

TESIS DOCTORAL
AÑO 2015

**Superficies de Riemann con
morfismos p -gonales irregulares**

Ismael Cortázar Múgica

Master E.E.E.S. Matemáticas Avanzadas (Geometría y
Topología) UNED

Licenciado en Ciencias Matemáticas UNED

Programa de Doctorado en Ciencias

Director: Dr. Antonio F. Costa González

UNED: Dpto. Matemáticas Fundamentales (Facultad de Ciencias).

Tesis Doctoral: Superficies de Riemann con morfismos p -gonales irregulares.

Autor: Ismael Cortázar Múgica.

Master E.E.E.S. (Geometría y Topología) UNED (2010); Licenciado en Matemáticas UNED (2008); Ingeniero Superior de Telecomunicación UPM (1976).

Director: Dr. Antonio Félix Costa González

15 de abril de 2015

Agradecimientos

Aunque resulte extraño esto ha sido lo último que he escrito, por el temor de ser prolijo o bien dejar de mencionar a alguien.

Quiero empezar por mi familia Julia y Eduardo, por su apoyo en todo momento y porque el tiempo dedicado a la tesis ha sido parte del que les correspondía a ellos.

También quiero recordar a mis padres Ismael y Pilar, que ya no están con nosotros, y que seguro se habrían llevado una gran alegría.

Mención especial merece mi director de tesis, el profesor Antonio Félix Costa, que ha tenido la paciencia de irme guiando por los caminos de la geometría compleja, y me ha apoyado y animado sin descanso. Sin él seguro que esta tesis no existiría.

Tengo que hacer extensivo este agradecimiento a todos los profesores de la U.N.E.D. pues la experiencia de hacer la licenciatura, el máster, y el doctorado, ha sido enormemente enriquecedora.

No quiero olvidar a D. Antonio Pardo Fraile, mi profesor en un lejanísimo preuniversitario, que fue mi primer verdadero profesor de matemáticas, iniciándome en el rigor lógico que él, traductor de Henri Cartan, exhibía en sus clases. Aunque en aquel momento no me decidí a cambiar mis planes y continué mis estudios en la E.T.S.I.T. no me cabe ninguna duda de que la añoranza del rigor y la coherencia lógica de sus enseñanzas, junto con la idea de que las matemáticas son una de las bellas artes, para mí la más bella, me llevaron, muchos años después, a matricularme en la U.N.E.D.

Muchas otras personas me han ayudado durante estos años, desde autores de libros de matemáticas que han respondido mis “e-mails” consultando dudas, pasando por visitantes en la U.N.E.D. a los que he “asaltado” con preguntas, hasta mis jefes que nunca han puesto objeciones a nada que me ayudara a compaginar mi trabajo con el doctorado.

Muchas gracias a todos.

Índice general

Introducción	3
Capítulo 1. Espacios recubridores	9
1.1. Levantamientos	9
1.2. Espacios Recubridores	10
1.3. Equivalencia de espacios recubridores	12
1.4. El espacio recubridor universal	14
1.5. Transformaciones recubridoras (“Deck Transformations”)	16
1.6. Espacios con el mismo recubridor universal.	18
Capítulo 2. Superficies de Riemann y de Klein	21
2.1. Superficies de Riemann	21
2.2. Aplicaciones entre Superficies de Riemann	23
2.3. Recubridores ramificados (“Branched Coverings”)	27
2.4. Uniformización y grupos fuchsianos	28
2.5. Superficies de Klein y grupos N.E.C.	34
2.6. Orbifolds	39
Capítulo 3. Presentación de Subgrupos: Método de Reidemeister-Schreier	45
3.1. Reescritura de Reidemeister-Schreier	46
3.2. Método Gráfico (Grafos de Schreier)	50
3.3. Ejemplo Geométrico	53
Capítulo 4. Subgrupos de grupos fuchsianos y N.E.C.	59
4.1. Subgrupos de índice finito de grupos fuchsianos	60
4.2. Subgrupos fuchsianos y grupos de permutaciones	70
4.3. Subgrupos de índice finito de grupos N.E.C.	72
4.4. Orientabilidad del espacio cociente	80
4.5. Subgrupos de grupos N.E.C. y grupos de permutaciones	86
Capítulo 5. Superficies p-gonales diédricas reales	97
5.1. Cubiertas p-gonales diédricas	97
5.2. Uniformización de cubiertas p-gonales diédricas	99
5.3. Cubiertas p-gonales diédricas reales	100

5.4. Número de óvalos de una cubierta p-gonal diédrica real.	105
5.5. Orientabilidad	108
5.6. Construcción de cubiertas p-gonales diédricas reales	110
5.7. Cubiertas p-gonales diédricas antípodas	112
Capítulo 6. Superficies con más de un morfismo n-gonal	115
6.1. Obtención de superficies con varios morfismos n-gonales	115
6.2. Superficies trigonales con varios morfismos	117
6.3. Superficies pentagonales diédricas con varios morfismos	121
6.4. Superficies n-gonales a partir de (n-1)-gonales	123
6.5. Construcción de superficies de género arbitrario	127
Conclusiones	129
Bibliografía	131

Introducción

La teoría de las superficies de Riemann es una de las joyas de la matemática clásica cuyas ramificaciones parecen no tener fin. Como se comprueba al analizar la lista de matemáticos, de primera línea, que han contribuido a su desarrollo: Weierstrass, Harnack, Fuchs, Picard, Hilbert, Poincaré, Klein, Teichmüller, Weil, Ahlfors, Bers, etc. lista que llega hasta Maryam Mirzakhani, la primera mujer ganadora de una medalla Field (2014), por sus trabajos en un campo relacionado (ver [88]): Los espacios móduli y de Teichmüller, siendo el mismo Riemann quien inició su estudio al establecer que asignando un punto a cada posible estructura analítica en una superficie compacta de género g , obtenemos una variedad real de dimensión $6g - 6$.

Una característica de las superficies de Riemann es que aparecen de forma natural en ramas aparentemente muy alejadas de la matemática: Espacios de gérmenes de funciones holomorfas (ver [72, 79]), cuerpos de funciones algebraicas ([26]), curvas afines y proyectivas (ver [77, 87]), variedades analíticas complejas (ver [10]), o espacios de órbitas (ver [12, 75]). No deja de ser sorprendente que alguno de sus teoremas como el de Riemann Roch, que conecta características analíticas y topológicas, pueda demostrarse mediante métodos puramente analíticos (ver [44]), topológicos (cohomología de haces, ver [46]), o algebraicos (“adeles”, ver [87]).

Un resultado, en absoluto trivial, establece que en toda superficie de Riemann se pueden definir funciones meromorfas (ver [44, 46, 79]), y por tanto puede ser considerada como un recubridor ramificado de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ (compactación de Alexandroff de \mathbb{C}).

Una superficie de Riemann compacta S que soporta una función meromorfa φ de grado p , es decir que cada punto regular de $\widehat{\mathbb{C}}$ tiene p preimágenes distintas, se denomina p -gonal. Si consideramos el conjunto de puntos $B \subset \widehat{\mathbb{C}}$ con un número menor que p de preimágenes distintas y $E = \varphi^{-1}(B)$ tendremos que $S - E$ es un recubrimiento topológico de p hojas de $\widehat{\mathbb{C}} - B$.

En la actualidad, el caso mejor conocido es aquel en el que $\varphi_*(\pi_1(S - E, x))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B, z)$, dichos recubridores se denominan regulares, normales, o de Galois.

La razón principal es que en dichos recubridores el grupo cociente:

$$\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B, z) / \varphi_*(\pi_1(S - E, x))$$

es isomorfo al grupo de automorfismos de S compatibles con φ (“Deck Transformations”). Una explicación muy intuitiva de lo que esto significa, aunque quizás algo políticamente incorrecta, puede verse en los capítulos: “Men who don’t realize that their wives have been interchanged” de la referencia [78].

El objeto de esta tesis es el estudio de las superficies de Riemann que no son de este tipo. Es decir son un recubrimiento ramificado irregular de la esfera de Riemann. En estas superficies no son aplicables las técnicas estándar, aplicadas con éxito, a las superficies que son un recubrimiento regular.

Por supuesto un estudio exhaustivo de dichas superficies sería un objetivo utópico, por lo que nos limitaremos a analizar algunos aspectos determinados de algunos tipos específicos de dichas superficies.

Uno de los estudios se refiere a las superficies p -gonales (p primo mayor que 2) tales que el grupo de monodromía correspondiente al morfismo p -gonal es isomorfo al grupo diédrico D_p . Concretamente se estudian las superficies reales.

Una superficie de Riemann real es un par (X, σ) donde X es una superficie de Riemann y σ una involución anticonforme. Hay una equivalencia functorial entre la categoría de las superficies de Riemann reales y la de las curvas algebraicas definidas por polinomios con coeficientes reales, (ver referencias [94, 96, 97, 17]). El estudio de las curvas algebraicas reales es clásico en matemáticas y tiene importantes aplicaciones como la criptografía.

Una primera aproximación a su clasificación se realiza mediante equivalencia topológica. Dos superficies de Riemann reales (X, σ) y (X', σ') son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X'$ tal que $\sigma = h^{-1}\sigma'h$.

Cada clase de equivalencia se caracteriza por la acción de la involución anticonforme σ en la superficie. Si (X, σ) es una superficie de Riemann real el conjunto de puntos fijados por σ ($Fix(\sigma)$) es o bien vacío o bien consiste en k curvas disjuntas llamadas “óvalos” (ver [54, 93]). El tipo topológico, también conocido como “especie” de σ , viene dado por el número de óvalos y la orientabilidad o no de la superficie cociente $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$. Si σ tiene k óvalos y $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es orientable se dice que (X, σ) tiene especie $+k$, si $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es no orientable se dice que (X, σ) tiene especie $-k$.

El teorema de Harnack (ver [54, 37]) restringe las posibles especies de las superficies de Riemann reales, que pueden ser $1 \leq k \leq g+1$, $k \equiv g+1 \pmod{2}$ cuando $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es orientable y $0 \leq k \leq g$ cuando $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es no orientable.

Las superficies de Riemann de alguna clase específica tienen, en general, mayores restricciones. Por ejemplo las posibles especies de las superficies de Riemann reales hiperelípticas fueron determinadas por Felix Klein. Una generalización de este resultado para superficies p-hiperelípticas puede verse en la referencia [20].

En el presente trabajo se refinan dichas restricciones para el caso de las superficies p-gonales diédricas reales, y también se obtienen restricciones para los posibles géneros de dichas superficies.

El otro estudio se refiere a superficies con más de un morfismo n-gonal (ahora no nos ceñimos a valores primos). Un morfismo n-gonal es una aplicación holomorfa de grado n de X en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Si existe una aplicación tal, se dice que X es una superficie de Riemann n-gonal. Dos campos en que dichas superficies son de gran interés son la criptografía y los cuerpos de módulos (ver [67, 105]).

Como consecuencia de la desigualdad de Severi-Castelnuovo si n es primo y el género de la superficie cumple $g > (n-1)^2$ entonces el morfismo n-gonal, si existe, es único. Esta es la denominada acotación de Accola (ver [2, 4, 5, 6]).

Conocer la unicidad del morfismo n-gonal es en muchos casos importante, por ejemplo en el caso de una familia \mathcal{F} de superficies de Riemann n-gonales en que el morfismo n-gonal es único, pues el estudio de dicha familia se reduce al estudio de la configuración de valores en puntos en la esfera de Riemann (los puntos de ramificación de los morfismos). Usando esta idea pueden estudiarse los grupos de automorfismos de superficies n-gonales (ver [114, 11]).

Se quieren encontrar familias de superficies de Riemann, de género g , con varios morfismos p-gonales siendo p un entero primo y $g \leq (p-1)^2$. Al ser p primo el morfismo p-gonal ha de ser irregular o cíclico.

El caso cíclico ha sido estudiado intensivamente, en [35, 36] se construye una familia de superficies de Riemann de género $(p-1)^2$ que admiten dos morfismos p-gonales cíclicos, mostrando de este modo que la acotación de Accola es óptima para las superficies p-gonales cíclicas. Gonzalez Diez y Gromadzki han demostrado que, en el caso cíclico todos los morfismos p-gonales son conjugados (ver [49, 50]) y en la referencia [51] se obtienen límites superiores para el número de morfismos p-gonales conjugados.

En la tesis se desarrolla un método para construir ejemplos concretos de superficies de Riemann con varios morfismos p -gonales. Aplicando este método, con ayuda de ordenador, hemos encontrado superficies irregulares con varios morfismos para los casos trigonal y pentagonal. Concretamente se construyen a familias de géneros 2 y 4 con 2 morfismos trigonales y familias de géneros 6 y 8 con dos morfismos pentagonales.

A continuación se extienden estos ejemplos a familias de superficies p -gonales, de género máximo, con dos morfismos para cualquier primo $p > 2$, y también para familias de superficies n -gonales, con dos morfismos, de género no acotado cuando n no es primo.

La tesis se divide en seis capítulos. Los dos primeros son una recopilación de hechos fundamentales para el desarrollo posterior y en ellos no se prueba ninguno de los resultados, dado que las demostraciones pueden encontrarse en la literatura estándar sobre el tema.

El capítulo tercero describe en detalle el método de Reidemeister-Schreier para obtener presentaciones de subgrupos. Aquí si se incluyen las pruebas de algunos resultados por contener técnicas que se utilizarán posteriormente. También se detalla la interpretación gráfica del proceso y se aplica a un ejemplo geométrico del tipo de los que luego se analizarán.

El capítulo cuarto, presenta de una manera unificada, y más detallada de lo que aparece en los artículos originales, las técnicas, basadas en la reescritura de Reidemeister-Schreier, que serán fundamentales para los desarrollos que se realizarán a continuación.

Los capítulos quinto y sexto contienen los estudios mencionados anteriormente y contienen por tanto los resultados originales de esta tesis.

En el capítulo cinco se presentan los resultados obtenidos en forma de restricciones de las especies para el caso de las superficies p -gonales diédricas reales, y también las restricciones para los géneros de dichas superficies.

En el capítulo seis se presentan ejemplos concretos de superficies de Riemann, de género máximo, con varios morfismos p -gonales y a continuación se extienden estos ejemplos a familias de superficies p -gonales, de género máximo, para cualquier primo $p > 2$, y también para familias de superficies n -gonales, con dos morfismos, de género no acotado cuando n no es primo. Demostrando así que la acotación de Accola es óptima.

Estos resultados se han presentado en las referencias :

Cortázar, I.; Costa, A.F.: Real Dihedral p -Gonal Riemann Surfaces. Moscow Mathematical Journal, 13/4 (2013), 631-647.

Cortázar, I.; Costa, A.F.: Finding Riemann surfaces with several p -gonal morphisms. RACSAM, DOI=10.1007/s13398-014-0189-z.

Espacios recubridores

Vamos a resumir una serie de resultados clásicos sobre espacios recubridores y transformaciones recubridoras, que van a ser básicos para el resto de los capítulos. No se incluye ninguna demostración de los resultados, estas pueden verse en [91, 101, 109].

Como norma general supondremos que todos los espacios topológicos son espacios de Hausdoff.

1.1. Levantamientos

DEFINICIÓN 1.1.1. Sean $p : Y \rightarrow X$ y $f : E \rightarrow X$, aplicaciones continuas. Un levantamiento de f es una aplicación continua $\hat{f} : E \rightarrow Y$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

DEFINICIÓN 1.1.2. Una aplicación continua $p : Y \rightarrow X$ se dice que es un *homeomorfismo local* cuando para cada $y \in Y$ existe un entorno V de y tal que $p|_V$ es un homeomorfismo.

PROPOSICIÓN 1.1.1. Si $p : Y \rightarrow X$ es homeomorfismo local para cada $x \in X$ $p^{-1}(x)$ es un conjunto discreto.

TEOREMA 1.1.1. Supongamos, con la notación anterior, que p es un homeomorfismo local y E conexo. Si \hat{f}_1, \hat{f}_2 son levantamientos de f tales que $\hat{f}_1(e) = \hat{f}_2(e)$ para algún $e \in E$ entonces $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$.

Un caso particular muy importante es cuando $E = I = [0, 1]$ es decir cuando f es un camino en X y por tanto \hat{f} un camino en Y (levantamiento de caminos).

TEOREMA 1.1.2. Sea $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local, $a, b \in X$, $\alpha \in Y$ tal que $p(\alpha) = a$. Supongamos que existe una aplicación continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que para todo $t \in I$: $F(0, t) = a$, $F(1, t) = b$. Si cada

$\gamma_t(s) = F(s, t)$ se puede levantar a un camino $\widehat{\gamma}_t$ en Y comenzando en α , entonces $\widehat{\gamma}_0$ y $\widehat{\gamma}_1$ son homótopos (luego $\widehat{\gamma}_0(1) = \widehat{\gamma}_1(1)$).

1.2. Espacios Recubridores

1.2.1. Aplicaciones recubridoras.

DEFINICIÓN 1.2.1. Sea $p : Y \rightarrow X$ continua y suprayectiva, un abierto $U \subset X$ se dice *regularmente cubierto* por p si y sólo si la imagen inversa $p^{-1}(U)$ se puede poner como $p^{-1}(U) = \cup_{i \in I} V_i$, siendo V_i una familia de abiertos *disjuntos* de Y tales que cada restricción $p|_{V_j}$ es un homeomorfismo entre V_j y U .

Un entorno U de $x \in X$ se denomina *entorno regular* si está regularmente cubierto.

DEFINICIÓN 1.2.2. Sea $p : Y \rightarrow X$ continua y suprayectiva tal que todo punto $x \in X$ tiene un entorno regular U . Entonces se dice que p es una aplicación recubridora y el par (Y, p) un *espacio recubridor*, *recubrimiento* o *cubierta* de X .

NOTA. Por abuso de lenguaje frecuentemente llamaremos a Y espacio recubridor sin especificar la aplicación p .

OBSERVACIÓN. Dado que si γ es un lazo en Y , $p(\gamma)$ es un lazo en X , y una homotopía entre lazos en Y da lugar a una en X , es fácil comprobar que la aplicación p induce un homomorfismo $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, p(y_0))$.

PROPOSICIÓN 1.2.1. Si $p : Y \rightarrow X$ es una aplicación recubridora entonces es un homeomorfismo local.

TEOREMA 1.2.1. Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$, cualquier camino $\gamma : I \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_0$ tiene un único levantamiento a un camino $\widehat{\gamma}$ que comienza en y_0 .

PROPOSICIÓN 1.2.2. Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$, y sea $F : I \times I \rightarrow X$ una aplicación continua con $F(0, 0) = x_0$. Existe un único levantamiento de F a una aplicación continua $\widehat{F} : I \times I \rightarrow Y$ tal que $\widehat{F}(0, 0) = y_0$. Por tanto si F es una homotopía de caminos también \widehat{F} .

TEOREMA 1.2.2. Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora, siendo X conexo por caminos. Entonces dados $x_1, x_2 \in X$, $p^{-1}(x_1)$ y $p^{-1}(x_2)$ tienen la misma cardinalidad.

Este teorema permite hablar de un *espacio recubridor de n hojas* (pudiendo n ser finito o no).

TEOREMA 1.2.3. *Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$. Sean γ, σ dos caminos homótopos de x_0 a x_1 y $\hat{\gamma}$ y $\hat{\sigma}$ sus levantamientos comenzando en y_0 . Entonces $\hat{\gamma}$ y $\hat{\sigma}$ también son homótopos (y terminan en un mismo punto y_1).*

1.2.2. Aplicación y Homomorfismo de Monodromía.

Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$. Dado $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ si \hat{g} es un levantamiento de $g \in [f]$ comenzando en $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ el punto $\hat{g}(1)$ es independiente del representante g elegido.

Tenemos por tanto una aplicación $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$ que define una acción por la derecha del grupo $\pi_1(X, x_0)$ sobre el conjunto $p^{-1}(x_0)$, y que se denomina aplicación de monodromía.

TEOREMA 1.2.4. *Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$. Tenemos:*

1. *El homomorfismo $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo.*
2. *Sea G el subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ imagen por p_* de $\pi_1(Y, y_0)$, la aplicación de monodromía induce una aplicación inyectiva entre el conjunto de clases por la derecha de G en $\pi_1(X, x_0)$ y $p^{-1}(x_0)$:*

$$\Phi : \pi_1(X, x_0)/G \rightarrow p^{-1}(x_0) \quad \Phi(G[f]) = \hat{f}(1)$$

3. *La anterior correspondencia es biyectiva si Y es conexo por caminos.*
4. *Si f es un lazo basado en x_0 entonces $[f] \in G$ si y sólo si el levantamiento de f comenzando en y_0 , que denotamos \hat{f} , es también un lazo.*

COROLARIO 1.2.1. *Si Y es simplemente conexo la aplicación de monodromía es biyectiva. Si Y es conexo por caminos el número de hojas del recubrimiento viene dado el índice del subgrupo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$.*

DEFINICIÓN 1.2.3. Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora y $x_0 \in X$, consideramos la fibra $F = p^{-1}(x_0)$, y definimos una aplicación $\rho = F \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow F$ tal que $y \in F$ y $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, $\rho(y, [\alpha]) = \hat{\alpha}(1)$ (punto final del levantamiento de α comenzando en y). Es decir definimos una actuación por la derecha del grupo $\pi_1(X, x_0)$ en F y denotamos $y \cdot [\alpha] = \rho(y, [\alpha])$.

PROPOSICIÓN 1.2.3. *Si Y es conexo por caminos el grupo $\pi_1(X, x_0)$ opera transitivamente en $F = p^{-1}(x_0)$.*

Sea S_n el conjunto de las permutaciones de $\{0, \dots, n-1\}$, si numeramos las preimágenes de $x_0 \in X$, ρ define un homomorfismo de grupos;

$$\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow S_n$$

Dicho homomorfismo se denomina *homomorfismo de monodromía* y su imagen grupo de monodromía. Las distintas formas de numerar las preimágenes darán lugar a grupos conjugados.

PROPOSICIÓN 1.2.4. *Sea $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow S_n$ el homomorfismo de monodromía de un espacio recubridor de n hojas conexo por caminos $p : Y \rightarrow X$. El grupo de monodromía es un subgrupo transitivo de S_n isomorfo al grupo cociente $\pi_1(X, x)/H$, siendo H el mayor subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$ contenido en $G = p_*(\pi_1(Y, y))$, es decir $H = \bigcap_{h \in \pi_1(X, x)} h^{-1}Gh$.*

Un estudio de la representación por monodromía para el caso específico de superficies de Riemann y recubridores ramificados puede verse en [87].

OBSERVACIÓN. El grupo H de la proposición 1.2.4 es un subgrupo del grupo G del teorema 1.2.4. Dos lazos γ_1, γ_2 en X cuyos levantamientos en Y lleven el punto y_0 al mismo punto y_i (y por tanto pertenecientes a G) pueden tener levantamientos en Y comenzando en y_j que terminen en puntos distintos (y por tanto no pertenecer a H).

1.2.3. Levantamiento general.

Vamos ahora a considerar los levantamientos de aplicaciones más generales que los caminos.

TEOREMA 1.2.5. *(Teorema del levantamiento general) Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $p(y_0) = x_0$, y f continua $f : E \rightarrow X$ con $f(e_0) = x_0$ (siendo Y, X, E conexos por caminos y localmente conexos por caminos). La aplicación f se puede levantar a una \hat{f} , continua, tal que $\hat{f}(e_0) = y_0$ si y sólo si $f_*(\pi_1(E, e_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. Si tal levantamiento existe es único.*

1.3. Equivalencia de espacios recubridores

NOTA. A partir de ahora supondremos todos los espacios conexos por caminos y localmente conexos por caminos.

DEFINICIÓN 1.3.1. Sean $p : Y \rightarrow X$ y $q : Z \rightarrow X$ aplicaciones recubridoras. Se dice que son equivalentes cuando existe un homeomorfismo h (equivalencia

de recubridores) que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

PROPOSICIÓN 1.3.1. *Con la notación anterior si existen homeomorfismos h_1, h_2 tales que $h_1(y_0) = h_2(y_0)$ para algún $y_0 \in Y$ entonces $h_1 = h_2$.*

TEOREMA 1.3.1. *Sean $p : Y \rightarrow X$ y $q : Z \rightarrow X$ aplicaciones recubridoras tales que $p(y_0) = q(z_0) = x_0$. Existe una equivalencia de espacios recubridores $h : Y \rightarrow Z$ tal que $h(y_0) = z_0$ si y sólo si son iguales los grupos*

$$p_*(\pi_1(Y, y_0)) = q_*(\pi_1(Z, z_0))$$

Además si h existe es única.

Dada una aplicación recubridora $p : Y \rightarrow X$ y fijado $x_0 \in X$ nos interesa analizar como varía $p_*(\pi_1(Y, y))$ con los distintos valores que puede tomar $y \in p^{-1}(x_0)$.

PROPOSICIÓN 1.3.2. *Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora, $y_0, y_1 \in p^{-1}(x_0)$ y sean $H_0 = p_*(\pi_1(Y, y_0))$ $H_1 = p_*(\pi_1(Y, y_1))$. Si γ es un camino de y_0 a y_1 entonces $\alpha = p \cdot \gamma$ será un lazo en X basado en x_0 y se cumple:*

$$[\alpha] \star H_1 \star [\alpha]^{-1} = H_0$$

Recíprocamente dado $H \subset \pi_1(X, x_0)$, conjugado de H_0 , existe $y \in p^{-1}(x_0)$ tal que $p_(\pi_1(Y, y)) = H$.*

TEOREMA 1.3.2. *Sean $p : Y \rightarrow X$ y $q : Z \rightarrow X$ aplicaciones recubridoras. Condición necesaria y suficiente para que exista una equivalencia entre espacios recubridores (para unos puntos base determinados a posteriori) es que para cualesquiera $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ y $z_0 \in q^{-1}(x_0)$ los subgrupos (de $\pi_1(X, x_0)$) $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ y $q_*(\pi_1(Z, z_0))$ sean conjugados.*

OBSERVACIÓN. Hemos demostrado que existe correspondencia biyectiva entre:

Clases de espacios recubridores equivalentes \leftrightarrow Clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$.

1.4. El espacio recubridor universal

DEFINICIÓN 1.4.1. Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora tal que $p(y_0) = x_0$. Si Y es simplemente conexo se denomina *Espacio recubridor universal de X* .

Como $\pi_1(Y, y_0)$ es trivial, también lo es $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$. El teorema 1.3.1 implica que todos los espacios recubridores universales son equivalentes.

No todos los espacios tienen un espacio recubridor universal, aunque éste existe en muchos casos. Para asegurarlo necesitamos una propiedad extra.

DEFINICIÓN 1.4.2. Un espacio X se dice que es semilocalmente simplemente conexo cuando para cada $x \in X$ existe un entorno U tal que $inc_*(\pi_1(U, x))$ es el grupo trivial (siendo inc la inclusión de U en X).

TEOREMA 1.4.1. *Sea X conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Entonces tiene un espacio recubridor universal.*

OBSERVACIÓN. *Dado que las variedades conexas, y por tanto las superficies de Riemann son localmente conexas por caminos y localmente simplemente conexas (luego también semilocalmente) se deduce que siempre tienen espacio recubridor universal.*

Ahora pasemos a la propiedad fundamental de los espacios recubridores universales.

TEOREMA 1.4.2. *Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación recubridora siendo Y simplemente conexo. Sea $q : Z \rightarrow X$ una aplicación recubridora cualquiera. Existe una aplicación recubridora $s : Y \rightarrow Z$ que hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & Z \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & X \end{array}$$

COROLARIO 1.4.1. *Con la notación anterior $s : Y \rightarrow Z$ es también un espacio recubridor universal de Z .*

El siguiente corolario explica que se hable del espacio recubridor universal.

COROLARIO 1.4.2. *Si Y y Z son espacios recubridores universales de X son equivalentes.*

PROPOSICIÓN 1.4.1. *Si X es simplemente conexo toda aplicación recubridora es un homeomorfismo $p : Y \rightarrow X$.*

1.4.1. La acción del grupo fundamental sobre el espacio recubridor universal.

Hemos visto que dado un espacio recubridor $p : Y \rightarrow X$ las imágenes por el homomorfismo p_* de los grupos $\pi_1(Y, y)$ siendo $y \in p^{-1}(x)$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x)$.

Nos preguntamos por el recíproco: Dada una clase de equivalencia $[H]$ de subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x)$ ¿Existirá un espacio recubridor Y y una aplicación recubridora $p : Y \rightarrow X$ tal que p_* genere dichos subgrupos?

Si existe el espacio recubridor universal la respuesta es afirmativa.

Supongamos que $q : E \rightarrow X$ es una aplicación recubridora universal y sean $x_0 \in X$ y $e_0 \in q^{-1}(x_0)$. Dado un punto cualquiera e existirá un camino $\hat{\gamma}$ desde e_0 hasta e , $\gamma = q \circ \hat{\gamma}$ será un camino de x_0 a $q(e)$, como E es simplemente conexo todos los caminos $\hat{\gamma}$ que unen e_0 con e son homótopos y por tanto también lo serán las proyecciones γ que unen x_0 con $q(e)$.

Consideremos la acción por la derecha de $[\delta] \in \pi_1(X, x_0)$ sobre $q^{-1}(x_0)$ (definida en la sección 1.2.2). Aplicará e_0 en un punto $e_1 \in q^{-1}(x_0)$, además existe un único levantamiento de γ comenzando en e_1 , que denotaremos $\tilde{\gamma}$, que terminará en un punto $e' = \tilde{\gamma}(1) \in q^{-1}(q(e))$. El punto e' sólo depende de e y de la clase $[\delta]$.

Hemos definido por tanto una aplicación $\Upsilon : E \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow E \quad (e, [\delta]) \rightarrow e.[\delta] = e'$.

PROPOSICIÓN 1.4.2. *La aplicación $\Upsilon : E \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow E$ es un acción de grupo por la derecha sobre el conjunto E .*

Dado un subgrupo $G \subset \pi_1(X, x_0)$ podemos definir una relación de equivalencia en E del siguiente modo:

$$e \sim e' \iff \text{existe } g \in G : e.g = e'$$

Se comprueba fácilmente que es una relación de equivalencia. Denotaremos por E/G al conjunto de clases de equivalencia (órbitas).

PROPOSICIÓN 1.4.3. *El subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ estabilizador de e , es el subgrupo trivial para todo $e \in E$. La acción es por tanto sin puntos fijos (libre).*

TEOREMA 1.4.3. *Dado G subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$, sea Y el espacio $Y = E/G$ entonces la aplicación $p : Y \rightarrow X \quad p(eG) = q(e)$ constituye una aplicación recubridora cuyo número de hojas es el índice de G en $\pi_1(X, x_0)$ y tal que las imágenes por p_* de los grupos $\pi_1(Y, y_0)$ para los distintos $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ son las clases de conjugación de G en $\pi_1(X, x_0)$.*

1.4.2. Definición por monodromía.

PROPOSICIÓN 1.4.4. *Sea $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow S_n$ un homomorfismo de grupos tal que su imagen $\rho(\pi_1(X, x))$ es un subgrupo transitivo. Si X tiene un recubridor universal, existe un recubridor Y conexo por caminos $p : Y \rightarrow X$ cuyo homomorfismo de monodromía es ρ .*

OBSERVACIÓN. Si existe recubridor universal hemos demostrado que existe correspondencia biyectiva entre:

Clases de espacios recubridores conexos por caminos de n hojas \rightarrow Clases de homomorfismos de grupos entre $\pi_1(X, x) \rightarrow S_n$ equivalentes por conjugación en S_n .

1.5. Transformaciones recubridoras (“Deck Transformations”)

PROPOSICIÓN 1.5.1. *Dada una aplicación recubridora $p : Y \rightarrow X$ los homeomorfismos $h : Y \rightarrow Y$ tales que $p = p \circ h$ forman, con la operación de composición de aplicaciones, un grupo que se denota $Deck_p(Y, X)$.*

Los elementos de dicho grupo se denominan transformaciones recubridoras, y el grupo $Deck_p(Y, X)$ define una acción sobre el conjunto Y .

OBSERVACIÓN. Para todo $x \in X$ cada transformación recubridora h aplica las fibras $F = p^{-1}(x)$ en si mismas.

PROPOSICIÓN 1.5.2. *El grupo $Deck_p(Y, X)$ actúa sin puntos fijos (libre) en Y . Es decir si $h \in Deck_p(Y, X)$, $h \neq id$ entonces h no tiene puntos fijos.*

DEFINICIÓN 1.5.1. Dada $p : Y \rightarrow X$ tal que $p(y_0) = x_0$. Se define una correspondencia (siendo F la fibra $F = p^{-1}(x_0)$) :

$$\Psi : Deck_p(Y, X) \rightarrow F \quad \Psi(h) = h(y_0)$$

PROPOSICIÓN 1.5.3. *El homeomorfismo h queda determinado una vez que se conoce $\Psi(h)$ por tanto la correspondencia Ψ es inyectiva.*

Denotaremos $H_0 = p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$. Sea $F = p^{-1}(x_0)$ y sea $\Phi : \pi_1(X, x_0)/H_0 \rightarrow F$ la biyección definida en el teorema 1.2.4.

PROPOSICIÓN 1.5.4. *La imagen de la aplicación Ψ es igual a la imagen por Φ del subgrupo $N(H_0)/H_0 \subset \pi_1(X, x_0)/H_0$ (Siendo $N(H_0)$ el normalizador de H_0 o sea $N(H_0) = \{g : gH_0g^{-1} = H_0\}$).*

TEOREMA 1.5.1. *La aplicación $\Phi^{-1} \circ \Psi = Deck(Y, X) \rightarrow N(H_0)/H_0$ es un isomorfismo de grupos.*

OBSERVACIÓN. El grupo $Deck(Y, X)$ actúa por la izquierda en la fibra mientras que $\pi_1(X, x_0)$ actúa por la derecha. Por tanto $Deck(X, Y)$ se identifica naturalmente con el grupo opuesto (operación $g_1 \star g_2 = g_2 g_1$) de $\pi_1(X, x_0)$. Naturalmente todo grupo es isomorfo a su opuesto a través de $g \rightarrow g^{-1}$.

DEFINICIÓN 1.5.2. Una aplicación recubridora $p : Y \rightarrow X$ se denomina de *Galois* (también se emplean los términos *normal* y *regular*) cuando $H_0 = p_*(\pi_1(Y, y_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$ (donde $y_0 \in p^{-1}(x_0)$).

Si una aplicación recubridora es de Galois como H_0 es normal, $p_*(\pi_1(Y, y)) = H_0$, para cada $y \in p^{-1}(x_0)$.

TEOREMA 1.5.2. *El grupo $H_0 = p_*(\pi_1(Y, y_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$ si y sólo si para cada par de puntos $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$ existe una transformación recubridora $h : Y \rightarrow Y$ tal que $h(y_1) = y_2$ (Es decir: $Deck_p(Y, X)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x_0)$).*

COROLARIO 1.5.1. *Si $p : Y \rightarrow X$ es una aplicación recubridora de Galois. $Deck_p(Y, X)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0)/H_0$.*

PROPOSICIÓN 1.5.5. *Si $p : Y \rightarrow X$ es espacio recubridor universal entonces es de Galois.*

TEOREMA 1.5.3. *Una aplicación recubridora de Galois $p : Y \rightarrow X$ se caracteriza porque los caminos en Y que son levantamientos de un lazo en X , son todos lazos (cerrados) o todos caminos abiertos.*

COROLARIO 1.5.2. *Si $p : Y \rightarrow X$ es espacio recubridor universal $\Phi^{-1} \circ \Psi$ es un isomorfismo $Deck_p(Y, X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.*

1.5.1. Grupos de homeomorfismos y recubridores.

Vamos ahora a analizar un método de construir espacios recubridores que serán de Galois.

Recordemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.5.3. La acción de G sobre Y se dice que es libremente discontinua si para cada $y \in Y$ existe un entorno V tal que para cada $g \neq e$ $V \cap g(V) = \emptyset$ (Si $g_1 \neq g_2$ entonces $g_1(V) \cap g_2(V) = \emptyset$ considerando que $g_1^{-1}g_2(V) \cap V = \emptyset$).

TEOREMA 1.5.4. *Sea Y conexo por caminos y localmente conexo por caminos, G un grupo de homeomorfismos de Y en Y . La aplicación cociente $\pi : Y \rightarrow Y/G$ es recubridora si y sólo si la acción de G sobre Y es libremente discontinua. En ese caso la aplicación recubridora es de Galois y G es el grupo $Deck_\pi(Y, Y/G)$.*

TEOREMA 1.5.5. *Si $p : Y \rightarrow X$ es una aplicación recubridora de Galois y $G = Deck_p(Y, X)$ existe un homeomorfismo h que hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \pi \swarrow & & \searrow p \\ Y/G & \xleftrightarrow{h} & X \end{array}$$

COROLARIO 1.5.3. *Sea (E, π) el espacio recubridor universal de X entonces X es homeomorfo a $E/Deck_\pi(E, X)$.*

Esto será muy importante en la teoría de Superficies de Riemann una vez que se establezcan los espacios recubridores universales (Uniformización). Pues los grupos de automorfismos que actúen de forma propia discontinua en ellos, originarán Superficies de Riemann.

1.6. Espacios con el mismo recubridor universal.

Vamos a considerar ahora dos espacios X_1, X_2 con el mismo recubridor universal E . Existirán dos subgrupos de $Aut(E)$ (homeomorfismos de E en E) $G_1 \cong \pi_1(X_1)$ y $G_2 \cong \pi_1(X_2)$ tales que $X_1 \cong E/G_1$ y $X_2 \cong E/G_2$.

PROPOSICIÓN 1.6.1. *Una aplicación continua $f : X_1 \rightarrow X_2$ induce una aplicación continua (levantamiento) $\hat{f} : E \rightarrow E$ (no de forma única) tal que $p_2 \circ \hat{f} = f \circ p_1$ siendo $p_i : E \rightarrow E/G_i$ las proyecciones recubridoras universales. Es decir tenemos el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

PROPOSICIÓN 1.6.2. *Cada levantamiento $\hat{f} : E \rightarrow E$ de $f : X_1 \rightarrow X_2$ induce un homomorfismo $F : G_1 \rightarrow G_2$ que se caracteriza porque $F(g) \cdot \hat{f} = \hat{f} \circ g$. Si $f : X_1 \rightarrow X_2$ es un homeomorfismo, entonces los homomorfismos $F : G_1 \rightarrow G_2$ correspondientes a los levantamientos son isomorfismos.*

COROLARIO 1.6.1. *Si $f : X_1 \rightarrow X_2$ es un homeomorfismo, entonces G_1, G_2 son conjugados en $Aut(E)$.*

OBSERVACIÓN. Si consideramos G_1, G_2 con condiciones “extra”, como que sus elementos sean homeomorfismos biholomorfos, no podemos asegurar que, aunque f sea un homeomorfismo, G_1, G_2 sean conjugados en el grupo más restringido $Anal(E)$ (homeomorfismos biholomorfos de E en E). Aunque, naturalmente, si lo serán en $Aut(E)$.

PROPOSICIÓN 1.6.3. *Si $X = E/G$ y $Y = E/H$ siendo $H \subset G \subset Aut(E)$. Entonces $Deck(Y, X) \cong N(H)/H$ (donde $N(H)$ es el normalizador de H en G).*

Esta proposición es otra forma de expresar el teorema 1.5.1.

PROPOSICIÓN 1.6.4. *Sea $X = E/G$, e Y el espacio recubridor de X definido por la monodromía $\omega : \pi_1(X, x) \rightarrow S_n$ como $\pi_1(X, x) \cong G$ tenemos el homomorfismo inducido $\hat{\omega} : G \rightarrow S_n$. Entonces $Y = E/\hat{\omega}^{-1}(Stab(0))$, además $\hat{Y} = E/\ker(\hat{\omega})$ es un recubridor de Galois de X e Y que hace conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} & \hat{Y} & \\ & \swarrow f & \downarrow g \\ Y & & X \\ & \searrow h & \end{array}$$

Con las proyecciones canónicas $f : z \text{ mod } \ker(\hat{\omega}) \rightarrow z \text{ mod } \hat{\omega}^{-1}(Stab(0))$, $g : z \text{ mod } \ker(\hat{\omega}) \rightarrow z \text{ mod } G$, $h : z \text{ mod } \hat{\omega}^{-1}(Stab(0)) \rightarrow z \text{ mod } G$.

(Una reenumeración en S_n dará lugar a grupos conjugados en $Aut(E)$).

Superficies de Riemann y de Klein

2.1. Superficies de Riemann

Con espíritu similar al del capítulo anterior, en éste resumimos los resultados básicos de la teoría de superficies de Riemann, sus automorfismos, grupos fuchsianos, etc.

Tampoco aquí se incluyen demostraciones, que pueden encontrarse en las referencias clásicas [112, 14, 7, 44, 46, 87], o en tratamientos más modernos como [73, 39, 48, 76], para la aplicación de técnicas computacionales puede consultarse [15].

DEFINICIÓN 2.1.1. Una superficie de Riemann es una *variedad analítica conexa* de dimensión compleja uno (ver [25, 10]).

NOTA. En la definición de una variedad analítica X suele exigirse que tenga una base de abiertos numerable. La razón de esta exigencia es asegurar que X sea un espacio paracompacto. Sin embargo en la mayoría de los textos se definen las superficies de Riemann sin esta exigencia, dado que un teorema de Radó asegura que una superficie de Riemann siempre tiene topología numerable (ver [7]).

Como las funciones de transición $\phi \circ \psi^{-1}$ entre cartas $(U, \phi), (V, \psi)$ han de ser analíticas sus derivadas deben cumplir las condiciones de Cauchy Riemann y por tanto su Jacobiano es mayor que cero, esto implica que las cartas compatibles definen de forma natural una orientación en la variedad (y sus conjugadas la otra). Por tanto todas las superficies de Riemann son *orientables*.

2.1.1. Funciones holomorfas y meromorfas.

Sea X una superficie de Riemann, $p \in X$ y $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un entorno W de p .

DEFINICIÓN 2.1.2. Se dice que $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en p si existe una carta $\phi : U \rightarrow V$, $p \in U$, tal que $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$. Cuando es holomorfa para todo $q \in W$ se dice holomorfa en W .

Denotaremos por $\mathcal{O}(W)$ al conjunto de funciones holomorfas en W . Se comprueba fácilmente que es una \mathbb{C} -álgebra.

DEFINICIÓN 2.1.3. Sea f holomorfa en un abierto $W - \{p\}$ siendo $p \in W$. Se dice que f tiene una *singularidad evitable* en p si existe una carta (U, ϕ) tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad evitable en $\phi(p)$. Análogamente para *polos* y *singularidades esenciales*.

La definición no depende de la carta empleada dado que $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ tiene que ser holomorfa en $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

DEFINICIÓN 2.1.4. Se dice que f es meromorfa en $p \in X$ cuando es holomorfa, o tiene una singularidad evitable, o tiene un polo en p . Cuando f es meromorfa para todo punto $q \in W$ se dice meromorfa en W .

Denotaremos por $\mathcal{M}(W)$ al conjunto de funciones meromorfas en W .

Si f es meromorfa en U , dada cualquier carta (U, ϕ) $p \in U$, $f \circ \phi^{-1}$ tendrá un desarrollo en serie de Laurent en un disco punteado de $\phi(p)$. Es decir:

$$f \circ (\phi^{-1}(z)) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - \phi(p))^n$$

Aunque el valor de los coeficientes dependerá de la carta, *no así el valor k (índice del menor coeficiente distinto de cero) a este valor se le denomina orden de f en p y se denota $\text{ord}_p(f)$* .

De la definición de función compleja meromorfa se tiene:

- f es holomorfa en p si y sólo si $\text{ord}_p(f) \geq 0$. Si $\text{ord}_p(f) = k > 0$ f tiene en p un cero de orden k .
- f tiene en p un polo de orden k si y sólo si $\text{ord}_p(f) = -k$, $k > 0$.
- Cuando f no es cero ni polo en p tenemos $\text{ord}_p(f) = 0$.

2.1.2. Teoremas heredados de la Teoría de funciones de Variable Compleja. Por la forma de definir las funciones holomorfas y meromorfas en superficies de Riemann hay una serie de propiedades que se deducen directamente de la teoría de funciones de variable compleja. Los resumimos:

TEOREMA 2.1.1. (Ceros y Polos discretos) *Sea f una función meromorfa definida en un abierto conexo $W \subset X$ (X superficie de Riemann). Si f no es idénticamente nula, el conjunto de ceros y polos es discreto en W (cada polo o cero tiene un entorno en W en el que no hay otros ceros y/o polos).*

COROLARIO 2.1.1. *Sea f una función meromorfa definida en una superficie de Riemann compacta X . Entonces f tiene un número finito de ceros y polos.*

TEOREMA 2.1.2. (Identidad) Sean f, g dos funciones meromorfas definidas en un abierto conexo $W \subset X$. Si $f = g$ en un conjunto $S \subset W$ que tiene un punto límite en W , entonces $f = g$ en W .

TEOREMA 2.1.3. (Weirstrass) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en $W \subset X$ abierto. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia una función f en cada compacto $K \subset W$ entonces f es holomorfa en W .

TEOREMA 2.1.4. (Módulo máximo) Sea f holomorfa en un abierto conexo $W \subset X$, si existe $p \in W$ tal que para todo $x \in W$ $|f(p)| \geq |f(x)|$ entonces f es constante en W .

COROLARIO 2.1.2. Si f es holomorfa en una superficie de Riemann compacta X . Entonces f es constante en X .

TEOREMA 2.1.5. (Módulo máximo para funciones armónicas) Sea f una función armónica en un abierto conexo $W \subset X$. Si existe $p \in W$ tal que para cada $x \in W$ $|f(p)| \geq |f(x)|$ entonces f es constante en W . Así si X es compacta las únicas funciones armónicas definidas en X son las constantes.

2.2. Aplicaciones entre Superficies de Riemann

DEFINICIÓN 2.2.1. Una aplicación $F : X \rightarrow Y$, entre superficies de Riemann, se denomina holomorfa en p cuando existen cartas (U, ϕ) $p \in U$ y (V, ψ) $F(p) \in V$ tales que la función $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ es holomorfa en $\phi(p)$. Si F está definida en el abierto $W \subset X$ y es holomorfa para cada $p \in W$ entonces se dice holomorfa en W , o simplemente que es holomorfa si lo es en todo X .

Una aplicación holomorfa $F : X \rightarrow Y$ se dice que es un *biholomorfismo* o *isomorfismo* cuando F es biyectiva y F^{-1} holomorfa. En ese caso las superficies X, Y se denominan isomorfas.

Consecuencia del teorema 2.1.2 es:

TEOREMA 2.2.1. (Identidad) Sean F, G aplicaciones holomorfas $F, G : X \rightarrow Y$ si $F = G$ en un conjunto S con un punto límite en X entonces $F = G$ en X .

2.2.1. Estructura local de las aplicaciones entre superficies de Riemann.

TEOREMA 2.2.2. Sean X, Y superficies de Riemann y $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa en $p \in X$ no constante y $q = F(p)$. Existe un número k y cartas (U, ϕ) $p \in U$ y (V, ψ) $q \in V$ tales que:

1. $\phi(p) = 0$
2. $\psi(q) = 0$
3. $F(U) \subset V$
4. $\widehat{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ viene dada por $\widehat{F}(z) = z^k$

Además el número k verifica lo siguiente: Existen $W \subset U$ entorno de p y $M \subset V$ entorno de q tales que para todo $\omega \in M$ $\omega \neq q$ el conjunto $F^{-1}(\omega) \cap W$ tiene exactamente k elementos, esto hace que k no dependa de las coordenadas locales elegidas.

Este importante teorema tiene muchas consecuencias.

TEOREMA 2.2.3. Sean X, Y superficies de Riemann, $F : X \rightarrow Y$ holomorfa no constante. Entonces F es una aplicación abierta.

COROLARIO 2.2.1. Sean X, Y superficies de Riemann, $F : X \rightarrow Y$ holomorfa e inyectiva. Entonces F es biholomorfa entre X y $F(X)$.

TEOREMA 2.2.4. Sea X una superficie de Riemann compacta, $F : X \rightarrow Y$ holomorfa no constante. Entonces Y es compacta y F suprayectiva.

DEFINICIÓN 2.2.2. Se define la multiplicidad de $F : X \rightarrow Y$ en $p \in X$, y se denota $\text{mult}_p(F)$, como el entero k tal que existen coordenadas locales en las que \widehat{F} es de la forma $z \rightarrow z^k$ en un entorno de p .

PROPOSICIÓN 2.2.1. Sea f una función meromorfa definida en la superficie de Riemann X . Con holomorfa asociada $F : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Tenemos:

- Si $p \in X$ es un cero de f entonces $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$
- Si $p \in X$ es un polo de f entonces $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$
- Si $p \in X$ no es polo ni cero de f entonces $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$

DEFINICIÓN 2.2.3. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Se dice que $p \in X$ es un punto de ramificación de F cuando $\text{mult}_p(F) > 1$. Al punto $F(p)$ imagen de uno de ramificación se le denomina valor crítico.

TEOREMA 2.2.5. Sean X, Y superficies de Riemann. $F : X \rightarrow Y$ holomorfa no constante. El conjunto de puntos de ramificación $A = \{p \in X : \text{mult}_p(F) > 1\}$ es cerrado y discreto en X .

COROLARIO 2.2.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta $F : X \rightarrow Y$ holomorfa no constante. El conjunto de puntos de ramificación es finito.*

TEOREMA 2.2.6. *Sean X, Y superficies de Riemann y $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante. Si $\text{mult}_p(F) = 1$ existen entornos U de p y V de $F(p)$ tales que $F|_U$ es biholomorfa de $U \rightarrow V$.*

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann y g una función meromorfa en Y . Se tiene*

$$\text{ord}_p(g \circ F) = \text{ord}_{F(p)}(g) \text{mult}_p(F)$$

2.2.2. Aplicaciones propias.

DEFINICIÓN 2.2.4. Una aplicación continua $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann se denomina propia si para cada conjunto compacto $K \subset Y$ se tiene que $F^{-1}(K)$ es compacto en X .

OBSERVACIÓN. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre superficies de Riemann, como Y es un espacio de Hausdorff si $K \subset Y$ es compacto será cerrado, y por tanto también lo será $F^{-1}(K)$. Si X es compacta igualmente lo será el conjunto $F^{-1}(K)$. Así entre superficies de Riemann compactas las aplicaciones continuas son propias.

TEOREMA 2.2.7. *Sea F una aplicación holomorfa no constante y propia entre superficies de Riemann X, Y se tiene*

1. F es cerrada
2. F es suprayectiva
3. Para todo $q \in Y$ $F^{-1}(q)$ es finito
4. Para todo $q \in Y$ y cada entorno U de $F^{-1}(q)$ existe un entorno abierto V de q tal que $F^{-1}(V) \subset U$
5. Si F es un homeomorfismo local, para todo $q \in Y$ existe un entorno abierto V de q tal que:

$$F^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Donde los U_i son abiertos, no vacíos, disjuntos dos a dos tales que las restricciones $F|_{U_i}$ son homeomorfismos. Es decir F es una aplicación recubridora (ver [91]).

COROLARIO 2.2.3. *El conjunto de valores críticos de una aplicación holomorfa, no constante, y propia $F : X \rightarrow Y$ es discreto y cerrado en Y . Además si X, Y son compactas dicho conjunto es finito.*

OBSERVACIÓN. Sea B el conjunto de valores críticos de $F : X \rightarrow Y$. Definimos $Y' = Y - B$ y $X' = X - F^{-1}(B)$ la aplicación $F|_{X'}$ es holomorfa, no constante, y propia de $X' \rightarrow Y'$. Por el teorema 2.2.6 F es un homeomorfismo local $X' \rightarrow Y'$ y una *aplicación recubridora*, luego $F^{-1}(q)$ tendrá la misma cardinalidad para cada $q \in Y'$ por el teorema 1.2.2, y por el teorema 2.2.7 está será finita $n = \text{Card}(F^{-1}(q))$. Este número n se denota por $dg(F)$.

DEFINICIÓN 2.2.5. Se denomina grado de una aplicación holomorfa, no constante, y propia $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann al número $dg(F)$.

TEOREMA 2.2.8. Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante y propia entre superficies de Riemann para cada $q \in Y$ se verifica

$$dg(F) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \text{mult}_p(F)$$

COROLARIO 2.2.4. Una aplicación holomorfa, no constante, y propia $F : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo entre superficies de Riemann, si y sólo si $dg(F) = 1$. Por tanto si X es una superficie de Riemann compacta que tiene definida una función meromorfa con un sólo polo entonces X es isomorfa a la esfera de Riemann.

TEOREMA 2.2.9. Si f es una función meromorfa definida en una superficie de Riemann compacta X :

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0$$

2.2.3. Fórmula de Riemann-Hurwitz. Una fórmula importante en la teoría de superficies de Riemann compactas es la fórmula de Riemann-Hurwitz, que relaciona la característica de Euler con el grado de una función meromorfa.

TEOREMA 2.2.10. (Fórmula de Riemann-Hurwitz) Sea $F : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas de géneros $g(X)$ y $g(Y)$. Se cumple la relación:

$$2g(X) - 2 = dg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1)$$

DEFINICIÓN 2.2.6. Se denomina orden total de ramificación de la aplicación holomorfa no constante $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann compactas al número $b = \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1)$

La fórmula de Riemann-Hurwitz se puede poner

$$b = 2[g(X) - dg(F)(g(Y) - 1) - 1]$$

y por tanto el orden total de ramificación es par.

DEFINICIÓN 2.2.7. Una superficie de Riemann compacta X de género $g(X) > 1$ se denomina *hiperelíptica* cuando es un recubrimiento de 2 hojas de $\widehat{\mathbb{C}}$

Si X es hiperelíptica $\pi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ el recubridor de dos hojas ($dg(\pi) = 2$) aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz tendremos:

$$b = 2(g(X) + 1) \quad g(X) = \frac{b}{2} - 1$$

2.3. Recubridores ramificados (“Branched Coverings”)

NOTA. Las propiedades de las aplicaciones recubridoras, no ramificadas, se estudian en detalle en [91, 109].

Hemos visto que una aplicación holomorfa, no constante, y propia $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann, da lugar a una aplicación recubridora $F : X - F^{-1}(B) \rightarrow Y - B$, siendo B el conjunto de los valores críticos de F (cerrado y discreto), esta aplicación recubridora tendrá un número finito n de hojas.

Por este motivo se tiene la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.3.1. Una aplicación holomorfa no constante y propia $F : X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann se denomina recubridor ramificado.

Vamos ahora a analizar la posibilidad de extender un recubridor no ramificado a uno ramificado.

TEOREMA 2.3.1. Sea Y una superficie de Riemann $B \subset Y$ un conjunto cerrado discreto $Y' = Y - B$. Supongamos que X' es otra superficie de Riemann y que $\pi : X' \rightarrow Y'$ es un recubridor no ramificado (propio). Existe una superficie de Riemann X un recubridor ramificado $\Pi : X \rightarrow Y$ y un biholomorfismo $\varphi : X - \Pi^{-1}(B) \rightarrow X'$ que preserva las fibras (es decir dado $p \in X - \Pi^{-1}(B)$ $\Pi(p) = \pi(\varphi(p))$).

TEOREMA 2.3.2. Sean X, Y, Z superficies de Riemann $F : X \rightarrow Y$ y $G : Z \rightarrow Y$ recubridores ramificados. Sea $B \subset Y$ un conjunto cerrado discreto y $Y' = Y - B$, $X' = F^{-1}(Y')$, $Z' = G^{-1}(Y')$. Cada aplicación biholomorfa $\lambda : X' \rightarrow Z'$ que preserva las fibras, es decir para cada $p \in X'$ $F(p) = G(\lambda(p))$, se puede extender a una aplicación biholomorfa $\Lambda : X \rightarrow Z$.

El teorema anterior justifica la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.3.2. Sean X, Y superficies de Riemann y $F : X \rightarrow Y$ un recubridor ramificado. Sea $A \subset Y$ el conjunto de valores críticos de F y sean $Y' = Y - A$, $X' = F^{-1}(Y')$. El recubridor F se denomina normal (o de Galois) si lo es $F|_{X'} : X' \rightarrow Y'$ (ver definición 1.5.2).

2.4. Uniformización y grupos fuchsianos

TEOREMA 2.4.1. (*Riemann Mapping Theorem*) Una superficie de Riemann S simplemente conexa es isomorfa (biholomorfa) a una de las siguientes superficies:

1. La esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$
2. El plano complejo \mathbb{C}
3. El semi-plano complejo \mathbb{H} ($\text{Imag}(z) > 0$)

Una demostración puede verse en [44], otra con un enfoque más geométrico en [66].

TEOREMA 2.4.2. Los automorfismos analíticos de la esfera de Riemann vienen dados por las transformaciones de Möbius:

$$\frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc > 0$$

Los automorfismos analíticos de \mathbb{C} vienen dados por: $\{az + b, a \neq 0\}$ y los de \mathbb{H} por las transformaciones de Möbius con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$ (formando un grupo isomorfo a $PSL(2, \mathbb{R})$).

Las transformaciones de Möbius se clasifican, según la traza T de su matriz normalizada ($ad - bc = 1$), en: Parabólicas $T = \pm 2$ (fijan un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$), elípticas T real, $T^2 < 4$ (fijan 2 puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$), y loxodrómicas $T^2 \notin [0, 4]$ (Si $T \in \mathbb{R}$ se denominan hiperbólicas) (fijan dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$).

TEOREMA 2.4.3. La acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en \mathbb{H} es (ver [72]): Transitiva en \mathbb{H} , transitiva en las geodésicas de \mathbb{H} , y doblemente transitiva en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

En \mathbb{H} se puede definir una geometría de Riemann con curvatura negativa constante (hiperbólica) por medio de $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ (referencias que tratan la geometría hiperbólica son [12, 103, 66, 24]).

TEOREMA 2.4.4. Las transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ son isometrías hiperbólicas.

El siguiente teorema va a permitir definir una geometría hiperbólica en toda superficie de Riemann cuyo recubridor universal sea \mathbb{H} .

TEOREMA 2.4.5. (*Uniformización*) *Cada superficie de Riemann S es isomorfa a X/Λ donde X es su superficie de Riemann recubridora universal y Λ es un subgrupo de $\text{Aut}(X)$ que actúa de forma libre discontinua en X .*

La demostración de este teorema puede verse en [44, 66, 39] y una historia del mismo en [1].

Hay que notar que hay muchas maneras de uniformizar una superficie. Por ejemplo usando grupos de Schottky (ver [59, 58]) e incluso es posible uniformizar simultáneamente dos superficies entre las que exista un homeomorfismo quasiconforme, siendo esto de fundamental importancia en la teoría de espacios de Teichmüller (ver [92, 66]) aunque existe otra aproximación no basada en la doble uniformización (ver [40]).

TEOREMA 2.4.6. *La superficie \mathbb{H}/Λ_1 es isomorfa a la superficie \mathbb{H}/Λ_2 si y sólo si Λ_1 y Λ_2 son conjugados en $PSL(2, \mathbb{R})$.*

2.4.1. Grupos kleinianos y fuchsianos.

DEFINICIÓN 2.4.1. Sea Γ un grupo discreto de transformaciones de Möbius, se define la región de discontinuidad $\Omega(\Gamma)$ como el conjunto $\{z \in \widehat{\mathbb{C}}\}$ en los que Γ actúa de forma propia discontinua. Si $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ a Γ se le denomina Kleiniano. Al complementario $\Lambda(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}} - \Omega(\Gamma)$ se le denomina conjunto límite (Algunos autores denominan kleiniano a un grupo discreto de transformaciones de Möbius).

Si Γ es kleiniano Ω/Γ será la unión de un conjunto (a lo sumo numerable) de superficies de Riemann y $\pi : \Omega \rightarrow \Omega/\Gamma$ será una aplicación holomorfa abierta. Si Γ actúa de forma libremente discontinua (el estabilizador G_z es trivial para cada $z \in \Omega$) π será una aplicación recubridora (no ramificada) e inducirá una estructura de variedad compleja en Ω/Γ . Si en algún punto z_0 el estabilizador es no trivial, entonces será un grupo cíclico y la proyección π será localmente k a 1. En este caso π será un recubridor ramificado.

Es posible asignar a Ω/Γ tanto una estructura de “orbifold” (ver [111, 102, 68, 99]), como de superficie de Riemann, definiendo una carta “especial” en los puntos de ramificación ver [12]. Así será posible uniformizar la esfera de Riemann (con puntos de ramificación) como \mathbb{H}/Γ (ver [44]).

Salvo en algunos casos elementales $\Lambda(\Gamma)$ es no numerable con interior vacío (en $\widehat{\mathbb{C}}$), y es el conjunto de los puntos de acumulación de los puntos fijos de los elementos loxodrómicos de Γ .

Los grupos kleinianos se estudian en las referencias [13, 56, 85, 104]. Un libro divulgativo que estudia los aspectos fractales de los conjuntos límites de los grupos kleinianos es [90].

DEFINICIÓN 2.4.2. Un grupo fuchsiano Γ es un grupo kleiniano cuyo conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ está contenido en un círculo C de la esfera de Riemann y tal que los elementos de Γ fijan, como conjuntos, cada una de las componentes conexas de $\widehat{\mathbb{C}} - C$.

Por conjugación cada grupo fuchsiano es isomorfo a un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.

DEFINICIÓN 2.4.3. Un grupo fuchsiano Γ se denomina de primera clase si $\Lambda(\Gamma) = \widehat{\mathbb{R}}$. En este caso Ω/Γ tiene dos componentes \mathbb{H}/Γ y \mathbb{L}/Λ . Si no es de primera clase se denomina de segunda clase y en este caso $\Omega(\Gamma) = \mathbb{H} \cup \mathbb{L} \cup R$ donde R es una unión de intervalos abiertos de $\widehat{\mathbb{R}}$.

Los grupos fuchsianos se estudian exhaustivamente en las referencias [12, 75].

TEOREMA 2.4.7. *Propiedades importantes de los grupos fuchsianos son:*

1. *Los únicos elementos de orden finito son elípticos.*
2. *El conjunto de sus elementos es, a lo sumo, numerable.*
3. *El estabilizador de cada punto es trivial o un grupo cíclico finito.*
4. *Un grupo fuchsiano es abeliano si y sólo si es cíclico.*
5. *El normalizador (en $PSL(2, \mathbb{R})$) de un fuchsiano no cíclico es fuchsiano.*

2.4.1.1. Regiones Fundamentales.

DEFINICIÓN 2.4.4. Un conjunto cerrado $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$ se denomina región fundamental para un grupo fuchsiano Γ si:

1. $\bigcup_{g \in \Gamma} g(\mathcal{F}) = \mathbb{H}$
2. $\text{interior}(\mathcal{F}) \cap \text{interior}(g\mathcal{F}) = \emptyset$ para todo $g \in \Gamma, g \neq id$

TEOREMA 2.4.8. *Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ son regiones fundamentales para Γ sus áreas hiperbólicas son iguales.*

DEFINICIÓN 2.4.5. Sea Γ un grupo fuchsiano y $p \in H$ un punto no fijado por ningún elemento de G , El conjunto $D_p(\Gamma) = \{q \in \mathbb{H} : \rho(q, p) \leq \rho(g(q), p) \text{ para cada } g \in \Gamma\}$ (siendo ρ distancia hiperbólica en \mathbb{H}) se denomina región de Dirichlet para Γ centrada en p .

TEOREMA 2.4.9. *La región de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ es una región fundamental convexa para Γ localmente finita.*

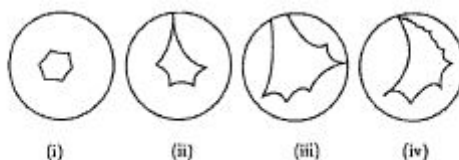
Otro método de construir regiones fundamentales, debido a Ford se describe en [45].

TEOREMA 2.4.10. *Sea Δ un subgrupo de índice finito n de un grupo fuchsiano Γ , Δ también es fuchsiano. Sean $\{\Delta, \Delta g_1, \dots, \Delta g_{n-1}\}$ representantes de clases por la derecha de Γ en Δ y \mathcal{F} una región fundamental para Γ , tendremos que:*

$$\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{F} \cup g_1(\mathcal{F}) \cup \dots \cup g_{n-1}(\mathcal{F}) \quad a(\mathcal{F}_\Delta) = na(\mathcal{F})$$
 siendo a el área hiperbólica. es una región fundamental para Δ .

Por construcción la región de Dirichlet es una unión numerable de semi-planos y por tanto está limitada por un conjunto, a lo sumo numerable, de segmentos geodésicos y regiones de $\partial\mathbb{H}$.

Usando el modelo hiperbólico del Disco (equivalente al semi-plano) tenemos los siguientes casos: (ver [75])



i) Superficie compacta, *ii)* Superficie con un pinzamiento (vértice ideal en ∞) *iii)* Superficie con un lado libre en el infinito, *iv)* Superficie con vértice ideal y conjunto numerable de lados.

TEOREMA 2.4.11. *Sea \mathcal{P} una región fundamental conexa localmente finita (polígono fundamental) para el grupo fuchsiano Γ tenemos:*

- \mathcal{P} tiene a lo sumo un conjunto numerable de vértices y lados, los vértices son aislados.
- Un compacto $K \subset \mathbb{H}$ intersecta a \mathcal{P} en un número finito de vértices y lados.
- $\partial\mathcal{P}$ es una unión de lados, y la intersección de dos lados es un vértice que es punto extremo de cada uno de ellos y viceversa.

TEOREMA 2.4.12. *Sea Γ un grupo fuchsiano con polígono fundamental \mathcal{P} y $\Gamma^* = \{g \in \Gamma : \mathcal{P} \cap g(\mathcal{P}) \text{ es un lado}\}$. Si Υ es el conjunto de lados de \mathcal{P} , existe una biyección $\Gamma^* \longleftrightarrow \Upsilon$ tal que para cada lado $s \in \mathcal{P}$ existe un único lado $s' \in \mathcal{P}$ y un elemento $g \in \Gamma^*$ que satisfacen $s' = g(s)$ (si $s = s'$ la transformación g es elíptica de orden 2, en este caso consideramos como vértice el punto medio de dicho lado).*

TEOREMA 2.4.13. Γ^* genera Γ (ver [57] capítulo 7).

TEOREMA 2.4.14. *Son equivalentes:*

1. $\mu(\mathcal{P}) < \infty$.
2. \mathcal{P} no tiene lados libres y tiene un número finito de lados.

Dado un grupo fuchsiano Γ con polígono fundamental \mathcal{P} , vamos a definir una relación de equivalencia entre vértices. De forma que $v_1 \sim v_2$ cuando existe $g \in \Gamma$ tal que $v_2 = g(v_1)$. Las clases de equivalencia se denominan *ciclos*. Evidentemente los estabilizadores de los vértices de un ciclo son conjugados y tienen el mismo orden m .

TEOREMA 2.4.15. *Con la notación anterior, sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ un ciclo con ángulos internos en \mathcal{P} $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ se tiene: $\sum_1^n \varphi_i = \frac{2\pi}{m}$.*

TEOREMA 2.4.16. *Sea Γ un grupo fuchsiano y \mathcal{P} un polígono fundamental:*

1. \mathbb{H}/Γ es homeomorfa a \mathcal{P}/Γ .
2. \mathbb{H}/Γ es compacta si y sólo si \mathcal{P} es compacto.

DEFINICIÓN 2.4.6. Si \mathbb{H}/Γ es compacta, el grupo Γ se denomina cocompacto.

2.4.1.2. Signaturas.

Sea un grupo fuchsiano Γ con polígono fundamental \mathcal{P} , realizando operaciones de “cirugía” en dicho polígono llegamos a uno equivalente, desde el punto de vista de la topología combinatoria (ver [71]), de forma que Γ tiene generadores (ver [12]) :

1. a_1b_1, \dots, a_gb_g elementos que intercambian lados (hiperbólicos). Siendo g el género de la superficie \mathbb{H}/Γ .
2. x_1, \dots, x_r elementos elípticos que serán estabilizadores no triviales de vértices. Habrá r clases de conjugación de elementos elípticos de orden máximo y todo elemento elíptico de Γ será conjugado de una potencia de alguno de los x_i . Los órdenes de los elementos elípticos de orden máximo se denominan periodos.

3. p_1, \dots, p_s elementos parabólicos (vértices ideales en el ∞). Habrá s clases de conjugación de elementos parabólicos y cada elemento parabólico de Γ será conjugado de una potencia de uno de los p_i .
4. h_1, \dots, h_t elementos hiperbólicos correspondientes a lados libres.

y relaciones:

1. $x_i^{m_i}$
2. $\prod_1^t h_l^{-1} \prod_i^s p_k^{-1} \prod_1^r x_j^{-1} \prod_1^g [a_i, b_i]$

Que denominaremos presentación canónica.

Si el grupo es de primera clase tenemos que el área hiperbólica $a(\mathbb{H}/\Gamma) = 2\pi(2g - 2 + \sum_1^r (1 - \frac{1}{m_j}) + s)$ ha de ser mayor que cero. Si es de segunda clase ($t > 0$) su área hiperbólica es ∞ , pero sigue teniendo que cumplirse que $2g - 2 + \sum_1^r (1 - \frac{1}{m_j}) + s + t > 0$.

Se dice que la signatura del grupo es $s(\Gamma) = (g; m_1, \dots, m_r; s; t)$.

TEOREMA 2.4.17. (*Poincaré*) *Dados los enteros $g \geq 0, r \geq 0, m_i \geq 2, s \geq 0, t \geq 0$ tales que $2g - 2 + \sum_1^r (1 - \frac{1}{m_j}) + s + t > 0$. Existe un grupo fuchsiano Γ con signatura $s(\Gamma) = (g; m_1, \dots, m_r; s; t)$.*

La demostración original de este teorema contenía algún error, una demostración correcta puede verse en [84].

TEOREMA 2.4.18. (*Siegel*) *Sea Γ un grupo fuchsiano cocompacto. La superficie de Riemann compacta $S = \mathbb{H}/\Gamma$ tiene área hiperbólica acotada inferiormente por $a(S) \geq \frac{\pi}{21}$. Alcanzándose la igualdad cuando la signatura de Γ es $s(\Gamma) = (0; 2, 3, 7)$.*

2.4.2. Número de Automorfismos de una superficie de Riemann compacta.

Basándose en el teorema de Siegel es posible demostrar:

TEOREMA 2.4.19. (*Hurwitz*) *Sea S una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. El grupo $\text{Aut}(S)$ de automorfismos de S tiene orden menor o igual a $84(g - 1)$.*

La demostración de este teorema también se puede realizar usando los puntos de Weierstrass (ver [44, 87]).

Los automorfismos de las superficies de Riemann han sido profusamente estudiados (ver [55, 107, 43, 34]).

2.5. Superficies de Klein y grupos N.E.C.

Es posible generalizar el análisis complejo a superficies con bordes y/o no orientables. Las superficies con esta nueva estructura se denominan superficies de Klein y su estudio detallado puede verse en [8, 9, 41, 95, 47, 69, 53, 27, 31].

DEFINICIÓN 2.5.1. Una función f , con valores en \mathbb{C} , definida en un abierto $W \subset \mathbb{C}$, se denomina *dianalítica*: Si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (analítica) o $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ (antianalítica) en cada componente conexa de W .

DEFINICIÓN 2.5.2. Una estructura dianalítica en una variedad topológica S de dimensión 2 con borde, es un conjunto maximal de cartas (U, ϕ) siendo U un abierto de S y ϕ un homeomorfismo entre U y un abierto de \mathbb{C} o de \mathbb{C}^+ , de forma que las funciones de transición $\phi \circ \psi^{-1}$, entre cartas $(U, \phi), (V, \psi)$, son dianalíticas en $U \cap V$. (Si $U \cap V$ es un abierto de \mathbb{C}^+ que no lo es de \mathbb{C} se exige la dianaliticidad de una extensión de las funciones de transición a un abierto de \mathbb{C}).

DEFINICIÓN 2.5.3. Una superficie de Klein es una variedad topológica de dimensión 2 con borde en la que hay definida una estructura dianalítica.

Si añadimos al atlas de una superficie de Riemann una carta $(U, c \circ \phi)$ (siendo c la conjugación compleja) por cada carta (U, ϕ) obtenemos una superficie de Klein.

DEFINICIÓN 2.5.4. Se define el borde ∂S de una superficie de Klein S como $\{x \in S : \text{existe carta } (U, \phi) \text{ tal que } x \in U, \phi(U) \subset \mathbb{C}^+, \phi(x) \in \mathbb{R}\}$

OBSERVACIÓN. Si se cumple para una carta ha de cumplirse para todas en cuyo dominio esté x .

Para poder definir morfismos entre superficies de Klein vamos a necesitar una aplicación especial:

DEFINICIÓN 2.5.5. La aplicación “doblez” es la aplicación suprayectiva continua y abierta $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^+$ definida por $\Phi(x + iy) = x + i|y|$.

DEFINICIÓN 2.5.6. Un morfismo entre superficies de Klein S, S' es una aplicación continua $f : S \rightarrow S'$ tal que:

$$\blacksquare f(\partial S) \subset \partial S'$$

- Para cada $x \in S$ existen cartas (U, ϕ) de $S, x \in U$ y (V, ψ) de $S', f(s) \in V$ tales que $f(U) \subset V$, y una función analítica $F : \phi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{f} & V \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 \phi(U) & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}^+
 \end{array}$$

Siempre podemos extender F a $\hat{F} : \phi(U) \cup \overline{\phi(U)} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante $\hat{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}$ para $z \in \overline{\phi(U)}$ (reflexión de Schwartz). Además, cuando $\phi(U)$ es conexo, $\Phi \circ F_1 = \Phi \circ F_2$ en $\phi(U)$ implica $F_1 = F_2$.

OBSERVACIÓN. Los morfismos no constantes entre superficies de Klein son aplicaciones abiertas.

TEOREMA 2.5.1. Sean S, S', S'' superficies de Klein y $f : S \rightarrow S', g : S' \rightarrow S''$ aplicaciones continuas no constantes tales que $f(\partial S) \subset \partial S'$ y $g(\partial S') \subset \partial S''$. Se tiene (ver [9]):

- Si f, g son morfismos $g \circ f : S \rightarrow S''$ es un morfismo.
- Si f es un morfismo suprayectivo y $g \circ f$ un morfismo entonces g es un morfismo.
- Si f es abierta, g un morfismo y $g \circ f$ un morfismo entonces f es un morfismo.

COROLARIO 2.5.1. Sean S, S' superficies de Klein y f un morfismo entre ellas. Si f es un homeomorfismo entonces f es un isomorfismo.

2.5.0.1. Cubierta doble.

Dada una superficie de Klein existe siempre una superficie de Riemann (quizás no conexa) con un morfismo de orden dos entre ellas. Este hecho permite estudiar las superficies de Klein por medio de superficies de Riemann.

TEOREMA 2.5.2. Sea S una superficie de Klein, existe una superficie de Riemann S_c , un morfismo de orden dos $\pi : S_c \rightarrow S$, y una aplicación anti-analítica $\sigma : S_c \rightarrow S_c$ tal que $\pi \circ \sigma = \pi$ y $\sigma^2 = 1$.

Al triple (S_c, π, σ) se le denomina cubierta doble de la superficie de Klein S y su construcción puede verse en [22]. Dicha construcción produce una superficie conexa en el caso de que S sea no orientable y/o tenga borde, si S es una superficie de Riemann dicha construcción genera dos superficies de Riemann.

TEOREMA 2.5.3. *Si (S_c, π, σ) y (S'_c, π', σ') son cubiertas dobles de una superficie de Klein S existe un único isomorfismo $f : S_c \rightarrow S'_c$ tal que $\pi = \pi' \circ f$ y $f \circ \sigma = \sigma' \circ f$.*

TEOREMA 2.5.4. *Sea S una superficie de Klein, X una superficie de Riemann y $f : X \rightarrow S$ un morfismo no constante. Existe un único morfismo (entre superficies de Riemann) $\hat{f} : X \rightarrow S_c$ que hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\hat{f}} & S_c \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & S \end{array}$$

Un estudio más detallado de las cubiertas dobles puede verse en [53, 19, 31].

2.5.1. Grupos N.E.C. Un estudio detallado de los grupos N.E.C puede verse en [113, 80].

PROPOSICIÓN 2.5.1. *Los automorfismos dianalíticos de \mathbb{H} , que denotaremos $Aut(\mathbb{H})$ vienen dados por:*

- $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$ (analíticos: $Aut^+(\mathbb{H})$).
- $z \rightarrow \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc < 0$ (antianalíticos: $Aut^-(\mathbb{H})$).

Aparecen dos tipos de automorfismos antianalíticos según la traza T de su matriz normalizada $ad - bc = -1$;

1. Reflexiones $T^2 = 0$ (fijan un círculo o una recta perpendicular a \mathbb{R}).
2. Reflexiones con deslizamiento $T^2 \neq 0$ (fijan dos puntos de \mathbb{R}).

PROPOSICIÓN 2.5.2. *Un subgrupo discreto de $Aut(\mathbb{H})$ actúa de forma propiamente discontinua en \mathbb{H} . Por tanto \mathbb{H}/Γ será una superficie de Klein y la proyección canónica $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ un morfismo.*

DEFINICIÓN 2.5.7. Un subgrupo Γ discreto cocompacto de $Aut(\mathbb{H})$ se denomina Grupo N.E.C. (“Non-Euclidean Crystallographic”).

Un grupo N.E.C. contenido en $Aut^+(\mathbb{H})$ es un grupo fuchsiano. Si tiene elementos antianalíticos se denomina grupo N.E.C. propio. Dado un grupo N.E.C. propio Γ el subgrupo fuchsiano canónico es el subgrupo $\Gamma^+ = \Gamma \cap Aut^+(\mathbb{H})$.

TEOREMA 2.5.5. *Si $S = \mathbb{H}/\Gamma$ es una superficie de Klein y $\Gamma \neq \Gamma^+$, entonces $S_c = \mathbb{H}/\Gamma^+$.*

Una región fundamental para un grupo N.E.C se define de forma análoga a la de los grupos fuchsianos (ver sección 2.4.1.1) y lo mismo para la región fundamental de Dirichlet (ver [113, 100, 83, 42]).

TEOREMA 2.5.6. *La región de Dirichlet F_p de un grupo N.E.C. Γ tiene las siguientes propiedades (región fundamental regular, ver [113]):*

1. F_p es un polígono convexo con un número finito de lados, homeomorfo a un disco cerrado.
2. ∂F_p es una poligonal de Jordan cerrada unión de un número finito de geodésicas hiperbólicas.
3. Los lados de F_p son de tres tipos:
 - a) Pares congruentes s, s' donde $s = F_p \cap gF_p$ y $s' = F_p \cap g^{-1}F_p$ donde $g \in \Gamma$ y $g^2 \neq id$ tendremos $s = gs'$.
 - b) Pares congruentes como en el caso anterior pero con g elíptica de orden 2 en este caso $s \cup s' = F_p \cap gF_p$
 - c) Lados s tales que $s = F_p \cap gF_p$ siendo g una reflexión.
4. Si para $g \in \Gamma$ se tiene que $F_p \cap gF_p \neq \emptyset$ y F_p y gF_p no tienen lados en común, su intersección es un vértice.

Una región fundamental se puede modificar (ver [71, 113]) para obtener otra con un símbolo de superficie que origina una presentación de Γ que denominaremos canónica (ver [71]). Con generadores:

1. a_1b_1, \dots, a_gb_g caso orientable, hiperbólicos. Siendo g el género de la superficie \mathbb{H}/Γ .
2. d_1, \dots, d_g caso no orientable, reflexiones con deslizamiento. Siendo g el género de la superficie \mathbb{H}/Γ .
3. x_1, \dots, x_r elípticos que serán estabilizadores no triviales de vértices.
4. e_1, \dots, e_k generadores de "conexión", normalmente hiperbólicos, elípticos en algunos casos.
5. c_{ij} $i = 1, \dots, k$ $j = 1, \dots, s_i + 1$ reflexiones.

y relaciones:

1. $x_i^{m_i}$
2. $c_{is_i+1}e_i c_{i1}e_i^{-1}$
3. c_{ij}^2
4. $(c_{ij}, c_{ij+1})^{n_{ij}}$ siendo $(n_{ij} \geq 2, 1 \leq j \leq s_i)$
5. $e_1^{-1} \dots e_k^{-1} x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ caso orientable.
6. $e_1^{-1} \dots e_k^{-1} x_1^{-1} \dots x_r^{-1} d_1^2 \dots d_g^2$ caso no orientable.

NOTA. En la literatura (por ejemplo [22]) aparece frecuentemente otras relaciones equivalentes, por ejemplo:

$$x_1 \dots x_r e_1 \dots e_k [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$$

2.5.1.1. Signaturas.

A una superficie de Klein $S = \mathbb{H}/\Gamma$, siendo Γ un grupo N.E.C. con la presentación anterior se le asigna una signatura:

$$s(\Gamma) = (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$$

Donde g es el género de S , $+$ si la superficie es orientable y $-$ si no lo es, y k es el número de componentes conexas de ∂S .

TEOREMA 2.5.7. *Dos grupos N.E.C con signaturas:*

$$(g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$$

$$(g'; \pm; [m'_1, \dots, m'_r]; \{(n'_{11}, \dots, n'_{1s'_1}), \dots, (n'_{k1}, \dots, n'_{ks'_k})\})$$

Son isomorfos, como grupos abstractos, si y sólo si:

1. *Ambos son orientables (+) o no orientables (-); $g = g'$; $r = r'$; $k = k'$.*
2. *$[m'_1, \dots, m'_r]$ es una permutación de $[m_1, \dots, m_r]$.*
3. *Existe una permutación ϕ de $\{1, \dots, k\}$ tal que $s_i = s'_{\phi(i)}$*
4. *Si $+$: Todos los $(n'_{\phi(i)1}, \dots, n'_{\phi(i)s_i})$ son una permutación cíclica de los $(n_{i1}, \dots, n_{is_i})$ o todos los $(n'_{\phi(i)1}, \dots, n'_{\phi(i)s_i})$ son una permutación cíclica de los $(n_{is_i-1}, \dots, n_{i1})$.*
5. *Si $-$: Cada $(n'_{\phi(i)1}, \dots, n'_{\phi(i)s_i})$ es una permutación cíclica de $(n_{i1}, \dots, n_{is_i})$ o de $(n_{is_i}, \dots, n_{i1})$.*

Los números m_1, \dots, m_r se denominan periodos propios y los $(n_{i1}, \dots, n_{is_i})$ ciclo-periodos.

DEFINICIÓN 2.5.8. Si Γ no tiene periodos ni ciclo-periodos, o sea si su signatura es:

$$(g; \pm; [-]; \{(-), \dots, (-)\})$$

Se dice que Γ es un grupo de superficie con k componentes conexas de borde.

TEOREMA 2.5.8. *El área hiperbólica de una superficie $S = \mathbb{H}/\Gamma$, siendo Γ un grupo N.E.C de signatura:*

$$(g; +; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\}) \text{ es:}$$

$$a(S) = a(\Gamma) = 2\pi(2g - 2 + k + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} (1 - \frac{1}{n_{ij}}))$$

y la de una superficie correspondiente a un grupo de signatura:

$$(g; -; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\}) \quad \text{es:}$$

$$a(S) = a(\Gamma) = 2\pi(g - 2 + k + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} (1 - \frac{1}{n_{ij}}))$$

TEOREMA 2.5.9. *Una signatura arbitraria*

$$(g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\})$$

corresponde a la signatura de un grupo N.E.C cuando:

1. $a(\Gamma) > 0$
2. Si la signatura es no orientable: $g \geq 1$

TEOREMA 2.5.10. *Sea Δ un subgrupo de índice finito n de un grupo N.E.C. Γ , Δ será también un grupo N.E.C. Sean $\{\Delta, \Delta g_1, \dots, \Delta g_{n-1}\}$ representantes de clases por la derecha de Δ en Γ y \mathcal{F} una región fundamental para Γ , tenemos que:*

$$\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{F} \cup g_1(\mathcal{F}) \cup \dots \cup g_n(\mathcal{F})$$

Es una región fundamental para Δ . Cumpliéndose $a(\mathcal{F}_\Delta) = na(\mathcal{F})$ siendo a el área hiperbólica.

2.6. Orbifolds

Para analizar las superficies definidas mediante grupos fuchsianos y N.E.C. es útil el concepto de “orbifold” que es una generalización del de variedad (“manifold”) (ver [111, 102, 68, 99]).

DEFINICIÓN 2.6.1. Dado un espacio topológico X , una carta orbifold es una cuadrupla $(U, \tilde{U}, \tilde{\varphi}, \Gamma)$ donde:

1. U es un abierto de X y \tilde{U} es un abierto conexo de \mathbb{R}^n
2. Γ es un grupo finito que actúa sobre \tilde{U} .
3. $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow U$ es una aplicación compatible con Γ ($\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}g$ para cada $g \in \Gamma$) que induce un homeomorfismo $\varphi^{-1}: \tilde{U}/\Gamma \rightarrow U$.

DEFINICIÓN 2.6.2. Un orbifold (sin borde) O es un espacio de Hausdorff paracompacto X_O (espacio subyacente) recubierto por un conjunto de cartas $(\tilde{U}_i, U_i, \tilde{\varphi}_i, \Gamma_i)$, cerrado respecto a las intersecciones finitas de los abiertos U_i , con las siguientes propiedades:

- Si $U_i \subset U_j$
 1. Existe un homomorfismo inyectivo de grupos $f_{ij}: \Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$

2. Existe un encaje (“embedding”) $\widetilde{\varphi}_{ij}$ de \widetilde{U}_i en \widetilde{U}_j compatible con f_{ij} , o sea $\widetilde{\varphi}_{ij}(\gamma\widetilde{x}) = f_{ij}(\gamma)\widetilde{\varphi}_{ij}(\widetilde{x})$, y tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{U}_i & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_{ij}} & \widetilde{U}_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \widetilde{U}_i/\Gamma_i & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_{ij}/\Gamma_i} & \widetilde{U}_j/f_{ij}(\Gamma_i) \\
 \uparrow \varphi_i & & \downarrow \\
 U_i & & \widetilde{U}_j/\Gamma_j \\
 & & \uparrow \varphi_j \\
 & & U_j
 \end{array}$$

$\widetilde{\varphi}_i$ (curved arrow from U_i to \widetilde{U}_i) $\widetilde{\varphi}_j$ (curved arrow from U_j to \widetilde{U}_j)

- Si $U_i \subset U_j \subset U_k$ existe $\gamma \in \Gamma_k$ tal que $\gamma\widetilde{\varphi}_{ik} = \widetilde{\varphi}_{jk} \circ \widetilde{\varphi}_{ij}$ y $\gamma f_{ik}\gamma^{-1} = f_{jk} \circ f_{ij}$

DEFINICIÓN 2.6.3. Nosotros vamos a ceñirnos al caso de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ y que las acciones de cada Γ_i , y cada $\widetilde{\varphi}_{ij}$ sean dianalíticas.

OBSERVACIÓN. Si para todo i el grupo $\Gamma_i = \{1\}$ la definición coincide con la de variedad.

Considerando para cada $x \in U_i$ las preimágenes por $\widetilde{\varphi}$, los estabilizadores de dichos puntos son isomorfos (conjugados) y por tanto definen un grupo que denotaremos Γ_x .

DEFINICIÓN 2.6.4. El lugar singular del orbifold O es el conjunto $\Sigma_O = \{x \in X_O : \Gamma_x \neq \{1\}\}$.

PROPOSICIÓN 2.6.1. *El lugar singular de un orbifold de dimensión 2 tiene los siguientes tipos de puntos: (ver [111, 68])*

1. *Puntos espejo: Cuando Γ_x es \mathbb{Z}_2 (y la acción de Γ_x en \mathbb{C} es una reflexión).*
2. *Puntos cónicos de orden n : Cuando Γ_x es \mathbb{Z}_n .*
3. *Puntos esquina: Cuando Γ_x es el grupo diédrico D_n (orden $2n$).*

DEFINICIÓN 2.6.5. Un orbifold \widehat{O} es una cubierta orbifold de un orbifold O , cuando existe una aplicación $\pi : X_{\widehat{O}} \rightarrow X_O$ tal que:

1. Dado $x \in X_O$ existe una carta $(\widetilde{U}, U, \widetilde{\varphi}, \Gamma)$ de O tal que $x \in U \cong \widetilde{U}/\Gamma$ y cada componente conexa V_i de $\pi^{-1}(U)$ es homeomorfa a \widetilde{U}/Γ_i , siendo Γ_i un subgrupo de Γ .

2. Sea $\psi_i : \tilde{U}/\Gamma_i \rightarrow V_i$ dicho homeomorfismo y $\omega_i : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}/\Gamma_i$ la proyección canónica. Entonces $\tilde{\varphi} = \pi \circ \psi_i \circ \omega_i$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}/\Gamma_i & \xrightarrow{\psi_i} & V_i \\ \omega_i \uparrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & U \cong \tilde{U}/\Gamma \end{array}$$

OBSERVACIÓN. El espacio $X_{\hat{O}}$ no es, en general, un espacio recubridor de X_O .

DEFINICIÓN 2.6.6. Un orbifold O se denomina bueno si admite a una variedad como cubierta orbifold.

OBSERVACIÓN. En el caso de que X_O sea una superficie de Riemann, una variedad \hat{O} que sea una cubierta orbifold suya, será un recubrimiento ramificado de X_O .

DEFINICIÓN 2.6.7. Un orbifold O es orientable si lo es el espacio X_O y ningún Γ contiene elementos anticonformes.

PROPOSICIÓN 2.6.2. Si M es una variedad y G un grupo que actúa de forma propiamente discontinua entonces M/G es un orbifold.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $[x] \in M/G$ escogemos $x \in M$. Sea I_x su grupo de isotropía, existe un entorno \tilde{U}_x invariante, como conjunto, por los elementos de I_x y disjunto con sus trasladados por los otros elementos de G (realmente habría que considerar la imagen en \mathbb{R}^n de \tilde{U}_x).

La proyección $\psi_x : U_x = \tilde{U}_x/I_x \rightarrow \tilde{U}_x/G$ es un homeomorfismo y define una carta $(\tilde{U}_x, U_x, \psi_x, I_x)$. Aumentamos por las intersecciones finitas, para ello aunque si $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k} \neq \emptyset$ no podemos asegurar que $\tilde{U}_{x_1} \cap \dots \cap \tilde{U}_{x_k} \neq \emptyset$ (dependerá de que preimágenes escojamos) si sabemos que existen $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in G$ tales que $\tilde{U} = \gamma_1 \tilde{U}_{x_1} \cap \dots \cap \gamma_k \tilde{U}_{x_k} \neq \emptyset$ y podemos utilizar como grupo actuando sobre \tilde{U} el subgrupo $\gamma_1 I_{x_1} \gamma_1^{-1} \cap \dots \cap \gamma_k I_{x_k} \gamma_k^{-1}$. Es claro que M/G es un orbifold con este atlas. \square

TEOREMA 2.6.1. Si M es una variedad analítica real y G un subgrupo de diffeomorfismos analíticos entonces M/G es un orbifold bueno.

La demostración de este teorema, enunciado en [111], puede verse en [86] utilizando una condición ligeramente menos fuerte que la analiticidad.

Por tanto si Γ es un grupo N.E.C. (fuchsiano) entonces \mathbb{H}/Γ tendrá una estructura de orbifold bueno, además de una estructura de superficie de Riemann o Klein. La forma de definir una carta, para la estructura de superficie de Riemann, en un punto cónico puede verse en [12].

DEFINICIÓN 2.6.8. Sea O un orbifold y $x \in X_O - \Sigma_O$ se dice que el orbifold \widehat{O} es una cubierta orbifold con base \widehat{x} si \widehat{O} es una cubierta orbifold y $\pi(\widehat{x}) = x$.

DEFINICIÓN 2.6.9. Un orbifold conexo \widehat{O} que es una cubierta orbifold de O con base \widehat{x} ($x = \pi(\widehat{x})$) es una cubierta **universal** orbifold de O , si para cualquier otra cubierta orbifold (\widetilde{O}, π') con base \widetilde{x} ($x = \pi'(\widetilde{x})$) existe un levantamiento $q : \widehat{O} \rightarrow \widetilde{O}$ de π tal que $q(\widehat{x}) = \widetilde{x}$ y tal que (\widehat{O}, q) es una cubierta orbifold de \widetilde{O} .

$$\begin{array}{ccc} \widehat{O} & \xrightarrow{q} & \widetilde{O} \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & O & \end{array}$$

PROPOSICIÓN 2.6.3. *Todo orbifold tiene una cubierta orbifold universal (ver [111]).*

La cubierta orbifold universal es una cubierta ramificada normal (ver sección 1.5.2), por tanto para cada preimagen \check{x} de x existe una transformación recubridora que lleva \widehat{x} a \check{x} . Cuando O es un orbifold bueno tiene una cubierta orbifold que es una variedad simplemente conexa.

PROPOSICIÓN 2.6.4. *Si Σ_O tiene codimensión 2 o mayor cada cubierta orbifold \widetilde{O} de O proviene del completado (“completion”) de un recubrimiento no ramificado del espacio $X_O - \Sigma_O$ (ver [111]).*

DEFINICIÓN 2.6.10. El grupo fundamental $\pi_1^O(O)$ de un orbifold es el grupo de transformaciones recubridoras (ramificadas) de su cubierta orbifold universal.

OBSERVACIÓN. En el caso de nuestro interés, superficies de Klein compactas hiperbólicas $S = \mathbb{H}/\Gamma$, siendo Γ un grupo N.E.C., tendremos que $\pi_1^O(S) \cong \Gamma$.

2.6.1. Orbifolds y monodromía.

Dado un orbifold vamos a considerar dos grupos fundamentales $\pi_1^O(O)$ y $\pi_1(X_O - \Sigma_O)$. Ambos están relacionados.

En el caso de superficies con puntos cónicos x_1, \dots, x_n de órdenes m_1, \dots, m_n , se tiene que $\pi_1^O(S) \cong \pi_1(S - \Sigma) / \langle \gamma_1^{m_1}, \dots, \gamma_n^{m_n} \rangle$ (ver [89]) donde $\gamma_i^{m_i} \in \pi_1(S - \Sigma)$ es la clase de homotopía de un lazo que da m_i vueltas alrededor de x_i y no rodea a ningún otro punto. Para el caso de una superficie con borde la relación de $\pi_1^O(S)$ con $\pi_1(S_c)$ (cubierta doble) puede verse en [100].

Dado un espacio X (con recubridor universal) y un homomorfismo transitivo $\pi_1(X) \rightarrow S_n$ (monodromía) tenemos definido un espacio recubridor conexo (ver 1.4.2).

Por tanto dado un orbifold O y un homomorfismo transitivo, $\pi_1(X_O - \Sigma_O) \rightarrow S_n$, tendremos definido un recubrimiento de X_O . Sin embargo esto no nos define en general una cubierta orbifold.

Si consideramos un homomorfismo transitivo $\omega : \pi_1^O(O) \rightarrow S_n$ en el caso que $\pi_1^O(O)$ sea un grupo N.E.C. tendremos que $\psi^{-1}(Stab(0))$ y $ker(\psi)$ son también grupos N.E.C. al ser subgrupos de índice finito de un grupo N.E.C.

Un caso de particular interés es considerar la esfera de Riemann con n puntos cónicos $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ de órdenes m_1, \dots, m_n tal que $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/\Delta$ (donde Δ es un grupo fuchsiano cocompacto). En este caso definiendo un homomorfismo transitivo $\omega : \pi_1(\mathbb{C} - B, z_0) \cong F_n \rightarrow S_n$ tendremos definida una cubierta que se podrá completar a una ramificada. Sin embargo no para cualquier ω dicha cubierta se podrá poner como \mathbb{H}/Γ siendo Γ un subgrupo de Δ . Deberá cumplirse además que a cada γ_i , lazo libremente homótopo a la frontera de un círculo con centro en x_i que representa un elemento de $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B, z_0)$ y que denominaremos meridiano de x_i , se le asigne una permutación de un orden que divida m_i .

Además teniendo en cuenta que cada superficie de Riemann compacta admite funciones meromorfas (ver [44, 46, 79]) y que estas pueden considerarse un recubrimiento ramificado de $\widehat{\mathbb{C}}$ este caso se aplica a cualquier tipo de superficie compacta.

Presentación de Subgrupos: Método de Reidemeister-Schreier

El método de Reidemeister-Schreier de la teoría combinatoria de grupos es de gran importancia en el siguiente escenario: Si tenemos una superficie $S = \frac{\mathbb{H}}{\Lambda}$, un subgrupo $\Gamma \subset \Lambda$ define una superficie $S' = \frac{\mathbb{H}}{\Gamma}$ que es un recubrimiento (ramificado) de S de orden $[\Lambda : \Gamma]$. Obtener una presentación del grupo Γ a partir de la de Λ permite la deducción de características de la superficie recubridora.

Referencias para esta teoría son [82, 38, 28, 16] y su aplicación a la geometría de superficies puede verse en [115].

Dado un Grupo \mathfrak{G} generado por los elementos $\{g_1, g_2, \dots\}$ podemos asignar un símbolo a_i a cada generador g_i y considerar el grupo libre F generado por $\{a_1, a_2, \dots\}$, cuyos elementos son cadenas de símbolos, o sus inversos, que se denominan palabras, siendo la cadena vacía el elemento unidad.

Existe un único homomorfismo suprayectivo $\Phi : F \rightarrow \mathfrak{G}$ tal que $\Phi(a_i) = g_i$ y por tanto \mathfrak{G} es isomorfo a $G = F / \ker(\Phi)$. Al par $\{F, \Phi\}$ se le denomina presentación de \mathfrak{G} , a los símbolos a_i se les denomina *generadores* de la presentación y a los elementos de $\ker(\Phi)$, que son palabras en a_i , *relaciones* de la presentación (puede haber distintas presentaciones del mismo grupo).

La presentación se escribe: $G = \langle a_1, a_2, \dots; P, Q, R, \dots \rangle$ (P, Q, R, \dots son las relaciones).

En cualquier presentación la palabra vacía, y las palabras $a_i a_i^{-1}, a_i^{-1} a_i$ son siempre relaciones, y se denominan *relaciones triviales*.

Supongamos que P, Q, R, \dots son relaciones de G , decimos que la palabra W es derivable de P, Q, R, \dots si las siguientes operaciones, aplicadas un número finito de veces, dan lugar a la palabra vacía:

1. Inserción de una de las palabras $P, P^{-1}, Q, Q^{-1}, \dots$, o de una las relaciones triviales, al principio, final, o entre dos símbolos consecutivos de W .
2. Borrado de una de las palabras $P, P^{-1}, Q, Q^{-1}, \dots$, o de las relaciones triviales, si aparece como símbolos consecutivos en la palabra W .

Dos palabras A, B se dice que son *libremente iguales*, si AB^{-1} es derivable de las *relaciones triviales*.

NOTA. En la mayoría de las ocasiones se emplea la misma notación para escribir los g_i (elementos de \mathfrak{G}) que para escribir los a_i (elementos de F) y la misma letra para describir el grupo y la presentación que se está usando. En caso de querer hacer una distinción más explícita representaremos el grupo con letras góticas.

3.1. Reescritura de Reidemeister-Schreier

3.1.1. Transformaciones de Tietze y reescrituras.

TEOREMA 3.1.1. *Sea un grupo \mathfrak{G} con una presentación:*

$$G = \langle a, b, c, \dots; P, Q, R, \dots \rangle$$

cualquier otra presentación de \mathfrak{G} se obtiene aplicando una sucesión finita de transformaciones de los siguientes tipos (transformaciones de Tietze):

1. *Si la palabra S es derivable de las relaciones P, Q, R, \dots , añadir S a las relaciones.*
2. *Si alguna de las relaciones Q es derivable de las demás, eliminar dicha relación.*
3. *Si K es una palabra añadir un nuevo generador x y una nueva relación $x^{-1}K$ ($x = K$).*
4. *Si alguna de las relaciones es de la forma $p = S$, donde p es un generador, eliminar dicha relación, el generador p , y sustituir las apariciones de p en las restantes relaciones por la palabra S .*

DEFINICIÓN 3.1.1. Sea \mathfrak{G} un grupo con presentación:

$$G = \langle a_1, \dots, a_n; R_\mu(a), \dots \rangle$$

y H un subgrupo de G generado por un conjunto de palabras $\{J_i(a)\}$.

Una reescritura para H es un conjunto de símbolos $\{s_i\}$ y una pareja de aplicaciones θ, τ :

$$\theta : \{s_i\} \leftrightarrow \{J_i(a)\}$$

$$\tau : \{\text{Palabras en } a \text{ que son elementos de } H\} \rightarrow \{\text{Palabras en } s = \{s_j\}\}$$

De forma que θ es una biyección y para cada palabra $W(a) \in H$ la palabra $\tilde{\theta}(\tau(W))$ define el mismo elemento de H (siendo $\tilde{\theta}$ la aplicación de palabras en s a palabras en a inducida por θ).

NOTA. $\tau(J_i(a))$ no tiene porqué ser s_i .

TEOREMA 3.1.2. *Dada una reescritura τ podemos obtener una presentación de H usando:*

- *Generadores: s_i .*
- *Relaciones:*
 1. $s_i = \tau(\theta(s_i))$.
 2. $\tau(U) = \tau(\tilde{U})$ siendo $U \approx \tilde{U}$ palabras "libremente iguales" que definen un elemento de H .
 3. $\tau(U_1U_2) = \tau(U_1)\tau(U_2)$ siendo U_1, U_2 palabras tales que definen elementos de H .
 4. $\tau(WR_\nu W^{-1}) = 1$ siendo W una palabra cualquiera en a y R_ν una relación de G .

La demostración de este resultado, por otra parte intuitivamente evidente, puede verse en [82]. Hay que notar que esta presentación es tremendamente complicada y no tiene ningún valor práctico.

3.1.2. Reescritura de Reidemeister.

Para simplificar la presentación anterior vamos a escoger un conjunto $\Delta = \{K, L, M, \dots\}$ de representantes *de clase por la derecha de H en G* , los elementos de dicho conjunto serán palabras en los generadores a .

Dada una palabra W (en a), denotaremos por W^* a su representante de clase, es decir la única palabra del conjunto Δ tal que:

$$HW = HW^*$$

Esto define una aplicación $*$: $G \rightarrow \Delta$ de forma que $*(W) = W^*$ que se denomina representación de clases por la derecha de H en G .

TEOREMA 3.1.3. *Sea $W \rightarrow W^*$ una representación de clases por la derecha de H en G , entonces H está generado por las palabras:*

$$Ka_\mu((Ka_\mu)^*)^{-1}$$

donde $K \in \Delta$ puede ser cualquiera de los representantes de clase (o sea cualquier elemento del conjunto Δ) y a_μ cualquiera de los generadores de G . Asociamos un símbolo s_{Ka_μ} a cada una de estas palabras (esta asociación dará lugar a la biyección θ en la reescritura que vamos a definir).

Observación 3.1.1. Si el índice $m = [G : H]$ y $n =$ número de generadores de G son finitos, existen mn símbolos s_{Ka_μ} .

DEMOSTRACIÓN. $Ka_\mu((Ka_\mu)^*)^{-1}$ es evidentemente un elemento de H puesto que $HKa_\mu = H(Ka_\mu)^*$. Tenemos que demostrar que cada elemento de H puede ponerse como un producto de estas palabras y sus inversos.

Dado que en las palabras que definen elementos de G aparecen inversos de generadores (a_i^{-1}) consideramos el producto:

$$[Ka_\mu^{-1}((Ka_\mu^{-1})^*)^{-1}][((Ka_\mu^{-1})^*a_\mu(((Ka_\mu^{-1})^*a_\mu)^*)^{-1})]$$

Como $((Ka_\mu^{-1})^*a_\mu)^* = (Ka_\mu^{-1}a_\mu)^* = K$ tenemos que:

$$Ka_\mu^{-1}((Ka_\mu^{-1})^*)^{-1}(Ka_\mu^{-1})^*a_\mu K^{-1} = 1$$

luego $(Ka_\mu^{-1})^*a_\mu(((Ka_\mu^{-1})^*a_\mu)^*)^{-1}$ es el inverso de $Ka_\mu^{-1}((Ka_\mu^{-1})^*)^{-1}$

Sea $U = a_{\mu_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{\mu_n}^{\varepsilon_n}$ ($\varepsilon_i = \pm 1$) una palabra que define un elemento de H , vamos a intentar ponerla de la forma:

$$U = W_1^* a_{\mu_1}^{\varepsilon_1} ((W_1 a_{\mu_1}^{\varepsilon_1})^*)^{-1} W_2^* a_{\mu_2}^{\varepsilon_2} ((W_2 a_{\mu_2}^{\varepsilon_2})^*)^{-1} \dots W_n^* a_{\mu_n}^{\varepsilon_n} ((W_n a_{\mu_n}^{\varepsilon_n})^*)^{-1}$$

Para ello tendremos que hacer $W_1 = 1, W_2 = W_1 a_{\mu_1}^{\varepsilon_1}, \dots, W_n = W_{n-1} a_{\mu_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$ y por tanto $W_1 = 1, W_2 = a_{\mu_1}^{\varepsilon_1}, W_3 = a_{\mu_1}^{\varepsilon_1} a_{\mu_2}^{\varepsilon_2}, \dots, W_n = a_{\mu_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{\mu_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$ (se tiene que $W_n a_{\mu_n}^{\varepsilon_n} = U$, luego $(W_n a_{\mu_n}^{\varepsilon_n})^* = 1$ pues U es un elemento de H). Vemos que W_i es el segmento inicial de U antes de llegar al símbolo i -ésimo.

Como $W^* a_\mu ((W a_\mu)^*)^{-1} = s_{W^* a_\mu}$ y $W^* a_\mu^{-1} ((W a_\mu^{-1})^*)^{-1} = s_{M a_\mu}^{-1}$ siendo $M = (W a_\mu^{-1})^*$ vemos que U se puede poner de la forma deseada. \square

La demostración muestra como definir la reescritura:

COROLARIO 3.1.1. *Sea $W \rightarrow W^*$ una representación de clases por la derecha de H en G . Definiendo:*

$$\theta(s_{ka_\mu}) = Ka_\mu((Ka_\mu)^*)^{-1} \quad \tau(U) = \tau(a_{\mu_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{\mu_n}^{\varepsilon_n}) = s_{K_1 a_{\mu_1}}^{\varepsilon_1} \dots s_{K_n a_{\mu_n}}^{\varepsilon_n}$$

(donde K_j es el representante del segmento de U que precede a a_{μ_j} si $\varepsilon_j = 1$ y el segmento de U que precede e incluye a $a_{\mu_j}^{-1}$ si $\varepsilon_j = -1$). Tenemos definido un proceso de reescritura que se denomina reescritura de Reidemeister.

PROPOSICIÓN 3.1.1. *Un proceso de reescritura de Reidemeister tiene, además de las propiedades generales de una reescritura, las siguientes:*

1. *Si U, \tilde{U} son libremente iguales y definen elementos de H , también lo son $\tau(U)$ y $\tau(\tilde{U})$ (en símbolos s_{Ka_μ}).*
2. *Si U_1, U_2 definen elementos de H entonces $\tau(U_1 U_2)$ y $\tau(U_1) \tau(U_2)$ son palabras idénticas.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar 1 basta comprobar que $\tau(V a_\mu^\varepsilon a_\mu^{-\varepsilon} W)$ es libremente igual a $\tau(VW)$, lo que es evidente a partir de:

$$\tau(V a_\mu a_\mu^{-1} W) = \dots s_{V^* a_\mu} s_{V^* a_\mu}^{-1} \dots \quad \tau(V a_\mu^{-1} a_\mu W) = \dots s_{(V^* a_\mu^{-1})^* a_\mu}^{-1} s_{(V^* a_\mu^{-1})^* a_\mu} \dots$$

La propiedad 2 es consecuencia directa de la definición de reescritura de Reidemeister. \square

TEOREMA 3.1.4. *Sea H un subgrupo de $G = \langle a_1, \dots, a_n; R_\mu(a), \dots \rangle$, el proceso de reescritura de Reidemeister da lugar a la siguiente presentación:*

$$H = \langle s_{Ka_\nu}, \dots; s_{Ka_\nu} = \tau(Ka_\nu((Ka_\nu)^*)^{-1}), \dots, \tau(KR_\mu K^{-1}), \dots \rangle$$

donde K recorre los elementos de Δ (representantes de las clases por la derecha de H en G), a_ν son los generadores de G y R_μ las relaciones de G .

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior podemos eliminar, por ser triviales, las relaciones de la presentación del teorema 3.1.2 $\tau(U) = \tau(\tilde{U})$ y $\tau(U_1 U_2) = \tau(U_1) \tau(U_2)$.

Cualquier W que defina un elemento de H se puede poner $W \approx UK$ (libremente igual) donde $K = W^*$ y $U = WK^{-1}$, U es un elemento de H , por tanto

$$\tau(WR_\mu W^{-1}) \approx \tau(UKR_\mu K^{-1}U^{-1}) = \tau(U)\tau(KR_\mu K^{-1})\tau(U^{-1})$$

y la relación $\tau(WR_\mu W^{-1})$ es derivable de la relación $\tau(KR_\mu K^{-1})$. \square

COROLARIO 3.1.2. *Si G es un grupo finitamente presentado (número finito de generadores y relaciones) y H un subgrupo de índice finito de G entonces H es un grupo finitamente presentado.*

3.1.3. Representantes de Schreier. Para obtener una mayor simplificación de la presentación de H vamos a considerar un conjunto de representantes de clases por la derecha de H en G con las siguiente propiedad:

- Cada palabra L que es un segmento inicial (prefijo) de una palabra $K \in \Delta$ (representante de clase) es a su vez un representante de clase, es decir $L \in \Delta$.

Un conjunto de representantes de esta forma se denomina *transversal de Schreier*.

PROPOSICIÓN 3.1.2. *Sea $G = \langle a_1, \dots, a_n; R_\mu(a), \dots \rangle$ y sea H un subgrupo de G , existe un conjunto de representantes de Schreier.*

DEMOSTRACIÓN. Cada clase por la derecha de H en G es un conjunto de palabras en los generadores a_i que podemos considerar reducidas (de longitud mínima).

Denominaremos longitud de la clase, a la mínima de las longitudes de sus palabras. La clase H contiene la identidad que es la palabra vacía (longitud cero).

Si S_1 es una clase de longitud uno escogemos cualquier palabra de longitud 1 de S_1 como representante.

Si S_2 es una clase de longitud 2 existirá en ella una palabra b_1b_2 (donde cada b es un a o un a^{-1}), $(b_1)^*$ será a lo sumo de longitud 1 y $(b_1)^*b_2$ pertenecerá a S_2 . Escogemos $(b_1)^*b_2$ como representante de S_2 .

Continuando de este modo obtenemos una transversal de Schreier. \square

TEOREMA 3.1.5. (Presentación de Reidemeister-Schreier) Sea H un subgrupo de $G = \langle a_1, \dots, a_n; R_\mu(a), \dots \rangle$, el proceso de reescritura de Reidemeister, usando representantes de Schreier, produce:

$$H = \langle s_{Ka_\nu}, \dots; s_{Ma_\lambda}, \dots, \tau(KR_\mu K^{-1}), \dots \rangle$$

Donde K recorre el conjunto de los representantes de Schreier, a_ν son los generadores de G y R_μ las relaciones de G .

Las relaciones s_{Ma_λ} ocurren cuando $Ma_\lambda \approx (Ma_\lambda)^*$ (libremente igual) siendo $M \in \Delta$ un representante de Schreier.

DEMOSTRACIÓN. Si $Ma_\lambda(Ma_\lambda)^{-1} \approx 1$ entonces $\tau(Ma_\lambda(Ma_\lambda)^{-1}) \approx \tau(1) = 1$ y la relación $s_{Ma_\lambda} = \tau(Ma_\lambda(Ma_\lambda)^{-1})$ es derivable de la relación s_{Ma_λ} .

Consideremos ahora $\tau(Ka_\nu(Ka_\nu)^{-1})$ al calcularlo tendremos (hasta llegar al símbolo a_ν) símbolos del tipo s_{Na_ρ} siendo $Na_\rho = (Na_\rho)^*$ (pues todo prefijo de K es un representante de Schreier) o del tipo $s_{(Na_\rho^{-1})a_\rho}^{-1}$ pero $(Na_\rho^{-1}a_\rho)^* = N$ y estos símbolos se pueden eliminar por ser al mismo tiempo relaciones.

Análogamente usando que $\tau(U^{-1}) = (\tau(U))^{-1}$ podemos eliminar los símbolos que siguen a a_ν y la relación $s_{Ka_\nu} = \tau(Ka_\nu(Ka_\nu)^{-1})$ es derivable de la relación $s_{Ka_\nu} = s_{Ka_\nu}$ que evidentemente puede ser eliminada. \square

Observación 3.1.2. Al calcular $\tau(KR_\mu K^{-1})$ podemos prescindir de los símbolos iniciales (hasta llegar al primero de R_μ) y finales (después del último de R_μ).

COROLARIO 3.1.3. Un subgrupo de un grupo libre es un grupo libre.

3.2. Método Gráfico (Grafos de Schreier)

El método de Reidemeister-Schreier puede describirse también mediante un grafo (grafo de Schreier). Consideremos un grafo formado por:

- Vértices: Clases de equivalencia por la derecha de H en G .
- Aristas: Saliendo de cada vértice, una por cada generador de G , de forma que α une los vértices $H\beta \rightarrow H\beta\alpha$.

Una transversal de Schreier será un árbol orientado (grafo sin ciclos) tal que desde el vértice inicial, H , se pueden alcanzar todos los vértices del grafo (siguiendo caminos orientados).

Una vez definida una transversal de Schreier es habitual nombrar los vértices por el camino que lleva desde H hasta dicho vértice (representante de clase de Schreier), así los nombres de los vértices coincidirán con el conjunto de representantes de clase $\{K\}$.

Para nombrar las aristas existen dos posibilidades (ambas usadas en la literatura):

1. Nombrar la arista con el nombre del generador de G que realiza la transición.
2. Nombrar la arista como s_{Kx} donde K es el nombre del vértice origen (representante de Schreier) y x el nombre del generador de G que realiza la transición.

El primer método es útil para determinar los generadores de H en función de los de G pues s_{Kx} se obtendrá del siguiente modo:

- Producto de los generadores de G , correspondientes a la transversal de Schreier, partiendo del vértice inicial H hasta llegar a K .
- Producto por x .
- Producto de los inversos de los generadores para volver por la transversal de Schreier desde el vértice $(Kx)^*$ hasta el inicial H .

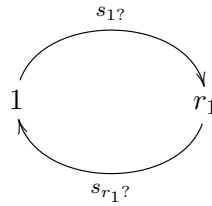
El segundo método permite obtener fácilmente las relaciones de H pues a la relación $xyz\dots$ le corresponde *para cada vértice* K el producto de las aristas $s_{Kx}s_{y}s_{z}\dots$ (que será un ciclo). Caso que aparezca x^{-1} el símbolo a usar será s_{Lx}^{-1} donde $L = (Mx^{-1})^*$ o sea el vértice origen de la arista s_{x} que termina en M .

Prescindir, en el cálculo, de las aristas que sean parte de la transversal de Schreier es lo mismo que prescindir de las relaciones s_{Lx} cuando $Lx = (Lx)^*$.

Por supuesto, una vez conocidos los dos métodos, la diferencia entre una u otra forma de nombrar es irrelevante.

EJEMPLO. Sea $G = \langle r_1, r_2, r_3; r_1^2, r_2^2, r_3^2, (r_1r_2)^8, (r_2r_3)^8, (r_1r_3)^2 \rangle$ y H el conjunto de palabras de G de longitud par.

El grafo de Schreier es:



Donde $s_{1?}$ es cualquiera de $s_{1r_1}, s_{1r_2}, s_{1r_3}$ y análogamente $s_{r_1?}$ es cualquiera de $s_{r_1r_1}, s_{r_1r_2}, s_{r_1r_3}$.

Una transversal de Schreier viene dada por: $1, r_1$.

Tendremos $s_{1r_1} = 1$ (por ser el arco de la transversal) y no lo usaremos para obtener directamente una presentación simplificada.

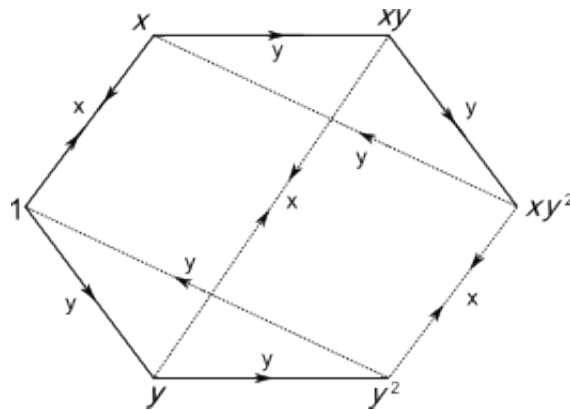
r_1^2 produce $s_{r_1r_1} = 1$, r_2^2 produce $s_{1r_2}s_{r_1r_2} = 1$ (también el equivalente $s_{r_1r_2}s_{1r_2} = 1$), y r_3^2 produce $s_{1r_3}s_{r_1r_3} = 1$. Por tanto $s_{r_1r_2} = s_{1r_2}^{-1}$ y $s_{r_1r_3} = s_{1r_3}^{-1}$.

$(r_1r_2)^8$ produce $(s_{r_1r_2})^8 = 1$ y también $(s_{r_1r_1}s_{1r_2})^8 = s_{1r_2}^8 = 1$, análogamente $(r_1r_3)^2$ produce $(s_{r_1r_1}s_{1r_3})^2 = s_{1r_3}^2 = 1$, y $(r_2r_3)^8$ produce $(s_{1r_2}s_{r_1r_3})^8 = 1$ y $(s_{r_1r_2}s_{1r_3})^8 = 1$.

Llamando $A = s_{1r_2}, B = s_{1r_3}$ tenemos que $H = \langle A, B; A^8, B^2, (AB)^8 \rangle$ (como $B^2 = 1$ tenemos que $(AB)^8 = 1$ equivale a $(A^{-1}B)^8 = 1$).

En este caso el cálculo gráfico es mucho más sencillo que el analítico que se puede ver en [82].

EJEMPLO. Sea $G = \langle x, y; x^2, y^3 \rangle$ y H su subgrupo conmutador.



Una transversal de Schreier viene dada por $1, x, y, xy, y^2, xy^2$ (marcada con línea continua).

Vemos que los generadores, que no son a su vez relaciones, son:

$$s_{xy,x}, s_{xy^2,x}, s_{xy^2,y}, s_{y^2,y}, s_{y,x}, s_{y^2,x}$$

La relación x^2 produce $s_{xy^2,x}s_{y^2,x} = 1$ por lo que prescindimos de la relación y de $s_{xy^2,x}$ también produce $s_{xy,x}s_{y,x} = 1$ así que también prescindimos del generador $s_{xy,x}$.

La relación y^3 produce $s_{xy^2,y} = 1$ y $s_{y^2,y} = 1$ por lo que prescindimos de dichos generadores.

De esta forma H es el grupo libre generado por $s_{y^2,x}$ y $s_{y,x}$. En función de los generadores de G los generadores de H son $s_{y,x} = yxy^{-1}x^{-1}$, $s_{y^2,x} = y^2xy^{-2}x^{-1}$.

3.3. Ejemplo Geométrico

Vamos a aplicar el procedimiento a un ejemplo geométrico. Sea Γ un grupo fuchsiano con signatura:

$$(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

Que tendrá generadores x_1, x_2, \dots, x_6 todos ellos elípticos de orden 2, por tanto $x_i^2 = 1$, además $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 1$.

Definimos el homomorfismo $\varphi : \Gamma \rightarrow S_5$ (Notar que $\varphi(\Gamma)$ es un subgrupo transitivo de S_5)

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow (0, 1)(2, 4)(3) & x_2 &\rightarrow (0, 3)(1, 2)(4) & x_3 &\rightarrow (0, 3)(1, 2)(4) \\ x_4 &\rightarrow (0, 1)(2, 4)(3) & x_5 &\rightarrow (0, 3)(1, 2)(4) & x_6 &\rightarrow (0, 3)(1, 2)(4) \end{aligned}$$

y queremos analizar la *superficie correspondiente al subgrupo* $\Delta = \varphi^{-1}(\text{Stab}(0))$ (*estabilizador de 0*) que será una cubierta de orden 5 de la superficie uniformizada por Γ .

Veremos, más adelante, que podemos obtener la signatura aplicando el teorema 4.2.1 esta será:

$$(g; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

y aplicando Riemann-Hurwitz :

$$2g - 2 + \sum_1^6 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 5 \left(0 - 2 + \sum_1^6 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{Obtenemos } g = 2$$

Análisis de Reidemeister-Schreier.

Necesitamos una transversal de Schreier. Para ello vemos que palabras U

son tales que $\varphi(U)(0) = 1, \dots, 4$ y cumplen las condiciones de Schreier. Escogemos:

$$\varphi(x_1)(0) = 1 \quad \varphi(x_1x_2)(0) = 2 \quad \varphi(x_2)(0) = 3 \quad \varphi(x_1x_2x_1)(0) = 4$$

Así una transversal será $K_1 = 1, K_2 = x_1, K_3 = x_1x_2, K_4 = x_2, K_5 = x_1x_2x_1$.

Para calcular los representantes de las palabras U de Γ , vemos a que punto lleva la imagen $\varphi(U)$ el punto 0, por ejemplo:

$$(x_3)^* = (x_5)^* = (x_6)^* = K_4 \quad (x_4)^* = K_2$$

$$(x_2x_1)^* = K_4 \quad (x_2x_1x_2)^* = K_1 \quad (x_1x_2x_1x_2)^* = K_5 \quad (x_2x_1x_2x_1)^* = K_2$$

Los generadores del subgrupo serán de la forma $s_{K_ax_b} = s_{ab} = K_ax_b(K_ax_b)^{-1}$ y las relaciones KRK^{-1} . Los generadores de Δ que a su vez son relaciones son: $s_{11}, s_{12}, s_{22}, s_{31}$.

La representación en Γ de los s_{ab} se puede obtener fácilmente (aunque no es estrictamente necesario):

$$\begin{aligned} s_{13} &= x_3(x_3)^{-1} = x_3x_3^{-1} & s_{14} &= x_4x_1^{-1} & s_{15} &= x_5x_2^{-1} & s_{16} &= x_6x_2^{-1} \\ s_{21} &= x_1x_1^{-1} = 1 & s_{22} &= x_1x_2(x_1x_2)^{-1} = 1 & s_{23} &= x_1x_3(x_1x_2)^{-1} = x_1x_3x_2^{-1}x_1^{-1} \\ s_{24} &= x_1x_4(x_1^2)^{-1} = x_1x_4 & s_{25} &= x_1x_5x_2^{-1}x_1^{-1} & s_{26} &= x_1x_6x_2^{-1}x_1^{-1} \\ s_{31} &= x_1x_2x_1(x_1x_2x_1)^{-1} = 1 & s_{32} &= x_1x_1^{-1} = 1 & s_{33} &= x_1x_2x_3x_1^{-1} \\ s_{34} &= x_1x_2x_4(x_1x_2x_1)^{-1} = x_1x_2x_4x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1} & s_{35} &= x_1x_2x_5x_1^{-1} & s_{36} &= x_1x_2x_6x_1^{-1} \\ s_{41} &= x_2x_1(x_2x_1)^{-1} = x_2x_1x_2^{-1} & s_{42} &= 1 & s_{43} &= x_2x_3 \\ s_{44} &= x_2x_4(x_2x_1)^{-1} = x_2x_4x_2^{-1} & s_{45} &= x_2x_5 & s_{46} &= x_2x_6 \\ s_{51} &= x_1x_2x_1x_1(x_1x_2)^{-1} = 1 & s_{52} &= x_1x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1} & s_{53} &= x_1x_2x_1x_3x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1} \\ s_{54} &= x_1x_2x_1x_4(x_1x_2)^{-1} = x_1x_2x_1x_4x_2^{-1}x_1^{-1} & s_{55} &= x_1x_2x_1x_5x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1} & s_{56} &= x_1x_2x_1x_6x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1} \end{aligned}$$

Vamos a obtener las relaciones. Sólo es necesario calcular los símbolos correspondientes a R en $K.R.K^{-1}$.

Correspondientes a $x_1^2 = 1$:

$$K_1) \quad s_{11}s_{21} = 1 \quad s_{21} = 1$$

$$K_2) \quad s_{21}s_{(K_2x_1)^*, x_1} = s_{21}s_{11} = 1$$

$$K_3) \quad s_{31}s_{(K_3x_1)^*, x_1} = s_{31}s_{51} \text{ luego } s_{51} = 1$$

$$K_4) \quad s_{41}s_{(K_4x_1)^*, x_1} = s_{41}s_{41} = 1 \text{ será uno de los generadores elípticos } (s_{41})^2 = 1$$

$$K_5) \quad s_{51}s_{[K_5x_1], x_1} = s_{51}s_{31}$$

Correspondientes a $x_2^2 = 1$:

$$s_{12}s_{42} = 1 \ (s_{42} = 1) \quad s_{22}s_{32} = 1 \ (s_{32} = 1) \quad s_{32}s_{22} = 1 \quad s_{42}s_{12} = 1 \quad s_{52}s_{52} = 1 \quad (\text{elíptico orden } 2)$$

Correspondientes a $x_3^2 = 1$:

$$s_{13}s_{43} = 1 \quad s_{23}s_{33} = 1 \quad s_{33}s_{23} = 1 \quad s_{43}s_{13} = 1 \quad s_{53}s_{53} = 1 \quad (\text{elíptico orden } 2)$$

Correspondientes a $x_4^2 = 1$:

$$s_{14}s_{24} = 1 \quad s_{24}s_{14} = 1 \quad s_{34}s_{54} = 1 \quad s_{44}s_{44} = 1 \quad (\text{elíptico orden } 2) \quad s_{54}s_{34} = 1$$

Correspondientes a $x_5^2 = 1$:

$$s_{15}s_{45} = 1 \quad s_{25}s_{35} = 1 \quad s_{35}s_{25} = 1 \quad s_{45}s_{15} = 1 \quad s_{55}s_{55} = 1 \quad (\text{elíptico orden } 2)$$

Correspondientes a $x_6^2 = 1$:

$$s_{16}s_{46} = 1 \quad s_{26}s_{36} = 1 \quad s_{36}s_{26} = 1 \quad s_{46}s_{16} = 1 \quad s_{56}s_{56} = 1 \quad (\text{elíptico orden } 2)$$

Correspondientes a $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 1$:

$$s_{11}s_{22}s_{32}s_{(x_1x_2x_3)^*x_4}s_{(x_1x_2x_3x_4)^*x_5}s_{(x_1x_2x_3x_4x_5)^*x_6} = s_{33}s_{24}s_{15}s_{46} = 1$$

$$s_{43}s_{14}s_{25}s_{36} = 1 \quad s_{52}s_{53}s_{54}s_{35}s_{26} = 1 \quad s_{41}s_{13}s_{44}s_{45}s_{16} = 1 \quad s_{23}s_{34}s_{55}s_{56} = 1$$

Para simplificar la notación, de la presentación, denotaremos a los elementos elípticos:

$$Z_1 = s_{41} \quad Z_2 = s_{52} \quad Z_3 = s_{53} \quad Z_4 = s_{44} \quad Z_5 = s_{55} \quad Z_6 = s_{56}$$

y a los otros elementos:

$$Y_1 = s_{13} \quad Y_2 = s_{23} \quad Y_3 = s_{14} \quad Y_4 = s_{34} \quad Y_5 = s_{15} \quad Y_6 = s_{25} \quad Y_7 = s_{16} \quad Y_8 = s_{26}$$

quedando las relaciones:

$$Z_i^2 = 1$$

$$Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_5Y_7^{-1} = 1 \quad Y_1^{-1}Y_3Y_6Y_8^{-1} = 1$$

$$Z_2Z_3Y_4^{-1}Y_6^{-1}Y_8 = 1 \quad Z_1Y_1Z_4Y_5^{-1}Y_7 = 1 \quad Y_2Y_4Z_5Z_6 = 1$$

despejando $Y_7 = Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_5$ $Y_8 = Y_1^{-1}Y_3Y_6$ $Y_2 = Z_6^{-1}Z_5^{-1}Y_4^{-1}$ queda

$$Z_i^2 = 1 \quad Z_2Z_3Y_4^{-1}Y_6^{-1}Y_1^{-1}Y_3Y_6 = 1 \quad Z_1Y_1Z_4Y_5^{-1}Y_4Z_5Z_6Y_3^{-1}Y_5 = 1$$

y despejando $Y_4^{-1} = Z_3^{-1}Z_2^{-1}Y_6^{-1}Y_3^{-1}Y_1Y_6$

$$Z_i^2 = 1 \quad Z_1Y_1Z_4Y_5^{-1}Y_6^{-1}Y_1^{-1}Y_3Y_6Z_2Z_3Z_5Z_6Y_3^{-1}Y_5 = 1$$

llamando $D_4 = Y_1 Z_4 Y_1^{-1}$ (será elíptico) tendremos $Y_1 Z_4 = D_4 Y_1$ luego

$$Z_i^2 = 1 \quad D_4^2 = 1 \quad Z_1 D_4 Y_1 Y_5^{-1} Y_6^{-1} Y_1^{-1} Y_3 Y_6 Z_2 Z_3 Z_5 Z_6 Y_3^{-1} Y_5 = 1$$

llamando $D_j = Y_1 Y_5^{-1} Y_6^{-1} Y_1^{-1} Y_3 Y_6 Z_j Y_6^{-1} Y_3^{-1} Y_1 Y_6 Y_5 Y_1^{-1}$ (que será elíptico al ser conjugado de elíptico) para $j = 2, 3, 5, 6$ y $D_1 = Z_1$ tendremos:

$$D_i^2 = 1 \quad D_1 D_4 D_2 D_3 D_5 D_6 Y_1 Y_5^{-1} Y_6^{-1} Y_1^{-1} Y_3 Y_6 Y_3^{-1} Y_5 = 1$$

Ahora llamamos $\beta_1 = Y_1^{-1} Y_3$ luego ($Y_3^{-1} = \beta_1^{-1} Y_1^{-1}$) y llamando $\alpha_1 = Y_6^{-1}$

$$D_i^2 = 1 \quad D_1 D_4 D_2 D_3 D_5 D_6 Y_1 Y_5^{-1} \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} Y_1^{-1} Y_5 = 1$$

llamando $A_1 = Y_1 Y_5^{-1} \alpha_1 Y_5 Y_1^{-1}$ y $B_1 = Y_1 Y_5^{-1} \beta_1 Y_5 Y_1^{-1}$

$$D_1 D_4 D_2 D_3 D_5 D_6 A_1 Y_1 Y_5^{-1} \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} Y_1^{-1} Y_5 = 1$$

$$D_1 D_4 D_2 D_3 D_5 D_6 A_1 B_1 Y_1 Y_5^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} Y_1^{-1} Y_5 = 1$$

$$D_1 D_4 D_2 D_3 D_5 D_6 A_1 B_1 A_1^{-1} Y_1 Y_5^{-1} \beta_1^{-1} Y_1^{-1} Y_5 = 1$$

$$D_1 D_4 D_2 D_3 D_5 D_6 A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} Y_1 Y_5^{-1} Y_1^{-1} Y_5 = 1$$

y llamando $A_2 = Y_1$ y $B_2 = Y_5^{-1}$ obtenemos por fin:

$$D_i^2 = 1$$

$$D_1 D_4 D_2 D_3 D_5 D_6 [A_1, B_1] [A_2, B_2] = 1$$

Que es la presentación canónica del grupo de signatura $(2; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$

Interpretación geométrica.

Si consideramos x_1, x_2, \dots, x_6 y la relación $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = 1$ tendremos una presentación del grupo fundamental de la superficie S obtenida de \mathbb{H}/Γ quitando los puntos cónicos (sera una esfera menos 6 puntos, y por tanto su grupo fundamental es F_5). A cada generador x_i le corresponde un lazo en la superficie alrededor del punto cónico i que denotaremos $X_i \in \pi_1(S)$.

Consideremos una cubierta ramificada de 5 hojas, el punto base del grupo fundamental de S tendrá 5 preimágenes en la cubierta que podemos numerar. Cada levantamiento de X_i comenzando en una preimagen del punto base finaliza en otra preimagen del punto base. Tenemos definida así una aplicación $\psi : \pi_1(S) \rightarrow S_5$ de forma que si X_i lleva la preimagen j a la k entonces $\psi(X_i)(j) = k$.

Sea la preimagen numerada como 0 el punto considerado como base de homotopía de la cubierta sin los puntos de ramificación, $\psi^{-1}(Stab(0))$ serán las proyecciones en S de los lazos del grupo fundamental de la cubierta.

Una transversal de Schreier correspondiente a $\psi^{-1}(Stab(0))$ consiste en las palabras correspondientes a las concatenaciones de lazos cuyos levantamientos llevan la preimagen 0 a la 1, 2, 3, 4, cumpliendo la condición de que el prefijo también ha de pertenecer a la transversal.

Los generadores del grupo fundamental de la cubierta son:

S_{ij} = Camino por la transversal desde 0 hasta i , concatenado con levantamiento de X_j comenzando en i , concatenado con Camino por la transversal hasta 0

Por ejemplo $S_{33} = X_1X_2X_3X_1^{-1}$ o $S_{44} = X_2X_4X_2^{-1}$ y los demás análogos.

NOTA. Existe una interpretación geométrica general de un grupo como una superficie. Dado un grupo con presentación:

$$\langle g_1, \dots, g_n; R_1, \dots, R_q \rangle$$

Podemos considerarlo el grupo fundamental de la superficie obtenida partiendo de un “ramillete” de n círculos, correspondientes a los generadores g_1, \dots, g_n , identificando cada camino R_i con la frontera de un disco D_2 (ver [110]).

Subgrupos de grupos fuchsianos y N.E.C.

Dado una superficie uniformizada por un grupo fuchsiano (o N.E.C.) Γ cada uno de los subgrupos de índice finito Δ define una cubierta ramificada de orden $N = [\Gamma : \Delta]$. Los elementos de Γ actúan sobre las clases por la derecha de Δ en Γ y si numeramos dichas clases tendremos un homomorfismo de grupos $\Gamma \rightarrow S_N$ (siendo S_N el grupo simétrico de orden N). Si la imagen de dicho homomorfismo es transitiva la cubierta es conexa.

Recíprocamente dado un homomorfismo $\Gamma \rightarrow S_N$ de imagen transitiva nos gustaría saber cuando da lugar a una cubierta y conocer las características de la misma.

Conocer exactamente el subgrupo uniformizador, usando Redemeister-Schreier, es enormemente complicado (ver ejemplo 3.3) por lo que sería interesante tener algún método más sencillo que proporcione información parcial tal como la signatura de dicho subgrupo.

Este problema fue resuelto por David Singerman (ver [106], y apartado 4.2) para grupos fuchsianos, y posteriormente, ampliado por Hoare para grupos N.E.C. (ver [61], y apartado 4.5).

En este capítulo se utiliza para todos los casos el método algebraico de Hoare. Aunque para grupos fuchsianos, aparte de no ser el método empleado cuando se resolvió el problema por primera vez, los resultados presentados son triviales (un subgrupo de un grupo discreto de $PSL(2)$ ha de ser discreto) o más fácilmente obtenibles considerando regiones fundamentales (ver [75]). Sin embargo sirve como introducción a las técnicas empleadas para grupos N.E.C.

NOTA. Aunque normalmente empleamos letras griegas (Γ, Δ) para los grupos fuchsianos y N.E.C. es este capítulo se emplearán letras latinas (F, G) para enfatizar el predominio del carácter algebraico de los desarrollos sobre su interpretación geométrica.

4.1. Subgrupos de índice finito de grupos fuchsianos

Esta sección se basa en la referencia [62], la generalización para subgrupos de índice infinito se estudia en la referencia [63].

Hemos visto (sección 2.4.1.2) que un grupo fuchsiano de primera clase admite una presentación:

$$F = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r, p_1, \dots, p_s; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_r^{\gamma_r}, p_1^{-1} \dots p_s^{-1} x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

Donde a_i, b_i son elementos hiperbólicos correspondientes a una base del grupo fundamental de la superficie que define F , x_i son elementos elípticos de orden γ_i , y los p_i son elementos parabólicos.

Un subgrupo de F que sea un grupo fuchsiano dará lugar a una superficie que será un recubrimiento de la generada por F , por tanto nos interesa analizar los subgrupos de F .

Si $s > 0$, eliminando (mediante una transformación de Tiezste):

$$p_1 = p_2^{-1} \dots p_s^{-1} x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$$

Vemos que F es un producto libre de grupos cíclicos y, por el teorema de subgrupos de Kurosh (ver [16]), todos sus subgrupos también lo son. Nos centraremos por tanto en grupos fuchsianos del tipo:

$$F = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_r^{\gamma_r}, x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

Vamos a considerar un tipo de grupo más general con presentación:

$$G = \langle a_1, \dots, a_k; R_1, \dots, R_m \rangle$$

siendo a_i los generadores y R_i las relaciones.

Decimos que dos relaciones R_i, R_j están conectadas si existe una secuencia de relaciones $R_i = r_0, \dots, r_m = R_j$ tales que r_k, r_{k+1} comparten al menos un generador. Esto define una relación de equivalencia en las relaciones, tendremos:

PROPOSICIÓN 4.1.1. *Sea $G = \langle a_1, \dots, a_k; R_1, \dots, R_m \rangle$, G es un producto libre de los grupos definidos mediante:*

- *Relaciones: Cada una de las clases de equivalencia respecto a la conexión.*
- *Generadores: Los que aparecen en las relaciones de cada clase (los generadores que no aparecen en ninguna relación dan lugar a un grupo libre).*

PROPOSICIÓN 4.1.2. *Sea $G = \langle a_1, \dots, a_k; R_1^{\alpha_1}, \dots, R_m^{\alpha_m} \rangle$ tal que cada $\alpha_i > 0$ y cada a_i aparece en el conjunto de las relaciones raíz R_i (es decir en la*

palabra $R_1 \dots R_m$) una vez con exponente 1 y otra con exponente -1 . Entonces G es un producto libre de un grupo libre y grupos fuchsianos.

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior basta demostrarlo para el caso en que las relaciones forman una sola clase de conexión.

Si podemos cambiar, mediante transformaciones de Tietze, la presentación de G a una del tipo:

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r, d_1, \dots, d_s; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_r^{\gamma_r}, (x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g])^\gamma \rangle$$

Estará demostrada la proposición.

En efecto, si $\gamma = 1$ este grupo es obviamente el producto libre del grupo fuchsiano:

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_r^{\gamma_r}, x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

por el grupo libre $\langle d_1, \dots, d_s \rangle$.

Y si $\gamma > 1$ hacemos $e = x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ y G es el producto libre del grupo fuchsiano:

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r, e; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_r^{\gamma_r}, e^\gamma, e^{-1} x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

por el grupo libre $\langle d_1, \dots, d_s \rangle$.

Supongamos que R_1, R_2 son relaciones distintas de G que contienen a_1 , se podrá poner $R_1 = R_{11} a_1 R_{12}, R_2 = R_{21} a_1^{-1} R_{22}$.

Si definimos un nuevo generador $e = R_1$ y hacemos la sustitución $a_1 = R_{11}^{-1} e R_{12}^{-1}$ tendremos una presentación equivalente:

$$G = \langle e, a_2, \dots, a_k; e^{\alpha_1}, (R_{21} R_{12} e^{-1} R_{11} R_{22})^{\alpha_2}, R_3^{\alpha_3}, \dots, R_m^{\alpha_m} \rangle$$

y cada generador a_i sigue ocurriendo, en el conjunto de relaciones, exactamente una vez con exponente 1 y otra con exponente -1 , además las relaciones siguen formando una única clase de conexión.

Si algún otro generador, por ejemplo a_m , aparece en la relación raíz R_1 una vez con exponente 1 y otra con exponente -1 esto mismo ocurrirá en la nueva relación raíz $R_{21} R_{12} e^{-1} R_{11} R_{22}$.

Repetiendo este procedimiento llegamos a una presentación (renumerando los generadores si es necesario) en la que todos las relaciones menos una son potencia de un generador es decir:

$$G = \langle e_1, \dots, e_{m-1}, a_m, \dots, a_k; e_1^{\alpha_1}, e_2^{\alpha_2}, \dots, e_{m-1}^{\alpha_{m-1}}, R^{\alpha_m} \rangle$$

y cada generador e_i ocurre en R exactamente una vez con exponente -1 , mientras que cada a_j ocurre 2 veces una con exponente 1 y otra con exponente -1 .

Sea R' una relación del tipo:

$$R' = w_1 w_1^{-1} \dots w_q w_q^{-1} z_1^{-1} \dots z_r^{-1} S[x_1, y_1] \dots [x_s, y_s] \quad r, s \geq 0$$

Donde w, x, y son generadores a_i (o sus inversos), los z son e_i (o sus inversos), y los generadores en S no son ninguno de los w, z, x, y .

Vamos a transformar R' reduciendo la subpalabra S pero manteniendo la misma estructura, de esta forma llegaremos a la presentación deseada y estará demostrada la proposición (notar que R es de tipo R' haciendo $S = R$).

Sea α uno de los generadores presentes en S o su inverso, cuando el par $\alpha\alpha^{-1}$ ocurre en S lo cambiamos de sitio, es decir si $R' = P\alpha\alpha^{-1}Q$ ponemos $R' = \alpha\alpha^{-1}PQ$ (no lo eliminamos para que se siga cumpliendo que cada generador aparece dos veces) de esta manera mantenemos el tipo de R' y reducimos la subpalabra S .

Si α^{-1} aparece en S pero no α (α será entonces uno de los e_i) podemos poner $R' = AB\alpha^{-1}C$ y definiendo $z_0 = B\alpha B^{-1}$ tendremos $R' = Az_0^{-1}BC$ y con lo que seguimos manteniendo el tipo de R' (sustituyendo $e_j^{\alpha_j}$ por $z_0^{\alpha_j}$ siendo $e_j = \alpha$) y reducimos S .

Una vez eliminados estos casos, quedan los símbolos α tales que α y α^{-1} aparecen como símbolos no consecutivos en S . Entre ellos habrá un par que aparezca a una distancia mínima. Ponemos $R' = A\alpha y B\alpha^{-1}C y^{-1}D$ e introduciendo el generador $y_0 = yB$ y eliminando el generador y obtenemos $R' = A\alpha y_0 \alpha^{-1}C B y_0^{-1}D$.

Si ahora introducimos $x_0 = B^{-1}C^{-1}\alpha$ y eliminamos α tenemos que $R' = ACB[x_0, y_0]D$ y finalmente introduciendo $x_{s+1} = D^{-1}x_0 D$ y $y_{s+1} = D^{-1}y_0 D$ conseguimos $R' = ACBD[x_{s+1}, y_{s+1}]$ que mantiene el tipo de la relación y reduce la subpalabra S . Con lo que, por inducción, queda demostrada la proposición. \square

PROPOSICIÓN 4.1.3. *Sea $G = \langle a_1, \dots, a_k; R_1, \dots, R_m \rangle$ una presentación tal que cada a_i ocurre en el conjunto de relaciones p_i veces con exponente $+1$ y n_i veces con exponente -1 . Sea H un subgrupo de G , y τ un proceso de reescritura de Reidemeister-Schreier (siendo $\{K, L\}$ los representantes de Schreier de H en G (transversal de Schreier)) de modo que H tiene una presentación:*

$$H = \langle \dots, s_{K a_i}, \dots; \dots, s_{L a_j}, \dots, \tau(K R_q K^{-1}), \dots \rangle$$

donde denotamos por La_j a los subíndices correspondientes a palabras tales que tanto L como La_j son representantes de Schreier (La_j es libremente igual a $(La_j)^*$).

Entonces cada generador s_{Ma_i} ocurre en el conjunto $\{\tau(KR_qK^{-1})\}$ p_i veces con exponente $+1$ y n_i veces con exponente -1 .

DEMOSTRACIÓN. Vamos a calcular $\tau(KR_qK^{-1})$ reescribiendo sólo los símbolos de R_q , dado que podemos prescindir de la palabra inicial y final (ver observación 3.1.2).

Fijemos R_q , cada s_{Ma_i} ocurre en el conjunto $\{\tau(KR_qK^{-1})\}$ las mismas veces que ocurre a_i en R_q .

En efecto sea $A_q a_i$ la palabra inicial de R_q hasta llegar a un a_i entonces s_{Ma_i} ocurre en $\{\tau(KR_qK^{-1})\}$, en la misma posición, para un solo $K = (MA_q^{-1})^*$. Análogamente para a_i^{-1} (pues $\tau(KR_q^{-1}K^{-1}) = [\tau(KR_qK^{-1})]^{-1}$). \square

DEFINICIÓN 4.1.1. Sea $G = \langle a_1, \dots, a_k; R_1^{\alpha_1}, \dots, R_m^{\alpha_m} \rangle$, (cada $\alpha_i > 0$) y H un subgrupo de G . Dada una palabra w se define el exponente de R_i relativo a w (que denotaremos $e_i(w)$) como el menor número positivo e tal que R_i^e pertenece a $w^{-1}Hw$.

Dado que $1 \equiv R_i^{\alpha_i} \in w^{-1}Hw$ tenemos que $e_i(w)$ es un divisor de α_i . Por tanto en la reescritura de Reidemeister-Schreier:

$$\tau(KR_i^{\alpha_i}K^{-1}) = \tau(KR_i^{e_i(K)}K^{-1}) \dots \left(\frac{\alpha_i}{e_i(K)}\right) \dots \tau(KR_i^{e_i(K)}K^{-1})$$

$$\tau(KR_i^{e_i(K)}K^{-1}) = \tau(KR_i(KR_i)^{* -1}) \tau((KR_i)^* R_i (KR_i^2)^{* -1}) \dots \tau((KR_i^{e_i(K)-1})^* R_i K^{-1})$$

Si $K^{-1}R_i^e K \in H$ entonces $K^{-1}R_i^{-m}R_i^e R_i^m K \in H$, luego si $L = (KR_i^m)^*$ tendremos que $e_i(L) = e_i(K)$ y por la fórmula anterior vemos que $\tau(LR_i^{e_i(L)}L^{-1})$ es una permutación cíclica de $\tau(KR_i^{e_i(K)}K^{-1})$.

Ahora bien $L = (KR_i^m)^*$ es equivalente a $HL = HKR_i^m$, y multiplicando por la derecha por R_i^t obtenemos $HL \langle R_i \rangle = HK \langle R_i \rangle$ siendo $\langle R_i \rangle$ el grupo cíclico generado por R_i . Así el número de tales L será el número de elementos en la clase doble (por la derecha e izquierda, “double coset” ver [16]) $HK \langle R_i \rangle$ en G , que es por definición $e_i(K)$.

PROPOSICIÓN 4.1.4. Sea $G = \langle a_1, \dots, a_k; R_1^{\alpha_1}, \dots, R_m^{\alpha_m} \rangle$, H subgrupo de G y τ una reescritura de Reidemeister-Schreier con representantes $\{K\}$. Sea $\{Q\}$ un subconjunto de los mismos que forman un conjunto completo de representantes de las clases dobles $(H, \langle R_i \rangle)$ en G (“double coset”). Entonces:

$$H = \langle \dots, s_{Ka_i}, \dots; \dots s_{La_j}, \dots, (\tau(QR_q^{e_q(Q)}Q^{-1}))^{\frac{\alpha_q}{e_q(Q)}}, \dots \rangle$$

Además si cada generador a_i ocurre en el conjunto $\{R_i\}$ p_i veces con exponente $+1$ y n_i veces con exponente -1 entonces s_{Ma_i} ocurre en el conjunto $\{\tau(QR_q^{e_q(Q)}Q^{-1})\}$ p_i veces con exponente $+1$ y n_i veces con exponente -1 .

DEMOSTRACIÓN. Si eliminamos las relaciones redundantes (permutaciones cíclicas) anteriormente comentadas, vemos que H tiene la presentación indicada.

Supongamos que a_i ocurre p_{iq} veces en R_q con exponente $+1$ (tendremos $p_i = \sum_q p_{iq}$). Hemos visto (4.1.3) que s_{Ma_i} ocurre p_{iq} veces en $\{\tau(KR_qK^{-1})\}$ (q fijo) y por tanto ocurrirá $\alpha_q p_{iq}$ veces en $\{\tau(KR_q^{\alpha_q}K^{-1})\}$.

Sea p_{iqQ} el número de veces que s_{Ma_i} aparece con exponente $+1$ en la palabra $\tau(QR_q^{e_q(Q)}Q^{-1})$, ocurrirá $\frac{\alpha_q}{e_q(Q)} p_{iqQ}$ veces en $\tau(KR_q^{\alpha_q}K^{-1})$ para cada K en el conjunto $HQ < R_q >$ (debido a que $\tau(KR_q^{\alpha_q}K^{-1}) = [\tau(KR_q^{e_q(K)}K^{-1})]_{e_q(Q)}^{\alpha_q}$) por tanto:

$$\alpha_q p_{iq} = \sum_{HQ < R_q >} \frac{\alpha_q}{e_q(Q)} p_{iqQ} = \alpha_q p_{iqQ}$$

luego $p_{iq} = p_{iqQ}$ y como el número total de apariciones de s_{Ma_i} es $\sum p_{iqQ} = \sum p_{iq} = p_i$, y análogamente para el caso de n_i , queda demostrada la proposición. \square

DEFINICIÓN 4.1.2. Sea $G = \langle a, b, c, \dots; R_1, R_2, \dots \rangle$ y $E = \{a, a^{-1}, b, \dots\}$ el conjunto de generadores y sus inversos. Dos elementos x, y de E se denominan $1_$ coinciales si $x^{-1}y$ ocurre en alguna palabra $W = R_i R_i$ (o, lo que es lo mismo, en R_i escrita circularmente). Se dirá que x, y son coinciales si existe una secuencia $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$ tales que z_i, z_{i+1} son $1_$ coinciales.

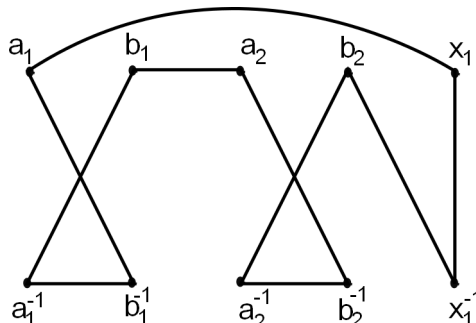
OBSERVACIÓN. Claramente la coincialidad es una relación de equivalencia en E , que denotaremos \bowtie .

DEFINICIÓN 4.1.3. Una aplicación $\varphi : E \rightarrow S$, siendo S un conjunto cualquiera, se dice que es una asignación de vértices cuando $x \bowtie y \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$. Una asignación se dice maximal cuando $x \bowtie y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$.

DEFINICIÓN 4.1.4. El grafo coincial de G es el grafo cuyos vértices son los elementos de E , y las aristas unen los vértices que son $1_$ coinciales. El número de componentes conexas de dicho grafo será el número de clases de equivalencia de coincialidad (ver [60] para un estudio de los grafos coinciales).

Por ejemplo en el grupo $\langle a, b; abab \rangle$ tenemos 2 clases de equivalencia $\{a^{-1}, b\}$ y $\{a, b^{-1}\}$.

El grafo coincial de $F = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, x_1; x_1^3, x_1^{-1}[a_1, b_1][a_2, b_2] \rangle$ es un ciclo tal y como se ve en la figura:



PROPOSICIÓN 4.1.5. *Sea $G = \langle a_1, a_2, a_3, \dots; R_1, R_2, \dots \rangle$ tal que tiene una asignación de vértices maximal v con p vértices. Si H es un subgrupo de G de índice finito N , la presentación de Reidemeister-Schreier de H tiene una asignación maximal de $N(p-1) + 1$ vértices.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos el grupo auxiliar:

$$\tilde{H} = \langle \dots, s_{Ka_i}, \dots; \tau(KR_iK^{-1}), \dots \rangle$$

Que se obtiene a partir de H eliminando las $(N-1)$ relaciones s_{La_i} para $La_i \approx (La_i)^*$ (libremente iguales).

Definimos las aplicaciones ρ, σ :

$$\begin{aligned} \rho(s_{Ka_i}^\alpha) &= (Ka_i^{(1-\alpha)/2})^* \\ \sigma(s_{Ka_i}^\alpha) &= v(a_i^\alpha) \quad \alpha = \pm 1 \end{aligned}$$

Si $s_{Ka_i}^\alpha, s_{La_j}^\beta$ ($\alpha, \beta = \pm 1$) son 1-coinciales entonces $s_{Ka_i}^{-\alpha} s_{La_j}^\beta$ es una subpalabra de alguna de las $\tau(MR_kM^{-1})\tau(MR_kM^{-1}) = \tau(MR_kR_kM^{-1})$ luego $R_kR_k = Pa_i^{-\alpha} a_j^\beta Q$ y a_i^α y a_j^β son 1-coinciales, teniendo la misma imagen por v .

Además $K = (MPa_i^{(-\alpha-1)/2})^*$ y $L = (MPa_i^{-\alpha} a_j^{(\beta-1)/2})^*$ luego $\rho(s_{Ka_i}^\alpha) = \rho(s_{La_j}^\beta) = (MPa_i^{-\alpha})^*$.

Por tanto (ρ, σ) es una asignación de vértices.

Dicha asignación tendrá pN vértices. Para ver que es maximal supongamos que $\rho(s_{Ka_i}^\alpha) = \rho(s_{La_j}^\beta)$ y $\sigma(s_{Ka_i}^\alpha) = \sigma(s_{La_j}^\beta)$.

Como v es una asignación maximal a_i^α y a_j^β son coinciales.

Supongamos que a_i^α y a_k^δ son 1-coinciales existirá un representante Q tal que $s_{Ka_i}^\alpha$ y $s_{Qa_k}^\delta$ son 1-coinciales porque si $R_mR_m = Pa_i^\alpha a_k^\delta Q$ y $M = (Ka_i^{(\alpha+1)/2} P^{-1})^*$ entonces $s_{Ka_i}^{-\alpha} s_{Qa_k}^\delta$ es una subpalabra de $\tau(MR_mR_mM^{-1})$.

Así podemos encontrar $s_{Ta_j}^\beta$ coincial con $s_{Ka_i}^\alpha$, cumpliéndose que $\rho(s_{Ka_i}^\alpha) = \rho(s_{La_j}^\beta) = \rho(s_{Ta_j}^\beta)$ lo que implica que $L = T$ y que $s_{Ka_i}^\alpha$ y $s_{La_j}^\beta$ son coinciales. Por tanto la asignación es maximal.

Volvamos ahora al grupo:

$$H = \langle \dots, s_{Ka_i}, \dots; \dots, s_{La_j}, \dots, \tau(KR_iK^{-1}), \dots \rangle$$

Cada relación del tipo s_{La_j} da lugar a $s_{La_j} \bowtie s_{La_j}^{-1}$ y puede, a lo sumo, juntar dos clases de equivalencia, por tanto el número de clases coinciales será por lo menos $Np - (N - 1)$.

Vamos a asociar un grafo dirigido $\tilde{\Gamma}$ (con tantos vértices como clases coinciales) a la presentación \tilde{H} , los vértices serán $(\rho, \sigma)(s_{Ma_i}^{\pm 1})$ y las aristas serán los elementos $s_{Ma_i}^\epsilon$ que unen el vértice $(\rho, \sigma)(s_{Ma_i}^\epsilon)$ con el vértice $(\rho, \sigma)(s_{Ma_i}^{-\epsilon})$.

Sea Γ el grafo obtenido a partir de $\tilde{\Gamma}$ colapsando las aristas del tipo s_{La_j} , su número de vértices coincidirá con el número de clases coinciales de la presentación H .

Una transversal de Schreier da lugar a un árbol Σ contenido en el grafo de Schreier. Si consideramos el subgrafo Δ de Γ formado por las aristas s_{La_j} , podemos definir una aplicación $\Delta \rightarrow \Sigma$ que envía cada vértice $(\rho(s_{La_j}^\alpha), \sigma(s_{La_j}^\alpha))$ a $\rho(s_{La_j}^\alpha)$ (que es un representante de Schreier), cada arista s_{La_j} a la arista que une L con $La_j = (La_j)^*$ y cada arista $s_{La_j}^{-1}$ a la arista que une La_j con L .

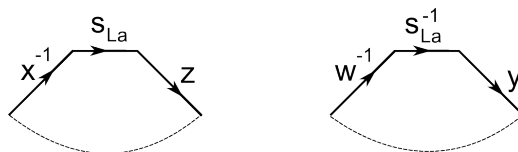
Esta aplicación aplicaría ciclos no triviales de Δ en ciclos no triviales de Σ (que no existen al ser un árbol).

Por tanto Δ no tiene ciclos no triviales y al colapsar $(N - 1)$ aristas reduciremos los vértices en $(N - 1)$ con lo que queda demostrada la proposición. \square

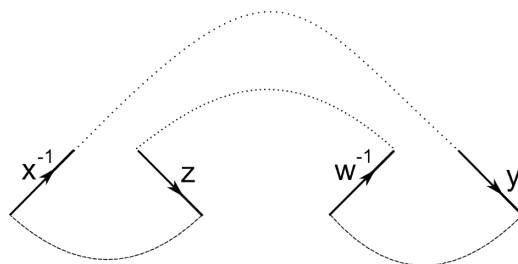
Si eliminamos los generadores s_{La_i} el número de vértices de una asignación maximal puede cambiar. Sin embargo:

PROPOSICIÓN 4.1.6. *Sea $G = \langle a_1, \dots, a_k; R_1^{\alpha_1}, \dots, R_m^{\alpha_m} \rangle$ $\alpha_i > 0$ un grupo con un grafo coincial consistente en un ciclo y en el cada generador ocurre a lo sumo dos veces en las relaciones raíz, sea H un subgrupo de índice finito N . si eliminamos los generadores s_{La_j} de la presentación de Reidemeister-Schreier la presentación resultante tiene una asignación de vértices maximal con un solo vértice.*

DEMOSTRACIÓN. En este caso el grafo coincial de \tilde{H} consistirá en N ciclos y por la demostración anterior cada s_{La_i} estará en un ciclo distinto del que está $s_{La_i}^{-1}$.



Por tanto tendremos palabras $xs_{La_i}y$ y $ws_{La_i}^{-1}z$. Si eliminamos los $s_{La_i}^{\pm 1}$ darán lugar al ciclo:



Con lo cual colapsamos dos ciclos en uno. Como hay $N - 1$ generadores s_{La_i} al finalizar tendremos un solo ciclo. \square

TEOREMA 4.1.1. *Sea $G_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g; [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$ ($g > 1$), un grupo que uniformiza una superficie de Riemann de género g , y H un subgrupo de índice finito N entonces H admite una presentación:*

$$H = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{N(g-1)+1}, \beta_{N(g-1)+1}; [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_{N(g-1)+1}, \beta_{N(g-1)+1}] \rangle$$

y uniformiza una superficie de Riemann de género $N(g - 1) + 1$.

DEMOSTRACIÓN. G_n satisface las hipótesis de la proposición 4.1.6, por tanto usando la presentación reducida (eliminando s_{La_i}) de Reidemeister-Schreier tenemos una asignación maximal de un vértice y las relaciones forman una única clase de conectividad. Además por la proposición 4.1.3 cada uno de los generadores de H aparece una vez con exponente $+1$ y otra con -1 en las relaciones.

Aplicando la proposición 4.1.2 vemos que no puede haber “grupo libre” (sus generadores no aparecerían en ninguna relación). Además la asignación de vértices puede transferirse a la presentación resultante de cada transformación de Tietze que se usa para llegar al resultado de la proposición 4.1.2 sin alterar el número de vértices.

Así llegamos a una presentación de H con sólo una relación (pues H no tiene elementos de orden finito) y una asignación maximal con un vértice. Claramente dicha presentación ha de ser:

$$H = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_m, \beta_m; [\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_m, \beta_m] \rangle$$

Como G_n tiene $2n$ generadores y 1 relación, la presentación de Reidemeister-Schreier de H tiene $2gN$ generadores y $2N - 1$ relaciones ($N - 1$ de tipo sLa_j). Además cada $\tau(KRK^{-1})$ contiene un generador que no es del tipo sLa_j , así cuando eliminamos estos generadores tenemos $2gN - N + 1$ generadores y N relaciones.

Ninguna de las transformaciones de Tietze usadas en la demostración de la proposición 4.1.2 cambia la diferencia entre generadores y relaciones (al final quedará únicamente una) que es $2N(g - 1) + 1$ por tanto $2m = 2N(g - 1) + 2$. \square

TEOREMA 4.1.2. *Sea*

$$F = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_t; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_t^{\gamma_t}, x_1^{-1} \dots x_t^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

($g > 1$) y H un subgrupo de F de índice finito N . Entonces H admite una presentación del mismo tipo.

DEMOSTRACIÓN. F satisface las hipótesis de la proposición 4.1.6, por tanto usando la presentación reducida (eliminando los generadores sLa_i) de Reidemeister-Schreier tenemos una asignación maximal de un vértice y las relaciones forman una única clase de conectividad. Además la eliminación de las relaciones que son permutaciones cíclicas de las que permanecen no cambia la asignación de vértices.

Por la proposición 4.1.4 vemos que H tiene una presentación:

$$H = \langle \dots, sKa_i, \dots; (\tau(QR_q^{\epsilon_q(Q)}Q^{-1}))^{\frac{\alpha_q}{\epsilon_q(Q)}}, \dots \rangle$$

en la que cada uno de los generadores de H aparece una vez con exponente $+1$ y otra con -1 en las relaciones, aplicando la proposición 4.1.2 vemos que H tiene una presentación del mismo tipo que F . \square

DEFINICIÓN 4.1.5. Dada una presentación $G = \langle a_1, \dots, a_k; R_1^{\alpha_1}, \dots, R_m^{\alpha_m} \rangle$ se define la *Deficiencia* de la presentación como:

$$\delta(G) = k - m \quad \text{diferencia entre número de generadores y de relaciones.}$$

y la *Medida* como:

$$\mu(G) = \delta(G) - 1 + \sum_{q=1}^m \left(1 - \frac{1}{\alpha_q}\right)$$

TEOREMA 4.1.3. *Sea F un grupo fuchsiano con presentación:*

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r, p_1, \dots, p_s; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_r^{\gamma_r}, p_1 \dots p_s x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

y H un subgrupo de índice finito N . Entonces H es también un grupo fuchsiano y $\mu(H) = N\mu(F)$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que F tiene una presentación:

$$F = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_r^{\gamma_r}, x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

según el teorema anterior H será fuchsiano, y ninguna de las transformaciones de Tiezte usadas en la proposición 4.1.2 para llegar a la presentación canónica (ver sección 2.4.1.2), cambian la medida ni la deficiencia.

La deficiencia y medida de F son:

$$\delta(F) = 2g - 1 \quad \mu(F) = 2g - 2 + \sum_{q=1}^r \left(1 - \frac{1}{\gamma_q}\right) = 2g - 2 + \sum_{q=1}^{r+1} \left(1 - \frac{1}{\gamma_q}\right) \text{ con } \gamma_{r+1} = 1$$

Según la proposición 4.1.4 una presentación de H será:

$$H = \langle \dots, s_{K a_i}, s_{K b_i} \dots; \dots s_{L a_j}, s_{M b_j} \dots, (\tau(Q R_q^{e_q(Q)} Q^{-1}))^{\frac{\gamma_q}{e_q(Q)}}, \dots \rangle$$

Que tiene una deficiencia y una medida:

$$\begin{aligned} \delta(H) &= (2g+r)N - (N-1) - \sum_Q (r+1) & \mu(H) &= \delta - 1 + \sum_{q=1}^{r+1} \sum_Q \left(1 - \frac{e_q(Q)}{\gamma_q}\right) \\ \mu(H) &= N(2g+r-1) - \sum_{q=1}^{r+1} \sum_Q \frac{e_q(Q)}{\gamma_q} & &= N(2g+r-1) - \sum_{q=1}^{r+1} \frac{1}{\gamma_q} \sum_Q e_q(Q) \end{aligned}$$

Pero $\sum_Q e_q(Q) = N$ pues $\{Q\}$ forman un conjunto completo de representantes de $G \text{ mod } (H, \langle R_i \rangle)$ luego:

$$\begin{aligned} \mu(H) &= N(2g+r-1) - N \sum_{q=1}^{r+1} \frac{1}{\gamma_q} = N \left[(2g+r-1) - \sum_{q=1}^{r+1} \frac{1}{\gamma_q} \right] = \\ &= N \left[(2g+r-1) - \sum_{q=1}^{tr+1} \frac{1}{\gamma_q} \right] = N \left[(2g+r-1) - \sum_1^{r+1} 1 + \sum_{q=1}^{r+1} \left(1 - \frac{1}{\gamma_q}\right) \right] = N\mu(F) \end{aligned}$$

Ahora si

$$F = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r, p_1, \dots, p_s; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_r^{\gamma_r}, p_1^{-1} \dots p_s^{-1} x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

eliminando p_1 tenemos la presentación (con la misma medida):

$$F = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r, p_2, \dots, p_s; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_r^{\gamma_r} \rangle$$

La presentación que obtenemos de H , por un cálculo análogo al anterior, tiene una medida $\mu(H) = N\mu(F)$.

Si eliminamos los generadores (y a la vez relaciones) s_{La_i} obtenemos otra presentación equivalente a H con la misma medida y tal que cada generador ocurre a lo sumo una vez en el conjunto de relaciones raíz.

Sea R una relación raíz si introducimos un generador $g = R$ y eliminamos uno de los generadores que aparecen en R obtenemos una presentación equivalente con la misma medida que H . Continuando con este procedimiento llegamos a una presentación que sigue cumpliendo $\mu = N\mu(F)$, y que es un producto libre de grupos cíclicos. Además si un generador es a su vez una relación lo podemos eliminar sin cambiar la medida.

Si quedan elementos cíclicos infinitos c_1, \dots, c_r introducimos generador $d^{-1} = c_1 \dots c_r$ y relación $dc_1 \dots c_r$ que no cambia la medida y obtenemos una representación fuchsiana canónica que cumplirá lo enunciado en el teorema. \square

NOTA. Aunque no se han querido emplear argumentos geométricos, la medida, para F grupo fuchsiano de primera clase con presentación canónica, es el área hiperbólica, dividida por 2π , del polígono fundamental de F . Pues tendremos deficiencia $\delta(F) = 2g + s - 1$ y medida $\mu(F) = 2g + s - 2 + \sum_{q=1}^r (1 - \frac{1}{\gamma_q})$ (ver sección 2.4.1.2)

4.2. Subgrupos fuchsianos y grupos de permutaciones

Esta sección se basa en [106]. Denotaremos S_N al grupo de permutaciones de N elementos.

Vamos a considerar una superficie uniformizada por un grupo fuchsiano F con signatura $(g, m_1, m_2, \dots, m_r; s; t)$ (ver sección 2.4.1.2) o sea con una presentación:

$$F = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r, p_1, \dots, p_s, h_1, \dots, h_t; \\ ; x_1^{\gamma_1}, \dots, x_r^{\gamma_r}, h_1^{-1} \dots h_t^{-1} p_1^{-1} \dots p_s^{-1} x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

Hemos visto en la sección anterior que cada subgrupo H de índice finito N de F es también fuchsiano, tiene una presentación del mismo tipo, y se cumple la relación entre medidas: $\mu(H) = N\mu(F)$.

La respuesta a ¿cuales son las posibles signaturas de H ? la proporciona el siguiente teorema:

TEOREMA 4.2.1. *Sea F un grupo fuchsiano con signatura*

$$(g, m_1, m_2, \dots, m_r; s; t)$$

existirá un subgrupo H de índice N con signatura

$$(g'; n_{11}, \dots, n_{1l_1}, n_{21}, \dots, n_{2l_2}, \dots, n_{r1}, \dots, n_{rl_r}; s'; t')$$

si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. *Existe un subgrupo transitivo G de S_N y un epimorfismo $\theta : F \rightarrow G$ tal que la permutación $\theta(x_j)$ tiene l_j ciclos de longitudes $\frac{m_j}{n_{j1}}, \dots, \frac{m_j}{n_{jl_j}}$*
2. $s' = \sum_{k=1}^s$ *Número de ciclos de la permutación $\theta(p_k)$*
3. $t' = \sum_{k=1}^t$ *Número de ciclos de la permutación $\theta(h_k)$*
4. g' *es tal que $\mu(H) = N\mu(F)$*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe G con las condiciones requeridas, y sea $G_0 \subset G$ el estabilizador de un elemento cualquiera de $S_N = \{0, \dots, N-1\}$. Al ser G transitivo G_0 es un subgrupo de índice N y el subgrupo $H = \theta^{-1}(G_0)$ es un subgrupo de F también de índice N .

Denotamos $\{H\alpha_0, \dots, H\alpha_{N-1}\}$ a las clases por la derecha de H en F . Un elemento $\gamma \in F$ induce una permutación $H\alpha_i \rightarrow H(\alpha_i\gamma) = H\alpha_j$ en dichas clases. El elemento $\theta(\gamma) = g \in G$ induce la misma permutación en las clases $\{G_0g_0, \dots, G_0g_{N-1}\}$ (siendo $g_i = \theta(\alpha_i)$), al ser θ un homomorfismo.

Todas las longitudes de los ciclos de la permutación $\theta(x_j)$ han de dividir a m_j (pues $x_j^{m_j} = 1$). Supongamos que dicha permutación tiene un ciclo de longitud k , existirán k clases $H\gamma_1, \dots, H\gamma_k$ tales que:

$$H\gamma_1x_j = H\gamma_2, H\gamma_2x_j = H\gamma_3, \dots, H\gamma_kx_j = H\gamma_1$$

luego $H\gamma_1x_j^k = H\gamma_1$ así $\gamma_1x_j^k\gamma_1^{-1} \in H$ y $\frac{m_j}{k} = n_{j1}$ será un periodo de H .

Supongamos que la permutación $\theta(x_j)$ tiene otro ciclo de longitud k , como antes existirán clases $H\alpha_1, \dots, H\alpha_k$ tales que $H\alpha_1x_j^k = H\alpha_1$ obteniéndose un elemento elíptico $\alpha_1x_j^k\alpha_1^{-1} \in H$. Si estos elementos fueran conjugados (en cuyo caso no valdrían ambos como generadores de la presentación de H) existiría $\lambda \in H$ tal que:

$$\lambda\alpha_1x_j^k\alpha_1^{-1}\lambda^{-1} = \gamma_1x_j^k\gamma_1^{-1}$$

llamando $y_j = \gamma_1 x_j \gamma_1^{-1}$ tenemos $\lambda \alpha_1 \gamma_1^{-1} y_j^k \gamma_1 \alpha_1^{-1} \lambda^{-1} = y_j^k$ por tanto $\lambda \alpha_1 \gamma_1^{-1}$ conmuta con el elemento elíptico y_j^k , y se cumple $\lambda \alpha_1 \gamma_1^{-1} = y_j^p$ luego:

$$H \alpha_1 = H \lambda^{-1} y_j^p \gamma_1 = H y_j^p \gamma_1 = H \gamma_1 x_j^p \gamma_1^{-1} \gamma_1 = H \gamma_1 x_j^p$$

y ambos serían el mismo ciclo.

Análogamente tampoco es posible obtener las clases de equivalencia de elementos elípticos de dos periodos distintos a partir del mismo ciclo, porque entonces tendríamos:

$$\gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1} \in H \quad \alpha_1 x_j^k \alpha_1^{-1} \in H \quad H \gamma_1 x_j^p = H \alpha_1$$

luego $\alpha_1 x_j^{-p} \gamma_1^{-1} \in H$ y como $\alpha_1 x_j^{-p} \gamma_1^{-1} (\gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1}) \gamma_1 x_j^p \alpha_1^{-1} = \alpha_1 x_j^k \alpha_1^{-1}$ serían conjugados en H .

Así por cada ciclo de longitud k menor que m_j en la permutación $\theta(x_j)$ tenemos un único periodo $n_{ji} = \frac{m_j}{k}$ en H inducido por m_j .

Recíprocamente si m_j induce un periodo n_{ji} en H es que existe α tal que $\alpha x_j^{\frac{m_j}{n_{ji}}} \alpha^{-1} \in H$ entonces $H \alpha x_j^{\frac{m_j}{n_{ji}}} = H \alpha$ y por tanto $\theta(x_j)$ tendrá un ciclo de longitud $\frac{m_j}{n_{ji}}$.

Los elementos parabólicos e hiperbólicos se tratan de modo similar. Si $\theta(p_i)$ tiene un ciclo de longitud k hay un elemento conjugado de p_i^k en H y tenemos como antes una correspondencia entre ciclos y clases de elementos parabólicos inducidas por p_i .

Además g' ha de tener el valor adecuado para que se cumpla $\mu(H) = N\mu(F)$.

Recíprocamente supongamos que existe H con la signatura deseada, evidentemente se ha de cumplir $\mu(H) = N\mu(F)$.

F actúa como un grupo de permutaciones en las clases por la derecha de H en F . Si asignamos una numeración a dichas clases tenemos definido un homomorfismo $\psi : F \rightarrow S_N$, Sea K el núcleo de dicho homomorfismo, $\frac{F}{K}$ será isomorfo a $G = \text{imag}(\psi) \subset S_n$ y la aplicación inducida $\theta : F \rightarrow \frac{F}{K} \cong G$ será un epimorfismo siendo claro que G tiene las propiedades deseadas. \square

4.3. Subgrupos de índice finito de grupos N.E.C.

Los resultados obtenidos para grupos fuchsianos pueden generalizarse para grupos N.E.C. como se hace en la referencia [64].

Para realizar este análisis vamos a considerar grupos G con una presentación que es una generalización de la canónica de los grupos N.E.C. definida en la sección 2.5.1.

Previamente vamos a modificar ligeramente la definición de grafo coinitial.

Sea P un grupo con presentación $P = \langle a, b, c, \dots; I_1, I_2, \dots, R, S \rangle$

DEFINICIÓN 4.3.1. Un conjunto de relaciones $\{I_i\}$ se dice que es de *relaciones de identificación* si cada relación I_i consiste en el producto de dos generadores y los generadores que aparecen en I_i, I_j son disjuntos.

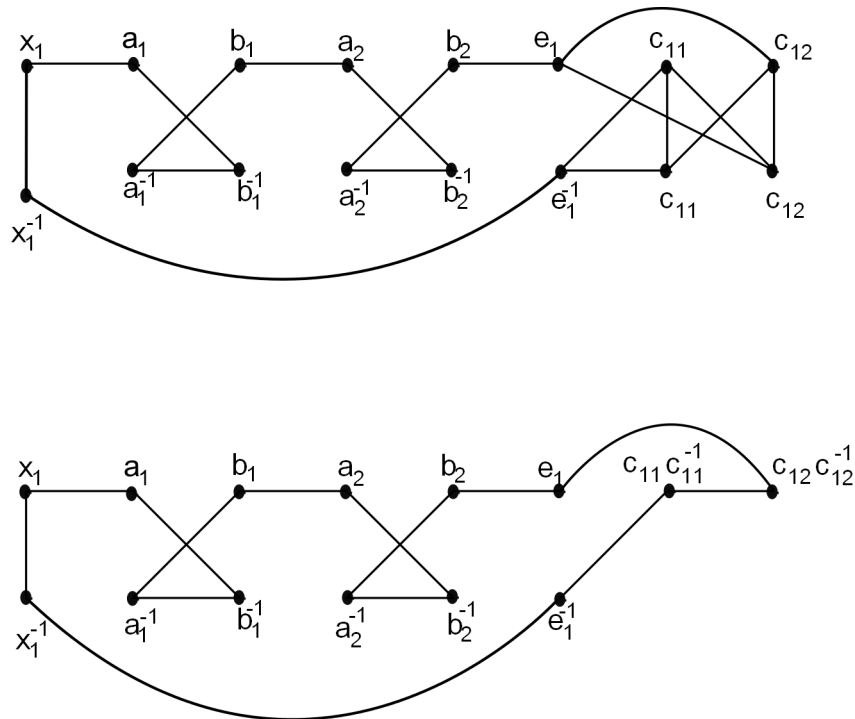
Modificamos la definición de grafo coinitial colapsando en el conjunto E , de generadores y sus inversos (ver 4.1.2), los generadores que aparecen en las relaciones de identificación.

Es decir si xy es una relación de identificación, en E no aparecerán x, y, x^{-1}, y^{-1} y en su lugar aparecerá un elemento $\{x, y^{-1}\}$.

El objetivo de está modificación es que el grafo coinitial de un grupo N.E.C., con la presentación canónica, siga siendo un ciclo.

La forma de construir este grafo a partir del definido anteriormente es ignorar las aristas producidas por las relaciones de identificación y colapsar los elementos de E que son coiciales por las relaciones de identificación.

En la figura se pueden ver los grafos coiciales ordinario y modificado para un grupo N.E.C. con generadores $a_1, b_1, a_2, b_2, x_1, e_1, c_{11}, c_{12}$.



OBSERVACIÓN. Con la nueva definición de grafo coicial el número de vértices del grafo correspondiente a una presentación N.E.C. canónica será

$4g + 2k + 2r + \sum(s_i + 1)$ (en la presentación canónica s_i es el número de grupos diédricos del cicloperíodo siendo el número de reflexiones $s_i + 1$).

OBSERVACIÓN. Sea H es un subgrupo de P y \tilde{H} un grupo definido por la presentación de Reidemeister-Schreier de H de la que se han eliminado las relaciones s_{La_i} (ver demostración de la proposición 4.1.5). Si escogemos como relaciones de identificación de \tilde{H} las reescrituras de las relaciones de identificación de P , por un procedimiento análogo al de la proposición 4.1.5, vemos que el grafo coinitial de \tilde{H} consiste en $[P : H]$ copias del grafo de P .

DEFINICIÓN 4.3.2. Un subgrupo tipo N.E.C. es aquel que tiene una presentación con generadores:

- $y_{ij} \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r_i$
- $z_l \quad 1 \leq l \leq q$

y relaciones:

- y_{ij}^2
- $(y_{ij}A_{ij}y_{ij+1}A_{ij}^{-1})^{n_{ij}} \quad n_{ij} \geq 1$ (definiendo $y_{ir_i+1} = y_{i1}$)
- $R_m^{\gamma_m}$ (a R_m le denominaremos relación raíz) $m = 1 \dots d$

Exigimos que:

1. Ningún y_{ij} aparezca en las relaciones R_j ni en las palabras A_{ij} .
2. Cada generador z_l aparece exactamente 2 veces (como z_l o z_l^{-1}) en $\{A_{ij}\} \cup \{R_m\}$ (*Observación: Se ignoran las apariciones en A_{ij}^{-1}*).
3. El grafo coinitial con y_{ij} como relaciones de identificación es un ciclo.
4. En el conjunto $\{A_{ij}\} \cup \{R_m\}$ existe una colección de generadores de conexión z_l , que aparecen una vez en $\{A_{ij}\}$ y otra vez en $\{R_m\}$, y además aparecen un vez con exponente $+1$ y otra con -1 (Notar que invirtiendo el orden a $y_{ij+1}y_{ij}$ cambiamos de signo a los z_l que aparecen en A_{ij}).

NOTA. Si consideramos la presentación canónica como una presentación tipo N.E.C tendremos $r_i = s_i + 1$ y $n_{ir_i} = 1$ de la relación $c_{is_i+1}e_i c_{i1}e_i^{-1}$

DEFINICIÓN 4.3.3. Se define la medida N.E.C. de una presentación G tipo N.E.C. como:

$$\eta(G) = q - d - 1 + \sum_{i=1}^d \left(1 - \frac{1}{\gamma_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}}\right)$$

NOTA. No confundir con la medida μ definida en 4.1.5, que también es aplicable a grupos N.E.C. (ahora sin un significado geométrico claro). Observar que los $n_{ij} = 1$ no afectan a la medida N.E.C.

La medida N.E.C. de un grupo N.E.C. con la presentación canónica es (ver comentario que sigue al teorema 2.5.6)

$$\alpha g + k - 2 - \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}}\right)$$

Donde $\alpha = 2$ si la superficie definida por el grupo es orientable y $\alpha = 1$ si no lo es. Coincide con el área hiperbólica de dicha superficie dividida por 2π .

PROPOSICIÓN 4.3.1. *Sea G un subgrupo tipo N.E.C. Entonces G tiene una presentación canónica de grupo N.E.C.*

DEMOSTRACIÓN. Introducimos los generadores:

$$c_{ij} = A_{i1} \dots A_{ij-1} y_{ij} A_{ij-1}^{-1} \dots A_{i1}^{-1} \text{ y } e_i = A_{i1} \dots A_{ir_i}$$

Y la relación $e_i^{-1} A_{i1} \dots A_{ir_i}$, para poder eliminar los generadores y_{ij} .

Es inmediato comprobar que la relación y_{ij}^2 se transforma en c_{ij}^2 , además $(y_{ij} A_{ij} y_{ij+1} A_{ij}^{-1})^{n_{ij}}$ pasa a ser $(c_{ij} c_{ij+1})^{n_{ij}}$ pues:

$$\begin{aligned} & (A_{ij-1}^{-1} \dots A_{i1}^{-1} c_{ij} A_{i1} \dots A_{ij-1} A_{ij} A_{ij}^{-1} \dots A_{i1}^{-1} c_{ij+1} A_{i1} \dots A_{ij} A_{ij}^{-1})^{n_{ij}} = \\ & = A_{ij-1}^{-1} \dots A_{i1}^{-1} (c_{ij} c_{ij+1})^{n_{ij}} A_{i1} \dots A_{ij-1} \end{aligned}$$

(si $n_{ij} = 1$ podemos reemplazar c_{ij+1} por c_{ij}).

$(y_{ir_i} A_{ir_i} y_{i1} A_{ir_i}^{-1})^{n_{ir_i}}$ se transforma en:

$$(A_{ir_i-1}^{-1} \dots A_{i1}^{-1} c_{ir_i} A_{i1} \dots A_{ir_i-1} A_{ir_i} c_{i1} A_{ir_i}^{-1})^{n_{ir_i}} = (A_{ir_i-1}^{-1} \dots A_{i1}^{-1} c_{ir_i} e_i c_{i1} e_i^{-1} A_{i1} \dots A_{ir_i-1})^{n_{ir_i}}$$

libremente igual a $(c_{ir_i+1} e_i c_{i1} e_i^{-1})^{n_{ir_i}}$.

Si $n_{ir_i} > 1$ introducimos un nuevo generador $c_{ir_i+1} = e_i c_{i1} e_i^{-1}$ y tendremos como nuevas relaciones $(c_{ir_i} c_{ir_i+1})^{n_{ir_i}}$ y $c_{ir_i+1} e_i c_{i1} e_i^{-1}$.

Ahora introducimos los generadores $x_m = R_m$ y tendremos como nuevas relaciones $x_m^{\gamma_m}$ y $x_m^{-1} R_m$.

Una vez realizadas estas operaciones el grafo coinitial continua siendo un ciclo, si usamos los c_{ij}^2 como relaciones de identificación.

En las relaciones $e_i^{-1} A_{i1} \dots A_{ir_i}$, $x_m^{-1} R_m$ los generadores x_m, e_i aparecen una vez y los de conexión dos veces, podemos por tanto combinar estas relaciones usando los generadores de conexión y empleando un método como el de la proposición 4.1.2 llegamos a una presentación N.E.C. canónica. \square

Observación 4.3.1. Si la superficie determinada por el grupo N.E.C. es orientable, cada generador z_l aparece una vez con exponente 1 y otra con -1 (al ser, en este caso, la relación "larga" de la presentación canónica $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots$).

PROPOSICIÓN 4.3.2. *La medida N.E.C. (ver 4.1.5) de la presentación no cambia con las transformaciones realizadas en la proposición anterior.*

DEMOSTRACIÓN. Es una comprobación directa a partir de la definición. \square

TEOREMA 4.3.1. *Sea G un grupo N.E.C. con la presentación canónica definida en la sección 2.5.1. Si H es un subgrupo de índice finito N entonces H también tiene una presentación N.E.C. canónica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea τ un proceso de reescritura de Reidemeister-Schreier, vamos a demostrar que la presentación de H obtenida mediante este método satisface las condiciones de la proposición anterior.

1. Empezamos considerando las relaciones c_{ij}^2 , darán lugar a relaciones en H de la forma $\tau(Kc_{ij}K^{-1})$ donde K es un representante de Schreier de $HK < c_{ij} >$ (Es decir uno cualquiera del conjunto de representantes de Schreier K de H en G que cumplen $HK < c_{ij} > = HK' < c_{ij} >$).

Existen dos posibilidades: $(Kc_{ij})^* = K$ o $(Kc_{ij})^* \neq K$.

En el primer caso la relación se transforma en $s_{Kc_{ij}}^2$ y en el segundo en $s_{Kc_{ij}}s_{(Kc_{ij})^*c_{ij}}$.

Así los generadores de reflexión (y_{ij}) de H van a ser los $s_{Kc_{ij}}$ tales que $(Kc_{ij})^* = K$ (si existen). En este caso $Kc_{ij}K^{-1} \in H$ y vemos que los generadores de reflexión de H serán conjugados de los c_{ij} . Las relaciones originadas por las relaciones $c_{is_i+1}e_i c_{i1} e_i^{-1}$ (que por simplificar la escritura denotaremos $xeye^{-1}$) para los representantes K y $(Kx)^*$ son:

$$s_{Kx}s_{(Kx)^*e}s_{(Kxe)^*y}s_{Ke}^{-1}$$

$$s_{(Kx)^*x}s_{Ke}s_{(Ke)^*y}s_{(Kx)^*e}^{-1}$$

Pues $(Keye^{-1})^* = (Kx^{-1})^* = (Kx)^*$.

Pero como $s_{Kx}s_{(Kx)^*x}$ es una relación $s_{(Kx)^*x}s_{Ke}s_{(Ke)^*y}s_{(Kx)^*e}^{-1}$ puede reemplazarse por $s_{Kx}^{-1}s_{Ke}^{-1}s_{(Key)^*y}s_{(Kx)^*e}^{-1}$.

La relación $(Key)^* = (Kxe)^*$ es una permutación cíclica de la inversa de $s_{Kx}s_{(Kx)^*e}s_{(Kxe)^*y}s_{Ke}^{-1}$ y así podemos ceñirnos, al caso en que los K son representantes de Schreier de $HK < x >$.

Como antes tenemos dos posibilidades: $(Kx)^* = K$ o $(Kx)^* \neq K$, ahora bien $(Kx)^* = K$ si y sólo si $(Kxe)^* = (Ke)^*$ luego $(Kxy)^* =$

$(Key)^* = (Kxe)^*$ y por tanto s_{Kx} y $s_{(Kxe)^*y}$ serán ambos generadores de reflexión (y_{ij}) o no lo será ninguno. Si ambos lo son la relación obtenida es del tipo $(y_{ij}A_{ij}y_{ij+1}A_{ij}^{-1})^{n_{ij}}$.

2. Consideramos ahora las relaciones originadas por $(xy)^n$ (x, y generan un subgrupo diédrico).

Estas serán $\tau(K(xy)^nK^{-1})$ siendo K representante de Schreier de $HK < xy >$.

Sea m el menor entero positivo tal que $K(xy)^mK^{-1} \in H$, que dividirá a n , entonces $\tau(K(xy)^nK^{-1}) = [\tau(K(xy)^mK^{-1})]^{\frac{n}{m}}$ y los símbolos que obtenemos son de los tipos:

$$s_{(K(xy)^r)^*x} \quad s_{(K(xy)^rx)^*y}$$

- Supongamos que K es tal que $HK < xy > \neq HKx < xy >$ entonces $(K(xy)^rx)^* \neq (K(xy)^r)^*$ y ninguno de los símbolos es un y_{ij} . Como es inmediato comprobar que $\tau((Kx)^*(xy)^n(Kx)^{* - 1})$ es una permutación cíclica de $\tau(K(yx)^nK^{-1})$ que resulta (usando que $s_{Kx}s_{(Kx)^*x} = 1$) de $\tau(K(y^{-1}x^{-1})^nK^{-1})$, basta considerar la relación $\tau(K(xy)^nK^{-1})$, que es del tipo $R_k^{\frac{n}{m}}$. Es decir el par x, y dará lugar a un elemento elíptico de orden $\frac{n}{m}$.
- Si, por el contrario, $HK < xy > = HKx < xy >$ tenemos que $HK(xy)^r = HKx(xy)^s$ y existirá q tal que $HK(xy)^qx = HK$.
 - Si $q = 2t$, entonces $HK(xy)^tx(yx)^t = HK$ y como $x^2 = y^2 = 1$, $HK(xy)^tx = HK(xy)^t$ y $(K(xy)^tx)^* = (K(xy)^t)^*$
 - Si $q = 2t+1$ entonces $HK(xy)^tx(yx)^{t+1} = HK$ y $(K(xy)^tx)^* = (K(xy)^txy)^*$

Permutando cíclicamente $\tau(K(xy)^mK^{-1})$ hasta llegar a:

$$\tau((K(xy)^t)^*(xy)^m(K(xy)^t)^{* - 1}) \text{ o a } \tau((K(xy)^tx)^*(yx)^m(K(xy)^tx)^{* - 1})$$

obtenemos una relación cuyo primer símbolo es uno de los y_{ij} .

Escogiendo adecuadamente K (representante de $HK < xy >$), e intercambiando x e y si fuera necesario, podemos suponer que estamos calculando $\tau(K(xy)^mK^{-1})$ y que s_{Kx} es uno de los y_{ij} .

- Si $m = 2w+1$ entonces $HK(xy)^wx(yx)^{w+1} = HKx = HK$ por tanto $(K(xy)^wx)^* = (K(xy)^w(xy))^*$ y $s_{(K(xy)^wx)^*y}$ es también uno de los y_{ij} .

Como

$$\tau(K(xy)^mK^{-1}) = s_{Kx}s_{Ky} \dots s_{(K(xy)^wx)^*y} s_{(K(xy)^wx)^*x} \dots s_{(K(xy)^{2w})y}$$

la relación es del tipo $y_iA_{ij}A^{-1}$. En este caso HKx es "fijado" por x (o sea $HKx = HK$) y $HK(xy)^wx$ es "fijado" por y .

- Si $m = 2w$ entonces $(K(xy)^w x)^* = (K(xy)^w)^*$ y

$$\tau(K(xy)^m K^{-1}) = s_{Kx} s_{Ky} \dots s_{(K(xy)^w)^* x} s_{(K(xy)^w)^* y} \dots s_{(K(xy)^{2w-1}) y}$$

donde $s_{(K(xy)^w x)^* y}$ es también uno de los y_{ij} y la relación es del mismo tipo que antes. Ahora tanto HKx como $HK(xy)^w$ son “fijados” por x .

3. Como hemos visto antes las relaciones de identificación son de dos tipos: s_{Kx}^2 , cuando $(Kx)^* = K$ y da lugar a un y_{ij} , y $s_{Lx} s_{(Lx)^* x}$ cuando no.

En el primer caso s_{Kx} no puede ser un generador trivial, exigiría $Kx = (Kx)^*$, y tampoco lo es al menos uno de los generadores en el segundo caso.

Eliminamos las relaciones $s_{Lx} s_{(Lx)^* x}$ y los generadores $s_{(Lx)^* x}$, substituyendo dichos generadores por s_{Lx}^{-1} en las restantes relaciones (o viceversa si s_{Lx} es trivial).

Una vez realizado estos reemplazamientos el número de ocurrencias de s_{Lx} en las relaciones raíz es la suma de ocurrencias originales de s_{Lx} más las de $s_{(Lx)^* x}$.

Como x ocurre dos veces en las relaciones excluidos las de identificación c_{ij}^2 (recordar que para simplificar notación x representa un c_{ij}) tendremos que s_{Lx} ocurre cuatro veces en los transformados de las relaciones raíz.

Pero hemos visto que las relaciones, en las que no intervienen los y_{ij} , son redundantes por parejas y, si dejamos sólo una de estas relaciones, cada uno de los generadores restantes (incluidos los triviales), que denotaremos por z_i , ocurre dos veces en la colección de palabras A_{ij}, R_k .

4. Si de esta presentación H eliminamos las relaciones triviales, obtenemos una presentación \tilde{H} cuyo grafo coinitial contiene N ciclos disjuntos, siendo cada uno de ellos isomorfo al ciclo del grafo coinitial de la presentación original (ver los comentarios que siguen a la definición 4.3.1).

Por tanto si eliminamos los generadores triviales de la presentación H (ver 4.1.6) obtenemos una presentación que cumple todos los requisitos de la proposición 4.3.1.

□

COROLARIO 4.3.1. *Sea H un subgrupo de índice finito de un grupo N.E.C. G . Cada generador elíptico de H es de uno de los siguientes tipos:*

1. Conjugado en H de un elemento $c^k \in H$ siendo c un generador elíptico de G de orden n (k divide a n).
2. Conjugado en H de un elemento $K(xy)^k K^{-1} \in H$, siendo x, y generadores de reflexión de G tales que $(xy)^n = 1$ y K un determinado representante de Schreier (k divide a n).

DEMOSTRACIÓN. Si consideramos G_c el doble de Klein de G tendremos un grupo fuchsiano y cada elemento elíptico de G_c , que es a su vez un elemento elíptico de G , es conjugado de la potencia de un generador elíptico (ver sección 2.4.1.2). Ahora bien los generadores elípticos de G_c son los generadores elípticos de G y los productos de reflexiones que dan lugar a un elemento de orden finito. \square

OBSERVACIÓN. La segunda parte se demuestra también en el punto 2 de la demostración del teorema 4.3.1 (donde además se ve que condiciones debe cumplir el representante K).

COROLARIO 4.3.2. Sea H un subgrupo de índice finito de un grupo N.E.C. G . Cada generador de reflexión de H es un conjugado en H de un elemento $LxL^{-1} \in H$ siendo x un generador de reflexión de G y L un representante de Schreier. Si H no contiene conjugados de generadores de reflexión entonces la presentación canónica de H no contiene generadores c_{ij} ni e_i .

DEMOSTRACIÓN. $s_{Lx} = Lx(Lx)^{*^{-1}}$ es un generador de reflexión (originado por x) cuando $(Lx)^* = L$ luego $s_{Lx} = LxL^{-1}$. Además las transformaciones para obtener las presentación canónica (ver demostración de la proposición 4.3.1) cambian cada y_{ij} por un conjugado suyo en H . \square

TEOREMA 4.3.2. Sean \mathfrak{G} , \mathfrak{H} como en el teorema anterior entonces las medidas N.E.C. de sus presentaciones canónicas están relacionadas por:
 $\eta(H) = N\eta(G)$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a considerar la presentación G' de \mathfrak{G} obtenida de la canónica G añadiendo las relaciones redundantes:

$$x_i^{-m_i}, (e_1^{-1} \dots e_k^{-1} x_1^{-1} \dots x_r^{-1} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g])^{-1}.$$

La medida μ de dicha presentación es (ver definición 4.1.5):

$$\delta(G') = 2g + k + r + \sum_{i=1}^k (s_i + 1) - 2r - 2 \sum_{i=1}^k (s_i + 1) - 2$$

$$\mu(G') = \delta(G') - 1 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}}\right) =$$

$$= 2g - r + k - 3 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (s_i + 1) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}}\right) + 2 \sum_i^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$

El número de vértices del grafo coinitial de la presentación G' es $v(G') = 4g + 2k + 2r + \sum_{i=1}^k (s_i + 1)$. Por tanto:

$$\eta(G) = \frac{1}{2}\mu(G') + \frac{1}{4}(v(G') - 2)$$

Sea H' la presentación de \mathfrak{H} obtenida por el método de Reidemeister-Schreier, sin eliminar relaciones redundantes introducidas, a partir de G' . Tendremos (por un procedimiento totalmente análogo al de la demostración del teorema 4.1.3) que $\mu(H') = N\mu(G')$.

Si eliminamos uno de los generadores de las relaciones de identificación que no sean del tipo y_{ij} , así como dichas relaciones, obtenemos una presentación H'' tal que $\mu(H'') = \mu(H')$. Si eliminamos además los generadores triviales (que a su vez son relaciones) una (equivalente) H''' tal que $\mu(H''') = \mu(H'')$.

Se tiene que $v(H'') = Nv(G')$ puesto que hay N vértices en el grafo coinitial de H'' por cada vértice en el grafo coinitial de G' . Como H''' se obtiene de H'' eliminando los generadores triviales $v(H''') = Nv(G') - 2(N - 1)$ pues hay $N - 1$, por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu(H''') + \frac{1}{4}(v(H''') - 2) &= \frac{1}{2}N\mu(G') + \frac{1}{4}(Nv(G') - 2N + 2 - 2) = \\ &= N\left(\frac{1}{2}\mu(G') + \frac{1}{4}(v(G') - 2)\right) = N\eta(G) \end{aligned}$$

La presentación H''' sería una presentación tipo NEC (ver 4.3.2) excepto porque cada relator de la forma $R_m^{\gamma m}$ aparece junto a su inverso. Podemos pasar de esta representación a una canónica que contiene además los inversos de las relaciones elípticas y larga, por un procedimiento igual al de la proposición 4.3.1, sin alterar en cada transformación el número $\frac{1}{2}\mu(H''') + \frac{1}{4}(v(H''') - 2)$. Así si H es la presentación canónica de \mathfrak{H} :

$$\eta(H) = \frac{1}{2}\mu(H''') + \frac{1}{4}(v(H''') - 2) = N\eta(G)$$

□

4.4. Orientabilidad del espacio cociente

Esta sección se basa en los resultados presentados en la referencia [65].

Dado un grupo N.E.C., G y un subgrupo $H \subset G$ nos interesa analizar la orientabilidad del espacio de órbitas \mathbb{H}/H (siendo \mathbb{H} el plano hiperbólico).

Para ello consideramos un polígono fundamental, de G , $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$ limitado por lados geodésicos, las propiedades de dicho polígono se han visto en las secciones 2.4.1.1 y 2.5. Denotamos $G^* = \{\beta\}$ al conjunto de elementos de G que emparejan lados de \mathcal{F} y que generan G (ver [57]).

PROPOSICIÓN 4.4.1. *Si β empareja \bar{b} con b , y $\gamma, \delta \in G$ las siguientes proposiciones son equivalentes:*

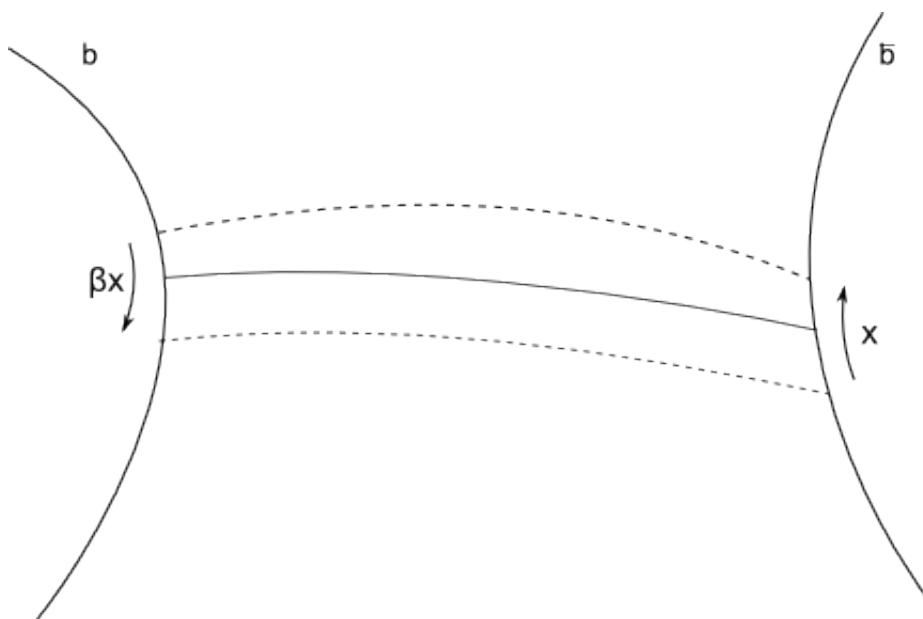
1. $\gamma\mathcal{F}$ es adyacente a $\delta\mathcal{F}$ por γb
2. $\gamma\beta\delta^{-1} = 1$
3. $\gamma b = \delta\bar{b}$ y $\gamma \neq \delta$

DEMOSTRACIÓN. Si se cumple 1 tenemos que $\gamma^{-1}\delta\mathcal{F}$ es adyacente a \mathcal{F} por el lado b , por tanto $\beta = \gamma^{-1}\delta$ y se cumple 2. Si se cumple 2, $\delta = \gamma\beta$ y $\gamma \neq \delta$ puesto que $\beta \in G^*$ y $1 \notin G^*$ por tanto $\delta\bar{b} = \gamma\beta\bar{b} = \gamma b$. Si se cumple 3 como $\gamma b \in \gamma\mathcal{F}$ y $\delta\bar{b} \in \delta\mathcal{F}$ tendremos que $\gamma b \in \gamma\mathcal{F} \cap \delta\mathcal{F}$ luego $\gamma\mathcal{F}$ es adyacente a $\delta\mathcal{F}$ por γb . \square

PROPOSICIÓN 4.4.2. \mathbb{H}/G es orientable si y sólo si los únicos elementos anticonformes de G^* son reflexiones.

DEMOSTRACIÓN. Tendremos que \mathbb{H}/G es homeomorfo a \mathcal{F} identificando los puntos de los lados emparejados (la frontera de \mathcal{F} estará determinada por los lados fijados por las reflexiones).

Si $\beta \in G^*$ es anticonforme y no es una reflexión, existirán lados distintos b, \bar{b} tales que $b = \beta\bar{b}$ y un punto x en el interior de \bar{b} tal que $x \neq \beta x$ y $\beta x \in b$. Unimos x y βx por camino en el interior de \mathcal{F} y lo “ensanchamos” un poco. Tenemos una banda de Möbius y por tanto \mathbb{H}/G es no orientable.



Recíprocamente si los únicos elementos de G^* anticonformes son las reflexiones, solamente elementos conformes identifican puntos distintos en la frontera de \mathcal{F} , entonces la orientación de \mathcal{F} induce una orientación en $\mathcal{F}/G \cong \mathbb{H}/G$. \square

Vamos a considerar una presentación de G con generadores $G^* = \{\beta\}$, y un proceso de reescritura de Reidemeister-Schreier para $H \subset G$ con un conjunto de representantes de Schreier de las clases por la derecha de H en G que denotaremos $\Sigma = \{K, L, \dots\}$.

TEOREMA 4.4.1. *Sea $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{K \in \Sigma} K\mathcal{F}$ (donde \mathcal{F} es un polígono fundamental de G) entonces $\tilde{\mathcal{F}}$ es un polígono fundamental de H .*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar que $\tilde{\mathcal{F}}$ es una región fundamental y que cumple las condiciones del teorema 2.4.11. Primero vamos a ver que $\tilde{\mathcal{F}}$ es conexo. Como $1 \in \Sigma$ tenemos que $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$. Si $K \in \Sigma$ tiene longitud 1 entonces es del tipo $s_{1\beta} \equiv \beta$ siendo $\beta \in G^*$, como el polígono $\beta\mathcal{F}$ es adyacente a \mathcal{F} , por un lado b , $\mathcal{F} \cup \beta\mathcal{F}$ es conexo.

Ahora vamos a proceder por inducción, supongamos $\bigcup_{K \in \Xi} K\mathcal{F}$ es conexo siendo Ξ las palabras de Σ de longitud menor que n . Sea $L \in \Sigma$ de longitud n , entonces $L = K\beta$ $K \in \Sigma, \beta \in G^*$, por ser ambos representantes de Schreier. Existen \bar{b} y b emparejados por β , y $K\beta L^{-1} = 1$ entonces por la proposición 4.4.1 $K\mathcal{F}$ es adyacente a $L\mathcal{F}$ por el lado Kb .

Por tanto la frontera de $\tilde{\mathcal{F}}$ estará constituida por los lados Kb tales que β empareja \bar{b} con b y $K\beta \notin \Sigma$.

También se tiene que:

$$\bigcup_{\lambda \in H} \lambda \tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{\lambda \in H} \bigcup_{K \in \Sigma} \lambda K \mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in G} \alpha \mathcal{F} = \mathbb{H}$$

Sea $x \in \tilde{\mathcal{F}} \cap \lambda \tilde{\mathcal{F}}$ $\lambda \neq 1, \lambda \in H$ (notar que para cualquier $L \in \Sigma$ se verifica que $H\lambda L = HL$ luego $\lambda L \notin \Sigma$ al ser el representante de Schreier L) entonces $x \in K\mathcal{F} \cap \lambda L\mathcal{F}$ (siendo $K \neq \lambda L$) y por tanto x está en un lado Kb tal que $\beta \in G^*$ empareja \bar{b} con b y $K\mathcal{F}$ es adyacente a $\lambda L\mathcal{F}$ por Kb , por la proposición 4.4.1 $K\beta(\lambda L)^{-1} = 1$ luego $K\beta = \lambda L \notin \Sigma$ y x está en la frontera de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Por otra parte es evidente que $\tilde{\mathcal{F}}$ heredera de \mathcal{F} la propiedad de intersección con compactos.

El resto de la demostración es el contenido del siguiente lema. \square

LEMA 4.4.1. *Sea $\beta \in G^*$ el elemento que empareja los lados \bar{b} y b de \mathcal{F} . El generador de Schreier $s_{K\beta} = K\beta(K\beta)^{*^{-1}}$ empareja el lado $(K\beta)^*\bar{b}$ con Kb si y sólo si $K\beta \notin \Sigma$ (en cuyo caso $s_{K\beta}$ no es la identidad). Además fija el lado Kb si y sólo si $(K\beta)^* = K$ y β es una reflexión.*

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos visto que los lados de $\tilde{\mathcal{F}}$ son del tipo Kb siendo $K\beta \notin \Sigma$. Sea un punto $y \in (K\beta)^*\bar{b}$ existirá $x \in \bar{b}$ tal que $y = (K\beta)^*x$ tendremos:

$$s_{K\beta}y = K\beta(K\beta)^{*^{-1}}y = K\beta x \in Kb$$

y recíprocamente.

(Notar que $(K\beta)^*\bar{b}$ es un lado de $\tilde{\mathcal{F}}$ puesto que $\bar{b} = \beta^{-1}b$ y $(K\beta)^*\beta^{-1} \notin \Sigma$ pues de lo contrario $K = ((K\beta)^*\beta^{-1})^* = (K\beta)^*\beta^{-1}$ y $K\beta = (K\beta)^*$ contrario a la hipótesis).

Si Kb es fijado por $s_{K\beta}$ tenemos que $(K\beta)^*\bar{b} = Kb$ y como $s_{K\beta}$ no es la identidad por la proposición 4.4.1 $(K\beta)^* = K$, además $s_{K\beta}$ es anticonforme de orden 2 lo que implica que también lo es β y por tanto fija b . Recíprocamente si β fija b y $(K\beta)^* = K$ entonces $s_{K\beta}$ no es la identidad y Kb es un lado de $\tilde{\mathcal{F}}$ fijado por $s_{K\beta}$. \square

4.4.1. Orientabilidad y grafos de Schreier. Vamos a considerar el grafo de Schreier (ver capítulo 3) $\mathcal{H}(G, H, G^*)$, cuyos vértices son las clases por la derecha de H en G y las aristas los elementos de G^* . De forma que $\beta \in G^*$ une los vértices $H\chi, H\psi$ si $H\psi = H\chi\beta$ (siendo χ, ψ palabras en G^*).

Un tipo especial de elementos son las reflexiones $\beta \in G^*$ que fijan alguno de los vértices, o sea $HK = H(K\beta)^*$ la arista correspondiente (lazo con base en HK) se denomina *lazo de reflexión*.

Denotaremos por $\tilde{\mathcal{H}}$ al grafo de Schreier \mathcal{H} en el que se han suprimido los lazos de reflexión. Cada camino en este grafo es una palabra en G^* , o sea, un elemento de G (y viceversa). Por tanto podemos asignar una orientación a cada camino según sea conforme o anticonforme el elemento de G al que da lugar (llamaremos positivos a aquellos caminos que originan un elemento conforme).

Los ciclos con base en un elemento de H originan los elementos de H . Los representantes de Schreier dan lugar a un árbol de caminos que comienzan en H y llegan a todos los vértices (de esta forma cada vértice puede ponerse como HK) y los elementos $s_{K\beta}$ son los ciclos en H construidos del siguiente modo: Seguir el camino correspondiente al representante K , ir al vértice destino del arco que origina el elemento β y regresar a H siguiendo el inverso del camino correspondiente al representante de Schreier de dicho vértice.

TEOREMA 4.4.2. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. \mathbb{H}/H es orientable.
2. Los únicos generadores de Schreier ($s_{K\beta}$) anticonformes son conjugados de reflexiones en G^* .
3. Todos los ciclos en el grafo $\tilde{\mathcal{H}}$ (en el que se han eliminado los lazos de reflexión) son positivos.
4. Los elementos (HK), clases por la derecha de H en G , pueden dividirse en dos conjuntos disjuntos. De forma que la acción $\beta : HK \rightarrow H(K\beta)^*$, siendo $\beta \in G^*$, fija los conjuntos cuando β es conforme y los intercambia cuando es anticonforme, excepto en el caso que β sea una reflexión que fije HK en cuyo caso no habrá intercambio.

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia de 1 y 2 es consecuencia directa de la proposición 4.4.2 y del lema 4.4.1.

Supongamos que se cumple 2, entonces todos los ciclos en $\tilde{\mathcal{H}}$ con base en H son positivos, pues son producto de elementos conformes. El resto de los ciclos del grafo son conjugados de ciclos con base en H y por tanto también positivos.

Supongamos que se cumple 3, podemos asignar a cada vértice HK una orientación dependiendo de si el camino de H a HK da lugar a un elemento conforme o a uno anticonforme. Esto se puede hacer porque al ser todos los

ciclos de $\tilde{\mathcal{H}}$ positivos la orientación asignada no depende del camino elegido. Evidentemente esta asignación cumple 4.

Supongamos que se cumple 4, si $\alpha \in G^*$, $\alpha \in \Sigma$ entonces H y α están en el mismo conjunto si y sólo si α es conforme (como $\alpha \in \Sigma$ no puede fijar H). Procedemos por inducción y suponemos que H y HK están en el mismo o distinto conjunto según la conformidad o anticonformidad de K cuando K es una palabra de longitud menor que n . Sea $L \in \Sigma$ de longitud n entonces $L = K\gamma$ (notar que γ no puede fijar K) y HL y HK estarán en el mismo conjunto si y sólo si γ es conforme, por tanto H y HL estarán el mismo conjunto si y sólo si L es conforme.

Supongamos ahora que $\beta \in G^*$ es conforme y $L = (K\beta)^*$ entonces HL y HK pertenecen a la misma clase. Si β es anticonforme pertenecen a distinta clase, salvo que β sea una reflexión y $L = K$, entonces cada ciclo $s_{K\beta} = K\beta(K\beta)^{-1}$ es positivo salvo si $(K\beta)^* = K$ y β es una reflexión. Por tanto se verifica 2. \square

COROLARIO 4.4.1. *Si \mathbb{H}/G es no orientable y $|G : H|$ es impar entonces \mathbb{H}/H es no orientable.*

DEMOSTRACIÓN. G contiene $\beta \in G^*$ que es no orientable y no es una reflexión. Si \mathbb{H}/H es orientable β ha de intercambiar los conjuntos disjuntos que forman los vértices del grafo de Schreier $\tilde{\mathcal{H}}$, por tanto el número de vértices (número de clases por la derecha = $|G : H|$) ha de ser par. \square

COROLARIO 4.4.2. *Si \mathbb{H}/G es orientable y H un subgrupo normal de G de índice impar entonces \mathbb{H}/H es orientable.*

DEMOSTRACIÓN. Si H es un subgrupo normal y $HK\beta = HK$ como $HK = KH$ tenemos $KH\beta = KH$ luego $H\beta = H$ y, análogamente, para cualquier L también $HL\beta = HL$.

Como \mathbb{H}/G es orientable los únicos elementos de G^* anticonformes son las reflexiones. Si $|G : H|$ es impar cada reflexión (orden 2) ha de fijar al menos un HK y por lo anterior ha de fijar todos.

Por tanto todas las aristas en $\tilde{\mathcal{H}}$ corresponden a elementos conformes. \square

DEFINICIÓN 4.4.1. Un grafo se denomina bipartito cuando sus vértices pueden dividirse en dos conjuntos disjuntos U, V de forma que cada arco conecta un vértice de U con uno de V . O equivalentemente cuando no contiene ciclos de longitud impar.

COROLARIO 4.4.3. *Si todos los elementos de G^* son anticonformes, \mathbb{H}/H es orientable si y sólo si el grafo $\tilde{\mathcal{H}}$ es bipartito.*

DEMOSTRACIÓN. Como cada arco de $\tilde{\mathcal{H}}$ es negativo (anticonforme) \mathbb{H}/H será orientable si y sólo si todos los ciclos son de longitud par. \square

EJEMPLO. Veamos un ejemplo tomado de [65] que usa el plano Euclídeo (los resultados de esta sección se aplican igualmente a este caso) y el grupo cristalográfico plano:

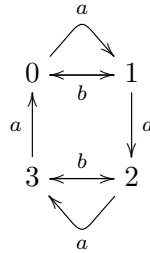
$$G = \langle a, b; b^2, ba^2 = a^2b \rangle$$

Donde b es una reflexión y a invierte la orientación (luego ambos la invierten), que es una banda de Möbius con presentación obtenida a partir de la “habitual” $G = \langle a, b, c; b^2, a^2c, cbc^{-1}b^{-1} \rangle$ eliminando c mediante la relación $c^{-1} = a^2$.

H es el estabilizador de 0 en la acción sobre las clases por la derecha de H en G generada por las permutaciones:

$$a \rightarrow (0, 1, 2, 3) \quad b \rightarrow (0, 1)(2, 3)$$

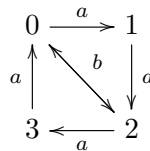
El grafo de Schreier $\tilde{\mathcal{H}}$ será:



El conjunto de vértices es la unión de los conjuntos $U = \{0, 2\}$, $V = \{1, 3\}$, y todos los elementos de $G^* = \{a, a^{-1}, b\}$ (anticonformes) intercambian U, V luego \mathbb{E}/H es orientable.

Si ahora consideramos las permutaciones: $a \rightarrow (0, 1, 2, 3) \quad b \rightarrow (0, 2)(1)(3)$

Tenemos el grafo de Schreier:



vemos que tiene un ciclo negativo $0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 0$ y por tanto \mathbb{E}/H es no orientable.

4.5. Subgrupos de grupos N.E.C. y grupos de permutaciones

Vamos a resumir los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

TEOREMA 4.5.1. *Con la notación de las secciones anteriores (G grupo N.E.C.; $H \subset G$; $|G : H| = N$)*

- H tiene una presentación canónica de grupo N.E.C. (teorema 4.3.1).
- Las áreas hiperbólicas de las superficies uniformizadas por G y H cumplen $a(H) = Na(G)$. Siendo $a = 2\pi(\alpha g + k - 2 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (1 - \frac{1}{n_{ij}}))$ (teorema 4.3.2).
- A cada clase por la derecha fijada por un generador de reflexión de G le corresponde un generador de reflexión de H (ver demostración del teorema 4.3.1).
- Si x, y son generadores de reflexión de G “enlazados”, es decir existe una relación $(xy)^n$, hay dos posibilidades (según sean las órbitas de la acción del elemento xy en las clases por la derecha de H en G) (ver demostración del teorema 4.3.1):
 1. La órbita tiene 2 clases (K, L) fijadas por x, y (una fijada por x y la otra por y si la longitud m de la órbita de xy es impar, o ambas fijadas por x o por y si m es par). En este caso los correspondientes generadores de reflexión de H (los denotaremos X, Y pudiendo ser s_{Kx}, s_{Ly} o s_{Kx}, s_{Lx} o s_{Kxy}, s_{Ly}) están enlazados, con relación $(XAY A^{-1})^{n/m}$ (si $n = m$ podemos eliminar uno de los generadores de reflexión en H).
 2. La órbita no tiene clases fijadas por x o y . Este caso da lugar a un generador elíptico en H de orden n/m (salvo que $n = m$) por cada dos órbitas de este tipo (existirán en número par).
- A cada órbita de longitud m de la acción de un generador elíptico x de G de orden n ($x^n = 1$) sobre las clases por la derecha de H en G , le corresponde un generador elíptico de H de orden n/m (teorema 4.2.1).
- Todos los generadores elípticos de H se originan por los procedimientos anteriores (ver demostración del teorema 4.3.1).
- H dará lugar a una superficie orientable (\mathbb{H}/H) si y sólo si las clases por la derecha de H en G se pueden dividir en dos conjuntos disjuntos (uno quizás vacío) de forma que la acción de cada generador conforme de G fija los conjuntos y cada generador anticonforme de G los intercambia (no teniendo en cuenta las clases fijadas por las reflexiones, que darán lugar a reflexiones en H) (teorema 4.4.2).
- Cada ciclo-periodo de H se origina a partir de un ciclo-periodo de G (se pueden originar varios de H a partir de uno de G). Los ciclo-periodos vacíos de G originarán uno vacío de H por cada clase fijada por la reflexión del ciclo-periodo vacío de G .
- Si H define una superficie orientable, puede ser necesario invertir la dirección de alguno de sus ciclo-periodos para que la presentación (ver 4.3.2) cumpla la condición 4 de la definición 4.3.2 (observación 4.3.1). Esto exige, en principio, realizar el análisis de Reidemeister-Schreier, aunque veremos un procedimiento más simple.

OBSERVACIÓN. En la literatura es frecuente considerar las órbitas bajo la acción del grupo diédrico $\langle x, y \rangle$ en lugar de las órbitas bajo la acción de xy . Si se hace esto la longitud de la órbita sería la misma en el caso 1 y el doble en el caso 2 (existiendo la mitad de órbitas del tipo 2) y tantos generadores elípticos como órbitas de este tipo.

Estos resultados van a permitir el análisis de recubridores ramificados definidos por permutaciones, método de Hoare-Singerman (ver [106, 61]).

NOTA. Singerman en la referencia [106] desarrolló este método para grupos fuchsianos no necesariamente cocompactos (ver teorema 4.2.1), posteriormente fue generalizado por Hoare (ver [61]) para grupos N.E.C.

Una consideración que aclara el comportamiento de los generadores de reflexión es considerar el método gráfico de Reidemeister-Schreier.

Sea $(xy)^n$ un elemento de un ciclo-periodo de G , supongamos que una porción del grafo de Schreier es $(x, y$ fijan clases por la derecha) :

$$\begin{array}{ccc} \overset{x}{\curvearrowright} & & \overset{y}{\curvearrowright} \\ K & \xrightarrow{y} & L & \xrightarrow{x} & M \end{array}$$

Tendremos que la relación inducida en H será $(s_{Kx}s_{Ky}s_{Lx}s_{My}s_{Mx}s_{Ly})^{\frac{n}{3}}$. Si llamamos $A = s_{Ky}s_{Lx}$ la podemos poner como $(s_{Kx}As_{My}A^{-1})^{\frac{n}{3}}$ donde s_{Kx}, s_{My} son generadores de reflexión de H

Si ni x ni y fijan clases por la derecha tendremos:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{x} & L \\ \uparrow y & & \downarrow y \\ N & \xleftarrow{x} & M \end{array}$$

y la relación inducida en H será $(s_{Kx}s_{Ly}s_{Mx}s_{Ny})^{\frac{n}{2}}$ que originará un generador elíptico de orden $\frac{n}{2}$.

Las relaciones $c_n e c_0 e^{-1} = 1$, es decir $c_n = c_0^e$, dan lugar a dos tipos de órbitas en el grafo de Schreier:

- Con dos elementos, ninguno de ellos fijado por c_n .
- Con un elemento, si c_n fija K .

El primer caso origina un elemento elíptico de orden 1, que por tanto no se considera. En el segundo caso c_0 fijará Ke y tendremos un enlace $s_{Kc_n} \sim s_{(Ke)^*c_0}$.

Los resultados mencionados se obtienen aplicando el método de Reidemeister-Schreier para obtener una presentación de H y posteriormente transformaciones de Tietze para conseguir una presentación canónica.

La utilización habitual de este procedimiento consiste en lo siguiente: Se parte de un homomorfismo, de imagen transitiva, $\varphi : G \rightarrow S_n$ y queremos obtener la signatura de $H = \varphi^{-1}(\text{stab}(0))$.

Podemos calcular la signatura de H por el siguiente procedimiento simplificado:

1. Obtenemos los órdenes de los generadores elípticos de H correspondientes a los generadores elípticos de G .
2. Obtenemos las órbitas de los grupos diédricos $(xy)^n$ que constituyen los ciclo-periodos de G :
 - a) Las órbitas que no contengan clases fijadas ni por x ni por y dan lugar a generadores elípticos de H .
 - b) Las órbitas que contengan un par de clases fijadas por x o y originan los ciclo-periodos de H .
3. Analizamos como están enlazados los grupos diédricos para constituir los ciclo-periodos. Usando que cada generador de reflexión de H aparece exactamente en dos grupos.
4. No consideramos ni los periodos ni los valores de los ciclo-periodos cuando sean 1.
5. Vemos si las clase por la derecha de H en G se pueden dividir en dos conjuntos disjuntos que se comporten de la forma definida para que \mathbb{H}/H sea orientable.
6. De la relación (Riemann-Hurwitz) $a(H) = Na(G)$ obtenemos el género de la superficie de H .
7. Si la superficie es orientable nos falta obtener la dirección de los ciclo-periodos. Para ello usamos el grafo de Schreier: Cada enlace $(xy)^n$ de G que da lugar a enlaces en H ($s_{Kx}As_{Ly}A^{-1}$) define uno o varios caminos entre los vértices del grafo fijados por x o y , cada arista del grafo recorrida en un sentido debe ser recorrida en sentido contrario por una arista correspondiente al recorrido de otro enlace $(zw)^m$ de G (tanto si da lugar a un enlace de H como a un elemento elíptico) de esta forma fijado un ciclo-periodo podemos calcular la dirección de los demás. En el caso de que G tenga más de un ciclo-periodo, será necesario, considerar también la relación "larga" y las aristas correspondientes a los generadores de "conexión" (comenzando en los distintos vértices del grafo).

EJEMPLO. Sea G con una presentación:

1. Generadores:

$w, x, y, z, r, s, t, e, f, c, a, d$ siendo $w, x, y, z, r, s, t, a, d$ anti-conformes

2. Relaciones:

$$w^2, x^2, y^2, z^2, r^2, s^2, t^2$$

$$c^4$$

$$(wx)^{24}, (xy)^6, (yz)^{12}, zewe^{-1}$$

$$(rs)^6, (st)^{12}, tfrf^{-1}$$

$$e^{-1}f^{-1}c^{-1}a^2d^2$$

Es una superficie no orientable de género dos cuya frontera tiene dos componentes conexas, su signatura será:

$$\langle 2; -; [4]; \{(24, 6, 12), (6, 12)\} \rangle$$

Supongamos que tenemos $\varphi : G \rightarrow S_8$ (imagen transitiva)

- $w \rightarrow (1, 2)(4, 5)$ Fija 0, 3, 6, 7
- $x \rightarrow (0, 1)(3, 4)(5, 6)$ Fija 2, 7
- $y \rightarrow (0, 1)(2, 3)(6, 7)$ Fija 4, 5
- $z \rightarrow (2, 3)(5, 0)$ Fija 1, 4, 6, 7
- $r \rightarrow (0, 3)(4, 7)$ Fija 1, 2, 5, 6
- $s \rightarrow (1, 2)$ Fija 0, 3, 4, 5, 6, 7
- $t \rightarrow (0, 3)(1, 6)$ Fija 2, 4, 5, 7
- $e \rightarrow (0, 2, 4)(1, 3, 5)$
- $f \rightarrow (0, 4, 6)(1, 3, 7)$
- $c \rightarrow (0, 2, 4, 6)(5, 7)$
- $a \rightarrow (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$
- $d \rightarrow (0, 1)(2, 3, 4, 5, 6, 7)$
- $ze \rightarrow (0, 1, 3, 4)(2, 5)$ transforma los puntos fijos de $z = z^{-1} = ewe^{-1}$ en los de w
- $tf \rightarrow (0, 7, 1)(3, 4, 6)$ transforma los puntos fijos de t en los de r

y sea $H = \varphi^{-1}(Stab(0))$.

El generador elíptico c dará lugar a 1 generador elíptico de orden $\frac{4}{2} = 2$ y a 2 de orden 4.

Los generadores de reflexión vendrán determinados por las clases fijadas por las reflexiones de G los denotaremos:

$$w_0, w_3, w_6, w_7, x_2, x_7, y_4, y_5, z_1, z_4, z_6, z_7, r_1, r_2, r_5, r_6, s_0, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, t_2, t_4, t_5, t_7$$

Calculamos las órbitas de los grupos diédricos (alternativamente las permutaciones producto, ambos usados en la literatura):

- $\langle w, x \rangle \rightarrow \{0, 1, 2\}\{3, 4, 5, 6\}\{7\} \quad wx = (0, 1, 2)(3, 4, 6, 5)$
- $\langle x, y \rangle \rightarrow \{0, 1\}\{2, 3, 4\}\{5, 6, 7\} \quad xy = (2, 3, 4)(5, 7, 6)$
- $\langle y, z \rangle \rightarrow \{0, 1, 5\}\{2, 3\}\{4\}\{6, 7\} \quad yz = (0, 1, 5)(6, 7)$
- $\langle z, ewe^{-1} \rangle \rightarrow \{1\}\{2, 3\}\{4\}\{0, 5\}\{6\}\{7\} \quad zewe^{-1} = id$
- $\langle r, s \rangle \rightarrow \{0, 3\}\{1, 2\}\{4, 7\}\{5\}\{6\} \quad rs = (0, 3)(1, 2)(4, 7)$
- $\langle s, t \rangle \rightarrow \{0, 3\}\{1, 2, 6\}\{4\}\{5\}\{7\} \quad st = (0, 3)(1, 2, 6)$
- $\langle t, frf^{-1} \rangle \rightarrow \{0, 3\}\{1, 6\}\{2\}\{4\}\{5\}\{7\} \quad tfrf^{-1} = id$

Las órbitas, de los grupos diédricos, que no contienen ninguna clase fijada por sus generadores dan lugar a elementos elípticos: Así $\{0, 1\}$ de $\langle x, y \rangle$ da lugar a un elemento elíptico de orden 6, y $\{2, 3\}$ de $\langle y, z \rangle$ a uno de orden 12.

En el grafo de Schreier la acción de los enlaces (grupos diédricos) del primer ciclo-periodo son:

NOTACIÓN. Los vértices numerados del 0,7 corresponden a las clases de equivalencia por la derecha de H en G , siendo 0 la correspondiente a H , los generadores entre paréntesis fijan el vértice.

$$(w)0 \xrightarrow{x} 1 \xrightarrow{w} 2(x)$$

Recorriendo (ida y vuelta) $(wx)^{24}$ damos $24/3 = 8$ “vueltas” por tanto un enlace D_8 ($24/\text{long órbita}\{0, 1, 2\}$).

Análogamente:

$$(w)3 \xrightarrow{x} 4 \xrightarrow{w} 5 \xrightarrow{x} 6(w) \quad \text{enlace } D_6$$

$$(w)7 \bullet 7(x) \quad \text{enlace } D_{24}$$

$$(x)2 \xrightarrow{y} 3 \xrightarrow{x} 4(y) \quad \text{enlace } D$$

$$(x)7 \xrightarrow{y} 6 \xrightarrow{x} 5(y) \quad \text{enlace } D_2$$

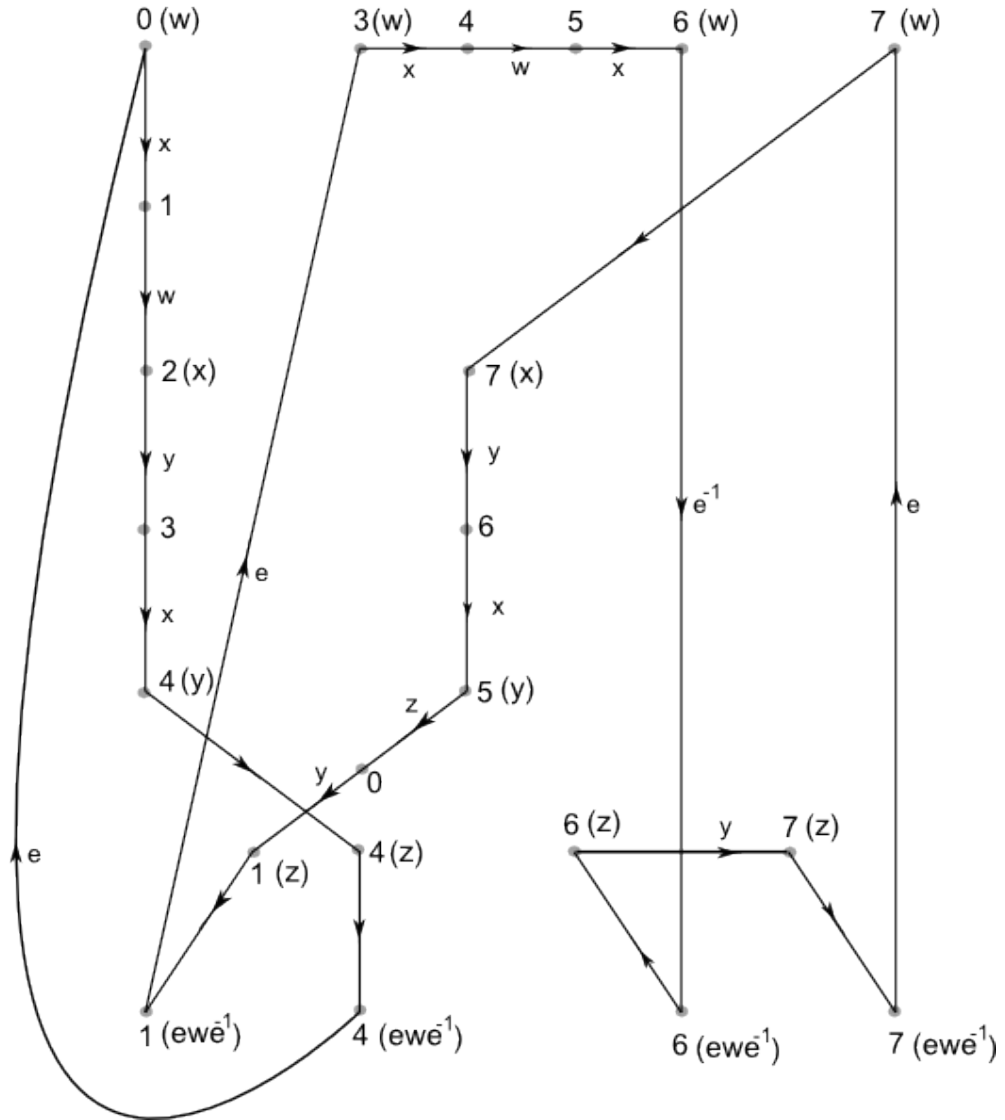
$$(y)4 \bullet 4(z) \quad \text{enlace } D_{12}$$

$$(y)5 \xrightarrow{z} 0 \xrightarrow{y} 1(z) \quad \text{enlace } D_4$$

$$(z)6 \xrightarrow{y} 7(z) \quad \text{enlace } D_6$$

Además mediante e tenemos $(z)1 \rightarrow 3(w)$, $(z)4 \rightarrow (w)0$, $(z)6 \rightarrow 6(w)$, $(z)7 \rightarrow 7(w)$

Uniendo los enlaces obtenemos el siguiente grafo:



Por tanto los ciclo-periodos en H generados por el primer ciclo-periodo de G son:

1. $w_0x_2(8)x_2y_4(2)y_4z_4(12)z_4w_0(1)$
2. $w_3w_6(6)w_6z_6(1)z_6z_7(6)z_7w_7(1)w_7x_7(24)x_7y_5(2)y_5z_1(4)z_1w_3(1)$

Analizamos ahora el segundo ciclo-periodo de G tenemos:

$$(s)0 \xrightarrow{r} 3(s) \text{ enlace } D_3$$

$$(r)1 \xrightarrow{s} 2(r) \text{ enlace } D_3$$

$$(s)4 \xrightarrow{r} 7(s) \text{ enlace } D_3$$

$(r)5 \bullet 5(s)$ enlace D_6

$(r)6 \bullet 6(s)$ enlace D_6

$(s)0 \xrightarrow{t} 3(s)$ enlace D_6

$(s)6 \xrightarrow{t} 1 \xrightarrow{s} 2(t)$ enlace D_4

$(s)4 \bullet 4(t)$ enlace D_{12}

$(s)5 \bullet 5(t)$ enlace D_{12}

$(s)7 \bullet 7(t)$ enlace D_{12}

Por tanto los ciclo-periodos en H generados por el segundo ciclo-periodo de G son:

3. $s_0 s_3(3) s_3 s_0(6)$

4. $r_5 s_5(6) s_5 t_5(12) t_5 r_5(1)$

5. $r_1 r_2(3) r_2 t_2(1) t_2 s_6(4) s_6 r_6(6) r_6 t_4(1) t_4 s_4(12) s_4 s_7(3) s_7 t_7(12) t_7 r_1(1)$

La superficie de Klein uniformizada por H es orientable pues las clases por la derecha se pueden dividir en $\{0, 2, 4, 6\}$ y $\{1, 3, 5, 7\}$ que cumplen el criterio de orientabilidad.

Para calcular el género aplicamos Riemann-Hurwitz:

$$8(2 + 2 - 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(\frac{23}{24} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12})) = \frac{239}{6} =$$

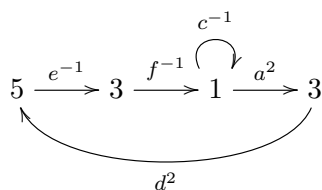
$$= 2g + 5 - 2 + \frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{1}{2}(\frac{7}{8} + \frac{1}{2} + \frac{11}{12}) + \frac{1}{2}(\frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{23}{24} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}) + \frac{1}{2}(\frac{5}{6} + \frac{11}{12}) + \frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{2}{3} + \frac{11}{12}) = 2g + 3 + \frac{65}{6}$$

luego $g = 13$.

Únicamente queda calcular la dirección de los ciclo-periodos.

Comenzamos analizando la relación “larga” ($e^{-1} f^{-1} c^{-1} a^2 d^2$) (empezando en 5):



Esto implica que en la correspondiente a $zewe^{-1}$ debemos tener (considerando la observación de la definición 4.3.2) :

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & \xrightarrow{z} & 3 & \xrightarrow{e} & 5 & \xrightarrow{w} & 4 \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & & e^{-1} \end{array}$$

y en la correspondiente a $tfrf^{-1}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & \xrightarrow{t} & 1 & \xrightarrow{f} & 3 & \xrightarrow{r} & 0 \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & & f^{-1} \end{array}$$

Luego en la parte del grafo correspondiente a w_3w_6 debemos tener: $3 \xrightarrow{x} 4 \xrightarrow{w} 5$ por tanto el ciclo-periodo 2 tiene la dirección correcta.

Pero entonces en x_2y_4 deberíamos tener: $4 \xrightarrow{x} 3$ y tenemos la dirección contraria, debiéndose invertir el ciclo-periodo 1.

La orientación de los cicloperiodos 3, 4 es indiferente al constar ambos de dos elementos.

Para ver la dirección del ciclo-periodo 5 consideramos que en t_2s_6 debe aparecer: $1 \xrightarrow{t} 6(s)$ y por tanto tiene la dirección correcta.

En definitiva la signatura de H es:

$$\langle 13; +; [2, 4, 4, 6, 12]; \{(12, 2, 8), (6, 6, 24, 2, 4), (3, 6), (12, 6), (3, 4, 6, 12, 3, 12)\} \rangle$$

OBSERVACIÓN. Los resultados anteriores se aplican sin prácticamente ninguna modificación para el caso de subgrupos tipo N.E.C. (ver [61]).

Otros ejemplos pueden verse analizados en la referencia [108], una aplicación de esta técnica a superficies de Riemann con dos simetrías puede verse en la referencia [21] y una extensión de estos últimos resultados en [70].

4.5.1. Dobles de Klein. Sea un grupo N.E.C. G de signatura:

$$(g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11} \dots n_{1s_1}) \dots (n_{k1} \dots n_{ks_k})\})$$

queremos saber la signatura de su doble G^+ (subgrupo de las transformaciones conformes).

Existirán dos clases por la derecha de G^+ en G que numeraremos 0, 1 los elementos conformes darán lugar a una permutación (0)(1) y los anti-conformes a una (0, 1) por tanto cada generador elíptico de periodo m_i dará lugar a dos generadores elípticos de periodo m_i . No habrá reflexiones en G^+ y las de G

darán lugar a puntos elípticos $n_{11}, \dots, n_{ks_k-1}$ por tanto la signatura de G^+ será:

$$(g'; +; [m_1, m_1, \dots, m_r m_r, n_{11}, \dots, n_{1s_1}, \dots, n_{ks_k}])$$

Aplicando Riemann-Hurwitz obtenemos:

$$\begin{aligned} 2g' - 2 + \sum_r 2\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}}\right) &= \\ = 2(\alpha g - 2 + k + \sum_r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{ij}}\right)) \end{aligned}$$

luego $g' = \alpha g + k - 1$ (siendo $\alpha = 1$ si G es no orientable y $\alpha = 2$ en caso contrario).

Superficies p-gonales diédricas reales

Los resultados de este capítulo han sido publicados en la referencia [29].

Una superficie de Riemann real es un par (X, σ) donde X es una superficie de Riemann y σ una involución anticonforme. Dos superficies de Riemann reales (X, σ) y (X', σ') son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X'$ tal que $\sigma = h^{-1}\sigma'h$.

Si (X, σ) es una superficie de Riemann real el conjunto de puntos fijados por σ , que denotamos $Fix(\sigma)$, es o bien vacío o bien consiste en k curvas disjuntas llamadas “óvalos” (ver [54, 93]). El tipo topológico, también conocido como “especie” de σ , viene dado por el número de óvalos y la orientabilidad o no de la superficie cociente $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$. Si σ tiene k óvalos y $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es orientable se dice que (X, σ) tiene especie $+k$, si $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es no orientable se dice que (X, σ) tiene especie $-k$.

El teorema de Harnack (ver [54, 37]) restringe las posibles especies de las superficies de Riemann reales, que pueden ser: $1 \leq k \leq g+1, k \equiv g+1 \pmod{2}$ cuando $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es orientable y $0 \leq k \leq g$ cuando $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es no orientable.

Las superficies de Riemann de alguna clase específica tienen, en general, mayores restricciones. Así para las superficies reales trigonales cíclicas, correspondientes a las curvas de ecuación $y^3 - f(x) = 0$, las posibles especies son -1 para superficies de género impar y $+3, +1, -1$ para aquellas de género par como se demuestra en la referencia [33] en la que también se demuestra que no hay restricciones para las superficies trigonales genéricas. Contestando así a una pregunta de Gross y Harris en la referencia [52].

El caso de las posibles especies de las superficies reales p-gonales cíclicas, curvas de ecuación $x^p - f(x) = 0$, se estudia en las referencias [32, 18].

Las restricciones para las superficies p-gonales diédricas reales se analizan a continuación.

5.1. Cubiertas p-gonales diédricas

Vamos a estudiar un conjunto de superficies de Riemann compactas de un tipo específico. Aquellas que admiten una cubierta de p -hojas (siendo p un

número primo) de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, considerada como orbifold, de un tipo que ahora describiremos. Esta cubierta será irregular.

Vamos a describir las cubiertas $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ que queremos considerar: Si B es el conjunto de valores de f en los puntos de ramificación, $E = f^{-1}(B)$ y $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} - B$. Si $f^{-1}(z_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ la monodromía del recubrimiento $\omega : \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B, z_0) \rightarrow S_p$ está definida de la siguiente manera: Sea $[\gamma] \in \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B, z_0)$ y $\tilde{\gamma}_i$ un levantamiento de γ con origen en x_i , entonces $\tilde{\gamma}_i$ termina en $x_{\omega([\gamma])(i)}$.

DEFINICIÓN 5.1.1. Un recubrimiento ramificado $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es p -gonal diédrico cuando la imagen de $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B, z_0)$ por la monodromía ω es (salvo reenumeración):

$$\left\langle (0, 1, \dots, p-1), (1, p-1)(2, p-2) \dots \left(\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) \right\rangle \cong D_p$$

(D_p es el grupo diédrico de orden $2p$). En este caso decimos que X es una superficie diédrica p -gonal.

Sea F el subgrupo de $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B, z_0)$ imagen de $\pi_1(X - E, x_0)$ por f_* . Como consecuencia de la definición tenemos las siguientes propiedades de f :

1. La cubierta $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es irregular, es decir F no es un subgrupo normal de $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B, z_0)$, se tiene que $\omega(F) = Stab(0)$.
2. A cada meridiano alrededor de un punto $b \in B$, ω le asigna una permutación del tipo $(a, b)(c, d) \dots (f, h)(e)$ o un p -ciclo, por tanto la cubierta no es simple.

El núcleo de ω define una superficie que es una cubierta regular de $\widehat{\mathbb{C}} - B$, que puede completarse a un recubrimiento ramificado de $\widehat{\mathbb{C}}$ de grado $2p$.

Dicho recubrimiento lo denotamos $\hat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. El recubrimiento ramificado, de grado 2, $q : \widehat{X} \rightarrow X$, definido por $ker(\omega \circ f_*) \subset \pi_1(X - E, x_0)$ es también regular de grado 2.

Los grupos de transformaciones recubridoras son:

$$Deck(\widehat{X}, X) \cong C_2 \text{ y } Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}}) \cong D_p$$

Además existe $t \in Deck(\widehat{X}, X) \subset Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}})$ de orden 2 tal que $X = \frac{\widehat{X}}{\langle t \rangle}$.

NOTA. Llamaremos al entero positivo $\alpha = \frac{p-1}{2}$ *coeficiente p -diédrico del recubrimiento*.

5.2. Uniformización de cubiertas p-gonales diédricas

Supongamos que X es una superficie de Riemann de género $g \geq 2$, y que $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una cubierta p-gonal diédrica de la esfera de Riemann. Hemos visto que existe un recubrimiento regular $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, con grupo de transformaciones $Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}}) \cong D_p = \langle t, r; t^2, r^2, (tr)^p \rangle$.

Entonces hay un grupo fuchsiano de signatura $(0; 2, \dots^m \dots, 2, p, \dots^n \dots, p)$, que escribiremos $(0; 2^m, p^n)$, y un epimorfismo $\theta : \Delta \rightarrow D_p$ tal que $\Lambda = \ker(\theta)$ es un grupo fuchsiano de superficie (sin elementos elípticos) que uniformiza \widehat{X} y una aplicación $f : \widehat{X} \cong \mathbb{H}/\ker(\theta) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{H}/\Delta$. Además si $\langle t \rangle = Deck(\widehat{X}, X)$ entonces $\Gamma = \theta^{-1}(\langle t \rangle)$ uniformiza X .

Tenemos así el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} = \mathbb{H}/\Lambda & \xrightarrow{q \text{ grado } 2} & X = \mathbb{H}/\Gamma \\ & \searrow \widehat{f} \text{ grado } 2p & \downarrow f \text{ grado } p \\ & & \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/\Delta \end{array}$$

El grupo fuchsiano Γ tendrá signatura $(g; 2^m)$, $m > 0$, y en general Γ no es un grupo de superficie, por lo que X admite una estructura de orbifold.

La fórmula de Riemann-Hurwitz implica que:

$$2g - 2 + \frac{m}{2} = p(-2 + \frac{m}{2} + \frac{(p-1)n}{p}) \text{ por tanto}$$

$$g = \frac{p-1}{4}m + \frac{p-1}{2}n - p + 1 = \frac{p-1}{2}(\frac{m}{2} + n - 2) = \alpha(\frac{m}{2} + n - 2).$$

OBSERVACIÓN. Sea \mathcal{M}_g el espacio de módulos de las superficies de Riemann de género g . \mathcal{M}_g es un orbifold complejo de dimensión $3g - 3$. Las superficies de Riemann cíclicas de género g se uniformizan mediante grupos fuchsianos con signatura $(0; p^N)$, donde $N = (g + p - 1)\frac{2}{p-1}$.

Por tanto el conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_g$ de las superficies p-gonales cíclicas es un orbifold dimensión compleja $N - 3$ (referencia [81]).

Las superficies p-gonales diédricas, con únicamente puntos de ramificación de orden 2, se uniformizan mediante grupos fuchsianos de signatura $(0; 2^{N'})$, siendo $N' = (g + p - 1)\frac{4}{p-1}$, en este caso $N' = 2N$ (N' sigue siendo mayor que N incluso cuando hay algunos puntos con ramificación de orden p). Así el conjunto \mathcal{D} de las superficies p-gonales diédricas en \mathcal{M}_g tiene dimensión $N' - 3 = 2N - 3$. Como la dimensión de \mathcal{D} es mayor que la dimensión \mathcal{C}

podemos concluir que las superficies p -gonales diédricas aparecen con mayor frecuencia que las p -gonales cíclicas en el espacio de móduli de las superficies de Riemann de género g .

5.3. Cubiertas p -gonales diédricas reales

5.3.1. Levantamientos de involuciones de la esfera de Riemann.

Cada involución anticonforme de la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ es conjugada de la conjugación compleja $c : z \rightarrow \bar{z}$ o de la aplicación antípoda $z \rightarrow -\frac{1}{\bar{z}}$.

La terna (X, f, σ) se denomina *superficie de Riemann p -gonal real* (referencias [94]), cuando:

- X es una superficie de Riemann.
- $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es un morfismo p -gonal.
- σ es una involución anticonforme de X que es un levantamiento de la conjugación compleja c . Es decir conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{c} & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

Análogamente si en lugar de σ existe una involución anticonforme τ de X que es un levantamiento de la aplicación antípoda la terna (X, f, τ) se denomina *superficie de Riemann p -gonal antípoda*.

La conmutación del diagrama, es decir la compatibilidad del levantamiento de la involución y del morfismo p -gonal está asegurada cuando el género de X es mayor que $(p-1)^2$ (referencias [2, 3, 4, 5, 6]).

LEMA 5.3.1. *Sea $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una cubierta p -gonal diédrica y σ una involución anticonforme de X que es un levantamiento de la conjugación compleja. Si $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es la cubierta descrita en las secciones 5.1 5.2, entonces existe un automorfismo anticonforme $\widehat{\sigma}$ de \widehat{X} que es un levantamiento de ambos σ y c . Análogamente si τ es un levantamiento de la aplicación antípoda.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $B \subset \widehat{\mathbb{C}}$ el conjunto de valores de ramificación de f , $E = f^{-1}(B)$, $\widehat{E} = \widehat{f}^{-1}(B)$, y ω la monodromía de f , $\omega : \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B) \rightarrow S_p$. Entonces tenemos que $f_*(\pi_1(X - E)) = \omega^{-1}(\text{Stab}(0))$ y $\widehat{f}_*(\pi_1(\widehat{X} - \widehat{E})) = \ker(\omega)$.

Vamos a demostrar que $c_*(\ker(\omega)) = \ker(\omega)$ donde $c_* : \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B) \rightarrow \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} - B)$ es el isomorfismo inducido por la conjugación compleja c . Esto implica que podemos levantar c a \widehat{X} porque en este caso $(c \circ \widehat{f})_*(\pi_1(\widehat{X} - \widehat{E})) =$

$c_*(\ker(\omega)) = \ker(\omega)$, y, por continuidad, podemos extender el levantamiento a \widehat{X} , tendremos así el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \widehat{X} - \widehat{E} \\ & & & & \downarrow \widehat{f} \\ \widehat{X} - \widehat{E} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{C} - B & \xrightarrow{c} & \widehat{C} - B \end{array}$$

Como existe un levantamiento σ de c a X tenemos que $c_*(Stab(0)) \subset Stab(0)$ y como c_* es un isomorfismo $c_*(Stab(0)) = Stab(0)$.

Si $[\gamma] \in \ker(\omega) \subset Stab(0)$ entonces, a priori, hay dos posibilidades:

$$\omega(c_*([\gamma])) = \begin{cases} id \\ (0)(1, p-1) \dots \left(\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) \end{cases}$$

que son las permutaciones que estabilizan 0 en D_p .

Pero solo la identidad es posible, porque en el otro caso existiría un levantamiento cerrado $\tilde{\gamma}$ de γ a X tal que $\sigma \circ \tilde{\gamma}$ (levantamiento de un representante de $c_*([\gamma]) = [c \circ \gamma]$) es un camino abierto lo que no es posible siendo σ un homeomorfismo.

Ahora podemos demostrar que σ puede levantarse a \widehat{X} . Consideremos el siguiente diagrama (con la notación de las secciones 5.1,5.2):

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{X} - \widehat{E} & \xrightarrow{q} & X - E & \xrightarrow{\sigma} & X - E \\ & \searrow \widehat{f} & \downarrow f & & \downarrow f \\ & & \widehat{C} - B & \xrightarrow{c} & \widehat{C} - B \end{array}$$

Considerando los homomorfismos inducidos:

$$f_* \circ \sigma_* \circ q_*(\pi_1(\widehat{X} - \widehat{E})) = c_* \circ \widehat{f}_*(\pi_1(\widehat{X} - \widehat{E})) = c_*(\ker(\omega))$$

$$c_*(\ker(\omega)) = \ker(\omega) = \widehat{f}_*(\pi_1(\widehat{X} - \widehat{E})) = f_* \circ q_*(\pi_1(\widehat{X} - \widehat{E}))$$

y siendo f_* un monomorfismo $\sigma_* \circ q_*(\pi_1(\widehat{X} - \widehat{E})) = q_*(\pi_1(\widehat{X} - \widehat{E}))$ que es la condición para la existencia de un levantamiento de σ . \square

OBSERVACIÓN. Notar que un levantamiento $\widehat{\sigma}$ de σ es también un levantamiento de c .

LEMA 5.3.2. *Con las condiciones y notaciones del lema previo. Existe una involución anticonforme de orden 2 en el grupo $\langle D_p, \widehat{\sigma} \rangle$ (En el teorema siguiente demostraremos, que $\widehat{\sigma}$ es además una involución anticonforme de \widehat{X}).*

DEMOSTRACIÓN. El orbifold $\frac{\widehat{X}}{\langle D_p, \widehat{\sigma} \rangle}$ se uniformiza por el grupo N.E.C. Θ (o sea $\frac{\widehat{X}}{\langle D_p, \widehat{\sigma} \rangle} \cong \frac{\mathbb{H}}{\Theta}$), siendo $\Lambda \triangleleft \Theta$ un grupo fuchsiano de superficie (sin elementos elípticos) que uniformiza \widehat{X} y $\frac{\Theta}{\Lambda} \cong \langle D_p, \widehat{\sigma} \rangle$ (referencia [22]). Existe un elemento en Θ , que es un levantamiento de c y que fija una curva, siendo así de orden 2. Ese elemento se proyecta en $\langle D_p, \widehat{\sigma} \rangle$ en un automorfismo anticonforme de orden 2. \square

TEOREMA 5.3.1. *Sea X una superficie de Riemann p -gonal diédrica de género g que admite una involución anticonforme σ que es un levantamiento de la conjugación compleja. Entonces existe un grupo N.E.C. Ξ con signatura:*

$$(0, +, [2^{m_1}, p^{n_1}], \{(2^{m_2}, p^{n_2}, 2^{m_3}, \dots)\})$$

y un epimorfismo $\widehat{\theta} : \Xi \rightarrow D_{2p} = \langle s, t, r; s^2, t^2, r^2, (tr)^p, stst, srsr \rangle$, tal que:

- *orden(w) = orden($\widehat{\theta}(w)$), para los elementos w de orden finito de Ξ .*
- $X = \frac{\mathbb{H}}{\widehat{\theta}^{-1}(\langle t \rangle)}$.
- $\widehat{\theta}^{-1}(\langle t \rangle)$ tiene signatura $(g; 2^l)$.

DEMOSTRACIÓN. Usaremos la notación de la sección 5.2 para los grupos que uniformizan las superficies en consideración.

Sea una transformación recubridora $\varphi \in Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}})$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{X} & \xrightarrow{\widehat{\sigma}} & \widehat{X} & \xrightarrow{\varphi} & \widehat{X} & \xrightarrow{\widehat{\sigma}^{-1}} & \widehat{X} \\ \downarrow \widehat{f} & & \downarrow \widehat{f} & & \downarrow \widehat{f} & & \downarrow \widehat{f} \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{c} & \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{id} & \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{c} & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

La aplicación $\widehat{\sigma} \circ \varphi \circ \widehat{\sigma}^{-1} \in Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}})$, donde $\widehat{\sigma}$ es el levantamiento de σ construido en in 5.1. Es decir existe $\psi \in Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}})$ tal que $\widehat{\sigma} \circ \varphi = \psi \circ \widehat{\sigma}$ y análogamente $\widehat{\sigma}^{-1} \circ \varphi = \psi' \circ \widehat{\sigma}^{-1}$.

Así para cada elemento $\phi = \widehat{\sigma}^a \circ \varphi^b \circ \widehat{\sigma}^c \dots$ una de dos o $\phi \in Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}})$ o $\phi \in \widehat{\sigma} \circ Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}})$. Por tanto $Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}})$ es un subgrupo normal de $Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}}) \cup \widehat{\sigma} \circ Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}})$. En resumen $Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}}) \cup \widehat{\sigma} \circ Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}})$ es de orden $4p$ y tiene un subgrupo normal isomorfo a D_p .

Sea $G = \langle Deck(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{C}}), \widehat{\sigma} \rangle \subset Aut(\widehat{X})$ y Ξ un grupo N.E.C. que uniformiza el orbifold \widehat{X}/G y tal que $\widehat{X} \cong \mathbb{H}/\Lambda \rightarrow \widehat{X}/G \cong \mathbb{H}/\Xi$, donde Λ es un grupo fuchsiano de superficie que es un subgrupo normal de Ξ . Este subgrupo tiene a Δ como su fuchsiano asociado, o sea: $\Delta = \Xi^+$.

Como Δ tiene signatura $(0; 2^m, p^n)$ y $\mathbb{H}/\Xi \cong \frac{\widehat{\mathbb{C}}}{\langle c \rangle}$, el grupo N.E.C. Ξ tendrá signatura $(0, +, [2^{m_1}, p^{n_1}], \{(2^{m_2}, p^{n_2}, 2^{m_3}, \dots)\})$ cumpliéndose (ver [21]):

$$m = 2m_1 + \sum_{i=2} m_i \quad n = 2n_1 + \sum_{i=2} n_i.$$

El morfismo de Klein $\widehat{X} \cong \mathbb{H}/\Lambda \rightarrow \widehat{X}/G \cong \mathbb{H}/\Xi$, determina un epimorfismo $\widehat{\theta} : \Xi \rightarrow G$ con núcleo $\ker \widehat{\theta} = \Lambda$. El grupo G , como grupo abstracto debe cumplir:

- Debe tener un subgrupo normal isomorfo a D_p (que también denotaremos D_p).
- $G - D_p$ debe contener al menos un elemento de orden 2 (por el lema 5.3.2).
- Los elementos de $G - D_p$, como son anti-conformes, han de tener orden par.
- El producto de un número par de elementos de $G - D_p$ debe pertenecer a D_p , y el producto de un número impar de elementos a $G - D_p$.

El grupo $D_{2p} = \langle s, t, r; s^2, t^2, r^2, (tr)^p, st = ts, sr = rs \rangle$ cumple todos los requerimientos.

Por los teoremas de Sylow G tiene que tener subgrupos de orden 4 que serán conjugados. Si sólo hubiera un subgrupo H de orden 4 entonces sería normal y el grupo G/H sería de orden p (primo) y por tanto cíclico con todos sus elementos no triviales de orden p , pero las reflexiones de D_p tienen que tener orden 2 y hay p reflexiones, lo que es imposible.

Por tanto deben existir p subgrupos isomorfos de orden 4.

Los elementos de $G - D_p$ tienen que ser de orden par, así los órdenes posibles son: 2, 4, 2p, 4p. El orden 4p es imposible pues en ese caso G sería cíclico. Si hubiera un elemento de orden 4 todos los subgrupos de orden 4 (conjugados) serían cíclicos y existirían $2p$ elementos diferentes de orden 4, dos en cada subgrupo, y no habría elementos de orden 2 en $G - D_p$.

(Es interesante notar que el producto semi-directo $C_5 \rtimes C_4 = \langle s, t; s^4, t^5, ts = st^2 \rangle$ tiene a D_5 como subgrupo normal y 10 elementos de orden 4 cumpliendo dichas condiciones).

Por tanto todos los elementos de $G - D_p$ son de orden 2 o $2p$.

Los elementos de orden $2p$ se pueden agrupar en parejas, $\{a, a^{-1}\}, \{b, b^{-1}\}, \dots$ habiendo por tanto un número par de ellos. Como el número total de elementos es par ($2p$), el número de elementos de orden 2 de $G - D_p$ también debe serlo.

Como resultado de lo anterior, ahora podemos afirmar que el automorfismo $\hat{\sigma}$ es de orden 2.

Los subgrupos de orden 4 tiene que ser grupos $C_2 \times C_2$ (“Klein vierergruppe”) (ver [38]): $\langle a, b; a^2, b^2, (ab)^2 \rangle$, así deberá haber p pares de elementos de orden 2 que conmutan. Sabemos además que ningún par de elementos de D_p conmutan.

Denotaremos por s_i a los elementos de orden 2 de $G - D_p$ y por t_i a los elementos de orden 2 de D_p . Podemos tener 2 tipos de subgrupos de orden 4: $\{1, s_1, t_1, s_1 t_1\}$ o $\{1, s_1, s_2, s_1 s_2\}$ pero el segundo caso se reduce al primero pues $s_1 s_2 \in D_p$ y podemos considerar $t_1 = s_1 s_2$, $s_2 = s_1 t_1$.

Supongamos que hubiera dos subgrupos que comparten s_1 : $\{1, s_1, t_1, s_1 t_1\}$ y $\{1, s_1, t_2, s_1 t_2\}$. Como $s^2 = t_1^2 = t_2^2 = 1$, $s t_1 = t_1 s$, $s t_2 = t_2 s$, $(t_1 t_2)^p = 1$ entonces G es un subgrupo de D_{2p} puesto que cumple todas sus relaciones y como son del mismo orden $G = D_{2p}$.

Consideremos ahora los subgrupos generados por $\langle s_1, t_1 \rangle$, $\langle s_1, t_2 \rangle$. Si ambos fueran de orden 4 estaríamos en el caso anterior. Si $s_1 t_1$ o $s_1 t_2$ tuvieran orden $2p$, supongamos que lo sea $s_1 t_1$, entonces sería un subgrupo con presentación $\langle s_1, t_1; s_1^2, t_1^2, (s_1 t_1)^{2p} \rangle$ que otra vez es D_{2p} . \square

Observación 5.3.1. En el caso de superficies antípodas obtenemos resultados similares, pero en este caso el grupo, imagen del epimorfismo $\hat{\theta}$, podría ser, además de D_{2p} , un grupo de orden $4p$ que tiene a D_p como subgrupo normal y $2p$ elementos de orden 4 (Sería un producto semi-directo $C_p \rtimes C_4$). Esto puede ocurrir si y sólo $p \equiv 1 \pmod{4}$ (En el caso de $p = 5$ el grupo con esas características es el grupo de Frobenius).

COROLARIO 5.3.1. *El género de una superficie de Riemann X p -gonal diédrica real, está relacionada con la signatura del grupo Ξ por*

$$\begin{aligned} g &= \frac{p-1}{2} m_1 + \frac{p-1}{4} \sum_{i=2} m_i + 2(p-1)n_1 + (p-1) \sum_{i=2} n_i - p + 1 = \\ &= \alpha(m_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2} m_i + 4n_1 + 2 \sum_{i=2} n_i - 2) \end{aligned}$$

(siendo α el coeficiente p -diédrico).

OBSERVACIÓN. Posteriormente veremos (teorema 5.4.2) que $\sum m_i$ es un número par y por tanto el género de una superficie p -gonal diédrica real ha de ser múltiplo de α . Un resultado similar para subgrupos normales de un grupo N.E.C. puede verse en [23].

5.3.2. Superficies p-gonales diédricas reales obtenidas a partir de grupos.

Dado un grupo N.E.C. Ξ de signatura $(0, +, [2^{m_1}, p^{n_1}], \{(2^{m_2}, p^{n_2}, 2^{m_3}, \dots)\})$ cada epimorfismo $\hat{\theta} : \Xi \rightarrow D_{2p} = \langle s, t, r; s^2, t^2, r^2, (tr)^p, st = ts, sr = rs \rangle$, que cumpla ciertas condiciones, genera una superficie p-gonal diédrica real (X, f, σ) , donde $f : X = \frac{\mathbb{H}}{\hat{\theta}^{-1}\langle t \rangle} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} = \frac{\mathbb{H}}{\hat{\theta}^{-1}\langle t, r \rangle}$.

Las condiciones requeridas son:

1. Los generadores de reflexión de Ξ siendo anti-conformes de orden 2 deben tener asignados elementos de tipo s o $(tr)^m t s$.
2. Los generadores elípticos de Ξ deben tener asignados elementos del tipo $(tr)^m$ si son de orden p o de tipo $(tr)^m t$, $1 \leq m \leq p-1$, si son de orden 2.
3. Los generadores de conexión pueden tener asignados cualquier tipo de elemento que contenga s en su palabra reducida, incluida la identidad.

TEOREMA 5.3.2. *Sea Ξ un grupo N.E.C. de signatura:*

$$(0, +, [2^{m_1}, p^{n_1}], \{(2^{m_2}, p^{n_2}, 2^{m_3}, \dots)\})$$

y $\hat{\theta} : \Xi \rightarrow D_{2p}$ un epimorfismo que cumple todas las condiciones anteriores. Entonces existe una superficie p-gonal X que soporta una involución anticonforme que es un levantamiento de la conjugación compleja y es equivalente conforme a $\frac{\mathbb{H}}{\hat{\theta}^{-1}\langle t \rangle}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea X la superficie uniformizada por $\Gamma = \hat{\theta}^{-1}\langle t \rangle$ con signatura $(g; 2^m)$. Γ es un subgrupo de índice p de $\Delta = \hat{\theta}^{-1}\langle t, r \rangle$. La proyección $\frac{\mathbb{H}}{\Gamma} \rightarrow \frac{\mathbb{H}}{\Delta}$ será un morfismo p-gonal, y la proyección $\pi = \frac{\mathbb{H}}{\Gamma} \rightarrow \frac{\mathbb{H}}{\hat{\theta}^{-1}\langle s, t \rangle}$ definirá una involución anticonforme que conmutará con el morfismo p-gonal. \square

5.4. Número de óvalos de una cubierta p-gonal diédrica real.

Sea (X, f, σ) una superficie de Riemann p-gonal diédrica real (recordar que estamos suponiendo $p, p > 2$). Hay que notar, en primer lugar, que debe haber al menos un óvalo fijado por σ al ser p primo y σ de orden 2. En efecto: consideremos un entorno simétrico, es decir que la conjugación compleja intercambie sus mitades, de un punto $z \in \mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{C}}$. Este entorno se levanta por f a p entornos de X tales que σ intercambiará mitades de los mismos. Como p es impar debe existir al menos un entorno tal que σ intercambie sus mitades.

Vamos a seguir empleando la notación de las secciones anteriores.

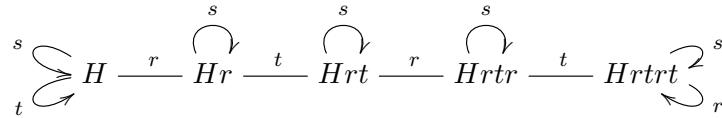
Para obtener el número de óvalos, o lo que es lo mismo el número de componentes de la frontera de $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$, aplicaremos el método de Hoare-Singerman (referencia [106, 61]) descrito con detalle en el capítulo anterior.

Para ello tenemos que saber como actúa cada elemento de Ξ en las clases por la derecha del subconjunto $\hat{\theta}^{-1}(\langle s, t \rangle)$. Esta acción puede estudiarse mediante la acción de los elementos de D_{2p} en las clases por la derecha del subconjunto $\langle s, t \rangle$ es decir por $\rho : D_{2p} \rightarrow \mathcal{P}\{\langle s, t \rangle - \text{cosets}\} = S_p$.

Por los resultados previos tenemos un epimorfismo:

$$\chi : \Xi \rightarrow D_{2p} \rightarrow S_p = \mathcal{P}\{\langle s, t \rangle - \text{cosets}\}$$

Denotamos $H = \langle s, t \rangle$. Para $p = 5$, por ejemplo, la acción $\rho : D_{2p} \rightarrow S_p$ produce el siguiente grafo de Schreier:



y por tanto a las permutaciones:

$$\rho(s) = id, \quad \rho(t) = (0)(1, 2)(3, 4), \quad \rho(r) = (0, 1)(2, 3)(4)$$

donde hemos usado la numeración: $0 = H, 1 = Hr, 2 = Hrt...$

Por cada generador de reflexión c_i de Ξ , $\chi(c_i)$ es o la identidad o una permutación de la forma $(a, b)(c, d), \dots, (x, y)(z)$, y por tanto, según el método de Hoare-Singerman, c_i produce p generadores de reflexión $C_{i,1}, \dots, C_{i,p}$ de $\hat{\theta}^{-1}(H)$ o exactamente un generador de reflexión $C_{i,z}$.

Tenemos ahora que determinar cuando dos generadores de reflexión $C_{i,j}$ y $C_{k,l}$ de $\hat{\theta}^{-1}(H)$, originados respectivamente por las reflexiones c_i y c_k , están “enlazados”, entonces escribiremos $C_{i,j} \sim C_{k,l}$. Según el método de Hoare-Singerman, el número de clases de equivalencia de la relación \sim de los generadores $C_{i,j}$ nos proporcionará el número de óvalos de σ .

Diremos que un par de reflexiones c_j, c_{j+1} de Ξ son adyacentes si $c_j c_{j+1}$ tiene órdenes 2 o p . Un par de reflexiones adyacentes puede dar lugar a tres diferentes tipos de parejas $(\hat{\theta}(c_i), \hat{\theta}(c_{j+1}))$:

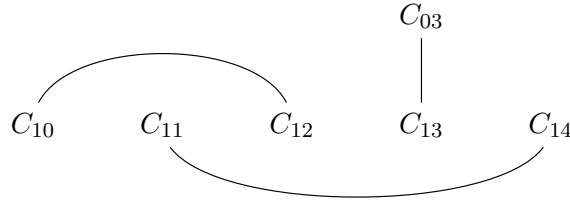
- (s, a) o (a, s) Donde a representa cualquier reflexión de tipo $(tr)^k ts$, cuando $c_j c_{j+1}$ tiene orden 2.
- (a, b) Donde a, b representan reflexiones distintas de s , cuando $c_j c_{j+1}$ tiene orden p .

Las parejas de tipo (s, a) producen generadores de reflexión $C_{j,0}, \dots, C_{j,p-1}$ y $C_{j+1,r}$ en $\widehat{\theta}^{-1}(H)$, y si $\rho(a) = (l, m)(n, q)\dots(r)$ tendremos los enlaces:

$$C_{j,l} \sim C_{j,m}, C_{j,n} \sim C_{j,q}, C_{j,r} \sim C_{j+1,r}$$

como hemos visto en el capítulo anterior.

Tenemos un resultado para las parejas de tipo (a, s) . El siguiente gráfico muestra los enlaces para el ejemplo: $p = 5, \rho(a) = (0, 2)(1, 4)(3)$



Por tanto los generadores de reflexión $C_{j,0}, \dots, C_{j,n-1}$ y $C_{j+1,r}$ están en, a lo sumo, $\frac{p-1}{2} + 1$ clases de equivalencia.

El caso (a, b) , siendo ambos elementos diferentes de s , resultan en un par de reflexiones enlazadas en $\widehat{\theta}^{-1}(H)$. Si $\rho(a)$ fija m y $\rho(b)$ fija q , se tiene $C_{j,m} \sim C_{j+1,q}$.

5.4.1. Grupos adyacentes de reflexiones.

Sea $(\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta, \dots)$ la sucesión de permutaciones obtenidas χ a partir de la sucesión de reflexiones adyacentes (c_1, c_2, \dots) . Escribiremos $(\alpha, \beta, \dots, \gamma, \delta) = (A, \gamma, \delta)$.

Llamaremos $O_{(A,\gamma)}$ al número de clases de equivalencia producidas por la relación \sim en el conjunto de reflexiones $C_{j,k}$ correspondientes a las reflexiones originadas por la subsucesión (A, γ) . Análogamente definiremos $O_{(A,\gamma,\delta)}$. Vamos a considerar los casos: $(A, \rho(a), \delta)$ y $(A, \rho(s), \delta)$.

En el caso de $(A, \rho(a), \delta)$, por lo comentado en la sección anterior, el número $O_{(A,\rho(a),\delta)}$ de la sucesión completa $(A, \rho(a), \delta)$ es:

$$O_{(A,\rho(a),\delta)} = O_{(A,\rho(a))}$$

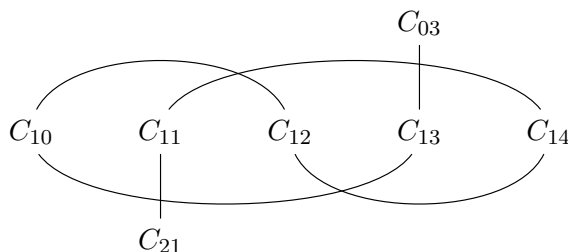
o

$$O_{(A,\rho(a),\delta)} = O_{(A,\rho(a))} + \frac{p-1}{2}$$

El caso $(A, \rho(s), \delta)$ se subdivide en dos subcasos: $(A', \rho(a), \rho(s), \rho(a))$ y $(A', \rho(a), \rho(s), \rho(b))$.

En el primer subcaso tenemos $O_{(A,\rho(s),\delta)} = O_{(A,\rho(s))}$ y en el segundo $O_{(A,\rho(s),\delta)} = O_{(A,\rho(s))} - \frac{p-1}{2}$

El caso $p = 5$, $\rho(a) = (0, 2)(1, 4)(3)$, $\rho(b) = (0, 3)(2, 4)(1)$ se ilustra en la siguiente figura:



En resumen, por el momento tenemos $N^{\frac{p-1}{2}} + 1$ clases de reflexiones (todavía no hemos tenido en cuenta la primera y la última reflexión).

5.4.2. Enlace entre las reflexiones primera y última.

La relación $c_n e c_0 e^{-1} = 1$ o $c_n = c_0^e$ origina la última equivalencia. Si $\widehat{\theta}(c_0) = a$ siendo $\rho(a) \neq id$, entonces $\chi(c_n) \neq id$ y existe un enlace $C_{0,j} \sim C_{n,k}$ pero esta relación no es nueva (el primer y último “nivel” ya estaban enlazados) y por tanto no altera el número de clases de equivalencia.

Si la asignación (por $\widehat{\theta}, \rho$) es $c_0 \rightarrow s \rightarrow id$ tenemos también que $\chi(c_n) = id$ y dos casos distintos dependiendo si $\widehat{\theta}(c_0 c_1) = sa$, $\widehat{\theta}(c_{n-1} c_n) = as$ o $\widehat{\theta}(c_0 c_1) = sa$, $\widehat{\theta}(c_{n-1} c_n) = bs$. En el primer caso no hay nuevos enlaces entre los elementos $C_{0,i}$ y $C_{n,j}$ y en el segundo esta nueva relación decremента el número de clases en $\frac{p-1}{2}$.

Por tanto hemos demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA 5.4.1. *Sea (X, f, σ) una superficie p-gonal diédrica real. El número k de óvalos de σ debe cumplir: $k \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{2}}$.*

TEOREMA 5.4.2. *El número de ciclo-periodos de orden 2 de una superficie p-gonal diédrica real es par.*

DEMOSTRACIÓN. Exceptuando la primera y última reflexión los ciclo-periodos de orden par están originados por asignaciones (a, s) o (s, a) y por tanto tendremos una sucesión $(a, s)(s, b)$ y el número de estos ciclo-periodos será par, pero además si la primera reflexión tiene asignado s también lo debe de tener la última. \square

5.5. Orientabilidad

Sea (X, f, σ) una superficie de Riemann p-gonal diédrica real. Para analizar la orientabilidad de la superficie de Klein $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ usamos el teorema 4.4.2.

Con la terminología de las secciones anteriores la particularización de dicho teorema es:

TEOREMA 5.5.1. *La superficie de Klein $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es orientable si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. *No hay periodos propios en la signatura del grupo Ξ y el conjunto $\{c_i\}$ de los generadores de reflexión satisface: $\widehat{\theta}\{c_i\} \subset \{s, (tr)^{k_1}ts, (tr)^{k_2}ts\}$ siendo $k_1 \neq k_2$.*
2. *Hay sólo periodos propios de orden 2 en la signatura del grupo Ξ . Los generadores elípticos $\{x_i\}$ satisfacen $\widehat{\theta}\{x_i\} = \{(tr)^{k_1}t\}$ y los generadores de reflexión $\{c_i\}$ satisfacen $\widehat{\theta}\{c_i\} \subset \{s, (tr)^{k_2}ts\}$ donde $k_1 \neq k_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Si hay un generador elíptico de orden p entonces $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ no puede ser orientable porque la acción de dicho generador en las clases por la derecha de $\widehat{\theta}^{-1}(H)$ produciría una órbita de p clases y no podemos obtener una bipartición como la que exige el teorema 4.4.2.

Consideremos un polígono regular \mathcal{P} , de p lados, en el plano y nombramos los vértices de \mathcal{P} con las clases por la derecha de $\widehat{\theta}^{-1}(H)$.

El primer caso se sigue del hecho que dadas dos reflexiones en el plano que son simetrías de \mathcal{P} , existe sólo una bi-coloración, de los vértices de \mathcal{P} , tal que ambas reflexiones permuten los colores.

El segundo caso se sigue del hecho que dadas dos reflexiones en el plano que son simetrías de \mathcal{P} , existe sólo una bi-coloración, de los vértices de \mathcal{P} , tal que una reflexión mantenga los colores y la otra los permute. \square

Un ejemplo concreto, para ilustrar el teorema, para $p = 7$ es el siguiente: Consideremos que las permutaciones $p_1 = (0, 6)(1, 5)(2, 4)(3)$ y $p_2 = (0, 1)(2, 6)(5, 3)(4)$, son las imágenes de dos reflexiones. Podemos construir el siguiente camino en el grafo de Schreier (representando por \Rightarrow las adyacencias de p_1 y por \rightarrow las adyacencias de p_2):

$$\circlearrowleft 4 \Rightarrow 2 \rightarrow 6 \Rightarrow 0 \rightarrow 1 \Rightarrow 5 \rightarrow 3 \circlearrowright$$

Este tipo de caminos, comenzando en un punto fijo de p_2 , siempre terminan en un punto fijo de p_1 (porque si no fuera así el producto no sería una rotación).

Si queremos construir una bi-partición tal que p_1, p_2 intercambien las clases comenzamos, como en el camino descrito anteriormente, en 4 (punto fijo de

p_2) y saltando las aristas de dos en dos obtenemos que uno de los conjuntos de la bi-partición ha de ser $\{4, 6, 1, 3\}$ (tiene $\frac{p+1}{2}$ elementos).

Si queremos construir una bi-partición tal que p_1 intercambie las clases y p_2 las fije comenzamos en 4 (punto fijo de p_2), los dos siguientes elementos han de estar en la clase que no está 4, y los dos situados a continuación de estos en la misma. Así obtenemos la bi-partición $\{4, 0, 1\}, \{2, 6, 5, 3\}$.

5.6. Construcción de cubiertas p-gonales diédricas reales

Para construir superficies p-gonales diédricas reales con especies $+k = (i\alpha + 1)$ partimos de un grupo N.E.C. de signatura:

$$(0, +, [-], \{(2^{\frac{2g}{\alpha}+4}\})\})$$

Ahora consideramos el epimorfismo $\widehat{\theta} : \Xi \rightarrow D_{2p}$ definido por la siguiente tabla:

i	$\widehat{\theta}(c_i)$	O_i
0	a	1
1	s	$\alpha + 1$
2	a	$\alpha + 1$
3	s	$2\alpha + 1$
...
$2i - 1$	s	$i\alpha + 1$
$2i$	a	$i\alpha + 1$
$2i + 1$	s	$i\alpha + 1$
$2i + 2$	b	$i\alpha + 1$
$2i + 3$	s	$i\alpha + 1$
$2i + 4$	a	$i\alpha + 1$
...
$2i + 4q$	a	$i\alpha + 1$

Donde O_i es el número de clases producidas por la relación \sim en los generadores de reflexión $C_{j,k}$ de $\widehat{\theta}^{-1}(\langle s, t \rangle)$ correspondientes a la reflexiones c_0, \dots, c_i .

Notar que mínimo valor de q debe ser 1 porque si $q = 0$ entonces $\widehat{\theta}$ no sería un epimorfismo.

Tenemos que $2i + 4q = \frac{2g}{\alpha} + 4$ (donde g es el género de la superficie) luego el número de óvalos es $i\alpha + 1 = g + 1 - 2(q - 1)\alpha$. Por tanto el teorema de Harnack, y la condición, en el número de óvalos, $k \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{2}}$ son las únicas restricciones para el caso de especie $+k$.

Esta construcción no es, en modo alguno única. Otra con generadores elípticos de orden p se construye partiendo de la signatura $(0, +, [-], \{(2^{2i}, p^q)\})$ y el epimorfismo definido por la tabla:

i	$\widehat{\theta}(c_i)$	O_i
0	a	1
1	s	$\alpha + 1$
2	a	$\alpha + 1$
3	s	$2\alpha + 1$
...
$2i - 1$	s	$i\alpha + 1$
$2i$	a	$i\alpha + 1$
$2i + 1$	b	$i\alpha + 1$
$2i + 2$	a	$i\alpha + 1$
$2i + 3$	b	$i\alpha + 1$
$2i + 4$	a	$i\alpha + 1$
...
$2i + 2q$	a	$i\alpha + 1$

Ahora tendremos $g = (i + 2q - 2)\alpha$ y $i\alpha + 1 = g + 1 - 2(q - 1)\alpha$ como en el caso anterior.

Para especies $-k$ partimos de la signatura $(0, +, [-], \{(2^{\frac{2q}{\alpha}+4}\})$ y de la tabla:

i	$\widehat{\theta}(c_i)$	O_i
0	s	1
1	a	1
2	s	$\alpha + 1$
3	a	$\alpha + 1$
...
$2i$	s	$i\alpha + 1$
$2i + 1$	a	$i\alpha + 1$
$2i + 2$	s	$i\alpha + 1$
$2i + 3$	b	$i\alpha + 1$
$2i + 4$	s	$i\alpha + 1$
$2i + 5$	c	$i\alpha + 1$
...
$2i + 2q + 1$	b or c	$i\alpha + 1$
$2i + 2(q + 1)$	s	$i\alpha + 1$

Si $q \geq 2$ la superficie $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ será no orientable. Tendremos $2i + 2(q + 1) = \frac{2g}{\alpha} + 4$, siendo g el género de la superficie, y el número de óvalos es $i\alpha + 1 = g - (q - 1)\alpha + 1$ (como $q \geq 2$ el máximo valor para el número de óvalos será $g - \alpha + 1 \leq g$). Como antes el teorema de Harnack y la condición, en el número de óvalos, $k \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{2}}$ son las únicas restricciones.

Para otra construcción podemos partir de la signatura $(0, +, [-], \{(2\frac{2g}{\alpha}, p)\})$ y de la tabla:

i	$\widehat{\theta}(c_i)$	O_i
0	a	1
1	s	$\alpha + 1$
2	a	$\alpha + 1$
3	s	$2\alpha + 1$
...
$2i - 1$	s	$i\alpha + 1$
$2i$	a	$i\alpha + 1$
$2i + 1$	s	$i\alpha + 1$
$2i + 2$	b	$i\alpha + 1$
$2i + 3$	s	$i\alpha + 1$
$2i + 4$	c	$i\alpha + 1$
...
$2i + 2q - 1$	s	$i\alpha + 1$
$2i + 2q$	b or c	$i\alpha + 1$

Ahora basta exigir $q \geq 1$. El género será $g = (i + q)\alpha$ y el número de óvalos $g - q\alpha + 1$.

En resumen tenemos:

TEOREMA 5.6.1. *Existe una superficie p-gonal diédrica real (X, f, σ) con especies $\pm k$ si y sólo si k cumple el teorema de Harnack y $k \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{2}}$.*

Como corolario se obtiene el resultado principal de la referencia [33], que contesta a una pregunta formulada por Gross y Harris en la referencia [52].

COROLARIO 5.6.1. *Si $\pm k$ ($k \neq 0$) cumple el teorema de Harnack existe una superficie de Riemann real trigonal genérica con especies $\pm k$.*

5.7. Cubiertas p-gonales diédricas antípodas

Un estudio similar al realizado para las cubiertas reales puede realizarse para las cubiertas antípodas. En este caso la involución anticonforme τ no tiene punto fijos y $\frac{X}{\langle \tau \rangle}$ es no orientable. Los siguientes resultados tienen

una demostración análoga a las correspondientes a las superficies p-gonales diédricas reales.

TEOREMA 5.7.1. *Sea X una superficie de Riemann p-gonal diédrica que tiene una involución anticonforme τ que es un levantamiento de la aplicación antípoda. Entonces existe un grupo N.E.C. Ξ con signatura:*

$$(1, -, [2^m, p^n], \{-\})$$

y un epimorfismo $\theta : \Xi \rightarrow G$ tal que $X = \frac{\mathbb{H}}{\theta^{-1}(\langle t \rangle)}$, $\theta^{-1}(\langle t \rangle)$ tiene signatura $(g; 2^l)$, donde $G = D_{2p}$ o $G = C_p \rtimes C_4$ (cuando existe un producto semi-directo que tiene a D_p como subgrupo normal) y t es un generador de orden 2 de $D_p \leq G$.

El caso no diédrico ocurre para, por ejemplo, $n = 5$ (Grupo de Frobenius, ver [38])

$$C_5 \rtimes C_4 = \langle s, t, r; s^4, t^2, r^2, (rt)^5, (rt)s(rt)^{-2}s^{-1}, (rs^2r)^2, rs^2tr \rangle$$

TEOREMA 5.7.2. *Sea Ξ un grupo N.E.C. de signatura:*

$$(1, -, [2^m, p^n], \{-\})$$

y $\theta : \Xi \rightarrow D_{2p}$ un epimorfismo que cumple las condiciones adecuadas (análogas a las del teorema 5.3.2). Entonces existe una superficie p-gonal diédrica X , que soporta una involución anticonforme τ que es un levantamiento de la aplicación antípoda. La superficie X es equivalente conforme a $\frac{\mathbb{H}}{\theta^{-1}(\langle t \rangle)}$.

El grupo Ξ^+ tiene signatura $(0; 2^{2m}, p^{2n})$ por tanto el género de X satisface:

$$g = \alpha m + 2\alpha n - 2\alpha = \alpha(m + 2n - 2)$$

y g debe ser un múltiplo de $\alpha = \left(\frac{p-1}{2}\right)$.

Superficies con más de un morfismo n-gonal

Los resultados de este capítulo han sido publicados en la referencia [30].

Sea X una superficie de Riemann de género g , un morfismo n-gonal es una aplicación holomorfa de grado n de X en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Cuando existe tal aplicación se dice que X es una superficie de Riemann n-gonal.

Como consecuencia de la desigualdad de Severi-Castelnuovo si n es primo y el género de la superficie cumple la condición: $g > (n - 1)^2$ el morfismo n-gonal, si existe, es único. Esta es la denominada acotación de Accola.

Estamos interesados en familias de superficies de Riemann, de género g , con varios morfismos p-gonales siendo p un entero primo y $g \leq (p - 1)^2$. Al ser p primo el morfismo p-gonal ha de ser irregular o cíclico.

Vamos a desarrollar un método para construir ejemplos concretos de superficies de Riemann con varios morfismos p-gonales irregulares. Aplicando este método, con ayuda de ordenador, vamos a encontrar superficies irregulares con varios morfismos para los casos trigonal y pentagonal. Concretamente vamos a construir familias de géneros 2 y 4 con dos morfismos trigonales y familias de géneros 6 y 8 con dos morfismos pentagonales.

A continuación vamos a extender estos ejemplos para construir familias de superficies con dos morfismos p-gonales, para cualquier primo $p > 2$, con el género máximo permitido por la acotación de Accola.

También construiremos familias de superficies con dos morfismos n-gonales de género cualquiera, cuando n no es un número primo. Demostrando por tanto que la acotación de Accola es óptima.

6.1. Obtención de superficies con varios morfismos n-gonales

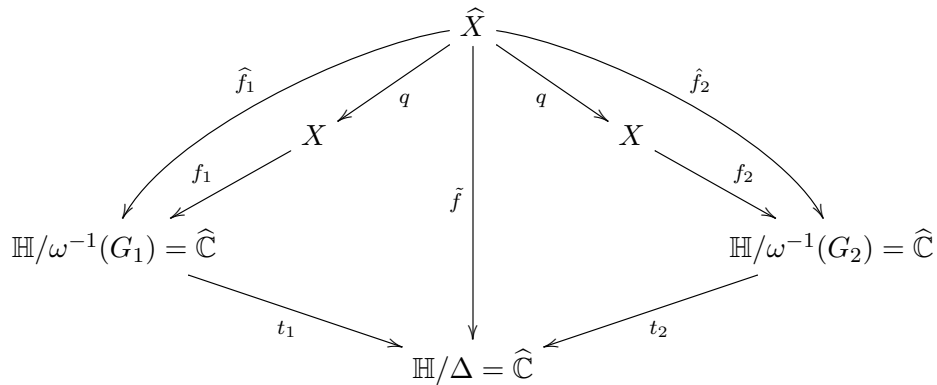
Para obtener superficies de Riemann con varios morfismos n-gonales, empezamos con un grupo fuchsiano Δ de signatura $(0; m_1, \dots, m_r)$ y consideramos un epimorfismo $\omega : \Delta \rightarrow G$ donde G es un grupo finito al que vamos a imponer ciertas condiciones.

Supongamos que existe un subgrupo H de G tal que:

1. Existen subgrupos $G_1 \leq G$ y $G_2 \leq G$, $G_1 \neq G_2$.
2. H es un subgrupo de índice n de cada G_i , $i = 1, 2$.
3. Los grupos fuchsianos $\omega^{-1}(G_i)$ tienen signaturas con género 0.

Entonces la superficie de Riemann $X = \mathbb{H}/\omega^{-1}(H)$ tiene al menos dos morfismos n -gonales: $X \rightarrow \mathbb{H}/\omega^{-1}(G_i) = \widehat{\mathbb{C}}$, $i = 1, 2$.

Si $\widehat{X} = \mathbb{H}/\ker \omega$, tenemos el siguiente diagrama:



Queremos estudiar los posibles grupos de monodromía G de la cubierta ramificada \widehat{f} . Existen una serie de restricciones a tener en cuenta:

1. $dg(\widehat{f}) = dg(\widehat{f}_1).dg(t_1)$ (siendo dg el grado de la aplicación ver definición: 2.2.5). Así $ord(G) = dg(\widehat{f})$ debe ser un múltiplo de $dg(\widehat{f}_1)$ y $dg(t_1) = ord(G)/dg(\widehat{f}_1)$.
2. Queremos, para que la signatura Δ sea lo más simple posible, que $\ker \omega$ sea un grupo fuchsiano de superficie (sin elementos elípticos). Por tanto el orden de los elementos elípticos de Δ debe dividir a $ord(G)$. Es decir a los elementos elípticos de orden q de Δ el epimorfismo ω debe asignar elementos de orden q de G .
3. La fórmula de Riemann-Hurwitz aplicada a \widehat{f} implica que $2g_{\widehat{X}} - 2 = ord(G)[-2 + Ramif(\Delta)]$, siendo "Ramif" el número de ramificación de Δ , o sea $Ramif(\Delta) = \sum \frac{n_i - 1}{n_i}$ donde n_i es el orden de cada elemento elíptico de Δ .
4. La fórmula de Riemann-Hurwitz aplicada a f_1 implica $2g_X - 2 + Ramif(X) = n[-2 + Ramif(\omega^{-1}(G_1))]$. Análogamente para f_2 .
5. La fórmula de Riemann-Hurwitz aplicada a \widehat{f}_1 implica $2g_{\widehat{X}} - 2 = dg(\widehat{f}_1)[-2 + Ramif(\Delta)]$.
6. El grado de \widehat{f} (orden de G) está limitado por $84(g_{\widehat{X}} - 1)$ luego $g_{\widehat{X}} > ord(G)/84$ (ver teorema 2.4.19).

7. Como estamos buscando superficies con más de un morfismo debemos respetar la acotación de Accola que limita el género máximo de X a $(dg(f_1) - 1)^2$ cuando n es primo.
8. El grupo G tiene que tener dos subgrupos isomorfos al grupo de monodromía de \widehat{f}_1 y dichos subgrupos tienen que compartir un elemento de orden igual al grado de la aplicación q .

Usando estas limitaciones escribimos:

- Programas en Matlab para analizar las posibles signaturas de los grupos fuchsianos $\omega^{-1}(G_i)$ $i = 1, 2$ y los posibles géneros de X y \widehat{X} .
- Programas en GAP para buscar grupos de un orden dado con al menos una clase de conjugación de subgrupos isomorfos al grupo de monodromía de X .

Usando las listas producidas por estos programas podemos descartar rápidamente muchos casos, porque si un grupo no tiene elementos del orden que se necesita en la signatura la pareja signatura-grupo no es candidata para la búsqueda de superficies con más de un morfismo. Las parejas que sobreviven indican cuales signaturas y grupos podrían funcionar. Aunque aun necesitamos encontrar qué elementos generan los subgrupos G_1, G_2 y aplicando las técnicas de Hoare-Singerman (concretamente las de Singerman pues estamos considerando grupos fuchsianos) calcular las signaturas de $\omega^{-1}(G_i)$ y $\omega^{-1}(H)$.

- Programas en Matlab para comprobar que las posibles asignaciones a los generadores de Δ cumplen el resto de requisitos.

6.2. Superficies trigonales con varios morfismos

El caso más simple es aquel de las superficies trigonales genéricas $n = 3$. Con la notación de la sección anterior, para encontrar superficies con más de un morfismo trigonal irregular los grupos G_i , $i = 1, 2$, deben contener el grupo de monodromía de los morfismos trigonales irregulares, o sea D_3 . Esto justifica la condición 1, de la lista que aparece a continuación, consideramos además el caso más sencillo, que es $G_i \cong D_3$, esto justifica la condición 4.

Para este caso concreto las restricciones a aplicar son:

1. $ord(G)$ debe ser múltiplo de 6. Porque G tiene que tener subgrupos isomorfos a D_3 .
2. Los elementos elípticos de Δ deben tener órdenes que dividan a $ord(G)$ y ω les debe asignar elementos de G del mismo orden.

3. La signatura del grupo $\omega^{-1}(G_1)$ es $(0; 2^u 3^v)$ y $u + 2v = 2g_X + 4$ (ver [33])
4. Aplicando Riemann-Hurwitz a t tenemos $(-2 + \frac{u}{2} + \frac{2v}{3}) = \frac{ord(G)}{6}(-2 + Ramif(\Delta))$
5. Aplicando Riemann-Hurwitz a \hat{f}_1 tenemos $2g_{\hat{X}} - 2 = 6(-2 + \frac{u}{2} + \frac{2v}{3})$ pero por las restricciones 3 y 7, de la lista anterior, tenemos que $u + 2v < 14$ luego $g_{\hat{X}} < 16$
6. El orden de G debe cumplir $|G| < 84(16 - 1) = 1260$.
7. El género de X debe de ser $g_X < 5$.

Con estas restricciones encontramos los siguientes casos:

6.2.1. G de orden 24. En este caso la única posibilidad es $G \cong S_4$.

6.2.1.1. Signatura de Δ : $(0; 2, 2, 2, 2, 2)$. Consideremos los subgrupos $G_1 \cong S_3(\cong D_3)$ generado por las permutaciones $(0,1)$ y $(0,1,2)$ de S_4 , y $G_2 \cong S_3$ generado por las permutaciones $(0,1)$ y $(0,1,3)$, que comparten el elemento de orden dos $(0,1)$ que genera H .

Vamos a etiquetar las clases por la derecha de G_1 (el análisis para G_2 es similar) :

$$\bar{0} := G_1, \quad \bar{1} := G_1(2, 3), \quad \bar{2} := G_1(1, 2, 3) \quad \bar{3} := G_1(0, 1, 2, 3)$$

Las permutaciones de las clases por la derecha de G_1 generadas por los elementos de S_4 son:

- Permutación $A = (0, 1)$ de S_4 origina la permutación $(\bar{2}, \bar{3})$ en las clases por la derecha de G_1 .
- Permutación $B = (1, 2)$ de S_4 origina la permutación $(\bar{1}, \bar{2})$.
- Permutación $C = (0, 1)(2, 3)$ de S_4 origina la permutación $(\bar{0}, \bar{1})(\bar{2}, \bar{3})$
- Permutación $D = (0, 2)$ de S_4 origina la permutación $(\bar{1}, \bar{3})$
- Permutación $E = (0, 3)$ de S_4 origina la permutación $(\bar{0}, \bar{3})$

Definimos $\omega : \Delta \rightarrow S_4$ por la siguiente asignación de permutaciones de S_4 a generadores elípticos de Δ :

$$x_1 \rightarrow A, x_2 \rightarrow B, x_3 \rightarrow C, x_4 \rightarrow D, x_5 \rightarrow E$$

Las permutaciones A, B, C generan S_4 y por tanto la aplicación $\omega : \Delta \rightarrow S_4$ es un epimorfismo, pues se cumple que $\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_4)\omega(x_5) = id$ y por tanto la relación “larga” de la presentación de Δ se mantiene en S_4 .

Aplicando las técnicas de Singerman cada generador origina en $\omega^{-1}(G_1)$:

- x_1, x_2, x_4 y x_5 dos clases de conjugación de elementos elípticos de orden 2.
- x_3 no genera elementos elípticos

La fórmula de Riemann-Hurwitz aplicada a t_1 es $-2 + 8\frac{1}{2} = 4(-2 + g_X + 5\frac{1}{2})$. Por tanto $g_X = 0$ y la signatura del grupo $\omega^{-1}(G_1)$ es:

$$(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$$

que denotaremos $(2; 2^8)$.

Aplicando ahora las técnicas de Singerman a la superficie $X = \mathbb{H}/\omega^{-1}(H)$ vemos que tiene género 2 y 8 elementos elípticos de orden 2 (o sea $\omega^{-1}(H)$ tiene signatura $(2; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$). X es una superficie de género 2 que admite dos morfismos trigonales distintos: $X = \mathbb{H}/\omega^{-1}(H) \rightarrow X = \mathbb{H}/\omega^{-1}(G_i)$, $i = 1, 2$.

Como hemos asignado a los generadores elípticos de Δ permutaciones de S_4 del mismo orden, $\ker \omega$ es un grupo de superficie. Usando la fórmula de Riemann-Hurwitz vemos que \widehat{X} es una superficie de género 7.

En resumen:

TEOREMA 6.2.1. *Sea Δ un grupo fuchsiano de signatura $(0; 2^5)$, y sea $\omega : \Delta \rightarrow S_4$ el epimorfismo definido por:*

$$x_1 \rightarrow (0, 1), x_2 \rightarrow (1, 2), x_3 \rightarrow (0, 1)(2, 3), x_4 \rightarrow (0, 2), x_5 \rightarrow (0, 3)$$

Entonces $X = \mathbb{H}/\omega^{-1}(\langle (0, 1) \rangle)$ es una superficie de género 2 que admite dos morfismos trigonales irregulares distintos.

NOTA. Este teorema produce infinitas superficies de género 2 con varios morfismos trigonales, pero es posible que dos grupos no conjugados de signatura $(0; 2^5)$ originen la misma superficie X uniformizada por dos grupos no conjugados de signatura $(2; 2^8)$. Los grupos con signatura $(2; 2^8)$ uniformizan superficies de género 2 que pueden ser vistas como orbifolds con ocho puntos cónicos.

6.2.1.2. Signatura de $\Delta : (0; 2, 2, 2, 4)$. Sean G_1, G_2, H como en el caso anterior pero ahora consideramos las permutaciones de S_4 :

$$A = (0, 1), B = (0, 2), C = (0, 3), D = (0, 3, 2, 1)$$

que originan las siguientes permutaciones en las clases por la derecha de G_1 :

$$A \rightarrow (\bar{2}, \bar{3}), B \rightarrow (\bar{1}, \bar{3}), C \rightarrow (\bar{0}, \bar{3}), D \rightarrow (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3})$$

Tenemos que A, B, C generan S_4 , y si asignamos $x_1 \rightarrow A, x_2 \rightarrow B, x_3 \rightarrow C, x_4 \rightarrow D$, o sea Δ tiene 3 generadores elípticos de orden 2 y uno de orden 4, se cumple que $\omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_4) = id$.

Aplicando las técnicas de Singerman vemos que en $\omega^{-1}(G_1)$:

- x_1, x_2, x_3 originan dos clases de conjugación de elementos elípticos de orden 2.
- x_4 no origina ningún generador elíptico en $\omega^{-1}(G_1)$.

La signatura de $\omega^{-1}(G_1)$ es $(0; 2^6)$, y también la de $\omega^{-1}(G_2)$.

Aplicando el método de Singerman obtenemos que la signatura del grupo $\omega^{-1}(H)$ que uniformiza X es $(1; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ y que \widehat{X} es una superficie de género 4.

TEOREMA 6.2.2. *Sea Δ un grupo fuchsiano de signatura $(0; 2^3, 4)$, y sea $\omega : \Delta \rightarrow S_4$ el epimorfismo definido por:*

$$x_1 \rightarrow (0, 1), x_2 \rightarrow (0, 2), x_3 \rightarrow (0, 3), x_4 \rightarrow (0, 3, 2, 1)$$

Entonces $X = \mathbb{H}/\omega^{-1}(\langle(0, 1)\rangle)$ es una superficie de género 1 que admite dos morfismos trigonales irregulares distintos, por tanto tenemos infinitas superficies de género 1 con varios morfismos trigonales.

6.2.1.3. Signatura de $\Delta : (0; 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. Con G_1, G_2, H como en los casos anteriores, consideramos las permutaciones $A = (0, 1), B = (0, 2), C = (0, 3)$ y asignando $x_1 \rightarrow A, x_2 \rightarrow A, x_3 \rightarrow B, x_4 \rightarrow B, x_5 \rightarrow C, x_6 \rightarrow C$ obtenemos Δ con 6 generadores elípticos de orden 2.

Ahora el grupo que uniformiza $\omega^{-1}(G_1)$ tiene signatura $(0; 2^{12})$, $\mathbb{H}/\omega^{-1}(H)$ tiene género 4 y 12 generadores elípticos de orden 2, $\ker \omega$ es un grupo fuchsiano y $\mathbb{H}/\ker \omega$ es una superficie de género 13.

TEOREMA 6.2.3. *Sea Δ un grupo fuchsiano de signatura $(0; 2^6)$. Sea $\omega : \Delta \rightarrow S_4$ el epimorfismo definido por:*

$$x_1 \rightarrow (0, 1), x_2 \rightarrow (0, 1), x_3 \rightarrow (0, 2), x_4 \rightarrow (0, 2), x_5 \rightarrow (0, 3), x_6 \rightarrow (0, 3)$$

Entonces $X = \mathbb{H}/\omega^{-1}(\langle(0, 1)\rangle)$ es una superficie de género 4 que admite varios morfismos trigonales distintos, y como anteriormente existirán infinitas.

6.2.2. G de orden 48. Consideremos ahora $G = C_2 \times S_4$, que representaremos como el subgrupo de S_6 generado por:

$$f_1 = (0, 1) \quad f_2 = (1, 2) \quad f_3 = (0, 1, 2) \quad f_4 = (0, 1, 3)$$

$$f_5 = (0, 3, 2, 1)(4, 5) \quad f_6 = (0, 3)(4, 5)$$

Los grupos $G_1 = \langle f_1, f_3 \rangle$ y $G_2 = \langle f_1, f_4 \rangle$ son isomorfos a S_3 y $H = \langle f_1 \rangle$ es isomorfo a C_2 .

6.2.2.1. *Signatura de $\Delta : (0; 2, 2, 2, 4)$.* Tenemos que $f_1 \cdot f_2 \cdot f_6 \cdot f_5 = id$ y $G = \langle f_1, f_2, f_5, f_6 \rangle$. Las permutaciones inducidas por estos elementos en las clase por la derecha (8 clases) de los subgrupos G_1 y G_2 son:

$$f_1 \rightarrow (\bar{0}, \bar{2})(\bar{1}, \bar{3})(\bar{4})(\bar{5})(\bar{6})(\bar{7}) \text{ en } G_1, G_2$$

$$f_2 \rightarrow (\bar{2}, \bar{4})(\bar{3}, \bar{5})(\bar{0})(\bar{1})(\bar{6})(\bar{7}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{0}, \bar{4})(\bar{1}, \bar{5})(\bar{2})(\bar{3})(\bar{6})(\bar{7}) \text{ en } G_2$$

$$f_5 \rightarrow (\bar{0}, \bar{7}, \bar{2}, \bar{5})(\bar{1}, \bar{6}, \bar{3}, \bar{4}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{0}, \bar{5}, \bar{2}, \bar{7})(\bar{1}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{6}) \text{ en } G_2$$

$$f_6 \rightarrow (\bar{0}, \bar{7})(\bar{1}, \bar{6})(\bar{2}, \bar{3})(\bar{4}, \bar{5}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{0}, \bar{5})(\bar{1}, \bar{4})(\bar{2}, \bar{7})(\bar{3}, \bar{6}) \text{ en } G_2$$

Así el grupo $\omega^{-1}(G_1)$ tiene signatura $(0; 2^8)$ y análogamente $\omega^{-1}(G_2)$. El grupo $\omega^{-1}(H)$ que uniformiza X tiene signatura $(2; 2^8)$ y \widehat{X} es una superficie de género 7.

6.2.2.2. *Signatura de $\Delta : (0; 2, 2, 2, 2, 2)$.* A los elementos previos añadimos:

$$g_1 = (0, 2) \quad g_2 = (0, 3) \quad g_3 = (0, 1)(4, 5) \quad g_4 = (0, 3)(1, 2)(4, 5)$$

Tenemos que $G = \langle f_1, g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$ y también que $f_1 \cdot g_1 \cdot g_3 \cdot g_2 \cdot g_4 = id$

Las permutaciones inducidas por estos elementos en las clases por la derecha (8 clases) de los subgrupos G_1 y G_2 son:

$$f_1 \rightarrow (\bar{0}, \bar{2})(\bar{1}, \bar{3})(\bar{4})(\bar{5})(\bar{6})(\bar{7}) \text{ en } G_1, G_2$$

$$g_1 \rightarrow (\bar{0}, \bar{4})(\bar{1}, \bar{5})(\bar{2})(\bar{3})(\bar{6})(\bar{7}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{2}, \bar{4})(\bar{3}, \bar{5})(\bar{0})(\bar{1})(\bar{6})(\bar{7}) \text{ en } G_2$$

$$g_2 \rightarrow (0, 6)(1, 7)(2)(3)(4)(5) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{2}, \bar{6})(\bar{3}, \bar{7})(\bar{0})(\bar{1})(\bar{4})(\bar{5}) \text{ en } G_2$$

$$g_3 \rightarrow (\bar{0}, \bar{3})(\bar{1}, \bar{2})(\bar{4}, \bar{5})(\bar{6}, \bar{7}) \text{ en } G_1, G_2$$

$$g_4 \rightarrow (\bar{0}, \bar{7})(\bar{1}, \bar{6})(\bar{2}, \bar{5})(\bar{3}, \bar{4}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{0}, \bar{1})(\bar{2}, \bar{7})(\bar{3}, \bar{6})(\bar{4}, \bar{5}) \text{ en } G_2$$

Por tanto el grupo $\omega^{-1}(G_1)$ tiene signatura $(0; 2^{12})$ y análogamente $\omega^{-1}(G_2)$. El grupo $\omega^{-1}(H)$ que uniformiza X tiene signatura $(4; 2^{12})$ y \widehat{X} es una superficie de género 13.

NOTA. Las signaturas de los grupos que uniformizan X han aparecido también en el caso $G = S_4$.

6.3. Superficies pentagonales diédricas con varios morfismos

Para el caso de superficies pentagonales, se restringe la búsqueda al caso en el que el grupo de monodromía del morfismo pentagonal $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es isomorfo a D_5 . Un caso particular de estas superficies se estudia en la referencia [29].

En este caso no se ha realizado un análisis exhaustivo, tanto por falta de potencia computacional (se ha empleado un portátil estándar) como por no ser un objetivo de la tesis, que pretende generalizar los resultados obtenidos más que generar una lista concreta de superficies. De cualquier modo se han encontrado varios casos de superficies con más de un morfismo.

6.3.1. Signatura de $\Delta : (0; 2, 2, 5, 5)$. Se considera el grupo $G = (C_5 \times C_5) \rtimes C_2$ de orden 50 como el subgrupo de S_{10} generado por:

$$f_1 = (0, 1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8, 9)$$

$$f_2 = (1, 4)(2, 3)(6, 9)(7, 8)$$

$$f_3 = (5, 6, 7, 8, 9)$$

Sea $G_1 = \langle f_1, f_2 \rangle$ y $G_2 = \langle f_2, f_3 \rangle$, ambos isomorfos al grupo diédrico D_5 , y $H = \langle f_2 \rangle$.

Definimos, además, los elementos:

$$g_1 = (0, 4)(1, 3)(5, 9)(6, 8) \quad g_2 = (0, 4, 3, 2, 1)(5, 9, 8, 7, 6)$$

$$g_3 = (0, 3)(1, 2)(5, 9)(6, 8) \quad g_4 = (5, 9, 8, 7, 6)$$

Tenemos que $G = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$ y $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 = id$. Las permutaciones inducidas por estos generadores en las clases por la derecha (5 clases) de los subgrupos G_1 y G_2 son:

$$g_1 \rightarrow (\bar{1}, \bar{4})(\bar{2}, \bar{3})(\bar{0}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{0}, \bar{4})(\bar{1}, \bar{3})(\bar{2}) \text{ en } G_2$$

$$g_2 \rightarrow id \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}) \text{ en } G_2$$

$$g_3 \rightarrow (\bar{0}, \bar{4})(\bar{1}, \bar{3})(\bar{2}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{1}, \bar{4})(\bar{2}, \bar{3})(\bar{0}) \text{ en } G_2$$

$$g_4 \rightarrow (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}) \text{ en } G_1 \text{ y } id \text{ en } G_2$$

El grupo $\omega^{-1}(G_1)$ tiene signatura $(0; 2, 2, 5, 5, 5, 5, 5)$ y análogamente $\omega^{-1}(G_2)$. El grupo $\omega^{-1}(H)$ que uniformiza X tiene signatura $(8; 2, 2)$ y \hat{X} es una superficie de género 16.

TEOREMA 6.3.1. *Existen infinitas superficies pentagonales diédricas de género 8 con al menos dos morfismos pentagonales diédricos distintos.*

6.3.2. Signatura de $\Delta : (0; 2, 2, 2, 2, 2)$. Se obtiene otra familia de superficies usando $G = A_5$ y Δ con signatura $(0; 2, 2, 2, 2, 2)$.

denotamos:

$$f_1 = (0, 4)(1, 3) \quad f_2 = (0, 4, 1, 2, 3) \quad f_3 = (0, 4, 3, 2, 1)$$

Tenemos que $A_5 \cong G = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ y que $G_1 = \langle f_1, f_2 \rangle, G_2 = \langle f_1, f_3 \rangle$ son ambos isomorfos a D_5 .

Definimos los elementos:

$$g_1 = (0, 4)(1, 2) \quad g_2 = (0, 2)(1, 4)$$

$$g_3 = (0, 1)(2, 4)$$

Cumpléndose que $G = \langle f_1, g_1, g_2, g_3 \rangle$ y $f_1 \cdot f_1 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 = id$. Las permutaciones inducidas por estos generadores en las clases por la derecha (6 clases) de los subgrupos G_1 y G_2 son:

$$f_1 \rightarrow (\bar{1}, \bar{3})(\bar{4}, \bar{5})(\bar{0})(\bar{2}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{2}, \bar{3})(\bar{4}, \bar{5})(\bar{0})(\bar{1}) \text{ en } G_2$$

$$g_1 \rightarrow (\bar{0}, \bar{3})(\bar{2}, \bar{4})(\bar{1})(\bar{5}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{0}, \bar{4})(\bar{1}, \bar{3})(\bar{2})(\bar{5}) \text{ en } G_2$$

$$g_2 \rightarrow (\bar{1}, \bar{5})(\bar{2}, \bar{4})(\bar{0})(\bar{3}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{0}, \bar{4})(\bar{2}, \bar{5})(\bar{1})(\bar{3}) \text{ en } G_2$$

$$g_3 \rightarrow (\bar{0}, \bar{3})(\bar{1}, \bar{5})(\bar{2})(\bar{4}) \text{ en } G_1 \text{ y } (\bar{1}, \bar{3})(\bar{2}, \bar{5})(\bar{0})(\bar{4}) \text{ en } G_2$$

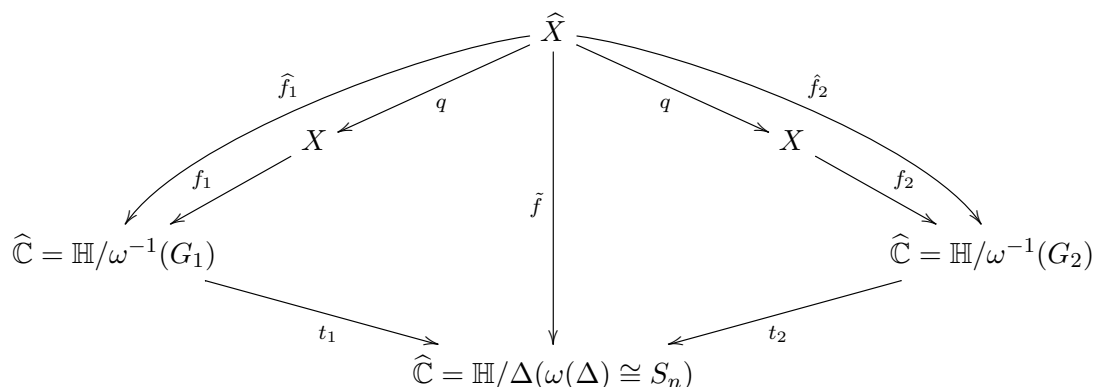
Los grupos $\omega^{-1}(G_1), \omega^{-1}(G_2)$ tienen signatura $(0; 2^{10})$, y la signatura del grupo que uniformiza X es $(6; 2^{10})$, además \widehat{X} tiene género 16.

TEOREMA 6.3.2. *Existen infinitas superficies pentagonales diédricas de género 6 con al menos dos morfismos pentagonales diédricos distintos.*

6.4. Superficies n-gonales a partir de (n-1)-gonales

Partiendo de una superficie X con varios morfismos (n-1)-gonales, y tal que el grupo de monodromía de $\widehat{X} \rightarrow \mathbb{H}/\Delta$ sea S_n (como las encontradas para $n - 1 = 3, G = S_4$). Vamos a construir una nueva superficie X' con varios morfismos n-gonales y tal que la monodromía de $\widehat{X}' \rightarrow \mathbb{H}/\Delta$ sea S_{n+1} .

Tenemos el siguiente diagrama de superficies de Riemann y morfismos:



donde:

$$X = \mathbb{H}/\omega^{-1}(H) \quad H \cong S_{n-2}$$

$$G_i \cong S_{n-1}$$

Supongamos que Δ tiene signatura $(0; m_1, \dots, m_r)$ y que $\omega : \Delta \rightarrow S_n = \mathcal{P}\{0, 1, \dots, n-1\}$. Ahora consideramos el grupo Δ' con signatura $(0; m_1, \dots, m_r, 2, 2)$ y $\omega' : \Delta \rightarrow S_{n+1} = \mathcal{P}\{0, 1, \dots, n\}$ dada por:

$$\omega'(x'_1) = \omega(x_1), \dots, \omega'(x'_r) = \omega(x_r), \omega'(x'_{r+1}) = (0, n), \omega'(x'_{r+2}) = (0, n)$$

Obtenemos un diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \widehat{X}' = \mathbb{H}/\ker\omega' & & \\
 & \nearrow^{\widehat{f}_1} & \downarrow q & \searrow^{\widehat{f}_2} & \\
 & X' & & X' & \\
 \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/\omega^{-1}(S_n) & \xleftarrow{f_1} & & \xrightarrow{f_2} & \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/\omega^{-1}(S_n) \\
 & \searrow^{t_1} & \downarrow \widehat{f} & \swarrow^{t_2} & \\
 & & \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{H}/\Delta' & &
 \end{array}$$

donde:

$$X' = \mathbb{H}/\omega^{-1}(H) \quad H \cong S_{n-1}$$

Tendremos $G = S_{n+1}$, estamos pasando de un morfismo $(n-1)$ -gonal a un n -gonal, y cada uno de los subgrupos G_i será el estabilizador de un elemento digamos j . El grupo G_i puede verse como un conjunto de $n!$ tuplas de $n+1$ elementos distintos pertenecientes al conjunto $\{0 \dots n\}$ tales que el elemento en la posición j es siempre j , (la $(n+1)$ -tupla correspondiente a $a \in G_i$ está definida por $(\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(n), \alpha(n))$). Entonces la clase por la derecha $G_i\beta$ puede representarse por el conjunto de tuplas tales que en la posición j aparece $\beta(j)$, por tanto podemos etiquetar cada clase por la derecha con un número del 0 al n .

La acción de la permutación (a, b) en las clases por la derecha fijará $(n-1)$ clases, aquellas identificadas por números diferentes a a, b .

Así un generador canónico x_i de Δ' tal que $\omega'(x_i) = (a, b)$ producirá, por el método de Singerman, $(n-1)$ generadores elípticos de orden 2 en $\omega'^{-1}(G_i)$.

Análogamente un generador que tenga asignada una permutación del tipo $(a, b)(c, d)$, producirá $(n-3)$ generadores elípticos de orden 2 en $\omega'^{-1}(G_i)$.

Consideremos ahora el subgrupo H de G que es el estabilizador de dos elementos, digamos i, j . Dicho subgrupo puede verse como un conjunto de $(n-1)!$ tuplas de $(n+1)$ elementos, tales que en la posición i siempre aparece

i y en la j siempre aparece j y la clase $H\alpha$ puede verse como un conjunto de tuplas distintas tales que en la posición i siempre aparece $\alpha(i)$ y en la j siempre aparece $\alpha(j)$. Por tanto podemos representar las clases por la derecha de H en G por un par ordenado de números distintos del 0 al n .

La acción de la permutación (a, b) en las clases por la derecha fijará $(n-1)(n-2)$ clases, aquellas identificadas por pares de números que no contengan a, b .

Por tanto un generador canónico de Δ' que tenga asignada, por ω' , una permutación del tipo (a, b) producirá $(n-1)(n-2)$ generadores elípticos de orden 2 en X' .

Análogamente un generador que tenga asignada una permutación del tipo $(a, b)(c, d)$ producirá $(n-3)(n-4)$ generadores elípticos de orden 2 en X' .

Vamos a aplicar el método al caso analizado en 6.2.1.1. En este caso $n = 4$ y Δ' será un grupo fuchsiano con signatura $(0; 2^7)$. Construimos ω' mediante:

$$\begin{aligned} \omega'(x'_1) \rightarrow (0, 1) \quad \omega'(x'_2) \rightarrow (1, 2) \quad \omega'(x'_3) \rightarrow (0, 1)(2, 3) \quad \omega'(x'_4) \rightarrow (0, 2) \\ \omega'(x'_5) \rightarrow (0, 3) \quad \omega'(x'_6) \rightarrow (0, 4) \quad \omega'(x'_7) \rightarrow (0, 4) \end{aligned}$$

La relación larga se sigue cumpliendo.

Los grupos $G_1 = \langle (0, 1), (0, 1, 2), (0, 4) \rangle$ y $G_2 = \langle (0, 1), (0, 1, 3), (0, 4) \rangle$ ambos isomorfos a S_4 y $H = \langle (0, 1), (0, 4) \rangle$ es isomorfo a S_3 .

Tendremos $19 = 6 \times 3 + 1$ generadores elípticos de orden 2 en $\omega'^{-1}(G_1)$. Si g_{C_1} es el género en la signatura de $\omega'^{-1}(G_1)$, por la fórmula de Riemann-Hurwitz:

$$2g_{C_1} - 2 + 19 \frac{1}{2} = 5(-2 + 7 \frac{1}{2}) \Rightarrow g_{C_1} = 0$$

Por tanto el grupo $\omega'^{-1}(G_1)$ tiene signatura $(0; 2^{19})$

Los cálculos para $\omega'^{-1}(H)$, que uniformiza X , nos dicen que tiene $36 = 6 \times 6$ generadores elípticos originados por aquellos generadores de Δ' a los que ω' asigna permutaciones del tipo (a, b) . Aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz obtenemos que el género de X es 7, X tendrá al menos dos morfismos tetragonales diferentes.

Vamos a generalizar: Consideremos un grupo Δ^n con signatura $(0; 2^{2n-1})$ y un epimorfismo $\omega : \Delta^n \rightarrow S_{n+1}$ dado por:

$$\begin{aligned} \omega(x_1) \rightarrow (0, 1) \quad \omega(x_2) \rightarrow (1, 2) \quad \omega(x_3) \rightarrow (0, 1)(2, 3) \quad \omega(x_4) \rightarrow (0, 2) \quad \omega(x_5) \rightarrow \\ (0, 3) \quad \omega(x'_6) \rightarrow (0, 4) \quad \omega(x_7) \rightarrow (0, 4), \dots, \omega(x_{2n-2}) \rightarrow (0, n) \quad \omega(x_{2n-1}) \rightarrow \\ (0, n) \end{aligned}$$

Tenemos

- Número de generadores elípticos en $\omega^{-1}(G_i)$ por cada generador en Δ^n que tiene asociada una permutación de tipo (a,b): $(n-1)$
- Número de generadores elípticos en $\omega^{-1}(G_i)$ por cada generador en Δ^n que tiene asociada una permutación de tipo (a,b)(c,d): $(n-3)$
- Número total de generadores elípticos en $\omega^{-1}(G_i)$: $2n^2 - 3n - 1$
- Número de generadores elípticos en $\omega^{-1}(H)$ por cada generador en Δ^n que tiene asociada una permutación de tipo (a,b): $(n-1)(n-2)$
- Número de generadores elípticos en $\omega^{-1}(H)$ por cada generador en Δ^n que tiene asociada una permutación de tipo (a,b): $(n-3)(n-4)$
- Número total de generadores elípticos en $\omega^{-1}(H)$: $2n^3 - 7n^2 + 3n + 8$
- Género de $X = n^2 - 2n - 1$

Notar que si n es primo estamos por debajo de la acotación de Accola para el género, que es: $n^2 - 2n + 1$.

El mismo método puede aplicarse a las superficies obtenidas en la sección 6.2.1.2. Continuamos con la misma terminología que antes y tenemos:

- Número de generadores elípticos de orden 2 en Δ^n (todos tienen asociada una permutación de tipo (a,b)): $3 + 2(n-3)$
- Número de generadores elípticos de orden 4 en Δ^n : 1
- Número de generadores elípticos en $\omega^{-1}(G_i)$ por cada generador en Δ^n que tiene asociada una permutación de tipo (a,b): $(n-1)$
- Número de generadores elípticos en $\omega^{-1}(G_i)$ por cada generador en Δ^n que tiene asociada una permutación de tipo (a,b)(c,d): $(n-3)$
- Número total de generadores elípticos de orden 2 en $\omega^{-1}(G_i)$: $2n^2 - 5n + 3$, de orden 4: $n - 3$
- Número de generadores elípticos en $\omega^{-1}(H)$ por cada generador en Δ^n que tiene asociada una permutación de tipo (a,b): $(n-1)(n-2)$
- Número de generadores elípticos en $\omega^{-1}(H)$ por cada generador en Δ^n que tiene asociada una permutación de tipo (a,b,c,d): $(n-3)(n-4)$
- Número total de generadores elípticos de orden 2 en $\omega^{-1}(H)$: $2n^3 - 9n^2 + 13n - 6$; número de generadores de orden 4: $n^2 - 7n + 12$
- Género de $X = n^2 - 2n - 2$.

Y aplicándolo a la superficie de la sección 6.2.1.3:

- Número de generadores elípticos de orden 2 en Δ^n (todos tienen asociada una permutación de tipo (a,b)): $6 + 2(n-3)$

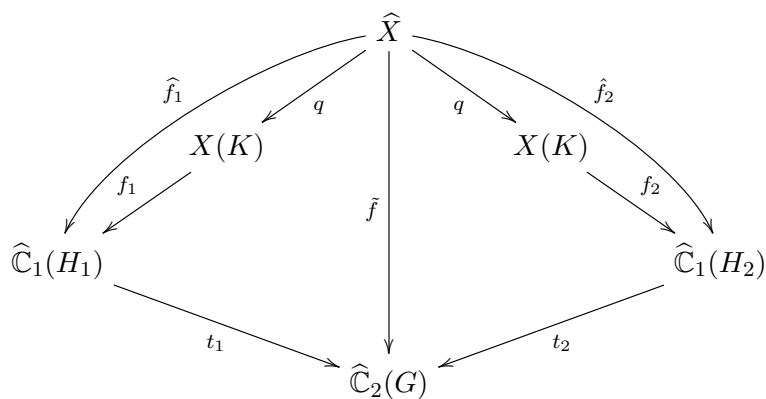
- Número de generadores elípticos en $\omega^{-1}(G_i)$ por cada generador en Δ^n que tiene asociada una permutación de tipo (a,b): $(n - 1)$
- Número total de generadores elípticos de orden 2 en $\omega^{-1}(G_i)$: $2n^2 - 2$
- Número de generadores elípticos en $\omega^{-1}(H)$ por cada generador en Δ^n que tiene asociada una permutación de tipo (a,b): $(n - 1)(n - 2)$
- Número total de generadores elípticos en $\omega^{-1}(H)$: $2n^3 - 6n^2 + 4n$
- Género de $X = n^2 - 2n + 1$.

En este caso alcanzamos la cota superior para el género.

COROLARIO 6.4.1. *Para cada número primo $p > 2$ existen superficies de Riemann de género $(p - 1)^2$, $(p - 1)^2 - 2$ y $(p - 1)^2 - 3$ con más de un morfismo p -gonal.*

6.5. Construcción de superficies de género arbitrario

Comenzamos con unas superficies que satisfagan el diagrama:



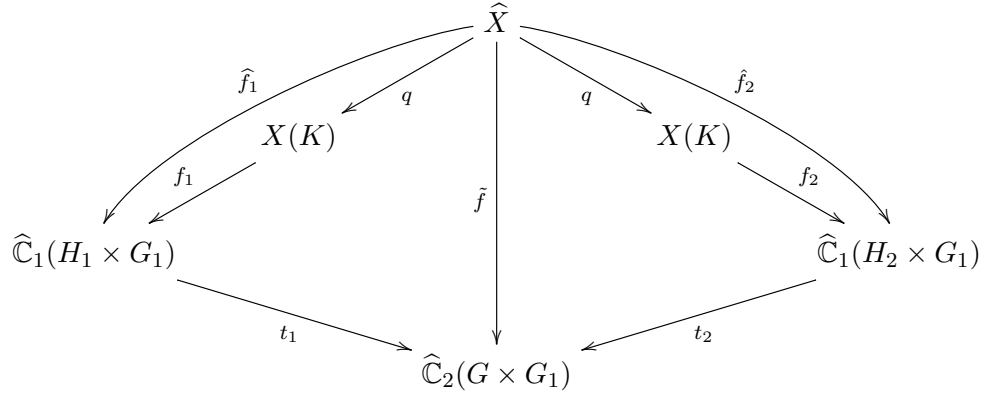
Supongamos que la signatura del grupo que uniformiza $\widehat{\mathcal{C}}_2$ es $(0; \alpha_1, \dots, \alpha_l)$, la del grupo que uniformiza $\widehat{\mathcal{C}}_1$ $(0; \beta_1, \dots, \beta_r)$, y la del grupo que uniformiza X $(g; \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ con respectivos órdenes de ramificación $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$.

Sustituimos el grupo de monodromía G de \widehat{f} por un producto directo $G \times G_1$. Donde G_1 puede ser cualquier grupo finito (supongamos que de orden r).

Añadimos a los generadores elípticos de $\widehat{\mathcal{C}}_2$ generadores elípticos que tengan asignados elementos que generen G_1 y cumplan la relación “larga” (producto igual a 1).

Podemos añadir tantos como queramos, por tanto el orden de ramificación, que denotaremos R puede ser tan grande como se quiera.

Tenemos el siguiente diagrama:



Los nuevos generadores, cuando actúen en las clases por la derecha de $H_i \times G_1$ fijarán todas las clases. Así cada uno producirá $T = \text{orden}(t_2)$ generadores elípticos en $\widehat{\mathbb{C}}_1$. Aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz:

$$2g_{C_1} - 2 + R_\beta + TR = T(-2 + R_\alpha + R)$$

Tenemos que g_{C_1} es cero porque $-2 + R_\beta = T(-2 + R_\alpha)$.

Notar que si en las aplicaciones f_i previas eran q -gonales, las nuevas $(q \times r)$ -gonales, y no siendo un número primo no se aplica la acotación de Accola.

Cada generador elíptico original de $\widehat{\mathbb{C}}_2$ genera ahora r veces más puntos cónicos en el “nuevo” X que en el caso anterior. Así tenemos que el grupo que uniformiza el “nuevo” X tiene signatura:

$$(g_{X_{\text{new}}}; \gamma_1^r, \dots, \gamma_m^r)$$

Aplicando la fórmula de Riemann-Hurwitz:

$$2g_{X_{\text{old}}} - 2 + R_\gamma = q(-2 + R_\beta)$$

$$2g_{X_{\text{new}}} - 2 + rR_\gamma = rq(-2 + R_\beta + TR)$$

Por tanto $2g_{X_{\text{new}}} - 2 = -r(R_\gamma - qR_\beta - 2q) + rqTR = r(2g_{X_{\text{old}}} - 2) + rqTR$ y:

$$g_{X_{\text{new}}} = rg_{X_{\text{old}}} - (r - 1) + \frac{1}{2}rqTR$$

que puede ser tan grande como queramos.

Hemos demostrado que la acotación de Accola es óptima para cualquier n -morfismo.

Conclusiones

El objeto de esta tesis es el estudio de las superficies de Riemann que son un recubrimiento ramificado irregular de la esfera de Riemann. Como un estudio exhaustivo de dichas superficies es un objetivo utópico, nos limitamos a analizar algunos aspectos determinados de algunos tipos específicos de estas superficies.

Uno de los estudios realizados se refiere a las superficies p -gonales (p primo mayor que 2) tales que el grupo de monodromía correspondiente al morfismo p -gonal es isomorfo al D_p . Concretamente se estudian las superficies reales es decir aquellas para las que existe una involución anticonforme σ .

Dos superficies de Riemann reales (X, σ) y (X', σ') son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X'$ tal que $\sigma = h^{-1}\sigma'h$. Cada clase de equivalencia se caracteriza por la acción de la involución anticonforme σ en la superficie. Si (X, σ) es una superficie de Riemann real el conjunto de puntos fijados por σ $Fix(\sigma)$ es o bien vacío o bien consiste en k curvas disjuntas llamadas “óvalos”. El tipo topológico, viene dado por el número de óvalos y la orientabilidad o no de la superficie cociente $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$. Si σ tiene k óvalos y $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es orientable se dice que (X, σ) tiene especie $+k$, si $\frac{X}{\langle \sigma \rangle}$ es no orientable se dice que (X, σ) tiene especie $-k$.

El teorema de Harnack restringe las posibles especies de las superficies de Riemann reales generales. Las de alguna clase específica tienen, en general, mayores restricciones.

En la tesis se obtienen las restricciones de las especies para el caso de las superficies p -gonales diédricas reales, y también las restricciones para los géneros de dichas superficies.

El otro estudio se refiere a superficies con más de un morfismo n -gonal. Un morfismo n -gonal es una aplicación holomorfa de grado n de X en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, si existe tal aplicación la superficie X se denomina n -gonal.

Si n es primo y el género de la superficie cumple $g > (n - 1)^2$ entonces el morfismo n -gonal, si existe, es único. Esta es la denominada acotación de Accola.

En la tesis se muestran ejemplos concretos de superficies de Riemann, de género máximo, con varios morfismos p -gonales para los casos trigonal y pentagonal. A continuación se extienden estos ejemplos a familias de superficies p -gonales, de género máximo, para cualquier primo $p > 2$, y también para familias de superficies n -gonales, con dos morfismos, de género no acotado cuando n no es primo. Demostrando así que la acotación de Accola es óptima.

Como resultados no originales se ha detallado la aplicación del método de Hoare-Singerman (obtención de la signatura del grupo N.E.C. definido por un grupo de permutaciones (referencia [61])) para el cálculo de la orientación de los ciclo-periodos de la cubierta, que en el artículo original sólo se describe para una superficie “base” con un único cicloperiodo. Aquí se ha aplicado a un caso de mayor complejidad que los descritos en la literatura ([61, 108]). También se detalla la aplicación del método de Reidemeister-Schreier a un caso geométrico.

Bibliografia

- [1] Abikoff, W.: The Uniformization theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88 (1981), 574-592.
- [2] Accola, R. D. M.: On the number of Automorphisms of a closed Riemann surface. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 131 (1968), 398-407.
- [3] Accola, R. D. M.: Strongly branched coverings of closed Riemann surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 26 (1970), 315-322.
- [4] Accola, R. D. M.: On Castelnuovo's inequality for algebraic curves. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 251 (1979), 357-373.
- [5] Accola, R. D. M.: On cyclic trigonal Riemann surfaces. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 283 (1984), 423-449.
- [6] Accola, R. D. M.: On the Castelnuovo-Severi inequality for Riemann surfaces. *Kodai Math. J.*, 29 (2006), 299-317.
- [7] Ahlfors, L.; Sario L.: *Riemann surfaces*. Princeton University Press, New Jersey 1960.
- [8] Alling, N.L.; Greenleaf, N.: Klein surfaces and real algebraic function fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75/4 (1969), 869-872.
- [9] Alling, N.L.; Greenleaf, N.: *Foundations of the theory of Klein surfaces*. Lecture Notes in Mathematics 219, Springer-Verlag, Berlin 1971.
- [10] Arapura, D.: *Algebraic geometry over the complex numbers*. Universitext Springer-Verlag, New York 2012.
- [11] Bartolini, G.; Costa, A.F.; Izquierdo, M.: On automorphisms groups of cyclic p-gonal Riemann surfaces. *Journal of symbolic computation*, 57 (2013), 61-69.
- [12] Beardon, A.: *The Geometry of discrete groups*. Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, New York 1983.
- [13] Bers, L.; Kra, I.: *A crash course on Kleinian groups*. Springer-Verlag, Berlin 1974.
- [14] Bers, L.; Rodlitz, E.; Pollack, R.: *Riemann Surfaces*. Courant Institute of Mathematical Sciences New York University, New York 1958.
- [15] Bobenko, A. I.; Klein, C. (Ed): *Computational Approach to Riemann Surfaces*. Lecture Notes in Mathematics 2013, Springer-Verlag, Heidelberg 2011.
- [16] Bogopolski, O.: *Introduction to Group Theory*. European Math. Soc., Zurich 2008.
- [17] Bujalance, E.; Cirre, F. J.; Gamboa, J. M.; Gromadzki, G.: *Symmetries of compact Riemann surfaces*. Lecture Notes in Mathematics 2007, Springer-Verlag, Berlin 2010.
- [18] Bujalance, E.; Cirre, F. J.; Turbek, P.: Symmetry types of cyclic covers of the sphere, *Israel J. Math.*, 191 (2012), 61-83.
- [19] Bujalance, E.; Conder, M.; Gamboa, J.M.; Gromadzki, G.; Izquierdo, M.: Double coverings of Klein surfaces by a given Riemann surface. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 169 (2002), 137-151
- [20] Bujalance, E.; Costa, A. F.: On symmetries of p-hyperelliptic Riemann surfaces. *Math. Ann.*, 308/1 (1997), 31-45.

- [21] Bujalance, E.; Costa, A. F.; Singerman, D.: Applications of Hoare's theorem to symmetries of Riemann surfaces. *Annales Acad. Sci. Fennicae*, 18 (1993), 307-322.
- [22] Bujalance, E.; Etayo, J. J.; Gamboa J. M.; Gromadzki, G.: Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surfaces. *Lecture Notes in Mathematics 1439*, Springer-Verlag, Berlin 1990.
- [23] Bujalance, J.A.: Normal subgroups of even index in an NEC group. *Arch. der Math.*, 49 (1987), 470-478.
- [24] Buser, P.: *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Modern Birkhäuser Classics, Boston 2010.
- [25] Chern, S.S; Chen, W.H.; Lam K.S.: *Lectures on Differential Geometry*. World Scientific, Series on University Mathematics, Singapore 1999.
- [26] Chevalley, C.: *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*. American Math. Soc, Providence 1951.
- [27] Cirre, F.J.: Morphisms of Klein Surfaces. *Revista Matemática Universidad Complutense*, 10 (1997). 79-91.
- [28] Conder, M.: Schreier coset graphs and their applications. *RIMS Kokyuroku*, 794 (1992), 169-175.
- [29] Cortázar, I.; Costa, A.F.: Real Dihedral p-Gonal Riemann Surfaces. *Moscow Mathematical Journal*, 13/4 (2013), 631-647.
- [30] Cortázar, I.; Costa, A.F.: Finding Riemann surfaces with several p-gonal morphisms. *RACSAM*, DOI=10.1007/s13398-014-0189-z.
- [31] Costa, A.F.; Hall, W.; Singerman, D.: Doubles of Klein Surfaces. *Glasg. Math. J.*, 54/3 (2012), 507-515.
- [32] Costa, A.F.; Izquierdo, M.: Symmetries of real cyclic p-gonal Riemann surfaces. *Pacific J. Math.* 213, n. 2 (2004), 231-243.
- [33] Costa, A.F.; Izquierdo, M.: On real trigonal Riemann surfaces. *Math. Scand.* 98, n. 1 (2006), 53-68.
- [34] Costa, A.F.; Izquierdo, M.: Maximal order of automorphisms of trigonal Riemann surfaces. *J. of Algebra*, 323 (2010), 27-31.
- [35] Costa, A.F.; Izquierdo, M.; Ying, D.: On cyclic p-gonal Riemann surfaces with several p-gonal morphisms. *Geometriae Dedicata*, 147/1 (2010), 139-147.
- [36] Costa, A.F.; Izquierdo, M.; Ying, D.: On the family of cyclic trigonal Riemann surfaces of genus 4 with several trigonal morphisms. *RACSAM* (2010), 81-86.
- [37] Costa, A.F.; Parlier, H: On Harnack's theorem and extensions: A geometric proof and applications. *Conform. Geom. Dyn.*, 12 (2008), 174-186.
- [38] Coxeter, H.S.M.; Moser, W.O.J.: *Generators and Relations for Discrete Groups*. Springer-Verlag, Berlin 1980.
- [39] Donaldson, S.: *Riemann surfaces*. Oxford Graduate Texts in Math., New York 2011.
- [40] Earle C.J.; Eells, J.: A Fibre bundle description of Teichmüller theory. *Journal of Differential Geometry*, 3 (1969), 19-43.
- [41] Etayo, J.J.: *Sobre grupos de automorfismos de superficies de Klein*. Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid 1984.
- [42] Etayo, J.J.; Martínez E.: Hyperbolic polygons and NEC groups. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 104 (1988), 261-272.
- [43] Etayo, J.J.; Martínez E.: Alternating groups as automorphism groups of Riemann surfaces. *International Journal of Algebra and Computation*, 16.1 (2006), 91-98.

- [44] Farkas, H.M.; Kra, I.: Riemann Surfaces. Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York 1980.
- [45] Ford, L.R.: The fundamental region for a Fuchsian group. Bulletin of the American Mathematical Society, 31/9-10 (1925), 531-539.
- [46] Forster, O.: Lectures on Riemann Surfaces. Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York 1981.
- [47] Gamboa, J.M.: Compact Klein surfaces with boundary viewed as real compact smooth algebraic curves. Memorias Real Academia de Ciencias, Serie Ciencias Exactas Tomo XXVII, Madrid 1991.
- [48] Girondo, E.; González Diez, G.: Introduction to compact Riemann surfaces and Dessins d'Enfants. London Math. Soc. Student Texts 79, Cambridge 2011.
- [49] Gonzalez-Diez, G.: On prime Galois coverings of the Riemann sphere. Ann. Mat. Pura Appl., 168 (1995), 1-15.
- [50] Gromadzki, G.: On Conjugacy of p-gonal automorphisms of Riemann Surfaces. Rev. Mat. Complut., 21/1 (2008), 83-87.
- [51] Gromadzki, G.: On the number of p-gonal coverings of Riemann surfaces. Rocky Mounting J. Math., 40 (2010), 1221-1226.
- [52] Gross, B. H.; Harris, J.: Real algebraic curves. Ann. Sci. École Norm. Sup., 14 (1981), 157-182.
- [53] Hall, W.: Automorphisms and coverings of Klein Surfaces. PHD Thesis, University of Southampton 1997.
- [54] Harnack, A.: Uber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Kurven. Math. Ann., 10 (1876), 189-199.
- [55] Harvey, W.J.: Cyclic Groups of automorphisms of a compact Riemann surface. Quarterly Journal of Mathematics, 17/1 (1966), 86-97.
- [56] Harvey, W.J.: Kleinian groups (a survey). Séminaire N. Bourbaki, 491 (1977), 30-45.
- [57] Harvey, W.J. : Discrete groups and automorphic functions. Academic Press New York, London 1977.
- [58] Hidalgo, R.A.: Automorphisms groups of Schottky type. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, 30 (2005), 183-204.
- [59] Hidalgo, R.A.; Costa, A.F.: Anticonformal automorphisms and Schottky coverings. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, 26 (2001), 489-508.
- [60] Hoare A.H.M.: Coinitial graphs and Whitehead automorphisms. Can. J. Math., 31/1 (1979), 112-123.
- [61] Hoare, A.H.M.: Subgroups of NEC groups and finite permutation groups. Quart. J. Math., 41 (1990), 45-59.
- [62] Hoare, A.H.M.; Karrass, A.; Solitar, D.: Subgroups of finite index of Fuchsian groups. Springer-Verlag, Math. Z., 120 (1971), 289-298.
- [63] Hoare, A.H.M.; Karrass, A.; Solitar, D.: Subgroups of infinite index of Fuchsian groups. Springer-Verlag, Math. Z., 125 (1972), 59-69.
- [64] Hoare, A.H.M.; Karrass, A.; Solitar, D.: Subgroups of NEC Groups. Comm on Pure & Applied Math, 36 (1973), 731-744.
- [65] Hoare, A.H.M; Singerman, D.: The orientability of subgroups of plane groups. Proc. of Groups, St. Andrews, 1981, London Math. Soc. Lecture Note Ser. (1981), 221-227.
- [66] Hubbard, J.: Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Matrix Editions, Vol I, Ithaca 2006.

- [67] Huggins, B.S.: Fields of Moduli and Fields of Definition of Curves. PHD Thesis, University of California, Los Angeles 2005.
- [68] Izquierdo, M.: Estudio de subgrupos de grupos de calidoscopios no euclídeos que son grupos de superficies. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza 1990.
- [69] Izquierdo, M.: On Klein surfaces and dihedral groups. *Math. Scand.*, 76 (1995), 221-232..
- [70] Izquierdo, M.; Singerman, D.: Pairs of symmetries of Riemann surfaces. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, 23 (1998), 3-24.
- [71] James, R.C.: Combinatorial topology of surfaces. *Mathematics Magazine*, 29/1 (1955), 1-39.
- [72] Jones, G.A.; Singerman, D.: *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*. Cambridge University Press, Cambridge 1987.
- [73] Jost, J.: *Compact Riemann Surfaces. An introduction to contemporary mathematics*. 3d edition, Universitext, Springer-Verlag, Berlin 2006.
- [74] Kato, T.: On the isomorphism theorem of the meromorphic function fields. *Osaka Journal Math.*, 20 (1983) , 303-306.
- [75] Katok, S.: *Fuchsian Groups*. Chicago Lecture in Mathematics series, Chicago 1992.
- [76] Khovanskii, A.: *Galois Theory, Coverings, and Riemann Surfaces*. Springer-Verlag, Berlin 2013.
- [77] Kirwan, F.: *Complex algebraic curves*. London Math. Soc. 23, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992.
- [78] Kuga, M.: *Galois Dream: Group theory and differential equations*. Birkhäuser, Boston 1993.
- [79] López, F.; Galindo, F.; Tristán L.A.: *Funciones analíticas multiformes*. Universidad de Valladolid, Valladolid 1996..
- [80] Macbeath, A.M.: The classification of non-euclidean plane crystallographic groups. *Can. J. Math.*, 19 (1967), 1192-1205.
- [81] Macbeath, A.M.; Singerman, D: Spaces of subgroups and Teichmüller space. *Proc. London Math. Soc.*, (3) 31 (1975), 211-256
- [82] Magnus, W.; Karrass, A.; Solitar, D.: *Combinatorial group theory*. Dover Publications Inc., New York 1976.
- [83] Martínez, E.: Convex fundamental regions for NEC groups. *Arch. Math.*, 47 (1986), 457-464.
- [84] Maskit, B.: On Poincaré's Theorem for Fundamental Polygons. *Advances in Math.*, 7 (1971), 219-230.
- [85] Maskit, B.: *Kleinian Groups*. Springer-Verlag, Berlín 1988.
- [86] Matsumoto Y.; Montesinos J.M.: A proof of Thurston's uniformization theorem of geometric orbifolds. *Tokyo Journal of Math.*, 14/1 (1991), 181-196.
- [87] Miranda, R.: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Graduate studies in Math., A.M.S. 5, Providence 1997.
- [88] Mirzakhani, M.: Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces. *Invent. Mathematicæ* 167 (2007), 179-222.
- [89] Montesinos J.M: *Calidoscopios y 3-Varietades*. Universidad Nacional de Colombia, Medellín 2003.
- [90] Mumford, D.; Series, C.; Wright, D.: *Indra's Pearls: The vision of Felix Klein*. Cambridge University Press, Cambridge 2002.

- [91] Munkres, J.R.: *Topology, A First Course*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1975.
- [92] Nag, S.: *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*. John Wiley, New York 1988..
- [93] Natanzon, S.: Automorphisms and real forms of a certain class of complex algebraic curves. (Russian) *Funkts. Anal. Prilozh.*, 13/2 (1979), 89-90.
- [94] Natanzon, S.: Real meromorphic functions on real algebraic curves. (English. Russian original) *Sov. Math., Dokl.*, 36/3 (1988), 425-427.
- [95] Natanzon, S.: Klein surfaces. Translation from *Usp. Mat. Nauk.*, 45/6 (1990), 47-90.
- [96] Natanzon, S.: Geometry and algebra of real forms of complex curves. *Math. Z.*, 243/2 (2003), 391-407.
- [97] Natanzon, S.: *Moduli of Riemann surfaces real algebraic curves and their superanalogs*. American Mathematical Society, Providence 2004.
- [98] Pig, Y.; Pondizcery, E.S.: Swinean groups. *Poldavian Math. Journal*, 13 (2002), 17-57.
- [99] Pohl, A.D.: *Introduction to Orbifolds*. Lecture Notes E.T.H., Zürich 2010.
- [100] Preston, R.R.: *Fundamental domains and projective structures on compact Klein surfaces*. Thesis, The University of Texas at Austin 1975.
- [101] Rotman, J. J.: *An Introduction to algebraic topology*. Springer-Verlag GTM 119, Berlin 1988.
- [102] Scott, P.: The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math Soc.*, 15 (1983), 401-487.
- [103] Seppälä, M.; Sorvali, T.: *Geometry of Riemann surfaces and Teichmüller spaces*. North-Holland, Amsterdam 1992.
- [104] Series, C.: A crash course on Kleinian groups. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 37 (2005), 1-38.
- [105] Shaska, T.: On super-elliptic Curves and their Quotients. *Albanian Journal of Math.*, 5/3 (2011), 131-160.
- [106] Singerman, D.: Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups. *Bull. London Math. Soc.*, 2 (1970), 319-323.
- [107] Singerman, D.: Symmetries of Riemann surfaces with large automorphism group. *Math. Ann.*, 210 (1974), 17-32.
- [108] Singerman, D.; Watson, P.: Using Hoare's theorem to find the signature of an NEC group. *arXiv:1408.0127 [math.GR]* (2014), 1-10.
- [109] Spanier, E.: *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York 1982.
- [110] Stillwell, J.: *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer, New York 1993.
- [111] Thurston, W.: *The geometry and topology of 3-Manifolds*. Princeton Lecture Notes, MSRI (electronic) 1981.
- [112] Weyl, H.: *The concept of a Riemann surface*. Addison Wesley, Reading MA 1955.
- [113] Wilkie, H. C.: On non-euclidean crystallographic groups. *Math. Z.*, 91 (1966), 87-102.
- [114] Wootton, A.: The Full Automorphism Group of a Cyclic p-gonal Surface. *Journal of Algebra*, 213/1 (2007), 377-396.
- [115] Zieschang, H.; Vogt, E.; Coldewey, H.D.: *Surfaces and planar discontinuous groups*. Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. 835, Berlin 1980.