral comparado con otros primates (Leonard et al., 2007; Kaplan et al., 2000). Los costes metabólicos asociados al cerebro humano se soportan, en parte, como consecuencia de una dieta muy rica en proteínas y nutrientes. También, es importante comentar que los seres humanos poseen un nivel de musculación inferior que el observado en los grandes primates y al mismo tiempo una mayor cantidad de grasa en el cuerpo, factores que contribuyen a compensar el alto requerimiento energético del cerebro humano (Leonard et al., 2007). En este sentido, según Leonard et al. (2007) la tasa de reposo metabólico (la denotaremos de ahora en adelante mediante las siglas RMR) en un ser humano adulto es aproximadamente de 1400 kcal/día. Por el contrario, los chimpancés (*Pan troglodytes*) poseen un RMR de aproximadamente 581.9 kcal/día.

Con respecto a los delfines, muchos investigadores, en el pasado, habían observado que éstos poseían un metabolismo mucho más acusado, esto es una tasa metabólica mucho mayor, que la tasa metabólica asociada a mamíferos terrestres de un tamaño similar (Irving, 1974; Pierce, 1970; Ridgway & Patton, 1971; Hampton et al., 1971). De hecho, la dieta de los delfines es altamente proteínica (los delfines no consumen prácticamente carbohidratos) lo cual contribuye considerablemente a su alta tasa de consumo metabólico. A título ilustrativo los delfines poseen unas glándulas tiroideas muy grandes (Harrison, 1969) así como un alto nivel de circulación de hormonas tiroideas, esto es, indicadores de un tasa metabólica muy alta de sus cerebros (Harrison, 1969; Ridgway, 1990). De forma similar estudios recientes (Williams et al., 1993; Costa & Williams, 1999; Ohizumi et al., 2009) han documentado RMRs cercanos a las 10000 kcal/día en delfines cautivos del pacífico de costado blanco (*Lagenorhynchus obliquidens*) y en torno a 8000-9000 kcal/día para delfines con nariz de botella (*Tursiops truncatus*) por tanto confirmándose las predicciones hechas por el modelo. En esta línea, es importante resaltar que la plausibilidad de un aumento de la conectividad media de representaciones simbólicas de conocimiento en el cerebro del delfín también se encuentra avalada por datos neurofisiológicos. Concretamente, el cerebro de los cetáceos se caracteriza por poseer una densidad neuronal más baja, pero al mismo tiempo, una mayor densidad sináptica por unidad de volumen y por neurona que en el cerebro de los mamíferos terrestres (Perrin et al., 2002). Por ejemplo, el cerebro humano adulto posee un promedio de 57000 neuronas/mm³ mientras que el cerebro de los delfines con nariz de botella de 13000-44200 neuronas/mm³. Relativo al número de sinapsis los delfines poseen aproximadamente 0.87×10^{14} sinapsis en su neocortex frente a las 1.3×10^{14} que posee el neocortex humano. De hecho, el cerebro humano y el de los delfines poseen una gran similitud siendo ésta incluso mucho mayor que cuando

comparamos el cerebro humano con cualquier otra especie de mamíferos. Este hecho parece reflejar mayoritariamente el gran volumen de cortex que poseen ambas especies así como el hecho notable de una maximización del número de sinapsis por neurona en aras de compensar la densidad neuronal mínima que posee el cerebro del delfín (Perrin et al., 2002). En otras palabras, la superficie del cortex cerebral en los delfines parece extenderse en mayor proporción que en otros mamíferos, dando lugar a un cortex con un número de convoluciones (grado de girificación) extremo, también con una densidad neuronal mínima pero al mismo tiempo con una densidad sináptica por neurona máxima.

3.5.2 Elefantes (*Elephas Maximus* y *Loxodonta Africana*)

Entre los mamíferos terrestres los elefantes comparten el único estatus, junto con los grandes primates y los seres humanos, de poseer cerebros muy grandes, poseer una esperanza de vida elevada y tener crías que necesitan largos periodos de dependencia materna (Hart et al., 2008). Los elefantes pertenecen al orden Proboscidea el cual emergió a finales del periodo Paleoceno, aproximadamente hace 60 millones de años (Sukumar, 2003). Tanto el elefante africano como el indio (*Loxodonta africana* y *Elephas maximus* respectivamente) no solamente poseen el cerebro más grande de todos los mamíferos terrestres sino también el neocortex más grande entre éstos. Según Shoshani et al. (2006) el cerebro de un elefante adulto pesa en media 4783 gr. siendo la superficie de su neocortex de 6300 cm^2 (Nieuwenhuys et al., 1998), valores solamente comparables con los cetáceos. De forma similar, investigaciones realizadas en el campo del comportamiento social y cognitivo de los elefantes han reforzado la idea de que un cerebro tan grande se encuentra lógicamente asociado con extensas habilidades cognitivas (Roth & Dicke, 2005; Hart & Hart, 2010).

En términos de citoarquitectura, el cortex de los elefantes también se encuentra caracterizado por la existencia de solamente 5 capas, dado que carece de la cuarta capa (capa IV), a diferencia de lo que se observa en primates y ungulados. El patrón de laminación observado refleja una organización particular quizás comparable a la de los cetáceos, donde la ausencia de dicha capa constituye una de las particularidades de sus cerebros (Hof et al., 2005; Hof & Van der Gucht, 2007). Otra de las características que también comparte el cortex de los elefantes con el de los cetáceos es el grado extremo y complejo de girificación. Por otra parte, en cuanto al coeficiente de encefalización, su grado varía de 1.3 (Jerison, 1973) a 2.3 (Cutler, 1979), lo cual contrasta con el extenso repertorio cognitivo de los elefantes. El primer ejemplo documentado de fabricación y utilización de herramientas por elefantes lo constituyó el hecho de constatar que utilizaban trozos de ramas de árboles o arbustos para realizar aspavientos con objeto de repeler insectos voladores. Sin embargo, el repertorio de herramientas de los elefantes, tanto africanos como asiáticos, resulta más amplio, incluyendo por ejemplo el escachar con un palo o tirar piedras a roedores compitiendo por fruta en un árbol (Chevalier-Skolnikoff & Liska, 1993; Hart & Hart, 1994; Kurt & Hartl, 1995; Wickler, 1997). No obstante, a pesar de la importancia histórica que tuvieron dichos hallazgos, el nivel y la complejidad en el uso y fabricación de herramientas por parte de los elefantes no es comparable al de los chimpancés.

Quizás una de las habilidades cognitivas más sorprendentes en los elefantes, la cual parece ser única entre las especies no humanas, lo constituye sus reacciones frente a individuos de su especie heridos o muertos, exhibiendo comportamientos típicos de teoría de la mente (Frye, 1993; Nissani, 2004), esto es, la habilidad para comprender el estado mental de terceros y tener éste en cuenta en el propio comportamiento individual. Por ejemplo, los elefantes son capaces de reconocerse así mismos frente a un espejo

(Plotnik et al., 2007), se han documentado casos de elefantes que tratan de ayudar a individuos de su especie heridos o discapacitados (Douglas-Hamilton et al., 2006) o también la realización de lo que podría calificarse de ceremonias de investigación en torno a restos de individuos muertos (McComb et al., 2006). El mencionado conjunto de habilidades sugiere que los elefantes son capaces de mostrar empatía (Bates et al., 2008a, 2008b) y ello a su vez contribuye a sus complejas redes sociales (McComb et al., 2000, 2001). De hecho, en los últimos años, los elefantes han recibido una atención considerable como consecuencia de su compleja estructura social (Poole & Moss, 2008; Hart & Hart, 2010).

Las necesidades extensivas de forrajeo que requieren los elefantes son suplidas por éstos recorriendo largas distancias. Los estudios llevados a cabo, haciendo uso de técnicas de telemetría GPS, sobre los movimientos estacionales de los elefantes han confirmado la consabida creencia relativa a los viajes legendarios de los elefantes a lo largo de cientos de kilómetros hacia objetivos geográficos distantes (Legget, 2006; Viljoen, 1989). Dichos estudios sobre los recorridos de los elefantes (de 473 a 625 km en media) han puesto de manifiesto las implicaciones de la memoria espacial y temporal a largo plazo exhibida por los elefantes con respecto de las ubicaciones a las que éstos viajan a lo largo de cientos de kilómetros (Foley, 2002).



Figura 3.4. Elefantes en las condiciones experimentales diseñadas para medir la creatividad y comportamiento proactivo (se colocó comida en una rama de bambú fuera del alcance de la trompa de los elefantes, se recomienda al lector consultar Foerder et al. (2011) para mayores detalles). La parte izquierda de la figura muestra una visión parcial del lugar donde se colocaron varias herramientas, como palos, un taburete etc por los investigadores los cuales están siendo inspeccionados por uno de los elefantes asiáticos utilizados en el experimento. La parte derecha de la figura muestra a un joven elefante macho llamado Kandula subido en un cubo desde el cual podía acceder a la fruta colgada de la rama de bambú. En cada caso Kandula exhibió un comportamiento de búsqueda y posicionamiento del cubo, esto es, desplazando el cubo desde su posición original hasta el lugar donde se encontraba suspendida la comida. Sin embargo, en ninguno de los casos los elefantes usaron los palos para conseguir la comida.

Relativo a su memoria social, se ha demostrado que los elefantes son capaces de reconocer llamadas de alrededor de 100 individuos de su especie incluyendo miembros de su familia y de otros clanes de elefantes (McComb et al., 2000, 2003). Como ejemplo de una memoria social detallada resulta interesante comentar que los elefantes son capaces de reconocer las características acústicas particulares de otros 100 individuos de su especie, muchas veces simplemente a partir de una fracción de la señal acústica completa que recibirían de encontrarse cerca del individuo emisor de dicha señal.

Por otra parte, en base al modelo propuesto, el extraordinario elenco de habilidades exhibidas por los elefantes y la existencia de únicamente 5 capas en su neocortex sugieren que la conectividad media de las representaciones simbólicas de

conocimiento (símbolos) en el cerebro del elefante sería mayor que en la del cerebro de los grandes primates. En este sentido, el neocortex de los elefantes se caracteriza también por poseer, desde un punto de vista relativo, una baja densidad (aproximadamente 6900 neuronas/ mm^3) de neuronas de gran tamaño y con un grado de arborización dendrítica extensivo, lo cual sugiere que cada neurona recibe un número relativamente enorme de sinapsis de los axones que interconectan a dichas neuronas respecto de lo que observaríamos en el neocortex de los grandes primates. Si atendemos a un estudio de Hart et al. (2008), la citoarquitectura del cerebro del elefante se encuentra caracterizada por un sesgo tendente a una conectividad global que favorece las conexiones a larga distancia, hipótesis que parece además estar sustentada por la existencia de un sistema basilar dendrítico más largo (Jacobs et al., 2010). Sobre este particular, se ha sugerido recientemente que las variaciones intra-específicas en la relación entre el número de células gliales y el número de neuronas se encuentra correlacionado con el tamaño del árbol dendrítico y la longitud de los axones, puesto que un aumento en la escala de dichas estructuras requeriría un mayor número de astrocitos, esto es, uno de los tipos de neuronas gliales, para la regulación del consumo de glucosa y a su vez de una mayor cantidad de oligodendrocitos (otro tipo de célula glial) para sintetizar de forma activa la mielina necesaria para cubrir los axones que cubren largas distancias (Goodman et al., 2009; Sherwood et al., 2006; Friede & Van Houten, 1962; Friede, 1963). El cerebro de los elefantes manifiesta dicha tendencia poseyendo una de los cocientes más altos entre el número de células de la glia y el número de neuronas o en otras palabras el cociente entre cantidad de materia blanca y materia gris, entre todos los mamíferos (Hakeem et al., 2005; Zhang & Sejnowski, 2000), concretamente dicho cociente es de 4.7 para el elefante africano, siendo dicho cociente de 1.6 para el ser humano, y de 3.1 para los delfines con nariz de botella

(Perrin et al., 2002). Estas evidencias empíricas avalarían no sólo la idea de una mayor conectividad de las representaciones simbólicas de conocimiento sino que ésta sería ligeramente superior a la exhibida por el cerebro de los delfines.

Por otra parte, el hecho de usar una mayor cantidad de símbolos en media para realizar operaciones de movimiento simbólicas se traduce automáticamente en un incremento rápido de los costes metabólicos que sus cerebros deben soportar. Como colofón a todo lo anterior, la tasa metabólica de reposo (RMR) de un elefante asiático domesticado adulto se estimó en aproximadamente 65000 kcal/día (McKay, 1973), por tanto confirmándose una vez más las predicciones que mantiene el modelo. A título ilustrativo, el cerebro del elefante consume en torno a 200 ml de oxígeno por minuto mientras que el cerebro del ser humano adulto consume aproximadamente 49 ml de oxígeno por minuto (Goodman et al., 2009). Tal y como comentamos con anterioridad, se ha demostrado que el volumen de materia blanca en proporción con el de materia gris aumenta de forma desproporcionada en las diferentes especies en la medida que aumenta el tamaño del cerebro ya que en la medida que se incrementa el tamaño cerebral, los axones de las neuronas o bien deben hacerse más gruesos o bien su grado de mielina debe aumentar considerablemente con objeto de poder mantener una velocidad alta de los potenciales de acción sobre distancias largas, redundando por tanto en un coste energético mucho mayor en el mantenimiento de los axones de las neuronas (Wang et al., 2008). De forma similar, es importante constatar que el rendimiento de los elefantes en pruebas convencionales de medida de inteligencia no impresionan (ver figura 3.4) cuando los comparamos con los obtenidos por chimpancés, y por supuesto con seres humanos (Hart et al., 2008). No obstante, y de forma aparentemente sorprendente, los elefantes también exhiben habilidades cognitivas extremadamente complejas como la empatía o comportamientos potencialmente relacionados con la

teoría de la mente los cuales siempre se encuentran asociados a niveles altos de inteligencia. Una de las posibles explicaciones que se han sugerido recientemente al respecto se basa en la idea de que las interacciones entre las neuronas del cortex del elefante, a diferencia de lo que se observa en el cerebro de los grandes primates y los seres humanos, se encuentran menos compartimentalizadas y los tiempos de interacción entre las mismas más lentos lo cual afecta al rendimiento cognitivo de los mismos en pruebas de medición de habilidades cognitivas complejas (Hart et al., 2008; Jacobs et al., 2010).

Llegados a este punto, es importante volver a recordar que en términos del modelo el substrato neuronal que daba cuenta de la eficiencia de las operaciones simbólicas se basaba en factores fisiológicos tales como la velocidad de transmisión neuronal, el grado de mielina de los axones de las neuronas, la eficiencia de la conectividad, el empaquetado o densidad neuronal y la precisión de las transmisiones neuronales. También se planteó la hipótesis que en la medida que aumenta el número de símbolos utilizados en operaciones simbólicas de movimiento mayor es el número medio de operaciones combinatorias necesarias para cambiar el estado de una configuración de símbolos a otra incluso cuando tales operaciones se realizan de forma óptima, esto es, con un número reducido o óptimo de operaciones de movimiento simbólicas. A raíz de lo anterior, un incremento en el número medio de operaciones combinatorias ocasiona el consabido aumento en los costes metabólicos asociados. Por otra parte, recordemos que niveles altos de inteligencia se explicaban en términos de valores altos en la entropía de las estructuras simbólicas estudiadas. Para el caso concreto de los elefantes alcanzar valores de entropía iguales o ligeramente superiores al alcanzado por los grandes primates nos lleva a considerar, tal y como explicamos con anterioridad, a considerar valores mucho mayores del factor de bifurcación medio μ_m

tal y como ocurría en el caso de los delfines, redundando este hecho en un aumento significativo de los costes metabólicos asociados.

La fisiología digestiva y el comportamiento alimenticio de los grandes simios, así como la de los seres humanos, están orientados a la ingesta de comida rica en proteínas y energía. Por el contrario, los elefantes en estado salvaje poseen una de las dietas con la concentración más baja en calorías de todas las especies de mamíferos y en consecuencia su sistema digestivo está adaptado para la ingesta de grandes cantidades de forraje (aproximadamente de 172-220 kg/día de forraje y 60-90 litros de agua) con un valor nutritivo muy bajo. Según un estudio realizado por Chittka and Niven (2009) el número de operaciones en un momento dado que puede soportar el tejido neuronal de un animal depende del tamaño absoluto del cerebro, el número y tamaño de sus neuronas, el número de conexiones entre ellas y la tasa metabólica del tejido. Concretamente, la energía disponible para el procesamiento neuronal, la cual se encuentra íntimamente ligada por la tasa metabólica específica del tejido, constituye, sin lugar a dudas, también una variable muy importante en la determinación de la potencia computacional.

Por consiguiente, en el caso de los elefantes, su cerebro realiza un número medio mayor de operaciones simbólicas como consecuencia de una conectividad media entre símbolos muy grande. Este hecho combinado con una dieta que no es lo suficientemente rica en proteínas para proporcionar la energía necesaria para un cerebro de tales características daría como resultado, mayores tiempos en el procesamiento cortical de la información. En otras palabras, la tasa de consumo de energía se reduce como consecuencia de que el presupuesto metabólico se encuentra limitado en aras de solventar el alto consumo metabólico de un cerebro de tales características. Estos argumentos podrían explicar las extraordinarias capacidades de memoria a largo plazo

que se han documentado sobre los elefantes junto con las evidencias convincentes de su bajo rendimiento en las pruebas convencionales de rendimiento cognitivo. Sobre este particular, las evidencias comentadas con anterioridad guardarían también relación con innumerables estudios realizados en seres humanos sobre el síndrome del erudito (del inglés “savant”), esto es, la existencia de individuos con habilidades de memoria extraordinarias en el contexto de discapacidad intelectual, lo cual con frecuencia se relaciona con el autismo (Heaton & Wallace, 2004; Hart et al., 2008).

Finalmente, es importante hacer énfasis en el hecho de que la velocidad de procesamiento proporciona una condición necesaria pero a la vez insuficiente para la inteligencia (Nettelbeck & Wilson, 1985). Paralelamente, la velocidad o tasa de aprendizaje tampoco puede usarse como medida de inteligencia (Pearce, 2008). A título ilustrativo, la velocidad de aprendizaje de colores en una abeja no sólo es superior a la de cualquier niño sino a la de todos los vertebrados estudiados hasta el momento (Chittka & Niven, 2009). Por consiguiente, un entendimiento completo de las diferencias en la velocidad de procesamiento mental puede ser esencial para una mejor comprensión de la inteligencia, sin embargo, dichas diferencias no proporcionan una respuesta completa a las diferencias observables en inteligencia (Nettelbeck, 2011).

3.6 Comparativa Frente a Teorías Modernas de Inteligencia

Actualmente la inteligencia se define, se evalúa y estudia en al menos tres niveles diferentes: el nivel psicométrico, el nivel fisiológico y el nivel social (Eysenck, 1988; Flynn, 2007). Cada nivel posee sus propios conceptos organizativos, hipótesis y metodologías de investigación. El nivel fisiológico hace uso de tecnologías avanzadas con objeto de examinar índices de inteligencia en el cerebro. Por ejemplo, la teoría de integración parieto-frontal (la denominaremos P-FIT en lo sucesivo) identifica una red

discreta de regiones en el cortex cerebral relacionadas con las diferencias individuales en inteligencia (Jung & Haier, 2007). Tal y como sugiere el nombre de la teoría, dichas áreas se localizan principalmente en los lóbulos parietales y frontales y una de sus funciones principales es la de integrar la información proveniente de diferentes partes del cerebro. Muchas de las regiones asociadas a la teoría P-FIT se relacionan con procesos cognitivos básicos, tales como la atención y la memoria de trabajo. En otras palabras, los atributos de inteligencia general no están asociados con ninguna parte central o fundamental de cerebro si no que se encuentran distribuidos a lo largo del neocortex. Según la teoría de Jung y Haier, los individuos con un nivel de inteligencia superior poseen redes corticales que operan con una mayor precisión y rapidez que en el caso de individuos menos inteligentes. De forma similar, las regiones del cerebro que no forman parte de la red P-FIT, como por ejemplo el hipocampo o el cerebelo contribuyen mínimamente a las diferencias individuales en inteligencia siendo su rol meramente el de asegurar el funcionamiento de las funciones cerebrales básicas comunes a todos los seres humanos. Por el contrario las regiones dentro de la red P-FIT que postula la teoría no ponen límites en las variaciones potenciales que pueden existir entre individuos en términos de flujo de sangre, su volumen o la composición química. Las áreas que postula la teoría P-FIT pueden interpretarse como etapas o niveles de procesamiento de la información. Por lo tanto, la teoría P-FIT daría soporte a la hipótesis de inteligencia animal basada en el embodiment ya que ésta postula el neocortex como la estructura central que explica la inteligencia. En otras palabras, la estructura cerebral que emergió como consecuencia de la hipótesis planteada sobre la readaptación evolutiva del movimiento. También es importante mencionar que la metodología y principios subyacentes a la teoría P-FIT podrían usarse y extenderse con objeto de arrojar luz en el

problema de determinar el número de niveles de procesamiento de la información que pueden asociarse a un cerebro en particular.

Las teorías del nivel psicométrico se centran de forma sistemática en las diferencias individuales, en cuanto a rendimiento se refiere, obtenidos en pruebas de habilidad mental. La hipótesis principal que manejan las teorías de este nivel es que las puntuaciones obtenidas en las pruebas de habilidad mental revelan de alguna forma la estructura global de la inteligencia. Dichos modelos se desarrollan típicamente administrando en primer lugar una extensa batería de tareas de habilidad mental a un gran número de individuos y seguidamente ir reduciendo las correlaciones entre las puntuaciones obtenidas en las pruebas con objeto de identificar fuentes latentes o factores de inteligencia. Las teorías actuales del nivel psicométrico (Carroll, 1993; Cattell, 1943, 1963) proponen típicamente una estructura jerárquica en la que colocan uno o más factores de inteligencia amplios, los cuales representan habilidades generales en lo alto de la jerarquía y factores más específicos, los cuales representan habilidades cada vez más especializadas en los niveles inferiores de la jerarquía. De manera un poco más específica y basándonos en prácticamente 100 años de investigaciones psicométricas, la mayoría de investigadores actuales asumen que las habilidades mentales se encuentran organizadas en una jerarquía donde en lo alto de la misma existe un factor de inteligencia general, denotado normalmente mediante la letra *g*, el cual aparece en la realización de cualquier tipo de prueba de habilidad mental independientemente de su índole (razonamiento, lenguaje etc) y un pequeño número de factores primarios que dan cuenta de habilidades más específicas (Jensen, 1998). Dicho factor general de inteligencia se basa en la concepción de la inteligencia postulada por Spearman (1904, 1927) el cual demostró que medidas correspondientes a diferentes habilidades mentales se correlacionaban de forma notable las unas con las otras.

Concretamente, el factor g de un número diverso y a la vez elevado de medidas es exactamente el mismo que el de otra batería de medidas diversas de habilidades mentales. Según Anderson (1992) la inteligencia general debe ser o bien una función de un proceso cognitivo de control que se encuentra involucrado en todos los dominios o bien se trata de una propiedad fisiológica no cognitiva del cerebro. Actualmente la existencia de g no se discute, no obstante existe un debate encarnizado sobre si g está reflejando la existencia de un proceso unitario de inteligencia general o si el resultado de todas las pruebas de inteligencia debe depender del mismo conjunto de procesos (Willis et al., 2011). Por lo tanto, desde la perspectiva del modelo, la existencia de g daría soporte a la verosimilitud de la hipótesis de inteligencia animal basada en el embodiment puesto que corroboraría la plausibilidad de las primitivas de movimiento como el substrato subyacente a cualquier función cognitiva.

El nivel social estudia el rendimiento cognitivo y habilidades mentales en tareas o en situaciones cotidianas de la vida real. Dentro de este contexto, la teoría de las múltiples inteligencias (Gardner, 2006a) rechaza la concepción de la inteligencia como una habilidad única. De acuerdo con Gardner, todos los seres humanos poseen al menos 8 inteligencias diferentes, las cuales existen en una proporción particular en cada individuo (Gardner, 2006b). Una inteligencia se define como la habilidad para resolver problemas, o crear productos que tienen valor en uno o varios elencos culturales (Gardner, 1993). Para que una inteligencia candidata forme parte del modelo de inteligencias múltiples dicha inteligencia debe (a) poder ser aislada en caso de daño cerebral (b) tener el potencial necesario como para tener una historia evolutiva (c) comprender un conjunto de operaciones de bajo nivel identificables (d) ser flexible como para admitir una representación simbólica (e) poseer el bagaje necesario como para que experto pueda cultivarla (f) ser evidente en individuos excepcionales tales

como eruditos (g) poseer evidencias de la misma provenientes del campo de la psicología experimental y (h) poseer el soporte necesario de investigaciones psicométricas (Gardner, 1999). A título ilustrativo, tres de las inteligencias postuladas por la teoría son la inteligencia lingüística, la inteligencia lógico-matemática y la inteligencia espacial. Llegados a este punto es importante volver a recordar que de acuerdo con el modelo el substrato neuronal que daba cuenta de la eficiencia de las operaciones simbólicas se basaba en factores fisiológicos. Si tenemos en cuenta que las características fisiológicas de las redes que implementan símbolos, así como la conectividad de las mismas no es uniforme a lo largo del cortex, podemos postular que las inteligencias múltiples definidas en la teoría de Gardner son un efecto macroscópico resultado de las particularidades fisiológicas de las redes neuronales que implementan las primitivas de movimiento a lo largo del cortex.

Desde un punto de vista antropológico, hace aproximadamente entre 600000 a 150000 años ocurrió un segundo aumento significativo en el tamaño del cerebro en la línea evolutiva de los homínidos, lo cual marcó la aparición, desde el punto de vista anatómico, de los humanos modernos (*Homo sapiens*). Sin embargo, a pesar de que tales cambios anatómicos hubieran aparecido en el *Homo sapiens*, el comportamiento moderno no llegaría hasta mucho más tarde. Concretamente el registro arqueológico europeo reveló que hace aproximadamente entre 60000 a 30000 años una transición sin precedentes tuvo lugar al comienzo del periodo paleolítico superior (Bar-Yosef et al., 1986; Klein, 1989; Mellars, 1973, 1989a,b; Soffer, 1994; Stringer & Gamble, 1993). Específicamente, la aparición de rasgos considerados como un diagnóstico claro del comportamiento moderno en el *Homo sapiens*. Tales rasgos incluyen el comienzo de un estilo más organizado y dependiente de la estación de caza, el cual comprendía la caza de animales específicos en lugares específicos, lugares de enterramiento

indicadores de ceremonias y rituales religiosos, evidencia de danzas, magia e idolatría entre otros. Actualmente, la comunidad científica ha aceptado como un hecho al periodo paleolítico superior como un periodo sin precedentes en cuanto actividad intelectual se refiere. Por ejemplo, Mithen (1996) se refiere al paleolítico superior como el “big-bang” de la cultura humana. De hecho, se han originado debates encarnizados sobre como y porque aparecieron no sólo el comportamiento moderno de los seres humanos sino también las capacidades intelectuales subyacentes al mismo. Algunos investigadores han sugerido que el mencionado aumento del volumen cerebral ejerció un impacto en las expresiones de inteligencia que dejaron una traza muy leve en el registro arqueológico, como por ejemplo comportamientos con los cuales dar cuenta de una complejidad social creciente o de manipulación de competidores (Byrne & Whiten, 1988; Dunbar, 1996; Whiten & Byrne, 1997; Wilson et al., 1996). Otros investigadores han postulado que el *Homo sapiens* experimentó una transición de un sistema de comunicación predominantemente basado en gestos a un sistema vocal de comunicación (Corballis, 2002). Paralelamente, Fauconnier y Turner (2002) explicaban las excepcionales exhibidas por el *Homo sapiens* en el paleolítico superior gracias a la aparición de lo que dichos investigadores denominaron fluidez cognitiva. La fluidez cognitiva comprende la capacidad para trazar analogías, combinar conceptos y adaptar ideas a nuevos contextos o diferentes sistemas de conocimiento.

No obstante, existe todo un conjunto de evidencias que parecen indicar que la aparente discrepancia entre la modernidad anatómica y el comportamiento moderno del *Homo sapiens* se debió al hecho de que si bien los cambios genéticos necesarios para dicha modernidad estaban ya presentes, el ajuste fino a nivel del sistema nervioso para capitalizar tales cambios tardaría mucho más tiempo (Gabora, 2003; Gabora & Russon, 2011; Mithen, 1996). En otras palabras, fue el momento de una reorganización neuronal

masiva (Henshilwood et al., 2004; Klein, 1999). De este modo, dichas evidencias darían fe de los resultados teóricos proporcionados por el modelo. En concreto, la manifiesta influencia que ejerce la conectividad neuronal con respecto de las capacidades cognitivas, en este sentido es importante volver a recordar que un ligero incremento en la conectividad media de representaciones simbólicas de conocimiento tenía por consecuencia un desplazamiento de fase en la inteligencia o en la flexibilidad cognitiva.

Finalmente, desde el punto de vista de la neurociencia evolutiva, la teoría de confabulación (Hecht-Nielsen, 2007) postuló que cualquier proceso cognitivo se aprende, se almacena y se recuerda como si se tratara de procesos de movimiento. De forma específica esta teoría postula que todo el procesamiento de la información que comprende la cognición humana se lleva a cabo mediante varios miles de módulos tálamo-corticales (aproximadamente unos 4000 en el cerebro humano en contraste con los 700 músculos individuales que posee el cuerpo humano). Cada módulo consiste en un pequeño parche o región localizada en el cortex de aproximadamente 45 mm^2 conectado con una pequeña zona del tálamo mediante conexiones recíprocas que enlazan ambas zonas y que contiene una cantidad de neuronas piramidales en torno a 3,600,000. La teoría postula que dichos módulos tálamo-corticales implementan una lista (normalmente de cientos de miles) de símbolos discretos los cuales son estables con el tiempo y se van incrementando con el tiempo, la mayoría de los cuales se adquieren durante la niñez. Los símbolos, según la teoría, son los términos fijos de referencia fundamentales que deben de existir si se van a almacenar y usar grandes cantidades de conocimiento durante largos periodos de tiempo. El propósito de cada módulo cognitivo es el de describir un atributo asociado a un objeto que el universo mental del animal pudiera poseer. Esta descripción se realiza activando un símbolo discreto de entre miles de símbolos que contiene el módulo. La teoría postula que

dichos módulos realizan una única operación simbólica simple denominada “Confabulación”. El concepto de confabulación postulado por esta teoría debe entenderse como el análogo a una contracción muscular y se completa en general en unas pocas decenas de milisegundos siendo implementada en paralelo por las neuronas que forman parte del módulo, dicho de otra forma, los módulos según la teoría son como los “músculos” del pensamiento. Se trata de un proceso competitivo dinámico estilo WTA (winners-take-all) entre los símbolos de un módulo que no requiere la existencia de un proceso controlador o árbitro de dicho proceso. Los estados de las neuronas involucradas en el proceso evolucionan dinámicamente y de forma autónoma vía la interacción masivamente paralela entre las neuronas implicadas en el proceso. El resultado de una operación de confabulación es la expresión de un símbolo del módulo. Según la teoría, la conectividad entre símbolos es aproximadamente igual a 25, esto es, una neurona que participa en la implementación de uno o más símbolos dentro de un módulo envía conexiones hacia otros 25 módulos. Cada símbolo, sea este sensorial, de lenguaje, abstracto o asociado a un movimiento motor se encuentra representado o codificado por un pequeño conjunto de neuronas dentro del módulo. El tamaño de tales colecciones o grupos de neuronas que implementan símbolos varía de forma considerable de decenas a cientos de ellas donde su cantidad viene determinada de forma genética. La mayoría de los símbolos se desarrollan durante la niñez. Por otra parte, bajo el prisma de esta teoría el mecanismo básico de la cognición es el mismo en todos los vertebrados y posiblemente también en los invertebrados, incluso a pesar de que la implementación neuronal sea diferente. Por lo tanto, el análisis teórico presentado en esta tesis corroboraría el postulado central de dicha teoría, a saber, la visión de la cognición como un crecimiento o adaptación filogenética del movimiento. También

dicho análisis pondría de manifiesto la importancia de la mencionada teoría para entender los mecanismos cognitivos.

3.7 Conclusiones

Los aspectos más importantes de la hipótesis de inteligencia animal con base en el embodiment se definieron en el espacio de la complejidad de una arquitectura cognitiva definida mediante el número de niveles de procesamiento de la información y la conectividad entre representaciones simbólicas de conocimiento. Haciendo uso de una formulación de mecánica estadística de equilibrio, calculamos la entropía y la energía libre asociada a las estructuras simbólicas derivadas del modelo en función de los dos grados de libertad definidos por éste, a saber, el número medio de niveles de procesamiento de la información μ_k y el factor medio de bifurcación μ_m . La entropía se utilizó como una medida aproximada de la potencia cognitiva mientras que se hizo uso de la energía libre para analizar las propiedades computacionales que emergían a escala macroscópica como resultado de las interacciones simbólicas representadas por el concepto de primitivas de movimiento.

Desde un punto de vista práctico, una parametrización concreta de μ_k y μ_m mapeada a los gráficos de entropía y energía libre (ver figuras 3.1 y 3.2) estarían representando de forma cuantitativa el comportamiento típico de un cerebro en términos de su potencia cognitiva y los costes metabólicos asociados al mismo respectivamente. Los resultados más importantes de este capítulo los cuales a su vez no sirven para concluir el mismo podemos resumirlos tal y como se ilustra a continuación:

- Jerarquías de estructuras más profundas dan lugar a mayores valores de entropía y de este modo a una mayor capacidad para representar la información y por

tanto a una mayor flexibilidad comportamental. La existencia de una región disipativa corroboraría argumentos neurofisiológicos muy fuertes que implican que el tamaño del cerebro no puede crecer de forma indefinida debido a consideraciones metabólicas. De forma similar, la eficiencia extrema que se observa en consumo de energía, esto es, en recursos metabólicos de los cerebros fruto del proceso evolutivo e indicada por la existencia de una región adiabática puede explicarse como consecuencia de la reversibilidad lógica asociada a sus operaciones simbólicas. Sobre este particular, su existencia independientemente del número medio de niveles de procesamiento de la información considerado, sugiere que aquellos cerebros cuyas características neurofisiológicas den lugar a valores de la parametrización μ_k y μ_m próximas al límite entre dicha región y la región disipativa consiguen un compromiso óptimo entre las capacidades cognitivas alcanzadas con respecto de los costes metabólicos necesarios para mantener dichos cerebros.

- A medida que aumenta la conectividad media entre representaciones simbólicas, esto es, el factor de bifurcación medio, mayores son los costes metabólicos asociados, siendo dichos costes mucho mayores si tenemos en cuenta el número medio de niveles de procesamiento de la información. En otras palabras, un ligero aumento en el factor de bifurcación medio resulta en un incremento notable en inteligencia pero también en un incremento en los costes metabólicos asociados. Intuitivamente, cuanto mayor es el factor de bifurcación medio mayor es el número de símbolos utilizados en operaciones simbólicas de movimiento. Esto, a su vez, implica que cambiar el estado de las estructuras (ver figura 2.2) de una configuración de símbolos a otra se realiza en promedio con un mayor

número de operaciones combinatorias aun en el caso de que dichas operaciones se realicen de forma óptima, esto es, con un número reducido de operaciones simbólicas “motoras”.

- Varios investigadores han postulado que el proceso evolutivo favoreció la aparición de estructuras laminares no solamente en aras de conservar espacio y energía (Murre & Sturdy, 1995) si no con objeto de permitir nuevas formas de procesamiento de la información que serían muy difíciles de realizar en estructuras no laminares. Los resultados presentados proporcionarían una justificación teórica de tales argumentos especulativos mostrando que la laminación de estructuras permite aumentar el contenido en información de las estructuras cerebrales, esto es, las capacidades cognitivas sin un incremento substancial en los costes metabólicos asociados.

Por último, es importante poner de manifiesto que podríamos haber concebido otra organización diferente de la propuesta, relativa a las estructuras simbólicas, dando lugar a resultados muy similares a los obtenidos, no obstante si ese fuera el caso, tales estructuras carecerían de plausibilidad biológica. Dicho de otra forma, el modelo propuesto junto con las estructuras simbólicas que define proporciona una condición suficiente pero no necesaria para la emergencia de la inteligencia, esto es, no existiría una estructura única asociada a la emergencia de la inteligencia.

Capítulo 4

Inteligencia y Redes Recursivas

4.1 Introducción

La teoría algebraica de máquinas (Arbib, 1968) define una máquina como un par de funciones con las siguientes características:

- La función de transición de estados $f : I \times S \rightarrow S$, donde I representa el espacio de entrada a la máquina, el cual puede representar, por ejemplo, los estímulos que recibe la máquina del entorno donde se sitúa, S representa el espacio de estados de la máquina pudiendo ser éste finito o infinito. La función de transición de estados mapea una entrada junto con el estado en curso a otro posible estado dentro del espacio de estados de la misma.
- La función de salida $g : I \times S \rightarrow O$, donde O representa el espacio de salida de la máquina, es decir, la respuesta de la máquina a los estímulos que recibe del

entorno. Dicha respuesta o acción depende no sólo de los estímulos externos sino también del estado interno de la máquina representado por la variable S .

El concepto algebraico de máquina resulta de interés dado que investigadores como Leyton (1984,1986c) postularon hace casi tres décadas que el sistema cognitivo en los seres humanos estaba estructurado en base a dicho concepto. Concretamente, según este autor el sistema cognitivo representa el entorno como máquinas o lo que es lo mismo: las representaciones cognitivas se estructuran como máquinas. Este planteamiento no resulta difícil de comprender si tenemos en cuenta que dicha representación algebraica recuerda a las ecuaciones clásicas del espacio de estados de un sistema dinámico no lineal. A título ilustrativo, una red neuronal atractor, como aquellas descritas en el modelo (ver capítulo 2) cuyos estados codificaban símbolos puede describirse en base a dicho modelo algebraico.

Curiosamente y en esta línea, un estudio reciente de Taylor & Hartley (2007) argumentaba, de forma similar, que funciones cognitivas superiores tales como el razonamiento se implementan por medio de un conjunto de modelos motores internos, los cuales se encuentran acoplados en base a ecuaciones similares a las del concepto algebraico de máquina. Si tenemos en cuenta todo el material presentado en los capítulos anteriores, relativos a la hipótesis de inteligencia con base en el embodiment, estos resultados no son de extrañar. Con todo, cabe señalar que los resultados inferidos del modelo pusieron de manifiesto la estructura generativa de la inteligencia biológica, esto es, la emergencia de la inteligencia como resultado de interacciones motoras de representaciones de conocimiento simbólicas estructuradas en base a una jerarquía de transferencia recursiva. En otras palabras, podemos afirmar que el principio fundamental de todo sistema cognitivo es la creación de nuevas estructuras o

representaciones internas, esto es, en base a la transferencia de estructuras existentes, es decir, la mente no crea estructuras nuevas, sino que lo que entendemos por nuevas estructuras son el resultado de un proceso de transferencia de estructuras previamente almacenadas (tal y como se ilustró en el capítulo 2, a través del ejemplo de la figura 2.1) y dicho proceso de transferencia tiene su base en acciones motoras que pueden modelarse en base a la teoría algebraica de máquinas.

Seguidamente presentamos las redes neuronales recursivas, esto es, uno de los modelos de redes recursivas dinámicos del campo del aprendizaje de máquinas con capacidad de aprendizaje y generalización que más se aproxima al concepto de máquina, y por ende al de inteligencia. Concretamente este tipo de modelos poseen capacidades de representación y computación superiores a las de las máquinas de Turing (Siegelman, 2001). El primer objetivo que nos hemos planteado en este capítulo es el de efectuar un estudio de los principios subyacentes a dichos modelos. Concretamente, tras presentar dos principios generales que pueden asociarse a cualquier sistema o proceso inteligente (principios generativos) pasaremos a relacionar dichos principios con los modelos que se estudian en el presente capítulo. Los argumentos presentados apoyarán la base de los razonamientos anteriores, esto es, como de forma muy simplificada estos modelos implementan dichos principios generativos y por otra parte, como éstos servirán de complemento a los capítulos anteriores en la línea de proporcionar herramientas computacionales capaces de emular aspectos de la hipótesis formulada y defendida en la presente tesis doctoral, concretamente la organización del conocimiento en base a una jerarquía de transferencia recursiva. En segundo lugar, haciendo uso de las técnicas de matemática discreta utilizadas en el desarrollo del modelo presentado en capítulos precedentes, proponer un método de reducción de la complejidad computacional asociada a éstos. Concretamente, teniendo en cuenta que el

cerebro es un sistema dinámico y que las técnicas actuales de registro de la actividad cerebral (ej. EEG, ECOG, fMRI etc) generan enormes cantidades de datos, la idea que nos planteamos es la diseñar un protocolo de aprendizaje eficiente que permita allanar el terreno de cara a la utilización de estos modelos en la modelización de la actividad cerebral, esto es, en problemas de aprendizaje a gran escala con objeto de estudiar y validar en un futuro próximo, y desde un punto de vista de implementación computacional, aspectos de la hipótesis de inteligencia con base en el embodiment, esto es, el concepto de jerarquía de transferencia recursiva al cual parece responder la inteligencia biológica.

Pasamos, seguidamente, a describir dichos modelos dentro del contexto en el que fueron concebidos.

Las redes neuronales recursivas fueron introducidas hace poco más de una década (Goller & Kuchler, 1996; Frasconi et al., 1998) en el contexto de aprendizaje de máquinas (del inglés “machine learning”) como modelos capaces de trabajar con datos provenientes de dominios estructurados tales como proteínas, páginas web en formato HTML, redes reguladoras de ADN o árboles sintácticos en problemas derivados del procesamiento de lenguaje natural por mencionar algunos. Estos modelos computacionales son aptos tanto para problemas de clasificación como de regresión siendo capaces de trabajar en problemas de aprendizaje supervisado y no supervisado. Uno de las principales ventajas de estos modelos es su capacidad innata para combinar información numérica y simbólica en el mismo modelo. No obstante, la ventaja más notoria que ofrecen dichos modelos es su habilidad para trabajar con patrones de información con diferentes tamaños y topologías, como lo son árboles o grafos, a diferencia de los modelos de aprendizaje de máquinas clásicos los cuales representan la información, esto es, los patrones en forma de vectores cuya dimensión refleja el

conjunto de variables o características que se estima aportan información al problema de aprendizaje en cuestión.

En general, desde un punto de vista de representación de la información, los grafos pueden considerarse estructuras de datos mucho más flexibles que los vectores. Hay que tener en cuenta que éstos pueden estar constituidos por un número arbitrario de nodos y ramas mientras que los vectores se encuentran más limitados desde un punto de vista de representación de la información puesto que en un problema de aprendizaje concreto la dimensión de los vectores que componen el conjunto de patrones de entrenamiento ha de ser mantenida por todos y cada uno de los patrones que componen no sólo el conjunto de patrones de entrenamiento sino también el de validación. Las principales aplicaciones de estos modelos han sido principalmente en el campo de la bioinformática (Ceroni et al., 2005; Baldi & Pollastri, 2003) aunque también se han aplicado en el campo del análisis de imágenes (Mauro et al., 2003) o en tareas de reconocimiento de lenguaje natural (Costa et al., 2003)) entre otras. Sin embargo, a pesar del interés inicial motivado por estos modelos el desarrollo y aplicación de los mismos se encuentra prácticamente en su infancia. Este hecho puede explicarse en parte como consecuencia de las restricciones inherentes a los primeros modelos, como por ejemplo los primeros modelos de redes neuronales recursivas, los cuales estaban limitados a trabajar no solamente con grafos acíclicos bajo hipótesis de causalidad y estacionariedad, lo cual suponía una limitación considerable para la mayoría de los problemas de aplicación real. Otro de los factores limitativos a considerar lo ha sido la propia idea de trabajar con grafos, ya que éstos poseen por el momento una estructura matemática pobre, por ejemplo, operaciones matemáticas básicas tales como la suma o la covarianza de dos grafos se desconocen. También es importante resaltar que actualmente, problemas de investigación asociados a los modelos recursivos que se

plantearon en etapas tempranas en el desarrollo de los mismos, tales como el aprendizaje genérico entre dos dominios estructurados, esto es, transducciones no isomorfas (ver figura 4.1) continúan siendo actualmente problemas abiertos.

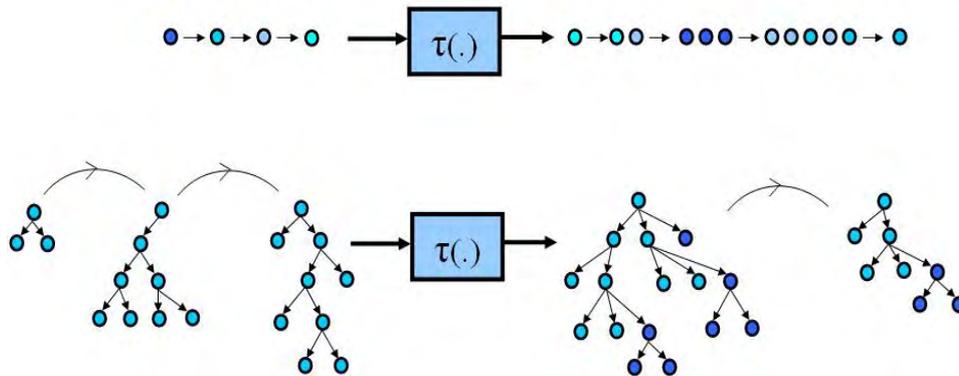


Figura 4.1. Representación esquemática de una transducción de entrada-salida no isomorfa entre dos dominios estructurados. Desde un punto de vista más práctico este tipo de transducción podría representar, por ejemplo, un sistema de traducción instantáneo de lenguaje natural entre español y japonés, o un mapeo complejo entre características extraídas a partir de señales EEG o un problema de predicción terciario de proteínas en bio-informática.

Por otra parte, es importante comentar que a pesar de ciertos avances relativos a modelos recursivos capaces de procesar no solamente estructuras cíclicas (Bianchini et al., 2006; Gori et al., 2006) sino también del procesamiento contextual de la información, a saber, modelos que rompen la hipótesis de causalidad (Hammer et al., 2007; Micheli et al., 2004), amén de la aparición reciente de propuestas bastante básicas de modelos capaces de generar salidas estructuradas (Hammer et al., 2005; Tsochantaridis et al., 2004), desde un punto de vista práctico, la complejidad intrínseca asociada a este tipo de modelos junto con una fase de aprendizaje muy costosa ha limitado de forma notable el interés de la comunidad científica en este tipo de modelos. Sobre este particular es importante hacer hincapié en el hecho de que el aprendizaje en dominios estructurados se ha considerado tradicionalmente como una tarea extremadamente complicada y en este sentido investigadores como Hammer, Saunders

& Sperdutti (2005) han apuntado recientemente que los dos retos futuros más importantes a los que se enfrentan este tipo de modelos lo constituye por una parte el diseño de protocolos de aprendizaje eficientes y por otra atacar de forma apropiada problemas teóricos tales como las transducciones estructurales no isomorfas o la inferencia de estructuras, esto es, problemas que aparecen en la predicción de la estructura de proteínas o el de inferencia de árboles gramaticales en problemas de lenguaje natural.

En la siguiente sección describimos en detalle las redes neuronales recursivas para seguidamente estudiar los principios inherentes a este tipo de modelos computacionales con objeto de entender el potencial que alberga este tipo de modelos. Posteriormente, presentamos una descripción matemática de una regla de aprendizaje estocástica la cual adapta de forma dinámica la tasa de aprendizaje de la red durante la fase de entrenamiento de la red, consiguiendo una velocidad de convergencia próxima a la de un método de segundo orden sin el excesivo requerimiento computacional asociados a éstos. Tras realizar un análisis teórico de la aproximación matemática en la que se basa dicha regla de aprendizaje estocástica, realizamos un análisis de la complejidad del algoritmo asociado a dicha regla cuando ésta se expresa de forma recursiva. El objetivo perseguido es el de obtener una aproximación asintótica a dicha regla para poder reducir aún más los requerimientos computacionales en problemas de aprendizaje a gran escala.

4.2 Redes Neuronales Recursivas

Las redes neuronales recursivas son modelos gráficos deterministas los cuales pertenecen a la categoría de redes recurrentes dinámicas. Uno de los principales objetivos de estos modelos fue el de desarrollar modelos computacionales capaces de

combinar información simbólica y sub-simbólica en el mismo modelo. No obstante, la principal ventaja que ofrecen, tal y como explicamos con anterioridad, respecto de los modelos clásicos es la de poder trabajar con patrones de información de diferentes tamaños y topologías, esto es, grafos posicionales acíclicos con un nodo raíz.

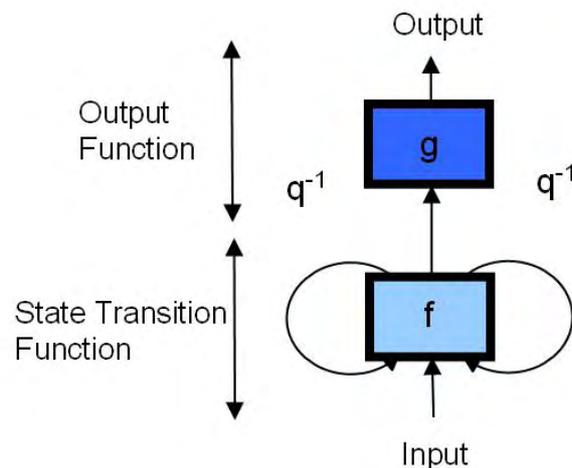


Figura 4.2. Representación gráfica esquematizada de una red neuronal recursiva. Las redes neuronales recursivas son una extensión natural de las redes neuronales recurrentes. Una neurona recurrente puede considerarse como una neurona recursiva aplicada a una lista, esto es, una secuencia de datos.

Introducimos seguidamente unas nociones de notación básicas que utilizaremos en la descripción del modelo computacional de las redes neuronales recursivas (para mayores detalles se ruega consultar el apéndice C). Un grafo U es un par (V,E) , donde V representa el conjunto de nodos del grafo y E el conjunto de ramas. Dado un grafo U y un vértice $v \in V$, denotaremos mediante $pa[v]$ el conjunto de nodos o vértices padre del nodo v , mientras que $ch[v]$ representa el conjunto de sus nodos hijo. Definimos el grado de entrada al nodo v como la cardinalidad del conjunto $pa[v]$, mientras que el grado de salida se define como la cardinalidad del conjunto $ch[v]$. Bajo el paradigma de los modelos recursivos cada nodo contiene un conjunto de variables de dominio caracterizadas mediante un vector de variables reales y categóricas, esto es, cada nodo

codifica un fragmento de información que se cree que juega un papel importante en la tarea en cuestión. Paralelamente, la presencia de una rama (v,w) entre dos nodos modela de forma explícita una relación lógica entre los dos fragmentos de información representados por los nodos v y w .

El modelo básico de una red recursiva (figura 4.2) consta de dos redes: una red de transición de estados f y una red de salida g . Dichas funciones se implementan normalmente por medio de perceptrones multicapa (cuyos parámetros denotaremos mediante los símbolos W_f y W_g respectivamente).

$$\begin{aligned} a(v) &= f(a(ch[v]), I(v), v, W_f) \\ y(v) &= g(a(v), v, W_g) \end{aligned} \tag{4.1}$$

En este sentido estos modelos representan una generalización de las redes recurrentes y se rigen por las mismas ecuaciones similares a las expuestas en la expresión 4.1 las cuales simplemente constituyen una generalización de las ecuaciones clásicas de representación del espacio de estados de sistemas dinámicos para redes recurrentes.

Para procesar un grafo G , la red de transición de estados se despliega siguiendo la topología del grafo que se le presenta a la entrada. Dicho proceso resulta en una red codificadora (ver la figura 4.3) de la estructura que se le presenta a la entrada. Como puede observarse la red producida tiene la misma estructura que el grafo, donde los nodos del mismo se remplazan por copias de la red de transición de estados f y una copia de la red de salida g se inserta en el nodo raíz.

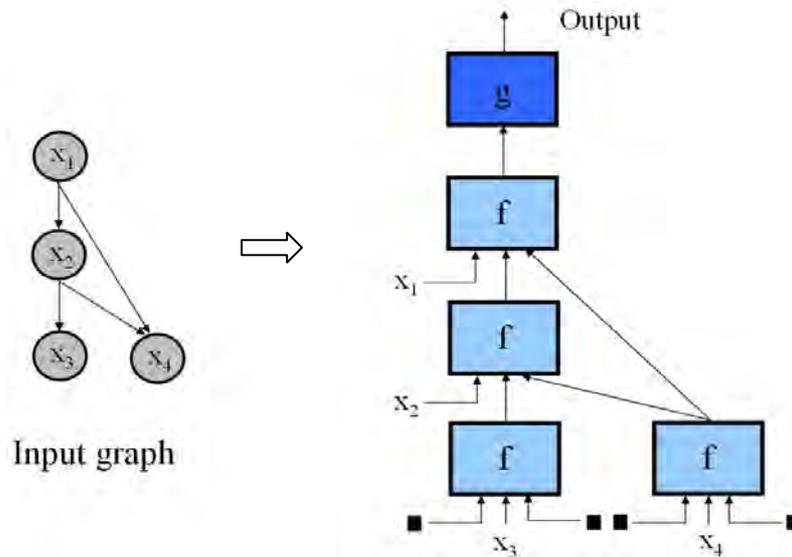


Figura 4.3. Representación gráfica esquematizada del proceso de despliegue de una red neuronal recursiva para adaptarse a la estructura del grafo que se le presenta a la entrada.

Seguidamente, la red codificadora efectúa un cálculo. De esta forma, en cada nodo v del grafo, el estado $a(v)$ asociado a dicho nodo se calcula por la red de transición de estados como una función del conjunto de variables asociadas al nodo v , (primera ecuación de la expresión 4.1) las cuales denotamos como $I(v)$ y el estado de los nodos hijos del nodo v , esto es, $a(ch[v])$.

4.3 Redes Recursivas como Modelos Generativos

De forma general, la noción de inteligencia no puede concebirse sin la existencia de dos principios fundamentales (Leyton, 2001): la maximización de la transferencia y el principio de maximización de inferenciabilidad o recuperabilidad. Básicamente, el primer principio establece que siempre que es posible un sistema o entidad inteligente construye conocimiento maximizando la transferencia de conocimientos adquiridos previamente. Concretamente, estructuras más complejas de conocimiento se construyen como resultado de ensamblar estructuras memorizadas o aprendidas con anterioridad, en otras palabras, se transfieren las acciones usadas en situaciones previas con objeto de

gestionar situaciones nuevas. Sin embargo, es importante aclarar que dicho mecanismo de transferencia debe entenderse como un proceso gestalt, esto es, las estructuras resultantes son mucho más que una simple combinación de las estructuras aprendidas con anterioridad.

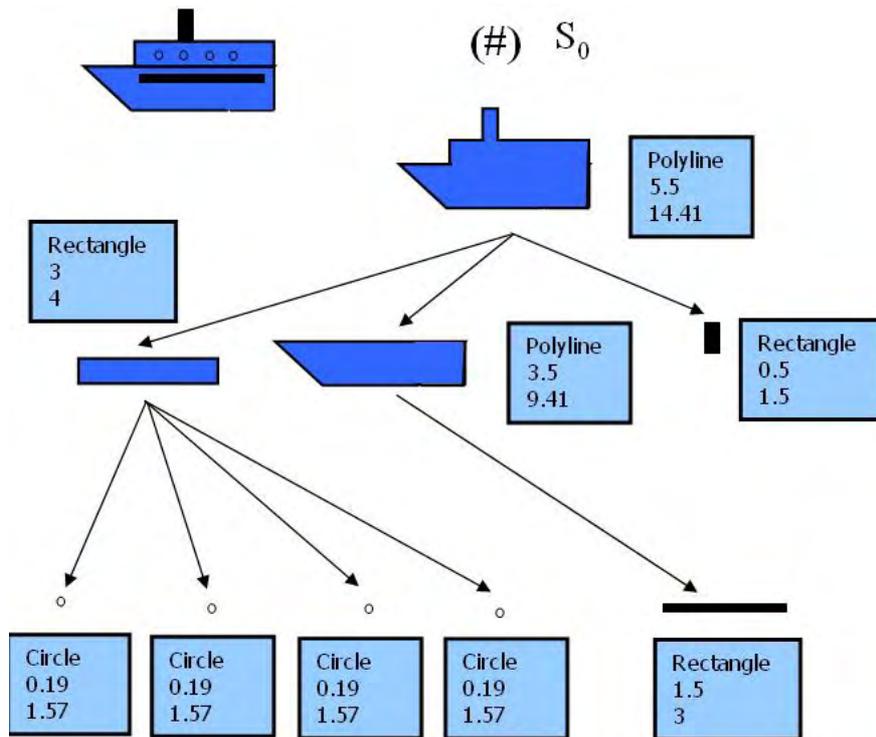


Figura 4.4. Ilustración gráfica del proceso de representación de la información de un dominio estructurado, como lo son las imágenes, mediante la construcción de un grafo etiquetado. Los nodos del grafo se dice que están “etiquetados” dado que contienen conjuntos de variables del dominio en cuestión, este caso dos variables que dan cuenta del área y del perímetro de la figura geométrica en cuestión y una variable simbólica que da cuenta del tipo de figura geométrica. El resultado es una estructura de información mucho más rica en comparación con modelos clásicos que no explotan la información que viene codificada en la propia estructura del problema.

Por otra parte, el principio de inferenciabilidad o recuperabilidad se encuentra directamente asociada con el concepto de memoria. Este principio postula que un sistema o entidad que exhibe un comportamiento inteligente debe de ser capaz de recuperarse de cualquier acción realizada, esto es, un sistema inteligente debe ser capaz

de inferir causas a partir de su estado en curso con objeto de identificar que es lo que falló o triunfó, algo que no es posible sin la existencia de la memoria. En este sentido se ha demostrado recientemente (Leyton, 1992) que el sistema de procesamiento de la información en los seres humanos organiza la información perceptiva de forma cohesiva.

En concreto, dicha estructura es el resultado de sistema organizado de forma jerárquica (Churchland & Sejnowski, 1992; Hecht-Nielsen, 2007) el cual genera las estructuras correlacionando la información procesada en los diferentes niveles de la jerarquía, tal y como hemos visto en capítulos anteriores. Como resultado del citado proceso, la complejidad percibida del mundo externo por nuestros sentidos se convierte en entendimiento por medio de la búsqueda y asignación de estructura a las percepciones. Este mecanismo, entre otras cosas, permite relacionar objetos de diferentes clases. Por otra parte, la naturaleza de las estructuras percibidas así como las relaciones entre las mismas depende del contexto bajo consideración. Por ejemplo, las relaciones entre objetos pueden ser causales en un contexto temporal, geométricas en un contexto de reconocimiento de patrones (por ejemplo, las formas que aparecen en una imagen) o topológicas en problemas de bioinformática, como por ejemplo la estructura de una proteína.

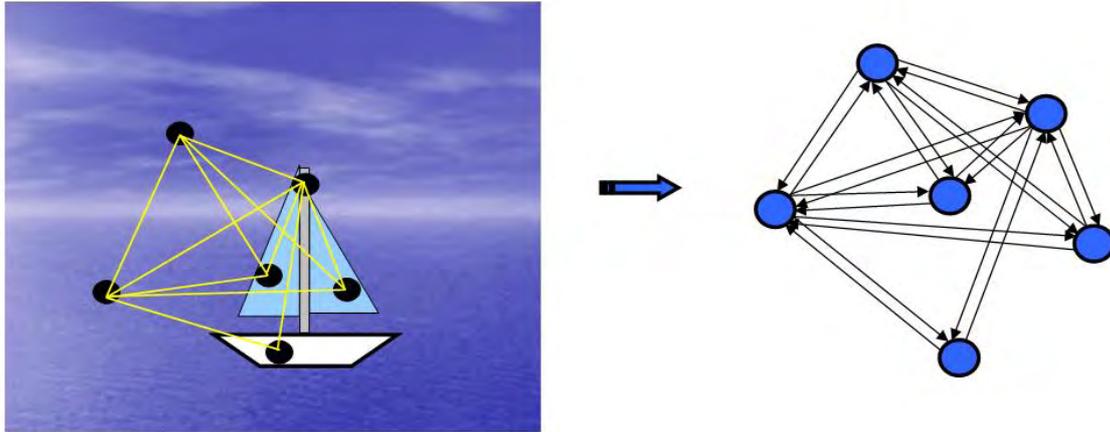


Figura 4.5. Ilustración gráfica del proceso de construcción de un grafo de adyacencia el cual se utiliza en problemas de clasificación de imágenes, es decir, el proceso de construcción del grafo (patrones del conjunto de entrenamiento de la red). El procedimiento de codificación de la información redundante no solamente en una ganancia en cuanto a representación de la información sino en cuanto a contenido de la misma.

Por otra parte, en base a lo anterior es importante comentar que los modelos recursivos presentados en las secciones anteriores implementan los principios generativos descritos con anterioridad. Dentro del marco de trabajo de los modelos recursivos la estructura percibida de un problema se captura y se formaliza haciendo uso de modelos gráficos (ver figuras 4.4 y 4.5). Concretamente, los patrones usados tanto en la fase de entrenamiento como en la fase de validación no solamente codifican fragmentos de información, esto es, información que puede caracterizarse por atributos específicos que son cuantificables y/o medibles, los cuales juegan un papel importante en el problema de aprendizaje sino también las relaciones lógicas existentes entre los mismos. La naturaleza de dichas relaciones viene determinada por el contexto de aplicación tratándose de modelar de forma explícita las correlaciones lógicas entre los fragmentos de información. A título ilustrativo, en un dominio temporal los fragmentos de información son eventos y la co-ocurrencia de dos o más eventos se interpreta como una posible (o existente) correlación entre éstos. Por consiguiente, el citado procedimiento de codificación de la información contiene una mayor cantidad de conocimiento que si

tales piezas o fragmentos de información se consideraran de forma aislada. Es importante resaltar que la noción de contenido de información se encuentra fuertemente conectada a la noción de estructura. De hecho, la idea de ensamblar fragmentos de información para componer estructuras con un contenido intrínseco de información todavía mayor está reflejando el primero de los dos principios generativos de inteligencia, lo cual se traduce no sólo en una ganancia en cuanto a la representación de la información sino en un aumento en cuanto al contenido de la misma.

Por otra parte, el esquema computacional impuesto por los modelos recursivos se traduce en una propagación secuencial de la información que sigue un orden topológico inverso del grafo de entrada a la red durante la fase de validación de la misma. Dicho flujo de información resulta bidireccional durante la fase de aprendizaje. La principal consecuencia de este procedimiento de gestión de la información es que los modelos recursivos pueden interpretarse como sistemas de inferencia los cuales aprenden las dependencias ocultas explícitamente codificadas dentro de las estructuras (patrones) utilizados durante la fase de aprendizaje de la red, implementando por tanto, de forma simplificada la noción de inferenciabilidad descrita en el segundo principio generativo.

4.4 Regla de Aprendizaje Estocástica Vario-eta

Cualquier problema de aprendizaje en los modelos de aprendizaje de máquinas, sea éste determinista o probabilístico, se formula de manera muy frecuente en términos de técnicas de optimización de parámetros. En este sentido el problema de optimización se plantea normalmente en términos de la minimización de una función de error, denotemos a ésta mediante la letra E . Dicha función de error es una función de los parámetros del modelo adaptativo. Una de las técnicas más simples de minimización la

constituye las técnicas de optimización basadas en la búsqueda por gradientes las cuales presentan la ventaja de haber sido ampliamente estudiadas. Seguidamente estudiamos una técnica de optimización estocástica de segundo orden la cual se engloba dentro de las técnicas comentadas con anterioridad relativas a la búsqueda por gradientes. Concretamente, nos planteamos investigar la técnica de optimización conocida con el nombre de “vario-eta” (Zimmermann & Neuneier, 1998).

4.4.1 Descripción Matemática

Supongamos que denotamos mediante $E(w)$ la función de error a minimizar, donde el conjunto de parámetros de nuestro modelo viene representado mediante el vector $w = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m]$ y donde la variable m representaría el número total de parámetros de nuestro modelo. Una perturbación de la función de error alrededor de un punto genérico de los parámetros del modelo puede expresarse tal y como sigue: $E(w + \Delta w) = E(w_1 + \Delta w_1, w_2 + \Delta w_2, \dots, w_m + \Delta w_m)$. Si consideramos el desarrollo de Taylor de la función de error en torno a la perturbación Δw obtendremos:

$$\begin{aligned}
 E(w + \Delta w) = & E(w) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial E}{\partial w_i} (\Delta w_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 E}{\partial w_i^2} (\Delta w_i)^2 + \sum_{i < j} \frac{\partial^2 E}{\partial w_i \partial w_j} \Delta w_i \Delta w_j + \\
 & + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^3 E}{\partial w_i^3} (\Delta w_i)^3 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \frac{\partial^3 E}{\partial w_i \partial w_j^2} (\Delta w_i)(\Delta w_j)^2 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

En la versión por lotes (o “batch” en inglés) de las técnicas de optimización basadas en la búsqueda por gradientes, normalmente dicha búsqueda comienza partiendo de una estimación inicial de los parámetros del modelo. Seguidamente, dichos parámetros se actualizan de forma iterativa haciendo uso del conjunto de datos (base de datos) de

entrenamiento. En la versión secuencial (también denotada “off-line” en inglés) (Bishop, 1997; Haykin, 1999), la evaluación de la función de error así como la actualización de los valores del conjunto de parámetros que componen el modelo se realiza de forma individual para cada patrón (o para un lote pequeño de patrones en comparación con el número total de patrones que componen la base de entrenamiento en el caso de la regla de aprendizaje vario-eta). Cada actualización de los valores del conjunto de parámetros del modelo puede interpretarse como una perturbación o ruido alrededor del punto en el espacio m -dimensional expresado por el valor en curso del vector w . Supongamos una secuencia de N perturbaciones representadas mediante los vectores Δw . Considerando el error como una variable aleatoria e ignorando los términos de tercer y mayor orden en el desarrollo de Taylor asociados a la expresión (4.2), el error esperado (esperanza del error) $\langle E(w) \rangle$ lo podemos expresar de la siguiente forma:

$$\langle E(w) \rangle \cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E(w + \Delta w^n) \quad (4.3)$$

Substituyendo el desarrollo en serie de Taylor de la función de error en la expresión (4.3) y reagrupando términos obtendremos, tal y como se muestra a continuación un desarrollo en serie de la esperanza del error en función de los momentos factoriales de las perturbaciones aleatorias:

$$\langle E(w) \rangle \cong E(w) + \sum_{i=1}^m \langle \Delta w_i \rangle \frac{\partial E}{\partial w_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle (\Delta w_i)^2 \rangle \frac{\partial^2 E}{\partial w_i^2} + \sum_{i < j} \langle \Delta w_i \Delta w_j \rangle \frac{\partial^2 E}{\partial w_i \partial w_j} \quad (4.4)$$

De forma similar, teniendo en cuenta que el incremento en los parámetros del modelo asociado a la regla de optimización basada en la búsqueda por gradientes es $\Delta w_i = -\eta g_i$, el tercer término de la expresión anterior correspondiente a la covarianza puede ignorarse teniendo en cuenta que los elementos de los vectores perturbativos no se encuentran correlacionados con el índice n . Esto es, dicho término puede ignorarse teniendo en cuenta que los patrones del conjunto de entrenamiento se seleccionan de forma aleatoria durante el procedimiento de optimización (fase de aprendizaje). Paralelamente, cuando nos encontramos cerca de un mínimo local podemos asumir que $\langle \Delta w_i \rangle \cong 0$. Por tanto, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores podemos escribir la esperanza del error tal y como se ilustra seguidamente:

$$\langle E(w) \rangle \cong E(w) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle (\Delta w_i)^2 \rangle \frac{\partial^2 E}{\partial w_i^2} = E(w) + \frac{\eta^2}{2} \sum_{i=1}^m \sigma^2(g_i) \frac{\partial^2 E}{\partial w_i^2} \quad (4.5)$$

A partir de la ecuación anterior (4.5) es fácil deducir que el valor esperado del error aumenta en la medida en la que la varianza de los gradientes (representada mediante el símbolo σ^2) aumenta. Por tanto dicha observación sugiere que la función de error debería ser penalizada fuertemente alrededor de tales puntos del espacio de parámetros del modelo. En consecuencia, en aras de cancelar dicho término ruidoso en la expresión del valor esperado de la función de error, la regla de aprendizaje del gradiente debe modificarse a $\Delta w_i = \frac{-\eta g_i}{\sigma(g_i)}$. Concretamente, esta normalización se conoce con el nombre de vario-eta y fue propuesta por Zimmerman and Neuneier, 1997 para el entrenamiento de redes neuronales, esto es, la tasa de aprendizaje se renormaliza por la “aleatoriedad” de la señal de error proveniente del cálculo de los gradientes.

4.4.2 Virtudes y Limitaciones de la Aproximación

La expresión (5.4) se obtuvo bajo la hipótesis de que la esperanza de las perturbaciones Δw_i podían despreciarse cerca de un mínimo local. Con objeto de confirmar la validez de dicha aproximación, seguidamente expresamos la esperanza de las perturbaciones Δw_i en términos de los gradientes de error g_i haciendo uso de la expresión de la regla de actualización de parámetros del modelo para el caso de optimización basada en gradientes de búsqueda:

$$\langle \Delta w_i \rangle = \left\langle -\frac{\eta g_i}{\sigma(g_i)} \right\rangle = -\eta \frac{\langle g_i \rangle}{\sqrt{\langle g_i^2 \rangle - \langle g_i \rangle \langle g_i \rangle}} \quad (4.6)$$

$$\langle g_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_i^n \quad \langle (g_i)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (g_i^n)^2 \quad (4.7)$$

Substituyendo la expresión (4.7), esto es, los valores de los momentos de primer y segundo orden de los gradientes de error en la expresión (4.6) y reordenando términos obtenemos:

$$\langle \Delta w_i \rangle = \frac{-\eta}{\sqrt{N \frac{\sum_{n=1}^N (g_i^n)^2}{\left(\sum_{n=1}^N g_i^n\right)^2} - 1}} = \frac{-\eta}{\sqrt{\frac{N}{f(g_i^1, g_i^2, g_i^3, \dots, g_i^N)} - 1}} \quad (4.8)$$

En la expresión anterior introducimos la función multidimensional f . Dicha función depende de los gradientes de error obtenidos después de N pasos de iteración. Es

importante resaltar que el mínimo y el máximo de dicha función son 1 y N respectivamente. Concretamente, la función alcanza su máximo cuando los gradientes de error son idénticos:

$$f(g_1^1, g_1^2, g_1^3, \dots, g_1^N) = \frac{\left(\sum_{n=1}^N g_i^n\right)^2}{\sum_{n=1}^N (g_i^n)^2} = 1 + 2 \frac{\sum_{n < k} g_i^n g_i^k}{\sum_{n=1}^N (g_i^n)^2} \quad (4.9)$$

Este hecho es de un interés particular dado que implica que los gradientes de error deben ser idénticos a lo largo de N iteraciones. Si tenemos en cuenta que la variable N representa el número de patrones incluidos dentro del lote o “batch” de patrones de entrenamiento la probabilidad de dicho evento es de M^{-N} , donde M es el número total de patrones que componen el conjunto de entrenamiento (normalmente $M \gg N$). Por otra parte, hay que recordar que en la versión de aprendizaje por lotes estándar de la técnica de optimización basada en la búsqueda por gradientes $M = N$. Por consiguiente dicho evento puede en principio ignorarse dado que la probabilidad de éste es muy baja ya que en la práctica $M \gg N \gg 1$. No obstante, conviene precisar que si bien la probabilidad del susodicho evento puede despreciarse, problemas debido a la capacidad de representación numérica (precisión) de los recursos computacionales utilizados podrían hacer que la contribución de dicho error (ver expresión 4.8) pudiera hacerse lo suficientemente grande como para romper la hipótesis anterior. Dicho escenario provocaría oscilaciones en la función de error E durante el procedimiento de optimización. Por lo tanto, en la práctica, la aproximación estaría limitada por la precisión de la máquina utilizada. Sin embargo, es importante comentar que teniendo en cuenta la precisión de los ordenadores actuales, los cuales constan de procesadores con

registros de 64 bits el impacto de dicho problema es mínimo. En cualquier caso en aras de aliviar eventuales problemas de precisión numérica que pudieran surgir se le puede añadir una pequeña constante $0 < \phi \ll 1$ a la desviación típica de los gradientes de error (por ejemplo $\phi = 10^{-6}$) tal y como se sugiere en (Chinea, 2009).

4.5 Análisis de Complejidad

Desde un punto de vista computacional los modelos recursivos descritos con anterioridad resultan intrínsecamente más complejos como consecuencia de utilizar representaciones estructuradas de la información mucho más complejas (como por ejemplo los grafos estructurados) en comparación con modelos que hacen uso de vectores para representar la información. De forma específica, el hacer uso de estructuras de datos más complejas se traduce no sólo en una ganancia en cuanto a las capacidades de representación de dichos modelos sino también en un aumento de la complejidad computacional asociada. De hecho, la principal desventaja que presentan estos modelos estriba en que poseen una fase de aprendizaje que resulta bastante costosa desde el punto de vista computacional.

En esta sección realizamos un análisis de la complejidad que conlleva la regla de aprendizaje estudiada a lo largo de este capítulo desde un punto de vista algorítmico. Para ello partiremos de una expresión recursiva de la regla derivada en (Chinea, 2009) con objeto de poder expresar esta última en términos de funciones generadoras y por tanto su análisis tratable desde el punto de vista de la teoría de analítica combinatoria (Flajolet & Sedgewick, 2009). El principal objetivo de la analítica combinatoria es el de proporcionar predicciones cuantitativas de las propiedades de grandes estructuras combinatorias. Esta teoría ha emergido en décadas recientes como una herramienta fundamental, tal y como pudimos comprobar en el capítulo 3, para el estudio de

modelos científicos en diversas disciplinas así como para el análisis de algoritmos. En este sentido, nuestra intención es la de efectuar un estudio del comportamiento asintótico de la regla de aprendizaje estudiada en este capítulo en aras de reducir sus requerimientos computacionales para problemas de aprendizaje a gran escala.

4.5.1 Funciones Generadoras

De forma general, un algoritmo siempre puede interpretarse como un objeto matemático que se construye de forma iterativa a partir de un conjunto finito de reglas, las cuales a su vez operan sobre un conjunto finito de estructuras de datos. Concretamente cualquier algoritmo posee una estructura inherentemente combinatoria la cual puede modelarse en términos de funciones generadoras. En lo sucesivo, realizaremos una modelización basada en funciones generadoras (ver apéndice A) de la descripción recursiva de la regla de aprendizaje vario-eta proporcionada en (Chinea, 2009). Concretamente, la descripción recursiva consta de dos ecuaciones en diferencias finitas expresadas en forma matricial. Dichas ecuaciones se corresponden con el cálculo de la media y la varianza de los gradientes de error durante un bucle del proceso de optimización. Sin pérdida de generalidad y en especial con objeto de simplificar la notación escribimos seguidamente dichas ecuaciones en formato unidimensional (una sola variable):

$$\hat{g}_n = a_n \hat{g}_{n-1} + b_n g_n \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_k \quad (4.10)$$

$$\sigma_n^2 = a_{n-1} \sigma_{n-1}^2 + b_n (g_n - \hat{g}_{n-1})^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (g_k - \hat{g}_n)^2 \quad (4.11)$$

Seguidamente, aplicando la transformación asociada al cálculo de las funciones generadoras (ver apéndice A) a ambos lados de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\sum_{n \geq 0} \hat{g}_n z^n = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \hat{g}_{n-1} z^n + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} g_n z^n \quad (4.12)$$

$$\sum_{n \geq 0} \sigma_n^2 z^n = \sum_{n \geq 0} \sigma_{n-1}^2 z^n - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n-1} \sigma_{n-1}^2 z^n + \sum_{n \geq 0} n \hat{g}_n^2 z^n - 2 \sum_{n \geq 0} n \hat{g}_n \hat{g}_{n-1} z^n \quad (4.13)$$

Concretamente, la ecuación (4.13) la expresamos únicamente en función de la secuencia asociada al promedio de los gradientes de error \hat{g}_n con objeto de eliminar la dependencia de la ecuación con respecto de la secuencia asociada a los gradientes de error g_n y por tanto de su función generadora $g(z)$ la cual es desconocida, dado que ésta variaría según el conjunto de patrones utilizados para realizar la fase de aprendizaje.

Manipulando algebraicamente y reagrupando términos en las ecuaciones (4.12) y (4.13) obtenemos finalmente las ecuaciones integrales (4.14) y (4.15) en la variable compleja z y dependientes de las funciones generadoras asociadas al promedio de los gradientes de error $\hat{g}(z)$ y de su varianza $\sigma^2(z)$. Es importante resaltar que la obtención de dichas ecuaciones integrales se ha hecho uso del teorema de convolución en el plano complejo (Oppenheim & Schaffer, 1989).

$$\hat{g}(z) = \int \frac{1}{z(1-z)} g(z) dz \quad (4.14)$$

$$(1-z)\sigma^2(z) + z \int \frac{1}{z} \sigma^2(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_c (1-u) \frac{d\hat{g}(u)}{du} \hat{g}(z/u) du \quad (4.15)$$

Inspeccionando las ecuaciones anteriores nos percatamos que su resolución no es evidente dado que desconocemos, tal y como indicamos con anterioridad, la secuencia contadora g_n y por tanto tampoco la expresión de su función generadora $g(z)$. No obstante, tal y como veremos a continuación, es posible averiguar la forma de las mismas interpretando el procedimiento seguido desde un punto de vista probabilístico. De forma específica, la susodicha secuencia g_n es el resultado del cálculo del gradiente de error asociado a un patrón seleccionado de forma aleatoria en el paso de iteración n del conjunto de entrenamiento durante el bucle de optimización del error. Por tanto, desde un punto de vista práctico podemos considerar cada uno de los valores de la secuencia como variables aleatorias independientes. Esta hipótesis es plausible teniendo en cuenta que durante el bucle de optimización los parámetros del modelo no se actualizan, por lo tanto el conjunto de n variables aleatorias estadísticamente independientes que representan los gradientes de error se encontrarán idénticamente distribuidos estadísticamente hablando. En este sentido, es importante enfatizar que cualquier modelo subyacente relativo a las técnicas de aprendizaje de máquinas puede siempre interpretarse como un funcional de los parámetros que componen el mismo. De forma similar, los gradientes de error se calculan evaluando dicho funcional haciendo uso de los patrones que componen el conjunto de entrenamiento. Si tenemos en cuenta que nuestro interés se centra en problemas de aprendizaje a gran escala, esto es problemas de aprendizaje en los cuales el conjunto de patrones de la base de datos es muy elevado, la distribución de probabilidad del promedio de los gradientes de error \hat{g}_n tenderá, en virtud del teorema central de Laplace, a una distribución gaussiana en la medida que el valor de n aumenta. Es importante recordar que la variable discreta n representa el tamaño de la base de datos de patrones en el caso de aprendizaje “off-line” o el tamaño del lote o “batch” de patrones en el caso de un aprendizaje secuencial (“on-

line”). Por consiguiente, en base a lo anterior la función generadora puede aproximarse en el caso de problemas de aprendizaje a gran escala mediante la expresión:

$$\hat{g}(z) \cong e^{\mu z - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2} \quad (4.16)$$

Partiendo de la expresión anterior es inmediato comprobar que la función de variable compleja $\hat{g}(z)$ es analítica para todo $|z| < \infty$, y también holomórfica, esto es, diferenciable en el plano complejo. Teniendo en cuenta que la función $\hat{g}(1/z)$ resulta también ser analítica en el citado intervalo y que el dicha función resulta también ser analítica en el contorno de integración de la expresión (4.15), a tenor del teorema de los residuos de Cauchy dicha integral es cero como resultado de que la función que se integra es analítica y no contiene ninguna singularidad dentro del contorno de integración. Teniendo en cuenta el razonamiento anterior podemos obtener una expresión exacta para la función generadora asociada a la varianza de los gradientes de error:

$$z(1-z) \frac{d^2 \sigma^2(z)}{dz^2} - z \frac{d\sigma^2(z)}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2(z) = 1 + z \left(1 + \log \left(\frac{z-1}{z} \right) \right) \quad (4.17)$$

Esto es, la expresión de la función generadora asociada a la varianza de los gradientes de error (expresión 4.17) se obtiene como resultado de resolver la ecuación diferencial resultante de anular la expresión integral correspondiente al lado derecho de la ecuación (4.15).

4.5.2 Análisis de Singularidades

El principio fundamental asociado a la técnica del análisis de singularidades de funciones generadoras se basa en la existencia de una correspondencia entre el desarrollo asintótico de una función cerca de sus singularidades dominantes y la expresión asintótica de los coeficientes de dicha función. De forma más concreta, el método se basa principalmente en el uso de la fórmula de extracción de coeficientes de una función generadora de Cauchy (ver apéndice A) la cual se usa de manera conjunta con unos contornos especiales de integración denominados contornos de Hankel (Flajolet & Odlyzko, 1990). En nuestro caso estamos interesados en obtener una expresión asintótica de los coeficientes asociados a la función generadora de la varianza de los gradientes de error (expresión 4.17). Para ello, el primer paso consiste en expresar dichos coeficientes en términos de una integral de contorno haciendo uso de la fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned}
 [z^n] \sigma^2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{\sigma^2(z)}{z^{n+1}} dz = & (4.18) \\
 & \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{z^n} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{z^n} \log\left(\frac{z-1}{z}\right) dz
 \end{aligned}$$

El segundo paso consiste en expresar la integral de contorno (4.18) haciendo uso de un contorno de Hankel. Con este fin, bajo el cambio de variables $z = 1 + \frac{t}{n}$, el kernel z^{-n-1} en la integral (4.18) se transforma asintóticamente en una exponencial. Realizando el mencionado cambio de variables y aplicando un contorno de integración de Hankel obtenemos:

$$\begin{aligned}
 [z^n]\sigma^2(z) &= \frac{1}{2\pi i n} \int_{+\infty}^{(0)} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n-1} dt + \frac{1}{2\pi i n} \int_{+\infty}^{(0)} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} dt + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i n} \int_{+\infty}^{(0)} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \log\left(\frac{t/n}{1+t/n}\right) dt
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

A partir de la expresión anterior podemos comprobar que de forma efectiva el contorno y el reescalado capturan el comportamiento de la función cerca de sus singularidades, permitiendo por tanto la estimación de sus coeficientes en la medida que $n \rightarrow \infty$.

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{(0)} (-t)^s e^{-t} dt
 \tag{4.20}$$

Reagrupando términos y expresando los diferentes términos de la integral en términos de la función gamma (ver expresión 4.20) obtenemos finalmente una expresión asintótica de los coeficientes de la secuencia asociada a la varianza de los gradientes de error:

$$\sigma_n^2 = [z^n]\sigma^2(z) \cong \frac{\gamma}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^3} \cong \frac{\gamma}{n}
 \tag{4.21}$$

En la expresión anterior la constante γ es la constante de Euler-Mascheroni y el resultado obtenido es de un interés particular dado que implica que para un problema de aprendizaje a gran escala, esto es, para valores muy grandes de n (el número de patrones del conjunto de entrenamiento) no necesitaríamos realizar el cálculo directo o iterativo

de la varianza de los gradientes de error (ver expresión 4.11) dado que ésta puede aproximarse haciendo uso de la expresión asintótica (4.21) la cual depende única y exclusivamente del número de patrones de la base de datos de entrenamiento.

4.6 Resultados Prácticos

La expresión (4.21) proporciona la ley de crecimiento asintótico de los coeficientes asociados a la función generadora que describe la varianza del promedio de los gradientes de error. La figura 4.6 muestra el resultado del cálculo de la varianza de una variable aleatoria. Concretamente, la figura muestra el resultado de promediar n variables aleatorias distribuidas uniformemente en el intervalo $[0,1]$ para valores de n , esto es, del número de patrones del conjunto de entrenamiento que van de 500 a 1000000 (ver la línea continua de la gráfica que contiene cuadrados en los puntos de muestreo) frente a la aproximación asintótica obtenida en la sección 4.5.2 (línea a trazos con rombos en los puntos de muestreo).

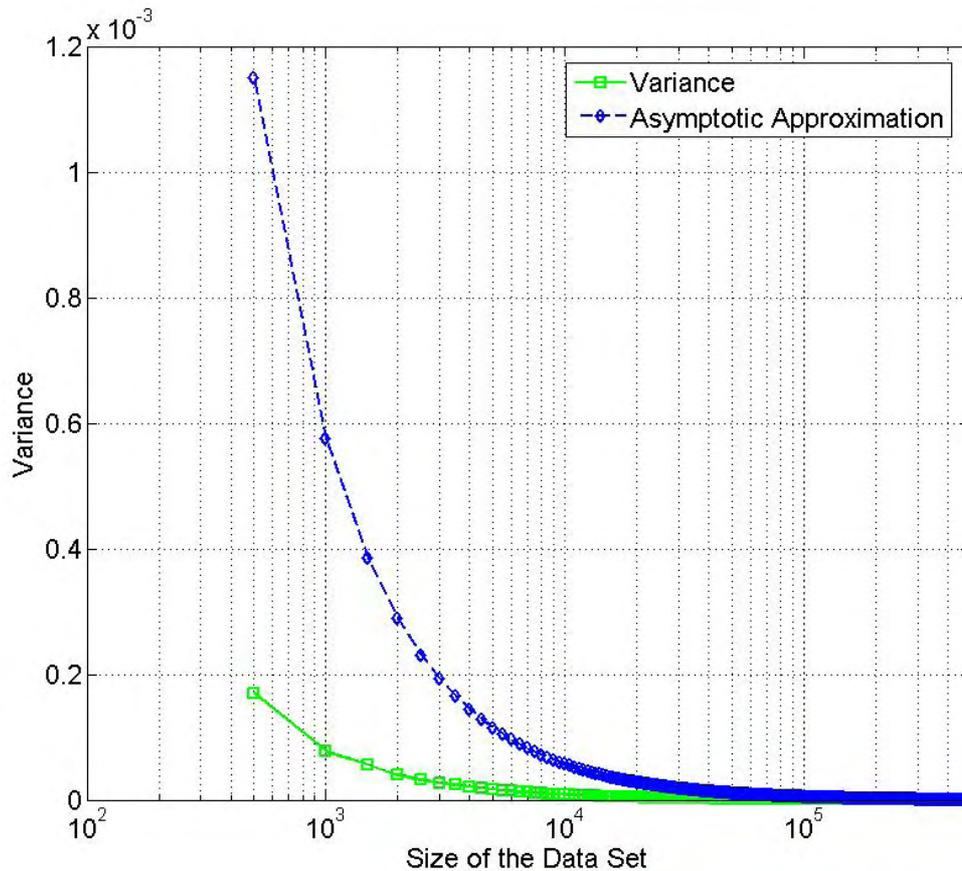


Figura 4.6. Representación gráfica de la varianza del promedio de n variables aleatorias distribuidas uniformemente, donde n a su vez representa el tamaño del conjunto de patrones de entrenamiento, frente a su aproximación asintótica.

Inspeccionando la gráfica podemos apreciar que la aproximación asintótica se comporta bastante bien para valores de n mayores o iguales a 50000. A título ilustrativo para $n = 49500$ el error existente entre el valor real y la aproximación asintótica es más pequeño que 10^{-5} . De forma similar, para $n = 5000$ el error es menor que 10^{-4} . Los resultados obtenidos son de una importancia particular para problemas de aprendizaje que consten de bases de datos enormes, por ejemplo con un número de patrones en torno al millón o mayor dado que en este tipo de problemas el aprendizaje por lotes (“off-line”) resultaría impráctico incluso para técnicas sofisticadas de aceleración basadas en la búsqueda por gradientes tales como la técnica de los gradientes conjugados. En este sentido es

importante resaltar que este tipo de técnicas no es posible aplicarlas en el aprendizaje secuencial. Por contra la regla de aprendizaje vario-eta ofrece la posibilidad de trabajar tanto en modo de aprendizaje secuencial (“on-line”) como en modo de aprendizaje por lotes (“off-line” o “batch mode”).

Por último, supongamos que el número de patrones del conjunto de entrenamiento es M , y denotemos mediante N el número de patrones empleado para conformar el tamaño del lote de patrones en un hipotético problema de aprendizaje secuencial. La convergencia de la regla de aprendizaje en un aprendizaje secuencial siempre quedaría garantizada por el teorema de Robbins-Monro (Kushner & Yin, 1997) siempre y cuando se cumpla la condición $M \gg N$. Por consiguiente, bajo la hipótesis de un valor muy grande de M si además imponemos la condición $N \gg I$ la aproximación asintótica obtenida en (4.21) se cumpliría y por tanto obtendríamos para un problema de aprendizaje secuencial a gran escala una velocidad de convergencia típica de un método aproximadamente de segundo orden a un coste computacional muy bajo. Sin embargo, también es importante recordar que los resultados teóricos obtenidos han de interpretarse con cautela dado que en las bases de datos provenientes de problemas de aprendizaje reales contienen pueden existir correlaciones entre patrones y por tanto romper la hipótesis de partida, esto es la hipótesis independencia realizada en la sección 4.5.1, aunque este tipo de problemas puede soslayarse haciendo uso de técnicas de pre-procesamiento de los datos adecuadas (Bishop, 1997, 2006; Haykin, 1999).

No obstante, tal y como señalamos en la introducción de este capítulo, es importante tener en cuenta que las técnicas actuales para registro y estudio de la actividad cerebral tales como la electroencefalografía (EEG), electrocorticografía (ECOG), la tomografía por emisión de positrones (PET) o la resonancia magnética funcional (fMRI) entre otras generan enormes cantidades de datos. Paralelamente, es

importante enfatizar que los cerebros son sistemas de procesamiento de la información dinámicos. Los resultados teóricos obtenidos en los capítulos anteriores relativos al modelo de inteligencia con base en el embodiment pertenecen al campo de la mecánica estadística de equilibrio. Concretamente, en vez de estudiar la evolución temporal exacta de las estructuras simbólicas propuestas, se hace uso de promedios congelados con objeto de extraer el comportamiento típico del sistema, como por ejemplo, el contenido medio en información de las estructuras. Por lo tanto, en aras de conseguir una mayor comprensión de la dinámica temporal asociada a las estructuras simbólicas sería necesario analizar registros correspondientes a señales de electrocorticografía (ECOG) , electroencefalografía (EEG) y también de resonancia magnética funcional (fMRI) y es en esta línea donde los modelos recursivos junto con el material presentado en este capítulo, estimamos, jugarían un papel importante dado que, tal y como hemos visto, se trata, por una parte, de modelos dinámicos capaces de poder representar datos y estructuras dinámicas complejas, y por otra el análisis de complejidad realizado permitiría abordar tareas de aprendizaje a gran escala como las requeridas para dar cuenta de las ingentes cantidades de datos que generan las mencionadas técnicas de registro de actividad cerebral.

4.7 Conclusiones

En este capítulo hemos descrito los principios subyacentes a las redes neuronales recursivas. Concretamente, hemos visto que dentro del campo del aprendizaje de máquinas en cualquier problema de clasificación o regresión el contenido de la información presenta una cierta geometría que estos modelos tratan de explotar. Sobre este particular, el hecho de hacer uso de representaciones estructuradas de la información se traduce directamente en una ganancia substancial en el contenido de la

información de la representación. No obstante, este tipo de modelos requieren nuevos protocolos de aprendizaje capaces no solamente de dar cuenta del aumento de la complejidad como consecuencia del uso de representaciones estructuradas de la información sino también capaces de permitir atacar problemas de aprendizaje a gran escala, como por ejemplo, los que surgen relativos a las técnicas de registro de la actividad cerebral.

Dentro de este contexto hemos presentado una descripción matemática de la regla de aprendizaje estocástica Vario-eta. Las ventajas de esta regla de aprendizaje quedan patentes cuando se expresa ésta de forma recursiva, pues se consigue un buen compromiso entre la velocidad de convergencia y el esfuerzo computacional requerido, lo cual la hace idónea para problemas de aprendizaje a gran escala, esto es, las propiedades de escalado resultantes la hacen idónea para los requerimientos computacionales asociados a los modelos recursivos, permitiendo a su vez que el esquema asociado a la misma pueda ser adaptado sin dificultad a otros modelos recursivos tales como los modelos contextuales o las redes neuronales grafo. Seguidamente, hemos presentado un análisis teórico de la fiabilidad de las hipótesis de base asociadas a dicha regla de aprendizaje mostrando su consistencia. Finalmente, hemos presentado un análisis de la complejidad del algoritmo asociado a dicha regla con objeto de entender sus propiedades asintóticas. Como resultado de dicho análisis dedujimos una expresión asintótica para dicha regla la cual consigue una considerable reducción en el coste computacional asociado en problemas de aprendizaje a gran escala. Estos resultados, entendemos, facilitarán la labor futura de utilización de los modelos recursivos no solamente en otros campos del aprendizaje de máquinas tales como la bioinformática o el lenguaje natural sino fundamentalmente en la modelización de la actividad cerebral en aras de estudiar y validar, desde un punto de vista de

implementación computacional, aspectos de la hipótesis de inteligencia con base en el embodiment, esto es, el concepto de jerarquía de transferencia recursiva defendido en capítulos anteriores al cual parece responder la inteligencia biológica.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis doctoral hemos investigado principalmente una hipótesis relativa a la existencia de un principio de procesamiento de la información común asociado a todos los sistemas nerviosos resultado del proceso evolutivo como base para la emergencia de la inteligencia. Hemos denotado dicha hipótesis como la hipótesis de inteligencia animal con base en el embodiment. El concepto de embodiment se ha usado a lo largo de esta tesis con objeto de expresar la idea fundamental que el sistema motor tiene una influencia en la cognición similar a la que ejerce la mente sobre las acciones que realiza nuestro cuerpo. En primer lugar, hemos presentado las ideas más importantes relativas a teorías recientes de neurociencia evolutiva. Dichas teorías postularon que la emergencia de la cognición en vertebrados superiores se debió a una extensión filogenética del movimiento. En segundo lugar hemos revisado un gran número de investigaciones del campo de la psicología cognitiva que avalan la hipótesis formulada. Seguidamente

hemos argumentado que dichas evidencias experimentales ponían de manifiesto la existencia de un mecanismo combinatorio asociado a las funciones cognitivas presentes en el cerebro de los animales. El susodicho mecanismo lo bautizamos con el nombre de primitivas de movimiento con objeto de enfatizar el hecho de que éstas se han heredado de animales primitivos como consecuencia del principio de conservación filogenética. Dichas primitivas de movimiento ponen de manifiesto la idea de un sistema de procesamiento de la información diseñado para combinar unidades discretas de conocimiento, esto es, símbolos en reglas que conforman estructuras (símbolos) de mayor orden (más abstractos). Concretamente, dichas estructuras de mayor orden son la base para representaciones independientes del contexto, esto es representaciones simbólicas, dentro de un sistema de procesamiento de la información organizado jerárquicamente. Dentro de este contexto, planteamos una aproximación simbólica a la cognición con objeto de dar cuenta la infinidad de evidencias experimentales demostrando la verosimilitud de la hipótesis planteada. En este sentido los aspectos más esenciales de la hipótesis se modelaron en términos de estructuras consistentes en una organización jerárquica, esto es, en forma de árbol, de símbolos con interacciones simbólicas muy específicas. Estas estructuras capturaban las operaciones de procesamiento de la información cuyos principios funcionales han sido conservados a lo largo del proceso evolutivo. En particular, las interacciones simbólicas de tales estructuras reflejan el principio de procesamiento de la información común a todas las funciones cognitivas las cuales se basan en el concepto expresado por las primitivas de movimiento. La estructura jerárquica de las mismas se basa en la idea de diferentes niveles de procesamiento de la información, no solamente en aras de reducir la complejidad sino como una manera de generar reglas abstractas con objeto de representar y manejar estímulos complejos. Se ha hecho uso del término “abstracto”

para denotar tales reglas con objeto de expresar la idea de que las mismas reglas se utilizan en situaciones o contextos diferentes. Posteriormente, en aras de verificar la verosimilitud de la hipótesis formulamos el problema en términos de mecánica estadística con objeto de validar la idea de si la inteligencia animal podía explicarse como un fenómeno emergente resultado de la interacción de un gran número de representaciones simbólicas de conocimiento basadas en las primitivas de movimiento. El resultado de dicho análisis aportó las siguientes conclusiones:

- Las diferencias cognitivas entre las diferentes especies pueden explicarse en términos del contenido medio de información de una familia de estructuras simbólicas organizadas jerárquicamente que emergían del modelo. Concretamente, el esquema resultante de organización de la información demostró ser fuertemente dependiente del número de niveles de procesamiento de la información y del número medio de símbolos empleados para la ejecución de operaciones simbólicas de movimiento.
- La eficiencia extrema en consumo de energía, esto es, en recursos metabólicos de los cerebros de los animales puede explicarse como consecuencia de la reversibilidad lógica asociada a sus operaciones simbólicas. En otras palabras, el género computacional adoptado por los cerebros frutos del proceso evolutivo minimiza pérdidas de energía.
- El proceso evolutivo favoreció la laminación de estructuras cerebrales con objeto de aumentar el contenido de información de las estructuras cerebrales,

esto es, las capacidades de representación de la información y/o cognitivas, sin incrementar de forma substancial los costes metabólicos asociados.

Los resultados teóricos anteriores no mostraron contradicción alguna con la hipótesis formulada. Paralelamente, con objeto de mostrar la relevancia de los resultados teóricos obtenidos presentamos un ejemplo de aplicación del modelo propuesto consistente en analizar las capacidades cognitivas de dos especies sofisticadas desde el punto de vista cognitivo como lo son delfines y elefantes. Dentro de este contexto, también se discutieron las implicaciones del modelo frente a las teorías modernas de inteligencia poniéndose de manifiesto, una vez más, la consistencia de la hipótesis formulada. Por consiguiente, las estructuras simbólicas propuestas junto con las interacciones entre símbolos basadas en las primitivas de movimiento proporcionan una condición suficiente aunque no necesaria para la emergencia de la inteligencia.

Quizás, una de las implicaciones más sobresalientes del modelo propuesto es la de haber proporcionado una explicación razonable a una pregunta persistente y no resuelta en las teorías de inteligencia humana. Precisamente, sobre el encarnizado debate sobre si un individuo posee un nivel global de inteligencia o si en vez de ello lo que denominamos inteligencia es de hecho un conjunto de habilidades independientes. Los resultados que se desprenden del modelo indicaban la existencia de un único principio funcional basado principalmente en el concepto de las primitivas de movimiento como mecanismo de base para la emergencia de la inteligencia. No obstante, la implementación de dicho principio funcional en una estructura física cerebral como el cortex la cual no es uniforme desde un punto de vista fisiológico ocasiona que la inteligencia se perciba como un proceso compuesto de varias componentes o habilidades.

En resumen, el modelo permite proporcionar algunas respuestas no solamente a la eficiencia que se observa en las operaciones realizadas por el cerebro sino también explicar las discontinuidades que existen desde un punto de vista cuantitativo en las capacidades cognitivas de las diferentes especies, permitiendo a la vez explicar las similitudes en los niveles de inteligencia también observados.

Por otra parte, también presentamos una aplicación práctica de las técnicas modernas de matemática discreta empleadas en el desarrollo del modelo, a saber, después de introducir los principios subyacentes a las redes neuronales recursivas presentamos un análisis de la complejidad relativa a una regla de aprendizaje estocástica, la cual expresada de forma recursiva consigue una considerable reducción en cuanto a coste computacional se refiere. El objetivo del análisis de complejidad estribaba en comprender sus propiedades asintóticas para tratar de reducir aun más sus requerimientos computacionales en problemas de aprendizaje a gran escala. Como resultado de dicho análisis dedujimos una expresión asintótica para dicha regla la cual consigue una considerable reducción en el coste computacional asociado a dicha regla en problemas de aprendizaje a gran escala.

Por último, y como desarrollo futuro de los temas tratados en esta tesis doctoral, es importante enfatizar que los cerebros son sistemas de procesamiento de la información dinámicos. Los resultados teóricos obtenidos pertenecen al campo de la mecánica estadística de equilibrio. Concretamente, en vez de estudiar la evolución temporal exacta de las estructuras simbólicas propuestas, se hace uso de promedios congelados con objeto de extraer el comportamiento típico del sistema, como por ejemplo, el contenido medio en información de las estructuras. Por lo tanto, en aras de conseguir una mayor comprensión de la dinámica temporal asociada a las estructuras simbólicas sería necesario analizar registros correspondientes a señales de

electrocorticografía (ECOG) y/o de electroencefalografía (EEG) que evidenciaran aprendizaje y funciones cognitivas superiores con objeto de construir las matemáticas necesarias para comprender las diferencias entre las técnicas de mecánica estadística de equilibrio adoptadas en el presente estudio y la dinámica temporal real que siguen las funciones cognitivas en el neocortex. Con este fin, la utilización de los resultados relativos a los modelos recursivos presentados facilitará la labor futura de modelización, desde un punto de vista de implementación computacional, aspectos de la hipótesis de inteligencia con base en el embodiment, esto es, el concepto de jerarquía de transferencia recursiva al cual parece responder la inteligencia biológica suscrito a lo largo de esta tesis doctoral.

Por otra parte, desde un punto de vista más teórico, avances recientes en el campo de la física de fuera de equilibrio han proporcionado resultados interesantes relativos a la relación entre información, producción de entropía en sistemas dinámicos no lineales y computación (Gaspard, 2004; Andrieux & Gaspard, 2008). De forma similar, la teoría de percolación y grafos aleatorios también proporcionaría un marco de trabajo apropiado para la descripción de la dinámica cerebral. Por ejemplo, neuro-percolación es una red celular aleatoria basada en principios termodinámicos que es capaz de describir las transiciones de fase y fenómenos críticos en redes a gran escala, proporcionando a su vez un entorno matemático natural para el modelado de propiedades colectivas de las redes cerebrales especialmente en las proximidades a estados críticos (Kozma et al., 2012; Bollobas et al., 2009). En este contexto, un trabajo reciente de Ochab y Burda (2012) presentaba un estudio relativo a modelos de caminos aleatorios (del inglés “random walks”) en árboles de Cayley, una aproximación que creemos resultaría también pertinente para el estudio de la mencionada dinámica temporal. Esperamos, finalmente, que los capítulos incluidos en este proyecto de tesis

doctoral hayan ilustrado adecuadamente el potencial de las técnicas de mecánica estadística.

Bibliografia

Arbib, M. (1968). (Editor). *Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigroups*. New York: Academic Press.

Aiello, L.C. (1996). Hominine preadaptations for language and cognition. In P. Mellars & K. Gibson (Eds.), *Modeling the early human mind* (pp. 89-99). Cambridge, UK: McDonald Institute Monographs.

Anderson, M. (1992). *Intelligence and development: A cognitive theory*. Malden, MA: Blackwell.

Andrieux, D., Gaspard, P. (2008). Dynamical randomness, information, and Landauer's principle. *EuroPhysics Letters*, 81, 28004-28007.

Arbib, M.A. (2005). From monkey-like action recognition to human language: An evolutionary framework for neurolinguistics. *Behavioral and Brain Sciences*, 28, 105-167.

Baldi, P., Pollastri, G. (2003). The Principled Design of Large-Scale Recursive Neural Networks Architectures-DAG-RNNs and the Protein Structure Prediction Problem. *Journal of Machine Learning Research*. 4, 575-602.

Baldi, P., Rosen-Zvi, M. (2005). On the Relationship between Deterministic and Probabilistic Directed Graphical Models: from Bayesian Networks to Recursive Neural Networks. *Neural Networks* 18 (8), 1080-1086 (2005).

Bar-Yosef, O., Vandermeersch, B., Arensburg, B., Goldberg, P., & Laville, H. (1986). New data on the origin of modern man in the Levant. *Current Anthropology*, 27,

63-64.

- Basset, D.S., Meyer-Linderberg, A., Achard, S., Duke, T., & Bullmore, E.T. (2006). Adaptive reconfiguration of fractal small-world human brain functional networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 103, 19518-19523.
- Bates, L.A., Lee, P.C., Njiraini, N.W., Poole, J.H., Sayialel, K.N., Sayialel, S., Moss, C.J., & Byrne, R.W. (2008a). Do elephants show empathy?, *Journal of Consciousness Studies*, 16, 204-225.
- Bates, L.A., Poole, J.H., & Byrne, R.W. (2008b). Elephant cognition. *Current Biology*, 18, R544-R546.
- Bennett C. H. (1982). The Thermodynamics of Computation. A Review. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(12), 905-940.
- Bianchini, M., Gori, M, Sarti, L., & Scarselli, F. (2006) Recursive Processing of Cyclic Graphs. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9 (17), pp. 10-18.
- Bishop, C.M. (1997). *Neural Networks for Pattern Recognition*, Oxford University Press, Oxford.
- Bishop, C.M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer Science+Business meadia, LLC.
- Bollobas, B., Kozma, R., & Miklos, D., (Eds.) (2009). *Handbook of Large-Scale Random Networks*, Bolyai Society Mathematical Studies, New York: Springer Verlag.

- Bourgine, P., & Nadal, J.P. (2004). *Cognitive Economics: An interdisciplinary approach*. Heidelberg, DE: Springer.
- Bullmore, E., & Sporns, O. (2009). Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems. *Nature Review Neuroscience*, 10, 186-198.
- Butti, C., Raghanti, M.A., Sherwood, C.C., & Hof, P.R., (2011). The neocortex of cetaceans: Cytoarchitecture and comparison with other aquatic and terrestrial species. *Annals of the New York Academy of Sciences*, doi: 10.1111/j.1749-6632.2011.05980.x.
- Byrne, R., (1995). *The Thinking Ape: Evolutionary Origins of Intelligence*, Oxford, UK:Oxford University Press.
- Byrne, R.W., & Whiten, A. (Eds.), (1988). *Machiavellian intelligence: Social expertise and the evolution of intellect in monekys, apes and humans*. Oxford, UK: Clarendon Press.
- Carroll, J.B., (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Cattell, R.B., (1943). The measurement of adult intelligence. *Psychological Bulletin*, 40, 153-193.
- Cattell, R.B., (1963). Theory of fluid and crystallized intelligence: A critical experiment. *Journal of Educational Psychology*, 54, 1-22.
- Canfield, D.E., Poulton, S.W., & Narbonne, G.M. (2007). Late-Neoproterozoic deep-

ocean oxygenation and the rise of animal life. *Science*, 315, 92-95.

Ceroni, A., Frasconi, P., Pollastri, G. (2005). Learning Protein Secondary Structure From Sequential and Relational Data. *Neural Networks*. 18, 1029-1039.

Chandler D. (1987). *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. Oxford, UK:Oxford University Press.

Chanzigi, M.A., Shimojo, S. (2005). Principles of connectivity and parcellation in neocortex. *Brain, Behaviour and Evolution*, 66, 88-98.

Changizi, M.A. (2007). Scaling the brain and its connections. In J.H. Kaas, L.A. Krubitzer (Eds.), *Evolution of Nervous Systems, A Comprehensive Review*, (vol. 3, pp. 167-180). Amsterdam, NE:Elsevier.

Chevalier-Skolnikoff, S., & Liska, J. (1993). Tool use by wild and captive elephants. *Animal Behavior*, 46, 209-219.

China, A. (2009). Understanding the Principles of Recursive Neural Networks: A Generative Approach to Tackle Model Complexity. In: Alippi, C., Polycarpou, M., Panayiotou, C., Ellinas, G. (eds.) *ICANN 2009*. LNCS 5768, pp. 952-963. Springer, Heidelberg.

Chittka, L., & Niven, J. (2009). Are bigger brains better?. *Current Biology*, 19, R995-R1008.

Churchland, P., & Sejnowski, T. (1992). *The Computational Brain*. Cambridge, USA: MIT Press.

Comtet, L. (1974). *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*.
Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Connor, R.C., Richards, A.F., Smolker, R.A., & Mann, J. (1996). Patterns of female attractiveness in Indian Ocean bottlenose dolphins. *Behaviour*, 133, 37-69.

Connor, R.C., Smolker, R.A., & Richards, A.F. (1992a). Two levels of alliance formation among male bottlenose dolphins (*Tursiops* sp.). *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 89, 987-990.

Connor, R.C., Smolker, R.A., & Richards, A.F. (1992b). Dolphin alliances and coalitions. In A.H. Harcourt, F.B.M De Waal (Eds.), *Coalitions and Alliances in Animals and Humans* (pp. 415-443), Oxford, UK: Oxford University Press.

Corballis, M. (2002). *From hand to mouth: The origins of language*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Costa, F., Frasconi, P., Lombardo, V., Soda, G. (2003). Towards Incremental Parsing of Natural Language Using Recursive Neural Networks. *Applied Intelligence* 19, 9-25.

Costa, D.P., & Williams, T.M. (1999). Marine mammals energetics. In J.E.I. Reynolds, S.A. Rommel (Eds.), *Biology of Marine Mammals* (pp. 176-211). Washington, US:Smithsonian.

Cutler, R.G. (1979). Evolution of longevity in ungulates and carnivores. *Gerontology*, 25, 69-86.

Dacke, M., & Srinivasan, M. (2008). Evidence for counting in insects. *Animal*

Cognition, 11, 683-689.

Decety, J., & Grèzes, J. (2006). The power of simulation: Imagining one's own and other's behavior. *Brain Research*, 1079, 4-14.

De Vega M., Glenberg A., & Graesser A. (Eds.) (2008). *Symbols and Embodiment: Debates on Meaning and Cognition*. New York: Oxford University Press.

Diamond, M.C., Scheibel, A.B., Murphy, G.M., Jr., & Harvey, T. (1985). On the brain of a scientist: Albert Einstein. *Experimental Neurology*, 88, 198-204.

Dotsenko, V., (2005). *Introduction to the Replica Theory of Disordered Statistical Systems (Collection Alea-Saclay: Monographs and Texts in Statistical Physics)*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Douglas-Hamilton, I., Bhalla, S., Wittemyer, G., & Vollrath, F. (2006). Behavioral reactions of elephants towards a dying and deceased matriarch. *Applied Animal Behavioral Science*, 100, 87-102.

Dunbar, R. (1996). *Grooming, gossip, and the evolution of language*. London, UK: Faber & Faber.

Emery, N.J., & Clayton, N.S. (2004). The mentality of crows: convergent evolution of intelligence in corvids and apes. *Science*, 306, 1903-1907.

Engel, A., & Van den Broeck, C. (2001). *Statistical Mechanics of Learning*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Eriksen, N., & Pakkenberg, B. (2007). Total neocortical cell number in the mysticete

brain.*The Anatomical Record*, 290, 83-95.

Eysenck, H.J. (1988). The concept of "intelligence": Useful or useless?. *Intelligence*, 12, 1-16.

Fauconnier, G., & Turner, M. (2002). *The way we think: Conceptual blending and the mind's hidden complexities*. New York, NY: Oxford University Press.

Fike D. A., Grotzinger J. P., Pratt L. M., & Summons R. E. (2006). Oxidation of the Ediacaran ocean, *Nature*, 444,744-747.

Flajolet, P., & Sedgewick R. (2009). *Analytic Combinatorics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Flajolet, P., & Odlyzko, A. M. (1990). Singularity Analysis of Generating Functions. In: *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 3,2 New York.

Flynn, J.R. (2007). *What is intelligence? Beyond the Flynn effect*. New York, NY: Cambridge University Press.

Foerder, P., Galloway, M., Barthel, T., Moore, D.E. III, & Reiss, D. (2011). Insightful Problem Solving in an Asian Elephant. *PLoS ONE*, 6(8), e23251.
doi:10.1371/journal.pone.0023251.

Foley, C.A.H. (2002). The effects of poaching on elephant social systems. PhD. Dissertation, Princeton University.

Fox, M.D., & Raichle, M.E. (2007). Spontaneous fluctuations in brain activity observed with functional magnetic resonance imaging. *Nature Review Neuroscience*, 8,

700-711.

Frasconi, P., Gori, M., & Sperduti, A. (1998). A General Framework for Adaptive Processing of Data Structures. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9 (5), pp. 768-786.

Frasconi, P., Gori, M., Kuchler, A., & Sperduti, A. (2001). From Sequences to Data Structures: Theory and Application. Kolen, J., Kremer, S. (Eds.), *A Field Guide to Dynamical Recurrent Networks*. pp. 351-364. IEEE Press, Inc., New York.

Friede, R.L., (1963). The relationship of body size, nerve cell size, axon length, and glial cell density in the cerebellum. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 49, 187-193.

Friede, R.L., & Van Houten, W.H. (1962). Neuronal extension and glial supply: Functional significance of glia. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 48, 817-821.

Frye, D. (1993). Causes and precursors of children's theory of mind. In D.F. Hay & A. Angold (Eds.), *Precursors and causes of development and psychopathology*. Chichester, UK: Wiley.

Gabora, L., (2003). Contextual focus: A tentative cognitive explanation for the cultural transition of the middle/upper Paleolithic. In R. Alterman & D. Hirsch (Eds.), *Proceedings of the 25th annual meeting of the Cognitive Science Society*, Boston, MA: Erlbaum.

Gabora, L., & Russon, A. (2011). The evolution of intelligence. In R.J. Sternberg & S.B. Kaufman (Eds.), *The Cambridge Handbook of Intelligence* (pp. 328-343.),

Cambridge, UK: Cambridge University Press,

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 22(3/4), 455-479.

Gallistel, C.R. (1990). *The Organization of Learning*. MIT Press, Cambridge.

Gardner, H. (1993). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences* (10th anniversary edition). New York, NY: Basic Books.

Gardner, H. (1999). *Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st century*. New York, NY: Basic Books.

Gardner, H. (2006a). *The development and education of the mind*. New York, NY: Routledge Taylor and Francis Group.

Gardner, H., (2006b). *Multiple intelligences: New horizons*. New York, NY: Basic Books.

Garlick, D. (2002). Understanding the nature of the general factor of intelligence: The role of individual differences in neural plasticity as an explanatory mechanism. *Psychological Review*, 199(1), 116-136.

Garlick, D. (2003). Integrating brain science research with intelligence research. *Current Directions in Psychological Science*, 12(5), 185-189.

Gaspard, P. (2004). Time-reversed dynamical entropy and irreversibility in markovian random processes. *Journal of Statistical Physics*, 117 , 599-615.

- Giurfa, M., Zhang, S., Jenett, A., Menzel, R., & Srivivasan, M.V. (2001). The concepts of "sameness" and "difference" in an insect. *Nature*, 410, 930-933.
- Glenberg, A., & Kaschak, K. (2002). Grounding language in action. *Psychonomic Bulletin and Review*, 9, 625-636.
- Glenberg, A.M., & Kaschak, M.P. (2003). The body's contribution to language. In Ross, B.H. (Ed.), *The Psychology of Learning and Motivation*, 43, 93-126.
- Goller, C., Kuchler, A. (1996). Learning Task-Dependent Distributed Structure-Representations by Backpropagation Through Structure. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks (ICNN 1996)*, pp. 347-352, Washington.
- Goodman, M., Sterner, K.N., Islam, M., Uddin, M., Sherwood, C.C., Hof, P.R., Hou, Z.C, Lipovich, L., Jia, H., Grossman, L.I., & Wildman, D.E., (2009). Phylogenetic analyses reveal convergent patterns of adaptive evolution in elephants and human ancestries. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 106, 20824-20829.
- Gori, M., Monfardini, G., & Scarselli, L. (2005). A New Model for Learning in Graph Domains. In: *Proceedings of the 18th IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, pp. 729-734, Montreal.
- Gould J. L. (1986). The locale Map of honey bees: Do insects have cognitive maps?. *Science*, 232(4752),861-863.
- Gusnard, D.A., & Raichle, M.E. (2001). Searching for a baseline: functional imaging and the resting human brain. *Nature Review Neuroscience*, 2, 685-694.

- Haier, R.J., Alkire, M.T., White, N.S., Uncapher, M.R., Head, E., Lott, I.T., et al. (2003). Temporal cortex hypermetabolism in Down syndrome prior to the onset of dementia. *Neurology*, 61(12), 1673-1679.
- Haier, R.J., Head, K., Head, E., & Lott, I.T. (2008). Neuroimaging of individuals with Down's syndrome at-risk for dementia: Evidence for possible compensatory events. *NeuroImage*, 39(3), 1324-1332.
- Haier, R.J., & Jung, R.E. (2007). Beautiful minds (i.e., brains) and the neural basis of intelligence. *Behavioral and Brain Sciences*, 30 (2), 174-178.
- Haier, R.J., Karama, S., Leyba, L., & Jung, R.E. (2009). MRI assessment of cortical thickness and functional activity changes in adolescent girls following three months of practice on a visual-spatial task. *BMC Research Notes*, 2, 174, doi:10.1186/1756-0500-2-174.
- Haier, R.J., Siegel, B., Tang, C., Abel, L., & Buchsbaum, M.S. (1992). Intelligence and changes in regional cerebral glucose metabolic-rate following learning. *Intelligence*, 16(3-4), 415-426.
- Haier, R.J., Siegel, B.V., Jr., Crinella, F.M., & Buchsbaum, M.S. (1993). Biological and psychometric intelligence: Testing an animal model in humans with positron emission tomography. In E. Douglas & K. Detterman (Eds.), *Individual differences and cognition* (pp. 317-331), New York, NY: Ablex.
- Haier, R.J., Siegel, B.V., Jr., MacLachlan, A., Soderling, E., Lottenberg, S., & Buchsbaum, M.S. (1992). Regional glucose metabolic changes after learning a complex visuospatial/motor task: A positron emission tomographic study. *Brain*

Research, 570(1-2), 134-143.

Haier, R.J., Siegel, B.V., Jr., Nuechterlein, K.H., Hazlet, E., Wu, J.C., Paek, J., et al. (1988). Cortical glucose metabolic rate correlates of abstract reasoning and attention studied with positron emission tomography. *Intelligence*, 12, 199-217.

Hakeem, A.Y., Hof, P.R., Sherwood, C.C., Switzer, R.C., Rasmussen, L.R.L., & Allman, J.M. (2005). Brain of the African elephant (*Loxodonta africana*): Neuroanatomy from magnetic resonance images. *Anatomical Record*, 287A, 1117-1127.

Hammer, B., Micheli, A., Sperduti, A. (2007). Adaptive Contextual Processing of Structured Data by Recursive Neural Networks: A Survey of Computational Properties. In: Hammer, B., Hitzler, P. (eds.), *Perspectives of Neural-Symbolic Integration*, Springer.

Hammer, B., Saunders, C., Sperduti, A. (2005). Editorial of the Special issue on Neural Networks and Kernel Methods for Structured Domains. *Neural Networks* 18 (8), 1015-1018.

Hampton, I.F.G, Whittow, G.C., Szekercezes, J., & Rutherford, S. (1971). Heat transfer and body temperature in the Atlantic bottlenosed dolphin, *Tursiops truncatus*. *International Journal of Biometeorology*, 15, 247-253.

Harrison, R.J., (1969). Endocrine organs: Hypophysis thyroid, and adrenal. In: H.T. (Ed.) *The Biology of Marine Mammals*. Anderson, (pp. 349-389) , New York, US:Academic Press.

Hart, B.L., & Hart, L.A. (1994). Fly switching by Asian elephants: tool use to control

parasites. *Animal Behaviour*, 48, 35-45.

Hart, B.L., Hart, L.A., & Pinter-Wollman, N., (2008). Large brains and cognition: Where do elephants fit in?. *Neuroscience and Biobehavioral Reviews*, 32, 86-98.

Hart, B.L., & Hart, L.A. (2010). Unique attributes of the elephant mind offer perspectives on the human mind. In Smith, J., Mitchell, R.W. (eds.), *Experiencing animals: encounters between animals and human minds*. New York, US: Columbia University Press.

Hartline, D.K., & Colman, D.R. (2007). Rapid conduction and the evolution of giant axons and myelinated fibers. *Current Biology*, 17, 29-35.

Hartmann, A.K., & Weigt, M. (2005). *Phase Transitions in Combinatorial Optimization Problems: Basic Algorithms and Statistical Mechanics*. Weinheim, DE: Wiley-Vch Verlag GmbH & Co.

Haykin, S. (1999). *Neural Networks: a Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, New Jersey.

Healy, S.D., & Rowe, C. (2007). A critique of comparative studies of brain size. *Proceedings of the Royal Society of London B*, 274, 453-464.

Heaton, P., & Wallace, G.L. (2004). Annotation: the savant syndrome. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 45, 899-911.

Hecht-Nielsen, R. (2007). *Confabulation Theory: The Mechanism of Thought*. Heidelberg, DE: Springer-Verlag.

- Henshilwood, C., d'Errico, F., Vanhaeren, M., van Niekerk, K., & Jacobs, Z., (2004). Middle stone age shell beads from South Africa, *Science*, 304, 404,doi:10.1126/science.1095905.
- Herman, L.M. (2002). Vocal, social and self-imitation by bottlenose dolphins. In K. Dautenhahn, C.L. Nehaniv (Eds.) *Imitation in animals and artifacts* (pp. 63-108). Cambridge, Massachussets:MIT Press.
- Herman, L.M. (2006). Intelligence and rational behaviour in the bottlenose dolphin. In: S. Hurley & M. Nudds (Eds.), *Rational animals?* (pp. 439-468), Oxford, UK: Oxford University Press.
- Herman, L.M., Abichandani, S.L., Elhab, A.N, Herman, E.Y.K., Sanchez, J.L., & Pack, A.A. (1999). Dolphins (*Tursiops truncatus*) comprehend the referential character of the human pointing gesture. *Journal of Comparative Psychology*, 113, 1-18.
- Herman, L.M., & Gordon, J.A. (1974). Auditory delayed matching in the bottlenose dolphin. *Journal of the Experimental Analysis of Behaviour*, 21, 19-26.
- Hilgetag, C.C., Burns, G.A., O'Neill, M.A., Scannell, J.W. (2000). Anatomical connectivity defines the organization of clusters of cortical areas in the macaque and the cat. *Philosophical Transactions Royal Society of London: Biological Sciences*, 355(1393), 91-110.
- Hof, P.R., & Van der Gucht, E. (2007). Structure of the cerebral cortex of the humpback whale, *Megaptera novaeangliae* (Cetacea, Mysticeti, Balaeopteridae). *Anatomical Record*, 290, 1-31.
- Hof, P.R., Chanis, R., & Marino, L. (2005). Cortical complexity in cetacean brains.

Anatomical Record, 287A, 1142-1152.

- Hooper, S.L., Reiss, D.R., Carter, M., & McCowan, B. (2006). Importance of contextual saliency on vocal imitation by bottlenose dolphins. *International Journal of Comparative Psychology*, 19, 116-118.
- Irving, L., Scholander, P.F., & Grinnell, S.W., (1941). The respiration of the porpoise, *Tursiops truncatus*. *Journal of Cellular and Comparative Physiology*, 17, 145-168.
- Jacobs, B., Lubs, J., Hannan, M., Anderson, K., Butti, C., Sherwood, C.C., Hof., P.R., & Manger, P.R., (2010). Neuronal morphology of the African elephant (*Loxodonta africana*) neocortex. *Brain Structure and Function*, 215, 273-298.
- Jaakkola, K., Fellner, W., Erb., L., Rodriguez, M., & Guarino, E. (2005). Understanding of the concept of numerically "less" by bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*). *Journal of Comparative Psychology*, 119, 296-303.
- Jensen, A.R. (1998). *The g factor: The science of mental ability*. Westport, CT: Praeger.
- Jerison, H.J. (1973). *Evolution of the Brain and Intelligence*. Academic Press, New York.
- Johnson, W., & Bouchard, T.J. (2005). The structure of human intelligence: it is verbal, perceptual, and image rotation (VPR), not fluid and crystallized intelligence. *Intelligence*, 22(4), 393-416.
- Jung, R. E., & Haier, R.J. (2007). The parieto-frontal integration theory (P-FIT) of intelligence: Converging neuroimaging evidence. *Behavioral and Brain*

Sciences, 30, 135-187.

Kaplan, H., Hill, K., Lancaster, J., & Hurtado, A.M. (2000). A theory of human life history evolution: Diet, intelligence, and longevity. *Evolutionary Anthropology*, 9, 156-185.

Kaas, J.H., (2000). Why is brain size so important: design problems and solutions as neocortex gets bigger or smaller. *Brain and Mind*, 1, 7-23.

Kaas, J.H. (2007). Reconstructing the organization of the neocortex of the first mammals and subsequent modifications. In J.H. Kass, L.A. Krubitzer (Eds.), *Evolution of Nervous Systems: A Comprehensive Review* (vol. 3, pp. 27-48), Amsterdam, NE: Elsevier.

Kerr R. A. (2006). A shot of oxygen to unleash the evolution of animals. *Science*, 314:1529.

Kilian, A., Yaman, S., Von Fersen, L., & Gunturkun, O. (2003). A bottlenose dolphin discriminates visual stimuli differing in numerosity. *Learning and Behaviour*, 31, 133-142.

Klein, R.G. (1989). Biological and behavioral perspectives on modern human origins in South Africa. In P. Mellars & C. Stringe (Eds.). *The human revolution*. Edinburg, UK: Edinburgh University Press.

Klein, R.G., (1999). *The human career: Human biological and cultural origins*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Kozma, R., Puljic, M., & Freeman. W.J. (2012). Thermodynamic model of criticality in

the cortex based on EEG/ECOG data. In: D. Plenz (Ed.), *Criticality in Neural Systems*, New York:Jonh Wiley and Sons (in press).

Krützen, M., Mann, J., Heithaus, M.R., Connor, W.C., Bejder, L., & Sherwin, W.B. (2005). Cultural transmission of tool use in bottlenose dolphins. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 102, 8939-8943.

Kurt, F., & Hartl, G.B. (1995). Asian elephants (*Elephas maximus*) in captivity: A challenge for zoo biological research. In U. Ganslober, J.K. Hodges, W. Daumanns (Eds.) *Research and Captive Propagation* (pp. 310-326), Berlin, DE: Filander Verlag.

Kushner, H.J., & Yin, G. G. (1997). *Stochastic Approximation Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, New York.

Laughlin, S.B., de Ruyter van Steveninck, R.R., & Anderson, J.C. (1998). The metabolic cost of neural information. *Nature Neuroscience*, 1 (1), 36-41.

Leadbeater, E, & Chittka, L. (2007). Social learning in insects - from miniature brains to consensus building. *Current Biology*, 17, R703-R713.

Lefebvre, M. N., Nicolakakis, N., & Boire, D. (2002). Tools and brains in birds. *Behaviour*, 139, 939-973.

Lefevre, L., et al. (2004). Brains, innovations and evolution in birds and primates. *Brain, Behavior and Evolution*, 63, 233-246.

Leggett, K.E.A. (2006). Home range and seasonal movements of elephants in the

- Kunene Region, northwestern Namibia. *African Zoology*, 41, 17-36.
- Leonard, W.R., Snodgrass, J.J., & Robertson, M.L. (2007). Effects of brain evolution on human nutrition and metabolism. *Annual Review Nutrition*, 27, 311-327.
- Levy, W.B., & Baxter, R.A. (1996). Energy-efficient neural codes. *Neural Computation*, 8, 531-543.
- Leyton, M. (1984). Perceptual Organization as Nested Control. *Biological Cybernetics*, 51, pp. 141-153.
- Leyton, M. (1986a). A theory of information structure I: General principles. *Journal of Mathematical Psychology*, 30, 103-160.
- Leyton, M. (1986b). A theory of information structure II: A theory of perceptual organization. *Journal of Mathematical Psychology*, 30, 257-305.
- Leyton, M. (1986c). Principles of Information Structure Common to Six Levels of the Human Cognitive System. *Information Sciences*, 38, pp. 1-120.
- Leyton, M. (2001). *A Generative Theory of Shape*. In: LNCS, vol 2145, pp. 1-76. Springer-Verlag.
- Leyton, M. (1992). *Symmetry, Causality, Mind*. MIT Press, Massachusetts.
- Li, Y.H., Liu, Y., J., Qin, W., Li, K.C., Yu, C.S., et al. (2009). Brain anatomical network and intelligence. *PLOS Computational Biology*, 5(5), 1-17.
- Li, M., & Vitányi, P.M.B. (1992). Theory of thermodynamics of computation. *IEEE*

Proceedings Physics and Computation Workshop PhysComp '92,
doi:10.1109/PHYCMP.1992.615489.

Li, M., & Vitányi, P.M.B. (2008). *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

Li, M., & Vitányi, P.M.B. (1996). Reversibility and adiabatic computation: Trading time and space for energy. *Proceedings Royal Society of London, Ser. A.*, 452, 769-789.

LoBue, V., & DeLoache, J.S. (2008). Detecting the snake in the grass-attention to fear - relevant stimuli by adults and young children. *Psychological Science*, 19, 284-289.

Mahé, P., & Vert, J.-P. (2009). Graph Kernels Based on Tree Patterns for Molecules. In: *Machine Learning*, 75(1), pp. 3-35.

Mahon, B.Z., & Caramazza, A. (2008). A critical look at the embodied cognition hypothesis and a new proposal for grounding conceptual content. *Journal of Physiology*, 102 (1-3), 59-70.

Marino, L. (2002). Convergence of complex cognitive abilities in cetaceans and primates. *Brain, Behavior and Evolution*, 59, 21-32.

Marino, L., (2004). Cetacean brain evolution: Multiplication generates complexity. *International Journal of Comparative Psychology*, 17, 1-16.

Marino, L., Butti, C., Connor, R.C., Fordyce, R.E., Herman, L.M, Hof, P.R., Lefevre, L., Lusseau, D., McCowan, B., Nimchincky, E.A., Pack, A.A., Reidenberg, J.S.,

- Reiss, D., Rendell, L., Uhen, M.D., Van der Gucht, E., & Whitehead, H. (2008). A claim in search of evidence: Reply to Manger's thermogenesis hypothesis of cetacean brain structure. *Biological Reviews*, doi: 10.1111/j.1469-185X.2008.00049.x.
- Marino L, Connor RC, Fordyce RE, Herman LM, Hof PR, et al. (2007). Cetaceans have complex brains for complex cognition. *PLoS Biology*, 5(5), 966-972, doi:10.1371/journal.pbio.0050139.
- Masataka, N., Hayakawa, S., & Kawai, N. (2010). Human Young Children as well as Adults Demonstrate 'Superior' Rapid Snake Detection When Typical Striking Posture Is Displayed by the Snake. *PLoS ONE*, 5(11): e15122.
- Mather J. A., Anderson R. C., & Wood J. B. (2010). *Octopus: The Ocean's Intelligent Invertebrate (A Natural History)*. Portland, Oregon: Timber Press Inc.
- Mauro, C. D., Diligenti, M., Gori, M., & Maggini, M. (2003) Similarity Learning for Graph-based Image Representations. In: *Pattern Recognition Letters*, vol. 24, no. 8, pp. 115-1122.
- McComb, K., Moss, C., Sayailel, S., & Baker, L. (2000). Unusually extensive networks of vocal recognition in African elephants. *Animal Behaviour*, 59, 1103-1109.
- McComb, K., Moss, C., Durant, S., Baker, L., & Sayailel, S. (2001). Matriarchs act as repositories of social knowledge in African elephants. *Science*, 292, 491-494.
- McComb, K., Reby, D., Baker, L., Moss, C., & Sayailel, S. (2003). Long-distance communication of acoustic cues to social identity in African elephants. *Animal Behaviour*, 59, 1103-1109.

- McComb, K., Baker, L., & Moss, C. (2006). African elephants show high levels of interest in the skulls and ivory of their own species. *Biology Letters*, 2, 26-28.
- McKay, G.M. (1973). *Behavior and ecology of the Asiatic elephant in southeastern Ceylon*, Washington, USA: Smithsonian Institution, Government Printing Office.
- Mead C. (1989). *Analog VLSI and Neural Systems*. Reading, MA.: Addison Wesley
- Mellars, P., (1973). The character of the middle-upper transition in South-West France. In C. Renfrew (Ed.), *The explanation of culture change*, London, UK: Duckworth.
- Mellars, P. (1989a). Technological changes in the middle-upper Paleolithic transition: Economic, social, and cognitive perspectives. In P. Mellars & C. Stringer (Eds.), *The human revolution*. Edinburgh, UK: Edinburgh University Press.
- Mellars, P., (1989b). Major issues in the emergence of modern humans. *Current Anthropology*, 30, 349-385.
- Menzel, R., & Giurfa, M. (2001). Cognitive architecture of a mini-brain: the honeybee. *Trends in Cognitive Science*, 5, 62-71.
- Mercado, III, E.M., Killebrew, D.A., Pack, A.A., Macha, IV, B., & Herman, L.M. (2000). Generalization of same-different classification abilities in bottlenose dolphins. *Behavioural Processes*, 50, 79-94.
- Merkle, R.C. (1993). Reversible electronic logic using switches. *Nanotechnology*, 4, 21-40.

Mery, F., Varela, S.A.M., Danchín, E., Blanchet, S., Parejo, D., Coolen, I., & Wagner, R.H. (2009). Public versus personal information for mate copying in an invertebrate. *Current Biology*, 19, 730-734.

Meteyard, L., & Vigliocco, G. (2008). The roles of sensory and motor information in semantic representation: A review. In P. Calvo, T. Gomila. (eds.), *Handbook of Cognitive Science: An Embodied Approach*, Chapter 15 (pp. 293-312). London: Elsevier.

Mezard, M., Parisi, G., & Virasoro, M. (2004). *Spin Glass Theory and Beyond: An Introduction to the Replica Method and Its Applications*. Singapore: World Scientific Publishing.

Micheli, A., Sona, D., & Sperduti, A. (2004). Contextual Processing of Structured Data by Recursive Cascade Correlation. *IEEE Transactions on Neural Networks* 15(6) 1396-1410.

Mithen, S. (1996). *The prehistory of the mind: The cognitive origins of art and science*. London, UK: Thames and Hudson.

Murre, J. M. J., & Sturdy, D. P. F. (1995). The connectivity of the brain: multi-level quantitative analysis. *Biological Cybernetics*, 73, 529-545.

Nettelbeck, T. (2011). Basic processes of intelligence. In R.J. Sternberg & S.B. Kaufman (Eds.), *The Cambridge Handbook of Intelligence* (pp. 371-388), Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Nettelbeck, T., Wilson, C. (1985). A cross-sequential analysis of developmental

differences in speed of visual information processing. *Journal of Experimental Child Psychology*, 40, 1-22.

- Neubauer, A. C., & Fink, A. (2005). Basic information preprocessing and the psychophysiology of intelligence. In R. J. Sterberg & J. E. Pretz (Eds.), *Cognition & Intelligence: Identifying the mechanisms of the mind* (pp. 68-87). New York, NY: Cambridge University Press.
- Newman, S.D., & Just, M. (2005). The neural basis of intelligence: A perspective based on functional neuroimaging. In R.J. Sternberg & J.E. Pretz (eds.), *Cognition & Intelligence: Identifying the mechanism of the mind*, (pp. 88-103). New York, NY: Cambridge University Press.
- Nieuwenhuys, R., Voogd, J. & Van Huijzen, C. (2008). *The Human Central Nervous System*. Berlin, DE: Springer-Verlag.
- Nieuwenhuys, R., Ten Donkelaar, H.J., & Nicholson, C. (1998). *The Central nervous System of Vertebrates* (vol. 3), Berlin, DE: Springer.
- Nissani, M. (2004). Theory of mind and insight in chimpanzees, elephants and other animals. In R.J. Lesley, G. Kaplan (Eds.), *Developments in Primatology: Progress and Prospects: Comparative Vertebrate Cognition*, (vol. 4, pp. 227-261), New York, US: Academic Press Publishers.
- Niven, J.E., & Laughlin, S.B. (2008). Energy limitation as selective pressure on the evolution of sensory systems. *Journal of Experimental Biology*, 211, 1792-1804.
- Ochab, J.K., Burda, Z. (2012). Exact solution for statics and dynamics of maximal entropy random walk on Cayley trees. *Physical Review E*, 85, 021145-021157.

- Ohizumi, H., Terasawa, F., Kitamura, M., Oshita, I., Iwasawa, H., & Kawaguchi, K. (2009). Respiratory gas exchange and metabolic rate of captive Pacific white-sided dolphins (*Lagenorhynchus obliquidens*) under stationary conditions. *Presented at the 18th Biennial Conference on the Biology of Marine Mammals*, Quebec city, QC Canada, October 12-16.
- Oppenheim, A. V., & Schaffer, R. (1989). *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, New Jersey.
- Orlovsky, G.N., Deliagina, T.G., & Grillner, S. (1999). *Neuronal Control of Locomotion*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Owen-Smith, N., (1988). *Megaherbivores: The influence of Very Large Body Size on Ecology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Pack, A.A., & Herman, L.M. (2004). Dolphins (*Tursiops truncatus*) comprehend the referent of both static and dynamic human gazing and pointing in an object choice task. *Journal of Comparative Psychology*, 118, 160-171.
- Pack, A.A., & Herman, L.M. (2006). Dolphin social cognition and joint attention: Our current understanding. *Aquatic Mammals*, 32, 443-460.
- Pack, A.A., & Herman, L.M. (2007). The dolphin's (*Tursiops truncatus*) understanding of human gaze and pointing: Knowing what and where. *Journal of Comparative Psychology*, 121, 34-45.
- Patterson, K., Nestor, P.J., & Rogers T.T. (2007). Where do you know what you know? The representation of semantic knowledge in the human brain. *Nature Reviews*

Neuroscience, 8, 976-987.

Pearce, J.M. (2008). *Animal Learning and Cognition*, New York, US: (3rd Edition) Hove & New York, Psychology Press.

Pearson, K.G. (1993). Common principles of motor control in vertebrates and invertebrates. *Annual Review Neuroscience*, 16, 265-297.

Pecher, D. & Zwaan, R.A. (2005). *Grounding Cognition: The Role of Perception and Action in Memory, Language and Thinking*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Perrin, W.F., Wursig, B., & Thewissen, J.G.M. (Eds.), (2002). *Encyclopedia of Marine Mammals*. Burlington, Massachusetts, US: Academic Press.

Pierce, R.W. (1970). Design and operation of a metabolic chamber for marine mammals. Ph.D. dissertation. University of California, Berkeley.

Plotnik, J.M., de Waal, F.B.M., & Reiss, D. (2007). Self-recognition in an Asian elephant. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 103, 17053-17057.

Poole, J., & Moss, C.J. (2008). Elephant sociality and complexity: the scientific evidence. In: C.C. Wemmer, (Ed.) *Elephants and ethics: towards a morality of coexistence* (pp. 69-98). Baltimore, US: John Hopkins University Press.

Poth, C., Fung, C., Gunturkun, O., Ridgway, S.H., & Oelschlager, H.H. (2005). Neuron numbers in sensory cortices of five delphinids compared to a physeterid, the pigmy sperm whale. *Brain Research Bulletin*, 66, 357-360.

Pulvermüller, F. (1999). Words in the brain's language. *Behavioral and Brain Sciences*, 22, 253-336.

Pulvermüller, F. (2003). Sequence detectors as a basis of grammar in the brain. *Theory in Biosciences*, 122, 87-103.

Pulvermüller, F. & Assadollahi, R. (2007). Grammar or serial order? Discrete combinatorial brain mechanism reflected by the syntactic mismatch negativity. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 19(6), 971-980.

Pulvermüller, F. & Knoblauch, A. (2009). Discrete combinatorial circuits emerging in neural networks: A mechanism for rules of grammar in the human brain?. *Neural Networks*, 22, 161-172.

Raichle, M.E., et al. (2001). A default mode of brain function. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 98, 676-682.

Reichl, L. E. (1998). *A Modern Course in Statistical Physics*. New York, NY: John Wiley & Sons.

Reiss, D., & McCowan, B. (1993). Spontaneous vocal mimicry and production by bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*): Evidence for vocal learning. *Journal of Comparative Psychology*, 107, 301-312.

Richards, D., Woltz, J., & Herman, L.M. (1984). Vocal mimicry of computer-generated sounds and vocal labeling of objects by a bottlenose dolphin, *Tursiops truncatus*. *Journal of Comparative Psychology*, 98, 10-28.

- Ridgway, S.H., & Patton, G.S. (1971). Dolphin thyroid: Some anatomical and physiological findings. *Zeitschr. Vergleich. Physiology*, 71, 129-141.
- Ridgway, S.H. (1990). The central nervous of the bottlenose dolphin. In S. Leatherwood, R.R. Reeves (Eds.) *The Bottlenose Dolphin* (pp. 69-97), New York,US: Academic Press.
- Rizzolatti G., & Arbib M.A. (1998) Language within our grasp, *Trends in Neuroscience*, 21(5), 188-194 .
- Rizzolatti, G., & Craighero, L. (2004). The mirror-neuron system. *Annual Review of Neuroscience*, 27, 169-192.
- Rogers, T.T., Lambon Ralph M.A., Garrard, P., Bozeat., S., McClelland, J.L., Hodges, J.R., & Patterson, K. (2004) Structure and deterioration of semantic memory: A neuropsychological and computational investigation. *Psychological Review*, 111(1), 205-235.
- Roth, G., & Dicke, U. (2005). Evolution of the brain and intelligence. *Trends in Cognitive Science*, 9, 250-257.
- Ruff, C., Trinkaus, E., & Holliday, T. (1997). Body mass and encephalization in Pleistocene Homo. *Nature*, 387, 173-176.
- Scarselli, F., Young, S., Gori, M., Hagenbuchner, M., Tsoi, A., & Maggini, M. (2005). Graph Neural Networks for Ranking Web Pages. In: *Proceedings of the IEEE/WIC/ACM Conference on Web Intelligence*, pp. 666-672.
- Schwarz, A.J., Gozzi, A., Bifone, A. (2008). Community structure and modularity in

- networks of correlated brain activity. *Magnetic Resonance Imaging*, 26(7), 914-920.
- Sherwood et al., (2006). Evolution of increased glia-neuron ratios in the human frontal cortex. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 103, 13606-13611.
- Shoshani, J., Kupsky, W.J., & Marchant, G.H. (2006). Elephant brain Part I: gross morphology, functions, comparative anatomy, and evolution. *Brain Research Bulletin*, 70, 124-157.
- Siegelman, H.T. (2001). Universal Computation and Super-Turing Capabilities, J., Kremer, S. (Eds.), *A Field Guide to Dynamical Recurrent Networks*. pp. 143-152. IEEE Press, Inc., New York.
- Simmons, W.K., & Barsalou, L.W. (2003). The similarity-in-topography principle: reconciling theories of conceptual deficits. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 451-486.
- Sloane, N. J. A., & Plouffe, S. (1995). *The Encyclopedia of Integer Sequences*. Academic Press.
- Smith, L.B. (2005). Cognition as a dynamic system: Principles from embodiment. *Developmental Review*, 25, 278-298.
- Smith, L., & Gasser, M. (2005). The development of embodied cognition: Six lessons from babies. *Artificial Life*, 11, 13-29.
- Soffer, O., (1994). Ancestral lifeways in Eurasia: The middle and upper Paleolithic

- records. In M. Nitecki & D. Nitecki (Eds.), *Origins of anatomically modern humans*. New York, NY: Plenum Press.
- Song, M., Zhou, Y., Li, J., Liu, Y., Tian, L., Yu, C., et al., (2008). Brain spontaneous functional connectivity and intelligence. *NeuroImage*, 41(3), 1168-1176.
- Spearman, C., (1904). "General intelligence" objectively determined and measured. *American Journal of Psychology*, 15, 201-293.
- Spearman, C., (1927). *The abilities of man*. New York, NY: Macmillan.
- Stanovich, K.E. (2009). *What intelligence tests miss: The psychology of rational thought*. New Haven, CT: Yale University Press.
- Steck k., Wittlinger M., & Wolf H. (2009). Estimation of homing distance in desert ants, *Cataglyphis fortis*, remains unaffected by disturbance of walking behaviour. *Journal of Experimental Biology*, 212, 2893-2901.
- Sternberg R. J., & Kaufman, S.B. (2011). *The Cambridge Handbook of Intelligence*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Strausfeld, N.J. (2009). Brain organization and the origin of insects: An assessment. *Proceedings of the Royal Society of London B* 276, 1929-1937.
- Striedter, G.F. (2005). *Principles of Brain Evolution*. Sunderland, USA: Sinauer Associates, inc. Publishers.
- Stringer, C., & Gamble, C. (1993). *In search of the Neanderthals*. London, UK: Thames and Hudson.

- Sukumar, R. (2003). *The living elephants: Evolutionary ecology behavior, and conservation*. New York, US: Oxford University Press.
- Talmy L. (2000). *Toward a Cognitive Semantics* (vol. I). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Taylor, J.G., Hartley, M.R. (2007). Through Reasoning to Cognitive Machines. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 2, pp. 12-24. IEEE Press, Inc., New York.
- Thelen, E., & Smith, L.B. (1994). *A Dynamic Systems Approach to the Development of Embodied Cognition and Action*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Thompson-Schill, S.L. (2003). Neuroimaging studies of semantic memory: inferring "how" from "where". *Neuropsychologia*, 41, 280-292.
- Tomasello, M. (2008). *Origins of Human Communication*. Cambridge, USA: MIT Press.
- Tomasello, M. & Call, J. (2007). *The Gestural Communication of Apes and Monkeys*. Mahwah, US: Lawrence Erlbaum Associates,
- Tschudin, A., Call, J., Dunbar, R.I.M., Harris, G., & Van der Elst, C. (2001). Comprehension of signs by dolphins (*Tursiops truncatus*). *Journal of Comparative Psychology*, 115, 100-105.
- Tsochantaridis, I., Hofmann, T., Joachims, T., & Altun, Y. (2004). Support Vector Machine Learning for Interdependent and Structured Output Spaces. In:

- Brodley, C. E. (Ed.), *ICML'04: Twenty-first international conference on Machine Learning*. ACM Press, New York.
- Tyler, L.K., & Moss, H.E. (2001). Towards a distributed account of conceptual knowledge. *Trends in Cognitive Science*, 5(6), 244-252.
- Valencia, M., Martinerie, J., Dupont, S. & Chavez, M. (2008). Dynamic small-world behaviour in functional brain networks unveiled by an event-related networks approach. *Physical Review E, Statistical and Nonlinear Soft Matter Physics*, 77, 050905.
- Van Den Heuvel, M.P., Stam, C.J., Kahn, R.S., & Hulshoff Pol, H.E. (2009). Efficiency of functional brain networks and intellectual performance. *Journal of Neuroscience*, 29(23), 7619-7624.
- Vieri, C. (1999). *Reversible computer engineering and architecture*. PhD. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Vigliocco, G., Vinson, D.P., Lewis, W., & Garret M.F. (2004). Representing the meaning of object and action words: The featural and unitary semantic space hypothesis. *Cognitive Psychology*, 48, 422-488.
- Viljoen, P. (1989). Spatial distribution and movements of elephants (*Loxodonta Africana*) in the northern Namib Desert region of the Kaokoveld, South West African/Nambia. *Journal of Zoology*, London 219, 1-19.
- Wang, S.S.H., Shultz J.R., Burish, M.J., Harrison, K.H., Hof, P.R., Towns, L.C., Wagers, M.W., & Wyatt, K.D. (2008). Functional trade-offs in white matter axonal scaling. *Journal of Neuroscience*, 28(15), 4047-4056.

- Watts, D.J., & Strogatz, S.H. (1998). Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature* 393, 440-442.
- Wickler, W., & Seibt, U. (1997). Aimed object-throwing by wild African elephant in an interspecific encounter. *Ethology*, 103, 365-368.
- Whiten, A., & Byrne, R. (Eds.) (1997). *Machiavellian intelligence II: Extensions and evaluations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Williams, T.M., Friedl, W.A., & Haur, J.E. (1993). The physiology of bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*): Heart rate, metabolic rate and plasma lactate concentration during exercise. *Journal of Experimental Biology*, 179, 31-46.
- Willis, J.O., Dumont, R., & Kaufman, A.S. (2011). Factor-analytic models of intelligence. In R.J. Sternberg & S.B. Kaufman (Eds.), *The Cambridge Handbook of Intelligence* (pp. 39-51), Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Wilson, D.S., Near, D., & Miller, R.R. (1996). Machiavellism: A synthesis of the evolutionary and psychological literatures. *Psychological Bulletin*, 119, 285-299.
- Wolf, R., Voss, A., Hein, S., & Heisenberg, M. (1992). Can a fly ride a bicycle?. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B* 337, 261-269.
- Wolf H. (2011). Odometry and insect navigation. *Journal of Experimental Biology*, 214, 1629-1641.

- Xitco, M.J.Jr., Gory, J.D., & Kuczaj, H.S.A. (2001). Spontaneous pointing by bottlenose dolphins (*Tursiops truncatus*). *Animal Cognition*, 4, 115-123.
- Xitco, M.J.Jr., Gory, J.D., & Kuczaj, H.S.A. (2004). Dolphin pointing is linked to the attentional behavior of a receiver. *Animal Cognition*, 7, 231-238.
- Zhang, K., & Sejnowski, T.J. (2000). A universal scaling law between grey matter and white matter of cerebral cortex. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97, 5621-5626.
- Zhang, S., Srinivasan, M.V., Zhu, H., & Wong, J. (2004). Grouping of visual objects by honeybees. *Journal of Experimental Biology*, 207, 3289-3298.
- Zimmermann, H. G., & Neuneier, R. (1998). How to Train Neural Networks. In: Orr, G.B., Müller, K.-R. (eds.): *NIPS-WS 1996*. LNCS, vol. 1524, pp. 395-399. Springer, Heidelberg.
- Zwaan, R., (2004). The immersed experiencer: Toward an embodied theory of language comprehension. In Ross B.H. (Ed.) *The Psychology of Learning and Motivation* (vol. 44, pp. 35-62), San Diego, CA: Academic Press.

Apéndice A

Notación y definiciones

El objetivo de este apéndice es el de proporcionar la notación y definiciones matemáticas más importantes utilizadas a lo largo de la presente tesis doctoral. Pasamos seguidamente a la descripción de los mismos:

Definición A.1 (Clase Combinatoria): Una clase combinatoria es un conjunto finito en el cual se ha definido una función (función de tamaño) la cual satisface las siguientes condiciones. (1) El tamaño de un elemento es un número entero no negativo. (2) El número de elementos de cualquier tamaño es finito. Si A es una clase combinatoria, el tamaño de un elemento $\alpha \in A$ se denota como $|\alpha|$. De forma similar, dada una clase combinatoria A , denotaremos de forma consistente como \tilde{A}_n el conjunto de objetos o elementos de la clase combinatoria A que tienen un tamaño igual a n , es decir, que $A_n = \text{card}(\tilde{A}_n)$ (donde la notación $\text{card}(\cdot)$ implica la cardinalidad del conjunto al que hace referencia el operador).

Definición A.2 (Secuencia contadora). La secuencia contadora de una clase combinatoria A es la secuencia de enteros $(A_n)_{n \geq 0}$ donde A_n representa el número de objetos en la clase A que tienen un tamaño igual a n .

Definición A.3 (Función generadora). La función generadora de una secuencia A_n es la serie formal de potencias $A(u)$ (definida en A.1), donde $w_n = 1$ para el caso ordinario y $w_n = n!$ para el caso exponencial.

$$A(u) = \sum_{n \geq 0} A_n \frac{u^n}{w_n} = \sum_{\alpha \in A} \frac{u^{|\alpha|}}{w_n} \quad (\text{a.1})$$

Las funciones generadoras son el objeto central de estudio de la analítica combinatoria (Flajolet & Sedgewick, 2009). Su estructura algebraica refleja directamente la estructura subyacente del objeto combinatorio. De hecho, éstas pueden verse como transformaciones analíticas en el plano complejo y sus singularidades dan cuenta del crecimiento asintótico de los coeficientes de la función.

Definición A.4 (Extracción de coeficientes). Denotaremos de forma general como $A_n = w_n [u^n] A(u)$ la operación de extracción del coeficiente u^n de la serie formal de potencias definida en (a.1).

$w_n [u^n] \left(\sum_{n \geq 0} A_n \frac{u^n}{w_n} \right) = A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C w_n \frac{A(u)}{u^{n+1}} du$	(a.2)
---	-------

En la expresión (a.2) la fórmula integral de Cauchy expresa los coeficientes de las funciones analíticas en función de integrales de línea. Por lo tanto, el uso apropiado de la fórmula integral de Cauchy permite la estimación de los coeficientes seleccionando de forma apropiada el contorno de integración en el plano complejo.

Definición A.5 (Función generadora bivariada). La función generadora bivariada (BGF) ordinaria o exponencial de una secuencia bidimensional de enteros positivos $f_{n,k}$ se define como la serie de potencias formal en dos variables definida como se muestra a continuación:

$$f(z, u) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} f_{n,k} z^n u^k & (\text{ordinary BGF}) \\ \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} f_{n,k} u^k \frac{z^n}{n!} & (\text{exponential BGF}) \end{cases} \quad (\text{a.3})$$

Definición A.6 (Función generadora horizontal). La función generadora horizontal de una secuencia bidimensional $f_{n,k}$ se define como la serie de potencias formal:

$$f_n(u) = \sum_{k \geq 0} f_{n,k} u^k = \sum_{k \geq 0} f_n^k u^k \quad (\text{a.4})$$

Definición A.7 (Partición de números enteros). Una partición de un número entero positivo n es una secuencia $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ de números enteros positivos para algún k de forma que se cumple:

$$n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k \quad \text{y} \quad x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_k \quad (\text{a.5})$$

En la expresión (a.5) las variables x_i se denominan sumandos o partes en la partición y la cantidad n es el tamaño de la partición.

Definición A.8 (Composición de números enteros). Una composición de un número entero positivo n es una secuencia $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ de números enteros positivos para algún k de forma que se cumple:

$$n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k \quad \text{donde} \quad x_j \geq 1 \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq k \quad (\text{a.6})$$

En la expresión (a.6) las variables x_i , de forma similar al caso de particiones, se denominan sumandos o partes de la composición y la cantidad n es el tamaño de la composición.

Definición A.9 (Convolución Binomial). Denotemos mediante $a(z)$, $b(z)$ y $c(z)$ tres

funciones generadoras exponenciales donde $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$, $b(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{z^n}{n!}$ y

$c(z) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{z^n}{n!}$, entonces si se cumple que $a(z) = b(z)c(z)$ entonces esto implica que

los coeficientes de las funciones generadoras se encuentran relacionados por la

expresión (convolución binomial): $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k c_{n-k} = b_n \oplus c_n$

Definición A.10 (Producto cartesiano entre clases combinatorias). La construcción del producto cartesiano aplicada a dos clases combinatorias B y C forma los pares ordenados:

$A = B \times C$ si y solo si $A = \{\alpha = (\beta, \gamma) \mid \beta \in B, \gamma \in C\}$ donde el tamaño de un par $\alpha = (\beta, \gamma)$ se define como $|\alpha|_A = |\beta|_B + |\gamma|_C$, es decir, como la suma de los tamaños de

los elementos que componen el par. Considerando todas las posibilidades, se puede demostrar que las secuencias contadoras correspondientes a las clases A , B y C están

relacionadas mediante la convolución $A_n = \sum_{k=0}^n B_k C_{n-k}$ y por tanto la relación entre las

funciones generadoras de dichas clases combinatorias resulta ser $A(z) = B(z)C(z)$,

esto es el producto de las funciones generadoras asociadas a las clases B y C .

Apéndice B

Derivación de Ecuaciones

El objetivo de este apéndice es el de proporcionar cálculos un poco más detallados relativos a las ecuaciones más complejas y/o importantes que aparecen en el modelo presentado en el capítulo 2 de la presente tesis doctoral.

Apartado B.1 (Coeficientes expresiones 2.3 y 2.4):

El mecanismo de asignación (o mapeo) de configuraciones de símbolos y estados de energía se traducía en la obtención de unos coeficientes bivariados A_m^l que dan cuenta del mencionado mapeo. Concretamente, la variable entera m representa el tamaño de la permutación mientras que la variable l representa el estado siendo $1 \leq l \leq m$. Por ejemplo, la tabla B.1a se representa todas las configuraciones posibles de símbolos para permutaciones simbólicas de tamaño $m = 4$ junto con el estado asociado a cada configuración.

Tabla B.1a. Ejemplo de mapeo entre configuraciones posibles de símbolos para una permutación de tamaño 4 ($4! = 24$ configuraciones posibles) y estados de energía asociados de acuerdo con el modelo definido en la sección 2.4. El estado denotado mediante el entero “1” representa el estado de reposo.

d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	1
d ₁	d ₂	d ₄	d ₃	2
d ₁	d ₃	d ₂	d ₄	2
d ₁	d ₃	d ₄	d ₂	3
d ₁	d ₃	d ₄	d ₂	3
d ₁	d ₄	d ₂	d ₃	3
d ₁	d ₄	d ₃	d ₂	2
d ₂	d ₁	d ₃	d ₄	2
d ₂	d ₁	d ₄	d ₃	4
d ₂	d ₃	d ₁	d ₄	3
d ₂	d ₃	d ₄	d ₁	4
d ₂	d ₄	d ₁	d ₃	4
d ₂	d ₄	d ₃	d ₁	3
d ₃	d ₁	d ₂	d ₄	3
d ₃	d ₁	d ₄	d ₂	4
d ₃	d ₂	d ₁	d ₄	2
d ₃	d ₂	d ₄	d ₁	3
d ₃	d ₄	d ₁	d ₂	4
d ₃	d ₄	d ₂	d ₁	4
d ₄	d ₁	d ₃	d ₄	2
d ₄	d ₁	d ₄	d ₃	4
d ₄	d ₂	d ₁	d ₃	2
d ₄	d ₂	d ₃	d ₁	3
d ₄	d ₃	d ₁	d ₂	4
d ₄	d ₃	d ₂	d ₁	4

A partir de la tabla anterior junto con la tabla de la figura 2.3, es fácil obtener el valor de los coeficientes bivariados:

$$A_3^1 = 1 \quad A_3^2 = 3 \quad A_3^3 = 2 \tag{B.1a}$$

$$A_4^1 = 1 \quad A_4^2 = 6 \quad A_4^3 = 8 \quad A_4^4 = 9 \tag{B.1b}$$

Recordemos que el número de estados posibles es igual al tamaño de la permutación. Por ejemplo, en la tabla de la figura 2.3 el tamaño de la permutación es igual a 3 luego sólo existen 3 estados posibles. De forma similar, para la tabla B.1a el tamaño de la permutación es 4 lo que se traduce en 4 estados de energía posibles. De este modo, la cuenta A_3^1 nos indica el número de configuraciones de símbolos que pueden estar en el estado con valor de energía “1” (estado de reposo) para un tamaño de permutación igual a 3, esto es, 6 configuraciones posibles de símbolos. De forma similar, el coeficiente A_3^2 nos indica cuantas configuraciones de símbolos se traducen en el estado con un valor de energía asociado igual a “2”. A partir de todo lo anterior es fácil comprobar que los coeficientes cumplen la ecuación:

$$\sum_{l=1}^m A_m^l = 1 + \sum_{l=2}^m A_m^l = m! \quad (\text{B.1c})$$

Por otra parte, a partir de la fórmula de la convolución binomial (consultar la definición A.8 del apéndice A) podemos expresar los coeficientes A_m^l de la siguiente forma:

$$a_m = \sum_{l=1}^m A_m^l = b_m \oplus c_m = \sum_{l=1}^m \binom{m}{l} b_l c_{m-l} \quad (\text{B.1d})$$

Es decir, nos interesa descomponer la dependencia de los coeficientes A_m^l en términos del producto de coeficientes conocidos. Si prestamos atención a la expresión (B.1d) para que dicha igualdad se cumpla basta con considerar que los coeficientes a_m son le resultado de la convolución binomial de dos secuencias b_m y c_m , en particular si $c_m = 1$ la igualdad se sigue cumpliendo. Si además por comodidad denotamos los

coeficientes b_m como A_m^m , esto es, $b_m = A_m^m$ habremos expresado los coeficientes desconocidos A_m^l en función de los coeficientes clásicos binomiales y unos coeficientes desconocidos pero que sólo dependen de la variable m . Atendiendo a lo anterior, la igualdad (B.1c) la podemos expresar ahora de la siguiente forma:

$$\sum_{l=1}^m A_m^l = 1 + \sum_{l=2}^m \binom{m}{l} A_m^m = m! \tag{B.1e}$$

La igualdad anterior nos proporciona un sistema de ecuaciones a partir del cual podemos determinar el valor de los coeficientes A_m^m , concretamente resolviendo el sistema de ecuaciones para los primeros 10 valores obtenemos la siguiente tabla de valores:

Tabla B.1b. Primeros 10 valores de los coeficientes (“derangements”) de la expresión 2.4 del capítulo 2.

A_1^1	1
A_2^2	1
A_3^3	2
A_4^4	9
A_5^5	44
A_6^6	265
A_7^7	1854
A_8^8	14833
A_9^9	133496
A_{10}^{10}	1334961

Una vez determinados el valor de los coeficientes la manera más fácil de obtener una fórmula que nos exprese dicha secuencia, antes de verse envuelto en la realización de cálculos más complejos, es consultar la enciclopedia de Sloane relativa a secuencias de

enteros (Sloane & Plouffe, 1995). La secuencia anterior se corresponde con los “derangements” los cuales tienen por expresión:

$$A_l = \sum_{j=2}^l (-1)^j \frac{l!}{j!} \quad (\text{B.1f})$$

Como nota histórica, la palabra “derangements” viene del francés “molestia” pues realmente lo fueron para el matemático francés Pierre Raymond de Montmort, gran amigo de Nicholas Bernoulli, que los estudió por primera vez en 1708 tardando 5 años en llegar a la expresión que ahora presentamos de forma tan cómoda B.1f.

Por consiguiente, en base a los razonamientos anteriores podemos finalmente concluir que:

$$A_m^l = \begin{cases} 1 & l = 1 \\ \binom{m}{l} A_l & 1 < l \leq m \end{cases} \quad (\text{B.1g})$$

Apartado B.2 (Ecuaciones correspondientes a las expresiones 2.5 y 2.6):

Tal y como definimos en la sección 2.4, la secuencia contadora, esto es la cuenta asociada a los valores de energía locales de un nivel genérico k de las estructuras simbólicas descritas en el capítulo 2 la denotamos como $N_k(n)$. De forma más específica, los valores asociados a dicha cuenta dependen del número de variables multi-estado de dicho nivel y del número de estados posibles en los que pueden encontrarse dichas variables. En este sentido desde el punto de vista de la analítica combinatoria, los valores de energía locales asociados a dicha cuenta se corresponden

con los de una composición de enteros (ver definición A.8 del apéndice A) en la cual el número de sumandos se encuentra restringido (número de variables multi-estado) así como los valores que pueden tomar éstos (número de estados de las variables multi-estado).

Dado que estamos interesados en obtener una expresión de la función generadora asociada a dichas cuentas, empezaremos analizando varios ejemplos sencillos. Concretamente, calcularemos la función generadora para los siguientes casos:

- a) Dos variables multi-estado las cuales pueden encontrarse en tres estados diferentes (ver figura B2.b).

- b) Tres variables multi-estado las cuales pueden encontrarse en dos estados diferentes (ver figura B2.b).

- c) Dos variables multi-estado las cuales pueden encontrarse en cuatro estados diferentes (ver figura B2.c)

En la figura B.2a se ilustra de forma gráfica las posibles configuraciones de estados de las dos variables multi-estado (u_1 y u_2 respectivamente) que definen el problema y los posibles valores de energía resultantes:

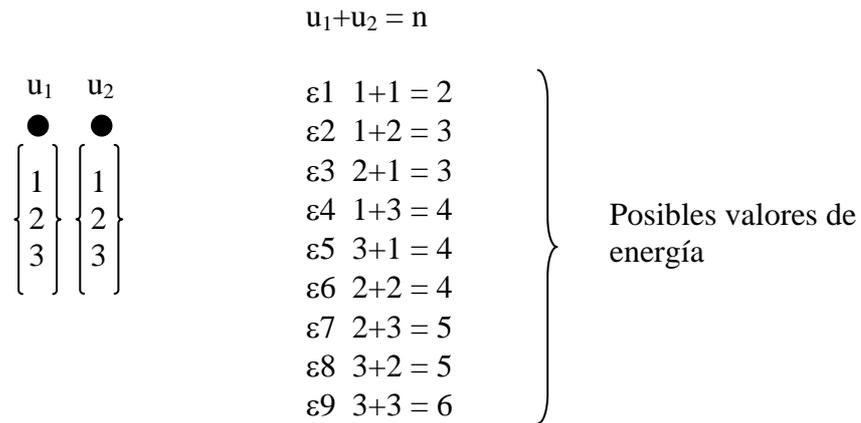


Figura B.2a. Ilustración gráfica de los valores de energía locales para una configuración consistente en dos variables multi-estado que pueden a su vez encontrarse en 3 estados diferentes, los cuales se indican entre llaves.

Si denotamos mediante $A(u)$, $B(u)$ y $C(u)$ las funciones generadoras asociadas a los ejemplos (a), (b) y (c) respectivamente, esto es, las funciones generadoras que dan cuenta de los valores de energía resultantes, tendremos que para el primer caso (ver definición A.3 del apéndice A) se expresa tal como sigue a continuación:

$$\begin{aligned}
 A(u) &= u^2 + u^3 + u^3 + u^4 + u^4 + u^4 + u^5 + u^5 + u^6 = & (B.2a) \\
 &= u^2 + 2u^3 + 3u^4 + 2u^5 + u^6
 \end{aligned}$$

Si observamos en detalle la expresión anterior vemos que a partir de la tabla que se muestra en la figura B2.a, las potencias se corresponden con el número de objetos de la clase combinatoria de un tamaño dado, a saber, 1 objeto de tamaño 2 (combinación ϵ_1), 2 objetos de tamaño 3 (combinaciones ϵ_2 y ϵ_3), 3 objetos de tamaño 4 (combinaciones ϵ_4 , ϵ_5 y ϵ_6), 2 objetos de tamaño 5 (combinaciones ϵ_7 y ϵ_8) y por último un solo objeto de tamaño 6 (combinación ϵ_9).

De forma similar, en la figura B.2b se ilustra de forma gráfica las posibles configuraciones de estados de las tres variables multi-estado (u_1 , u_2 y u_3 respectivamente) que definen el problema (b) y los posibles valores de energía resultantes:

$ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] \end{array} $	$u_1 + u_2 + u_3 = n$	$ \left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 \ 1+1+1 = 3 \\ \varepsilon_2 \ 1+1+2 = 4 \\ \varepsilon_3 \ 1+2+1 = 4 \\ \varepsilon_4 \ 1+2+2 = 5 \\ \varepsilon_5 \ 2+1+1 = 4 \\ \varepsilon_6 \ 2+1+2 = 5 \\ \varepsilon_7 \ 2+2+1 = 5 \\ \varepsilon_8 \ 2+2+2 = 6 \end{array} \right\} $
		Posibles valores de energía

Figura B.2b. Ilustración gráfica de los valores de energía locales para una configuración consistente en tres variables multi-estado que pueden a su vez encontrarse en 2 estados diferentes, los cuales se indican entre llaves.

Procediendo de forma similar a la seguida en al caso (a) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 B(u) &= u^3 + u^4 + u^4 + u^4 + u^5 + u^5 + u^5 + u^6 = & (B.2b) \\
 &= u^3 + 3u^4 + 3u^5 + u^6
 \end{aligned}$$

En este caso tenemos, 1 objeto de tamaño 3 (combinación ε_1), 3 objetos de tamaño 4 (combinaciones ε_2 , ε_3 y ε_5), 3 objetos de tamaño 5 (combinaciones ε_4 , ε_6 y ε_7), y por último un solo objeto de tamaño 6 (combinación ε_8).

Por último, en la figura B.2c se ilustra de forma gráfica las posibles configuraciones de estados de las 2 variables multi-estado (u_1 y u_2 respectivamente) que definen el problema (c) y los posibles valores de energía resultantes:

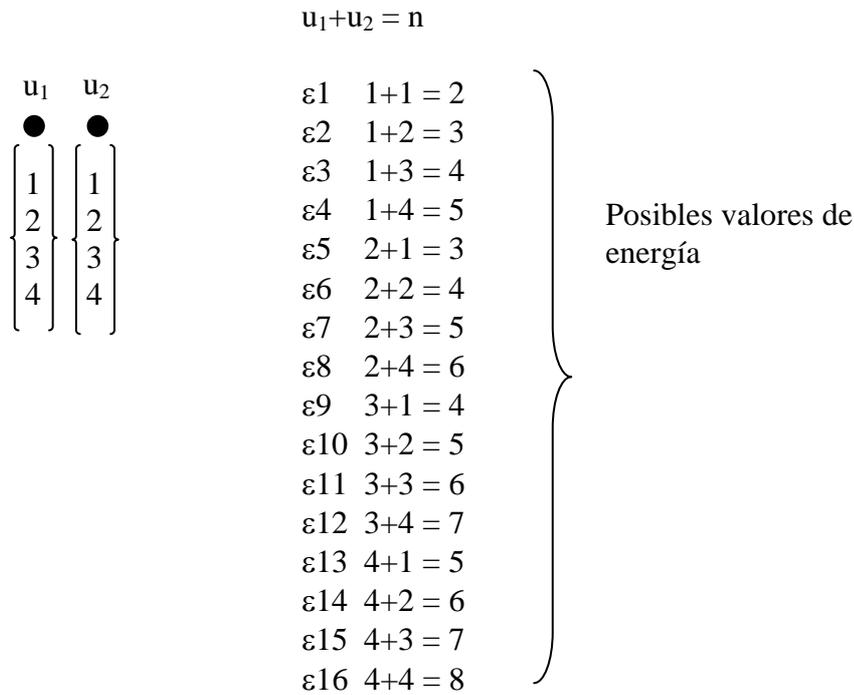


Figura B.2c. Ilustración gráfica de los valores de energía locales para una configuración consistente en dos variables multi-estado que pueden a su vez encontrarse en 4 estados diferentes, los cuales se indican entre llaves.

$$C(u) = u^2 + 2u^3 + 3u^4 + 4u^5 + 3u^6 + 2u^7 + u^8 \tag{B.2c}$$

Si observamos en detalle las 3 funciones generadoras obtenidas, podremos apreciar que éstas pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A(u) &= u^2 + 2u^3 + 3u^4 + 2u^5 + u^6 = \\ &= (u + u^2 + u^3)^2 \end{aligned} \tag{B.2d}$$

$$B(u) = u^3 + 3u^4 + 3u^5 + u^6 = \tag{B.2e}$$

$$= (u + u^2)^3$$

$$C(u) = u^2 + 2u^3 + 3u^4 + 4u^5 + 3u^6 + 2u^7 + u^8 = \tag{B.2f}$$

$$= (u + u^2 + u^3 + u^4)^2$$

Inspeccionando las expresiones B.2d, B.2e y B.2f observamos que las funciones generadoras vienen expresadas como la potencia de un polinomio que posee tantos términos como estados posibles de las variables multi-estado y cuya potencia es idéntica al número de variables multi-estado existentes (por ejemplo, 2 en el caso (a) y (c) mientras que 3 en el caso (b)).

Relativo a las observaciones experimentales anteriores, en el lenguaje de construcciones admisibles de la analítica combinatoria (Flajolet & Sedgewick, 2009) si B es una clase combinatoria se define el concepto de secuencia de la clase combinatoria B la suma infinita:

$$SEQ(B) = \{\varepsilon\} + B + (B \times B) + (B \times B \times B) + \dots \tag{B.2}$$

Donde en la expresión anterior se denota mediante el símbolo $\{\varepsilon\}$ a una estructura u objeto neutro con tamaño 0. Dicha estructura neutra juega un papel similar a la palabra nula o vacía, esto es, la cadena de caracteres “” en la teoría de lenguajes formales. De forma similar la notación $SEQ_k(B)$ se utiliza para hacer referencia a una secuencia restringida, esto es, $SEQ_k(B) = \overbrace{B \times B \times B \times \dots \times B}^{k \text{ veces}}$, es decir, dicha notación se traduce en el producto cartesiano de la clase combinatoria sobre si misma k veces (ver definición

A.10 del apéndice A). Teniendo en cuenta dicha definición podemos definir, por ejemplo, la clase combinatoria asociada a los números enteros positivos (números naturales), como una clase combinatoria en la que el propio número entero indique el tamaño del objeto combinatorio y donde sólo existe 1 objeto combinatorio asociado a cada tamaño:

$$I = \{\bullet, \bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\bullet, \dots\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = SEQ(Z) \setminus \{\varepsilon\} \quad (B.2)$$

Siendo Z una clase combinatoria con un solo objeto de tamaño 1, $Z = \{\bullet\}$, y hemos expresado la clase combinatoria de los número enteros positivos haciendo uso del operador $SEQ(\cdot)$ indicando de forma explícita que se excluye de ésta el elemento neutro $\{\varepsilon\}$. Por otra parte la secuencia contadora de la clase sería $I_n = 1 \quad n \geq 1$ y su función generadora ordinaria se expresaría como:

$$I(u) = u + u^2 + u^3 + \dots = \frac{u}{1-u} \quad (B.2)$$

Continuando con la notación asociada a la especificación de estructuras combinatorias admisibles, relativo a la definición de la clase combinatoria asociada a los números enteros, si definimos un subconjunto de números enteros T , esto es, $T \subseteq I$, representaríamos la clase combinatoria asociada a dicho subconjunto mediante la notación:

$$I^T = SEQ_T(Z) \quad (B.2)$$

Por tanto, si consideramos los subconjuntos de los números enteros $T_a = \{1, 2\}$ y $T_b = \{1, 2, 3, 4\}$, las funciones generadoras asociadas serían respectivamente:

$$I^{T_a}(u) = I^{\{1,2\}}(u) = u + u^2 \tag{B.2}$$

$$I^{T_b}(u) = I^{\{1,2,3,4\}}(u) = u + u^2 + u^3 + u^4$$

A partir de las definiciones y ejemplos anteriores estamos ahora en disposición de definir en base a la notación de estructuras combinatorias admisibles los ejemplos (a), (b) y (c) en la tabla que se muestra a continuación:

Tabla B.2a. Especificación combinatoria de los ejemplos (a), (b) y (c) junto con las funciones generadoras resultantes de tales especificaciones.

Especificación combinatoria	Función Generadora asociada
$A = I^{\{1,2,3\}} \times I^{\{1,2,3\}}$	$A(u) = I^{\{1,2,3\}}(u)I^{\{1,2,3\}}(u) = \left(I^{\{1,2,3\}}(u)\right)^2 = \left(u + u^2 + u^3\right)^2$
$B = I^{\{1,2\}} \times I^{\{1,2\}} \times I^{\{1,2\}}$	$B(u) = \left(I^{\{1,2\}}(u)\right)^3 = \left(u + u^2\right)^3$
$C = I^{\{1,2,3,4\}} \times I^{\{1,2,3,4\}}$	$C(u) = \left(I^{\{1,2,3,4\}}(u)\right)^2 = \left(u + u^2 + u^3 + u^4\right)^2$

Llegados a este punto es importante comentar que los cálculos asociados a los ejemplos anteriores se han realizado bajo la hipótesis de ausencia de estados degenerados, es decir, se ha supuesto implícitamente que el número de estados de las variables multi-estado se encuentra en correspondencia directa con configuraciones de símbolos lo cual no es cierto. En otras palabras, tal y como se definió el modelo en el capítulo 2, para cualquier instancia de las estructuras simbólicas del modelo, el mapeo de dichas estructuras en una jerarquía de variables multi-estado (ver figura 2.2 y 2.3) se traduce en la existencia de estados degenerados, es decir, no existe una correspondencia unívoca entre las configuraciones de símbolos y los estados de las variables multi-estado si no

que varias configuraciones de símbolos pueden dar lugar al mismo estado de energía (ver la tabla de asignaciones que se muestra en la figura 2.3).

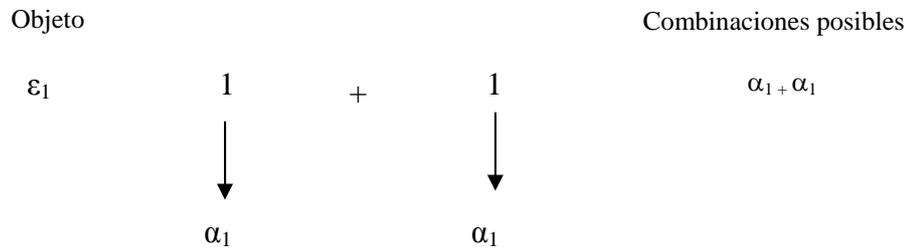
A raíz de los comentarios anteriores, es fácil deducir que la cuenta asociada a los ejemplos anteriores no es exacta (y por tanto tampoco las funciones generadoras obtenidas) debido a la existencia de estados degenerados, aunque el objetivo de presentar los ejemplos anteriores era meramente didáctico con objeto de descubrir las relaciones existentes entre las clases combinatorias que conformaban las composiciones de enteros restringidas que daban cuenta de los valores de energía locales. Concretamente, los valores de energía asociados a los niveles de las estructuras simbólicas.

Pasamos a continuación a efectuar el cálculo de la función generadora asociada al caso (a) (2 variables multi-estado que pueden estar en 3 estados diferentes) pero teniendo en cuenta los estados degenerados. Con este fin, y a modo de recordatorio en la tabla B.2a se ilustran los mapeos entre configuraciones de símbolos y estados para dicho caso:

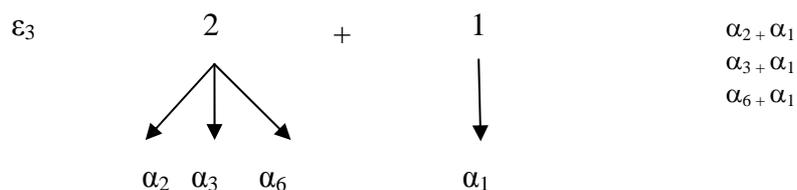
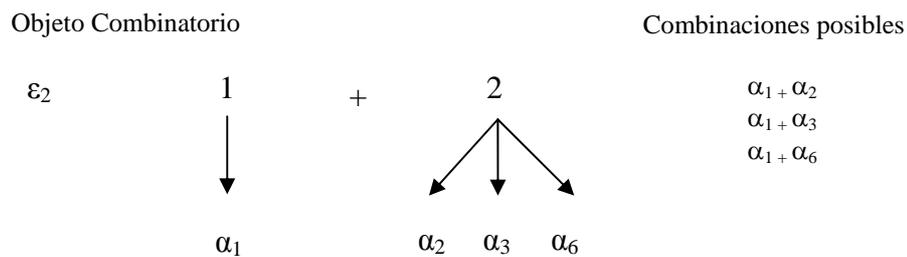
Tabla B.2b. Mapeo entre configuraciones de símbolos y estados para una permutación de tamaño igual a 3, la cual se correspondería, por ejemplo, con las configuraciones asociadas a los símbolos del segundo nivel de la estructura de la figura 2.2. Como se puede apreciar los estados son degenerados dado que varias combinaciones de símbolos dan lugar al mismo estado. Por ejemplo, los objetos combinatorios α_2 , α_3 y α_6 dan lugar al estado con valor de energía asociado igual a 2.

Nombre del Objeto combinatorio	Símbolo asociado	Estado asociado
α_1	123	1
α_2	132	2
α_3	213	2
α_4	231	3
α_5	312	3
α_6	321	2

Empezaremos el cálculo para el caso de un valor de energía $n = 2$ entonces es fácil comprobar que sólo existe una posibilidad de combinación representada por el objeto combinatorio ε_1 :

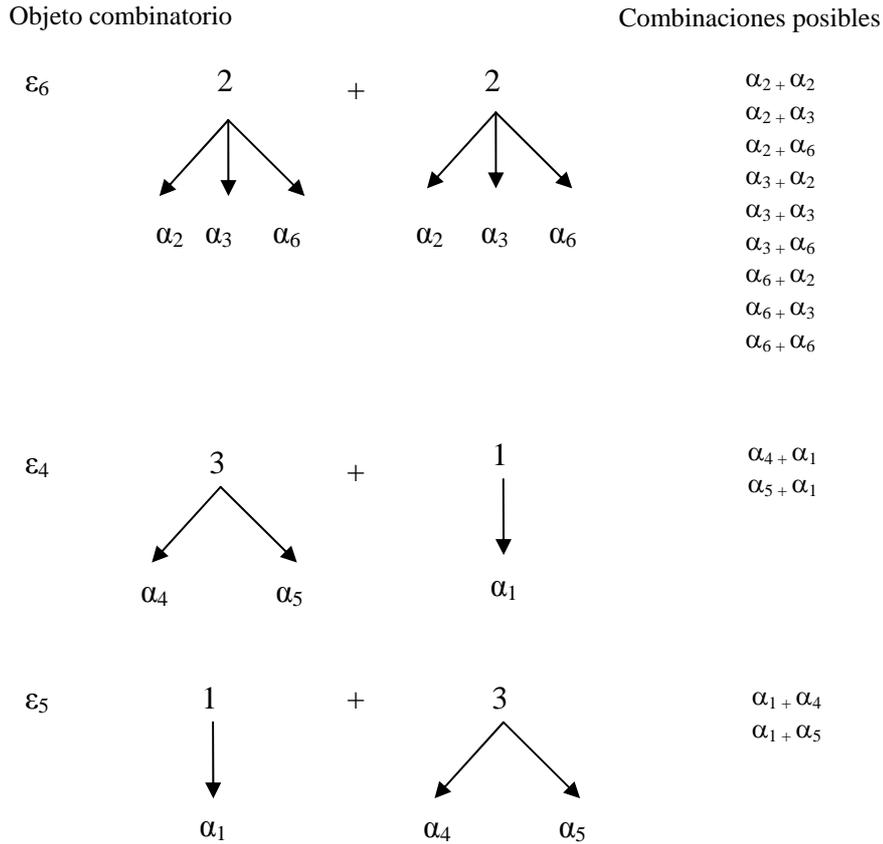


De forma similar, un valor de energía $n = 3$, comprende los objetos combinatorios ε_2 y ε_3 de la clase A, y los objetos combinatorios α_1 , α_2 , α_3 y α_6 asociados a los mapeos de la tabla B.2b. Por ejemplo, el objeto α_1 codifica la permutación de punto fijo “123” la cual representaba el estado de reposo al cual se le asignaba un valor de energía igual a la unidad. Paralelamente, los objetos α_2 , α_3 y α_6 se les asociaba un valor de energía igual a 2:

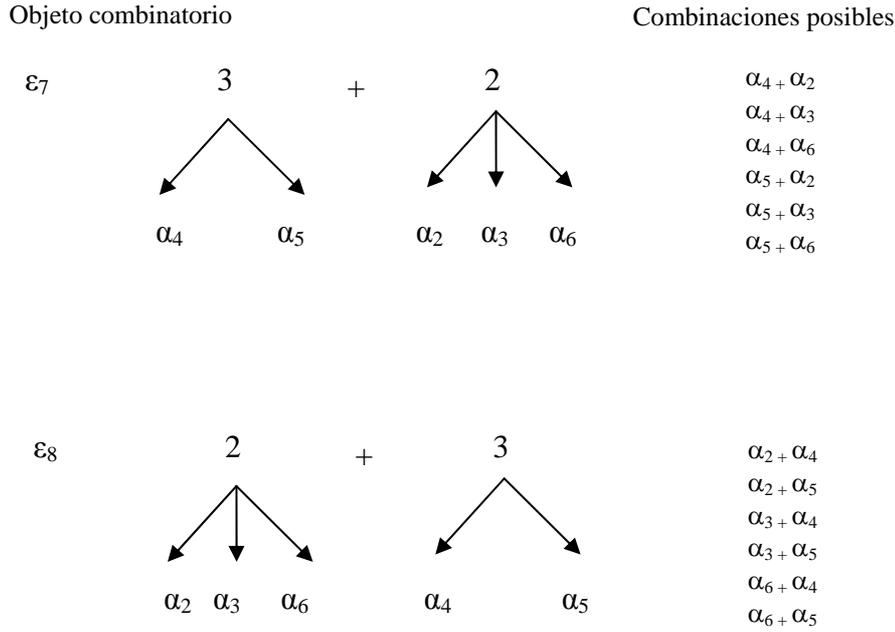


Como se puede apreciar existen 6 configuraciones posibles de símbolos asociadas con un valor de energía igual a 3.

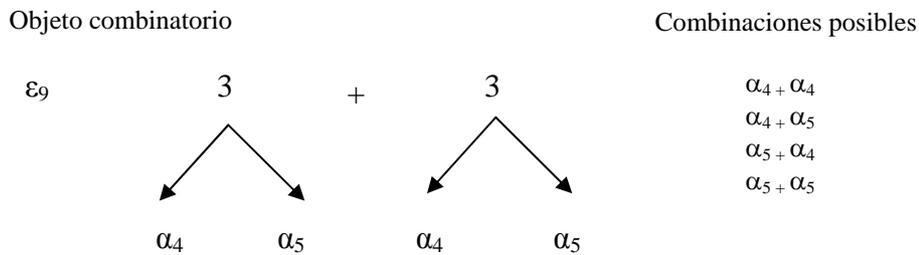
Veamos a continuación el caso $n = 4$. Para este caso y siguiendo exactamente el mismo procedimiento que en los casos previos es fácil comprobar que ahora existen 13 configuraciones posibles:



De forma similar, para un valor de energía $n = 5$ tenemos 12 posibilidades:



Finalmente, para un valor de energía $n = 6$ tenemos 4 combinaciones posibles, tal y como se ilustra a continuación:



En base a todo lo anterior, si denotamos también como A la clase combinatoria resultante de considerar los estados degenerados, en base a todo lo anterior podemos escribir su función generadora finalmente tal y como sigue:

$$\begin{aligned}
 A(u) &= u^2 + 6u^3 + 13u^4 + 12u^5 + 4u^6 = & (B.2g) \\
 &= (u + 3u^2 + 2u^3)^2
 \end{aligned}$$

Para una permutación de tamaño m , la función generadora asociada a la clase combinatoria que describiría el mapeo entre configuraciones de símbolos y los estados de las variables multi-estado se puede expresar de forma genérica como:

$$A_m(u) = \sum_{k \geq 0}^m A_m^k u^k \quad (\text{B.2h})$$

Si particularizamos la expresión anterior para $m = 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned} A_3(u) &= A_3^1 u + A_3^2 u^2 + A_3^3 u^3 = u + \binom{3}{2} A_2^2 u^2 + A_3^3 u^3 = \\ &= u + 3u^2 + 2u^3 \end{aligned} \quad (\text{B.2i})$$

Por tanto, es fácil comprender ahora el resultado obtenido en la expresión B.2g. Concretamente, aunque hemos realizado el cálculo de forma detallada por motivos puramente didácticos, el resultado final podría haberse deducido de forma más simple haciendo uso del lenguaje de estructuras combinatorias admisibles que presentamos de forma breve con anterioridad, a saber, el hecho de existir estados degenerados se traduce simplemente en que la especificación combinatoria usada para el ejemplo (a) cambiaría, es decir, la existencia de estados degenerados redundaría en la sustitución de la clase combinatoria $I^{\{1,2,3\}}$ por una nueva clase, la cual denotaremos como A_3 la cual, a diferencia de la clase I o la clase $I^{\{1,2,3\}}$ donde todos sus objetos son de tamaño unitario, ésta posee 1 objeto de tamaño 1, 3 objetos de tamaño 2 y 2 objetos de tamaño 3 los cuales vienen representados por los coeficientes A_3^1 , A_3^2 y A_3^3 respectivamente. En definitiva la nueva especificación sería:

$$A = A_3 \times A_3 \tag{B.2j}$$

Por lo tanto, la descripción en el lenguaje de estructuras admisibles de la clase combinatoria asociada a una estructura combinatoria como la que se ilustra en la figura B.2d, correspondiente a la función de energía de un nivel genérico de las estructuras del modelo sería:

$$N_k = SEQ_j(A_m) = \overbrace{A_m \times A_m \times A_m \times \dots \times A_m}^{j \text{ veces}} \tag{B.2k}$$

Nivel k -ésimo de una estructura simbólica genérica

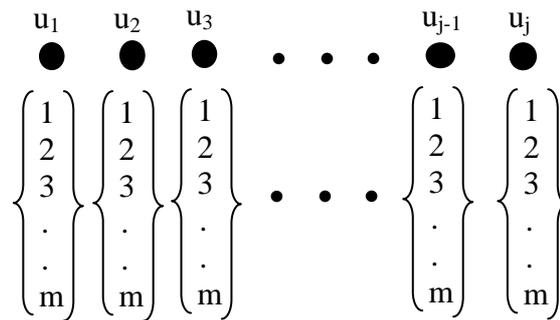


Figura B.2d. Ilustración gráfica de un nivel genérico k de una estructura simbólica de las descritas por el modelo representado en función de las variables multi-estado. Recordemos que el número de estados asociado a las variables multi-estado depende del valor del factor de bifurcación asociado al nivel, m en este caso. De forma similar, el número de variables multi-estado que podemos encontrar en un nivel genérico k de una estructura simbólica es igual al producto de todos los factores de bifurcación de los niveles superiores en la estructura con respecto del nivel considerado.

Por consiguiente, teniendo en cuenta los razonamientos expuestos con anterioridad, es fácil deducir que la expresión de la función generadora asociada a las cuentas de energías de un nivel genérico de las estructuras simbólicas postuladas por el modelo (ver figura B.2d), con un número de variables multi-estado igual a j donde cada variable puede encontrarse en m estados diferentes tendría por expresión:

$$N_k(u) = [A_m(u)]^j = \left[1 + \sum_{l \geq 2}^m \binom{m}{l} A_l^l u^l \right]^j \quad (\text{B.2l})$$

Dado que el número de variables multi-estado que pueden existir en un nivel genérico de una estructura simbólica es exactamente igual al producto de los factores de bifurcación de los niveles por encima del nivel considerado, podemos escribir la función generadora de la energía para una estructura con k niveles como el producto de las funciones generadoras de energía asociadas a cada uno de los niveles de la estructura:

$$N(u) = A_{m_1}(u) A_{m_2}(u)^{m_1} A_{m_3}(u)^{m_1 m_2} \dots A_{m_k}(u)^{m_1 m_2 m_3 \dots m_{k-1}} \quad (\text{B.2m})$$

La función generadora de energía anterior dado que consideramos los factores de bifurcación de cualquier instancia de las estructuras simbólicas como la realización de una variable aleatoria m , podemos finalmente escribir la función de energía (la cual será una variable aleatoria) de una forma más compacta tal y como se ilustra a continuación:

$$N(u) = A_m(u)^{1+m+m^2+m^3+\dots+m^{k-1}} = (A_m(u))^{\frac{1-m^k}{1-m}} \quad (\text{B.2n})$$

Apartado B.3 (Ecuación correspondiente a la expresión 2.7 (Función de Energía)):

Para empezar la derivación de la ecuación 2.7, estudiemos en primer lugar la siguiente función generadora bivariada:

$$\Phi(z, u) = \exp(zX(u)) = e^{zX(u)} \quad (\text{B.3a})$$

Donde $X(u)$ en la expresión B.3a se corresponde con la función generadora exponencial de una clase combinatoria X :

$$X(u) = \sum_{l \geq 0} x_l \frac{u^l}{l!} \quad (\text{B.3b})$$

Por otra parte el teorema de expansión multinomial nos proporciona la siguiente fórmula:

$$\left(\sum_{k=1}^p x_k \right)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\dots k_p!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \dots x_p^{k_p} \quad (\text{B.3c})$$

A partir del desarrollo es serie de Taylor de la función exponencial, la expresión B.3b y la fórmula de desarrollo (o expansión) multinomial, la función generadora bivariada B.3a la podemos expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi(z, u) &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{l \geq 0} x_l \frac{u^l}{l!} \right)^k \frac{z^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=k} \frac{z^{k_1+k_2+\dots+k_p}}{k_1!k_2!k_3!\dots k_p!} \left(\frac{x_1}{1!} u \right)^{k_1} \left(\frac{x_2}{2!} u^2 \right)^{k_2} \left(\frac{x_3}{3!} u^3 \right)^{k_3} \dots = \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=k} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots}{k_1!k_2!\dots k_p!(1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots} z^{k_1+k_2+\dots+k_p} u^{k_1+2k_2+3k_3+\dots} \end{aligned} \quad (\text{B.3d})$$

Con objeto de expresar (B.3d) de una forma más compacta, teniendo en cuenta que las variables de ambos sumatorios van hacia el infinito, podemos denotar los índices exponenciales de las variables complejas u y z como sigue:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 + \dots &= k \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots &= n \end{aligned} \tag{B.3e}$$

Si multiplicamos y dividimos por $n!$ la expresión B.3d y hacemos uso de la expresión B.3e, podremos expresar la expresión B.3d de forma más compacta, tal y como sigue:

$$\begin{aligned} \phi(z, u) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \left\{ \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots \right\} \frac{u^n}{n!} z^k = \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{\pi(n,k)} \prod_{j=1}^{n-k+1} \frac{n!}{k_j! (j!)^{k_j}} x_j^{k_j} \frac{u^n}{n!} z^k \end{aligned} \tag{B.3f}$$

De forma más específica los coeficientes $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots}$ pueden interpretarse como el número de particiones (consultar definición A.7 del apéndice A) de n siendo $k_1 + 2k_2 + \dots = n$ donde k_i es el número de partes de tamaño i y $k_1 + k_2 + k_3 + \dots = k$ representa el número de partes en la partición. Por otra parte, el índice del sumatorio $\pi(n,k)$ representa el número de particiones del entero n en k sumandos (partes) donde $n \geq k$. De este modo, la función generadora bivariada de la expresión B.3a podemos finalmente expresarla en función de unos polinomios denominados polinomios exponenciales parciales de Bell:

$$\phi(z, u) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} B_n^k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-k+1}) \frac{z^n}{n!} u^k \tag{B.3g}$$

Donde cada polinomio $B_n^k(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1})$ contiene exactamente $\pi(n,k)$ monomios:

$$B_n^k(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \sum_{\pi(n,k)} \prod_{j=1}^{n-k+1} \frac{n!}{k_j!(j!)^{k_j}} x_j^{k_j} \quad (\text{B.3h})$$

Teniendo en cuenta el desarrollo anterior, recordemos ahora la expresión de la función generadora de la energía:

$$N(u) = A_{m_1}(u) A_{m_2}(u)^{m_1} A_{m_3}(u)^{m_1 m_2} \dots A_{m_k}(u)^{m_1 m_2 m_3 \dots m_{k-1}} \quad (\text{B.3i})$$

Tal y como argumentamos en el capítulo 2, el hecho de considerar el factor de bifurcación como una variable congelada (variable aleatoria) nos permite simplificar la expresión anterior ya que $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_k = \dots = m$, por consiguiente:

$$N(u) = [A_m(u)]^{\frac{1-m^k}{1-m}} = \left(1 + \sum_{n \geq 2} A_m^n u^n \right)^{\frac{1-m^k}{1-m}} = \left(1 + \sum_{l \geq 2} \binom{m}{n} A_n^n u^n \right)^{\frac{1-m^k}{1-m}} \quad (\text{B.3j})$$

Dado que estamos interesados en calcular los coeficientes de la función generadora $N(u)$, esto se traduce en la extracción de los coeficientes de la serie formal de potencias que define a la propia función generadora (ver definición A.4 del apéndice A), esto es:

$$N(n) = [u^n] N(u) = [u^n] \sum_{n \geq 0} N(n) u^n = [A_m(u)]^{\frac{1-m^k}{1-m}} = [u^n] \left(1 + \sum_{l \geq 2} \binom{m}{n} A_n^n u^n \right)^{\frac{1-m^k}{1-m}} \quad (\text{B.3k})$$

A partir de la expresión anterior y teniendo en cuenta el desarrollo realizado relativo a la función generadora bivariada B.3a, ahora estamos en disposición de poder obtener una expresión exacta para los coeficientes asociados a la función generadora de la energía en función de los polinomios exponenciales parciales de Bell:

$$N(n) = [u^n]N(u) = [u^n](A_m(u))^\lambda = \frac{\lambda!}{n!} B_n^\lambda(x_1, x_2, \dots, x_{n-\lambda+1}) \quad (\text{B.3l})$$

Donde por comodidad hemos denotado como $\lambda = \frac{1-m^k}{1-m}$ y por otra parte, en la expresión anterior (B.3l) dado que la función generadora $X(u) = A_m(u)$ es el resultado de un desarrollo en serie finito, las variables del polinomio x_k tienen por expresión:

$$x_k = \begin{cases} k!A_m^k & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (\text{B.3m})$$

Para clarificar aún más los conocimientos introducidos veamos un ejemplo sencillo de obtención de los coeficientes asociados a una de las funciones de energía estudiadas en los ejemplos del apartado B.2, concretamente

$$N(u) = (u + 3u^2 + 2u^3)^2 = u^2 + 6u^3 + 13u^4 + 12u^5 + 4u^6 \quad (\text{B.3n})$$

En este caso tenemos que $\lambda = 2$, $m = 3$ y los valores de energía están restringidos al conjunto de enteros $\{2,3,4,5,6\}$. Por lo tanto los polinomios de Bell involucrados en el cálculo de los coeficientes $N(n)$ son:

$$B_2^2(x_1) = x_1^2 \quad (\text{B.3o})$$

$$B_3^2(x_1, x_2) = 3x_1x_2$$

$$B_4^2(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 4x_1x_3$$

$$B_5^2(x_1, x_2, x_3, x_4 = 0) = 5x_1x_4 + 10x_2x_3 = 10x_2x_3$$

$$B_6^2(x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, x_5 = 0) = 6x_1x_5 + 15x_2x_4 + 10x_3^2 = 10x_3^2$$

A partir de lo anterior es fácil verificar la exactitud del procedimiento, tal y como se muestra seguidamente:

$$\begin{aligned}
 [u^2]N(u) &= \frac{2!}{2!} B_2^2(1) = x_1^2 \Big|_{x_1=1} = 1 & (B.3p) \\
 [u^3]N(u) &= \frac{2!}{3!} B_3^2(1,6) = \frac{2!}{3!} 3x_1x_2 \Big|_{x_1=1, x_2=6} = 6 \\
 [u^4]N(u) &= \frac{2!}{4!} B_4^2(1,6,12) = \frac{2!}{4!} (3x_2^2 + 4x_1x_3) \Big|_{x_1=1, x_2=6, x_3=12} = 13 \\
 [u^5]N(u) &= \frac{2!}{5!} B_5^2(1,6,12,0) = \frac{2!}{5!} 10x_2x_3 \Big|_{x_2=6, x_3=12} = 12 \\
 [u^6]N(u) &= \frac{2!}{6!} B_6^2(1,6,12,0,0) = \frac{2!}{6!} 10x_3^2 \Big|_{x_3=12} = 4
 \end{aligned}$$

Apartado B.4 (Ecuación correspondiente a la Función de Partición (expresión 2.10))

A partir de la definición de la función de partición tenemos:

$$Z = \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} N(n)e^{-\beta n} = \sum_{n \geq \lambda} N(n)e^{-\beta n} = \sum_{n \geq \lambda} \frac{\lambda!}{n!} e^{-\beta n} B_n^k(x_1, x_2, \dots, x_{n-\lambda+1}) \quad (B.4a)$$

Teniendo en cuenta que los polinomios exponenciales parciales de Bell cumplen la siguiente igualdad (Comtet, 1974):

$$B_n^k(abx_1, ab^2x_2, ab^3x_3, \dots) = a^k b^n B_n^k(x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (B.4b)$$

A partir de la igualdad anterior podemos concluir que:

$$Z = \sum_{n \geq \lambda} \frac{\lambda!}{n!} B_n^k(y_1, y_2, \dots, y_{n-\lambda+1}) \quad (\text{B.4c})$$

Donde las variables del polinomio y_k tienen ahora por expresión:

$$y_k = \begin{cases} k! e^{-\beta k} A_m^k & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (\text{B.4d})$$

Si ahora tenemos en cuenta que la definición B.3g obtenemos:

$$[z^k] \phi(z, u) = \frac{\phi_k(u)}{k!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{l \geq 1} x_l \frac{u^l}{l!} \right)^k = \sum_{n \geq k} B_n^k(x_1, x_2, \dots) \frac{u^n}{n!} \quad (\text{B.4e})$$

Paralelamente, si ahora tenemos en cuenta que las funciones generadoras $A_m(u)$ son polinomios, esto es, desarrollos en serie finitos, podemos finalmente expresar la función de partición B.4c tal y como sigue:

$$Z = \phi_k(1) = \sum_{n \geq \lambda} \frac{\lambda!}{n!} B_n^k(y_1, y_2, \dots, y_{n-\lambda+1}) = \left(\sum_{l \geq 1} \frac{y_l}{l!} \right)^\lambda = \left(\sum_{l \geq 1} e^{-\beta l} A_m^l \right)^\lambda \quad (\text{B.4f})$$

Reordenando términos en la expresión anterior obtenemos finalmente la expresión de la función de partición de la ecuación 2.10:

$$Z = e^{-\beta \lambda} \left(1 + \sum_{l \geq 2} \binom{m}{l} e^{-\beta(l-1)} A_l^l \right)^\lambda \quad (\text{B.4g})$$

Apartado B.5 (Gráficas de Energía libre para $\mu_k = 2,3$ y 5):

Las gráficas que mostramos a continuación muestran la evolución del promedio congelado de la energía libre (normalizada en el intervalo [0,-1]) particularizadas para valores del factor de bifurcación medio $\mu_k = 2,3$ y 5 con objeto de poder apreciar mejor para dichos valores la región adiabática y la disipativa común a dichas gráficas. Concretamente la figura B.4a se corresponde con el promedio congelado (esperanza) de la energía libre para un valor del factor de bifurcación medio igual a 2. De forma similar, las figuras B.4b y B.4c muestran el promedio congelado de la energía libre para valores de μ_k iguales a 3 y 5 respectivamente.

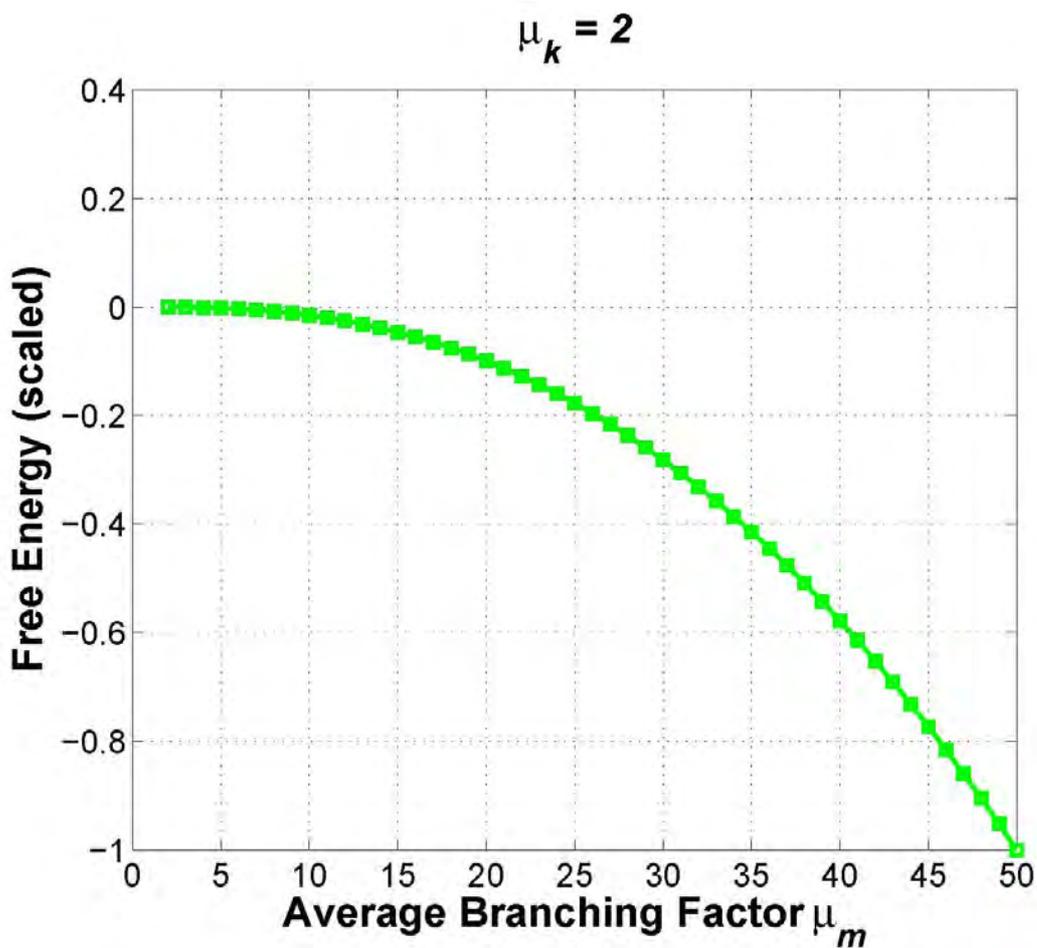


Figura B.5a. Evolución del promedio congelado de la energía libre en función del número medio de símbolos (μ_k) usado para operaciones simbólicas de movimiento para estructuras con un número medio de niveles de procesamiento de la información igual a 2.

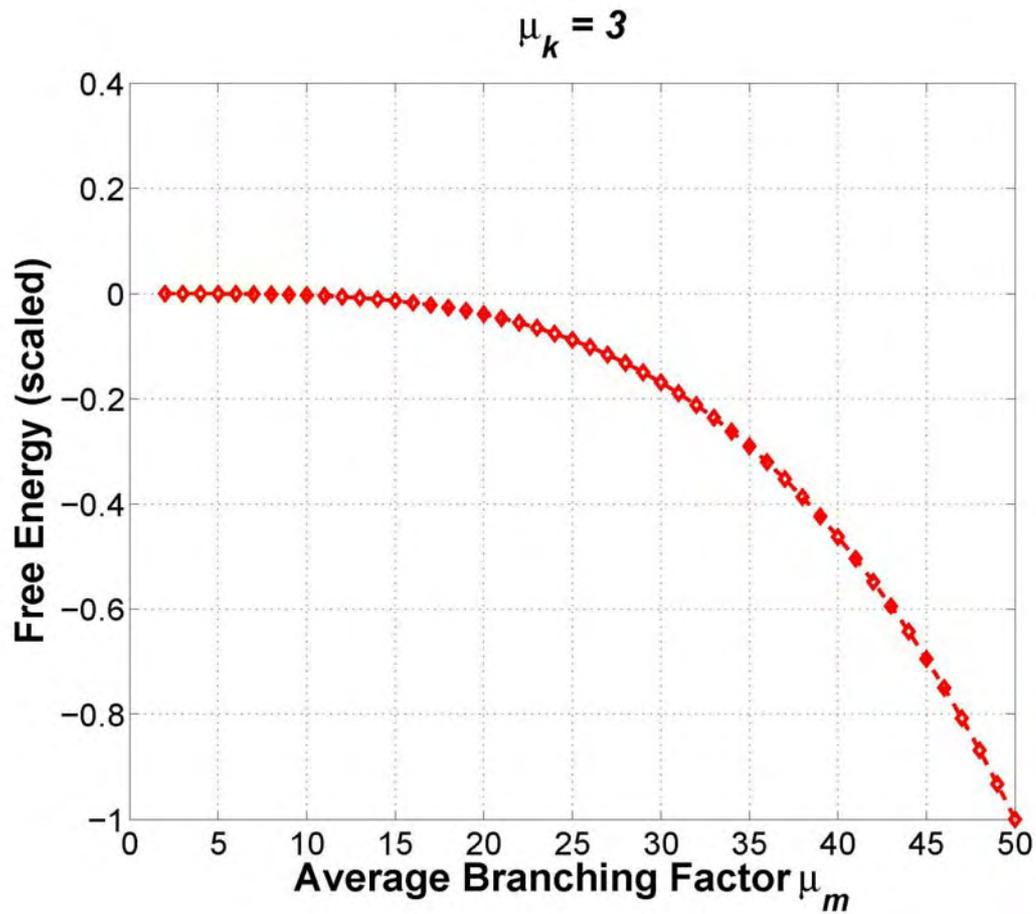


Figura B.5b. Evolución del promedio congelado de la energía libre en función del número medio de símbolos (μ_k) usado para operaciones simbólicas de movimiento para estructuras con un número medio de niveles de procesamiento de la información igual a 3.

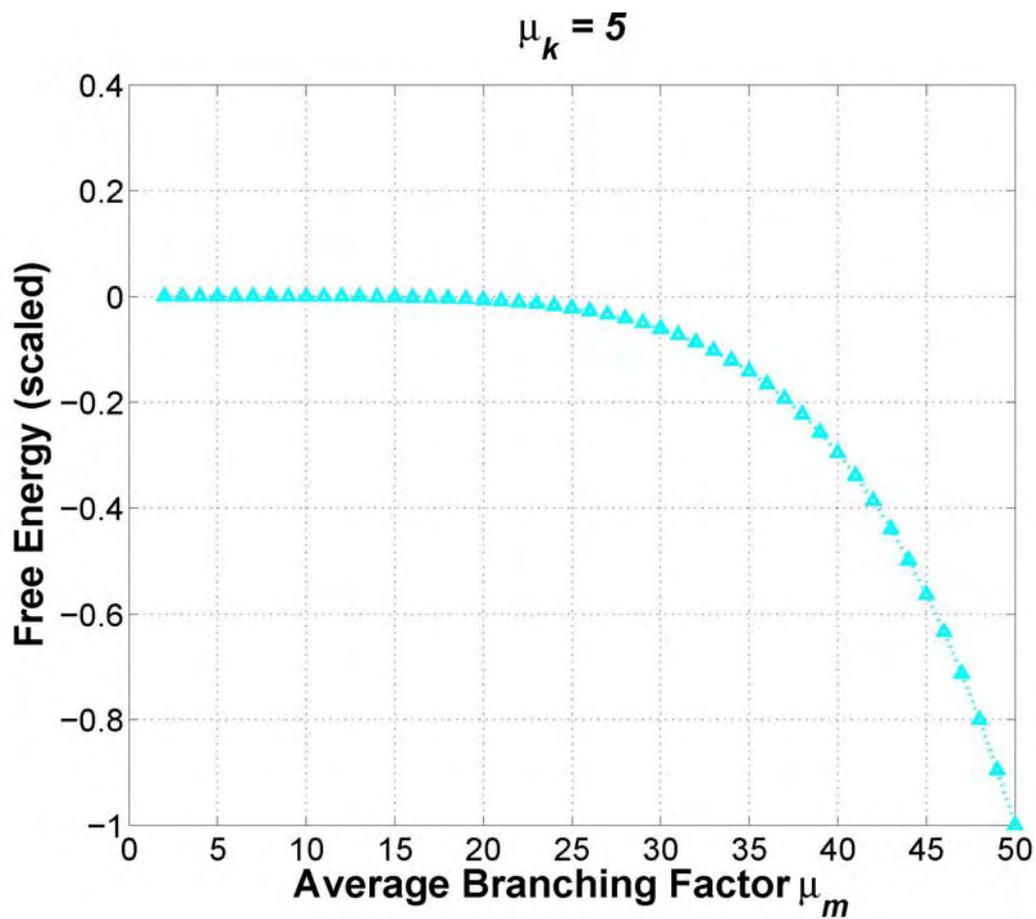


Figura B.5c. Evolución del promedio congelado de la energía libre en función del número medio de símbolos (μ_k) usado para operaciones simbólicas de movimiento para estructuras con un número medio de niveles de procesamiento de la información igual a 5.

Apéndice C

Modelos Recursivos

Seguidamente, definimos algunos conceptos básicos de teoría de grafos utilizados en la segunda parte de la presente tesis doctoral. Un grafo G es un par (V,E) , donde V es el conjunto de nodos y E representa el conjunto ramas del mismo. El grafo se dice que está ordenado si sus nodos se etiquetan $1,2,\dots,N$ siguiendo un orden topológico. Dado un grafo G y un vértice $v \in V$, $pa[v]$ representa el conjunto de nodos padre del nodo v , mientras que $ch[v]$ representa el conjunto de nodos hijo del nodo v . Por ejemplo, el grafo de la figura c.1, representa un grafo posicional dirigido y acíclico (las posiciones se denotan por las letras a,b,c y d respectivamente que aparecen asociadas a cada una de las ramas) $pa[8] = \{1,2,6\}$ y por ejemplo, los nodos hijo del nodo raíz (denotado también con el símbolo #) serían $ch[1] = \{2,3,4,8\}$. Por otra parte, se define el grado de entrada de un nodo v como la cardinalidad de $pa[v]$, mientras que se define el grado de salida de un nodo genérico v como la cardinalidad del conjunto $ch[v]$. En los modelos gráficos que vamos a estudiar la presencia de una rama entre dos nodos del grafo modela una relación lógica entre los fragmentos de información representados por

dichos nodos. De forma similar, el grado de salida del nodo 1 es 4 mientras que el grado de entrada al nodo 8 es 3.

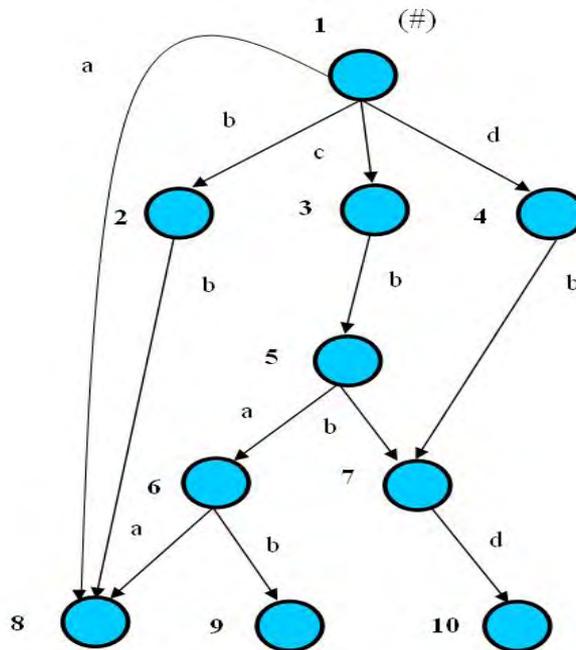


Figura c.1. Ejemplo de un grafo ordenado posicional y acíclico para ilustrar la notación utilizada comúnmente en los modelos gráficos.

Por otra parte es importante comentar que el concepto de máximo grado de entrada y de salida de un grafo son importantes puesto que nos permiten clasificar grafos en base a su estructura o esqueleto. En este sentido todas las clases de grafos con un grado de entrada máximo igual a i y un grado máximo de salida igual a o se representan por el símbolo $\#^{(i,o)}$. Por ejemplo, los grafos triviales (ausencia de estructura) como un vector de números reales se representaría por la clase $\#^{(0,0)}$, de forma similar, la clase que representa todos los árboles binarios se denotaría como $\#^{(1,2)}$, o por ejemplo todas las estructuras correspondientes a patrones en una rejilla bidimensional las representaríamos como pertenecientes a la clase $\#^{(2,2)}$ (ver figura c.3).

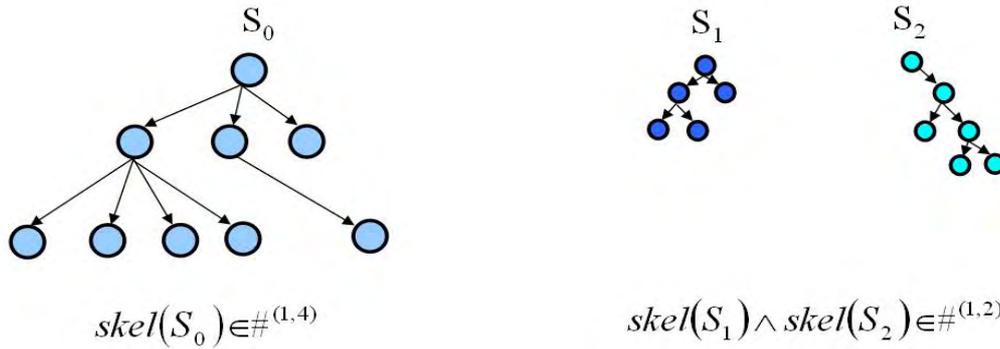


Figura c.2. Ejemplo de grafos para ilustrar su clasificación en base a su estructura o esqueleto.

Las figuras c.1 y c.2 proporcionan varios ejemplos de grafos y su clasificación atendiendo a la definición anterior. En la figura c.2 la notación $skel(.)$ se utiliza para indicar la estructura o esqueleto del grafo, esto es se trata de representar la estructura del grafo sin considerar las variables asociadas (etiquetas) a cada uno de los nodos.

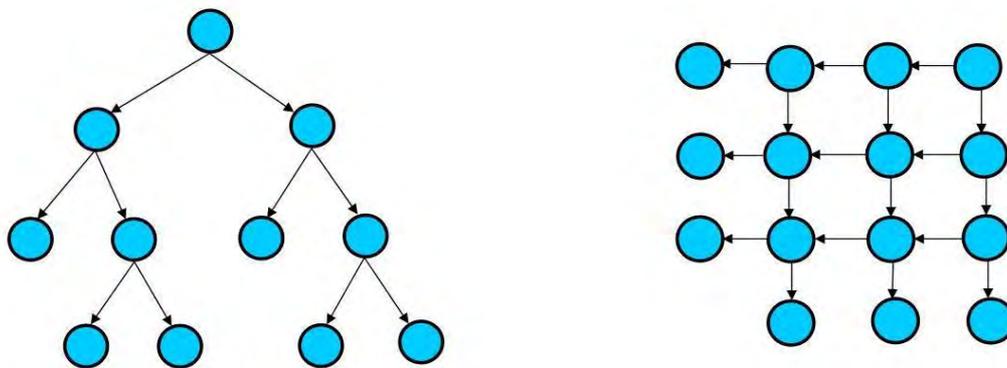


Figura c.3. Ejemplos de estructuras pertenecientes a las clases $\#^{(1,2)}$ (árboles binarios) y $\#^{(2,2)}$ (rejilla bidimensional).

Paralelamente, se define el concepto de operador de desplazamiento generalizado (figura c.4) como una extensión del concepto de operador de desplazamiento temporal. Un operador temporal discreto aplicado a una variable temporal consiste en una transformación simbólica que mapea dicha variable en una expresión que comprende a dicha variable medida en diferentes instantes de tiempo. Si bien el operador clásico de desplazamiento temporal opera sobre secuencias, el operador generalizado lo hace sobre

grafos posicionales acíclicos y por supuesto dirigidos. Normalmente, dicho operador se representa como q_k^{-1} donde el subíndice k indica el k-ésimo hijo del nodo sobre el que actúa el operador.

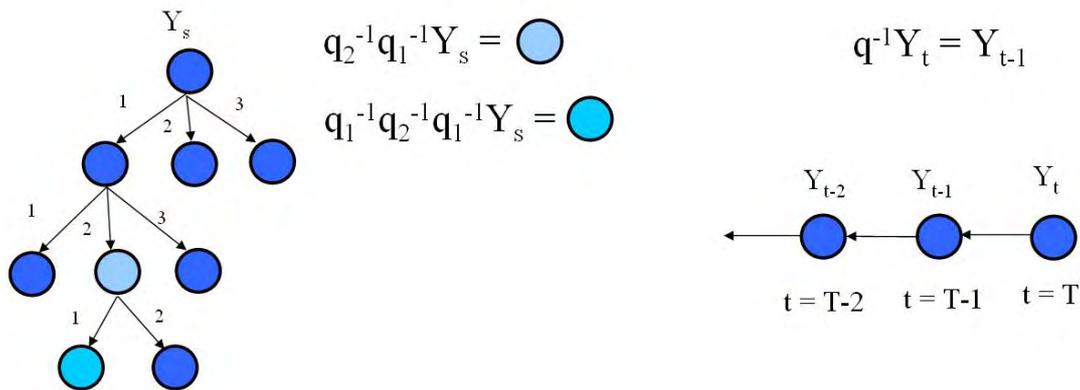


Figura c.4. Ilustración gráfica del concepto de operador de desplazamiento generalizado.

La figura c.4 ilustra el mencionado concepto haciendo uso de un grafo posicional acíclico (parte izquierda de la figura) en la cual representamos el resultado de aplicar al nodo raíz (denotado por el símbolo Y_s) varias transformaciones componiendo varios operadores a dicha variable, dado que no se trata de una secuencia, cada rama de salida se denota con un número o letra indicando su posición la cual se añade como subíndice de la letra que representa el operador con objeto de desambiguar la operación. La parte derecha de la figura se muestra una secuencia y la aplicación del operador de desplazamiento temporal. En este caso no es necesario especificar la posición dado que sólo existe una posibilidad (grado de salida o de entrada máximo de cualquier nodo es la unidad). Es importante, resaltar que el operador de desplazamiento generalizado no es un operador conmutativo.

Por último, definimos seguidamente el concepto de transducción estructural el cual simplemente extiende el concepto matemático de función pero a espacios compuestos por estructuras (grafos) las cuales representan realizaciones de modelos probabilísticos o determinísticos, es decir, los nodos de dichas estructuras contienen variables o conjuntos de variables las cuales adquieren una interpretación probabilística (variables aleatorias) o determinística según el modelo considerado. Concretamente, una transducción es una relación $\tau \subset u^{\#^1} \times y^{\#}$ donde u e y representan los espacios de entrada y de salida representando las variables asociadas a los nodos de las estructuras mientras que $\#^1$ y $\#$ representan las clases de grafo (topologías) del espacio de estructuras de entrada y de salida respectivamente.

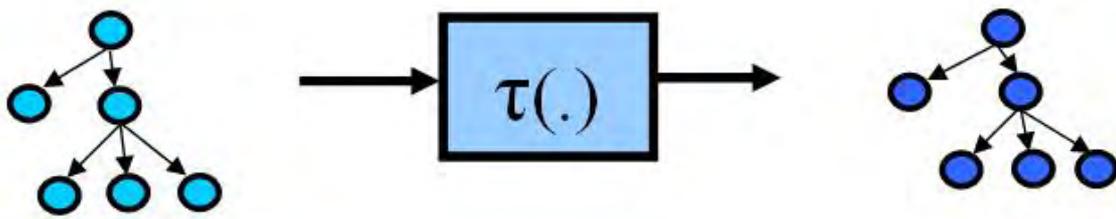


Figura c.5. Ilustración gráfica del concepto de transducción isomorfa.

El mapeo o transducción $\tau(\cdot)$ se dice que es isomorfa si ésta no altera el esqueleto de las estructuras del espacio de entrada, esto es, si $skel(U) = skel(\tau(U))$ para toda estructura U perteneciente al espacio de estructuras de entrada. De forma similar, decimos que una transducción isomorfa $\tau(\cdot)$ admite una representación recursiva del espacio de estados si existe un espacio estructurado $x^{\#(i,o)}$ de forma que para cada estructura U , $Y = \tau(U)$ existe una estructura $X \in x^{\#(i,o)}$ donde se cumple $skel(X) = skel(U) = skel(Y)$ y dos funciones f y g denominadas función de transición de estados y función de salida respectivamente las cuales cumplen para todo nodo $v \in skel(U)$:

$$\begin{aligned}
 a(v) &= f(a(ch[v]), I(v), v) \\
 y(v) &= g(a(v), I(v), v)
 \end{aligned}
 \tag{c.1}$$

Donde $a(v)$ representa el estado actual del sistema, el cual depende del estado de los nodos hijo del nodo v y de las variables asociadas a los nodos hijo $I(v)$ en el estado interno u oculto de la estructura U . Recordemos que los modelos gráficos considerados se basan en modelar datos haciendo uso de un conjunto de variables observadas y ocultas asociadas con los nodos de un grafo dirigido y acíclico. Las ecuaciones anteriores representan el concepto de máquina de Moore (teoría de autómatas de estados finitos) y la transformación llevada a cabo por la función de transición de estados (primera ecuación) admite una forma de representación gráfica denominada diagrama recursivo o red recursiva el cual se suele utilizar para describir operaciones realizadas por modelos gráficos deterministas principalmente. La figura c.6 representa los diagramas recursivos que implementan estructuras con esqueletos correspondientes a árboles binarios $\#^{(1,2)}$ y a estructuras bidimensionales como la rejilla $\#^{(2,2)}$, vistas en la figura c.4.

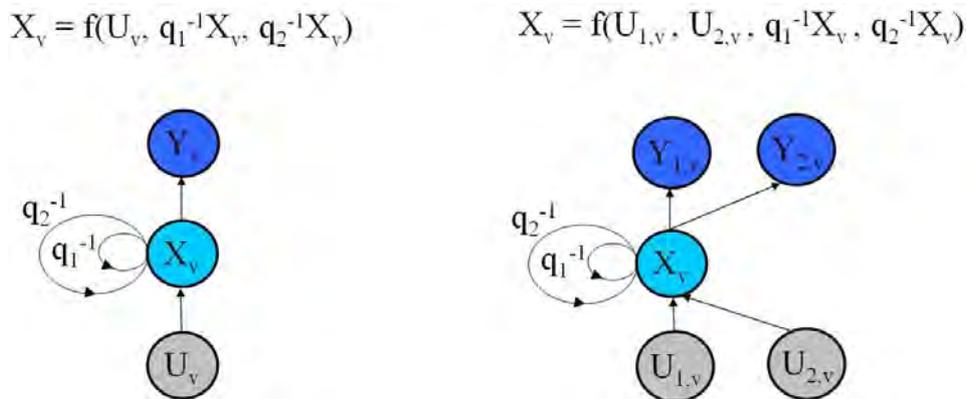


Figura c.6. Redes recursivas que implementan estructuras correspondientes a árboles binarios (parte izquierda de la figura) y rejillas bidimensionales (parte derecha) como los presentados en la figura c.3.

Por último mencionar que en la mayoría de los casos tanto las redes neuronales recursivas como las redes Bayesianas se han utilizado en problemas relativamente simples consistentes en la clasificación de estructuras. No obstante, desarrollar modelos capaces de realizar transducciones no isomorfas (ver figura 4.1) de forma eficiente representa uno de los retos más importantes para este tipo de modelos, tal y como argumentamos en el capítulo 4.

Publicaciones

China, A., Korutcheva, E. (2013). "Intelligence and Embodiment: A Statistical Mechanics Approach", *Neural Networks*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.neunet.2013.01.007>. (in press)

China, A., González-Mora, J.L., (2013). "Structural Analysis of Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy Data". Proceedings of the 6th International Joint Conference on Biomedical Engineering Systems and Technologies BIOSTEC 2013.

China, A., Korutcheva, E., (2011) "Complexity Analysis of Vario-eta Through Structure" 14th International Workshop, IWCIA 2011, Madrid, Spain, May 2011; *Advances in Image Analysis and Applications*, Research Publishing Services 2011 ISBN 978-981-08-7923-5.
<http://arxiv.org/abs/1106.1113>

China, A., (2011). "Nonlinear Dynamical Analysis of Magnetic Resonance Spectroscopy Data" *Combinatorial Image Analysis, Lecture Notes in Computer Science*, 2011, Volume 6636/2011, 469-482, DOI: 10.1007/978-3-642-21073-0_41

China, A., (2009). "Understanding the Principles of Recursive Neural Networks A Generative Approach to Tackle Model Complexity" ICANN2009 (International Conference on Artificial Neural Networks).
<http://arxiv.org/abs/0911.3298v1>

China, A., (2009) "Reducing Complexity of Recursive Neural Networks Learning Using a Mean-field Approach", XVI Congreso de Física Estadística, FiisEs 2009.