

TESIS DOCTORAL

© 2014



CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO  
DE CIERTAS  
ECUACIONES FUNCIONALES CLÁSICAS

**KHADER FAIEZ ABU-HELAIEL JADALLAH**

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

ESPECIALIDAD - ANÁLISIS MATEMÁTICO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA, UNED

FACULTAD DE CIENCIAS, UNED

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

DIRECTOR: **DR. JOSÉ MARÍA ALMIRA PICAZO**

TUTORA: **DRA. BEATRIZ HERNANDO BOTO**

TESIS DOCTORAL

© 2014



CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO  
DE CIERTAS  
ECUACIONES FUNCIONALES CLÁSICAS

PRESENTADA A LA FACULTAD DE CIENCIAS, UNED  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES  
PASEO SENDA DEL REY, 9  
28040 MADRID

POR **KHADER FAIEZ ABU-HELAIEL JADALLAH**  
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS AVANZADAS  
ESPECIALIDAD - ANÁLISIS MATEMÁTICO  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE **DOCTOR EN MATEMÁTICAS**  
POR LA **UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA, UNED**

DIRIGIDA POR **DR. JOSÉ MARÍA ALMIRA PICAZO**  
TUTORA **DRA. BEATRIZ HERNANDO BOTO**

**MADRID, 10 DE MARZO DE 2014 - ESPAÑA**

# Dedicatoria

*A mi familia y mi patria Palestina.*

EL SABER DE MIS HIJOS HARÁ MI GRANDEZA.

*A la memoria de mi hermano **Musa**, D.E.P.*

# Agradecimientos

Me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento a mi director de tesis, el profesor Dr. D. José María Almira Picazo por haber aceptado dirigir este trabajo, por su constante ánimo y apoyo en todo momento y por su paciencia a la hora de mi aprendizaje. También por su disposición para atenderme y ayudarme siempre ante cualquier dificultad, ya fuera en cuanto a temas matemáticos como personales; sin duda puedo darle las gracias desde la admiración y la amistad. Este trabajo no habría sido posible sin su apoyo.

Debo también agradecer el apoyo permanente de mi mujer Josefa Moreno León y mis niños: Ramzy, Faiez y Nabilah.

Mi gratitud también va dirigida a toda mi familia de los que sé que siempre estarán apoyándome; gracias a todos mis amigos y alumnos repartidos entre Belén-Palestina y Linares-Jaén principalmente, aunque no me puedo olvidar de los dispersos por toda la geografía española y de todos los que se encuentran a lo largo y ancho de este planeta.

Me gustaría también agradecer el apoyo de los miembros del Departamento de Matemáticas Fundamentales de la Facultad de Ciencias de la UNED por su atención hacia mí. En especial quiero resaltar a mi tutora, la profesora Dra. Beatriz Hernando Boto.

Finalmente, y no en último lugar, quiero agradecer a todos los miembros de la Sección de Apoyo a la Docencia y a la Investigación de la UNED así, como el Negociado de Posgrados de Tercer Ciclo y sobre todo al Coordinador del programa de doctorado, el Profesor Dr. Tomás Prieto Rumeau.

Gracias a Todos

شكراً إلى الجميع

*Olvida que deberías haber sido recompensado ayer y no lo fuiste.  
¡Qué importa, sé feliz!  
No eches de menos ninguna cosa ni esperes nada tampoco.  
Lo que ha de suceder, escrito está en el libro que hojea, al azar,  
el viento de la eternidad. (Omar Khayyám, 1048-1131)*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>I Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>1. Los teoremas de Fréchet y Montel en su versión original</b>	<b>3</b>
1.1. Motivación: resultados de regularidad para la ecuación funcional de Cauchy	3
1.2. El teorema de Fréchet clásico . . . . .	5
1.3. El teorema de Montel clásico . . . . .	11
<b>II Resultados Principales</b>	<b>19</b>
<b>2. Estudio del grafo de los monomios</b>	<b>21</b>
2.1. Resultados principales . . . . .	23
<b>3. Variaciones sobre el Teorema de Montel clásico</b>	<b>33</b>
3.1. Resultados principales . . . . .	33
<b>4. El Teorema de Montel-Popoviciu y el grafo de las soluciones discontinuas de la ecuación de Fréchet en varias variables</b>	<b>43</b>
4.1. El teorema de Montel-Popoviciu . . . . .	43
4.2. Descripción cualitativa de los grafos de los polinomios discontinuos . . . . .	48
<b>5. Teorema de Montel <math>p</math>-ádico y funciones uniformemente localmente polinómicas</b>	<b>55</b>
5.1. Resultados principales . . . . .	56
5.2. Caracterización de funciones uniformemente localmente polinómicas . . . . .	58

<b>6. Las ecuaciones de Kakutani-Nagumo-Walsh, Haruki y Fréchet en varias variables</b>	<b>63</b>
6.1. Soluciones continuas de las ecuaciones de Kakutani-Nagumo-Walsh y de Haruki . . . . .	64
6.2. Soluciones continuas de la ecuación funcional de Fréchet en varias variables	69
<b>7. La ecuación funcional de Cherruault, Mora y Ziadi</b>	<b>71</b>
7.1. Un resultado de regularidad . . . . .	72
7.2. Una ecuación funcional asociada a la ecuación de Cherruault, Mora y Ziadi	76
<b>Conclusiones y futuras líneas de investigación</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>



# Introducción

Las ecuaciones funcionales son una parte fundamental del Análisis Matemático que tiene, además, estrechos vínculos con otras áreas de la matemática, como el álgebra o la Geometría (de quienes toma en ocasiones los problemas a estudiar y sobre las cuales repercuten otras veces los resultados que se obtienen). Históricamente podemos afirmar que las primeras ecuaciones funcionales aparecieron relacionadas con ciertos problemas geométricos y/o físicos. Sólo por mostrar un ejemplo, citemos que en 1352 Nicolás Oresme (nacido en torno a 1320, muerto en 1382) se interesó por la ecuación funcional

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) - f(x_3)} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} \quad \text{para todo } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ tal que } x_1 > x_2 > x_3. \quad (1)$$

Oresme se refería a las funciones que resuelven esta ecuación como “cantidades uniformemente deformadas” y se planteó su caracterización. Posteriormente, en 1638 Galileo Galilei (1564-1642) utilizó para la verificación de sus tesis sobre la caída libre de los cuerpos, la ecuación funcional

$$\frac{f((n+1)t) - f(nt)}{f(nt) - f((n-1)t)} = \frac{2n+1}{2n-1}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y todo } n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

que es satisfecha por todo monomio cuadrático  $f(x) = ax^2$ . Además, tras comprobar sus tesis, anunciaría que, en su opinión, “las leyes de la Naturaleza están escritas en lenguaje matemático”. Sin embargo, en aquel momento aún no se disponía de una notación apropiada para el estudio no ya de las ecuaciones funcionales sino ni siquiera de las funciones en sí mismas. Para disponer de herramientas apropiadas y para explotarlas con éxito, imprimiendo cada vez mayor fuerza sobre las palabras de Galileo -creador del método científico- hubo que esperar primero a la introducción del método de coordenadas de Descartes (1596-1650) (a partir de 1637) y, posteriormente, a la creación del Cálculo por Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716) (a partir de 1666) y su desarrollo ulterior por varias generaciones de matemáticos de gran talento. Así, la teoría de Ecuaciones Funcionales surgió de forma espontánea desde el mismo momento en que los matemáticos fijaron su atención en el estudio de las funciones en su sentido más general. Los primeros trabajos que merecen ser enmarcados dentro de los objetivos y técnicas de esta nueva teoría fueron escritos por D’Alembert (1717-1783) en 1747. Concretamente, en el mismo artículo en el que deduce y resuelve la ecuación de ondas  $u_{xx} = a^2 u_{tt}$  (artículo que se considera en la actualidad el punto de partida de las Ecuaciones en Derivadas Parciales,

así como de las Ecuaciones Funcionales) él estudia la ecuación

$$f(x + y) + f(x - y) = 2g(x)h(y). \quad (3)$$

Téngase en cuenta que las funciones propuestas por D'Álembert como solución del problema de la cuerda vibrante (basadas en su método de las ondas viajeras) son de la forma  $u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + t/a) + f(x - t/a))$ , mientras que las soluciones propuestas por Daniel Bernoulli (1700-1782) (que utiliza el método de las ondas estacionarias) se representan como superposición (a veces, infinita) de las soluciones del tipo  $u(x, t) = g(x)h(t)$  [4, 5]. Por tanto, las soluciones de (3) nos deben proporcionar los bloques básicos -ondas estacionarias- que proponía Bernoulli. ¡Y tal es el caso!

Posteriormente, en 1769, en conexión con el problema físico de describir el comportamiento de la superposición (o suma) de dos fuerzas a partir de sus propiedades axiomáticas, problema que sirve para motivar (y, de hecho, justificar) la ley del paralelogramo, D'Álembert estudiaría la ecuación funcional

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y). \quad (4)$$

Con el tiempo muchas otras ecuaciones funcionales fueron apareciendo progresivamente en la literatura. Especialmente importantes fueron las aportaciones de Cauchy (1789-1857), quien introdujo y estudió en su famoso texto de 1821, las siguientes cuatro ecuaciones:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (5)$$

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad (6)$$

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad (7)$$

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (8)$$

(todas ellas planteadas originalmente para funciones reales de variable real). Cauchy se interesó por estas ecuaciones porque ellas resultan de gran utilidad si queremos definir cuidadosamente algunas de las funciones elementales, como el logaritmo o las funciones trigonométricas. También utilizó en su texto la ecuación de D'Álembert (4). Otras funciones relevantes para el Análisis, como la función  $\Gamma$  de Euler, o la función  $\zeta$  de Riemann, también lograron una fundación sólida gracias al uso de las ecuaciones funcionales. Además, otro aspecto importante fue el uso de las ecuaciones funcionales para extender la validez de ciertas identidades desde un conjunto limitado de parámetros hacia otro más amplio. Aquí el ejemplo típico, que se incluye con todo detalle en el texto de Cauchy, es el Teorema del binomio de Newton. En su primera versión este resultado afirma que si  $a, b$  son dos números reales y  $n$  es un número natural, entonces  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ , y se conocía desde los tiempos de Tartaglia. Una demostración sencilla de este hecho se puede lograr aplicando inducción sobre  $n$  y utilizando que los números binomiales satisfacen la identidad  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ . Newton se planteó extender la validez de la fórmula de Tartaglia para valores de  $n$  más generales. Para ello, consideró primero el caso  $n \in \mathbb{Q}$  y, posteriormente, consideró valores reales de  $n$  (y, luego, números complejos).

Obviamente, para poder demostrar su teorema pagaría el precio de reconvertir la suma finita original en una serie infinita. El problema se puede reducir al estudio del desarrollo en serie de potencias de la función  $(x + 1)^\alpha$  para  $|x| < 1$  y valores de  $\alpha$  cada vez más amplios. Así, se pretendía demostrar que

$$(x + 1)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - (n - 1))}{n!}x^n + \dots,$$

donde la suma es finita si  $\alpha$  es un número natural, pero es infinita en el resto de casos. Para probar la igualdad anterior se demuestra que el segundo miembro de dicha identidad es convergente y, además, como función de  $\alpha$ , satisface la ecuación funcional  $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta)$  con la condición  $f(1) = x + 1$ , ecuación que caracteriza al primer miembro de la igualdad, por lo que ambos son la misma función.

Tras una primera etapa en la que se emplearon numerosos métodos ad-hoc para la solución de las distintas ecuaciones funcionales que iban apareciendo, y teniendo además en cuenta la evolución significativa que tuvo el concepto de función desde los comienzos del Cálculo hasta la introducción de la teoría de la medida de Lebesgue, y, posteriormente, las distribuciones (o funciones generalizadas), proceso que tuvo que caminar en paralelo junto con el estudio de las numerosas ecuaciones funcionales que surgían por todas partes, poco a poco fue tomando cuerpo una teoría general que acabó centrándose en dos aspectos fundamentales: los problemas de regularidad de las soluciones y la estabilidad de las ecuaciones.

En este trabajo nosotros vamos a centrarnos en cuestiones relacionadas con la *regularidad de soluciones*, por lo que dejamos desde ya de lado la cuestión de la estabilidad. Simplemente diremos que los estudios sobre este tema son numerosos (incluso nos atreveríamos a decir que han estado de moda durante décadas) y se centran en la pregunta genérica siguiente: Si una función  $f$  no resuelve cierta ecuación funcional pero está cerca de hacerlo -en un sentido que debe precisarse-, ¿ será cierto que siempre existen soluciones exactas de la ecuación que están cerca -de nuevo, en un sentido a precisar- de la función  $f$ ?

La *teoría de regularidad* para las ecuaciones funcionales tiene como objetivo principal la demostración -para aquellas ecuaciones funcionales en las que ello es posible- de que si exigimos un mínimo comportamiento de regularidad como, por ejemplo, que la función  $f$  sea acotada en un conjunto con medida de Lebesgue positiva, entonces la solución  $f$  de nuestra ecuación funcional es en realidad una función muy suave. Por ejemplo, podría ser una función analítica, o diferenciable, etc.

Un ejemplo claro de regularidad lo encontramos en la ecuación de Cauchy  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , donde se supone que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Las soluciones de esta ecuación se llaman funciones aditivas. Cauchy demostró en 1821 que basta la continuidad de la función aditiva  $f$  para garantizar que  $f(x) = cx$  para cierta constante  $c$ . Este resultado fue mejorado por Darboux (1842-1917) en 1875, demostrando que basta la continuidad en un punto. Es más, Darboux demostró que si  $f$  es una solución de la ecuación de Cauchy que se mantiene acotada en un intervalo de interior no vacío  $(a, b)$ ,  $a < b$ , entonces  $f(x) = cx$ . Por mucho tiempo permaneció abierta la cuestión de si existen soluciones de esta ecuación que no son  $f(x) = cx$  para ninguna constante  $c$ . Obviamente, si estas funciones existen,

deben oscilar muy fuertemente porque no pueden ser localmente acotadas. Este problema fue resuelto en sentido positivo, por Hamel (1877-1954) en 1905, mediante el uso del axioma de elección. Precisamente es en este trabajo donde se introducen las llamadas bases de Hamel (i.e., las bases algebraicas de  $\mathbb{R}$  como  $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial). Si  $\beta = \{x_i\}_{i \in I}$  es una de tales bases, entonces la única aplicación  $\mathbb{Q}$ -lineal  $\mathcal{L}_\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que extiende a la aplicación  $\mathcal{L}_\beta^* : \beta \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\mathcal{L}_\beta^*(v_i) = 1$  para todo  $i \in I$  es un ejemplo de función aditiva y discontinua. Hamel demostró, además, que las funciones aditivas discontinuas poseen un grafo denso en el plano. Este resultado fue, mucho tiempo después, demostrado por San Juan (1908-1969) sin hacer uso del axioma de elección. En 1926, Kormes usó una interesante propiedad de los conjuntos medibles de Lebesgue, que había probado Steinhaus (1887-1972) en 1920, para demostrar que si  $A \subseteq \mathbb{R}$  tiene medida de Lebesgue positiva, y  $f$  es aditiva y acotada en  $A$ , entonces  $f(x) = cx$  para cierta constante  $c$ . Todos estos resultados están demostrados en el Capítulo 1 de esta memoria. Como se ve, a partir de hipótesis muy débiles, como la mera acotación en un conjunto de medida de Lebesgue positiva, se puede deducir que  $f(x) = cx$  y, en consecuencia  $f(x)$  es una función analítica. Éste es precisamente el comportamiento que deseamos mostrar cuando afirmamos que una ecuación funcional posee buenas propiedades de regularidad.

En la memoria examinamos varias ecuaciones funcionales clásicas y, para ellas, estudiamos varios problemas relacionados con la descripción del espacio de las soluciones y la regularidad de las mismas. En particular, mostramos especial interés en la ecuación de Fréchet (1876-1975) -cuyas soluciones continuas, como veremos, son polinomios algebraicos ordinarios- y en algunas ecuaciones funcionales relacionadas con ésta, como son la ecuación monomial y las ecuaciones Kakutani-Nagumo-Walsh, y de Haruki. También consideramos una ecuación funcional que fue introducida recientemente en la literatura por Cherrault, Mora y Ziadi. Cuando sea posible, nos ocuparemos de la descripción del grafo de las soluciones de la ecuación que estemos considerando.

Dividimos la memoria en dos partes. En la primera, que consta solamente del Capítulo 1, exponemos los Teoremas de Fréchet y Montel (1878-1973), en su versión original, para la ecuación funcional de Fréchet, que está dada por

$$\Delta_{h_1 h_2 \dots h_{m+1}} f(x) = 0 \text{ para } x, h_1, \dots, h_{m+1} \in \mathbb{R}; \quad (9)$$

donde  $\Delta_{h_1 h_2 \dots h_{m+1}} = \Delta_{h_{m+1}} \Delta_{h_m} \dots \Delta_{h_1}$  representa la composición de los operadores en diferencias progresivas  $\Delta_{h_i}$ ,  $i = 1, \dots, m+1$ , siendo  $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ . Se sabe que esta ecuación es equivalente a la ecuación funcional de Fréchet de paso fijo,

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0 \text{ para } x, h \in \mathbb{R}.$$

El Teorema de Fréchet de 1909 afirma que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución continua de la ecuación (9), entonces  $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$  para ciertos coeficientes reales  $a_k$ . Este resultado fue posteriormente refinado y ahora sabemos que si  $f$  resuelve la ecuación de Fréchet y está acotada en un conjunto  $A$  medible de Lebesgue, con medida estrictamente positiva,  $|A| > 0$ , entonces  $f$  es un polinomio algebraico ordinario (incluimos una nueva demostración de este resultado en el Capítulo 1 de la memoria). Sin embargo, hasta el año 2007 nadie había estudiado el grafo de los polinomios discontinuos. Entonces Almira

y López-Moreno, utilizando técnicas de interpolación, proporcionaron una descripción cualitativa de los conjuntos  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$  cuando  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un polinomio discontinuo. En particular, ellos demuestran que  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$  siempre contiene un abierto no acotado y satisface una relación del tipo

$$\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2} = C(l, u) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : l(x) \leq y \leq u(x)\} \quad (10)$$

para cierto par de funciones  $l, u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  que poseen las siguientes propiedades:

- (i)  $u$  es semicontinua inferior y  $l$  es semicontinua superior.
- (ii) Para cada  $x \in \mathbb{R}$  se tiene que  $u(x) - l(x) = +\infty$ .
- (iii) Existen dos polinomios algebraicos  $p, q \in \Pi_n^1$  tales que  $p \neq q$  y, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $\{x\} \times [p(x), q(x)] \subseteq C(l, u)$ .

Sin embargo, no logran una definición más precisa para las funciones  $l(x)$ ,  $u(x)$  anteriores, aunque introducen algunos ejemplos donde éstas se pueden calcular explícitamente y que nos dan una idea de cómo pueden ser, en general.

Por otra parte, en 1937, Montel estudió la ecuación de Fréchet desde una perspectiva diferente. Concretamente, él estaba interesado en conocer cuántos parámetros  $h$  son suficientes para garantizar que, si  $f$  es continua y  $\Delta_h^{m+1} f(x) = 0$  para todo  $x$ , entonces  $f$  es un polinomio algebraico ordinario. El Teorema de Montel es la respuesta a esta pregunta. Montel formuló su resultado tanto para funciones de una variable como para funciones de varias variables, y también estudió la misma cuestión con funciones holomorfas, esta vez buscando una caracterización de los polinomios algebraicos de variable compleja.

En la segunda parte de la memoria exponemos los resultados principales de la tesis. A saber, en el Capítulo 2 caracterizamos completamente las clausuras de los grafos de los monomios discontinuos, dando una descripción precisa de las funciones  $l(x)$ ,  $u(x)$  que aparecen en (10) cuando  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un monomio discontinuo y, como aplicación de las técnicas empleadas en nuestra demostración, obtenemos una nueva prueba del Teorema de Hamel-San Juan -sobre la clausura del grafo de una función aditiva discontinua- y del Teorema tipo Darboux para la ecuación de Fréchet. Además, probamos que conocer completamente las clausuras de los grafos de dos monomios no sirve para determinar completamente la clausura del grafo de la suma de ambos, lo cual explica al menos parcialmente por qué el problema de caracterizar completamente las clausuras de los grafos de los polinomios permanece aún abierto. En el Capítulo 3 se utilizan técnicas de análisis funcional (sobre subespacios invariantes por traslaciones) para demostrar algunas variaciones del Teorema de Montel en varias variables. En efecto, se obtiene una nueva demostración del resultado original y se demuestra que éste se puede extender tanto para distribuciones como para funciones definidas sobre el grupo aditivo  $\mathbb{Z}^d$ . En el siguiente Capítulo se estudia el Teorema de Montel-Popoviciu, dando una demostración del mismo que, aunque en el planteamiento general es bastante fiel a la original, contiene algunos argumentos nuevos y, además, a diferencia de lo expuesto en el trabajo de Popoviciu, está

desarrollada con todo detalle. A continuación se utilizan las técnicas de interpolación que se acaban de introducir en conexión con el Teorema de Montel-Popoviciu, para demostrar que la clausura del grafo de cualquier polinomio discontinuo de varias variables siempre contiene un abierto no acotado. De paso, este resultado nos proporciona un nuevo enfoque para un Teorema tipo Darboux para la ecuación de Fréchet en el caso multivariable. En el Capítulo 5 se demuestra un Teorema tipo Montel para funciones  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{K}$ , donde  $\mathbb{K}$  es un cuerpo valuado no arquimediano que contiene (con continuidad) al cuerpo  $\mathbb{Q}_p$  de los números p-ádicos. El Capítulo 6 se ocupa de caracterizar los espacios de funciones continuas que resuelven las ecuaciones funcionales clásicas de Kakutani-Nagumo-Walsh, de Haruki y de Fréchet en varias variables. El Capítulo 7 lo dedicamos a estudiar una ecuación funcional mucho más reciente, que fue introducida en la literatura por Cherrault, Mora y Ziadi en 1999. Finalmente, incluimos un epígrafe dedicado a las conclusiones de la memoria, así como a explicar algunos problemas abiertos.

Parte I

Preliminares





# Los teoremas de Fréchet y Montel en su versión original

En este capítulo vamos a demostrar, siguiendo los argumentos originales, los dos resultados principales que motivan el desarrollo de esta tesis: los Teoremas de Fréchet y de Montel. Además, repasamos algunos resultados posteriores, relacionados con la ecuación funcional de Fréchet, que tienen especial relevancia en relación con los resultados que se demuestran en esta tesis.

## 1.1. Motivación: resultados de regularidad para la ecuación funcional de Cauchy

Consideremos, en esta sección inicial, la ecuación funcional más clásica de todas: la ecuación de Cauchy,

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1.1}$$

Las soluciones  $f$  de la ecuación (1.1) se llaman, por motivos evidentes, funciones aditivas. Cauchy demostró que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua que satisface (1.1), entonces  $f(x) = ax$  para cierta constante  $a$ . Veamos cómo se puede demostrar esto. La aditividad de  $f$  nos permite afirmar que, si  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f(nx) = nf(x)$ . Por tanto,  $f(x) = f(n(x/n)) = nf(x/n)$ , y, en consecuencia,  $f(x/n) = f(x)/n$  para todo  $x$  real y todo número natural  $n$ . Además,  $f(0) = 2f(0)$  implica que  $f(0) = 0$ , y  $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$  implica que  $f(-x) = -f(x)$ , por lo que las propiedades anteriores se trasladan inmediatamente al caso  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Se sigue que, si  $r = n/m \in \mathbb{Q}$ , entonces  $f(rx) = f(n(x/m)) = nf(x/m) = (n/m)f(x) = rf(x)$  para todo número real  $x$ . Tomando ahora  $x = 1$ , concluimos que  $f(r) = rf(1)$  para todo  $r \in \mathbb{Q}$ . Como  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$  y  $f$  es continua, concluimos que  $f(x) = f(1)x = ax$  con  $a = f(1)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Algunos años después, Darboux demostraría que si una función aditiva es continua en un punto, entonces es continua en todos los puntos de la recta. Esto es consecuencia

de la aditividad de  $f$ , pues si tenemos garantizada la continuidad en un punto  $x_0$  y tomamos otro punto  $x$  cualquiera, entonces, para todo  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= |f(x+x_0+h) - f(x_0) - f(x)| \\ &= |f(x) + f(x_0+h) - f(x_0) - f(x)| = |f(x_0+h) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Es más, Darboux demostró que si  $f$  está acotada en algún intervalo abierto no vacío, entonces  $f(x) = f(1)x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Este mismo resultado, en una expresión aún más contundente, sería demostrado por Ricardo San Juan [59], uno de los primeros matemáticos españoles que alcanzaron el prestigio internacional en el siglo XX. Su argumento es tan elegante que no podemos permitirnos aquí obviarlo. Además, como veremos luego, motivó buena parte de nuestro trabajo en ecuaciones funcionales.

**TEOREMA 1.1.1** (Hamel, San Juan). *Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función aditiva discontinua, entonces su grafo,  $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$  es un subconjunto denso del plano.*

**Demostración.** Supongamos que  $f$  es aditiva pero no es una función del tipo  $f(x) = ax$  para ninguna constante  $a$  (ya sabemos que las soluciones continuas de la ecuación de Cauchy son de este tipo). Entonces existen  $x_0, x_1 \neq 0$  tales que  $f(x_0)/x_0 \neq f(x_1)/x_1$ . En otras palabras,  $f(x_1)x_0 - f(x_0)x_1 \neq 0$ . Esto significa que el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ f(x_0) & f(x_1) \end{bmatrix}$$

es distinto de cero. Por tanto, los vectores  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$  son linealmente independientes. Se sigue que las combinaciones lineales que podemos realizar con estos vectores, tomando coeficientes en  $\mathbb{Q}$ , forman un subconjunto denso del plano. Ahora bien, si  $r_0, r_1 \in \mathbb{Q}$ , entonces

$$r_0(x_0, f(x_0)) + r_1(x_1, f(x_1)) = (r_0x_0 + r_1x_1, f(r_0x_0 + r_1x_1)) \in G(f).$$

Por tanto,  $G(f)$  es denso en  $\mathbb{R}^2$  □

En 1906, Hamel [29] había introducido sus bases (es decir, las bases algebraicas de  $\mathbb{R}$  como espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$ , cuya existencia está garantizada por el axioma de elección) precisamente para demostrar la existencia de soluciones discontinuas de la ecuación de Cauchy. En efecto, si  $\beta = \{v_i\}_{i \in I}$  es una de tales bases y  $\varphi : \beta \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación arbitraria, entonces la única aplicación  $\mathbb{Q}$ -lineal  $\mathcal{L}_{\beta, \varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica  $\mathcal{L}(v_i) = \varphi(i)$  para todo  $i \in I$ , es una función aditiva, y esta función será discontinua si (y solo si) existen  $i_0, i_1$  tales que  $\varphi(i_0)/v_{i_0} \neq \varphi(i_1)/v_{i_1}$ , cosa que podemos forzar sin problemas.

Posteriormente, Sierpinsky [61] y Banach [15] publicaron, en el primer volumen de la revista *Fundamenta Mathematicae*, dos demostraciones diferentes de que las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditivas medibles son necesariamente de la forma  $f(x) = ax$  para cierta constante  $a$ . Por último, Kormes [37] utilizó el teorema de Darboux y una propiedad de los conjuntos medibles de Lebesgue, que había sido demostrada recientemente por

Steinhaus [63, Teorema VII], según la cual, si  $A \subseteq \mathbb{R}$  es un conjunto con medida de Lebesgue positiva,  $|A| > 0$ , entonces el conjunto

$$A + A = \{x + y : x, y \in A\}$$

contiene un intervalo abierto no vacío, para demostrar el siguiente resultado, más fuerte que los obtenidos por Banach y Sierpinsky:

**TEOREMA 1.1.2** (Kormes). *Si  $f$  es una función aditiva y acotada en un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  con medida de Lebesgue positiva,  $|A| > 0$ , entonces  $f(x) = f(1)x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Demostración.** Si  $\sup_{x \in A} |f(x)| \leq M$  entonces  $\sup_{x \in A+A} |f(x)| \leq 2M$ , pues  $f$  es aditiva y, por tanto,  $|f(x+y)| = |f(x) + f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)|$  para todo  $x, y \in A$ . Se sigue que  $f$  está acotada en un intervalo abierto no vacío y el teorema de Darboux implica que  $f(x) = ax$ .  $\square$

Como se ve, hasta ahora las cosas han sido sencillas. La ecuación de Cauchy ha demostrado ser muy productiva. Ella posee la sorprendente cualidad de que, sin aparecer ningún tipo de condiciones de regularidad en su definición (las funciones  $f$  que satisfacen la ecuación pueden ser altamente irregulares), resulta que si exigimos un mínimo de regularidad sobre una de sus soluciones (como, por ejemplo, estar acotada en un conjunto de medida positiva), entonces éstas son altamente regulares. De hecho, son monomios del tipo  $f(x) = ax$ , y tienen, por tanto, el más alto grado de suavidad posible: son funciones analíticas. Surge, por tanto, la siguiente pregunta natural: ¿hay otras ecuaciones funcionales que tengan una propiedad similar? En este capítulo vamos a explicar algunos resultados relacionados con esta cuestión para el caso de otra ecuación funcional clásica: la ecuación de Fréchet.

## 1.2. El teorema de Fréchet clásico

En 1909 el matemático francés Maurice Fréchet demostró que, entre todas las funciones continuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , los polinomios de grado  $\leq m$  se pueden caracterizar como las soluciones de una ecuación funcional que generaliza de forma natural a la ecuación de Cauchy. Concretamente, demostró el siguiente resultado:

**TEOREMA 1.2.1** (Fréchet, 1909). *Consideremos el operador*

$$\mathcal{F}_{m+1}(f)(x_1, \dots, x_{m+1}) = f(x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1}) + \sum_{t=1}^m (-1)^t \sum_{\{i_1, \dots, i_{m+1-t}\} \in \mathcal{P}_t(m+1)} f(x_{i_1} + \dots + x_{i_{m+1-t}}) + (-1)^{m+1} f(0),$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$  son variables reales y

$$\mathcal{P}_t(m+1) = \{A \subset \{1, 2, \dots, m+1\} : \#A = m+1-t\}, \quad t = 1, 2, \dots, m.$$

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces se tiene que  $f$  es un polinomio algebraico de grado menor o igual a  $m$  (es decir,  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$  para ciertas constantes  $\{a_i\}_{i=0}^m \subseteq \mathbb{R}$  y para todo  $x \in \mathbb{R}$ ) si y sólo si la función  $\mathcal{F}_{m+1}(f)$  se anula idénticamente en  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

A continuación vamos a repetir los argumentos utilizados originalmente por Fréchet para su prueba del Teorema 1.2.1. Existen otras demostraciones posibles y, de hecho, en esta memoria vamos a presentar también varias demostraciones nuevas del mismo resultado. Aunque la importancia de la ecuación de Fréchet (ni de ninguna otra ecuación funcional que se pueda considerar) no es comparable a la de la ecuación de Cauchy, lo cierto es que ésta ha suscitado, a lo largo del tiempo, el interés de numerosos matemáticos, dando lugar a algunos de los artículos que, en nuestra opinión, podrían considerarse más hermosos de la teoría de ecuaciones funcionales.

Por comodidad, para evitar un uso excesivo de notación y fórmulas engorrosas, vamos a demostrar, antes de abordar la prueba del teorema de Fréchet, algunos resultados técnicos que luego serán de utilidad. Comenzamos con la definición del operador en diferencias progresivas de orden  $n$ :

**DEFINICIÓN 1.** Dada una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos los operadores

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \text{ (para } h, x \in \mathbb{R}\text{),}$$

y

$$\Delta_{h_1 h_2 \dots h_s} f(x) = \Delta_{h_1} (\Delta_{h_2 \dots h_s} f)(x), \quad s = 2, 3, \dots, \quad (x, h_1, h_2, \dots, h_s) \in \mathbb{R}^{s+1}.$$

Además, si  $h_1 = h_2 = \dots = h_s = h$ , usamos la notación  $\Delta_h^s f(x)$  para  $\Delta_{h, h, \dots, h} f(x)$ .

**LEMA 1.2.2.**

$$\Delta_{h_1 h_2} = \Delta_{h_1+h_2} - \Delta_{h_1} - \Delta_{h_2} = \Delta_{h_2 h_1}$$

**Demostración.** Para probar la primera igualdad, basta hacer los cálculos:

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1 h_2} f(x) &= \Delta_{h_1} (f(x+h_2) - f(x)) \\ &= f(x+h_2+h_1) - f(x+h_1) - f(x+h_2) + f(x) \\ &= f(x+h_2+h_1) - f(x) + f(x) - f(x+h_1) + f(x) - f(x+h_2) \\ &= \Delta_{h_1+h_2} f(x) - \Delta_{h_1} f(x) - \Delta_{h_2} f(x). \end{aligned}$$

La segunda igualdad es consecuencia de que intercambiar el orden de  $h_1, h_2$  en el segundo miembro de la expresión anterior, no cambia nada.  $\square$

**LEMA 1.2.3.** Se tiene que

$$\Delta_{h_1 h_2 \dots h_s} f(x) = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s = 0}^1 (-1)^{s - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_s)} f(x + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \dots + \varepsilon_s h_s).$$

En particular,

$$\mathcal{F}_{m+1}(f)(x_1, \dots, x_{m+1}) = \Delta_{x_1 \dots x_{m+1}} f(0).$$

**Demostración.** Este resultado se demuestra por un proceso rutinario de inducción. En efecto, para  $s = 2$  pasos el resultado es trivial (basta mirar la demostración del Lema 1.2.2). Supongamos que es cierto para  $s$  pasos y veamos qué sucede cuando tomamos  $s + 1$  pasos:

$$\begin{aligned}
& \Delta_{h_{s+1}}(\Delta_{h_1 h_2 \dots h_s} f(x)) \\
= & \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s=0}^1 (-1)^{s-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_s)} f(x + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \dots + \varepsilon_s h_s + h_{s+1}) \\
& - \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s=0}^1 (-1)^{s-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_s)} f(x + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \dots + \varepsilon_s h_s) \\
= & \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s=0}^1 (-1)^{s+1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_s+1)} f(x + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \dots + \varepsilon_s h_s + h_{s+1}) \\
& + \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s=0}^1 (-1)^{s+1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_s)} f(x + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \dots + \varepsilon_s h_s) \\
= & \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{s+1}=0}^1 (-1)^{s+1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_{s+1})} f(x + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \dots + \varepsilon_{s+1} h_{s+1}),
\end{aligned}$$

que es lo que buscábamos. La segunda afirmación del lema es consecuencia inmediata de la fórmula que acabamos de probar y de la definición del operador  $\mathcal{F}_{m+1}$ .  $\square$

**Demostración del Teorema de Fréchet.** Hacemos la prueba por inducción sobre  $m$ . Si  $m = 1$ , entonces

$$\mathcal{F}_2(f) = f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2) + f(0),$$

por lo que, si  $\mathcal{F}_2(f)$  se anula idénticamente, entonces, tomando  $g(x) = f(x) - f(0)$ , se comprueba que

$$\begin{aligned}
g(x_1 + x_2) - g(x_1) - g(x_2) &= f(x_1 + x_2) - f(0) - f(x_1) + f(0) - f(x_2) + f(0) \\
&= f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2) + f(0) = 0,
\end{aligned}$$

por lo que  $g$  es una solución continua de la ecuación de Cauchy, de modo que  $g(x) = a_1 x$  para cierto número real  $a_1$ , y, en consecuencia,  $f(x) = a_0 + a_1 x$ , con  $a_0 = f(0)$ . Esto demuestra el resultado para  $m = 1$ . Supongamos que el teorema es cierto para  $m - 1$  y consideremos una solución continua  $f$  de la ecuación  $\mathcal{F}_{m+1}(f) = 0$ . Introducimos la función auxiliar

$$\varphi(x) = f(x + x_{m+1}) - f(x) - f(x_{m+1}) + f(0).$$

No es difícil comprobar que, si  $\mathcal{F}_{m+1}(f) = 0$ , entonces, para cada constante fija  $x_{m+1}$ , se tiene que  $\mathcal{F}_m(\varphi) = 0$ . En efecto, es evidente que

$$\varphi(x) = \Delta_{x_{m+1}} f(x) - \Delta_{x_{m+1}} f(0) = \Delta_{x_{m+1}}(\Delta_x f(0)) = \Delta_{x_{m+1}} x f(0),$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m(\varphi)(x_1, \dots, x_{m+1}) &= \Delta_{x_1 x_2 \dots x_m} \Delta_{x_{m+1}} (\Delta_x f(0)) \\ &= \Delta_{x_1 x_2 \dots x_{m+1}} (\Delta_x f(0)) \\ &= \Delta_x (\Delta_{x_1 x_2 \dots x_{m+1}} f)(0) = 0\end{aligned}$$

Se sigue que podemos utilizar la hipótesis de inducción para la función  $\varphi$ . Es decir, ahora sabemos que  $\varphi(x) \in \Pi_{m-1}$ .

Por otra parte, la función

$$Q(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y) + f(0)$$

es evidentemente simétrica (es decir:  $Q(x, y) = Q(y, x)$  para todo par  $(x, y)$ ), lo que nos conduce a concluir que  $Q(x, y)$  es un polinomio en las variables  $x, y$  y su grado es menor o igual a  $m - 1$  en cada una de estas variables.

Dividimos el resto de la demostración en varias etapas:

- Primero observamos que  $Q(x, y)$  satisface la ecuación funcional

$$Q(x, y) + Q(x + y, z) = f(x + y + z) - f(x) - f(y) - f(z) + 2f(0),$$

por lo que  $Q(x, y) + Q(x + y, z)$  es una función simétrica con respecto a las variables  $x, y, z$ .

- Descomponemos  $Q(x, y)$  como suma de sus componentes homogéneas,

$$Q = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_r,$$

donde  $Q_i$  es un polinomio homogéneo de grado  $i$ , para  $i = 0, \dots, r$ . Como esta descomposición es única para cualquier polinomio en un número finito de variables, y como, para cada  $i$ , el polinomio  $Q_i(x, y) + Q_i(x + y, z)$  es homogéneo de grado  $i$ , concluimos que los polinomios  $Q_i(x, y) + Q_i(x + y, z)$  son funciones simétricas respecto de las variables  $x, y, z$ , por serlo el polinomio  $Q(x, y) + Q(x + y, z)$ .

- Como  $Q_i(x, y)$  es homogéneo de grado  $i$ , sabemos que admite una expresión del tipo:

$$Q_i(x, y) = a_0 x^i + a_1 x^{i-1} y + \dots + a_{i-1} x y^{i-1} + a_i y^i,$$

por lo que, si utilizamos la simetría de la función  $Q_i(x, y) + Q_i(x + y, z)$  conjuntamente con la fórmula del Binomio de Newton, obtenemos un conjunto de identidades sobre los coeficientes  $\{a_t\}_{t=0}^i$  que, si se usan apropiadamente, nos garantizan la existencia de cierta constante  $A_i$  tal que

$$Q_i(x, y) = A_i ((x + y)^i - x^i - y^i),$$

para  $i = 1, 2, \dots, r$ .

En particular, los monomios  $x^i$ ,  $y^i$  no aparecen en la expresión del polinomio  $Q_i(x, y)$ , por lo que, si  $Q = Q_0 + \dots + Q_r$  tiene grado  $\leq m - 1$  en cada una de las variables  $x$  e  $y$ , entonces podemos afirmar que  $r \leq m$  y

$$Q(x, y) = \sum_{i=2}^m A_i ((x+y)^i - x^i - y^i) = R(x+y) - R(x) - R(y),$$

donde  $R(x) = \sum_{i=2}^m A_i x^i$ .

- Consideramos ahora la función  $S(x) = f(x) - R(x) - f(0)$ . Esta función satisface la ecuación

$$S(x+y) - S(x) - S(y) = 0 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

por lo que existe una cierta constante  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $S(x) = ax$ . Se sigue que  $f(x) = f(0) + ax + R(x) \in \Pi_m$ , lo que finaliza la demostración.

□

Es importante observar que la prueba original de Fréchet se puede repetir sin grandes cambios, bajo la hipótesis (mucho más débil) de que la función  $f$  es acotada en un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  con medida de Lebesgue positiva. Para ello, basta utilizar un teorema debido a Kurepa [40] que generaliza el Teorema de Steinhaus [63]. Concretamente, dicho resultado garantiza que la función  $\lambda(x) = |A \cap (A - \{x\})|$  es continua, por lo que, si  $|A| = \lambda(0) > 0$ , entonces  $\lambda(x) > 0$  para todo  $|x| < \varepsilon$ , para cierto  $\varepsilon > 0$ . Esto implica que las funciones del tipo  $g(x) = f(x+a) - f(x)$  mantienen la propiedad de estar acotadas en un conjunto de medida positiva, siempre que  $|a|$  sea suficientemente pequeño. Supongamos ahora que  $f$  es una solución de  $\mathcal{F}_{m+1}(f) = 0$  y  $\sup_{x \in A} |f(x)| \leq M < \infty$  para cierto conjunto  $A$  con  $|A| > 0$ . Entonces la función

$$\varphi(x) = f(x + x_{m+1}) - f(x) - f(x_{m+1}) + f(0)$$

también está acotada en el conjunto  $A$  (siempre que  $|x_{m+1}|$  sea suficientemente pequeño) y, como se probó anteriormente, satisface  $\mathcal{F}_m(\varphi) = 0$ , por lo que podemos aplicarle a ella la hipótesis de inducción. Esto nos conduce a que  $\varphi \in \Pi_{m-1}$ . A continuación, es evidente que los argumentos dados relativos a la función  $Q(x, y) = f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0)$  no requieren cambios. Finalmente, como  $R(x)$  es un polinomio algebraico ordinario, la función  $S(x) = f(x) - R(x) - f(0)$  está acotada en  $A$  y, al aplicar a ella el Teorema de Kormes (Teorema 1.1.2), tenemos que  $S(x) = ax$  para cierta constante  $a$ , que es lo que buscábamos.

La ecuación  $\Delta_{h_1 h_2 \dots h_{m+1}} f(x) = 0$  se puede estudiar para funciones  $f : X \rightarrow Y$  cuando  $X, Y$  son un par de espacios vectoriales sobre  $\mathbb{Q}$ , y las variables  $x, h_1, \dots, h_{m+1}$  representan elementos de  $X$ ,

$$\Delta_{h_1 h_2 \dots h_{m+1}} f(x) = 0 \quad (x, h_1, h_2, \dots, h_{m+1} \in X). \quad (1.2)$$

En este contexto, las soluciones de (1.2) son las funciones de la forma  $f(x) = A_0 + A_1(x) + \dots + A_m(x)$ , donde  $A_0$  es una constante y  $A_k(x) = A^k(x, x, \dots, x)$  para cierta

función  $k$ -aditiva simétrica  $A^k : X^k \rightarrow Y$  (decimos que  $A_k$  es la diagonalización de  $A^k$ ) para  $k = 0, 1, \dots, m$ . En particular, si  $x \in X$  y  $r \in \mathbb{Q}$ , entonces  $f(rx) = A_0 + rA_1(x) + \dots + r^m A_m(x)$ . Además, se sabe que  $f : X \rightarrow Y$  satisface (1.2) si y sólo si es una solución de la ecuación funcional

$$\Delta_h^{m+1} f(x) := \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^{m+1-k} f(x + kh) = 0 \quad (x, h \in X). \quad (1.3)$$

Una demostración de este resultado se sigue de un conocido teorema, debido a Djoković [21] (ver también [33, Teorema 7.5, pág. 160], [38, Teorema 15.1.2., pág. 418]), el cual establece que los operadores  $\Delta_{h_1 h_2 \dots h_s}$  verifican la ecuación

$$\Delta_{h_1 \dots h_s} f(x) = \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_s=0}^1 (-1)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_s} \Delta_{\alpha_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_s)}(h_1, \dots, h_s)}^s f(x + \beta_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_s)}(h_1, \dots, h_s)), \quad (1.4)$$

donde

$$\alpha_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_s)}(h_1, \dots, h_s) = (-1) \sum_{r=1}^s \frac{\epsilon_r h_r}{r}$$

y

$$\beta_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_s)}(h_1, \dots, h_s) = \sum_{r=1}^s \epsilon_r h_r.$$

Otra demostración de la equivalencia de las ecuaciones de Fréchet con paso fijo y con paso variable, basada en análisis espectral, ha aparecido recientemente en [67].

Si tenemos ahora en cuenta el Teorema de Djoković y utilizamos los argumentos expuestos tras la prueba del Teorema de Fréchet, habremos demostrado el siguiente resultado:

**TEOREMA 1.2.4.** *Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es solución de la ecuación de Fréchet  $\Delta_h^{m+1} f(x) = 0$  y  $f$  es acotada en  $A \subseteq \mathbb{R}$  para cierto conjunto de medida positiva,  $|A| > 0$ . Entonces  $f \in \Pi_m$*

El Teorema 1.2.4 ha sido demostrado varias veces, con métodos muy diversos. De hecho, el argumento que hemos presentado aquí, aunque está basado en la prueba original de Fréchet, no se ha publicado hasta la fecha -al menos, por lo que alcanza a nuestro conocimiento del tema- y puede considerarse, en consecuencia, nuevo. Sin embargo, nuestra prueba depende también de la herramienta típica con la que se ha demostrado este resultado anteriormente: el Teorema de Kurepa. Por ejemplo, una demostración de este tipo la podemos encontrar en la monografía de Székelyhidi [66]. Otras pruebas se pueden encontrar, por ejemplo, en [18], [25], [43]. En particular, Ciesielski [18] demostró que, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es solución de la siguiente desigualdad funcional

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \geq 0, \text{ para todo } x, h \in \mathbb{R}$$

y está acotada en un conjunto  $A$  con medida de Lebesgue positiva, entonces  $f$  es una función continua en toda la recta real. Se sigue que las soluciones de la ecuación de Fréchet que no son polinomios ordinarios no pueden estar acotadas en ninguno de estos conjuntos  $A$ .



### 1.3. El teorema de Montel clásico

En un artículo de 1937, Paul Montel [44] demostró un resultado relacionado con la ecuación funcional de Fréchet que, muy probablemente, resultó inesperado. En vez de centrarse en las propiedades mínimas de regularidad necesarias para que la función  $f$ , solución de la ecuación en cuestión, se viera forzada a ser un polinomio algebraico ordinario, se ocupó de conocer cuántos pasos  $h$  son estrictamente necesarios para garantizar que una función continua que satisface  $\Delta_{h^k}^{m+1} f(x) = 0$  (para todo  $x$  y para unos pocos valores de  $k$ ), es por necesidad un polinomio. Como él mismo explicaba en su artículo, la motivación principal para este estudio no procedía de los resultados publicados por Fréchet en 1909, sino de un teorema muy anterior, debido a C.G. Jacobi y publicado en 1834, sobre los periodos de las funciones meromorfas. En efecto, si tomamos  $m = 0$ , decir que  $\Delta_h^1 f(x) = 0$  para todo  $x$  es lo mismo que decir que  $f$  es una función periódica y  $h$  es uno de sus periodos. Jacobi había demostrado, mediante una construcción explícita, que existen funciones  $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  que son meromorfas, no son constantes, y admiten dos periodos independientes. Estas funciones reciben el nombre de funciones doblemente periódicas (o elípticas) y son especialmente importantes para la variable compleja [35]. No existen funciones holomorfas no constantes que sean doblemente periódicas, porque éstas deben ser funciones acotadas y, en tal caso, el Teorema de Liouville garantiza que son funciones constantes. Además, si una función meromorfa admite tres periodos independientes (ya diremos lo que significa esto), entonces forzosamente esta función es constante. Montel se preguntaba si algo similar podría suceder con los “periodos generalizados”  $h$  que aparecen en la ecuación de Fréchet  $\Delta_h^{m+1} f = 0$ . En efecto, debemos observar que cuando  $m = 0$ , los periodos  $h$  forman un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ , cosa que, como veremos posteriormente, no sucede necesariamente para el resto de valores de  $m$  y que tiene el efecto de hacer el problema muy sencillo cuando  $m = 0$ , pero complicado cuando  $m \geq 1$ .

Comenzamos, pues, realizando algunas observaciones sencillas, formuladas en un contexto más general que el originalmente planteado por Jacobi, sobre el caso  $m = 0$ . Dados un grupo conmutativo  $(G, +)$ , un conjunto no vacío  $Y$ , y una función  $f : G \rightarrow Y$ , consideramos el conjunto de los periodos de  $f$ ,  $\mathfrak{P}_0(f) = \{g \in G : f(w + g) = f(w) \text{ para todo } w \in G\}$ . Obviamente,  $\mathfrak{P}_0(f)$  es siempre un subgrupo de  $G$ . En algunos casos especiales, estos grupos son conocidos y, de hecho, poseen una hermosa estructura. Por ejemplo, el teorema de Jacobi de 1834 establece que si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una función meromorfa no constante, definida sobre los números complejos, entonces  $\mathfrak{P}_0(f)$  es un subgrupo discreto de  $(\mathbb{C}, +)$ , lo cual reduce el estudio de estos conjuntos a los siguientes tres casos:  $\mathfrak{P}_0(f) = \{0\}$ ,  $\mathfrak{P}_0(f) = \{nw_1 : n \in \mathbb{Z}\}$  para cierto número complejo  $w_1 \neq 0$ , o  $\mathfrak{P}_0(f) = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 : (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$  para un par de números complejos  $w_1, w_2$  que satisfacen  $w_1 w_2 \neq 0$  y  $w_1/w_2 \notin \mathbb{R}$ . En particular, estas funciones no pueden tener tres periodos independientes y, además, existen ejemplos de funciones meromorfas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  con dos periodos independientes  $w_1, w_2$  siempre que  $w_1/w_2 \notin \mathbb{R}$ . De forma análoga, si la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y no constante, entonces no admite dos periodos que sean linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ . Estos resultados pueden formularse en términos de ecuaciones funcionales, puesto que  $h$  es un periodo de  $f : G \rightarrow Y$  si y sólo si  $f$  resuelve

la ecuación funcional  $\Delta_h f(x) = 0$  ( $x \in G$ ). Por tanto, el teorema de Jacobi se puede reformular como un teorema sobre ecuaciones funcionales en el que se establece que las funciones constantes son precisamente las funciones meromorfas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  que resuelven un sistema de ecuaciones del tipo

$$\Delta_{h_1} f(z) = \Delta_{h_2} f(z) = \Delta_{h_3} f(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (1.5)$$

para tres periodos independientes  $\{h_1, h_2, h_3\}$  (decimos que  $\{h_1, h_2, h_3\} \subseteq \mathbb{C}$  son independientes si  $h_1\mathbb{Z} + h_2\mathbb{Z} + h_3\mathbb{Z}$  es un subconjunto denso de  $\mathbb{C}$ ). En el caso real, el teorema afirma que, si  $h_1 h_2 \neq 0$  y  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$ , entonces la función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es constante si y sólo si es solución del sistema de ecuaciones funcionales

$$\Delta_{h_1} f(x) = \Delta_{h_2} f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (1.6)$$

Paul Montel sustituyó en las ecuaciones anteriores (1.5), (1.6) el operador en diferencias finitas de orden uno,  $\Delta_h$ , por el operador en diferencias progresivas de orden superior,  $\Delta_h^{m+1}$  y probó que las ecuaciones resultantes son apropiadas para la caracterización de los polinomios algebraicos. Concretamente, demostró el siguiente resultado:

**TEOREMA 1.3.1** (Montel). *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (i) *Si  $\{h_1, h_2\} \subset \mathbb{R}$  son tales que  $h_1 h_2 \neq 0$  y  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$ , entonces la función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un polinomio algebraico con coeficientes reales y grado  $\leq m$  (i.e.,  $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$  con los coeficientes  $a_i$  números reales para todo  $i$ ) si y sólo si resuelve el sistema de ecuaciones funcionales*

$$\Delta_{h_1}^{m+1} f(x) = \Delta_{h_2}^{m+1} f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (1.7)$$

- (ii) *Supongamos que  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa que resuelve un sistema de ecuaciones funcionales de la forma*

$$\Delta_{h_1}^{m+1} f(z) = \Delta_{h_2}^{m+1} f(z) = \Delta_{h_3}^{m+1} f(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (1.8)$$

*para tres periodos independientes  $\{h_1, h_2, h_3\}$ . Entonces  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$  es un polinomio algebraico con coeficientes complejos y grado  $\leq m$ .*

Veamos cómo demostró Montel el teorema anterior. Para ello, recurrimos a varios resultados técnicos intermedios.

**LEMA 1.3.2.** *Supongamos que  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$  son tales que  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$ . Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $\Delta_{h_1} f(x) = \Delta_{h_2} f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $f(x) = c$  es una función constante.*

**Demostración.** El resultado es consecuencia inmediata de la continuidad de  $f$  y de que si  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$  entonces  $h_1\mathbb{Z} + h_2\mathbb{Z}$  es un subconjunto denso de  $\mathbb{R}$  y todos sus elementos son periodos de  $f$ .  $\square$

**LEMA 1.3.3.** *Supongamos que  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$  son tales que  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$ . Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y*

$$\Delta_{h_1}f(x) = c_1, \quad \Delta_{h_2}f(x) = c_2 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y ciertas constantes } c_1, c_2, \quad (1.9)$$

*entonces  $f(x) = ax + b$  para ciertas constantes  $a, b$ . Además, si  $c_1c_2 = 0$ , entonces  $f(x) = c$  es una función constante.*

**Demostración.** Supongamos que  $f$  satisface (1.9), y consideremos, para cada  $h$ , la función  $g_h(x) = \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ . Entonces

$$\Delta_{h_i}g_h(x) = \Delta_{h_i}\Delta_h f(x) = \Delta_h\Delta_{h_i}f(x) = 0, \quad i = 1, 2,$$

por lo que, aplicando el Lema 1.3.2, concluimos que  $g_h(x) = g_h(0) = f(h) - f(0)$ , para todo  $x, h \in \mathbb{R}$ . En otras palabras, la función  $f$  es continua y satisface la ecuación funcional

$$f(x+h) = f(x) + f(h) - f(0), \quad \text{para todo } x, h \in \mathbb{R}.$$

Esto nos conduce directamente a que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y ciertas constantes  $a, b$ .

Para demostrar la segunda parte del lema basta observar que si  $f(x) = ax + b$  entonces  $\Delta_h f(x) = ah$  para todo  $x, h \in \mathbb{R}$ . Por tanto, si  $c_1c_2 = 0$ , entonces  $c_1 = 0$  o  $c_2 = 0$ . En ambos casos lo que estamos diciendo es que  $a = 0$  y, por tanto,  $f(x) = b$  es una función constante.  $\square$

**LEMA 1.3.4.** *Supongamos que  $\{h_1, h_2, h_3\} \subseteq \mathbb{C}$  son tres periodos independientes para la función continua  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces  $f(z) = c$  para cierta constante  $c \in \mathbb{C}$ .*

**Demostración.** El resultado es consecuencia inmediata de la continuidad de  $f$  y de que si los periodos  $\{h_1, h_2, h_3\} \subseteq \mathbb{C}$  son independientes, entonces  $h_1\mathbb{Z} + h_2\mathbb{Z} + h_3\mathbb{Z}$  es un subconjunto denso de  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**LEMA 1.3.5.** *Supongamos que  $\{h_1, h_2, h_3\} \subseteq \mathbb{C}$  son independientes,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y  $\Delta_{h_k}f(z) = c_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , para ciertas constantes  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ . Entonces  $f(z) = az + b$  para ciertas constantes  $a, b \in \mathbb{C}$ . Además, si  $c_1c_2c_3 = 0$ , entonces  $f(z) = b$  es una función constante.*

**Demostración.** En efecto, como estamos asumiendo que  $f(z)$  puede derivarse, y que la derivada es una función continua, se tiene que, para cada  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{h_k}f'(z) &= \Delta_{h_k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_{h_k}f(z+h) - \Delta_{h_k}f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el Lema 1.3.2 implica que  $f'(z)$  es una función constante. Es decir,  $f(z) = az + b$  para ciertos valores  $a, b \in \mathbb{C}$ .

La segunda parte del lema es consecuencia de que si  $f(z) = az + b$  entonces  $\Delta_h f(z) = ah$  para todo  $z, h \in \mathbb{C}$ . Por otra parte, si  $c_1 c_2 c_3 = 0$ , entonces  $c_1 = 0$  o  $c_2 = 0$  o  $c_3 = 0$  y, en todos estos casos, se concluye que  $a = 0$  y, por tanto,  $f(z) = b$  es una función constante. □

**Demostración del Teorema de Montel.** Aunque las ideas subyacentes son muy similares, hacemos una prueba separada para cada apartado del teorema.

(i). Supongamos que  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$  son tales que  $h_1 h_2 \neq 0$ ,  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$  y supongamos también que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y satisface la ecuación (1.7). Vamos a proceder por inducción sobre  $m$ . Para  $m = 0$  el resultado coincide con el Lema 1.3.2, que ya se demostró.

Consideremos la función

$$\varphi_0(x) = \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^m f(x).$$

Entonces  $\varphi_0$  es continua y  $\Delta_{h_i} \varphi_0(x) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Por tanto, el Lema 1.3.2 garantiza que  $\varphi_0(x) = \alpha_0$  para cierta constante  $\alpha_0$ . Una vez tenemos esta información, consideramos la nueva función

$$\varphi_1(x) = \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^{m-1} f(x).$$

Entonces  $\varphi_1(x)$  es continua y

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \varphi_1(x) &= \Delta_{h_1}^{m+1} \Delta_{h_2}^{m-1} f(x) = \Delta_{h_2}^{m-1} \Delta_{h_1}^{m+1} f(x) = 0 \\ \Delta_{h_2} \varphi_1(x) &= \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^m f(x) = \varphi_0(x) = \alpha_0. \end{aligned}$$

En otras palabras,  $\varphi_1(x)$  satisface la ecuación (1.9) con  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = \alpha_0$ , por lo que, aplicando el Lema 1.3.3, tenemos que  $\alpha_0 = 0$  y  $\varphi_1(x) = \alpha_1$  es una función constante.

Este mismo argumento lo podemos repetir inductivamente con las funciones

$$\varphi_i(x) = \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^{m-i} f(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

En el paso  $i$ -ésimo, tendremos que  $\varphi_i(x) = \alpha_i$  para cierta constante  $\alpha_i$ . Entonces, aplicando los operadores  $\Delta_{h_k}$  ( $k = 1, 2$ ) a la función  $\varphi_{i+1}(x)$ , tendremos que

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \varphi_{i+1}(x) &= \Delta_{h_1}^{m+1} \Delta_{h_2}^{m-(i+1)} f(x) = \Delta_{h_2}^{m-(i+1)} \Delta_{h_1}^{m+1} f(x) = 0 \\ \Delta_{h_2} \varphi_{i+1}(x) &= \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^{m-i} f(x) = \varphi_i(x) = \alpha_i, \end{aligned}$$

por lo que, aplicando el Lema 1.3.3, tendremos que  $\alpha_i = 0$  y  $\varphi_{i+1}(x) = \alpha_{i+1}$  es una función constante. Evidentemente, el proceso termina cuando  $i = m$ , lo que nos lleva a la conclusión de que existe una constante  $C_1$  (de hecho,  $C_1 = \alpha_m$ ) tal que

$$\Delta_{h_1}^m f(x) = C_1, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

El mismo argumento, pero intercambiando los papeles de  $h_1$  y  $h_2$ , nos sirve para demostrar que

$$\Delta_{h_2}^m f(x) = C_2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

para cierta constante  $C_2$ .

Consideramos ahora la función  $g(x) = f(x) - \frac{C_1}{m!h_1^m} x^m$ . Es claro que

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1}^m g(x) &= \Delta_{h_1}^m f(x) - \frac{C_1}{m!h_1^m} \Delta_{h_1}^m x^m = C_1 - C_1 = 0, \\ \Delta_{h_2}^m g(x) &= \Delta_{h_2}^m f(x) - \frac{C_1}{m!h_1^m} \Delta_{h_2}^m x^m = C_2 - C_1 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^m = C. \end{aligned}$$

Por tanto, si definimos la función

$$\psi(x) = \Delta_{h_1}^{m-1} \Delta_{h_2}^{m-1} g(x),$$

entonces

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \psi(x) &= \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^{m-1} g(x) = \Delta_{h_2}^{m-1} \Delta_{h_1}^m g(x) = 0 \\ \Delta_{h_2} \psi(x) &= \Delta_{h_1}^{m-1} \Delta_{h_2}^m g(x) = 0, \end{aligned}$$

y el Lema 1.3.2 garantiza que  $\psi(x) = \beta_0$  es una función constante. Los mismos argumentos que utilizamos antes con la función  $f$ , cambiando el valor  $m+1$  por el valor  $m$ , nos sirven ahora para probar que  $g$  satisface las relaciones

$$\Delta_{h_1}^{m-1} g(x) = C_1^* \text{ y } \Delta_{h_2}^{m-1} g(x) = C_2^*, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y ciertas constantes } C_1^*, C_2^*.$$

Se sigue que

$$\Delta_{h_1}^m g(x) = \Delta_{h_2}^m g(x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

y, por tanto, la hipótesis de inducción nos garantiza que  $g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y ciertos números reales  $a_0, \dots, a_{m-1}$ . Esto concluye la demostración de (i), pues  $f(x) = g(x) + a_m x^m$ , con  $a_m = \frac{C_1}{m!h_1^m}$ .

(ii). Este apartado admite una demostración similar a la utilizada para (i). La diferencia esencial está en que usamos los Lemas 1.3.4 y 1.3.5, y que la hipótesis de holomorfía simplifica el argumento. La complicación proviene de que necesitamos usar tres periodos en vez de dos. Razonamos, como es natural, por inducción sobre  $m$ . El caso  $m = 0$  está probado con el Lema 1.3.4. Suponemos que el resultado es cierto para  $m - 1$  y, a continuación, consideramos una función holomorfa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que satisface (1.8). Tomamos  $\varphi_0(z) = \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^m \Delta_{h_3}^m f(z)$ . Entonces  $\Delta_{h_k} \varphi_0(z) = 0$  para  $k = 1, 2, 3$ , por lo que, aplicando el Lema 1.3.4, concluimos que  $\varphi_0(z) = \gamma_0$  es una función constante. Tomamos ahora, como se hizo en la primera parte de la prueba de (i),  $\varphi_i(z) = \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^m \Delta_{h_3}^{m-i} f(z)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Consideremos  $\varphi_1(z)$ . Es evidente que

$$\Delta_{h_1} \varphi_1(z) = \varphi_0(z) = \gamma_0, \text{ y } \Delta_{h_2} \varphi_1(z) = \Delta_{h_3} \varphi_1(z) = 0,$$

por lo que, si usamos el Lema 1.3.5, concluimos que  $\varphi_1(z) = \gamma_1$  es una función constante y  $\gamma_0 = 0$ . El mismo argumento utilizado en la primera parte de la prueba de (i), nos dice que las funciones  $\varphi_i$  satisfacen  $\varphi_i(z) = \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^m \Delta_{h_3}^{m-i} f(z) = 0$  para  $i = 0, 1, \dots, m-1$  y  $\varphi_m(z) = \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^m f(z) = C$  para cierta constante  $C$ . Este tipo de argumento lo podemos ahora aplicar a la función  $\psi(z) = \Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^{m-1} \Delta_{h_3}^{m-1} f(z)$ , y concluir que, en realidad, todas las funciones

$$\Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^{m-1} \Delta_{h_3}^{m-i} f(z), \quad i = 1, 2, \dots, m-2$$

se anulan idénticamente, y la función  $\Delta_{h_1}^m \Delta_{h_2}^{m-1} f(z)$  es una constante. Nuevamente reiteramos el argumento -tantas veces como sea necesario- y obtendremos que  $\Delta_{h_1}^m f(z) = c_1$  para cierta constante  $c_1$ . Obviamente, si intercambiamos los parámetros  $h_1, h_2, h_3$  apropiadamente, llegamos a la conclusión de que

$$\Delta_{h_1}^m f(z) = c_1, \quad \Delta_{h_2}^m f(z) = c_2, \quad \Delta_{h_3}^m f(z) = c_3$$

para ciertas constantes  $c_1, c_2, c_3$ . Como  $f$  es derivable, es fácil comprobar que

$$\Delta_{h_1}^m f'(z) = \Delta_{h_2}^m f'(z) = \Delta_{h_3}^m f'(z) = 0,$$

y, ahora, aplicamos la hipótesis de inducción para concluir que  $f'(z)$  es un polinomio algebraico de grado  $\leq m-1$  o, lo que es lo mismo, que  $f(z)$  es un polinomio de grado  $\leq m$ , que es lo que buscábamos. □

Montel también estudió la ecuación (1.3) para  $X = \mathbb{R}^d$ , con  $d > 1$ , y  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  continua, y para  $X = \mathbb{C}^d$  y  $f : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa.

**TEOREMA 1.3.6** (Montel, varias variables). *Supongamos que  $h_1, \dots, h_\ell \in \mathbb{R}^d$  son tales que  $h_1\mathbb{Z} + \dots + h_\ell\mathbb{Z}$  es un subconjunto denso de  $\mathbb{R}^d$ . Entonces:*

- (i) *Si  $f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  es tal que  $\Delta_{h_i}^m(f) = 0$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ . Entonces  $f(x) = \sum_{|\alpha| < N} a_\alpha x^\alpha$  para cierto  $N \in \mathbb{N}$ , ciertos números complejos  $a_\alpha$ , y todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Por tanto,  $f$  es un polinomio algebraico con valores complejos en  $d$  variables reales.*
- (ii) *Supongamos que  $d = 2k$  e interpretamos los vectores  $\{h_i\}_{i=1}^\ell$  como elementos de  $\mathbb{C}^k = \mathbb{R}^d$ . Si  $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa y satisface las ecuaciones  $\Delta_{h_i}^m(f) = 0$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , entonces  $f(z) = \sum_{|\alpha| < N} a_\alpha z^\alpha$  es un polinomio algebraico complejo, en  $k$  variables complejas.*

**NOTA 1.3.7.** *Los subgrupos finitamente generados de  $(\mathbb{R}^d, +)$  que son densos en  $\mathbb{R}^d$  se han estudiado en profundidad y, de hecho, existen varias caracterizaciones de los mismos. Por ejemplo, en [69, Proposición 4.3], se puede consultar la demostración del siguiente resultado:*

**TEOREMA 1.3.8.** *Sea  $G = h_1\mathbb{Z} + h_2\mathbb{Z} + \dots + h_\ell\mathbb{Z}$  el subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}^d$  generado por los vectores  $\{h_1, \dots, h_\ell\}$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  *$G$  es un subconjunto denso de  $\mathbb{R}^d$ .*

- (ii) Si  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación lineal no nula, entonces  $\varphi(G) \not\subseteq \mathbb{Z}$ .
- (iii) Si  $\chi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  es un homomorfismo continuo, entonces  $\chi(G) \neq \{1\}$ .
- (iv) Si  $h_k = (h_{1k}, h_{2k}, \dots, h_{dk})$  son las coordenadas del vector  $h_k$  respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^d$  ( $k = 1, \dots, \ell$ ), entonces las matrices

$$A(n_1, \dots, n_\ell) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1\ell} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{d1} & h_{d2} & \cdots & h_{d\ell} \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_\ell \end{bmatrix}.$$

son de rango  $d + 1$ , para todo  $(n_1, \dots, n_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ .

Un caso sencillo, que se ha considerado especialmente interesante, y que motivó históricamente el estudio de los subgrupos densos de  $(\mathbb{R}^d, +)$ , es el siguiente:

**COROLARIO 1.3.9** (Teorema de Kronecker). *Dados  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d \in \mathbb{R}$ , el grupo  $\mathbb{Z}^d + (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)\mathbb{Z}$  (que está generado por  $d + 1$  elementos) es un subconjunto denso de  $\mathbb{R}^d$  si y sólo si*

$$n_1\theta_1 + \cdots + n_d\theta_d \notin \mathbb{Z}, \text{ para todo } (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$$

Es decir, este grupo es denso en  $\mathbb{R}^d$  si y sólo si los números  $\{1, \theta_1, \dots, \theta_d\}$  forman un sistema linealmente independiente sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Demostración.** Los vectores  $\{e_k\}_{k=1}^d \cup \{(\theta_1, \dots, \theta_d)\}$ , donde

$$e_k = (0, 0, \dots, \overbrace{1}^{\text{k-ésima posición}}, \dots, 0), \quad k = 1, \dots, d,$$

generan el grupo  $G = \mathbb{Z}^d + (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)\mathbb{Z}$ . Por tanto, el apartado (iv) del Teorema 1.3.8 nos dice que  $G$  es denso en  $\mathbb{R}^d$  si y sólo si

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} \theta_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \theta_d & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ n_0 & n_1 & n_2 & \cdots & n_d \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{d+2}n_0 + \sum_{k=1}^d (-1)^{d+2+k}n_k(-1)^{k+1}\theta_k \det(I_{d-1}) \\ &= (-1)^d \left( n_0 - \sum_{k=1}^d n_k\theta_k \right) \neq 0 \end{aligned}$$

para todo  $(n_0, n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ , lo cual es obviamente equivalente a que

$$n_1\theta_1 + \dots + n_d\theta_d \notin \mathbb{Z}, \text{ para todo } (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d,$$

que es lo que buscábamos. Para demostrar la última afirmación del teorema, basta observar que, si  $\{1, \theta_1, \dots, \theta_d\}$  forma un sistema linealmente dependiente sobre  $\mathbb{Q}$ , entonces existen números racionales  $r_i = n_i/m_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, d$ , tales que

$$r_0 + r_1\theta_1 + \dots + r_d\theta_d = 0,$$

y, por tanto, si multiplicamos por  $m = \prod_{k=0}^d m_k$  a ambos lados de la ecuación, obtendremos que

$$n_0^* + n_1^*\theta_1 + \dots + n_d^*\theta_d = 0$$

para ciertos números enteros  $n_0^*, n_1^*, \dots, n_d^*$ . En particular,

$$n_1^*\theta_1 + \dots + n_d^*\theta_d \in \mathbb{Z}.$$

□

En general, se sabe (ver [69, Teorema 3.1]) que si  $G$  es un subgrupo finitamente generado de  $(\mathbb{R}^d, +)$ , entonces la clausura topológica de  $G$  admite una descomposición del tipo

$$\overline{G}^{\mathbb{R}^d} = V \oplus \Lambda,$$

donde  $V$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^d$  y  $\Lambda$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^d$ .



Parte II

Resultados Principales



## Estudio del grafo de los monomios

Recientemente Almira y López-Moreno [13] estudiaron la ecuación funcional de Fréchet desde una nueva perspectiva. La idea principal fue usar las propiedades elementales de los polinomios de interpolación de Lagrange de una variable real. Aunque, como tendremos ocasión de comprobar en el Capítulo 4 de esta memoria, esta idea había sido utilizada por Popoviciu ya en 1935, los autores de [13] desconocían en aquel momento el trabajo de este importante matemático rumano, por lo que sus ideas siguieron, de hecho, un desarrollo esencialmente diferente. Además, tampoco conocían el Teorema de Montel ni el Teorema de Djoković, que garantiza la equivalencia de las ecuaciones  $\Delta_h^{m+1} f = 0$  y  $\Delta_{h_1 h_2 \dots h_{m+1}} f = 0$ . En efecto, ellos no comprendían por qué ambas ecuaciones eran consideradas equivalentes por todos los autores que habían tenido ocasión de leer, y lo manifestaban abiertamente en su trabajo. Así pues, puesto que la prueba original de Fréchet estaba fuertemente basada en la posibilidad de cambiar de paso  $h_i$  en cada etapa, pensaron que una nueva demostración del teorema, válida directamente para la ecuación de paso fijo, era necesaria. Ellos también estaban motivados por los resultados más clásicos relacionados con la ecuación de Cauchy, los cuales pretendían trasladar al contexto de los polinomios, aunque fuera por un mecanismo del tipo “a fuerza bruta”. Así, querían probar un teorema similar al de Darboux, e intentar proporcionar algún tipo de descripción cualitativa para los grafos de las soluciones discontinuas. Todo esto lo lograron con técnicas sencillas que evitaban el uso de la teoría de la medida.

En particular, demostraron el siguiente resultado:

**TEOREMA 2.0.10** (Almira, López-Moreno). *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una solución de la ecuación funcional de Fréchet de paso fijo,*

$$\Delta_h^{n+1} f(x) = 0 \quad (x, h \in \mathbb{R}), \quad (2.1)$$

*y supongamos que  $f$  no es un polinomio algebraico. Entonces su grafo,  $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$  satisface la ecuación*

$$\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2} = C(l, u) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : l(x) \leq y \leq u(x)\} \quad (2.2)$$

para cierto par de funciones  $l, u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , las cuales poseen las siguientes propiedades:

- (i)  $u$  es semicontinua inferior y  $l$  es semicontinua superior.
- (ii) Para cada  $x \in \mathbb{R}$  se tiene que  $u(x) - l(x) = +\infty$ .
- (iii) Existen dos polinomios algebraicos  $p, q \in \Pi_n$  tales que  $p \neq q$  y, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $\{x\} \times [p(x), q(x)] \subseteq C(l, u)$ .

Evidentemente, el Teorema 2.0.10 implica la validez de un resultado tipo Darboux para la ecuación funcional de Fréchet. Además, establece que, para todo polinomio discontinuo  $f$ , el conjunto  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$  contiene un abierto no acotado. Esta es, qué duda cabe, una hermosa propiedad, que resalta de forma muy visual el hecho conocido de que las soluciones discontinuas de (2.1), oscilan de forma salvaje.

En este capítulo caracterizamos con toda precisión cómo son los conjuntos  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$  cuando  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un monomio. Recordemos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un  $n$ -monomio si es una solución de la ecuación funcional

$$\frac{1}{n!} \Delta_h^n f(x) = f(h) \quad (x, h \in \mathbb{R}), \quad (2.3)$$

la cual recibe el nombre de ecuación monomial. Se sabe que  $f$  satisface (2.3) si y sólo si  $f(x) = F(x, \dots, x)$  para cierta función simétrica y multiaditiva  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y que  $f$  es un polinomio si y sólo si  $f(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ , donde  $f_k(x)$  es un  $k$ -monomio para  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Además, si  $f$  es un  $n$ -monomio, entonces  $\Delta_{x_1 x_2 \dots x_n} f(x)$  no depende de la variable  $x$ , y la función  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_1 x_2 \dots x_n} f(x)$  es simétrica y multiaditiva. (Consultar, por ejemplo, las monografías [19], [38], para los detalles de las pruebas de estas afirmaciones).

Nuestro objetivo principal es demostrar que, cuando consideramos  $n$ -monomios  $f$ , las funciones  $l, u$  que aparecen en (2.2) admiten una expresión del tipo  $Ax^n \tau_I^\epsilon(x)$ , donde  $A \in \mathbb{R}$ ,  $I \in \{] - \infty, 0[, ]0, +\infty[, \mathbb{R}, \emptyset\}$ ,  $\epsilon \in \{+, -\}$ , y

$$\tau_I^\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ \epsilon \cdot \infty & x \notin I \end{cases} .$$

Por tanto, en el caso especial de los monomios, si  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2} \neq \mathbb{R}^2$ , entonces al menos una de las funciones  $l, u$  es finita sobre un intervalo de longitud infinita (al cual llamamos dominio de finitud de la función), y ambas funciones son de la forma  $Ax^n$  con  $A \in \mathbb{R}$  sobre sus dominios de finitud. También ofrecemos en este capítulo, como consecuencia de nuestro cálculos, una nueva demostración del Teorema tipo Darboux para la ecuación funcional de Fréchet, así como una nueva demostración del Teorema de Hamel [29], [59], el cual afirma que el grafo de cualquier función aditiva discontinua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  forma un subconjunto denso del plano  $\mathbb{R}^2$ . Finalizamos el capítulo enunciando una conjetura sobre

las propiedades de regularidad de las funciones  $l, u$  cuando están asociadas a polinomios discontinuos arbitrarios.

Es importante resaltar que, aunque el Teorema tipo Darboux no es la expresión más fina que existe para las propiedades de regularidad de los polinomios, es aún así un resultado no trivial, e interesante, y que nuestras demostraciones evitan el uso de ciertos resultados técnicos de la teoría de la medida, como el Teorema de Kurepa [18], [40], los cuales son habituales en este contexto. Además, con nuestro enfoque -nuevamente basado en las propiedades del proceso de interpolación polinómica de Lagrange-, cuenta con la ventaja, para nosotros muy significativa, de que proporciona una descripción enormemente precisa de la clausura del grafo de las soluciones discontinuas de la ecuación monomial.

## 2.1. Resultados principales

**LEMA 2.1.1.** *Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución de la ecuación funcional de Fréchet y  $x_0, h_0 \in \mathbb{R}$ , entonces existe un único polinomio  $p_{x_0, h_0} \in \Pi_n$  tal que  $f|_{x_0+h_0\mathbb{Q}} = p|_{x_0+h_0\mathbb{Q}}$ .*

**Demostración.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface  $\Delta_h^{n+1}f(x) = 0$  para todo  $x, h \in \mathbb{R}$ . Sean  $x_0, h_0 \in \mathbb{R}$  y consideremos  $p_0(t) \in \mathbb{R}[t]$  el polinomio algebraico de grado  $\leq n$  que interpola a  $f$  en los nodos  $\{x_0 + kh_0\}_{k=0}^n$ . Es decir,  $f(x_0 + kh_0) = p_0(x_0 + kh_0)$  para  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Este polinomio existe y es único gracias al conocido teorema de interpolación de Lagrange, y existen varias fórmulas que permiten su cálculo, cada una de ellas adaptada a una situación concreta para la cual es especialmente útil. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_{h_0}^{n+1}f(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} f(x_0 + kh_0) + f(x_0 + (n+1)h_0) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} p_0(x_0 + kh_0) + f(x_0 + (n+1)h_0) \\ &= -p_0(x_0 + (n+1)h_0) + f(x_0 + (n+1)h_0), \end{aligned}$$

pues  $0 = \Delta_{h_0}^{n+1}p(x_0) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} p_0(x_0 + kh_0)$ . Esto significa que

$$f(x_0 + (n+1)h_0) = p_0(x_0 + (n+1)h_0).$$

En particular,  $p_0 = q$ , donde  $q$  denota el polinomio algebraico de grado  $\leq n$  que interpola a  $f$  en los nodos  $\{x_0 + kh_0\}_{k=1}^{n+1}$ . Evidentemente, este tipo de argumento se puede repetir (hacia delante y hacia atrás) tantas veces como queramos, lo cual permite demostrar que  $p_0$  interpola a  $f$  en todos los puntos de  $x_0 + h_0\mathbb{Z}$ .

Tomemos ahora  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ , un entero no nulo, y consideremos el paso  $h_0^* = h_0/m$ , en lugar de  $h_0$ , en el argumento anterior. Entonces obtendremos un nuevo polinomio de grado  $\leq n$ , que podemos denotar por  $p_0^*$ , que interpola a  $f$  en todos los puntos del conjunto  $x_0 + \frac{h_0}{m}\mathbb{Z}$ . Ahora bien, es claro que en tal caso tendremos la identidad  $p_0 = p_0^*$ , pues el conjunto

$$\frac{h_0}{m}\mathbb{Z} \cap h_0\mathbb{Z} = h_0\mathbb{Z}$$

contiene infinitos puntos y dos polinomios diferentes sólo pueden coincidir en un conjunto finito de puntos. Por tanto, hemos demostrado que  $p_0$  interpola a  $f$  en todos los puntos de

$$\Gamma_{x_0, h_0} := x_0 + \bigcup_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{h_0}{m} \mathbb{Z} = x_0 + h_0 \mathbb{Q},$$

que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**LEMA 2.1.2.** *Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un monomio y sea  $p_{x_0, h_0}$  el polinomio descrito en el Lema 2.1.1. Entonces*

(a)  $p_{x_0, h_0}(t) = a_0(x_0, h_0) + a_1(x_0, h_0)t + \cdots + a_{n-1}(x_0, h_0)t^{n-1} + A_n(h_0)t^n.$

(b) *Para todo  $t \in h_0 \mathbb{Q}$  se tiene que  $f(t) = A_n(h_0)t^n.$*

**Demostración.** Por lo que sabemos hasta ahora,  $p_{x_0, h_0}(t)$  es un polinomio algebraico de la forma

$$p_{x_0, h_0}(t) = a_0(x_0, h_0) + a_1(x_0, h_0)t + \cdots + a_{n-1}(x_0, h_0)t^{n-1} + A_n(x_0, h_0)t^n,$$

y, por tanto, debemos demostrar que  $A_n(x_0, h_0) = A_n(h_0)$ . En otras palabras, debemos probar que  $A_n(x_0, h_0)$  no depende de nuestra elección del punto  $x_0$ .

Dados  $m \geq 0$  y  $a/b \in \mathbb{Q}$ , tenemos que

$$\Delta_{\frac{a}{b}h_0}^m p_{x_0, h_0}(x_0) = \Delta_{\frac{a}{b}h_0}^m f(x_0),$$

pues  $f|_{x_0+h_0\mathbb{Q}} = (p_{x_0, h_0})|_{x_0+h_0\mathbb{Q}}$ . Por tanto, un cálculo directo, que usa la hipótesis de que  $f$  es un  $n$ -monomio, nos conduce a que

$$A_n(x_0, h_0) \left(\frac{a}{b}h_0\right)^n = \frac{1}{n!} \Delta_{\frac{a}{b}h_0}^n p_{x_0, h_0}(x_0) = \frac{1}{n!} \Delta_{\frac{a}{b}h_0}^n f(x_0) = f\left(\frac{a}{b}h_0\right). \quad (2.4)$$

Se sigue que  $A(x_0, h_0)$  no depende de  $x_0$  pues el miembro de la derecha de (2.4) es independiente de  $x_0$ . Esto demuestra (a) y (b) simultáneamente.  $\square$

Demostremos, a continuación, un “principio de identidad” para los monomios:

**PROPOSICIÓN 2.1.3** (Principio de identidad). *Supongamos que  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son monomios, y existe un intervalo abierto no vacío  $I \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $f(t) = g(t)$  para todo  $t \in I$ . Entonces  $f(t) = g(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Lo que es más aún, si  $f$  satisface  $\frac{1}{n!} \Delta_h^n f(x) = f(h)$  siempre que  $\{x, x+h, \dots, x+nh\} \subset I$ , entonces existe un único  $n$ -monomio  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $q|_I = f$ .*

**Demostración.** Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $0 \notin I$  y concentremos nuestra atención sobre  $f$ . Si utilizamos la notación del Lema 2.1.2, sabemos que, para todo  $h \in I$  y todo  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(hr) = A_n(h)h^n r^n$ . En particular,  $A_n(h) = f(h)/h^n$  y

$$f(t) = \frac{f(h)}{h^n} (t)^n \text{ para todo } t \in h\mathbb{Q}.$$

Esto significa que el valor de  $f$  en el punto  $h \in I$  determina completamente (con unicidad) el valor de  $f$  en  $t$  para todo  $t \in h\mathbb{Q}$ . Ahora bien,  $\bigcup_{h \in I} h\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ , pues  $I$  es un abierto no vacío. Esto implica que  $f$  está definido de forma única en toda la recta  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**LEMA 2.1.4.** *Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un  $n$ -monomio discontinuo y denotemos por  $A_n(h)$  la constante que aparece en el apartado (b) del Lema 2.1.2. Entonces*

(a) *Si  $h_0, h_1 \in \mathbb{R}$  verifica  $A_n(h_0) \neq A_n(h_1)$ , entonces el espacio que existe entre los monomios  $A_n(h_0)t^n$  y  $A_n(h_1)t^n$  está contenido en  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ .*

(b)  $\sup_{h \in \mathbb{R}} |A_n(h)| = +\infty$ .

**Demostración.** Comenzamos con la demostración de (a). Tomemos  $h_0, h_1 \in \mathbb{R}$  tales que  $A_n(h_0) \neq A_n(h_1)$ . Estos valores existen, evidentemente, pues hemos asumido que  $f$  es discontinua, y sabemos que  $p_{0,h}(t) = A_n(h)t^n$ . Tomemos  $x_0 \in h_0\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  y  $x_1 \in h_1\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . Dados  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  y  $r \in \mathbb{Q}$ , definimos  $x_{i,r} = (1-i)x_0 + irx_1$ . Evidentemente,  $x_{i,r} \in (1-i)x_0 + x_1\mathbb{Q}$  para todo  $r \in \mathbb{Q}$ . Por tanto, si consideramos los polinomios  $p_0 = p_{0,h_0}$ , y  $p_i = p_{(1-i)x_0, x_1}$ , (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ), entonces  $p_i(x_{i,r}) = f(x_{i,r})$  para todo  $r \in \mathbb{Q}$  y todo  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Además,  $p_0(t) = p_{0,h_0}(t) = A_n(h_0)t^n$  y  $p_1(t) = p_{0,x_1}(t) = p_{0,h_1}(t) = A_n(h_1)t^n$ . Consideremos ahora, para cada  $r \in \mathbb{Q}$ , el único polinomio  $q_r(t)$  de grado  $\leq n$  que interpola a  $f$  en los nodos  $\{x_{i,r}\}_{i=0}^n$ .

Si tenemos en cuenta que  $x_{i,r}$  se puede expresar como  $x_{i,r} = x_0 + i(rx_1 - x_0)$ , concluimos que  $q_r = p_{x_0, (rx_1 - x_0)}$ , y, en particular, el grafo de  $q_r$  está contenido en  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ . Utilizamos ahora que  $\mathbb{Q}$  es un subconjunto denso de  $\mathbb{R}$  para forzar que el parámetro  $r \in \mathbb{Q}$  tienda a  $\frac{x_0}{x_1}$ . Esto tiene el efecto de que el conjunto  $\{x_{i,r}\}$  colapsa en el punto  $\{x_0\}$ , pues

$$\lim_{r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow \frac{x_0}{x_1}} x_{i,r} = x_0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

y esto debería forzar al grafo de  $q_r$  a explotar cuando  $r \rightarrow \frac{x_0}{x_1}$ . De hecho, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow \frac{x_0}{x_1}} q_r(x_{i,r}) &= \lim_{r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow \frac{x_0}{x_1}} f(x_{i,r}) \\ &= \lim_{r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow \frac{x_0}{x_1}} p_i(x_{i,r}) \\ &= p_i(x_0), \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

De modo que, si definimos

$$q(x) = L[\{i\}_{i=0}^n, \{p_i(x_0)\}_{i=0}^n](x) \text{ y } \tilde{q}_r(x) = L[\{i\}_{i=0}^n, \{q_r(x_{i,r})\}_{i=0}^n](x),$$

donde  $L[\{x_k\}_{k=0}^n, \{y_k\}_{k=0}^n](x)$  denota el polinomio de interpolación de Lagrange asociado a los nodos  $\{x_k\}_{k=0}^n$  y los valores  $\{y_k\}_{k=0}^n$ , entonces  $\tilde{q}_r$  converge al polinomio  $q$  (para  $r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow \frac{x_0}{x_1}$ ) uniformemente sobre los subconjuntos compactos de la recta  $\mathbb{R}$ .

Obsérvese que

$$i = \frac{x_{i,r} - x_0}{rx_1 - x_0}, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n,$$

de modo que

$$q_r(x_{i,r}) = \tilde{q}_r(i) = \tilde{q}_r\left(\frac{x_{i,r} - x_0}{rx_1 - x_0}\right), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n.$$

y

$$q_r(x) = \tilde{q}_r \left( \frac{x - x_0}{rx_1 - x_0} \right). \quad (2.5)$$

El teorema de los valores intermedios garantiza que

$$J_0 = [A_n(h_0)x_0^n, A_n(h_1)x_0^n] = [p_0(x_0), p_1(x_0)] \subseteq q(\mathbb{R}),$$

pues  $q$  es una función continua,  $q(0) = p_0(x_0)$  y  $q(1) = p_1(x_0)$ . Queremos demostrar que  $\{x_0\} \times J_0$  está contenido en  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ . De hecho, vamos a probar algo mucho más fuerte que esto, pues demostramos que  $\{x_0\} \times q(\mathbb{R}) \subseteq \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ .

Tomemos  $c \in q(\mathbb{R})$  y consideremos  $\varepsilon > 0$  cualquier número estrictamente positivo. Como los números racionales forman un subconjunto denso de la recta, podemos encontrar  $s \in \mathbb{Q}$  tal que  $|q(s) - c| < \varepsilon/2$ . Sea  $x_{s,r} = s(rx_1 - x_0) + x_0$ . Entonces  $q_r(x_{s,r}) = f(x_{s,r})$ . Además, la fórmula (2.5) nos dice que

$$q_r(x_{s,r}) = \tilde{q}_r \left( \frac{x_{s,r} - x_0}{rx_1 - x_0} \right) = \tilde{q}_r(s).$$

Ahora bien,  $\lim_{r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow \frac{x_0}{x_1}} \|\tilde{q}_r - q\|_{[0, s+1]} = 0$ , de modo que, si  $|r - \frac{x_0}{x_1}|$  es suficientemente pequeño,

$$|f(x_{s,r}) - c| = |\tilde{q}_r(s) - c| \leq |\tilde{q}_r(s) - q(s)| + |q(s) - c| < \varepsilon.$$

Por tanto,  $(x_0, c) \in \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ , que es lo que buscábamos. Esto demuestra que el espacio que hay entre los monomios  $A_n(h_0)t^n$  y  $A_n(h_1)t^n$  está contenido en  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ , pues  $x_0 \in h_0\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  se tomó de forma arbitraria.

Para demostrar el apartado (b) del lema, usamos que  $q(\mathbb{R})$  no está acotado, pues  $q$  es un polinomio no constante. Esto implica que  $f$  no puede estar acotada en ningún abierto no vacío (se dice que la función no es localmente acotada), de modo que

$$\sup_{h \neq 0} |A_n(h)| \geq \sup_{h \in [1, 2]} |A_n(h)| = \sup_{h \in [1, 2]} \frac{|f(h)|}{|h^n|} = +\infty.$$

□

**COROLARIO 2.1.5** (Teorema de Hamel). *Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función aditiva discontinua, entonces  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$ .*

**Demostración.** Es sencillo comprobar que  $f$  es aditiva si y sólo si es un 1-monomio (i.e.,  $\Delta_h f(x) = f(h)$ ). Supongamos, pues, que  $f$  es un 1-monomio discontinuo, y consideremos la constante  $A_1(h)$  que aparece en el apartado (b) del Lema 2.1.2. Se sigue, del apartado (a) del Lema 2.1.4, que lo único que debemos demostrar es que

$$-\infty = \inf_{h \neq 0} A_1(h) < \sup_{h \neq 0} A_1(h) = +\infty.$$



Ahora bien, la discontinuidad de  $f$  implica que existen dos valores  $h, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tales que  $A_1(h) \neq A_1(s)$ . Más aún: podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $h, s > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} A_1(h-s) &= \frac{f(h-s)}{h-s} = \frac{f(h)}{h-s} - \frac{f(s)}{h-s} \\ &= \frac{f(h)}{h} \frac{h}{h-s} - \frac{f(s)}{s} \frac{s}{h-s} \\ &= A_1(h) \frac{h}{h-s} - A_1(s) \frac{s}{h-s} \\ &= A_1(h) + (A_1(h) - A_1(s)) \frac{s}{h-s}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora  $A_1(h-rs)$  como una función que depende de  $r \in \mathbb{Q}$ . Entonces

$$A_1(h-rs) = A_1(h) + (A_1(h) - A_1(s)) \frac{rs}{h-rs} = A_1(h) + (A_1(h) - A_1(s)) \frac{1}{\frac{h}{rs} - 1},$$

pues  $A_1(rs) = A_1(s)$  para todo  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y todo  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . Por tanto,

$$\lim_{r \rightarrow (h/s)^+, r \in \mathbb{Q}} A_1(h-rs) = (-\infty) \cdot \mathbf{sign}(A_1(h) - A_1(s))$$

y

$$\lim_{r \rightarrow (h/s)^-, r \in \mathbb{Q}} A_1(h-rs) = (+\infty) \cdot \mathbf{sign}(A_1(h) - A_1(s)).$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

Incluimos a continuación un resultado técnico, que será necesario posteriormente para construir algunos ejemplos de monomios con comportamientos concretos.

**LEMA 2.1.6.** *Supongamos que  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un  $n_i$ -monomio para  $i = 1, 2$ . Entonces  $f(x) = f_1(x)f_2(x)$  es un  $(n_1+n_2)$ -monomio. Además, si  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son  $n$ -monomios, entonces  $f_1 + f_2$  es también un  $n$ -monomio.*

**Demostración.** Sólo probamos la primera afirmación del lema, puesto que la segunda es evidente. Por hipótesis, existen dos funciones simétricas multiaditivas  $F_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f_i(x) = F_i(x, x, \dots, x)$  ( $i = 1, 2$ ). Consideremos la nueva función

$$\begin{aligned} &F(x_1, \dots, x_{n_1+n_2}) \\ &= \frac{1}{(n_1+n_2)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n_1+n_2}} F_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n_1)}) F_2(x_{\sigma(n_1+1)}, \dots, x_{\sigma(n_1+n_2)}), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{S}_N$  denota el grupo de permutaciones del conjunto  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Entonces  $F$  es evidentemente simétrica y  $(n_1+n_2)$ -aditiva. Además,

$$f_1(x)f_2(x) = F(x, \dots, x).$$

$\square$

**TEOREMA 2.1.7.** *Supongamos que  $f$  es un  $n$ -monomio discontinuo. Consideremos el conjunto  $\Gamma = \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ . Sean  $\alpha = \sup_{h \in \mathbb{R}^*} A_n(h)$  y  $\beta = \inf_{h \in \mathbb{R}^*} A_n(h)$ . Entonces:*

- (a) *Si  $\alpha = +\infty$  y  $\beta = -\infty$ , entonces  $\Gamma = \mathbb{R}^2$ .*
- (b) *Si  $\alpha = +\infty$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ , entonces  $\Gamma = \{(x, y) : y \geq \beta x^n\}$  cuando  $n = 2k$  es un número par, y  $\Gamma = \{(x, y) : y \leq \beta x^n, x \leq 0\} \cup \{(x, y) : y \geq \beta x^n, x \geq 0\}$  cuando  $n = 2k + 1$  es un número impar. En particular, si  $\beta = 0$ , obtenemos el semiespacio  $\Gamma = \{(x, y) : y \geq 0\}$  para  $n = 2k$  y la unión de los cuadrantes primero y tercero,  $\Gamma = \{(x, y) : xy \geq 0\}$ , para  $n = 2k + 1$ .*
- (c) *Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\beta = -\infty$ , entonces  $\Gamma = \{(x, y) : y \leq \beta x^n\}$  si  $n = 2k$  es un número par, y  $\Gamma = \{(x, y) : y \geq \beta x^n, x \leq 0\} \cup \{(x, y) : y \leq \beta x^n, x \geq 0\}$  si  $n = 2k + 1$  es un número impar. En particular, si  $\alpha = 0$ , obtenemos el semiespacio  $\Gamma = \{(x, y) : y \leq 0\}$  cuando  $n = 2k$  y la unión de los cuadrantes segundo y cuarto,  $\Gamma = \{(x, y) : xy \leq 0\}$ , cuando  $n = 2k + 1$ .*

Además, para todo valor de  $n \geq 2$  existen ejemplos de  $n$ -monomios discontinuos  $f$  que satisfacen cada una de las afirmaciones (a), (b), (c) anteriores.

**Demostración.** El apartado (b) del Lema 2.1.4 implica que  $\alpha = +\infty$  o  $\beta = -\infty$  y, en consecuencia, los tres casos (a), (b) y (c) que se han considerado en el enunciado del teorema cubren todas las posibilidades. Consideremos cada caso de forma separada:

**Caso (a):**  $\alpha = +\infty$  y  $\beta = -\infty$ . Por hipótesis, sabemos que existen dos sucesiones de números reales  $\{\tau_k\}$ ,  $\{\eta_k\}$  tales que  $A_n(\tau_k) > A_n(\eta_k)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_n(\tau_k) = +\infty$ , y  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_n(\eta_k) = -\infty$ . Ahora, el apartado (a) del Lema 2.1.4 implica que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$  contiene el espacio que hay entre los monomios  $A_n(\tau_k)t^n$  y  $A_n(\eta_k)t^n$ , lo cual implica, de forma trivial, que  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$ .

**Caso (b):**  $\alpha = +\infty$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ . En este caso, existen dos sucesiones de números reales  $\{\tau_k\}$ ,  $\{\eta_k\}$  tales que  $A_n(\tau_k) > A_n(\eta_k)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_n(\tau_k) = +\infty$ , y  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_n(\eta_k) = \beta$ , de modo que, usando nuevamente el apartado (a) del Lema 2.1.4, se comprueba que  $\Gamma = \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$  contiene al conjunto  $\Sigma_1 = \{(x, y) : y \geq \beta x^n\}$  cuando  $n = 2k$  es un número par, o contiene al conjunto  $\Sigma_2 = \{(x, y) : x \leq 0, y \leq \beta x^n\} \cup \{(x, y) : x \geq 0, y \geq \beta x^n\}$  cuando  $n = 2k + 1$  es un número impar. Debemos demostrar, en ambas situaciones, que  $\Gamma$  no contiene ningún otro punto.

Supongamos, pues, para proceder por reducción al absurdo, que  $n \in 2\mathbb{N}$  y  $(x_0, y_0) \in \Gamma \setminus \Sigma_1$ . Entonces  $y_0 < \beta x_0^n$ . Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $(x_0, y_0) \in G(f)$  puesto que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_1$  es un conjunto abierto. Entonces  $A_n(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0^n} < \beta$ , lo cual es imposible. Esto demuestra que  $\Gamma = \Sigma_1$ . Cuando  $n \in 2\mathbb{N} + 1$ , los argumentos son similares.

**Case (c):**  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\beta = -\infty$ . Este caso admite una demostración completamente análoga a la que se ha realizado en el caso (b) anterior.

Vamos ahora a probar que todas las situaciones descritas en los casos (a), (b) y (c) anteriores, se producen efectivamente, proporcionando ejemplos concretos y sencillos

para cada uno de los casos posibles. Nótese que, cuando  $n = 1$  siempre tenemos que  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$ , cosa que quedó demostrada con el Teorema de Hamel. Es por esto que en el teorema hemos asumido  $n \geq 2$ .

Para realizar esta parte de la demostración, necesitamos, antes que nada, mostrar un ejemplo concreto de función aditiva discontinua (este ejemplo fue introducido, de hecho, por Hamel en su famoso artículo de 1905 [29]). Sea  $\Upsilon = \{s_i\}_{i \in I}$  una base algebraica de  $\mathbb{R}$  como espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}$  (estas bases existen, como es bien sabido, gracias al axioma de elección, y la prueba de ello es sencilla si se utiliza el lema de Zorn, que no es más que una reformulación muy útil del mismo). Entonces toda aplicación que consideremos  $\phi : \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}$  se puede extender de forma única como una aplicación  $\mathbb{Q}$ -lineal, a una aplicación real de variable real,  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotemos por  $\mathcal{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la única aplicación  $\mathbb{Q}$ -lineal que existe verificando que  $\mathcal{L}(s_i) = 1$  para todo  $i \in I$ . Evidentemente,  $\mathcal{L}(x)$  es un 1-monomio discontinuo, de modo que el Lema 2.1.6 implica que, para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  y todo  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , la función  $g_{a,b,k}(x) = ax^n + bx^k \mathcal{L}(x)^{n-k}$  es un  $n$ -monomio.

Consideremos que el valor  $n \in \mathbb{N}$  está fijado. Entonces  $f(x) = x^{n-1} \mathcal{L}(x)$  es un  $n$ -monomio tal que  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2$ . Para demostrarlo, basta comprobar que

$$\alpha = \sup_{h \in \mathbb{R}^*} A_n(h) = +\infty \quad \text{y} \quad \beta = \inf_{h \in \mathbb{R}^*} A_n(h) = -\infty.$$

Ahora bien, el grafo de  $\mathcal{L}(x)$  es un subconjunto denso del plano, de modo que

$$\sup_{x \in [1,2]} \mathcal{L}(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \inf_{x \in [1,2]} \mathcal{L}(x) = -\infty.$$

Por tanto,  $\alpha \geq \sup_{h \in [1,2]} A_n(h) = \sup_{h \in [1,2]} \frac{\mathcal{L}(h)h^{n-1}}{h^n} = \sup_{h \in [1,2]} \frac{\mathcal{L}(h)}{h} = +\infty$  y, de forma similar,  $\beta \leq \inf_{h \in [1,2]} A_n(h) = \inf_{h \in [1,2]} \frac{\mathcal{L}(h)}{h} = -\infty$ . Esto demuestra que existen  $n$ -monomios que satisfacen el caso (a). Para el caso (b), podemos tomar  $f(x) = \beta x^n + \mathcal{L}(x)^n$  cuando  $n = 2k$  es par, y  $f(x) = \beta x^n + x \mathcal{L}(x)^{n-1}$  cuando  $n = 2k + 1$  es impar. El caso (c) queda cubierto con los ejemplos siguientes:  $f(x) = \alpha x^n - \mathcal{L}(x)^n$  si  $n = 2k$  es par, y  $f(x) = \alpha x^n - x \mathcal{L}(x)^{n-1}$  si  $n = 2k + 1$  es impar. □

**NOTA 2.1.8.** El Teorema 2.1.7 puede reformularse en términos de las funciones  $l, u$  que aparecen en (2.2) del siguiente modo: Sea  $f$  un  $n$ -monomio discontinuo y sea  $\Gamma = \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2} = C(l, u)$  la representación de la clausura del grafo de  $f$  dada por (2.2). Sean  $\alpha = \sup_{h \in \mathbb{R}^*} A_n(h)$  y  $\beta = \inf_{h \in \mathbb{R}^*} A_n(h)$ . Entonces:

- (a) Si  $\alpha = +\infty$  y  $\beta = -\infty$ , entonces  $l(x) = -\infty$  y  $u(x) = +\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Si  $\alpha = +\infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  y  $n = 2k$  es un número par, entonces  $l(x) = \beta x^n$  y  $u(x) = +\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (c) Si  $\alpha = +\infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  y  $n = 2k + 1$  es un número impar, entonces

$$l(x) = \begin{cases} -\infty & x \leq 0 \\ \beta x^n & x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad u(x) = \begin{cases} \beta x^n & x < 0 \\ +\infty & x \geq 0 \end{cases}.$$

(d) Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta = -\infty$  y  $n = 2k$  es un número par, entonces  $l(x) = -\infty$  y  $u(x) = \alpha x^n$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(e) Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta = -\infty$  y  $n = 2k + 1$  es un número impar, entonces

$$l(x) = \begin{cases} \alpha x^n & x < 0 \\ -\infty & x \geq 0 \end{cases} \quad y \quad u(x) = \begin{cases} +\infty & x \leq 0 \\ \alpha x^n & x > 0 \end{cases} .$$

Además, para todo  $n \geq 2$  existen ejemplos de  $n$ -monomios discontinuos  $f$  que satisfacen cada una de las afirmaciones (a), (b), (c), (d), (e) anteriores.

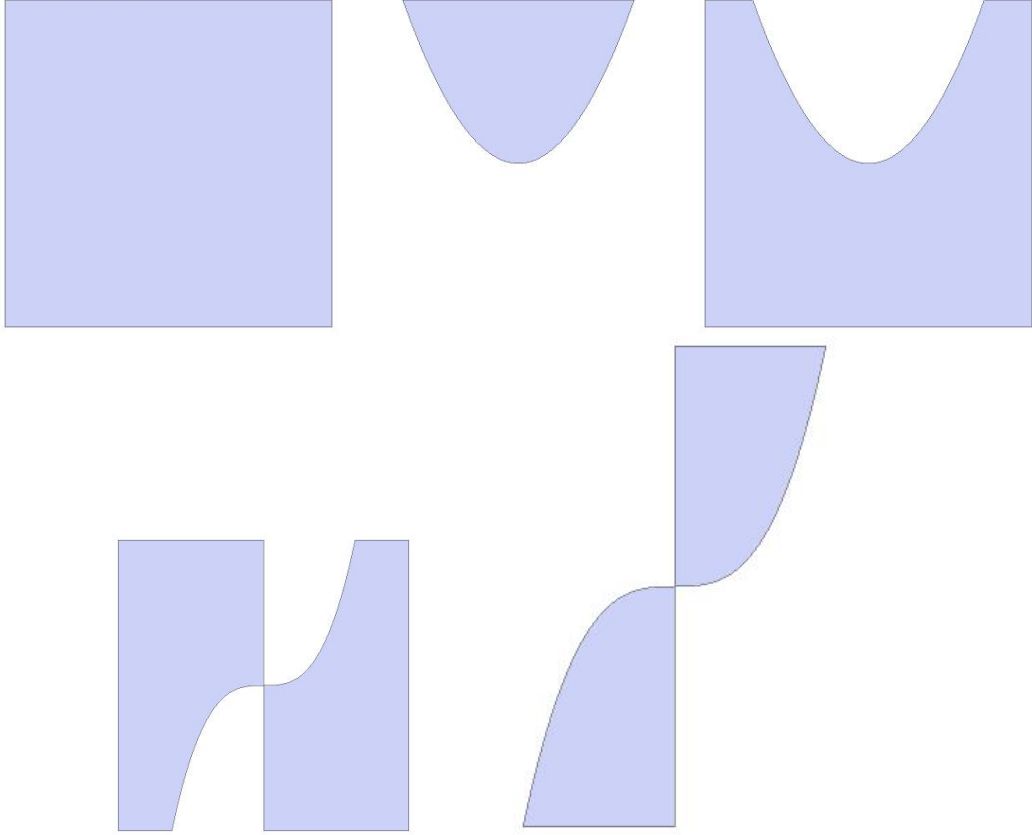


Figura 2.1: Distintas posibilidades para  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ .

**COROLARIO 2.1.9.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un monomio discontinuo de grado par, entonces la función  $F(x, h) = \Delta_h f(x)$  satisface  $\overline{G(F)}^{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3$ .

**Demostración.** El Teorema 2.1.7 implica que  $\Gamma = \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$  satisface  $\Gamma = \mathbb{R}^2$ , o  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \beta x^n\}$ , o  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \alpha x^n\}$ . Supongamos que  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \beta x^n\}$  (los otros casos admiten demostraciones similares).

Sea  $(x, h, \lambda) \in \mathbb{R}^3$  y tomemos  $\varepsilon > 0$ . Evidentemente, existe una constante  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $[x, x+h] \times [M, +\infty) \subset \Gamma$ . Podemos, pues, elegir  $a, b \in [M, +\infty)$  tales que  $\lambda = b - a$ . Por construcción, existen dos números reales  $x^*, h^*$  tales que  $\max\{|x - x^*|, |h - h^*|, |f(x^*) - a|, |f(x^* + h^*) - b|\} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} & \| (x^*, h^*, F(x^*, h^*)) - (x, h, \lambda) \|_\infty \\ &= \| (x^* - x, h^* - h, f(x^* + h^*) - f(x^*) - \lambda) \|_\infty \\ &= \max\{|x - x^*|, |h - h^*|, |f(x^* + h^*) - b - (f(x^*) - a)|\} \\ &\leq \max\{|x - x^*|, |h - h^*|, |f(x^* + h^*) - b| + |f(x^*) - a|\} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $(x, h, \lambda) \in \overline{G(F)}^{\mathbb{R}^3}$ . Concluimos que  $\overline{G(F)}^{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3$ , pues  $(x, h, \lambda)$  se tomó de forma arbitraria.  $\square$

**COROLARIO 2.1.10** (Teorema tipo Darboux para la ecuación de Fréchet). *Sea  $f$  un polinomio, y sea  $f(x) = f_0 + f_1(x) + \dots + f_N(x)$  su descomposición como suma de monomios. Si  $f_N(x)$  es un monomio discontinuo, entonces  $f([a, b])$  es un subconjunto no acotado de  $\mathbb{R}$  siempre que  $a < b$  (se dice que  $f$  es localmente no acotada). Como consecuencia, el polinomio  $f$  es una función acotada en algún intervalo de interior no vacío si y sólo si es un polinomio algebraico,  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$ .*

**Demostración.** Supongamos, que la primera afirmación del corolario no es cierta, es decir, supongamos que  $f|_{[a,b]}$  es una función acotada para cierto intervalo  $[a, b]$  con  $a < b$ . Buscamos una contradicción. Tomando las diferencias progresivas de orden  $N$  sobre la función  $f$ , obtenemos que

$$\frac{1}{N!} \Delta_h^N f(a) = f_N(h),$$

de modo que  $f_N$  debería estar acotada cuando la consideramos restringida al intervalo (de interior no vacío)  $[0, \frac{b-a}{N}]$ , lo cual, gracias al Teorema 2.1.7, implicaría que  $f_N$  es un  $N$ -monomio continuo,  $f_N(x) = A_n x^N$  (y esto contradice nuestra hipótesis).

Supongamos ahora que  $f|_{[a,b]}$  es una función acotada. Sea  $j_0 = \max\{j \in \{0, 1, \dots, N\} \text{ tal que } f_j \text{ es discontinuo}\}$ . Entonces  $g(x) = f(x) - (f_{j_0+1}(x) + \dots + f_N(x))$  es una función acotada  $[a, b]$  y  $g(x) = f_0 + f_1(x) + \dots + f_{j_0}(x)$  es la descomposición de  $g$  como suma de monomios. El resultado se sigue, simplemente, aplicando la primera parte del corolario.  $\square$

**NOTA 2.1.11.** *Es importante observar que, en general, la clausura del grafo de la suma de dos  $n_k$ -monomios discontinuos,  $f_k$ , ( $k = 1, 2$ ), con  $n_1 \neq n_2$ , no está unívocamente determinada por las clausuras de los grafos de estos monomios. Por ejemplo, podemos considerar los monomios:  $f_1(x) = x^2 + \mathcal{L}(x)^2$ ,  $f_2(x) = x^2 + 2\mathcal{L}(x)^2$ ,  $f_3(x) = x\mathcal{L}(x)^2$ ,  $f_4(x) = f_1(x) + f_3(x) = x^2 + (1+x)\mathcal{L}(x)^2$  y  $f_5(x) = f_2(x) + f_3(x) = x^2 + (2+x)\mathcal{L}(x)^2$ . Entonces  $f_1$  y  $f_2$  son 2-monomios,  $f_3$  es un 3-monomio y los conjuntos  $\Gamma_k = \overline{G(f_k)}^{\mathbb{R}^2}$  para  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  están dados de la siguiente forma:*

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\} \\
\Gamma_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -1, y \leq x^2\} \\
&\quad \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1, y \geq x^2\} \\
\Gamma_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -2, y \leq x^2\} \\
&\quad \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -2, y \geq x^2\}.
\end{aligned}$$

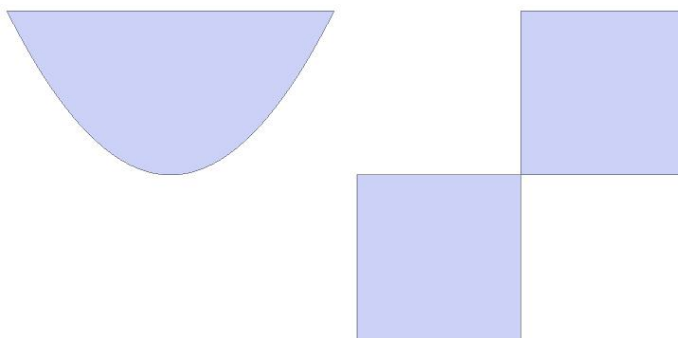


Figura 2.2:  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  y  $\Gamma_3$

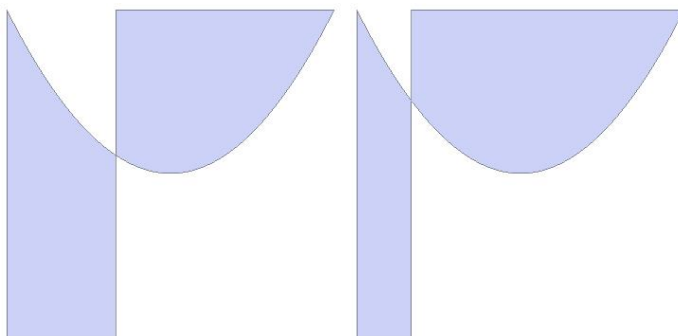


Figura 2.3:  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_5$

*En particular,  $\Gamma_4 \neq \Gamma_5$ . Una vez hemos aclarado este punto, resulta evidente que existen grandes dificultades para obtener una descripción precisa de la clausura del grafo de un polinomio discontinuo a partir de la información proporcionada por las clausuras de los monomios que aparecen en su descomposición natural como suma de monomios. En cualquier caso, nos aventuramos aquí a conjeturar que las funciones  $l, u$  que aparecen en la fórmula (2.2) cuando  $f$  es un polinomio discontinuo arbitrario, son, en sus dominios de finitud, splines continuos.*

## Variaciones sobre el Teorema de Montel clásico

Recientemente, Almira [3] ha usado la estructura de los subespacios de dimensión finita de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  que son invariantes por traslaciones, para dar una nueva demostración del Teorema de Montel para funciones (y distribuciones) complejas de una variable real. En este capítulo vamos a demostrar el Teorema de Montel para funciones que toman valores complejos y están definidas sobre el grupo abeliano discreto  $(\mathbb{Z}^d, +)$ . Además, también ofrecemos una nueva demostración del teorema de Montel clásico de varias variables reales, teorema que logramos trasladar al caso de las distribuciones.

Durante todo el capítulo, usamos la siguiente notación estándar:

Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^d$ , y  $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ , entonces  $n^\alpha = n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \dots n_d^{\alpha_d}$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$ ,  $\lambda^n = \lambda_1^{n_1} \dots \lambda_d^{n_d}$ , y  $|\alpha| = \sum_{k=1}^d \alpha_k$ .  $\Pi_{m, \text{tot}}^d$  denota el conjunto de los polinomios complejos en  $d$  variables con grado total  $\leq m$  (cuando  $d = 1$ , escribimos  $\Pi_m$  en vez de  $\Pi_{m, \text{tot}}^1$ ). Además,  $\Pi_{m, \text{max}}^d$  denota el conjunto de los polinomios complejos en  $d$  variables con grado  $\leq m$  en cada una de sus variables. Por último, decimos que la función  $f \in C(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$  es un “monomio exponencial” si existen un polinomio en las variables  $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}$ ,  $p(n) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha n^\alpha$ , y un vector  $\lambda \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^d$ , tales que  $f(n) = p(n)\lambda^n$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}^d$ .

### 3.1. Resultados principales

Para abordar el caso discreto, necesitamos apoyarnos en el siguiente conocido teorema de M. Lefranc, cuya prueba se basa en argumentos de geometría algebraica y puede consultarse, por ejemplo, en [16], [41], [65].

**TEOREMA 3.1.1** (Lefranc, 1958). *Supongamos que  $V$  es un subespacio vectorial cerrado de  $C(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$  que es, además, invariante por traslaciones. Denotemos por  $\Gamma_V$  el conjunto de los monomios exponenciales que pertenecen a  $V$ . Entonces  $V = \overline{\text{span}(\Gamma_V)}$ .*

Como consecuencia inmediata, tenemos el siguiente resultado:

**COROLARIO 3.1.2.** *Si  $V$  es un subespacio vectorial de  $C(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$  que tiene dimensión finita y es invariante por traslaciones, entonces  $V \subseteq W = \text{span}(\bigcup_{k=0}^s \{n^\alpha \lambda_k^n : |\alpha| \leq m_k - 1\})$  para ciertos  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\{\lambda_k\}_{k=0}^s \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\})^d$  y  $\{m_k\}_{k=0}^s \subseteq \mathbb{N}$ .*

**NOTA 3.1.3.** *Aquí, y durante todo este capítulo, vamos a asumir que  $\lambda_0 = (1, \dots, 1)$ . Además, interpretamos la igualdad  $m_0 = 0$  como la imposición de que la base que estamos considerando carece de elementos de la forma  $n^\alpha$ . Finalmente, siempre asumimos que  $m_k \geq 1$  para  $k = 1, \dots, s$ .*

**DEFINICIÓN 2.** *Sean  $E$  un espacio vectorial y  $L : E \rightarrow E$  un operador lineal. Decimos que  $V \subseteq E$  es  $L$ -invariante (o “invariante por  $L$ ”) si  $L(V) \subseteq V$ .*

A continuación, demostramos dos lemas técnicos que luego serán de importancia vital para la demostración de los resultados principales en este capítulo.

**LEMA 3.1.4.** *Sean  $E$  un espacio vectorial y  $L : E \rightarrow E$  un operador lineal definido sobre  $E$ . Si  $V \subseteq E$  es un subespacio  $L^m$ -invariante de  $E$ , entonces el espacio*

$$\square_L^m(V) = V + L(V) + L^2(V) + \dots + L^m(V)$$

*es  $L$ -invariante. Además,  $\square_L^m(V)$  es el menor subespacio  $L$ -invariante de  $E$  que contiene a  $V$ .*

**Demostración.** Debido a la linealidad del operador  $L$ , tenemos que

$$L(\square_L^m(V)) = L(V) + L^2(V) + L^3(V) + \dots + L^m(V) + L^{m+1}(V).$$

Ahora,  $L^{m+1}(V) = L(L^m(V)) \subseteq L(V)$  y  $L(V) + L(V) = L(V)$ , de modo que  $L(\square_L^m(V)) \subseteq \square_L^m(V)$ .

Supongamos ahora que  $V \subseteq F \subseteq E$  y  $F$  es un subespacio  $L$ -invariante de  $E$ . Si  $\{v_k\}_{k=0}^m \subseteq V$ , entonces  $L^k(v_k) \in F$  para todo  $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ , por lo que  $v_0 + L(v_1) + \dots + L^m(v_m) \in F$ . Esto demuestra que  $\square_L^m(V) \subseteq F$ .  $\square$

**LEMA 3.1.5.** *Sean  $E$  un espacio vectorial y  $L_1, L_2, \dots, L_t : E \rightarrow E$  operadores lineales definidos en  $E$ . Supongamos que  $L_i L_j = L_j L_i$  para todo  $i \neq j$ . Si  $V \subseteq E$  es un subespacio vectorial de  $E$  que satisface  $\bigcup_{i=1}^t \square_{L_i}^m(V) \subseteq V$ , entonces*

$$\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_t}^m(V) = \square_{L_t}^m(\square_{L_{t-1}}^m(\dots(\square_{L_1}^m(V))\dots))$$

*es un subespacio vectorial de  $E$  que es  $L_i$ -invariante para todo  $i = 1, 2, \dots, t$ , y contiene a  $V$ . Además, si  $V$  es de dimensión finita, entonces  $\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_t}^m(V)$  también tiene dimensión finita.*

**Demostración.** Procedemos por inducción sobre  $t$ . Para  $t = 1$  el resultado se sigue del Lema 3.1.4. Supongamos que el lema es cierto para  $t - 1$ . Evidentemente,

$$\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_t}^m(V) = \square_{L_t}^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)).$$



Por definición,

$$\begin{aligned}
& L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)) \\
&= L_t^m(\square_{L_{t-1}}^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V))) \\
&= L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V) + L_{t-1}(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V)) + \dots + L_{t-1}^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V))) \\
&= L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V)) + L_t^m(L_{t-1}(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V))) \\
&\quad + \dots + L_t^m(L_{t-1}^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V))) \\
&= L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V)) + L_{t-1}(L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V))) \\
&\quad + \dots + L_{t-1}^m(L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V))) \\
&= \square_{L_{t-1}}^m(L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V))),
\end{aligned}$$

pues  $L_t, L_{t-1}$  conmutan. Repitiendo este proceso, obtenemos que

$$\begin{aligned}
& L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)) \\
&= \square_{L_{t-1}}^m(L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-2}}^m(V))) \\
&= \square_{L_{t-1}}^m(\square_{L_{t-2}}^m(L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-3}}^m(V)))) \\
&\quad \vdots \\
&= \square_{L_{t-1}}^m(\square_{L_{t-2}}^m(\dots(\square_{L_1}^m(L_t^m(V))\dots))) \\
&\subseteq \square_{L_{t-1}}^m(\square_{L_{t-2}}^m(\dots(\square_{L_1}^m(V))\dots)) \\
&= \diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V),
\end{aligned}$$

pues  $L_t L_i = L_i L_t$  para todo  $i < t$ , y  $L_t^m(V) \subseteq V$ . Esto demuestra que  $\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)$  es  $L_t^m$ -invariante, y el Lema 3.1.4 implica que  $\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_t}^m(V) = \square_{L_t}^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V))$  es  $L_t$ -invariante.

Por otra parte, dado  $i < t$ , la identidad  $L_t L_i = L_i L_t$ , y el hecho de que

$$L_i(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)) \subseteq \diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)$$

(que se sigue de nuestra hipótesis de inducción) implican que

$$\begin{aligned}
& L_i(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_t}^m(V)) \\
&= L_i(\square_{L_t}^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V))) \\
&= L_i(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V) + L_t(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)) + \dots + L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V))) \\
&= L_i(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)) + L_t(L_i(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V))) + \dots + L_t^m(L_i(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V))) \\
&\subseteq \diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V) + L_t(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)) + \dots + L_t^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)) \\
&= \square_{L_t}^m(\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_{t-1}}^m(V)) \\
&= \diamond_{L_1, L_2, \dots, L_t}^m(V),
\end{aligned}$$

por lo que  $\diamond_{L_1, L_2, \dots, L_t}^m(V)$  es  $L_i$ -invariante para todo  $i \leq t$ . Finalmente, es evidente que  $V \subseteq \square_{L_1}^m(V) \subseteq \dots \subseteq \diamond_{L_1, L_2, \dots, L_t}^m(V)$ .  $\square$

Es importante observar que existen muchos ejemplos de operadores lineales  $T : E \rightarrow E$  tales que  $T$  y  $T^m$  poseen subespacios invariantes distintos. Por ejemplo, si  $T$  no es un operador del tipo  $T = \lambda I$  para ningún escalar  $\lambda$  y, además, satisface una de las igualdades  $T^m = I$  o  $T^m = 0$ , entonces todos los subespacios de  $E$  son invariantes por  $T^m$  y, por otra parte, sabemos que existe un vector  $v \in E$  tal que  $Tv \notin \mathbf{span}\{v\}$ , por lo que  $\mathbf{span}\{v\}$  no es un subespacio invariante por  $T$ . Sin embargo, como demostramos en el siguiente lema, a veces es posible demostrar que los operadores  $T$  y  $T^m$  comparten el mismo conjunto de subespacios invariantes.

**LEMA 3.1.6.** *Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo y sea  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con base  $\beta = \{v_k\}_{k=1}^n$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ . Supongamos que  $T : E \rightarrow E$  es tal que  $A = M_\beta(T)$ , su matriz asociada respecto de la base  $\beta$ , es de la forma  $A = \lambda I + B$ , donde  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $B$  es estrictamente triangular superior con entradas no nulas en la primera superdiagonal. Entonces la lista completa de los subespacios  $T$ -invariantes de  $E$  está dada por  $V_0 = \{0\}$  y  $V_k = \mathbf{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Además, si  $\lambda \neq 0$ , entonces  $T^m$  tiene los mismos subespacios invariantes que  $T$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $A = M_\beta(T)$  es de la forma  $A = \lambda I + B$ , donde  $\lambda \neq 0$  y  $B$  es triangular superior estricta, con entradas no nulas en la primera superdiagonal, y sea  $V \neq \{0\}$  un subespacio  $T$ -invariante. Tomemos  $v \in V$ . Como  $\beta$  es una base de  $E$ , existen coeficientes  $a_i$  tales que  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ ,  $a_n \neq 0$ . Entonces  $w = Tv - \lambda v \in V$ , pues  $V$  es invariante por  $T$ , y un sencillo cálculo demuestra que  $w = \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_{n-1}v_{n-1}$  con  $\alpha_{n-1} = b_{n-1,n}a_n \neq 0$ , donde  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ . Se sigue que,  $V$  es  $T$ -invariante y  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in V$ , con  $a_n \neq 0$ , entonces  $\mathbf{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ . Sea  $k_0 = \max\{k : \text{existe } v \in V, v = a_1v_1 + \dots + a_kv_k \text{ y } a_k \neq 0\}$ . Entonces  $V = \mathbf{span}\{v_1, \dots, v_{k_0}\}$ . Por último, es evidente que todos los espacios  $V_k = \mathbf{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  son  $T$ -invariantes.

Supongamos ahora que  $\lambda \neq 0$ . Para calcular los subespacios invariantes de  $T^m$  tenemos en cuenta que  $A^m = M_\beta(T^m)$  y

$$\begin{aligned} A^m &= (\lambda I + B)^m \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \lambda^{m-k} B^k \\ &= \lambda^m I + m\lambda^{m-1}B + \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \lambda^{m-k} B^k. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $A^m = \lambda^m I + C$ , con  $C$  triangular superior estricta con entradas no nulas en la primera superdiagonal, pues la única contribución a la primera superdiagonal de  $C = m\lambda^{m-1}B + \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \lambda^{m-k} B^k$  proviene de la matriz  $m\lambda^{m-1}B$ , y  $\lambda \neq 0$ . Se sigue que podemos utilizar la primera parte del lema para el estudio de los subespacios invariantes por  $T^m$ , lo que concluye la demostración. □

**PROPOSICIÓN 3.1.7.** *Supongamos que  $V$  es un subespacio de dimensión finita de  $C(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$ ,  $\{h_1, \dots, h_t\} \subset \mathbb{Z}^d$  y  $h_1\mathbb{Z} + h_2\mathbb{Z} + \dots + h_t\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^d$ . Si  $\Delta_{h_k}^m(V) \subseteq V$ ,  $k = 1, \dots, t$ ,*

entonces existe  $W$ , subespacio de dimensión finita de  $C(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$ , que es invariante por traslaciones y contiene a  $V$ . En consecuencia, todos los elementos de  $V$  son polinomios exponenciales,  $f(n) = \sum_{k=0}^s (\sum_{|\alpha| \leq m_k} a_{k,\alpha} n^\alpha) \lambda_k^n$

**Demostración.** Utilizamos el Lema 3.1.5 con  $E = C(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$ ,  $L_i = \Delta_{h_i}$ ,  $i = 1, \dots, t$ , para concluir que  $V \subseteq W = \diamond_{\Delta_{h_1}, \Delta_{h_2}, \dots, \Delta_{h_t}}^m(V)$  y  $W$  es un subespacio de dimensión finita de  $C(\mathbb{Z}^d)$  que satisface las inclusiones  $\Delta_{h_i}(W) \subseteq W$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ . Se sigue que  $W$  es invariante por traslaciones, pues  $h_1\mathbb{Z} + h_2\mathbb{Z} + \dots + h_t\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^d$ . Aplicando el Corolario 3.1.2, concluimos que todos los elementos de  $W$  (y, por tanto, también todos los elementos de  $V$ ) son polinomios exponenciales.  $\square$

**TEOREMA 3.1.8** (Montel, versión discreta). *Sea  $\{h_1, \dots, h_t\} \subset \mathbb{Z}^d$  tal que  $h_1\mathbb{Z} + h_2\mathbb{Z} + \dots + h_t\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^d$ , y sea  $f \in C(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$ . Si  $\Delta_{h_k}^m(f) = 0$ ,  $k = 1, \dots, t$ , entonces  $f(n) = \sum_{|\alpha| < N} a_\alpha n^\alpha$  para cierto  $N \in \mathbb{N}$ , ciertos números complejos  $a_\alpha$ , y para todo  $n \in \mathbb{Z}^d$ . En otras palabras,  $f$  es un polinomio algebraico en  $\mathbb{Z}^d$ . Además, si  $d = 1$ , entonces  $f(n) = a_0 + a_1n + \dots + a_{m-1}n^{m-1}$  es un polinomio algebraico en  $\mathbb{Z}$ , de grado  $\leq m - 1$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $\Delta_{h_k}^m(f) = 0$ ,  $k = 1, \dots, t$ . Entonces  $V = \mathbf{span}\{f\}$  es un subespacio de dimensión uno de  $C(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$  que satisface las hipótesis de la Proposición 3.1.7. Por tanto, todos los elementos de  $V$  son polinomios exponenciales. En particular,  $f$  es un polinomio exponencial,

$$f(n) = \sum_{k=0}^s \left( \sum_{|\alpha| \leq m_k} a_{k,\alpha} n^\alpha \right) \lambda_k^n \quad (3.1)$$

y podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $\lambda_0 = (1, 1, \dots, 1)$ ,  $m_0 \geq m - 1$ , y  $\lambda_i \neq \lambda_j$  para todo  $i \neq j$ .

Sea

$$\beta = \{n^\alpha \lambda_k^n, \quad 0 \leq |\alpha| \leq m_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s\} \quad (3.2)$$

y consideremos el espacio vectorial  $\mathcal{E} = \mathbf{span}\{\beta\}$ , el cual tiene una base de la forma (3.2) y, además, contiene a  $V$  como subespacio. Consideremos el operador lineal  $\Delta_h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  inducido por el operador  $\Delta_h$  cuando se considera restringido al espacio  $\mathcal{E}$ . Evidentemente,  $\mathcal{E} = P \oplus E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_s$ , donde

$$P = \mathbf{span}\{n^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq m_0} \text{ y } E_k = \mathbf{span}\{n^\alpha \lambda_k^n\}_{0 \leq |\alpha| \leq m_k}, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

Además,  $\Delta_h(P) \subseteq P$  y  $\Delta_h(E_k) \subseteq E_k$  para  $k = 1, 2, \dots, s$ , pues

$$q_\alpha(n) = \Delta_h n^\alpha = (n+h)^\alpha - n^\alpha$$

es un polinomio de grado  $\leq |\alpha| - 1$  y

$$\Delta_h(n^\alpha \lambda_k^n) = ((n+h)^\alpha \lambda_k^h - n^\alpha) \lambda_k^n = (n^\alpha (\lambda_k^h - 1) + q_\alpha(n) \lambda_k^h) \lambda_k^n.$$

Se sigue que, para todo  $h \in \mathbb{Z}^d$ , el operador  $\Delta_h^m$  también satisface  $\Delta_h(P) \subseteq P$  y  $\Delta_h(E_k) \subseteq E_k$  para  $k = 1, 2, \dots, s$ . De modo que, si  $g \in \mathcal{E}$ , entonces  $\Delta_h^m g = 0$  si y sólo si  $\Delta_h^m p = 0$ ,  $\Delta_h^m b_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, s$ , donde  $g = p + b_1 + \dots + b_s$ ,  $p \in P$ ,  $b_k \in E_k$ ,  $k = 1, \dots, s$ .

Fijemos  $k \in \{1, \dots, s\}$  y consideremos el operador  $(\Delta_h)|_{E_k} : E_k \rightarrow E_k$ . La matriz  $A_k$  asociada a este operador respecto de la base  $\beta_k = \{n^\alpha \lambda_k^n\}_{0 \leq |\alpha| \leq m_k}$ , la cual es considerada ordenada por el orden lexicográfico graduado,

$$n^\alpha \lambda_k^n \leq_{grlex} n^\gamma \lambda_k^n \Leftrightarrow (|\alpha| \leq |\gamma| \text{ o } (|\alpha| = |\gamma| \text{ y } \alpha \leq_{lex} \gamma)),$$

es triangular superior y los términos de su diagonal son todos iguales a  $d_k(h) = \lambda_k^h - 1$  (Recordemos que  $\alpha \leq_{lex} \gamma$  si y sólo si  $\alpha_{k_0} - \gamma_{k_0} < 0$ , donde  $k_0 = \max\{k \in \{1, 2, \dots, d\} : \alpha_k \neq \gamma_k\}$ ). Evidentemente, estos cálculos implican que, si  $d_k(h) \neq 0$ , entonces  $(\Delta_h)|_{E_k}$  es invertible y, en particular,  $\Delta_h b_k = 0$  y  $b_k \in E_k$  implica  $b_k = 0$ .

Estudiamos ahora las ecuaciones  $d_k(h_j) = 0$ , donde estamos imponiendo que los vectores  $h_j = (h_{j,1}, \dots, h_{j,d})$ ,  $j = 1, \dots, t$  sean precisamente los que aparecen en las hipótesis del teorema. Sabemos que

$$\lambda_k = (\rho_{k,1} e^{2\pi i \theta_{k,1}}, \rho_{k,2} e^{2\pi i \theta_{k,2}}, \dots, \rho_{k,d} e^{2\pi i \theta_{k,d}}) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^d$$

con  $\rho_{k,d} \neq 1$  para al menos uno de los valores de  $k$ , pues  $\lambda_k \neq (1, 1, \dots, 1)$ . Por tanto,  $d_k(h_j) = 0$  si y sólo si

$$(\rho_{k,1} e^{2\pi i \theta_{k,1}})^{h_{j,1}} (\rho_{k,2} e^{2\pi i \theta_{k,2}})^{h_{j,2}} \dots (\rho_{k,d} e^{2\pi i \theta_{k,d}})^{h_{j,d}} = 1,$$

lo cual es equivalente al sistema de relaciones

$$\begin{cases} h_{j,1} \log \rho_{k,1} + h_{j,2} \log \rho_{k,2} + \dots + h_{j,d} \log \rho_{k,d} = 0 \\ \theta_{k,1} h_{j,1} + \theta_{k,2} h_{j,2} + \dots + \theta_{k,d} h_{j,d} \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ahora,  $h_1 \mathbb{Z} + h_2 \mathbb{Z} + \dots + h_t \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^d$ , de modo que  $\{h_1, h_2, \dots, h_t\}$  contiene una base de  $\mathbb{R}^d$ . Además,  $w_k = (\log \rho_{k,1}, \log \rho_{k,2}, \dots, \log \rho_{k,d}) \in \mathbb{R}^d \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ . Esto implica que existe  $j_k \in \{1, \dots, t\}$  tal que  $h_{j_k}$  no es ortogonal a  $w_k$ . En particular,  $d_k(h_{j_k}) \neq 0$  y  $(\Delta_{h_{j_k}})|_{E_k}$  es invertible.

Consideremos la función  $f$  definida por (3.1). Entonces  $f = p_0 + b_1 + \dots + b_s \in \mathcal{E}$  (con  $p_0 = \sum_{|\alpha| \leq m_0} a_{0,\alpha} n^\alpha \in P$  y  $b_k = (\sum_{|\alpha| \leq m_k} a_{k,\alpha} n^\alpha) \lambda_k^n \in E_k$ ,  $k = 1, \dots, s$ ) y  $\Delta_{h_j}^m f = 0$  para todo  $j$ . Para cada  $k \in 1, \dots, s$  sabemos que  $\Delta_{h_{j_k}}^m b_k = 0$ , lo cual implica que  $b_k = 0$ , pues  $(\Delta_{h_{j_k}})|_{E_k}$  es invertible. Por tanto,  $f = p_0$ , lo cual demuestra la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que  $d = 1$ . Sabemos que  $f(n) = a_0 + a_1 n + \dots + a_{m_0} n^{m_0}$  es un polinomio algebraico (con  $m_0 \geq m - 1$ ) y queremos demostrar que  $\deg(f) \leq m - 1$ . Con este objetivo en mente, fijamos nuestra atención sobre la matriz  $A$  asociada al operador  $\Delta_h : \Pi_{m_0} \rightarrow \Pi_{m_0}$  con respecto a la base  $\beta_0 = \{n^k\}_{k=0}^{m_0}$ . Un sencillo cálculo demuestra que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & h & h^2 & \dots & h^{m_0} \\ 0 & 0 & 2h & \dots & \binom{m_0}{1} h^{m_0-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{m_0}{m_0-1} h \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Además, la matriz asociada a  $(\Delta_h^m)_{|\Pi_{m_0}}$  respecto de la base  $\beta_0$  está dada por  $A^m$ . Ahora,

$$\ker(A^m) = \text{span}\{(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^{i\text{-ésima posición}}, 0, \dots, 0) : i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Por tanto,  $\text{rank}(A^m) = m_0 + 1 - m = \dim_{\mathbb{C}}(\Pi_{m_0}) - m$  y  $\dim_{\mathbb{C}} \ker(A^m) = m$ . Por otra parte, otro sencillo cálculo muestra que el espacio de los polinomios algebraicos de grado  $\leq m - 1$ ,  $\Pi_{m-1}$ , está contenido en  $\ker(\Delta_h^m)$ . Por tanto,  $\ker(\Delta_h^m) = \Pi_{m-1}$ , pues ambos espacios tienen la misma dimensión. Esto, en conjunción con  $f \in \ker(\Delta_h^m)$ , finaliza la prueba.  $\square$

**COROLARIO 3.1.9.** *Supongamos que  $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$  son números enteros coprimos. Si  $f \in C(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$  satisface  $\Delta_{h_k}^m(f) = 0$ ,  $k = 1, 2$ , entonces  $f(n) = a_0 + a_1n + \dots + a_{m-1}n^{m-1}$  es un polinomio algebraico de grado  $\leq m - 1$ .*

**Demostración.** Si  $h_1, h_2$  son coprimos, entonces, gracias a la Identidad de Bézout, existen  $a, b \in \mathbb{Z}$  tales que  $1 = ah_1 + bh_2$ . Por tanto,  $h_1\mathbb{Z} + h_2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$  y el resultado se sigue directamente del Teorema 3.1.8.  $\square$

La estimación del grado de  $f$  en el Teorema 3.1.8, cuando  $d > 1$ , se puede lograr en ciertos casos especiales. Para demostrar un resultado de este tipo, introducimos antes el siguiente lema de carácter técnico.

**LEMA 3.1.10.** *Sea  $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_d]$  un polinomio complejo de  $d$  variables complejas, con grado total  $\leq N$ . Supongamos que, para todo*

$$a = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d-1}$$

*y todo  $i \in \{1, \dots, d\}$ , el polinomio  $g_{a,i}(t) = p(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_d)$  satisface  $g_{a,i} \in \Pi_m$ . Entonces  $N \leq md$ . Además, el caso extremo se alcanza con el polinomio  $p(x) = x_1^m x_2^m \dots x_d^m$ .*

**Demostración.** Fijemos  $i \in \{1, \dots, d\}$  y supongamos que  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  satisface  $a_{\alpha} \neq 0$  and  $\alpha_i \geq m + 1$ . Entonces

$$p(x) = \sum_{k=0}^N b_k(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) x_i^k; \text{ y } b_{\alpha_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \neq 0.$$

En particular, existe  $a = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d-1}$  tal que  $b_{\alpha_i}(a) \neq 0$ , pues  $b_{\alpha_i}$  es un polinomio no nulo. Se sigue que

$$g_{a,i}(t) = p(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_d) = \sum_{k=0}^N b_k(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d) t^k$$

es un polinomio de grado mayor que  $m$ , lo cual contradice nuestras hipótesis. Por tanto,  $a_{\alpha} \neq 0$  implica que  $\text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\} \leq m$  y  $N \leq md$ .  $\square$

*i-ésima posición*

**COROLARIO 3.1.11.** Sean  $e_i = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^{i\text{-ésima posición}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ ,  $i = 1, \dots, d$  y supongamos que  $f \in C(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$  satisface  $\Delta_{e_i}^m f = 0$  para  $i = 1, \dots, d$ . Entonces  $f(n) = \sum_{|\alpha| \leq (m-1)d} a_\alpha n^\alpha$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^d$  y ciertos números complejos  $a_\alpha$ . Además, el caso extremo se alcanza para  $f(n) = n_1^{m-1} n_2^{m-1} \dots n_d^{m-1}$ .

**Demostración.** Se sigue, de la igualdad  $e_1 \mathbb{Z} + \dots + e_d \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^d$  y el Teorema 3.1.8, que  $f(n) = \sum_{|\alpha| < N} a_\alpha n^\alpha$  para cierto  $N \in \mathbb{N}$ , ciertos números complejos  $a_\alpha$ , y para todo  $n \in \mathbb{Z}^d$ . Consideremos ahora el polinomio algebraico  $p(x) = \sum_{|\alpha| < N} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_d]$ , y tomemos  $i \in \{1, \dots, d\}$  y  $a = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d-1}$ . Entonces  $q_{a,i}(t) = p(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_d)$  es un polinomio en la variable compleja  $t$  y el polinomio  $\phi_{a,i}(x) = \Delta_{e_i}^m q_{a,i}(t) \in \mathbb{C}[t]$  satisface  $(\phi_{a,i})|_{\mathbb{Z}} = 0$ , por lo que  $\phi_{a,i} = 0$  y  $q_{a,i}$  es un polinomio de grado  $\leq m-1$ . El resultado se sigue si aplicamos el Lema 3.1.10 al polinomio  $p$ . Para demostrar la última afirmación del corolario basta comprobar que  $f(n) = n_1^{m-1} n_2^{m-1} \dots n_d^{m-1}$  satisface  $\Delta_{e_i}^m f = 0$  para  $i = 1, \dots, d$ , lo cual es un simple cálculo.  $\square$

En la monografía de Kuczma [38, Lema 15.9.4.] se demuestra que, si  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  es un polinomio algebraico separadamente en cada una de sus variables, y los grados parciales de  $f$  están uniformemente acotados por el número natural  $m$ , independientemente de la variable que tomemos y los valores que fijemos sobre las otras variables, entonces  $f$  es también un polinomio algebraico. El Corolario 3.1.11 demuestra que un resultado análogo es cierto para funciones  $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$  y proporciona una cota concreta para el grado de  $f$ . En el artículo [56, Teorema 14] los autores demostraron que, si  $\mathbb{K}$  es un cuerpo y  $f : \mathbb{K}^d \rightarrow \mathbb{K}$  es un polinomio algebraico separadamente en cada una de sus variables, pero eliminamos la hipótesis sobre acotación uniforme de los grados parciales de  $f$ , entonces  $f$  es un polinomio algebraico, siempre que hayamos impuesto previamente que  $\mathbb{K}$  tenga un cardinal no numerable. Además, en el caso de que  $\mathbb{K}$  sea un conjunto contable, construyeron una función  $\chi : \mathbb{K}^d \rightarrow \mathbb{K}$  que no es un polinomio sobre  $\mathbb{K}^d$ , pero es un polinomio algebraico separadamente en cada una de sus variables. Esta construcción puede trasladarse al caso de las funciones  $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{K}$ . De hecho, basta imponer que  $\mathbb{K}$  tenga característica cero y considerar la restricción  $\chi|_{\mathbb{Z}^d}$ . Un problema abierto interesante es averiguar si estas funciones se pueden también construir imponiendo que el dominio sea  $\mathbb{Z}^d$  y la imagen esté incluida en  $\mathbb{Z}$ .

Denotemos por  $X_d$  indistintamente al espacio  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$  o bien al espacio de las distribuciones con valores complejos definidas sobre  $\mathbb{R}^d$ . El mismo tipo de argumentos que hemos usado para demostrar el Teorema 3.1.8, con pequeñas variaciones, en conjunción con el conocido teorema de Anselone y Korevaar, que caracteriza los subespacios de dimensión finita e invariantes por traslaciones de  $X_d$  [14] como los espacios de funciones que admiten una base del tipo

$$\beta = \{x^{(\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,d})} e^{\langle x, \lambda_k \rangle}, \quad 0 \leq \alpha_{k,i} \leq m_{k,i} - 1, \quad i = 1, \dots, d, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s\}, \quad (3.4)$$

(donde  $\lambda_0 = 1$  y  $m_{k,i} = 0$  debe interpretarse como la imposición de que la variable  $x_i$  no aparece en la parte polinómica de los monomios exponenciales del tipo  $x^\alpha e^{\langle x, \lambda_k \rangle}$ )

nos conduce directamente a una demostración del siguiente resultado, que es una versión mejorada del Teorema de Montel clásico, pues está formulado para las distribuciones:

**TEOREMA 3.1.12** (Montel, caso distribucional). *Sean  $h_1, \dots, h_\ell \in \mathbb{R}^d$  tales que  $h_1\mathbb{Z} + \dots + h_\ell\mathbb{Z}$  es un subconjunto denso de  $\mathbb{R}^d$ , y sea  $f \in X_d$ . Si  $\Delta_{h_k}^m(f) = 0$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ , entonces  $f(x) = \sum_{|\alpha| < N} a_\alpha x^\alpha$  para cierto  $N \in \mathbb{N}$ , ciertos números complejos  $a_\alpha$ , y todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Así pues,  $f$  es un polinomio algebraico complejo en  $d$  variables reales. Además, si  $d = 1$ , entonces  $f(x) = a_1 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1}$  es un polinomio algebraico de grado  $\leq m - 1$ .*

**Demostración.** Si repetimos la demostración de la Proposición 3.1.7, pero considerando los operadores  $\Delta_{h_i}$  definidos para distribuciones  $f \in X_d$ , concluimos que todo subespacio vectorial de dimensión finita  $V$  de  $X_d$  que satisface

$$\Delta_{h_i}^m(V) \subseteq V \text{ para } i = 1, \dots, \ell, \quad (3.5)$$

está contenido en un espacio  $W$  que admite una base de la forma (3.4). En efecto, podemos obtener un espacio  $W \subseteq X_d$  que contiene a  $V$  y es invariante por las traslaciones  $\tau_{h_i} : X_d \rightarrow X_d$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ . Entonces  $W$  es invariante por todas las traslaciones del tipo  $\tau_h$  con  $h \in h_1\mathbb{Z} + \dots + h_{d+1}\mathbb{Z}$ , que es un subconjunto denso de  $\mathbb{R}^d$ . Por tanto,  $W$  es invariante por traslaciones y, gracias al Teorema de Anselone y Korevaar, admite una base de la forma (3.4). Ahora incluimos el espacio  $W$  dentro de otro espacio que admite una base del tipo

$$\beta = \{x^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq m_0} \cup \{x^\alpha e^{\langle x, \lambda_k \rangle}, 0 \leq |\alpha| \leq m_k \text{ y } k = 1, 2, \dots, s\}, \quad (3.6)$$

pues estas bases son más apropiadas para nuestros cálculos.

La demostración finaliza tomando  $V = \mathbf{span}\{f\}$  con  $\Delta_{h_k}^m(f) = 0$ ,  $k = 1, \dots, \ell$  y repitiendo los argumentos de la prueba del Teorema 3.1.8 con pequeños cambios.  $\square$

**NOTA 3.1.13.** *En [66, Teorema 10.2, pág. 78], el Teorema de Anselone y Korevaar se generalizó al contexto de las funciones medibles con valores complejos, definidas sobre grupos abelianos localmente compactos. Entonces podríamos tener la esperanza de demostrar una nueva versión del Teorema 3.1.12, cambiando la condición  $f \in X_d$  por la hipótesis de que  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  es una función medible. En otras palabras, surge de manera natural la pregunta de si el Teorema de Montel se satisface para funciones medibles. Desafortunadamente, la respuesta es negativa: el Teorema de Montel falla para las funciones medibles, para todo  $d \geq 1$ . De hecho, supongamos que  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  es medible y que  $\Delta_{h_k}^m(f) = 0$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ , siendo  $h_1\mathbb{Z} + \dots + h_\ell\mathbb{Z}$  un subconjunto denso de  $\mathbb{R}^d$ , y apliquemos los argumentos del Lema 3.1.5 a  $V = \mathbf{span}\{f\}$ , con  $L_i = \Delta_{h_i}$ . Entonces  $V$  está contenido en un espacio vectorial de dimensión finita  $W$  que es invariante por las traslaciones de la forma  $\tau_h$  con  $h \in h_1\mathbb{Z} + \dots + h_{d+1}\mathbb{Z}$ . Pero esto, por sí solo, no garantiza que  $W$  sea invariante por traslaciones.*

*Evidentemente, esto justifica por qué nuestro argumento, si se lleva al contexto de las funciones medibles, falla. Para demostrar que el Teorema de Montel es, de hecho, falso, en este contexto, damos un contra ejemplo apropiado.*

Supongamos que  $d = 1$  y  $h_1, h_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$ . Definimos

$$f(x) = \begin{cases} pq & \text{si } x = ph_1 + qh_2, \text{ y } p, q \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin h_1\mathbb{Z} + h_2\mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.7)$$

Evidentemente,  $f$  es medible. Además, un sencillo cálculo demuestra que  $\Delta_{h_1}^m f = \Delta_{h_2}^m f = 0$  para todo  $m \geq 2$ , pero  $f$  no es un polinomio. De hecho,  $f$  no es solución de la ecuación funcional de Fréchet. Este mismo ejemplo, adecuadamente adaptado, sirve para todo  $d > 1$ .



# El Teorema de Montel-Popoviciu y el grafo de las soluciones discontinuas de la ecuación de Fréchet en varias variables

## 4.1. El teorema de Montel-Popoviciu

Aunque el artículo de Montel [44] fue publicado en 1937, él ya había obtenido sus resultados en 1935 y, de hecho, ese año impartió un seminario en el que se explicaba su teorema, en el departamento de matemáticas de la Universidad Politécnica de Cluj Napoca, en Rumania. En dicho seminario estaba presente su alumno de doctorado, el matemático rumano Tiberiu Popoviciu, quien había defendido su tesis doctoral en la Escuela Normal Superior de París en 1933 [54]. Popoviciu captó inmediatamente las ideas de Montel y, de hecho, en 1936 publicó un artículo [55] en el que se mejoraba sensiblemente el resultado original. Concretamente, demostró el siguiente teorema:

**TEOREMA 4.1.1** (Montel-Popoviciu, 1935). *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una solución del sistema de ecuaciones funcionales*

$$\Delta_{h_1}^{m+1} f(x) = \Delta_{h_2}^{m+1} f(x) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

donde  $h_1, h_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Entonces:

- (i) Para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  existe un único polinomio  $P(x, y) \in \Pi_{m, \max}^2$  tal que  $f(x_0 + ih_1 + jh_2) = P(ih_1, jh_2)$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ .
- (ii) Si  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$  y existe un intervalo abierto no vacío  $I = (a, b)$  tal que  $f|_I$  es una función acotada, entonces el polinomio  $P(x, y)$  que aparece en (i) es de la forma  $P(x, y) = A_0(x+y)$  para cierto polinomio  $A_0(t)$  de grado  $\leq m$  y, consecuentemente,

$$\Delta_{ih_1+jh_2}^{m+1} f(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ y todo } i, j \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Si  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$  y  $f$  es continua en al menos  $m + 1$  puntos, entonces  $f(x) = A_0(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), es un polinomio algebraico de grado  $\leq m$ .

Vamos a seguir el espíritu de la prueba original de Popoviciu, aunque nosotros explicaremos más detalladamente todas nuestras construcciones, algunas de las cuales difieren de forma significativa de lo que se afirma -a veces, sin demostración- en el artículo original de Popoviciu. Esta prueba servirá, posteriormente, para obtener una interesante descripción cualitativa del grafo de los polinomios discontinuos.

Comenzamos, pues, con algunos resultados técnicos sobre polinomios de una y dos variables reales. El primero es un resultado estándar sobre localización de ceros.

**LEMA 4.1.2.** Sea  $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_Nz^N \in \mathbb{C}[z]$  un polinomio algebraico de grado exactamente  $N$  (i.e.,  $a_N \neq 0$ ) con coeficientes complejos, y sea  $\xi \in \mathbb{C}$  cualquiera de sus ceros. Entonces

$$|\xi| \leq \max\left\{1, \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|a_k|}{|a_N|}\right\}.$$

**Demostración.** Si  $|\xi| \leq 1$ , ya hemos acabado. Supongamos, pues, que  $|\xi| > 1$ . Como  $p(\xi) = 0$ , tenemos que también  $\frac{1}{|a_N|}p(\xi) = 0$ , de modo que, si despejamos el término líder de esta expresión, y tomamos valor absoluto a ambos lados de la igualdad, obtenemos que

$$\begin{aligned} |\xi|^N &= \left| \frac{a_0}{a_N} + \frac{a_1}{a_N}\xi + \cdots + \frac{a_{N-1}}{a_N}\xi^{N-1} \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|a_k|}{|a_N|} \max\{1, |\xi|, \dots, |\xi|^{N-1}\} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|a_k|}{|a_N|} |\xi|^{N-1}, \end{aligned}$$

por tanto,  $|\xi| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|a_k|}{|a_N|}$ , que es lo que buscábamos.  $\square$

A continuación demostramos un resultado de naturaleza más técnica.

**LEMA 4.1.3.** Sea  $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_Nz^N \in \mathbb{C}[z]$  un polinomio algebraico de grado exactamente  $N$  (i.e.,  $a_N \neq 0$ ) con coeficientes complejos, y supongamos que  $N \geq 1$ . Sea además  $\{q_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de polinomios de grado  $\leq N$  tales que  $q_n(z) = a_{0n} + a_{1n}z + \cdots + a_{Nn}z^N$ ,  $\max\{|a_k - a_{kn}| : k = 0, 1, \dots, N\} < |a_N|/2$ ,  $n = 1, 2, \dots, \infty$ . Si  $\{x_n\}$  es una sucesión de números tal que  $|x_n| \rightarrow +\infty$ , entonces  $|q_n(x_n)| \rightarrow \infty$ .

**Demostración.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y tomemos  $\xi$  un cero de  $q_n(z)$ . Gracias al Lema 4.1.2, sabemos que

$$|\xi| \leq \max\left\{1, \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|a_{kn}|}{|a_{Nn}|\right\},$$

y, como  $|a_{kn}| \leq |a_{kn} - a_k| + |a_k| \leq \frac{|a_N|}{2} + |a_k|$ ,  $|a_{Nn}| \geq \frac{a_N}{2}$ , tenemos que

$$|\xi| \leq \max\left\{1, \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\left(\frac{|a_N|}{2} + |a_k|\right)}{|a_N|}\right\} =: M.$$

Es decir, todos los ceros de  $q_n(z)$  (para todo  $n$ ) están en  $B_M = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq M\}$ . Si  $|x_n| \rightarrow \infty$ , entonces obviamente  $\text{dist}(x_n, B_M) \rightarrow \infty$ . Ahora, si  $\{\alpha_{kn}\}_{k=1}^N$  denota el conjunto de los ceros de  $q_n(z)$ , entonces obviamente  $q_n(z) = a_{Nn} \prod_{k=1}^N (z - \alpha_{kn})$  y, por tanto,

$$|q_n(x_n)| = |a_{Nn}| \prod_{k=1}^N |x_n - \alpha_{kn}| \geq \frac{|a_{Nn}|}{2} (\text{dist}(x_n, B_M))^N \rightarrow \infty. \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

**COROLARIO 4.1.4.** Sea  $P(x, y) \in \Pi_{m, \max}^2$  un polinomio algebraico de grado menor o igual que  $m$  en ambas variables. Supongamos que existen  $m + 1$  números distintos  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m+1}$  y sucesiones de puntos del plano  $\{(u_{k,n}, v_{k,n})\}$  tales que  $u_{k,n} + v_{k,n} \rightarrow \alpha_k$  para  $n \rightarrow \infty$  para  $k = 1, 2, \dots, m + 1$ . Supongamos, además, que  $|u_{k,n}| \rightarrow \infty$  para  $n \rightarrow \infty$  y que  $\{P(u_{k,n}, v_{k,n})\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión acotada para cada  $k$ . Entonces

$$P(x, y) = A_0(x + y),$$

donde  $A_0$  es un polinomio en una variable, de grado  $\leq m$ .

**Demostración.** Consideremos el cambio de variables  $\varphi(x, y) = (x, x + y)$ . Si denotamos  $f_1 = x$ ,  $f_2 = x + y$ , entonces  $y = f_2 - f_1$  y, consecuentemente, todo polinomio  $P(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_{i,j} x^i y^j \in \Pi_{m, \max}^2$  admite una representación del tipo

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_{i,j} x^i y^j = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_{i,j} f_1^i (f_2 - f_1)^j \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_{i,j} f_1^i \left( \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (-1)^{j-s} f_2^s f_1^{j-s} \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \left( \sum_{s=0}^j a_{i,j} \binom{j}{s} \right) (-1)^{j-s} f_2^s f_1^{i+j-s} \\ &= \sum_{i=0}^{2m} A_i(f_2) f_1^i \\ &= \sum_{i=0}^{2m} A_i(x + y) x^i, \end{aligned}$$

donde  $A_i(t)$  es un polinomio en una única variable, de grado  $\leq m$ , para  $i = 0, 1, \dots, 2m$ . Una vez hemos representado el polinomio  $P(x, y)$  de la forma anterior, tomamos  $\{(u_{k,n}, v_{k,n})\}$  y  $\{\alpha_k\}$  verificando las hipótesis del corolario. Sea  $N = \max\{i \in \{0, \dots, 2m\} : A_i \neq 0\}$ . Entonces

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^N A_i(x + y) x^i \text{ y } A_N \neq 0.$$

Queremos demostrar que  $N = 0$ . Supongamos, por el contrario, que  $N > 1$ . Vamos a demostrar que  $A_N(\alpha_k) = 0$  para  $k = 1, 2, \dots, m+1$ , lo cual implicaría que  $A_N = 0$  pues  $A_N(t)$  es un polinomio de grado  $\leq m$ . Supongamos, por el contrario, que  $A_N(\alpha_k) \neq 0$  para algún  $k$ . Consideremos el polinomio

$$p(z) = \sum_{i=0}^N A_i(\alpha_k) z^i$$

Como  $\{u_{k,n} + v_{k,n}\} \rightarrow \alpha_k$  para  $n \rightarrow \infty$ , y las funciones  $A_i(t)$  son continuas, sabemos que  $\{A_i(u_{k,n} + v_{k,n})\} \rightarrow A_i(\alpha_k)$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Es más, podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $|A_i(u_{k,n} + v_{k,n}) - A_i(\alpha_k)| < |A_N(\alpha_k)|/2$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Si consideramos los polinomios

$$q_n(z) = \sum_{i=0}^N A_i(u_{k,n} + v_{k,n}) z^i, \quad n = 1, 2, \dots,$$

y usamos el Lema 4.1.3, obtenemos que  $|q_n(u_{k,n})| \rightarrow \infty$  para  $n \rightarrow \infty$ . Sin embargo,  $|q_n(u_{k,n})| = |P(u_{k,n}, v_{k,n})|$ , que es una sucesión acotada. Esto nos lleva a la conclusión de que  $A_N(\alpha_k) = 0$  forzosamente, que es lo que buscábamos.  $\square$

**Demostración del Teorema de Montel-Popoviciu (Teorema 4.1.1).**

(i). Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\Delta_{h_1}^{m+1} f(x) = \Delta_{h_2}^{m+1} f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  y consideremos el polinomio de interpolación de Lagrange (en dos variables  $x, y$ ) que interpola la tabla de valores  $f_{i,j} = f(x_0 + ih_1 + jh_2)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, m$ , en los nodos  $(ih_1, jh_2)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, m$ . Es decir,

$$P(ih_1, jh_2) = f(x_0 + ih_1 + jh_2), \quad i, j = 0, 1, \dots, m.$$

Sabemos que este polinomio está unívocamente determinado (ver, por ejemplo, [34, pág. 295], [68]). Vamos a demostrar que  $f(x_0 + ih_1 + jh_2) = P(ih_1, jh_2)$  para todo  $i, j \in \mathbb{Z}$ . Para verlo, observemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_{h_1}^{m+1} f(x_0 + jh_2) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^{m+1-k} f(x_0 + kh_1 + jh_2) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} (-1)^{m+1-k} f(x_0 + kh_1 + jh_2) + f(x_0 + (m+1)h_1 + jh_2) \end{aligned}$$

Por otra parte, como  $P(x, y) = \sum_{t=0}^m \sum_{s=0}^m \alpha_{t,s} x^t y^s$ , si fijamos  $y = jh_2$  y consideramos la función  $g(x) = P(x, jh_2)$ , resulta que  $g$  es un polinomio de grado  $\leq m$ , por lo que  $\Delta_h^{m+1} g(x) = 0$  para todos los valores  $x, h \in \mathbb{R}$ , de modo que

$$0 = \Delta_{h_1}^{m+1} g(0) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^{m+1-k} g(kh_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} (-1)^{m+1-k} P(kh_1, jh_2) + P((m+1)h_1, jh_2) \\
&= \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} (-1)^{m+1-k} f(x_0 + kh_1 + jh_2) + P((m+1)h_1, jh_2).
\end{aligned}$$

Se sigue que  $P((m+1)h_1, jh_2) = f(x_0 + (m+1)h_1 + jh_2)$ . Si hubiéramos partido del polinomio de Lagrange que interpola los valores  $f_{i,j} = f(x_0 + ih_1 + jh_2)$  para  $i = 1, 2, \dots, m+1, j = 0, 1, \dots, m$  en los nodos  $(ih_1, jh_2)$  (que, como acabamos de demostrar, coincide con nuestro polinomio  $P(x, y)$ ), el mismo argumento nos llevaría a la conclusión de que también  $P((m+2)h_1, jh_2) = f(x_0 + (m+2)h_1 + jh_2)$ . De forma similar, despejando esta vez el primer término de la sumas en vez del último, y tomando como punto de partida la igualdad  $\Delta_{h_1}^{m+1} f(x_0 - h_1 + jh_2) = 0$ , podríamos concluir que  $P(-h_1, jh_2) = f(x_0 - h_1 + jh_2)$ . Repitiendo estos argumentos infinitas veces (tanto hacia delante como hacia atrás), se obtiene que  $P(kh_1, jh_2) = f(x_0 + kh_1 + jh_2)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  y  $j = 0, 1, \dots, m$ . Ahora, tomando la función  $h(y) = P(ih_1, y)$ , podemos argumentar de modo similar que, en realidad,

$$P(ih_1, jh_2) = f(x_0 + ih_1 + jh_2) \text{ para todo } (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

Esto finaliza la demostración de (i).

Nos interesa, de todas formas, observar que  $P(x, y) = \sum_{t=0}^m \sum_{s=0}^m \alpha_{t,s} x^t y^s$  para ciertas constantes  $\alpha_{t,s}$  y, en consecuencia, gracias a lo expuesto en la demostración del Corolario 4.1.4, también admite una expresión del tipo

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{2m} A_i(x+y)x^i,$$

con  $A_i(t)$  un polinomio de grado  $\leq m$  para cada  $i$  (Este hecho se usará posteriormente en este Capítulo).

(ii). Supongamos ahora que  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$  y  $f$  está acotada en un cierto intervalo  $(a, b)$  con  $a < b$ . Como  $h_1/h_2$  es irracional, sabemos que los puntos  $\{x_0 + ih_1 + jh_2\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$  forman un subconjunto denso de la recta y, por tanto, fijados  $m+1$  elementos distintos  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m+1} \subset (a, b)$ , existen infinitos valores enteros  $i_{k,n}, j_{k,n}$  tales que  $\bigcup_{k \leq m+1} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_0 + i_{k,n}h_1 + j_{k,n}h_2\} \subseteq (a, b)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (i_{k,n}h_1 + j_{k,n}h_2) = \alpha_k - x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |i_{k,n}h_1| = \infty$ ,  $k = 1, 2, \dots, m+1$ . Como  $P(ih_1, jh_2) = f(x_0 + ih_1 + jh_2)$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ , podemos utilizar el Corolario 4.1.4, para concluir que  $P(x, y) = A_0(x+y)$ . En particular,

$$f(x_0 + ih_1 + jh_2) = A_0(ih_1 + jh_2) \text{ para todo } (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

Esto, unido a que  $A_0(t)$  es un polinomio de grado  $\leq m$ , y a que todos los cálculos anteriores son válidos independientemente del punto  $x_0$ , implica que

$$\Delta_{ih_1+jh_2}^{m+1} f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y todo } (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

(iii). Supongamos ahora que  $h_1/h_2 \notin \mathbb{Q}$  y  $f$  es continua en  $m + 1$  puntos distintos  $\{s_k\}_{k=1}^{m+1}$ . Esto obviamente implica que  $f$  está acotada en un intervalo abierto no vacío y, por tanto, para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$ , existe un polinomio  $A_{x_0}(t)$  de grado  $\leq m$  tal que  $f(x_0 + ih_1 + jh_2) = A_{x_0}(ih_1 + jh_2)$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ . Decir que  $f$  es un polinomio algebraico de grado  $\leq m$  equivale, por tanto, a decir que  $A_{x_0}(x + x_1 - x_0) = A_{x_1}(x)$ , independientemente de los valores de  $x_0$  y  $x_1$ . Para ver esto, basta observar que, al ser  $x_1$  arbitrario, y teniendo en cuenta la definición de  $A_{x_1}$ , sabemos que

$$f(x_1) = A_{x_1}(0) = A_{x_0}(x_1 - x_0),$$

es decir,  $f(t) = A_{x_0}(t - x_0)$  para todo valor  $t \in \mathbb{R}$ , que es lo que buscamos.

Ahora bien, hay que probar la identidad  $A_{x_0}(x + x_1 - x_0) = A_{x_1}(x)$  o, lo que es equivalente,  $A_{x_0}(x) = A_{x_1}(x + x_0 - x_1)$ . Tomemos  $i_{k,n}, j_{k,n}, i_{k,n}^*, j_{k,n}^* \in \mathbb{Z}$  tales que  $x_0 + i_{k,n}h_1 + j_{k,n}h_2 \rightarrow s_k$ , y  $x_1 + i_{k,n}^*h_1 + j_{k,n}^*h_2 \rightarrow s_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, m + 1$ , y consideremos el polinomio  $C(x) = A_{x_1}(x + x_0 - x_1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} f(s_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + i_{k,n}h_1 + j_{k,n}h_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_{x_0}(i_{k,n}h_1 + j_{k,n}h_2) = A_{x_0}(s_k - x_0), \quad 1 \leq k \leq m + 1. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} f(s_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_1 + i_{k,n}^*h_1 + j_{k,n}^*h_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_{x_1}(i_{k,n}^*h_1 + j_{k,n}^*h_2) = A_{x_1}(s_k - x_1), \quad 1 \leq k \leq m + 1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$C(s_k - x_0) = A_{x_1}(s_k - x_0 + x_0 - x_1) = A_{x_1}(s_k - x_1) = A_{x_0}(s_k - x_0), \quad 1 \leq k \leq m + 1.$$

Es decir,  $C(x)$  y  $A_{x_0}$  coinciden en al menos  $m + 1$  puntos, por lo que son en realidad el mismo polinomio. Por tanto,  $A_{x_0}(x) = A_{x_1}(x + x_0 - x_1)$ , que es lo que queríamos demostrar. □

## 4.2. Descripción cualitativa de los grafos de los polinomios discontinuos

La técnica de interpolación utilizada por Popoviciu para su prueba del Teorema de Montel (mejorado), se puede aprovechar para el estudio cualitativo del grafo de un polinomio discontinuo. Concretamente, se puede demostrar el siguiente resultado, que generaliza el Teorema de Darboux para la ecuación de Cauchy al contexto de los polinomios generalizados:

**TEOREMA 4.2.1** (Descripción de  $G(f)$  para funciones de una variable). *Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación funcional de Fréchet*

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0 \quad \text{para todo } (x, h) \in \mathbb{R}^2,$$

y no es un polinomio ordinario, entonces  $f$  no está acotada en ningún intervalo abierto no vacío. Además, para todo  $x \in \mathbb{R}$  existe un intervalo no acotado  $I_x \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $\{x\} \times I_x \subseteq \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ . Finalmente,  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$  contiene un abierto no acotado.

**Demostración.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución de la ecuación de Fréchet  $\Delta_h^{m+1} f = 0$ , entonces el apartado (i) del Teorema 4.1.1 se puede mejorar, al demostrar que, en realidad,

(i)\* Para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$ , y para cada  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ , existe un único polinomio  $P(x, y) \in \Pi_{m, \max}^2$  tal que  $f(x_0 + rh_1 + sh_2) = P(rh_1, sh_2)$  para todo  $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$ .

Para verlo, basta comprobar que, si aplicamos (i) del Teorema 4.1.1 a  $f$  cambiando los pasos  $h_1, h_2$  por  $h_1^* = h_1/p, h_2^* = h_2/q$ , respectivamente, donde  $p, q$  son dos números enteros (no nulos) arbitrarios, el nuevo polinomio, que denotamos por  $P^*$ , coincide con el polinomio original,  $P(x, y)$ , en una malla infinita de puntos, pues

$$P(ih_1, jh_2) = f(x_0 + ih_1 + jh_2) = f(x_0 + iph_1^* + jqh_2^*) = P^*(iph_1^*, jqh_2^*) = P^*(ih_1, jh_2)$$

para todo  $i, j \in \mathbb{Z}$ , por lo que en realidad son el mismo polinomio, lo cual implica obviamente (i)\*, pues  $p, q$  eran enteros (no nulos) arbitrarios.

Se sigue que, si  $\Delta_h^{m+1} f = 0$  para todo  $h$  y  $P_{x_0, h_1, h_2}(x, y)$  denota al polinomio de  $\Pi_{m, \max}^2$  que satisface (i)\*, entonces

$$\Gamma_{x_0, h_1, h_2} := \{(x_0 + u + v, P_{x_0, h_1, h_2}(u, v)) : u, v \in \mathbb{R}\} \subseteq \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}, \quad (4.1)$$

pues  $\mathbb{Q}$  es un subconjunto denso de  $\mathbb{R}$ . Lo interesante ahora es, pues, estudiar los conjuntos  $\Gamma_{x_0, h_1, h_2}$ . Si  $P_{x_0, h_1, h_2}(x, y) = A(x + y)$  para cierto polinomio  $A$ , entonces el conjunto  $\Gamma_{x_0, h_1, h_2}$  tiene interior vacío y, de hecho, no es más que el grafo de un polinomio algebraico ordinario, por lo que, en este caso, la propiedad (4.1) no dice gran cosa. Sin embargo, podemos demostrar que, si  $f$  es solución de la ecuación de Fréchet  $\Delta_h^{m+1} f = 0$  y no es un polinomio algebraico ordinario, entonces existen  $x_0, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $P_{x_0, h_1, h_2}(x, y)$  no es un polinomio en la variable  $x + y$ . Concretamente, demostramos que, para valores apropiados de  $x_0, h_1$  y  $h_2$ ,

$$P_{x_0, h_1, h_2}(x, y) = \sum_{i=0}^N A_i(x + y)x^i, \quad \text{con } A_N(t) \neq 0 \text{ y } N \geq 1, \quad (4.2)$$

donde  $A_i(t)$  es un polinomio de grado  $\leq m$  para  $i = 0, 1, \dots, N$ . Evidentemente, si se satisface (4.2), entonces, para cada  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus Z(A_N)$  (donde  $Z(A_N) = \{s \in \mathbb{R} : A_N(s) = 0\}$  es un conjunto de a lo sumo  $m$  puntos), tendremos que  $p_\alpha(x) = P_{x_0, h_1, h_2}(x, \alpha - x) = \sum_{i=0}^N A_i(\alpha)x^i$  es un polinomio no constante y, por tanto,  $p_\alpha(\mathbb{R})$  es un intervalo no acotado. Además,

$$\{x_0 + \alpha\} \times p_\alpha(\mathbb{R}) \subseteq \Gamma_{x_0, h_1, h_2} \subseteq \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}.$$

Es decir, si demostramos (4.2), entonces  $f$  no podrá ser localmente acotada y, para todo  $x \in \mathbb{R}$  existirá un intervalo no acotado  $I_x \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $\{x\} \times I_x \subseteq \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ .

Veamos, por último, que si  $P = P_{x_0, h_1, h_2}$  satisface (4.2), entonces  $\Gamma_{x_0, h_1, h_2}$  contiene un abierto no acotado. Para comprobarlo, definimos la función  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\varphi(x, y) = (x + y + x_0, P(x, y)).$$

Un sencillo cálculo nos revela que

$$\det \varphi'(x, y) = P_y - P_x = - \sum_{k=1}^N k A_k (x + y) x^{k-1}$$

es un polinomio no nulo y, por tanto,  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : \det \varphi'(x, y) = 0\}$  es un abierto no vacío del plano (de hecho, es un abierto denso en el plano). Podemos, pues, utilizar el Teorema de la aplicación abierta para funciones diferenciales con la función  $\varphi$ , concluyendo que  $W = \varphi(\Omega)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  contenido en  $\Gamma_{x_0, h_1, h_2}$ . Las inclusiones  $\{x_0 + \alpha\} \times p_\alpha(\mathbb{R}) \subseteq \Gamma_{x_0, h_1, h_2}$  demuestran, además, que  $W$  no es un conjunto acotado.

Veamos ahora que, en efecto, se satisface la relación (4.2) para cierta elección de  $x_0, h_1, h_2$ . Si esto no fuera así, entonces, fijados  $h_1, h_2$ , todos los polinomios  $P_{x_0, h_1, h_2}(x, y)$  serían de la forma  $P_{x_0, h_1, h_2}(x, y) = A_{x_0}(x + y)$  para cierto polinomio  $A_{x_0}$  de grado  $\leq m$ . Como hemos supuesto que  $f$  no es un polinomio algebraico, esto implicará la existencia de dos puntos distintos  $x_0, x_1$  tales que  $A_{x_1}(0) \neq A_{x_0}(x_1 - x_0)$ . Consideremos ahora el polinomio  $P_{x_0, x_1 - x_0, h_2}(x, y)$ , el cual, por hipótesis, debe ser de la forma  $P_{x_0, x_1 - x_0, h_2}(x, y) = A(x + y)$  para cierto polinomio  $A(t)$  de grado  $\leq m$ . Un simple cálculo nos conduce a que

$$A(x_1 - x_0) = P_{x_0, x_1 - x_0, h_2}(x_1 - x_0, 0) = f(x_0 + (x_1 - x_0)) = f(x_1) = A_{x_1}(0).$$

Por otra parte, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , tenemos que

$$A(jh_2) = P_{x_0, x_1 - x_0, h_2}(0, jh_2) = f(x_0 + jh_2) = A_{x_0}(jh_2),$$

por lo que  $A$  y  $A_{x_0}$  coinciden en infinitos puntos y son, en consecuencia, el mismo polinomio. Se sigue que  $A_{x_1}(0) = A_{x_0}(x_1 - x_0)$ , lo cual contradice la hipótesis de que  $f$  no es un polinomio. □

El resultado anterior puede generalizarse al caso de varias variables:

**TEOREMA 4.2.2** (Descripción de  $G(f)$  para funciones de varias variables). *Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación funcional de Fréchet*

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0 \quad \text{para todo } x, h \in \mathbb{R}^n,$$

*ya  $f(x_1, \dots, x_n)$  no es un polinomio ordinario, entonces  $f$  no está acotada en ningún abierto no vacío. Además,  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^{n+1}}$  contiene un abierto no acotado.*



Antes de abordar la prueba del Teorema 4.2.2, es necesario introducir algunas construcciones, así como varios resultados técnicos relacionadas con ellas. Para empezar, observemos que si  $f$  no es un polinomio algebraico en sentido ordinario, entonces existen  $s \in \{1, \dots, n\}$  y  $(a_1, a_2, \dots, a_{s-1}, a_{s+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  (valores que dejamos fijos a partir de ahora) tales que

$$g(x) = f(a_1, a_2, \dots, a_{s-1}, x, a_{s+1}, \dots, a_n)$$

no es un polinomio algebraico. Esto ha sido demostrado de varias formas y puede consultarse, por ejemplo, en [7], [38], [56]. Además, si tenemos en cuenta la demostración del Teorema 4.2.1, sabemos que, si denotamos por  $p_{x_0, \alpha, \beta}(x, y)$  al único polinomio de  $\Pi_{m, \text{máx}}^2$  tal que

$$p_{x_0, \alpha, \beta}(i\alpha, j\beta) = g(x_0 + i\alpha + j\beta), \quad \text{para } i, j = 0, 1, \dots, m,$$

entonces existen  $a_s, h_s, h_{n+1} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq N \leq 2m$ , y polinomios  $A_k \in \Pi_m$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  tales que

$$p_{a_s, h_s, h_{n+1}}(x, y) = \sum_{k=0}^N A_k(x+y)x^k, \quad \text{donde } A_N \neq 0.$$

Dejamos también fijos en todo lo que sigue los valores  $a_s, h_s, h_{n+1}$ , y tomamos  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $h_1, \dots, h_{s-1}, h_{s+1}, h_{n+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (también fijos), y  $\gamma = \{v_k\}_{k=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ . Entonces, gracias a la técnica del producto tensorial, es fácil demostrar que existe un único polinomio algebraico  $P(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \Pi_{m, \text{máx}}^{n+1}$  tal que

$$P(i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_{n+1} h_{n+1}) = f\left(a + \sum_{k=1}^{n+1} i_k h_k v_k\right), \quad \text{para } 0 \leq i_k \leq m, \quad 1 \leq k \leq n+1.$$

Dicho polinomio lo denotamos, a partir de ahora, por  $P_{a, h, \gamma}$ , donde  $h := (h_1, \dots, h_{n+1})$ . La demostración del Teorema 4.2.2 se apoya en varios lemas que enunciamos y demostramos a continuación.

**LEMA 4.2.3.** *Se satisface la siguiente relación:*

$$P_{a, h, \gamma}(i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_{n+1} h_{n+1}) = f\left(a + \sum_{k=1}^{n+1} i_k h_k v_k\right), \quad \text{para todo } (i_1, \dots, i_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

**Demostración.** Fijemos los valores de  $k \in \{1, \dots, n+1\}$  y  $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_{n+1} \in \{0, 1, \dots, m\}$ , y consideremos el polinomio

$$q_k(x) = P_{a, h, \gamma}(i_1 h_1, \dots, i_{k-1} h_{k-1}, x, i_{k+1} h_{k+1}, \dots, i_{n+1} h_{n+1}).$$

Es evidente que  $q_k \in \Pi_m^1$  y, por tanto,

$$0 = \Delta_{h_k}^{m+1} q_k(0) = \sum_{r=0}^{m+1} \binom{m+1}{r} (-1)^{m+1-r} q_k(r h_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^m \binom{m+1}{r} (-1)^{m+1-r} P_{a,h,\gamma}(i_1 h_1, \dots, i_{k-1} h_{k-1}, r h_k, i_{k+1} h_{k+1}, \dots, i_{n+1} h_{n+1}) \\
&\quad + q_k((m+1)h_k) \\
&= \sum_{r=0}^m \binom{m+1}{r} (-1)^{m+1-r} f(a + \sum_{(0 \leq j \leq n+1; j \neq k)} i_j h_j v_j + r h_k v_k) + q_k((m+1)h_k) \\
&= \Delta_{h_k v_k}^{m+1} f(a + \sum_{(0 \leq j \leq n+1; j \neq k)} i_j h_j v_j) - f(a + \sum_{(0 \leq j \leq n+1; j \neq k)} i_j h_j v_j + (m+1)h_k v_k) \\
&\quad + q_k((m+1)h_k) \\
&= q_k((m+1)h_k) - f(a + \sum_{(0 \leq j \leq n+1; j \neq k)} i_j h_j v_j + (m+1)h_k v_k).
\end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que

$$\begin{aligned}
q_k((m+1)h_k) &= P_{a,h,\gamma}(i_1 h_1, \dots, i_{k-1} h_{k-1}, (m+1)h_k, i_{k+1} h_{k+1}, \dots, i_{n+1} h_{n+1}) \\
&= f(a + \sum_{(0 \leq j \leq n+1; j \neq k)} i_j h_j v_j + (m+1)h_k v_k)
\end{aligned}$$

y, repitiendo el mismo tipo de argumento (tanto hacia delante como hacia atrás, y para cada  $k \in \{1, \dots, n+1\}$ ), obtenemos que

$$P_{a,h,\gamma}(i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_{n+1} h_{n+1}) = f(a + \sum_{k=1}^{n+1} i_k h_k v_k), \text{ para todo } (i_1, \dots, i_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1},$$

que es lo que queríamos probar.  $\square$

**LEMA 4.2.4.** *Se satisface la siguiente relación:*

$$P_{a,h,\gamma}(r_1 h_1, r_2 h_2, \dots, r_{n+1} h_{n+1}) = f(a + \sum_{k=1}^{n+1} r_k h_k v_k), \text{ para todo } (r_1, \dots, r_{n+1}) \in \mathbb{Q}^{n+1}.$$

Por tanto,  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^{n+1}}$  contiene al conjunto  $\varphi_\gamma(\mathbb{R}^{n+1})$ , donde

$$\varphi_\gamma(t_1, \dots, t_{n+1}) = (a + \sum_{k=1}^{n+1} t_k v_k, P_{a,h,\gamma}(t_1, \dots, t_{n+1})).$$

**Demostración.** Basta tener en cuenta que, si  $p_1, p_2, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , y aplicamos el Lema 4.2.3 al polinomio  $P^*(t_1, \dots, t_{n+1})$  que satisface las relaciones de interpolación

$$P^*(i_1 h_1^*, i_2 h_2^*, \dots, i_{n+1} h_{n+1}^*) = f(a + \sum_{k=1}^{n+1} i_k h_k^* v_k), \text{ para } 0 \leq i_k \leq m, 1 \leq k \leq n+1,$$

donde  $h_k^* = h_k/p_k$ ,  $k = 1, \dots, n+1$ , entonces

$$P^*(i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_{n+1} h_{n+1}) = P^*(p_1 i_1 h_1^*, p_2 i_2 h_2^*, \dots, p_{n+1} i_{n+1} h_{n+1}^*)$$

$$\begin{aligned}
&= f\left(a + \sum_{k=1}^{n+1} p_k i_k h_k^* v_k\right) \\
&= f\left(a + \sum_{k=1}^{n+1} i_k h_k v_k\right) \\
&= P_{a,h,\gamma}(i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_{n+1} h_{n+1}),
\end{aligned}$$

para  $0 \leq i_k \leq m$  y  $1 \leq k \leq n+1$ , por lo que  $P^* = P_{a,h,\gamma}$ , lo cual nos conduce a la identidad buscada, pues  $p_1, p_2, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  eran arbitrarios.  $\square$

**LEMA 4.2.5.** *Si imponemos  $v_k = e_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  y  $v_{n+1} = e_s$ , donde*

$$e_i = (0, 0, \dots, \overbrace{1}^{i\text{-ésima posición}}, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n,$$

entonces

$$\varphi_\gamma(t_1, \dots, t_{n+1}) = (a + (t_1, \dots, t_{s-1}, t_s + t_{n+1}, t_{s+1}, \dots, t_n), P_{a,h,\gamma}(t_1, \dots, t_{n+1})),$$

y

$$P_{a,h,\gamma}(0, \dots, 0, t_s, 0, \dots, 0, t_{n+1}) = p_{a_s, h_s, h_{n+1}}(t_s, t_{n+1}) = \sum_{k=0}^N A_k(t_s + t_{n+1}) t_s^k.$$

**Demostración.** Es trivial. Se trata simplemente de imponer las sustituciones indicadas (i.e.,  $v_k = e_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  y  $v_{n+1} = e_s$ ) y utilizar la definición del polinomio  $p_{a_s, h_s, h_{n+1}}$ .  $\square$

El siguiente lema es un resultado conocido en Geometría Algebraica. Incluimos la demostración con el objetivo de que nuestra prueba del Teorema 4.2.2 quede establecida con nitidez en todos sus aspectos.

**LEMA 4.2.6.** *Supongamos que  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  es una variedad algebraica,  $V \neq \mathbb{R}^n$ . Entonces  $V$  no tiene puntos interiores.*

**Demostración.** Un sencillo cambio de coordenadas permite reducir la cuestión a conocer si el origen de coordenadas puede ser un punto interior de  $V$ . Procedemos por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$  el resultado es claro (es decir, si  $0 \in \mathbf{Int}(V)$ , entonces  $V = \mathbb{R}$ ). Supongamos que el lema es cierto para  $n$  y asumamos que  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Si  $\mathbf{0} \in \mathbf{Int}(V)$  y  $H \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  es un hiperplano que pasa por el origen de coordenadas, entonces  $W = V \cap H$  es una variedad algebraica que, al estar contenida en  $H \simeq \mathbb{R}^n$ , podemos interpretar de forma natural como una subvariedad algebraica de  $\mathbb{R}^n$ . Además, el origen de coordenadas es un punto interior de  $W$  (en la topología heredada de  $H$ , que es la que tiene como subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ ). Por tanto, la hipótesis de inducción nos dice que  $V \cap H = W = H$ . Como esto es cierto para todos los hiperplanos  $H$  que contienen a  $\mathbf{0}$ , y éstos recubren  $\mathbb{R}^{n+1}$ , concluimos que  $V = \mathbb{R}^{n+1}$ .  $\square$

**Demostración del Teorema 4.2.2** Utilizando la primera igualdad del Lema 4.2.5, se sigue que

$$\varphi'_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{\partial P_{a,h,\gamma}}{\partial t_1} & \frac{\partial P_{a,h,\gamma}}{\partial t_2} & \frac{\partial P_{a,h,\gamma}}{\partial t_3} & \cdots & \frac{\partial P_{a,h,\gamma}}{\partial t_s} & \cdots & \frac{\partial P_{a,h,\gamma}}{\partial t_n} & \frac{\partial P_{a,h,\gamma}}{\partial t_{n+1}} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

y, por tanto, desarrollando  $\det \varphi'_\gamma$  por la última fila, obtenemos que, usando la notación abreviada  $P = P_{a,h,\gamma}$ ,

$$\begin{aligned} \xi(t_1, \dots, t_{n+1}) &:= \det \varphi'_\gamma(t_1, \dots, t_{n+1}) \\ &= (-1)^{n+1+s} \frac{\partial P}{\partial t_s}(t_1, \dots, t_{n+1}) \cdot (-1)^{n-s} + \frac{\partial P}{\partial t_{n+1}}(t_1, \dots, t_{n+1}) \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial t_{n+1}} - \frac{\partial P}{\partial t_s} \right)(t_1, \dots, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Si evaluamos el polinomio  $\xi$  en el punto  $(0, 0, \dots, 0, t_s, 0, \dots, t_{n+1})$  y usamos la segunda igualdad del Lema 4.2.5, entonces tenemos que

$$\det \varphi'_\gamma(0, 0, \dots, 0, t_s, 0, \dots, t_{n+1}) = - \sum_{k=1}^N k A_k (t_s + t_{n+1}) t_s^{k-1} \neq 0,$$

es un polinomio algebraico ordinario no nulo en las variables  $t_1, \dots, t_{n+1}$ . Por tanto, la variedad algebraica asociada,

$$Z(\det \varphi'_\gamma) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \det \varphi'_\gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 0\}$$

es un subconjunto cerrado propio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  con interior vacío. Por tanto,  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \setminus Z(\det \varphi'_\gamma)$  es un abierto no acotado y, gracias al Teorema de la aplicación abierta para funciones diferenciables en dimensión finita,  $\varphi_\gamma(\Omega)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que está contenido en  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^{n+1}}$ , que es lo que queríamos probar. La parte de no acotación de  $\varphi_\gamma(\Omega)$  se sigue directamente de la segunda igualdad del Lema 4.2.5.  $\square$

# Capítulo 5

## Teorema de Montel $p$ -ádico y funciones uniformemente localmente polinómicas

En este capítulo demostramos una versión de los Teoremas de Jacobi y de Montel cuando las funciones que estamos considerando están definidas sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}_p$  de los números  $p$ -ádicos. Concretamente, demostramos que si

$$\Delta_{h_0}^{m+1} f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{Q}_p,$$

y  $|h_0|_p = p^{-N_0}$  entonces, para todo  $x_0 \in \mathbb{Q}_p$ , la restricción de  $f$  sobre el conjunto  $x_0 + p^{N_0}\mathbb{Z}_p$  coincide con un polinomio ordinario  $p_{x_0}(x) = a_0(x_0) + a_1(x_0)x + \cdots + a_m(x_0)x^m$ .

Motivados por este resultado, que mejora sustancialmente otro anterior de Almira [2], calculamos la solución general de la ecuación funcional con restricciones dada por

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0 \quad (x \in X \text{ y } h \in B_X(r) = \{x \in X : \|x\| \leq r\}), \quad (5.1)$$

cuando  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X$  es un espacio normado ultramétrico sobre un cuerpo valuado no Arquimediano de característica cero  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  (de modo que  $\mathbb{K}$  contiene una copia isomorfa de  $\mathbb{Q}$ ), y el conjunto  $Y$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$ . Por motivos evidentes, llamamos a estas funciones *uniformemente localmente polinómicas*.

La definición y las propiedades básicas del cuerpo  $\mathbb{Q}_p$  y los espacios normados ultramétricos definidos sobre cuerpos valuados no Arquimedianos se pueden consultar, por ejemplo, en [28], [50] y [57]. En todo caso, nos gustaría destacar que el teorema principal que motiva la construcción del Análisis  $p$ -ádico, el Teorema de Ostrowski de 1917 [49], en el que se clasifican los posibles “valores absolutos” que existen sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}$ , es esencialmente un resultado de ecuaciones funcionales y, como tal, puede consultarse, por ejemplo, en el libro de Aczel y Dhombres [1, pág. 158]. Además, si  $X$  es un espacio vectorial normado ultramétrico sobre el cuerpo valuado no-Arquimediano  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  y los vectores  $x, y \in X$  satisfacen  $\|x\| > \|y\|$ , entonces  $\|x + y\| = \|x\|$  (ver, e.g., [50, página 22]).

## 5.1. Resultados principales

**TEOREMA 5.1.1.** *Sea  $Y$  un espacio topológico que contiene infinitos puntos, y sea  $N \in \mathbb{Z}$ . Entonces existen funciones continuas  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow Y$  tales que*

$$\Delta_h f(x) = 0 \Leftrightarrow h \in p^N \mathbb{Z}_p.$$

*Estas funciones son, obviamente, no constantes.*

**Demostración.** Sabemos que  $p^N \mathbb{Z}_p$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{Q}_p$ . Además, el grupo cociente  $\mathbb{Q}_p/p^N \mathbb{Z}_p$  es isomorfo al conocido grupo de Prüfer  $C_{p(\infty)} = \bigcup_{k=0}^{\infty} C_{p^k}$ , donde  $C_{p^k}$  denota el grupo cíclico de orden  $p^k$ . En particular, existe un conjunto numerable infinito  $S_N \subset \mathbb{Q}_p$  tal que  $\{s + p^N \mathbb{Z}_p\}_{s \in S_N}$  define una partición de  $\mathbb{Q}_p$  en subconjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados. Si  $\lambda : S_N \rightarrow Y$  es cualquier aplicación inyectiva, la función  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow Y$  definida por  $f(x) = \lambda(s)$  si y sólo si  $x \in s + p^N \mathbb{Z}_p$ ,  $s \in S_N$ , satisface todos los requisitos del teorema.  $\square$

**LEMA 5.1.2.** *Sea  $(Y, d)$  un espacio métrico. Si  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow Y$  es continua y  $h \in \mathfrak{P}_0(f)$ ,  $|h|_p = p^{-N}$ , entonces  $p^N \mathbb{Z}_p \subseteq \mathfrak{P}_0(f)$ . Como consecuencia de esto, se tiene que  $\mathfrak{P}_0(f)$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{Q}_p$  que es simultáneamente abierto y cerrado.*

**Demostración.** La continuidad de  $f$  implica que  $\mathfrak{P}_0(f)$  es un conjunto cerrado. En efecto, supongamos que  $\{h_k\} \subset \mathfrak{P}_0(f)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = h$ . Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(f(x+h), f(x)) \leq d(f(x+h), f(x+h_k)) + d(f(x+h_k), f(x)) \\ &= d(f(x+h), f(x+h_k)) \rightarrow 0 \quad (\text{para } k \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

Por tanto,  $f(x+h) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{Q}_p$ , y  $h \in \mathfrak{P}_0(f)$ .

Tomemos  $h \in \mathfrak{P}_0(f)$ ,  $|h|_p = p^{-N}$ . Entonces  $\overline{\{kh\}_{k=1}^{\infty}}^{\mathbb{Q}_p} = p^N \mathbb{Z}_p \subset \mathfrak{P}_0(f)$ . Esto finaliza la demostración.  $\square$

**COROLARIO 5.1.3** (Versión p-ádica del Teorema de Jacobi). *Sea  $(Y, d)$  un espacio métrico. Si  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow Y$  es continua y no constante, entonces  $\mathfrak{P}_0(f) = \{0\}$  o  $\mathfrak{P}_0(f) = p^N \mathbb{Z}_p$  para algún  $N \in \mathbb{Z}$ . En particular, la función continua  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow Y$  es una constante si y sólo si posee una sucesión no acotada de periodos.*

**Demostración.** Se sabe -y es fácil de probar- que todo subgrupo aditivo propio y cerrado de  $\mathbb{Q}_p$  es de la forma  $p^N \mathbb{Z}_p$  para cierto  $N \in \mathbb{Z}$  (ver, e.g., [58, pág. 283, Proposición 52.3]).  $\square$

**TEOREMA 5.1.4** (Versión p-ádica del Teorema de Montel). *Sea  $(\mathbb{K}, |\cdot|_{\mathbb{K}})$  un cuerpo valuado que contiene al cuerpo  $\mathbb{Q}_p$  y tal que la inclusión  $\mathbb{Q}_p \hookrightarrow \mathbb{K}$  es continua. Supongamos que  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{K}$  es una función continua y definamos, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , el conjunto*

$$\mathfrak{P}_m(f) = \{h \in \mathbb{Q}_p : \Delta_h^{m+1} f = 0\}.$$

*Entonces  $\mathfrak{P}_m(f) = \{0\}$ , o  $\mathfrak{P}_m(f) = \mathbb{Q}_p$ , o bien  $\mathfrak{P}_m(f) = p^N \mathbb{Z}_p$  para cierto  $N \in \mathbb{Z}$ , y todos estos casos se producen efectivamente para diferentes ejemplos de funciones  $f$ . Además,*

para cada  $a \in \mathbb{Q}_p$  existen constantes  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$  tales que  $f(x) = a_0 + \dots + a_m x^m$  para todo  $x \in a + \mathfrak{P}_m(f)$ . En particular,  $f$  es un polinomio de grado  $\leq m$  si y sólo si  $\mathfrak{P}_m(f)$  contiene una sucesión no acotada.

**Demostración.** Supongamos que  $\mathfrak{P}_m(f) \neq \{0\}$ . Sea  $h_0 \in \mathfrak{P}_m(f)$ ,  $h_0 \neq 0$ . Entonces  $\Delta_{h_0}^{m+1} f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{Q}_p$ . Sea  $x_0 \in \mathbb{Q}_p$  y denotemos por  $p_0(t) \in \mathbb{K}[t]$  al polinomio de grado  $\leq m$  que satisface las condiciones de interpolación  $f(x_0 + kh_0) = p_0(x_0 + kh_0)$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Este polinomio existe y es único gracias a la fórmula de interpolación de Lagrange, que es válida en cualquier cuerpo. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_{h_0}^{m+1} f(x_0) = \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} (-1)^{m+1-k} f(x_0 + kh_0) + f(x_0 + (m+1)h_0) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} (-1)^{m+1-k} p_0(x_0 + kh_0) + f(x_0 + (m+1)h_0) \\ &= -p_0(x_0 + (m+1)h_0) + f(x_0 + (m+1)h_0), \end{aligned}$$

pues  $0 = \Delta_{h_0}^{m+1} p(x_0) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^{m+1-k} p_0(x_0 + kh_0)$ . Se sigue que

$$f(x_0 + (m+1)h_0) = p_0(x_0 + (m+1)h_0).$$

En particular,  $p_0 = q$ , donde  $q$  denota el polinomio de grado  $\leq m$  que interpola a  $f$  en los nodos  $\{x_0 + kh_0\}_{k=1}^{m+1}$ . Este argumento podemos repetirlo indefinidamente, para demostrar que  $p_0$  interpola la función  $f$  en los nodos que pertenecen al conjunto  $x_0 + h_0\mathbb{N}$ . Por otra parte, si  $|h_0|_p = p^{-N}$ , entonces  $h_0\mathbb{N}$  es un subconjunto denso de  $p^N\mathbb{Z}_p$ . Por tanto, la continuidad de  $f$  implica que  $f|_{x_0 + p^N\mathbb{Z}_p} = (p_0)|_{x_0 + p^N\mathbb{Z}_p}$ , lo cual demuestra que las restricciones de  $f$  sobre los conjuntos de la forma  $x_0 + p^N\mathbb{Z}_p$  son siempre polinomios de grado  $\leq m$ .

Por otra parte, la descripción del grupo cociente  $\mathbb{Q}_p/p^N\mathbb{Z}_p$  como grupo de Prufer, nos garantiza que existe un conjunto infinito numerable  $S_N \subset \mathbb{Q}_p$  tal que  $\{s + p^N\mathbb{Z}_p\}_{s \in S_N}$  es una partición de  $\mathbb{Q}_p$  en conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados. Por tanto, existe una familia numerable de polinomios  $\{p_s(t)\}_{s \in S_N} \subset \mathbb{K}[t]$  tales que  $\deg p_s \leq m$  para todo  $s \in S_N$  y  $f(x) = p_s(x)$  si y sólo si  $x \in s + p^N\mathbb{Z}_p$ ,  $s \in S_N$ .

Sea  $h \in p^N\mathbb{Z}_p$ . Queremos demostrar que  $h \in \mathfrak{P}_m(f)$ . Ahora bien, dado  $x \in \mathbb{Q}_p$ , existe  $s \in S_N$  tal que  $x + p^N\mathbb{Z}_p = s + p^N\mathbb{Z}_p$ . En particular,  $f|_{\{x, x+h, x+2h, \dots, x+mh, x+(m+1)h\}} = (p_s)|_{\{x, x+h, x+2h, \dots, x+mh, x+(m+1)h\}}$ , de modo que  $\Delta_h^{m+1} f(x) = \Delta_h^{m+1} p_s(x) = 0$ , lo cual demuestra que  $p^N\mathbb{Z}_p \subseteq \mathfrak{P}_m(f)$ .

Podemos resumir los argumentos anteriores con la siguiente afirmación: Si  $h_0 \in \mathfrak{P}_m(f)$  y  $|h_0|_p = p^{-N}$ , entonces  $p^N\mathbb{Z}_p \subseteq \mathfrak{P}_m(f)$  y

$$f(x) = p_s(x) \Leftrightarrow x \in s + p^N\mathbb{Z}_p \text{ y } s \in S_N, \quad (5.2)$$

donde  $\{p_s(t)\}_{s \in S_N}$  es una familia de polinomios  $p_s \in \mathbb{K}[t]$  que satisfacen  $\deg p_s \leq m$  para todo  $s \in S_N$ , y  $\{s + p^N\mathbb{Z}_p\}_{s \in S_N}$  es una partición de  $\mathbb{Q}_p$ . Además, para toda función  $f$  que satisface (5.2), tenemos que  $p^N\mathbb{Z}_p \subseteq \mathfrak{P}_m(f)$ .

De este modo, queda claro que sólo existen los siguientes dos casos a considerar:

**Caso 1:**  $\inf\{N \in \mathbb{Z} : p^N \mathbb{Z}_p \subseteq \mathfrak{P}_m(f)\} = -\infty$ .

En este caso  $\mathfrak{P}_m(f) = \mathbb{Q}_p$  y  $f$  es un polinomio de grado  $\leq m$ .

**Caso 2:**  $\inf\{N \in \mathbb{Z} : p^N \mathbb{Z}_p \subseteq \mathfrak{P}_m(f)\} = N_0$ .

En este caso,  $\mathfrak{P}_m(f) = p^{N_0} \mathbb{Z}_p$  y  $f$  satisface (5.2) con  $N = N_0 \in \mathbb{Z}$ .

Esto concluye la demostración.  $\square$

**DEFINICIÓN 3.** Dada la función continua  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow K$ , decimos que  $f$  es localmente un polinomio algebraico de grado  $\leq m$  si para cada  $x_0 \in \mathbb{Q}_p$  existen un radio positivo  $r > 0$  y constantes  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$  tales que  $f(x) = a_0 + \dots + a_m x^m$  para todo  $x \in x_0 + B_{\mathbb{Q}_p}(r)$ . Decimos que  $f$  es uniformemente localmente un polinomio algebraico de grado  $\leq m$  si, además, el radio  $r > 0$  se puede tomar igual para todos los puntos  $x_0 \in \mathbb{Q}_p$ .

**COROLARIO 5.1.5.** Si  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow K$  es continua, entonces  $f$  es uniformemente localmente un polinomio algebraico de grado  $\leq m$  si y sólo si  $\mathfrak{P}_m(f) \neq \{0\}$ . Existen funciones  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow K$  que son localmente polinomios algebraicos de grado  $\leq m$  tales que  $\mathfrak{P}_m(f) = \{0\}$ .

**Demostración.** La primera afirmación es consecuencia inmediata del Teorema 5.1.4. Para demostrar que existen funciones localmente polinómicas que no son uniformemente localmente polinómicas, lo mejor es proporcionar un ejemplo. Para construirlo, definimos la función  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} p^n x^m & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ y } x \in p^{-n} + p^n \mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} (p^{-n} + p^n \mathbb{Z}_p) \end{cases},$$

Evidentemente,  $f(x)$  es localmente un polinomio algebraico de grado  $\leq m$ . Por otra parte, si  $N \geq 1$  es un número natural,  $h \in \mathbb{Q}_p$ , y  $|h| = p^{-N}$ , entonces

$$p^{-N(m+1)} + kh \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} (p^{-n} + p^n \mathbb{Z}_p), \quad k = 1, 2, \dots, m+1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta_h^{m+1} f(p^{-N(m+1)}) &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^{m+1-k} f(p^{-N(m+1)} + kh) \\ &= (-1)^{m+1} f(p^{-N(m+1)}) = p^{N(m+1)} p^{-Nm(m+1)} \neq 0 \end{aligned}$$

y  $\mathfrak{P}_m(f) = \{0\}$ .  $\square$

## 5.2. Caracterización de funciones uniformemente localmente polinómicas

Los resultados de la sección anterior, y, en particular, el Teorema de Montel  $p$ -ádico y el Corolario 5.1.5, nos motivan a estudiar, para funciones  $f : X \rightarrow Y$  (donde  $X$  es un



espacio normado ultramétrico sobre un cuerpo valuado no Arquimediano de característica cero,  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ , e  $Y$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}$ , la ecuación funcional con restricciones

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0 \quad (x \in X, h \in B_X(r) = \{x : \|x\| \leq r\}). \quad (5.3)$$

**DEFINICIÓN 4.** Decimos que  $f : X \rightarrow Y$  es una función uniformemente localmente polinómica si es una solución de la ecuación funcional (5.3) para algún valor  $r > 0$ .

**TEOREMA 5.2.1** (Funciones uniformemente localmente polinómicas). Sea  $f$  una solución de la ecuación (5.3) y sea

$$\phi(r, m) = r \left( \prod_{k=2}^{m+1} \max\{|1/t| : t = 1, 2, \dots, k\} \right)^{-1}. \quad (5.4)$$

Entonces, para todo  $x_0 \in X$  existen una constante  $A_{0, x_0}$  y aplicaciones  $k$ -aditivas simétricas

$$A^{k, x_0} : B_X(\phi(r, m)) \times \dots^{(k \text{ veces})} \times B_X(\phi(r, m)) \rightarrow Y, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

tales que

$$f(x_0 + z) = A_{0, x_0} + \sum_{k=1}^m A_{k, x_0}(z) \quad \text{para todo } z \in B_X(\phi(r, m));$$

donde  $A_{k, x_0}(z) = A^{k, x_0}(z, z, \dots, z)$  es la diagonalización de  $A^{k, x_0}(z_1, \dots, z_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

**LEMA 5.2.2.** Supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  satisface (5.3), y sea  $\phi(r, m)$  la constante definida en la ecuación (5.4). Entonces existen una constante  $A_0$  y aplicaciones  $k$ -aditivas simétricas

$$A^k : B_X(\phi(r, m)) \times \dots^{(k \text{ veces})} \times B_X(\phi(r, m)) \rightarrow Y, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

tales que

$$f(z) = A_0 + \sum_{k=1}^m A_k(z) \quad \text{para todo } z \in B_X(\phi(r, m));$$

donde  $A_k(z) = A^k(z, z, \dots, z)$  es la diagonalización de  $A^k(z_1, \dots, z_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

**Demostración.** Supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  satisface (5.3), y consideremos la función  $A^m(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \Delta_{x_1 x_2 \dots x_m} f(0)$ . Entonces  $A^m$  es simétrica, pues los operadores  $\Delta_{x_i}$ ,  $\Delta_{x_j}$  conmutan. Además, la identidad  $\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y + \Delta_{xy}$  implica que

$$\begin{aligned} & A^m(x_1, \dots, x_{k-1}, x+y, x_{k+1}, \dots, x_m) \\ & - A^m(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_m) - A^m(x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_m) \\ & = \frac{1}{m!} (\Delta_{x_1 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_m} (\Delta_{x+y} - \Delta_x - \Delta_y) f(0)) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m!} (\Delta_{x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_m x y} f(0)).$$

Si utilizamos el Teorema de Djoković con el operador  $\Delta_{z_1 z_2 \cdots z_{m+1}}$ , concluimos que, si

$$z_1, \dots, z_{m+1} \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|),$$

entonces

$$\|\alpha_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m+1})}(z_1, \dots, z_{m+1})\| = \|(-1) \sum_{t=1}^{m+1} \frac{\epsilon_t}{t} z_t\| \leq \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t| \max_{1 \leq t \leq m+1} \|z_t\| \leq r,$$

de modo que  $\Delta_{z_1 z_2 \cdots z_{m+1}} f(x) = 0$  para todo  $x \in X$ . Se sigue que  $A^m$  es una aplicación  $m$ -aditiva en  $B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|)$  y, en consecuencia, también lo es en todos sus subgrupos aditivos. En particular, es  $m$ -aditiva en las bolas  $B_X(\rho)$  para todo  $\rho \leq r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|$ .

Definamos la función

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) - A_m(x) & \text{si } x \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|) \\ 0 & \text{si } x \notin B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|) \end{cases},$$

donde  $A_m(x) = A^m(x, x, \dots, x)$  es la diagonalización de  $A^m$ , y calculemos  $\Delta_h^m f_1(x)$  para  $x \in X$  y  $h \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|)$ . Dividimos estos cálculos en dos casos:

Caso 1: Suponemos que  $x \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|)$ .

Evidentemente,  $x + kh \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|)$  para todo  $h \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|)$  y todo  $k \in \mathbb{N}$ , de modo que  $\Delta_h^m f_1(x) = \Delta_h^m f(x) - \Delta_h^m A_m(x)$ . Calculamos separadamente cada uno de los sumandos del segundo miembro de esta identidad. Evidentemente,

$$0 = \Delta_{hh \cdots hx} f(0) = \Delta_h^m \Delta_x f(0) = \Delta_h^m f(x) - \Delta_h^m f(0),$$

pues  $x, h \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|)$ . Esto significa que

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h^m f(0) = m! A^m(h, \dots, h).$$

Por otra parte, un cálculo directo demuestra que  $\Delta_h^m A_m(x) = m! A^m(h, \dots, h)$ , y, por tanto,

$$\Delta_h^m f_1(x) = 0 \text{ para todo } x, h \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|).$$

Caso 2: Suponemos que  $x \notin B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|)$ .

Evidentemente,  $\|x\| > \|h\| \geq \|kh\|$  para todo  $h \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|)$  y todo  $k \in \mathbb{N}$ , de modo que  $\|x + kh\| = \|x\|$  y  $\{x + kh\}_{k=0}^m \subset X \setminus B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|)$ . Por tanto,  $\Delta_h^m f_1(x) = 0$  también en este caso.

Así pues, hemos probado que

$$f(x) = f_1(x) + A_m(x) \text{ para todo } x \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|),$$

y

$$\Delta_h^m f_1(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in X \text{ y todo } h \in B_X(r / \max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t|).$$

Una repetición de los mismos argumentos demuestra que  $f_1(x)$  admite una descomposición del tipo  $f_1(x) = f_2(x) + A_{m-1}(x)$  en la bola  $B_X(\frac{r}{\max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t| \max_{1 \leq t \leq m} |1/t|})$ , donde  $A_{m-1}$  es la diagonalización de una función  $(m-1)$ -aditiva y simétrica,

$$A^{m-1} : B_X(\frac{r}{\max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t| \max_{1 \leq t \leq m} |1/t|})^{m-1} \rightarrow Y,$$

y  $f_2$  es una función que satisface

$$\Delta_h^m f_2(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in X \text{ y todo } h \in B_X(\frac{r}{\max_{1 \leq t \leq m+1} |1/t| \max_{1 \leq t \leq m} |1/t|}).$$

La reiteración de este proceso nos conduce a una descomposición del tipo

$$f(x) = f_m(x) + A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_m(x), \quad \text{para todo } x \in B_X(\phi(r, m)),$$

con  $A_k(z) = A^k(z, z, \dots, z)$  la diagonalización de una función  $k$ -aditiva simétrica  $A^k : B_X(\phi(r, m)) \times \cdots \times B_X(\phi(r, m)) \rightarrow Y$ , para  $k = 1, 2, \dots, m$ , y  $\Delta_h^1 f_m(x) = 0$  para todo  $x \in X$  y todo  $h \in B_X(\phi(r, m))$ . En particular, esta última fórmula implica que, si  $x \in B_X(\phi(r, m))$ , entonces  $f_m(x) = f_m(0) = A_0$  es una constante.  $\square$

**Demostración del Teorema 5.2.1.**  Definamos, para  $x_0 \in X$ , la función  $g(x) = f(x_0 + x)$ . Entonces  $g = \tau_{x_0}(f)$ , donde  $\tau_{x_0}(f)(x) = f(x_0 + x)$  es el operador de traslación. Es evidente que los operadores  $\tau_{x_0}$  y  $\Delta_h$  conmutan, de modo que

$$\Delta_h^{m+1} g(x) = \Delta_h^{m+1} \tau_{x_0} f(x) = \tau_{x_0} \Delta_h^{m+1} f(x) = 0 \quad (x \in X, h \in B_X(r) = \{x : \|x\| \leq r\}).$$

Así pues, podemos usar el Lema 5.2.2 con  $g$  para concluir que existen una constante  $A_{0, x_0}$  y funciones  $k$ -aditivas simétricas  $A^{k, x_0} : B_X(\phi(r, m)) \times \cdots \times B_X(\phi(r, m)) \rightarrow Y$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , tales que

$$f(x_0 + z) = A_{0, x_0} + \sum_{k=1}^m A_{k, x_0}(z) \quad \text{para todo } z \in B_X(r);$$

donde  $A_{k, x_0}(z) = A^{k, x_0}(z, z, \dots, z)$  es la diagonalización de  $A^{k, x_0}(z_1, \dots, z_k)$ , para  $k = 1, \dots, m$ .  $\square$



## Las ecuaciones de Kakutani-Nagumo-Walsh, Haruki y Fréchet en varias variables

En este capítulo vamos a utilizar las propiedades de los espacios de funciones  $f(x)$  que son invariantes por traslaciones y por otras transformaciones lineales elementales de la variable  $x$ , como las transformaciones afines, para abordar el estudio de algunas ecuaciones funcionales clásicas. En realidad, ya hemos usado, en el Capítulo 4, los espacios invariantes por traslaciones para demostrar el Teorema de Montel en varias variables, tanto para funciones de varias variables reales como distribuciones y, en el caso discreto, funciones definidas sobre  $\mathbb{Z}^d$ . Ahora queremos utilizar este tipo de ideas, no sólo para la ecuación funcional de Fréchet sino también en conexión con otras ecuaciones funcionales clásicas. La idea principal que domina este estudio es que, para ciertas ecuaciones funcionales, se puede probar que el conjunto de sus soluciones continuas forma un espacio vectorial invariante frente a cierto tipo de transformaciones lineales de la variable, y dichos espacios han sido previamente caracterizados. Concretamente, usamos que los conjuntos de soluciones continuas de varias ecuaciones funcionales clásicas son subespacios vectoriales cerrados de  $C(\mathbb{C}^d, \mathbb{C})$  que son invariantes por las “transformaciones afines”  $T_{a,b}(f)(z) = f(az+b)$ , o subespacios vectoriales cerrados de  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  que son invariantes por traslaciones y dilataciones. Estos espacios han sido clasificados recientemente ([64], [52]), por lo que podemos utilizar esta información para obtener una caracterización directa de las soluciones continuas de estas ecuaciones funcionales. La herramienta principal para nuestra investigación consiste, pues, en utilizar los siguientes teoremas:

**TEOREMA 6.0.3** (Sternfeld y Weit [64]). *Supongamos que  $V$  es un subespacio cerrado de  $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  y  $T_{a,b}(V) \subseteq V$  para todos los valores  $a, b \in \mathbb{C}$ , donde  $T_{a,b} : C(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  está definida por  $T_{a,b}(f)(z) = f(az + b)$ . Entonces  $V = \overline{\text{span}_{\mathbb{C}} \left( \bigcup_{k=1}^r A_{[(n_k, m_k)]} \right)}$  para cierto conjunto finito de puntos  $\{(n_k, m_k)\}_{k=1}^r \subseteq (\widehat{\mathbb{N}})^2$ , donde  $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $[(n, m)] = \{(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathbb{N}}^2 : 0 \leq \alpha \leq n \text{ y } 0 \leq \beta \leq m\}$  (aquí,  $\alpha \leq +\infty$  significa que  $\alpha \in \mathbb{N}$ ) y, dado*

$J \subseteq \mathbb{N}^2$ ,  $A_J$  denota el espacio  $A_J = \overline{\text{span}_{\mathbb{C}}\{z^n \bar{z}^m : (n, m) \in J\}}$ .

**TEOREMA 6.0.4** (Pinkus [52]). *Supongamos que  $V$  es un subespacio cerrado del espacio vectorial  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  y  $S_{a,b}(V) \subseteq V$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}^d$ , donde  $S_{a,b} : C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  está definida como  $S_{a,b}(f)(x) = f(a \cdot x + b)$ . Entonces*

$$V = \overline{\text{span}_{\mathbb{R}} \left( \bigcup_{k=1}^r B_{[n_k]} \right)}$$

para cierto conjunto finito de puntos  $\{n_k = (n_{k,1}, \dots, n_{k,d})\}_{k=1}^r \subseteq (\widehat{\mathbb{N}})^d$ , donde  $[n] = \{\alpha \in \mathbb{N}^d : \alpha \leq n\}$  y, dado  $J \subseteq \mathbb{N}^d$ , se define  $B_J = \overline{\text{span}_{\mathbb{R}}\{x^n : n \in J\}}$ .

**NOTA 6.0.5.** *En el Teorema 6.0.4 hemos utilizado la siguiente notación estándar, la cual mantendremos a lo largo de este capítulo: Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $a = (a_1, \dots, a_d)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_d)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ , entonces  $a \cdot x = (a_1 x_1, \dots, a_d x_d)$ ,  $x + b = (x_1 + b_1, \dots, x_d + b_d)$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$  y  $|\alpha| = \sum_{k=1}^d \alpha_k$ . Además,  $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  y, si  $n = (n_1, \dots, n_d)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_d) \in \widehat{\mathbb{N}}^d$ , entonces  $n \leq m$  significa que  $n_1 \leq m_1$ ,  $n_2 \leq m_2$ ,  $\dots$ ,  $n_d \leq m_d$ . Por último,  $\Pi_{m,tot}^d$  denota el espacio de los polinomios ordinarios con coeficientes reales en  $d$  variables reales de grado total  $\leq m$  (cuando  $d = 1$  escribimos  $\Pi_m$  en vez de  $\Pi_{m,tot}^1$ ).*

En la sección 1 estudiamos la ecuación del valor medio de Kakutani-Nagumo-Walsh (ver [31], [32], [36], [70]) y una variante de esta ecuación que fue introducida por Haruki en [32]. En la sección 2 proporcionamos una nueva demostración del Teorema clásico de Fréchet [23], para el caso de funciones continuas reales de varias variables reales. Es importante observar que las demostraciones de los Teoremas 6.0.3 y 6.0.4 son de naturaleza elemental (es decir, no se usan resultados técnicos de análisis complejo o teoría de la medida), por lo que las demostraciones de los resultados de este capítulo también son elementales.

## 6.1. Soluciones continuas de las ecuaciones de Kakutani-Nagumo-Walsh y de Haruki

Denotemos por  $\theta$  a cualquiera de las raíces primitivas  $n$ -ésimas de la unidad, y sea  $\eta$  una raíz primitiva  $2N$ -ésima de la unidad. En [32], S. Haruki estudió las soluciones de las siguientes ecuaciones funcionales:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x + \theta^k y) = f(x) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{C} \text{ (Kakutani-Nagumo-Walsh)} \quad (6.1)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} (|f(x + \theta^k y)|^2 - |f(x)|^2) = \sum_{k=0}^{N-1} |f(x + \theta^k y) - f(x)|^2 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{C} \text{ (Nagumo)} \quad (6.2)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x + \eta^{2k}y) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x + \eta^{2k+1}y) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{C} \text{ (Haruki)} \quad (6.3)$$

Concretamente, demostró que todas estas ecuaciones, cuando se consideran sobre el espacio de las funciones enteras (i.e., cuando se impone que  $f \in H(\mathbb{C})$ ), son equivalentes, en el sentido de que comparten el mismo espacio de soluciones: los polinomios algebraicos complejos  $p(z)$  de grado  $\leq N - 1$ . Para demostrar su teorema, Haruki utilizó el Teorema de la aplicación abierta para funciones holomorfas. En esta sección vamos a caracterizar las soluciones continuas de las ecuaciones (6.1) y (6.3) -que ya no son equivalente, en este contexto. La herramienta principal que necesitamos para nuestro estudio es el Teorema de Sternfeld y Weit (i.e., el Teorema 6.0.3).

**TEOREMA 6.1.1.** *Denotemos por  $S_H$  al espacio de las funciones  $f \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  que son solución de la ecuación (6.3). Entonces*

$$S_H = \left\{ f(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} z^i \bar{z}^j : a_{i,j} \in \mathbb{C} \text{ para todo } 0 \leq i, j \leq N - 1 \right\}.$$

**Demostración.** Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\eta^2 = \theta$ . Entonces la ecuación (6.3) se puede escribir como

$$H_y(f)(x) = H_{\eta y}(f)(x) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{C}, \quad (6.4)$$

donde  $H_y(f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x + \theta^k y)$ .

Queremos identificar el conjunto

$$S_H = \{ f \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C}) : H_y(f)(x) = H_{\eta y}(f)(x) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{C} \}.$$

La observación fundamental, en relación a este problema, es que  $S_H$  es un subespacio cerrado de  $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  que es invariante por los operadores  $T_{a,b}$  y, en consecuencia, debe coincidir con alguno de los espacios especificados en el Teorema 6.0.3.

Demostremos, en efecto, que  $S_H$  es un subespacio cerrado y  $T_{a,b}$ -invariante de  $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ . Para verlo, consideremos los operadores  $L_y = H_y - H_{\eta y}$  ( $y \in \mathbb{C}$ ). Entonces, por definición,  $S_H = \bigcap_{y \in \mathbb{C}} \ker(L_y)$ , de modo que  $S_H$  es un subespacio vectorial cerrado de  $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , pues los operadores  $L_y$  son lineales y continuos, para todo  $y$ . Por otra parte, un sencillo cálculo nos muestra que

$$\begin{aligned} H_y(T_{a,b}(f))(x) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T_{a,b}(f)(x + \theta^k y) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(a(x + \theta^k y) + b) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(ax + b + \theta^k(ay)) \\ &= H_{ay}(f)(ax + b) = T_{a,b}(H_{ay}(f))(x) \text{ para todo } x, y, a, b \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Por tanto, si  $f \in S_H$ , entonces

$$H_y(T_{a,b}(f)) = T_{a,b}(H_{ay}(f)) = T_{a,b}(H_{\eta(ay)}(f)) = T_{a,b}(H_{a(\eta y)}(f)) = H_{\eta y}(T_{a,b}(f)),$$

lo que significa que  $T_{a,b}(f) \in S_H$ . Se sigue que  $S_H = \overline{\text{span}_{\mathbb{C}} \left( \bigcup_{k=1}^r A_{[(n_k, m_k)]} \right)}$  para cierto conjunto finito de puntos  $\{(n_k, m_k)\}_{k=1}^r \subseteq (\widehat{\mathbb{N}})^2$ . Como consecuencia de esto, es evidente que si  $z^n \bar{z}^m \in S_H$  entonces  $z^\alpha \bar{z}^\beta \in S_H$  para todo  $(\alpha, \beta)$  tal que  $0 \leq \alpha \leq n$  y  $0 \leq \beta \leq m$ . Comprobemos, pues, qué funciones del tipo  $z^\alpha \bar{z}^\beta$  pertenecen a  $S_H$ .

**Paso 1:**  $z^N, \bar{z}^N \notin S_H$ . Apliquemos el operador  $H_y$  a la función  $f_N(z) = z^N$ . Entonces

$$\begin{aligned} NH_y(f_N)(x) &= \sum_{k=0}^{N-1} (x + \theta^k y)^N \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{t=0}^N \binom{N}{t} x^{N-t} \theta^{kt} y^t \right) \\ &= \sum_{t=0}^N \left( \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N}{t} x^{N-t} \theta^{kt} y^t \right) \\ &= \sum_{t=0}^N \binom{N}{t} x^{N-t} y^t \left( \sum_{k=0}^{N-1} \theta^{kt} \right) \\ &= x^N N + y^N N = N(x^N + y^N), \end{aligned}$$

pues

$$\sum_{k=0}^{N-1} \theta^{kt} = \begin{cases} \frac{(\theta^t)^N - 1}{\theta^t - 1} = 0, & \text{siempre que } t \notin N\mathbb{Z} \\ N, & \text{siempre que } t \in N\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Por tanto, si sustituimos  $y$  por  $\eta y$  en los cálculos anteriores, obtenemos que  $H_{\eta y}(f_N)(x) = x^N + (\eta y)^N = x^N - y^N$ . Esto implica claramente que  $H_y(f_N) \neq H_{\eta y}(f_N)$ , de modo que  $z^N \notin S_H$ . Cálculos similares sirven para probar que  $\bar{z}^N \notin S_H$ .

**Paso 2:**  $z^{N-1} \bar{z}^{N-1} \in S_H$ . En este caso, debemos aplicar  $H_y$  a  $g_N(z) = z^{N-1} \bar{z}^{N-1} = (|z|^2)^{N-1}$ . Del mismo modo que en los cálculos del Paso 1, observamos que

$$\begin{aligned} |x + \theta^k y|^2 &= (x + \theta^k y)(\bar{x} + \theta^{-k} \bar{y}) \\ &= x\bar{x} + x\theta^{-k} \bar{y} + \theta^k y\bar{x} + y\bar{y} \\ &= |x|^2 + |y|^2 + \theta^k y\bar{x} + \theta^{-k} x\bar{y}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} NH_y(g_N)(x) &= \sum_{k=0}^{N-1} (|x + \theta^k y|^2)^{N-1} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (|x|^2 + |y|^2 + \theta^k y\bar{x} + \theta^{-k} x\bar{y})^{N-1} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\substack{a+b+c+d=N-1 \\ a,b,c,d \geq 0}} \binom{N-1}{a,b,c,d} |x|^{2a} |y|^{2b} (\theta^k y\bar{x})^c (\theta^{-k} x\bar{y})^d \end{aligned}$$



$$= \sum_{\substack{a+b+c+d=N-1 \\ a,b,c,d \geq 0}} \left( \binom{N-1}{a,b,c,d} |x|^{2a} |y|^{2b} (y\bar{x})^c (x\bar{y})^d \left( \sum_{k=0}^{N-1} (\theta^{c-d})^k \right) \right),$$

donde

$$\binom{N-1}{a,b,c,d} = \binom{N-1}{a} \binom{N-1-a}{b} \binom{N-1-a-b}{c} \binom{N-1-a-b-c}{d}$$

siempre que  $a+b+c+d=N-1$ . Ahora,  $0 \leq c, d \leq N-1$  implica que  $c-d \in N\mathbb{Z}$  si y sólo si  $c=d$ . Por tanto

$$\sum_{k=0}^{N-1} (\theta^{c-d})^k = \begin{cases} 0, & \text{si } c \neq d \\ N, & \text{si } c = d \end{cases}.$$

Además,  $(y\bar{x})^c (x\bar{y})^c = |x|^{2c} |y|^{2c}$ , de modo que

$$\begin{aligned} & NH_y(g_N)(x) \\ &= N \sum_{\substack{a+b+2c=N-1 \\ a,b,c \geq 0}} \binom{N-1}{a,b,c,c} |x|^{2a} |y|^{2b} |x|^{2c} |y|^{2c} \end{aligned}$$

Si sustituimos  $y$  por  $\eta y$  en los cálculos anteriores, el resultado no sufrirá modificación alguna, pues  $|\eta y|^{2c} = |y|^{2c}$ . Por tanto,  $H_y(g_N) = H_{\eta y}(g_N)$  y  $g_N(z) = z^{N-1} \bar{z}^{N-1}$  pertenece a  $S_H$ .

Si tenemos ahora en consideración la estructura del espacio  $S_H$ , se sigue que

- (a) Todas las funciones del tipo  $f(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} z^i \bar{z}^j$  pertenecen a  $S_H$ , pues  $z^{N-1} \bar{z}^{N-1} \in S_H$  implica que  $A_{[(N-1, N-1)]} \subseteq S_H$ .
- (b) Estos son los únicos elementos de  $S_H$  pues, si  $z^n \bar{z}^m \in S_H$  y  $\max\{n, m\} > N-1$ , entonces  $(0, N) \leq (n, m)$  o  $(N, 0) \leq (n, m)$ , de modo que  $z^N \in S_H$  o  $\bar{z}^N \in S_H$ , y, a la vista de lo demostrado en el Paso 1, ambas cosas son falsas.

Esto finaliza la demostración. □

**COROLARIO 6.1.2.** *Los polinomios complejos  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{N-1} z^{N-1}$  de grado  $\leq N-1$  son las únicas funciones enteras que resuelven la ecuación funcional de Haruki (6.3).*

**COROLARIO 6.1.3.** *Sea  $f \in C(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ . Entonces  $f$  es una solución de (6.3) si y sólo si*

$$f(x+iy) = p(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_{n,m} x^n y^m \in \mathbb{R}[x, y]$$

*es un polinomio algebraico real ordinario de grado  $\leq N-1$  en cada una de sus variables  $x, y$ . (Aquí  $x, y$  denotan variables reales).*

Consideremos ahora las soluciones continuas de (6.1).

**TEOREMA 6.1.4.** Denotemos por  $S_{KNW}$  al espacio de las funciones  $f \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  que resuelven la ecuación (6.1). Entonces

$$S_{KNW} = \{p(z) + q(\bar{z}) : p, q \in \mathbb{C}[z] \text{ y } \deg(p), \deg(q) \leq N - 1\}.$$

Es decir, los elementos de  $S_{KNW}$  son las funciones de la forma

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{N-1}z^{N-1} + b_1\bar{z} + \cdots + b_{N-1}\bar{z}^{N-1},$$

con  $(a_0, \dots, a_{N-1}, b_1, \dots, b_{N-1}) \in \mathbb{C}^{2N-1}$ .

**Demostración.** Evidentemente,  $S_{KNW}$  es un subespacio cerrado, pues

$$S_{KNW} = \bigcap_{y \in \mathbb{C}} \ker(H_y - I),$$

y también es invariante por afinidades, pues, si  $f \in S_{KNW}$ , entonces

$$H_y(T_{a,b}(f)) = T_{a,b}(H_{ay}(f)) = T_{a,b}(f),$$

de modo que  $T_{a,b}(S_{KNW}) \subseteq S_{KNW}$ . Se sigue que  $S_{KNW}$  admite una representación del tipo  $S_H = \overline{\text{span}_{\mathbb{C}} \left( \bigcup_{k=1}^r A_{[(n_k, m_k)]} \right)}$  para cierto conjunto finito de puntos  $\{(n_k, m_k)\}_{k=1}^r \subseteq (\hat{\mathbb{N}})^2$ . Comprobemos ahora, por cálculo directo, qué funciones de la forma  $z^\alpha \bar{z}^\beta$  son elementos de  $S_{KNW}$ .

**Paso 1.**  $z\bar{z} \notin S_{KNW}$ . Tomemos  $g(z) = z\bar{z}$ . Un cálculo directo (que omitimos, pues las cuentas son completamente análogas a las usadas para la demostración del Teorema 6.1.1) demuestra que  $H_y(g)(x) = |x|^2 + |y|^2 \neq g(x)$  y, por tanto,  $g \notin S_{KNW}$ .

**Paso 2.**  $z^N, \bar{z}^N \notin S_{KNW}$ . Ya hemos mostrado que, si  $f_N(z) = z^N$ , entonces  $H_y(f_N)(x) = x^N + y^N \neq x^N$ , de modo que  $z^N \notin S_{KNW}$ . El mismo cálculo, tomando conjugados, demuestra que, si  $g_N(z) = \bar{z}^N$ , entonces  $H_y(g_N)(x) = \bar{x}^N + \bar{y}^N \neq \bar{x}^N$ , y, por tanto,  $\bar{z}^N \notin S_{KNW}$ .

**Paso 3.**  $z^{N-1}, \bar{z}^{N-1} \in S_{KNW}$ . Apliquemos el operador  $H_y$  a la función  $f_{N-1}(z) = z^{N-1}$ . Entonces

$$\begin{aligned} NH_y(f_{N-1})(x) &= \sum_{k=0}^{N-1} (x + \theta^k y)^{N-1} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{t=0}^{N-1} \binom{N-1}{t} x^{N-1-t} \theta^{kt} y^t \right) \\ &= \sum_{t=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{t} x^{N-1-t} \theta^{kt} y^t \right) \\ &= \sum_{t=0}^{N-1} \binom{N-1}{t} x^{N-1-t} y^t \left( \sum_{k=0}^{N-1} \theta^{kt} \right) \end{aligned}$$

$$= Nx^{N-1},$$

y, por tanto,  $H_y(f_{N-1})(x) = x^{N-1}$  y  $z^{N-1} \in S_{KNW}$ . Un cálculo similar demuestra que  $\bar{z}^{N-1} \in S_{KNW}$ .

Se sigue del Paso 1 que, si  $n, m \geq 1$ , entonces  $z^n \bar{z}^m \notin S_{KNW}$  y, como consecuencia de los Pasos 2 y 3, que  $S_{KNW} = A_{[(N-1,0)]} + A_{[(0,N-1)]}$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**COROLARIO 6.1.5.** *Los polinomios complejos  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{N-1}z^{N-1}$  de grado  $\leq N - 1$  son las únicas funciones enteras que resuelven la ecuación funcional de Kakutani-Nagumo-Walsh (6.1).*

**COROLARIO 6.1.6.** *Sea  $f \in C(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ . Entonces  $f$  es una solución de (6.1) si y sólo si  $f(x + iy) = p(x, y)$  es un polinomio armónico de grado  $\leq N - 1$ . (Aquí  $x, y$  denotan variables reales).*

## 6.2. Soluciones continuas de la ecuación funcional de Fréchet en varias variables

En esta sección usamos el Teorema 6.0.4 para calcular las soluciones  $f$  de la ecuación funcional de Fréchet en varias variables,

$$\Delta_h^N f(x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (-1)^{N-k} f(x + kh) = 0 \quad (x, h \in \mathbb{R}^d), \quad (6.5)$$

bajo la hipótesis adicional de que  $f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ . Para nuestros cálculos vamos a utilizar el Teorema de Djoković [21]. Es decir, vamos a usar que toda solución de (6.5) también resuelve la ecuación de paso variable,

$$\Delta_{h_1 h_2 \dots h_N} f(x) = 0 \quad (x, h_1, h_2, \dots, h_N \in \mathbb{R}^d) \quad (6.6)$$

**TEOREMA 6.2.1.** *Sea  $S_F$  el conjunto de las funciones  $f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  que resuelven la ecuación (6.5) (o, equivalentemente, la ecuación (6.6)). Entonces*

$$S_F = \Pi_{N-1, tot}^d.$$

**Demostración.** Demostramos en primer término que  $S_F$  es un subespacio cerrado de  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  que es invariante por las transformaciones del tipo  $S_{a,b}(f)(x) = f(a \cdot x + b)$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}^d$ . Evidentemente, para cada  $h \in \mathbb{R}^d$ ,  $\Delta_h^N : C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  es un operador lineal continuo. En consecuencia,  $S_F = \bigcap_{h \in \mathbb{R}^d} \ker \Delta_h^N$  es un subespacio vectorial cerrado de  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ . Tomemos ahora  $a, b \in \mathbb{R}^d$  y supongamos que  $f \in S_F$ . Entonces, para cada  $h \in \mathbb{R}^d$  se tiene que

$$\Delta_h^N (S_{a,b}(f))(x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (-1)^{N-k} S_{a,b}(f)(x + kh)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (-1)^{N-k} f(a \cdot x + b + k(a \cdot h)) \\
&= \Delta_{a \cdot h}^N(f)(a \cdot x + b) \\
&= S_{a,b}(\Delta_{a \cdot h}^N(f))(x) = 0,
\end{aligned}$$

y, por tanto,  $S_{a,b}(f) \in S_F$  y  $S_{a,b}(S_F) \subseteq S_F$ , que es lo que buscábamos. Se sigue del Teorema 6.0.4 que

$$S_F = \overline{\text{span}_{\mathbb{R}} \left( \bigcup_{k=1}^r B_{[n_k]} \right)}$$

para cierto conjunto de puntos  $\{n_k = (n_{k,1}, \dots, n_{k,d})\}_{k=1}^r \subseteq (\widehat{\mathbb{N}})^d$ .

Un cálculo directo muestra que, si  $f_i(x) = x_i^N$  y  $e_i = (0, 0, \dots, \overbrace{1}^{i\text{-ésima posición}}, \dots, 0)$ , entonces  $\Delta_{e_i}^N(f_i)(x) = N! \neq 0$  y, por tanto,  $f_i \notin S_F$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Se sigue que, si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  satisface  $\max_{1 \leq i \leq d} \alpha_i \geq N$ , entonces  $x^\alpha \notin S_F$  pues, en caso contrario, tendríamos que  $N e_i \leq \alpha$  para algún  $i$ , de modo que  $x_i^N \in S_F$  para este valor  $i$ , lo cual sabemos que es falso. Esto demuestra que todos los elementos de  $S_F$  son polinomios algebraicos ordinarios. Es más,  $S_F \subseteq \text{span}_{\mathbb{R}}\{x^\alpha : \max \alpha_i \leq N - 1\}$ . Nosotros buscamos un resultado más exigente, pues queremos identificar completamente el espacio  $S_F$ . Concretamente, vamos a demostrar que  $S_F = \Pi_{N-1, tot}^d$  es el espacio de los polinomios algebraicos en  $d$  variables con grado total  $\leq N - 1$ . Dividimos la prueba en dos pasos:

**Paso 1:**  $\Pi_{N-1, tot}^d \subseteq S_F$ . Esto es consecuencia directa de que el operador  $\Delta_h$  reduce el grado total de cualquier polinomio en al menos una unidad, pues

$$\begin{aligned}
\Delta_h x^\alpha &= (x+h)^\alpha - x^\alpha = \prod_{i=1}^d (x_i + h_i)^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i} \\
&= \prod_{i=1}^d (x_i^{\alpha_i} + \sum_{t_i=0}^{\alpha_i-1} \binom{\alpha_i}{t_i} h_i^{\alpha_i-t_i} x_i^{t_i}) - \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i} \in \Pi_{|\alpha|-1}^d.
\end{aligned}$$

**Paso 2:**  $S_F \subseteq \Pi_{N-1, tot}^d$ . Para demostrarlo, utilizamos el Teorema de Djoković o, lo que es lo mismo, la equivalencia de las ecuaciones (6.5) y (6.6). Evidentemente, debido a la estructura de  $S_F$ , basta demostrar que si  $|\alpha| \geq N$ , entonces  $x^\alpha \notin S_F$ .

Fijemos  $i \in \{1, \dots, d\}$  y tomemos  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  y  $f_\alpha(x) = x^\alpha$ . Entonces un cálculo sencillo demuestra que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\Delta_{e_i}^k f_\alpha(x) = (\Delta_1^k x_i) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_d^{\alpha_d}.$$

Además, como la composición de los operadores  $\Delta_{e_i}$ ,  $\Delta_{e_j}$  conmuta, tenemos que, si  $|\alpha| \geq N$ , entonces

$$\Delta_{e_1}^{\alpha_1} \Delta_{e_2}^{\alpha_2} \dots \Delta_{e_d}^{\alpha_d} (f_\alpha)(x) = (\Delta_1^{\alpha_1} x_1^{\alpha_1}) (\Delta_1^{\alpha_2} x_2^{\alpha_2}) \dots (\Delta_1^{\alpha_d} x_d^{\alpha_d}) = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d! \neq 0,$$

lo cual implica que  $x^\alpha$  no se anula idénticamente por la acción de los operadores  $\Delta_{h_1 h_2 \dots h_s}$  con  $s = |\alpha| \geq N$ . En particular,  $x^\alpha \notin S_F$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

# Capítulo 7

## La ecuación funcional de Cherruault, Mora y Ziadi

La ecuación funcional

$$f(x) + f(a_1x) + \cdots + f(a_Nx) = 0, \quad (7.1)$$

fue introducida en la literatura en 1999 por Cherruault, Mora y Ziadi, en el caso particular en el que los coeficientes  $a_k$  satisfacen  $a_k = k + 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, N - 1$  [45] y, posteriormente, estudiada por Mora [46] y Mora y Sepulcre [47, 48]. En particular, las ecuaciones  $f(x) + f(2x) = 0$  y  $f(x) + f(2x) + f(3x) = 0$  se usaron en un modelo matemático de ciertos procesos fisico-químicos relacionados con la combustión del hidrógeno en un motor de coche [45, 46] y, posteriormente, la ecuación más general

$$f(x) + f(2x) + \cdots + f(Nx) = 0 \quad (7.2)$$

se estudió desde una perspectiva más teórica [46, 47, 48].

Concretamente, estos autores imponen la existencia de soluciones del tipo  $z^\alpha$ , lo cual conduce a demostrar que existe un estrecho vínculo entre la existencia de este tipo de soluciones, que son soluciones continuas de la ecuación (7.2), y las propiedades de los ceros de las funciones de tipo exponencial  $G_N(z) = 1 + 2^z + \cdots + N^z$ . En particular, Mora y Sepulcre han desarrollado una interesante batería de resultados sobre la distribución de los ceros de las funciones  $G_N(z)$  [45, 46, 47, 48]. Obsérvese que las funciones  $H_N(z) = G_N(-z)$  son las sumas parciales de la función zeta de Riemann  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ , por lo que el estudio de los ceros de  $G_N(z)$  es un problema importante, relacionado con la famosa conjetura de Riemann.

En [46] se demuestra que si  $f(z)$  es una solución de (7.2) y  $f \neq 0$ , entonces  $f(z)$  no es holomorfa en  $z = 0$ . Además, se demuestra que el conjunto de las soluciones de (7.2) que son holomorfas en  $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  es un espacio vectorial de dimensión infinita. Nosotros vamos a estudiar, en este capítulo, la ecuación más general (7.1). En la primera sección, aprovechamos una idea desarrollada recientemente por Popa y Rasa [53], para

demostrar que si  $f(x)$  es una solución de (7.1), con  $0 < a_1 < \dots < a_N$  y  $a_k \neq 1$  para  $k = 1, 2, \dots, N$ , entonces existe un número natural positivo  $m = m(a_1, \dots, a_N)$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , si  $f \in C^{(m)}[0, \delta]$ , entonces  $f|_{[0, \delta]} = 0$  y, si  $f \in C^{(m)}[-\delta, 0]$ , entonces  $f|_{[-\delta, 0]} = 0$ . En particular, si  $f \in C^{(k)}(\mathbb{R})$  es una solución de (7.1) y  $k \geq m(a_1, \dots, a_N)$ , entonces  $f = 0$ . Además, proporcionamos cotas superior e inferior para  $m(a_1, \dots, a_N)$ .

En la segunda sección nos concentramos en el estudio de la ecuación (7.1) sometida a la restricción adicional de que  $x > 0$ .

Mediante un sencillo cambio de variable, transformamos la ecuación (7.1) (con  $x > 0$ ) en la ecuación, mucho más sencilla,

$$g(w) + g(w + b_1) + \dots + g(w + b_N) = 0 \quad (w \in \mathbb{R}) \quad (7.3)$$

y proporcionamos un argumento nuevo, basado en el Teorema de Anselone y Korevaar, para demostrar que el conjunto de las soluciones continuas de ambas ecuaciones forma un espacio vectorial de dimensión infinita. Por último, caracterizamos la existencia de soluciones periódicas para la nueva ecuación (7.3).

## 7.1. Un resultado de regularidad

Consideremos, para  $N \geq 1$ , la ecuación funcional:

$$f(x) + f(a_1x) + \dots + f(a_Nx) = 0,$$

donde  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N$ ,  $a_k \neq 1$  para todo  $k \in \{1, \dots, N\}$ , y  $x$  es una variable real. Además, en todo lo que sigue, imponemos  $a_0 = 1$ .

Lo primero que observamos es que, para nuestro estudio, podemos asumir que  $1 < a_1$  pues, si esto no es así, el sencillo cambio de variables  $y = a_1x$  transforma la ecuación (7.1) en la ecuación

$$f(y) + f(b_1y) + \dots + f(b_Ny) = 0 \quad (y \in (0, \infty)),$$

donde

$$(b_1, b_2, \dots, b_N) = \begin{cases} \left( \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_k}{a_1}, \frac{1}{a_1}, \frac{a_{k+1}}{a_1}, \dots, \frac{a_N}{a_1} \right) & \text{si } a_k < 1 < a_{k+1} \\ \left( \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_N}{a_1}, \frac{1}{a_1} \right) & \text{si } a_N < 1 \end{cases}.$$

Por tanto, en todo lo que sigue imponemos las condiciones  $0 < a_0 = 1 < a_1 < \dots < a_N$ . Además, usamos la notación  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ .

**DEFINICIÓN 5.** Dado  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo de la recta, decimos que la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación (7.1) (o que  $f$  es una solución de (7.1) en  $I$ ) si  $f(x) + f(a_1x) + \dots + f(a_Nx) = 0$  siempre que  $\{x, a_1x, \dots, a_Nx\} \subseteq I$ .

**DEFINICIÓN 6.** Sean  $N \geq 1$  y  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ . Definimos el número natural

$$m(\mathbf{a}) = \min \left\{ m \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{a_k}{a_N} \right)^m < 1 \right\}.$$

Evidentemente  $m(\mathbf{a})$  está bien definido puesto que todas las fracciones que aparecen bajo el signo de sumación,  $(\frac{a_k}{a_N})^m$ , satisfacen  $0 < \frac{a_k}{a_N} < 1$ , y el número de sumandos,  $N$ , se mantiene fijo.

**TEOREMA 7.1.1.** *Sea  $\delta > 0$  un número real positivo. Entonces:*

(a) *Si  $f$  es una solución de (7.1) en  $[0, \delta]$  y  $f \in C^{(m(\mathbf{a}))}[0, \delta]$ , entonces  $f|_{[0, \delta]} = 0$ .*

(b) *Si  $f$  es una solución de (7.1) en  $[-\delta, 0]$  y  $f \in C^{(m(\mathbf{a}))}[-\delta, 0]$ , entonces  $f|_{[-\delta, 0]} = 0$ .*

**Demostración.** Solo demostramos el apartado (a) del teorema, pues el apartado (b) se prueba con el mismo tipo de argumentos. Supongamos que  $f \in C^{(m(\mathbf{a}))}[0, \delta]$  es una solución de (7.1) en  $[0, \delta]$ . Tomemos  $x = h/a_N$ , de modo que la ecuación (7.1) se transforma en la ecuación

$$f(h/a_N) + f(a_1 h/a_N) + \cdots + f(a_{N-1} h/a_N) + f(h) = 0. \quad (7.4)$$

Derivando  $m(\mathbf{a})$  veces en (7.4) y definiendo  $\varphi(h) = f^{(m(\mathbf{a}))}(h)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(h) = & (-1) \left[ \left(\frac{1}{a_N}\right)^{m(\mathbf{a})} \varphi\left(\frac{h}{a_N}\right) + \left(\frac{a_1}{a_N}\right)^{m(\mathbf{a})} \varphi\left(\frac{a_1}{a_N} h\right) \right. \\ & \left. + \cdots + \left(\frac{a_{N-1}}{a_N}\right)^{m(\mathbf{a})} \varphi\left(\frac{a_{N-1}}{a_N} h\right) \right]. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\|\varphi\|_{[0, \delta]} \leq \|\varphi\|_{[0, \delta]} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{a_k}{a_N}\right)^{m(\mathbf{a})},$$

y por tanto  $\|\varphi\|_{[0, \delta]} = 0$  (pues  $\sum_{k=0}^{N-1} (\frac{a_k}{a_N})^{m(\mathbf{a})} < 1$ ). Esto implica que  $f|_{[0, \delta]}$  es un polinomio algebraico ordinario de grado  $\leq m(\mathbf{a}) - 1$ . En particular,  $f$  es analítica real en  $[0, \delta]$ . Así pues, para cada  $m \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\begin{aligned} f^{(m)}(h) = & (-1) \left[ \left(\frac{1}{a_N}\right)^m f^{(m)}\left(\frac{h}{a_N}\right) + \left(\frac{a_1}{a_N}\right)^m f^{(m)}\left(\frac{a_1}{a_N} h\right) \right. \\ & \left. + \cdots + \left(\frac{a_{N-1}}{a_N}\right)^m f^{(m)}\left(\frac{a_{N-1}}{a_N} h\right) \right]. \end{aligned}$$

Tomando  $h = 0$  y despejando, obtenemos

$$f^{(m)}(0) \left[ 1 + \left(\frac{1}{a_N}\right)^m + \left(\frac{a_1}{a_N}\right)^m + \cdots + \left(\frac{a_{N-1}}{a_N}\right)^m \right] = 0.$$

Por tanto  $f^{(m)}(0) = 0$  para todo  $m$ . Esto significa que  $f|_{[0, \delta]} = 0$ . □

**COROLARIO 7.1.2.** *Si  $f \in C^{(k)}(\mathbb{R})$  es una solución de (7.1) y  $k \geq m(\mathbf{a})$ , entonces  $f = 0$ . En particular,  $f = 0$  es la única solución de (7.1) que es de clase infinito en toda la recta real.*

**NOTA 7.1.3.** Es importante observar que, para todo  $N \geq 2$ , la función  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 0$  se puede extender de infinitas formas a una función  $\tilde{f}$  que es solución de (7.2) y, además, satisface que  $\tilde{f} \in C(\mathbb{R}) \cap C^{(\infty)}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  y  $\tilde{f}$  no es la función idénticamente nula.

Para demostrarlo, utilizamos que, si  $N \geq 2$ , la función  $G_N(z) = 1 + 2^z + \dots + N^z$  posee infinitos ceros complejos (ver la demostración de esto, por ejemplo, en [46, Proposición 1]). Consideremos entonces  $\alpha = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$  un cero de  $G_N(z)$  y definamos

$$\tilde{f}_\alpha(x) = \begin{cases} \mathbf{Re}(|x|^\alpha) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces  $\tilde{f}_\alpha$  coincide con la solución idénticamente nula de (7.2) en todo el intervalo  $[0, \infty)$ , y, cuando  $x < 0$  se tiene que

$$\sum_{k=1}^N \tilde{f}_\alpha(kx) = \mathbf{Re} \left( |x|^\alpha \sum_{k=1}^N k^\alpha \right) = 0.$$

Por tanto,  $\tilde{f}_\alpha$  es una solución de (7.2) en  $\mathbb{R}$ . Evidentemente,  $\tilde{f} \in C(\mathbb{R}) \cap C^{(\infty)}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

**NOTA 7.1.4.** El número natural  $m(\mathbf{a})$  que aparece en el Teorema 7.1.1 no es óptimo. Por ejemplo, está claro que, para  $N = 1$  y  $a_1 = 2$ , se tiene que  $m(\mathbf{a}) = 1$ . Ahora bien, supongamos que  $f$  es una solución de la ecuación  $f(x) + f(2x) = 0$  y  $f(h_0) \neq 0$  para algún valor  $h_0 > 0$ . Entonces  $f(\frac{1}{2}h_0) = (-1)f(h_0)$  y, para todo  $k \in \mathbb{N}$  tenemos que  $f(\frac{1}{2^k}h_0) = (-1)^k f(h_0)$ . Esto implica, evidentemente, que  $f(x)$  no puede ser una función continua en  $x = 0$ . Es decir, el valor óptimo es en este caso  $m(\mathbf{a}) = 0$ , y no  $m(\mathbf{a}) = 1$ .

Podemos, en cualquier caso, proporcionar estimaciones razonables para los valores de  $m(\mathbf{a})$ :

**PROPOSICIÓN 7.1.5.**

$$\frac{1}{2} \frac{a_N}{\max_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)} - 1 \leq m(\mathbf{a}) \leq \frac{a_N}{\min_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)}$$

**Demostración.** El resultado se sigue directamente de interpretar la sumatoria

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{a_k}{a_N} \right)^m \left( \frac{a_{k+1}}{a_N} - \frac{a_k}{a_N} \right)$$

como una suma de Riemann inferior para la integral  $\int_0^1 x^m dx$  y la sumatoria

$$\sum_{k=0}^N \left( \frac{a_k}{a_N} \right)^m \left( \frac{a_k}{a_N} - \frac{a_{k-1}}{a_N} \right)$$



como una suma de Riemann superior para la misma integral (aquí imponemos  $a_{-1} = 0$ ). De forma más concreta, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{a_k}{a_N}\right)^m \left(\frac{a_{k+1}}{a_N} - \frac{a_k}{a_N}\right) \leq \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1},$$

y, por tanto, para todo  $m \geq \frac{a_N}{\min_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{a_k}{a_N}\right)^m &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{a_k}{a_N}\right)^m \left(\frac{a_{k+1}}{a_N} - \frac{a_k}{a_N}\right) \frac{a_N}{\min_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)} \\ &\leq \frac{1}{m+1} \frac{a_N}{\min_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)} < 1, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $m(\mathbf{a}) \leq \frac{a_N}{\min_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)}$ .

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \left(\frac{a_k}{a_N}\right)^m &\geq \sum_{k=0}^N \left(\frac{a_k}{a_N}\right)^m \left(\frac{a_k}{a_N} - \frac{a_{k-1}}{a_N}\right) \frac{a_N}{\max_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)} \\ &\geq \left(\int_0^1 x^m dx\right) \frac{a_N}{\max_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)} \\ &= \frac{1}{m+1} \frac{a_N}{\max_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)}, \end{aligned}$$

de modo que, para todo  $m < \frac{1}{2} \frac{a_N}{\max_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)} - 1$ ,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{a_k}{a_N}\right)^m \geq \frac{1}{m+1} \frac{a_N}{\max_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)} - 1 > 1,$$

lo cual implica que  $m(\mathbf{a}) \geq \frac{1}{2} \frac{a_N}{\max_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)} - 1$ .  $\square$

Obsérvese que las mejores acotaciones de  $m(\mathbf{a})$  se obtienen cuando los puntos  $a_k$  están equidistribuidos (i.e., cuando  $a_k = 1 + k(a_1 - 1)$  para todo  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ ) pues es precisamente en este caso cuando la cantidad variable  $\max_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)$  alcanza su valor mínimo y la cantidad  $\min_{0 \leq k < N} (a_{k+1} - a_k)$  alcanza su máximo. Además, ambos valores extremos coinciden con el valor de la separación  $d = a_1 - 1$ . Por tanto, en este caso tendremos las siguientes cotas:

$$\frac{1}{2}N - 1 \leq m((1+d, 1+2d, \dots, 1+Nd)) \leq N,$$

las cuales son además independientes de  $d$ .

## 7.2. Una ecuación funcional asociada a la ecuación de Che-rruault, Mora y Ziadi

Consideremos la ecuación funcional

$$f(x) + f(a_1x) + \cdots + f(a_Nx) = 0 \quad (x \in ]0, \infty[), \quad (7.5)$$

donde  $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_N$  son números reales y nos hemos restringido a estudiar las soluciones definidas en la semirecta  $]0, \infty[$ . Si hacemos el cambio de variable  $x = e^w$  y consideramos la función  $g(w) = f(e^w)$  entonces, el sencillo cálculo  $f(a_kx) = f(a_ke^w) = f(e^{w+\ln a_k}) = g(w + \ln a_k)$ , nos conduce a concluir que la ecuación (7.5) se puede reescribir, de forma equivalente, como

$$g(w) + g(w + b_1) + \cdots + g(w + b_N) = 0 \quad (w \in \mathbb{R}), \quad (7.6)$$

donde  $0 < b_k = \ln a_k < \ln a_{k+1} = b_{k+1}$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ .

**LEMA 7.2.1.** *Supongamos que  $g : [0, b_N] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua que satisface la ecuación (7.6). Entonces existe una única función  $\tilde{g} \in C(\mathbb{R})$  tal que  $\tilde{g}$  es una solución de (7.6) en  $\mathbb{R}$  y, además,  $\tilde{g}|_{[0, b_N]} = g$ .*

**Demostración.** Antes de realizar ningún cálculo, observemos que la función  $g : [0, b_N] \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación (7.6) si y sólo si verifica la siguiente condición de interpolación:

$$g(0) + g(b_1) + \cdots + g(b_N) = 0.$$

Además, si  $y, w$  denotan dos números reales que satisfacen la relación  $y = w + b_N$  y  $\tilde{g}$  es cualquier solución de (7.6) en  $\mathbb{R}$ , entonces una sencilla sustitución demuestra que  $\tilde{g}$  satisface

$$\tilde{g}(y) + \tilde{g}(y - b_N) + \tilde{g}(y - (b_N - b_1)) + \cdots + \tilde{g}(y - (b_N - b_{N-1})) = 0 \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Usamos esta relación para definir en  $[0, \infty)$  (con unicidad) la solución  $\tilde{g}$  tal que  $\tilde{g}|_{[0, b_N]} = g$ . Además, usaremos la ecuación funcional original (7.6) para extender (también con unicidad) la solución  $\tilde{g}$  sobre la parte negativa de la recta real.

Tomemos  $I_0 = [0, b_N]$ ,  $\tilde{g}_0 = g$ , y definamos, para  $h \in I_1 = [b_N, b_N + (b_N - b_{N-1})]$ , la función

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(y) &= (-1) [\tilde{g}_0(y - b_N) + \tilde{g}_0(y - (b_N - b_1)) + \tilde{g}_0(y - (b_N - b_2)) \\ &\quad + \cdots + \tilde{g}_0(y - (b_N - b_{N-1}))]. \end{aligned}$$

Evidentemente,  $\tilde{g}_1$  está bien definida, pues si  $y \in I_1$  entonces

$$0 \leq y - b_N \leq y - (b_N - b_1) \leq y - (b_N - b_2) \leq \cdots \leq y - (b_N - b_{N-1}) \leq b_N.$$

Además,  $\tilde{g}_1 \in \mathbf{C}(I_1)$ . Para  $k \geq 2$ , consideramos el intervalo

$$I_k = [b_N + (k-1)(b_N - b_{N-1}), b_N + k(b_N - b_{N-1})]$$

y definimos

$$\begin{aligned}\tilde{g}_k(y) &= (-1) [\tilde{g}_{k-1}(y - b_N) + \tilde{g}_{k-1}(y - (b_N - b_1)) \\ &\quad + \cdots + \tilde{g}_{k-1}(y - (b_N - b_{N-1}))] \quad (y \in I_k).\end{aligned}$$

Consideremos ahora la parte negativa de la recta real. Tomamos  $I_{-1} = [-b_1, 0]$  y definimos

$$\tilde{g}_{-1}(x) = (-1) [\tilde{g}_0(x + b_1) + \tilde{g}_0(x + b_2) + \cdots + \tilde{g}_0(x + b_N)] \quad (x \in I_{-1}).$$

Para  $k \leq -2$ , tomamos  $I_k = [kb_1, (k+1)b_1]$  y definimos

$$\tilde{g}_k(x) = (-1) [\tilde{g}_{k+1}(x + b_1) + \tilde{g}_{k+1}(x + b_2) + \cdots + \tilde{g}_{k+1}(x + b_N)] \quad (x \in I_k).$$

Es claro que  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k = \mathbb{R}$  y  $\tilde{g}(x) = \tilde{g}_k(x)$  ( $x \in I_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) es la función que buscábamos. La unicidad queda garantizada por la propia construcción que hemos tenido que forzar para ir extendiendo poco a poco nuestra función  $\tilde{g}$ . □

**TEOREMA 7.2.2.** *Sea  $\mathbf{S} = \{g \in C(\mathbb{R}) : g \text{ es solución de (7.6)}\}$ . Entonces  $\mathbf{S}$  es un espacio vectorial de dimensión infinita. Como consecuencia, el conjunto de las soluciones continuas de la ecuación funcional (7.5) también es un espacio vectorial de dimensión infinita.*

**Demostración.** El Teorema de Anselone y Korevaar (ver, por ejemplo [14], [22]) nos dice que si  $V$  es un subespacio vectorial de dimensión finita de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  que es invariante por traslaciones (i.e., tal que  $f(x) \in V$  implica  $g_L(x) = f(x - L) \in V$  para todo  $L \in \mathbb{R}$ ), entonces todo elemento de  $V$  es una combinación lineal finita (con coeficientes en  $\mathbb{C}$ ) de funciones de la forma  $m(x) = x^k e^{\lambda x}$ , donde  $k \in \mathbb{N}$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ . En particular, los elementos de  $V$  son funciones diferenciables. Por otra parte, está claro que  $\mathbf{S}$  es un subespacio vectorial (real) de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  que es invariante por traslaciones y, si tomamos su complejificación,  $V = \mathbf{S} + i\mathbf{S}$ , entonces  $V$  es un subespacio vectorial de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  que también es invariante por traslaciones. Además,  $\mathbf{S} \subseteq V$  y  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{S} < \infty$  si y sólo si  $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ . Por otra parte, el Lema 7.2.1 implica que  $\mathbf{S}$  posee soluciones no triviales, de modo que  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{S} \geq 1$ . Por tanto, la demostración finalizará si encontramos una solución continua de (7.6) que no es diferenciable.

Definamos

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq b_{N-1} \\ \frac{b_N + Nb_{N-1} - (N+1)x}{b_N - b_{N-1}} & \text{si } b_{N-1} < x \leq b_N \end{cases}$$

Evidentemente,  $g$  satisface (7.6) en  $[0, b_N]$ , y, por tanto, el Lema 7.2.1 implica que existe una función  $\tilde{g} \in \mathbf{S}$  tal que  $\tilde{g}|_{[0, b_N]} = g$ . En particular,  $\tilde{g}$  no es diferenciable, pues  $g$  no es diferenciable. □

Resulta interesante observar que, en algunos casos, la función  $\tilde{g}$  que se ha construido en la demostración del Teorema 7.2.2 es periódica. Por ejemplo, si imponemos  $b_k = k$ ,

$k = 1, 2, \dots, N$  y seguimos todos los pasos de la prueba, obtenemos que  $\tilde{g}(x)$  es la extensión  $(N + 1)$ -periódica de la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq N - 1 \\ -(N + 1)x + N^2 & \text{si } N - 1 < x \leq N \\ (N + 1)x - N(N + 2) & \text{si } N < x \leq N + 1 \end{cases}$$

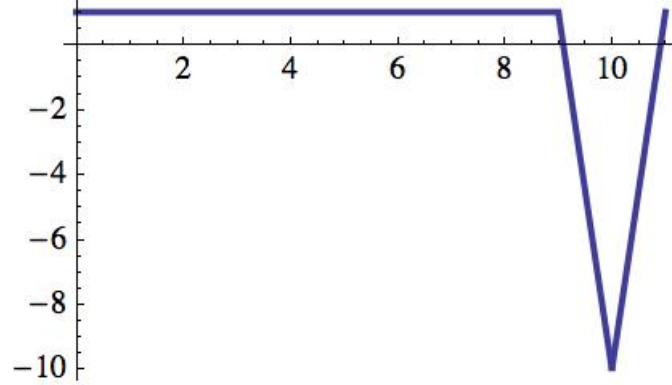


Figura 7.1: Gráfica de la función  $g(x)$  con  $N = 10$ .

Así pues, una cuestión que surge de forma natural, y que creemos interesante, es conocer bajo qué condiciones sobre el vector  $(b_1, \dots, b_N)$  podemos garantizar que la ecuación (7.6) admite soluciones periódicas. El siguiente resultado resuelve parcialmente este problema.

**TEOREMA 7.2.3.** *La ecuación funcional (7.6) admite una solución continua periódica  $g \neq 0$  si y sólo si existe un número  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{cases} 1 + \sum_{k=1}^N \cos(\alpha b_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^N \sin(\alpha b_k) = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

*Cuando esto sucede, existen polinomios trigonométricos que satisfacen la ecuación (7.6) y cuyo periodo fundamental es igual a  $2\pi/\alpha$ . Además, la ecuación (7.6) admite soluciones continuas periódicas para  $(b_1, \dots, b_N)$  si y sólo si admite soluciones continuas periódicas para  $(db_1, \dots, db_N)$ , para todo  $d > 0$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $g$  es una solución continua y  $T$ -periódica de (7.6) y tomemos  $\theta = 2\pi/T$ . Sea

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (a_s(g) \cos(s\theta x) + b_s(g) \sin(s\theta x)) + \frac{a_0(g)}{2}$$

el desarrollo en serie de Fourier de  $g$  (este desarrollo existe porque, al ser  $g$  continua, sus coeficientes de Fourier están bien definidos). Entonces  $h(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N g(x + b_k)$  es

también continua y  $T$ -periódica, por lo que sus coeficientes de Fourier están bien definidos (con unicidad). Un sencillo cálculo nos revela que  $a_0(h) = a_0(g)$  y

$$\begin{pmatrix} a_s(h) \\ b_s(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^N \cos(s\theta b_k) & \sum_{k=1}^N \sin(s\theta b_k) \\ -\sum_{k=1}^N \sin(s\theta b_k) & 1 + \sum_{k=1}^N \cos(s\theta b_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s(g) \\ b_s(g) \end{pmatrix}$$

para todo  $s \geq 1$ . Ahora bien: la función  $h$  es idénticamente cero si y sólo si todos sus coeficientes de Fourier se anulan. Por tanto, si  $g$  es una solución de (7.6) entonces  $a_0(g) = 0$  y

$$\begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^N \cos(s\theta b_k) & \sum_{k=1}^N \sin(s\theta b_k) \\ -\sum_{k=1}^N \sin(s\theta b_k) & 1 + \sum_{k=1}^N \cos(s\theta b_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s(g) \\ b_s(g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

para todo  $s \geq 1$ . Denotemos por  $A_s$  la matriz que aparece en (7.8). Si  $g$  no es idénticamente nula, entonces existe un valor  $s \geq 1$  tal que  $(a_s(g), b_s(g)) \neq (0, 0)$  y, para este valor concreto de  $s$  tendremos que

$$\det(A_s) = \left(1 + \sum_{k=1}^N \cos(s\theta b_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^N \sin(s\theta b_k)\right)^2 = 0.$$

En otras palabras, el sistema de ecuaciones (7.7) se satisface para  $\alpha = s\theta$ . Lo que es más: tan pronto como tengamos que  $\det(A_s) = 0$  sabremos que  $A_s = 0$  es la matriz nula, lo cual implica que para todo  $(a_s, b_s) \in \mathbb{R}^2$  el polinomio trigonométrico

$$g(x) = a_s \cos(s\theta x) + b_s \sin(s\theta x)$$

satisface la ecuación (7.6) y es una función periódica con periodo fundamental  $T = \frac{2\pi}{s\theta}$ . La última afirmación del teorema se sigue de que  $\alpha$  es una solución de (7.7) para  $(b_1, \dots, b_N)$  si y sólo si  $\frac{\alpha}{d}$  es una solución de (7.7) para  $(db_1, \dots, db_N)$ . □

**COROLARIO 7.2.4.** *Sea  $d > 0$ . Tomemos  $b_k = kd$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  y  $m \in \mathbb{Z} \setminus (N+1)\mathbb{Z}$ . Entonces la ecuación funcional (7.6) admite soluciones continuas periódicas de periodo  $T = \frac{N+1}{m}$ .*

**Demostración.** La última parte del Teorema 7.2.3 nos garantiza que basta hacer la prueba del corolario para  $d = 1$ . Supongamos que  $b_k = k$  para  $k = 1, 2, \dots, N$ . Entonces la ecuación (7.7) se transforma en:

$$\begin{cases} \frac{\sin(\frac{N+1}{2}\alpha)}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \cos\left(\frac{N}{2}\alpha\right) = 0 \\ \frac{\sin(\frac{N+1}{2}\alpha)}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \sin\left(\frac{N}{2}\alpha\right) = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

Por tanto, en este caso, encontrar el valor  $\alpha \in \mathbb{R}$  que resuelve (7.7) es equivalente a encontrar una solución real  $\alpha$  de

$$\left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}\alpha)}{\sin(\frac{\alpha}{2})}\right)^2 = \left[\frac{\sin(\frac{N+1}{2}\alpha)}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \cos\left(\frac{N}{2}\alpha\right)\right]^2 + \left[\frac{\sin(\frac{N+1}{2}\alpha)}{\sin(\frac{\alpha}{2})} \sin\left(\frac{N}{2}\alpha\right)\right]^2 = 0.$$

Es decir, estamos buscando las soluciones reales de

$$\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 0,$$

las cuales es claro que existen y, de hecho, están dadas por  $\alpha = \frac{2m\pi}{N+1}$ ,  $m \in \mathbb{Z} \setminus (N+1)\mathbb{Z}$ . Esto finaliza la demostración.  $\square$

**COROLARIO 7.2.5.** *Supongamos que  $b > 0$ . Entonces la ecuación*

$$g(x) + g(x+a) + g(x+b) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (7.10)$$

*admite soluciones continuas y periódicas  $g \neq 0$  si y sólo si*

$$\frac{a}{b} \in \left\{ \frac{2+3k}{1+3m}, \frac{1+3m}{2+3k} : (m, k) \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (7.11)$$

*En particular, si  $a/b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  entonces (7.10) no admite soluciones continuas periódicas. Además, existen infinitos números racionales distintos  $p/q$  tales que  $a/b = p/q$  implica que (7.10) no admite soluciones continuas periódicas.*

**Demostración.** En este caso las ecuaciones que debemos estudiar están dadas por

$$\begin{cases} 1 + \cos(\alpha a) + \cos(\alpha b) & = 0 \\ \sin(\alpha a) + \sin(\alpha b) & = 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

Resolviendo la segunda ecuación del sistema, obtenemos que  $\alpha b = -\alpha a + 2k\pi$  o  $\alpha b = \alpha a + (2k+1)\pi$  para cierto  $k \in \mathbb{Z}$ . Consideramos ambos casos de forma separada:

**Caso 1:**  $\alpha b = \alpha a + (2k+1)\pi$ . Introducimos el valor de  $\alpha b$  en el primer miembro del sistema de ecuaciones, para obtener que

$$1 + \cos(\alpha a) + \cos(\alpha a + (2k+1)\pi) = 1 \neq 0.$$

Por tanto, en este caso no existen soluciones de (7.12).

**Caso 2:**  $\alpha b = -\alpha a + 2k\pi$ . Introducimos nuevamente el valor de  $\alpha b$  en el primer miembro del sistema de ecuaciones, para obtener que

$$1 + \cos(\alpha a) + \cos(-\alpha a + 2k\pi) = 1 + 2\cos(\alpha a) = 0,$$

lo cual equivale a afirmar que  $\alpha a \in \{2\pi/3 + 2m\pi, \pi/3 + (2m+1)\pi\}_{m \in \mathbb{Z}}$ . Teniendo en cuenta que  $\alpha b = -\alpha a + 2k\pi$ , concluimos que  $\alpha$  es una solución del sistema de ecuaciones (7.12) si y sólo si es solución de alguno de los siguientes dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha a & = 2\pi/3 + 2m\pi \\ \alpha b & = -(2\pi/3 + 2m\pi) + 2k\pi \end{cases} \quad \text{para algún } (m, k) \in \mathbb{Z}^2. \quad (7.13)$$

o

$$\begin{cases} \alpha a & = \pi/3 + (2m+1)\pi \\ \alpha b & = -(\pi/3 + (2m+1)\pi) + 2k\pi \end{cases} \quad \text{para algún } (m, k) \in \mathbb{Z}^2. \quad (7.14)$$

Estudiemos ahora las ecuaciones dadas por (7.13). Es claro que deberíamos tener que  $a, b \neq 0$ . Además,

$$\alpha = \frac{1}{a}(2\pi/3 + 2m\pi) = \frac{1}{b}(-(2\pi/3 + 2m\pi) + 2k\pi)$$

En particular, este sistema tiene soluciones reales si y sólo si

$$\frac{b}{a} \in \left\{ \frac{-1 + 3(k - m)}{1 + 3m} : (m, k) \in \mathbb{Z}^2 \right\} = \left\{ \frac{2 + 3k}{1 + 3m} : (m, k) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Como los parámetros  $a, b$  se pueden intercambiar en el argumento anterior, concluimos que

$$\frac{b}{a} \in \left\{ \frac{2 + 3k}{1 + 3m}, \frac{1 + 3m}{2 + 3k} : (m, k) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Por último, es claro que el sistema (7.14) es un caso particular del sistema (7.13). □

**NOTA 7.2.6.** La condición (7.11) se puede estudiar para cualquier par de valores  $a, b$  concretos que se consideren. Por ejemplo, si  $a = b$  entonces (7.11) se escribe

$$1 \in \left\{ \frac{2 + 3m}{1 + 3k}, \frac{1 + 3k}{2 + 3m} : (k, m) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

lo cual resulta claramente imposible. Se sigue que no existen funciones continuas periódicas  $g \neq 0$  tales que  $g(x) + 2g(x + a) = 0$ . Damos ahora una demostración directa de este hecho: Supongamos, por el contrario, que  $g(x) + 2g(x + a) = 0$  y  $g(x)$  es continua y  $T$ -periódica con periodo fundamental  $T > 0$ . Sea  $s_0 \in [0, T]$  tal que  $|g(s_0)| \neq 0$ . Hay dos posibilidades que podemos considerar:

- (a) Los números  $\{a, T\}$  son linealmente dependientes sobre  $\mathbb{Q}$ . En este caso, existen números naturales  $k, m$  tales que  $kT = ma$ . Entonces

$$0 < |g(s_0)| = |g(s_0 + kT)| = |g(s_0 + ma)| = \frac{1}{2^m}|g(s_0)| < |g(s_0)|,$$

lo cual es una contradicción.

- (b)  $\dim \text{span}_{\mathbb{Q}}\{a, T\} = 2$ . Teniendo en cuenta que  $g$  es continua y periódica, entonces es uniformemente continua. por tanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$  siempre que  $|x - y| < \delta$ . Ahora bien, nuestra hipótesis sobre  $\{a, T\}$  implica que, para todo  $\delta > 0$  existen  $n, m \in \mathbb{Z}$  tales que  $|nT + ma| < \delta$  (de hecho, podemos suponer que  $m > 0$ ). Por tanto, si  $d = |g(s_0)| > 0$  y  $\varepsilon < d/2$ , entonces

$$|g(s_0 + nT + ma) - g(s_0)| < \varepsilon$$

lo cual implica que  $|g(s_0 + nT + ma)| > d/2$ . por otra parte,

$$|g(s_0 + nT + ma)| = |g(s_0 + ma)| = \frac{1}{2^m}|g(s_0)| \leq \frac{1}{2}d,$$

lo cual resulta contradictorio.

*Por supuesto, una demostración directa de la existencia (o la inexistencia) de soluciones continuas periódicas de la ecuación (7.10) para cada ejemplo que se proporcione de los parámetros  $a, b$ , sería sin duda una tarea difícil -al menos, engorrosa-. En vez de eso, comprobar si se satisface (o no) la condición (7.11) es siempre sencillo.*



# Conclusiones y futuras líneas de investigación

Si tenemos que resumir el contenido de esta memoria en pocas palabras, diremos que en ella se prueba que el uso de técnicas de interpolación, así como técnicas relacionadas con propiedades de invarianza frente a ciertas transformaciones lineales sencillas -como las traslaciones, las afinidades o las dilataciones- permite abordar diferentes cuestiones relacionadas con la regularidad de algunas ecuaciones funcionales clásicas y, de hecho, se pueden obtener avances significativos respecto de la teoría conocida hasta ahora, muchas veces con demostraciones muy elegantes. Como resultado de la investigación realizada hemos publicado los artículos [6, 7, 8, 9, 10, 11] y, además, tenemos sometido a arbitraje el artículo [12].

*Incluimos aquí, a modo de conclusión, el enunciado de los resultados nuevos más importantes que se han logrado con este trabajo, con un breve comentario sobre las técnicas utilizadas en cada caso, y la referencia explícita al lugar en el que el resultado ha sido publicado:*

- (i) En [6] hemos utilizado técnicas de interpolación polinómica en una variable para caracterizar completamente las clausuras de los grafos de las soluciones discontinuas de la ecuación funcional monomial  $\frac{1}{n!}\Delta_h^n f(x) = f(h)$ , con  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . El resultado principal es el Teorema 2.1.7 y afirma que, si  $f$  es un  $n$ -monomio discontinuo,  $\Gamma = \overline{G(f)}^{\mathbb{R}^2}$ ,  $\alpha = \sup_{h \in \mathbb{R}^*} A_n(h)$  y  $\beta = \inf_{h \in \mathbb{R}^*} A_n(h)$ . Entonces:
- (a) Si  $\alpha = +\infty$  y  $\beta = -\infty$ , entonces  $\Gamma = \mathbb{R}^2$ .
  - (b) Si  $\alpha = +\infty$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ , entonces  $\Gamma = \{(x, y) : y \geq \beta x^n\}$  cuando  $n = 2k$  es un número par, y  $\Gamma = \{(x, y) : y \leq \beta x^n, x \leq 0\} \cup \{(x, y) : y \geq \beta x^n, x \geq 0\}$  cuando  $n = 2k + 1$  es un número impar. En particular, si  $\beta = 0$ , obtenemos el semiespacio  $\Gamma = \{(x, y) : y \geq 0\}$  para  $n = 2k$  y la unión de los cuadrantes primero y tercero,  $\Gamma = \{(x, y) : xy \geq 0\}$ , para  $n = 2k + 1$ .
  - (c) Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\beta = -\infty$ , entonces  $\Gamma = \{(x, y) : y \leq \beta x^n\}$  si  $n = 2k$  es un número par, y  $\Gamma = \{(x, y) : y \geq \beta x^n, x \leq 0\} \cup \{(x, y) : y \leq \beta x^n, x \geq 0\}$

si  $n = 2k + 1$  es un número impar. En particular, si  $\alpha = 0$ , obtenemos el semiespacio  $\Gamma = \{(x, y) : y \leq 0\}$  cuando  $n = 2k$  y la unión de los cuadrantes segundo y cuarto,  $\Gamma = \{(x, y) : xy \leq 0\}$ , cuando  $n = 2k + 1$ .

Además, para todo valor de  $n \geq 2$  existen ejemplos de  $n$ -monomios discontinuos  $f$  que satisfacen cada una de las afirmaciones (a), (b), (c) anteriores. Como consecuencia de las técnicas empleadas en este trabajo hemos logrado una nueva demostración del Teorema de Hamel sobre la densidad del grafo de las funciones aditivas discontinuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(ii) En [7] se utilizan dos resultados muy importantes de la teoría de síntesis y análisis espectral (es decir la parte del análisis funcional que se dedica a describir los subespacios invariantes por traslaciones del espacio de las funciones continuas  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $G$  un grupo abeliano general), conjuntamente con una técnica algebraica que introducimos nosotros con este propósito, para ofrecer una nueva demostración del Teorema de Montel en varias variables, la cual es aplicable directamente al caso distribucional, así como un nuevo teorema tipo Montel que se puede aplicar a las funciones polinómicas definidas sobre el grupo aditivo  $\mathbb{Z}^d$  para  $d \geq 1$ . Nuestra demostración, si se compara con la prueba original del teorema de Montel clásico, gana en generalidad y en sencillez. los resultados principales son, en este caso, los Teoremas 3.1.8 y 3.1.12, los cuales garantizan que:

- Sea  $\{h_1, \dots, h_t\} \subset \mathbb{Z}^d$  tal que  $h_1\mathbb{Z} + h_2\mathbb{Z} + \dots + h_t\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^d$ , y sea  $f \in C(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C})$ . Si  $\Delta_{h_k}^m(f) = 0$ ,  $k = 1, \dots, t$ , entonces  $f(n) = \sum_{|\alpha| < N} a_\alpha n^\alpha$  para cierto  $N \in \mathbb{N}$ , ciertos números complejos  $a_\alpha$ , y para todo  $n \in \mathbb{Z}^d$ . En otras palabras,  $f$  es un polinomio algebraico en  $\mathbb{Z}^d$ . Además, si  $d = 1$ , entonces  $f(n) = a_0 + a_1n + \dots + a_{m-1}n^{m-1}$  es un polinomio algebraico en  $\mathbb{Z}$ , de grado  $\leq m - 1$ .
- Sean  $h_1, \dots, h_\ell \in \mathbb{R}^d$  tales que  $h_1\mathbb{Z} + \dots + h_\ell\mathbb{Z}$  es un subconjunto denso de  $\mathbb{R}^d$ , y sea  $f \in X_d$ . Si  $\Delta_{h_k}^m(f) = 0$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ , entonces  $f(x) = \sum_{|\alpha| < N} a_\alpha x^\alpha$  para cierto  $N \in \mathbb{N}$ , ciertos números complejos  $a_\alpha$ , y todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Así pues,  $f$  es un polinomio algebraico complejo en  $d$  variables reales. Además, si  $d = 1$ , entonces  $f(x) = a_1 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1}$  es un polinomio algebraico de grado  $\leq m - 1$ .

(iii) En [9], [12] se proporciona una nueva demostración del Teorema de Montel-Popoviciu, la cual está basada en técnicas de interpolación polinómica en varias variables, y se utilizan las nuevas ideas que surgen en este contexto para estudiar las clausuras topológicas de los grafos de los polinomios discontinuos  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Este problema había sido investigado por Almira y López-Moreno en el caso  $d = 1$  con técnicas distintas a las empleadas aquí, pero permanecía abierto para el caso de funciones de varias variables. El resultado principal es ahora el Teorema 4.2.2, el cual afirma que:

- Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación funcional de Fréchet

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0 \quad \text{para todo } x, h \in \mathbb{R}^d,$$

y  $f(x_1, \dots, x_n)$  no es un polinomio ordinario, entonces  $f$  no está acotada en ningún abierto no vacío. Además,  $\overline{G(f)}^{\mathbb{R}^{d+1}}$  contiene un abierto no acotado.

(iv) En [8] se ha demostrado un Teorema tipo Montel para las funciones definidas sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}_p$  de los números  $p$ -ádicos y con valores en un cuerpo valuado  $\mathbb{K}$  que contiene a  $\mathbb{Q}_p$  con continuidad. En este contexto resulta esencial conocer la topología de  $\mathbb{Q}_p$ . En particular, dicho cuerpo tiene la interesante propiedad de que si  $|h|_p = p^{-N}$ , entonces  $h\mathbb{N}$  es un subconjunto denso de la bola de centro 0 y radio  $p^{-N}$ , la cual está dada por  $p^N\mathbb{Z}_p$ . El resultado principal es, en este caso, el Teorema 5.1.4, el cual de prueba con técnicas de interpolación polinómica en una variable y afirma lo siguiente:

- Sea  $(\mathbb{K}, |\cdot|_{\mathbb{K}})$  un cuerpo valuado que contiene al cuerpo  $\mathbb{Q}_p$  y tal que la inclusión  $\mathbb{Q}_p \hookrightarrow \mathbb{K}$  es continua. Supongamos que  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{K}$  es una función continua y definamos, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , el conjunto

$$\mathfrak{P}_m(f) = \{h \in \mathbb{Q}_p : \Delta_h^{m+1} f = 0\}.$$

Entonces  $\mathfrak{P}_m(f) = \{0\}$ , o  $\mathfrak{P}_m(f) = \mathbb{Q}_p$ , o bien  $\mathfrak{P}_m(f) = p^N\mathbb{Z}_p$  para cierto  $N \in \mathbb{Z}$ , y todos estos casos se producen efectivamente para diferentes ejemplos de funciones  $f$ . Además, para cada  $a \in \mathbb{Q}_p$  existen constantes  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$  tales que  $f(x) = a_0 + \dots + a_mx^m$  para todo  $x \in a + \mathfrak{P}_m(f)$ . En particular,  $f$  es un polinomio de grado  $\leq m$  si y sólo si  $\mathfrak{P}_m(f)$  contiene una sucesión no acotada.

Este resultado motiva, además, el estudio de las funciones que, localmente, son soluciones de la ecuación funcional de Fréchet. El resultado principal que obtenemos es, a este respecto, el Teorema 5.2.1, y afirma lo siguiente

- Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado ultramétrico sobre un cuerpo valuado no Arquimediano  $\mathbb{K}$  de característica cero. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una solución de la ecuación

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0 \quad (x \in X, h \in B_X(r) = \{x \in X : \|x\| \leq r\})$$

y sea

$$\phi(r, m) = r \left( \prod_{k=2}^{m+1} \max\{|1/t| : t = 1, 2, \dots, k\} \right)^{-1}.$$

Entonces, para todo  $x_0 \in X$  existen una constante  $A_{0,x_0}$  y aplicaciones  $k$ -aditivas simétricas

$$A^{k,x_0} : B_X(\phi(r, m)) \times \dots \times B_X(\phi(r, m)) \rightarrow Y, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

tales que

$$f(x_0 + z) = A_{0,x_0} + \sum_{k=1}^m A_{k,x_0}(z) \quad \text{para todo } z \in B_X(\phi(r, m));$$

donde  $A_{k,x_0}(z) = A^{k,x_0}(z, z, \dots, z)$  es la diagonalización de  $A^{k,x_0}(z_1, \dots, z_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

(v) En [11] se utilizan dos teoremas debidos a Sternfeld-Weit y a Pinkus, que caracterizan los subespacios vectoriales cerrados de  $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  que son invariantes por transformaciones afines, y los subespacios vectoriales cerrados de  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  que son invariantes por traslaciones y dilataciones, para calcular las soluciones continuas de varias ecuaciones funcionales clásicas. En particular, se caracterizan las soluciones de la ecuación de Kakutani-Nagumo-Walsh,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x + \theta^k y) = f(x) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{C},$$

(donde  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\theta$  es una raíz primitiva  $N$ -ésima de la unidad); de la ecuación de Haruki,

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x + \eta^{2k} y) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x + \eta^{2k+1} y) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{C},$$

(donde  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\eta$  es una raíz primitiva  $2N$ -ésima de la unidad) y de la ecuación de Fréchet en varias variables,

$$\Delta_h^{m+1} f(x) = 0 \text{ para todo } x, h \in \mathbb{R}^d,$$

donde  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Los resultados principales son, en este caso, los Teoremas 6.1.1, 6.1.4 y 6.2.1 de la memoria. Si denotamos por  $S_{KNW}$ ,  $S_H$  y  $S_F$  los correspondientes espacios de soluciones, se ha probado que

$$S_{KNW} = \{p(z) + q(\bar{z}) : p, q \in \mathbb{C}[z] \text{ y } \deg(p), \deg(q) \leq N - 1\},$$

$$S_H = \{f(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} z^i \bar{z}^j : a_{i,j} \in \mathbb{C} \text{ para todo } 0 \leq i, j \leq N - 1\},$$

y

$$S_F = \Pi_{m,tot}^d.$$

(vi) En [10] se han estudiado las ecuaciones funcionales de tipo

$$f(x) + f(a_1 x) + \dots + f(a_N x) = 0 \quad (x \in I),$$

donde  $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \dots < a_N$  son números reales y nos hemos restringido a estudiar las soluciones definidas en un intervalo infinito  $I$ , que a veces coincide con toda la recta real y otras veces denota el semieje positivo,  $I = ]0, \infty[$ , así como las ecuaciones funcionales asociadas

$$g(w) + g(w + b_1) + \dots + g(w + b_N) = 0 \quad (w \in \mathbb{R}),$$

donde  $0 < b_k = \ln a_k < \ln a_{k+1} = b_{k+1}$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ . Nos interesamos en las siguientes dos cuestiones:

- (a) La existencia de soluciones regulares, así como el tamaño del espacio de dichas soluciones.
- (b) La existencia de soluciones periódicas.

Los resultados principales que hemos logrado son, en este caso, los Teoremas 7.1.1, 7.2.2 y 7.2.3.

*Existen aún numerosos problemas abiertos relacionados con las ideas que se han explotado en esta memoria. Algunos de ellos están siendo abordados y otros probablemente requerirán introducir nuevas técnicas e ideas. Apuntamos aquí tres problemas cuyo estudio consideramos prioritario y al cual dedicaremos con toda seguridad nuestro esfuerzo en un futuro inmediato:*

1. **Descripción completa del grafo de los polinomios discontinuos.** Aunque hemos avanzado de forma significativa en el estudio de las clausuras topológicas de los grafos de los polinomios, especialmente en el caso de los monomios de una variable, el problema de obtener una descripción completa de estos conjuntos está aún abierto si consideramos polinomios arbitrarios, tanto para el caso de funciones de una variable (donde conjeturamos que el borde de dicho conjunto se puede describir mediante funciones spline), como para el caso multivariable en dimensión finita, donde lo único que se ha probado es que dicho conjunto contiene un abierto no acotado. Es más, un problema abierto que consideramos especialmente importante, es demostrar (o desmentir, mediante la construcción de un contraejemplo apropiado) que si  $X$  es un espacio de Banach de dimensión infinita y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función polinómica discontinua, entonces  $\overline{G}^{X \times \mathbb{R}}$  contiene un abierto no acotado.
2. **Propiedad de dicotomía para la conexidad de los grafos de los polinomios discontinuos.** Se sabe que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución de la ecuación funcional de Cauchy, entonces  $G(f)$  es, como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , o bien conexo, o bien totalmente desconexo. Además, es posible construir ejemplos de funciones aditivas discontinuas cuyo grafo es conexo. Pensamos que esta propiedad de dicotomía debe ser cierta para los polinomios  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  de grado  $\leq n$ , para todo  $d, n \geq 1$ .
3. **Teoremas tipo Montel cuando  $G = h_1\mathbb{Z} + \dots + h_t\mathbb{Z}$  no es un subgrupo denso de  $\mathbb{R}^d$ .** El Teorema de Montel en varias variables está pensado para el caso en el que los “periodos generalizados”  $h_1, \dots, h_t \in \mathbb{R}^d$  satisfacen que  $G = h_1\mathbb{Z} + \dots + h_t\mathbb{Z}$  es un subgrupo denso de  $\mathbb{R}^d$ . Por otra parte, se sabe que si  $G$  no es denso en  $\mathbb{R}^d$  es porque existen un subespacio vectorial  $V$  de  $\mathbb{R}^d$  y un retículo aditivo (o subgrupo aditivo discreto)  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^d$  tales que  $G = V \oplus \Lambda$ . Nosotros conjeturamos que, en este caso, si la función  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  satisface que  $\Delta_{h_k}^{m+1} f(x) = 0$  para  $k = 1, \dots, t$ , entonces para cada  $\lambda \in \Lambda$  existe un polinomio algebraico ordinario en  $d$  variables  $p_\lambda(x)$  tal que

$$f(x + \lambda) = p_\lambda(x) \text{ para todo } x \in V.$$



# Bibliografía

- [1] J. ACZEL, J. DHOMBRES, *Functional equations in several variables*, Enciclopedia of Mathematics and its Applications, **31**, Cambridge University Press, 2008.
- [2] J. M. ALMIRA, A note on classical and  $p$ -adic Fréchet functional equations with restrictions, *Results in Math.* **63** (2013) 649-656.
- [3] J. M. ALMIRA, Montel's theorem and subspaces of distributions which are  $\Delta^m$ -invariant, *Numer. Functional Anal. Optimiz.* **35** (4) (2014) 1-15.
- [4] J. M. ALMIRA, *Fourier: Un debate acalorado*, en *La matemática en sus personajes*, Vol. **50**, Ed. Nivola, 2014.
- [5] J. M. ALMIRA, Cuerdas vibrantes y calor: la génesis del Análisis de Fourier, *Matematicalia* 4 (1) (2008)
- [6] J. M. ALMIRA, KH. F. ABU-HELAIEL, A note on monomials, *Mediterranean J. of Maths.* **10** (2) (2013) 779-789.
- [7] J. M. ALMIRA, KH. F. ABU-HELAIEL, On Montel theorem in several variables, Aceptado para publicación en *Carpathian Journal of Mathematics*, disponible en arXiv:1310.3378, 2014.
- [8] J. M. ALMIRA, KH. F. ABU-HELAIEL, A  $p$ -adic Montel theorem and locally polynomial functions, Aceptado para publicación en *Filomat*, disponible en Arxiv, <http://arxiv.org/abs/1302.4086>, 2014.
- [9] J. M. ALMIRA, KH. F. ABU-HELAIEL, A qualitative description of graphs of discontinuous polynomials, Aceptado para publicación en *Annals of Functional Analysis*, disponible en arXiv:1401.3273, 2014.
- [10] J. M. ALMIRA, KH. F. ABU-HELAIEL, On solutions of  $f(x) + f(a_1x) + \dots + f(a_Nx) = 0$  and related equations, *Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity*, **9** (2011) 3-17.

- [11] J. M. ALMIRA, KH. F. ABU-HELAIEL, A note on invariant subspaces and the solution of certain classical functional equations, *Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity*, **11** (2013) 3-17.
- [12] J. M. ALMIRA, KH. F. ABU-HELAIEL, Los teoremas de Fréchet, Montel y Popoviciu y la descripción del grafo de los polinomios discontinuos, Manuscrito, sometido en La Gaceta de la R.S.M.E., 2014.
- [13] J. M. ALMIRA, A. J. LÓPEZ-MORENO, On solutions of the Fréchet functional equation, *J. Math. Anal. Appl.* **332** (2007), 1119–1133.
- [14] P. M. ANSELONE, J. KOREVAAR, Translation invariant subspaces of finite dimension, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 747-752.
- [15] S. BANACH, Sur l'équation fonctionnelle  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , *Fundamenta Mathematicae* **1** (1920) 123-124.
- [16] C. DE BOOR, A. RON Polynomial ideals and multivariate splines, in *Multivariate Approximation Theory IV, ISNM 90*, C. Chui, W. Schempp, and K. Zeller (eds.), Birkhäuser Verlag (1989) 31-40.
- [17] E. CASTILLO, Construyendo Modelos y Resolviendo Problemas con Ecuaciones Funcionales, *La Gaceta de la R.S.M.E.* **4** (1) (2001) 27-66.
- [18] Z. CIESIELSKI, Some properties of convex functions of higher order, *Ann. Polon. Math.* **7** (1959) 1-7.
- [19] S. CZERWIK, *Functional equations and inequalities in several variables*, World Scientific, 2002.
- [20] G. DARBOUX, Memoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **4** (1875) 57-112.
- [21] D. Z. DJOKOVIĆ, A representation theorem for  $(X_1 - 1)(X_2 - 1) \cdots (X_n - 1)$  and its applications, *Ann. Polon. Math.* **22** (1969/1970) 189-198.
- [22] M. ENGERT, Finite dimensional translation invariant subspaces, *Pacific J. Math.* **32** (2) (1970) 333-343.
- [23] M. FRÉCHET, Une definition fonctionelle des polynomes, *Nouv. Ann.* **9** (1909), 145-162.
- [24] R. GER, On some properties of polynomial functions, *Ann. Pol. Math.* **25** (1971) 195-203.
- [25] R. GER, On extensions of polynomial functions, *Results in Mathematics* **26** (1994), 281-289.



- [26] N. GHIRCOIASIU, H. ROSCAU, L'intégration d'une Équation fonctionnelle, *Mathematica (Cluj)* 4 (27) (1962) 21-32.
- [27] I. GOHBERG, P. LANCASTER, L. RODMAN, *Invariant subspaces of matrices with applications*, Classics in Applied mathematics **51**, S.I.A.M., 2006.
- [28] F. G. GOUVÊA, *p-Adic numbers: an introduction*, UniversityText, Springer, 1997.
- [29] G. HAMEL, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , *Math. Ann.* **60** (1905) 459-462.
- [30] S. HARUKI, On the theorem of S. Kakutani-M. Nagumo and J.L. Walsh for the mean value property of harmonic and complex polynomials, *Pacific J. Math.* **94** (1) (1981) 113-123.
- [31] S. HARUKI, On the mean value property of harmonic and complex polynomials, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **57** (4) (1981) 216-218.
- [32] S. HARUKI, On two functional equations connected with a mean-value property of polynomials, *Aequationes Math.* **6** (1971) 275-277.
- [33] D. H. HYERS, G. ISAC, T. M. RASSIAS, *Stability of functional equations in several variables*, Birkhäuser, 1998.
- [34] E. ISAACSON, H. B. KELLER, *Analysis of Numerical Methods*, Wiley, New York, 1966.
- [35] G. A. JONES, D. SINGERMAN, *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge Univ. Press, 1987.
- [36] S. KAKUTANI, M. NAGUMO, About the functional equation  $\sum_{k=0}^{n-1} f(z + e^{\frac{2\pi k}{n}} i \xi) = n f(z)$ , *Zenkoku Shijô Danwakai*, **66** (1935) 10-12 (en Japonés).
- [37] M. KORMES, On the functional equation  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **32** (1926) 689-693.
- [38] M. KUCZMA, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, (Second Edition, Edited by A. Gilányi), Birkhäuser, 2009.
- [39] M. KUCZMA, On measurable functions with vanishing differences, *Ann. Math. Sil.* **6** (1992) 42-60.
- [40] S. KUREPA, A property of a set of positive measure and its application, *J. Math. Soc. Japan* **13** (1) (1961) 13-19.
- [41] M. LEFRANC, Analyse spectrale sur  $\mathbb{Z}^n$ , *C. R. Acad. Sci. Paris* **246** (1958) 1951-1953.

- [42] K. O. LELAND, Finite dimensional translation invariant spaces, *Amer. Math. Monthly* **75** (1968) 757-758.
- [43] M. A. MCKIERNAN, On vanishing n-th ordered differences and Hamel bases, *Ann. Pol. Math.* **19** (1967) 331-336.
- [44] P. MONTEL, Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi, *Prace Matematyczno-Fizyczne* **44** (1) (1937) 315-329.
- [45] G. MORA, Y. CHERRUAULT AND A. ZIADI, Functional equations generating space-densifying curves, *Computers and Math. with Appl.* **39** (2000) 45-55.
- [46] G. MORA, A note on the functional equation  $F(z) + F(2z) + \dots + F(Nz) = 0$ , *J. Math. Anal. Appl.* **340** (2008) 466-475.
- [47] G. MORA AND J. M. SEPULCRE, On the distribution of zeros of a sequence of entire functions approaching the Riemann zeta function, *J. Math. Anal. Appl.* **350** (2009) 409-415.
- [48] G. MORA AND J. M. SEPULCRE, The critical strips of the sums  $1^z + 2^z + \dots + N^z$ , *Abstract and Applied Analysis* **2011** (2011), Article ID 909674, 15 pages, doi:10.1155/2011/909674.
- [49] A. OSTROWSKI, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung  $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$ , *Acta Mathematica* **41** (1) (1917) 271-284.
- [50] C. PÉREZ-GARCÍA, W. H. SCHIKHOF, *Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields*, Cambridge Studies in advanced mathematics **119**, Cambridge University Press, New York, 2010.
- [51] A. PÉREZ-MARÍN Y CASTRO, Don Ricardo San Juan en relación con la Ciencia Aeronáutica, *Rev. de la Real Academia de Ciencias*, **64** (2) (1970) 337-341.
- [52] A. PINKUS,  $TDI$ -subspaces of  $\mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$  and some density problems from Neural Networks, *J. Approx. Theory* **85** (1996) 269-287.
- [53] D. POPA, I. RASA, The Fréchet functional equation with application to the stability of certain operators, *J. Approx. Theory* **164** (1) (2012) 138-144.
- [54] T. POPOVICIU, Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles, Thèse, Paris, 12 June 1933. Published in *Mathematica* vol. VIII, 1934, pp. 1-85.
- [55] T. POPOVICIU, Remarques sur la définition fonctionnelle d'un polynôme d'une variable réelle, *Mathematica (Cluj)* **12** (1936) 5-12.
- [56] W. PRAGER, J. SCHWAIGER, Generalized polynomials in one and in several variables, *Mathematica Pannonica* **20** (2) (2009) 189-208.

- [57] A. M. ROBERT, *A course in p-adic analysis*, Graduate Texts in Mathematics **198**, Springer-Verlag, New-York, 2000.
- [58] H. SALZMANN, T. GRUNDHÖFER, H. HÄHL, R. LÖWEN, *The classical fields. Structural Features of the Real and Rational Numbers*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **112**, Cambridge University Press, 2007.
- [59] R. SAN JUAN, Una aplicación de las aproximaciones diofánticas a la ecuación funcional  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , Publicaciones del Inst. Matemático de la Universidad Nacional del Litoral **6** (1946) 221-224.
- [60] J. M. SEPULCRE, T. VIDAL, On the analytic solutions of the functional equation  $\omega_1 f(a_1 z) + \omega_2 f(a_2 z) + \dots + \omega_n f(a_n z) = 0$ , Manuscrito, sometido en Mediterranean J. Maths., 2014.
- [61] W. SIERPINSKY, Sur l'équation fonctionnelle  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , *Fundamenta Mathematicae* **1** (1920) 116-122.
- [62] M. Z. SPIVEY, Combinatorial sums and finite differences. *Discrete Mathematics* **307** (24) (2007) 3130-3146.
- [63] H. STEINHAUS, Sur les distances des points dans les ensembles de mesure positive, *Fundamenta Mathematicae* **1** (1920) 93-104.
- [64] Y. STERNFELD, Y. WEIT, Affine invariant subspaces of  $C(\mathbb{C})$ , Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989) 231-236.
- [65] L. SZÉKELYHIDI, *Discrete Spectral Synthesis and its Applications*, Springer Monographs on Mathematics, Springer, 2006.
- [66] L. SZÉKELYHIDI, *Convolution type functional equations on topological abelian groups*, World Scientific, 1991.
- [67] L. SZÉKELYHIDI, On Fréchet's functional equation, to appear in *Monatshefte für Mathematik*, D.O.I. 10.1007/s00605-013-0590-2, 2013.
- [68] V. VITRIH, *Correct interpolation problems in multivariate interpolation spaces*, Ph. Thesis, Department of Mathematics, University of Ljubljana, 2010.
- [69] M. WALDSCHMIDT, *Topologie des Points Rationnels*, Cours de Troisième Cycle 1994/95 Université P. et M. Curie (Paris VI), 1995.
- [70] J. L. WALSH, A mean value theorem for polynomials and harmonic polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936) 923-930.