

TESIS DOCTORAL

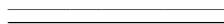
2019

**Cuestiones geométricas y  
variacionales en fibrados**

Julio Cambronero Sánchez

PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Dr. D. Javier Pérez Álvarez (Director)



*A mis padres*

# Agradecimientos

*Quisiera expresar mi gratitud a todas aquellas personas que han hecho posible que este trabajo sea una realidad.*

*Particularmente quiero comenzar dando las gracias al director de tesis Javier Pérez Álvarez, que desde que me envió el primer mensaje diciéndome que era mi tutor para dirigirme el DEA, siempre he contando con su inestimable ayuda y apoyo, ha mostrado una infinita paciencia y gran comprensión durante estos largos años, muy especialmente por saber entender mis circunstancias personales. También le agradezco el haberme facilitado siempre los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de esta tesis. Sé que debe haber resultado más difícil dirigir, coordinar y realizar las correcciones necesarias mediante correos que en reuniones personales. Gracias por su esfuerzo y su disposición.*

*En segundo lugar quería agradecer a mis padres su confianza en mí, siempre apoyándome en los momentos en los que pensaba que no lo lograría, dándome ánimos y perseverancia.*

*Por último agradecer a mi mujer Ascen, a mis hijos Olyad, Lucía y Julia, y a toda mi familia por sus ánimos y buenos momentos que hemos vivido juntos, necesarios para volver a coger impulso y trabajar con más ganas.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Grupos de Lie</b>	<b>6</b>
1.1. Actuaciones de un grupo de Lie . . . . .	20
<b>2. Fibrados principales y conexiones de Ehresmann</b>	<b>22</b>
2.1. Fibrados principales . . . . .	22
2.1.1. La estructura de fibrado principal . . . . .	22
2.1.2. Ejemplos de fibrados principales . . . . .	28
2.1.3. Campos G-invariantes . . . . .	31
2.1.4. Fibrado asociado a un fibrado principal . . . . .	33
2.1.5. Fibrados AdP y adP . . . . .	35
2.2. Conexiones de Ehresmann . . . . .	39
2.2.1. Conexiones en un fibrado principal . . . . .	39
2.2.2. Forma de curvatura . . . . .	40
2.2.3. El fibrado de conexiones . . . . .	42
2.2.4. Ejemplo de conexión . . . . .	44
2.2.5. Conexiones inducidas . . . . .	46
2.2.6. Transporte paralelo y grupo de holonomía . . . . .	50
<b>3. Álgebra gauge y clases características</b>	<b>56</b>
3.1. Diferencial covariante . . . . .	57
3.2. Clases características . . . . .	59
3.2.1. Fibrado de 1-jets . . . . .	66
3.3. Conexiones de Yang-Mills . . . . .	69
3.3.1. Introducción . . . . .	69
3.3.2. Conexiones de Yang-Mills . . . . .	74
<b>4. Campos de Higgs</b>	<b>78</b>

<b>5. Geometrías de Cartan</b>	<b>82</b>
5.1. Introducción . . . . .	82
5.2. Conexiones de Cartan . . . . .	84
5.3. Derivada covariante y curvatura . . . . .	88
5.4. Mutaciones . . . . .	93
5.5. Geometrías reductivas . . . . .	94
5.5.1. Conexiones de Cartan-Yang-Mills . . . . .	96
5.5.2. Ejemplos de modelos geométricos reductivos . . . . .	98
5.5.3. Aplicación de la geometría de Cartan a la teoría BF gravitacional . . . . .	102
<b>6. Desarrollo de una curva, orientación y holonomía en las geometrías de Cartan</b>	<b>106</b>
6.1. Desarrollo de una curva en las geometrías de Cartan . . . . .	108
6.2. Orientación en las geometrías de Cartan . . . . .	111
6.3. Holonomía de Cartan . . . . .	115
6.3.1. Relación entre holonomía de Cartan y Ehresmann . . . . .	119
6.4. Descripción de las conexiones de Ehresmann que son reducibles a un subfibrado . . . . .	123
<b>7. Invariantes asociados al problema variacional</b>	<b>125</b>
7.1. Introducción . . . . .	125
7.2. Fibrado de 1-jets . . . . .	127
7.3. Problema variacional . . . . .	131
7.4. Formas de Legendre, Poincaré-Cartan y Euler-Lagrange asociadas al problema variacional . . . . .	131
7.5. Caracterización de las secciones críticas . . . . .	135
7.6. Expresión local de las formas de Legendre, Euler-Lagrange y Poincaré-Cartan . . . . .	137
7.7. Leyes de conservación asociadas al problema variacional . . . . .	141
<b>8. Sistemas de ecuaciones de Hamilton-Jacobi</b>	<b>146</b>
8.1. Introducción . . . . .	146
8.2. Preliminares . . . . .	148
8.3. Sistemas involutivos . . . . .	159
8.4. Reducción y reconstrucción . . . . .	160
<b>Conclusiones</b>	<b>163</b>
Conclusiones . . . . .	163
Posibles desarrollos futuros . . . . .	163

# Introducción

En esta memoria estudiaremos los fibrados, entre ellos los fibrados principales, definiremos las conexiones de Ehresmann y las conexiones de Cartan. En las primeras buscaremos clases características utilizando el álgebra  $gau(P)$ . En las geometrías de Cartan, veremos qué similitudes hay con las conexiones de Ehresmann. Veremos también qué relación existe, en determinadas circunstancias, entre las geometrías de Cartan y las conexiones de Ehresmann y la relación existente entre sus grupos y álgebras de holonomía, como se puede ver en el teorema 6.3.16. Debido a este estudio describiremos las conexiones de Ehresmann que son reducibles a un subfibrado 6.4.4. Utilizaremos los fibrados vectoriales, especialmente el fibrado cotangente, para estudiar el problema de Hamilton-Jacobi. También utilizaremos el fibrado de 1-jets para estudiar el problema variacional y encontraremos nuevas leyes de conservación utilizando la forma de Poincaré-Cartan.

Sea  $\pi : P \rightarrow X$  un fibrado principal sobre el grupo de estructura  $G$  con álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ , en el que tenemos una conexión de Ehresmann  $\omega$  con forma de curvatura  $\Omega^\omega$ . Un fibrado principal es una estructura que cumple que localmente es isomorfo a  $U \times G$  donde  $U$  es un abierto de cualquier punto  $u \in P$ . En ellos se puede definir la conexión de Ehresmann que vendrá dada por una 1-forma  $\omega$  en  $P$  con valores en  $\mathcal{G}$  cumpliendo

1.  $\omega(B_u^*) = B$  para todo  $B \in \mathcal{G}$  y  $u \in P$ .
2.  $(R_g)^*\omega = Ad(g^{-1}) \circ \omega$ .

La conexión nos dirá cuando un vector es horizontal o vertical. Con esto en cuenta se puede definir el álgebra  $gau(P)$  que son los campos de vectores que son invariantes por la traslación por  $G$ ,  $(R_{g*}D = D)$  y  $\pi$ -verticales  $(\pi_*D = 0)$ . Utilizando este álgebra definiremos una clase característica en  $P$ , que no depende de la elección de la conexión.

La idea de las geometrías de cartan en una variedad  $X$  es considerar un  $G/H$  una geometría de Klein, es decir  $H$  es un subgrupo de Lie del grupo de Lie  $G$  y además  $G/H$  es conexo de manera que en cada entorno de un punto de  $X$  el espacio tangente en ese punto sea isomorfo a  $G/H$  y considerar una

conexión de manera que cuando dos entornos de los espacios tangentes de dos puntos distintos de  $X$  se corten se peguen de manera correcta. La definición de una conexión de Cartan es la siguiente

Consideremos  $G$  un grupo de Lie y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Consideremos ahora  $\pi : P \rightarrow X$  un fibrado principal con grupo estructural  $H$ . Una conexión de Cartan es una 1-forma  $\Psi : TP \rightarrow \mathcal{G}$  que verifica:

1. Para cada  $p \in P$  la aplicación lineal  $\Psi_p : T_p(P) \rightarrow \mathcal{G}$  es un isomorfismo.
2.  $R_h^* \Psi = Ad(h^{-1})\Psi$ , para todo  $h \in H$ .
3.  $\Psi(A^*) = A$  para cada  $A \in \mathcal{H}$  donde  $A^*$  es el vector fundamental asociado a  $A$ .

Comparando la definición de las conexiones de Ehresmann y de la conexión de Cartan, la diferencia mas obvia es que en la definición de la conexión de Cartan en  $P$  no toma valores en el álgebra de Lie  $\mathcal{H}$  sino en el álgebra mayor  $\mathcal{G}$ . La condición de que sea un isomorfismo nos indica que  $G$  debe tener la misma dimensión que  $TP$ , con lo cual la geometría de Klein  $G/H$  debe tener la misma dimensión que  $X$ , lo que nos indica que las conexiones de Cartan tienen una relación mas concreta a la base que las conexiones de Ehresmann. Al ser un isomorfismo se puede considerar la aplicación inversa, la cual nos dará para cada elemento del álgebra de  $\mathcal{G}$  un campo de vectores de  $P$ . Si esa aplicación inversa a  $\Psi$  la restringimos al álgebra  $\mathcal{H}$  nos da campos de vectores verticales en  $P$ , y si lo restringimos al complemento del álgebra  $\mathcal{G}$  nos da campos de vectores en la variedad base  $X$ .

Veremos las similitudes, en cuanto a ecuaciones, que existen entre las dos conexiones.

Vamos a exponer, brevemente, los contenidos por capítulos.

En el primer capítulo estudiaremos los grupos de Lie y se establecen las relaciones que existen entre las subálgebras de Lie y los subgrupos de Lie, los campos fundamentales y las actuaciones de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable.

En el Capítulo 2 se construye la estructura de fibrado principal sobre un grupo de Lie. Estudiaremos el fibrado asociado a un fibrado principal y los fibrados  $Ad(P)$  y  $ad(P)$ . Después asociaremos a cada fibrado principal una conexión, que no es otra cosa que una regla para poder descomponer los vectores en una parte horizontal y otra vertical. Introduciremos el fibrado de conexiones  $C(P)$  y se verá la relación existente entre las secciones de este fibrado y las conexiones del fibrado principal. Se definirá el transporte paralelo y los grupos de holonomía.

En el capítulo 3 buscaremos como construir una forma en  $P$  con valores en  $\mathcal{G}$  cuya derivada covariante se anule. La construcción la haremos utilizando  $\Omega^\omega$  y los elementos del álgebra de gauge  $gau(P)$  y los polinomios de Weyl. La manera de conseguir que entren en escena el álgebra  $gau(P)$  para construir la forma en  $P$  deseada, es definir una forma equivariante  $\tau_D : P \rightarrow \mathcal{G}$  como sigue: Para cada  $p \in P$ ,  $\tau_D(p)$ , es el único  $A \in \mathcal{G}$  tal que  $A_p^*$  es igual a  $D_p \in T_p P$ . Tenemos que  $d^\omega \tau_D$  es una forma horizontal y así para  $f \in I^m(\mathcal{G})$ ,  $f(d^\omega \tau_D, \dots, d^\omega \tau_D)$  es una  $m$ -forma diferencial en  $P$ . Lo que ocurre es que esta forma tiene clase de cohomología trivial, como se puede ver en 3.2.6.

Sin embargo cuando el álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  es nilpotente construiremos una clase característica en  $P$ , tomando sucesivas derivadas de Lie de  $\Omega^\omega$  con respecto a cualquier vector en  $D \in gau(P)$  tal que  $im \tau_D = \mathcal{G}$ . El teorema que nos dice que la clase característica definida de esta manera es independiente de  $\omega$  es el 3.2.23. Para demostrar esto introduciremos el fibrado de 1-jets  $J^1(P)$ , veremos la identificación  $J^1(P)/G \cong C(P)$  y definiremos la conexión canónica en el fibrado principal  $q : J^1(P) \rightarrow C(P)$ . Después definiremos las conexiones de Yang-Mills y de Yang-Mills-Higgs considerando una métrica en  $X$ , una forma  $B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  bilineal no degenerada e invariante por adjuntos. Utilizando esas conexiones definiremos formas cerradas en  $P$  que proyectan en formas cerradas en  $X$ , como se puede ver en 3.3.6.

En el capítulo 4 estudiaremos los campos de Higgs que son la base geométrica de lo que los físicos llaman rotura espontánea de la simetría, cuyo substrato es la reducción de un fibrado principal. El teorema principal sería el 4.0.9, en el cual nos caracteriza las reducciones de  $P$  a un subgrupo  $H$  con una función automorfa que llamaremos campo de Higgs, en oposición a lo que normalmente se consideran los campos de Higgs que son las secciones de  $P/H$ . De esta forma se parametrizan las reducciones de  $P$  por todos los conjugados de  $H$ . Definiremos el módulo  $C(P, G/H)/Gau(P)$  y cada elemento de este módulo nos dará una reducción distinta de  $P$ . Por último obtendremos la condición sobre el campo de Higgs para que la forma de conexión  $\omega$  del fibrado  $P \rightarrow X$  reduzca a  $P_H$  (4.0.15).

En el Capítulo 5, definiremos las geometrías de Cartan y definiremos la curvatura, la derivada covariante y veremos que cumplen ecuaciones similares a las de las conexiones de Ehresmann. Las conexiones de Cartan podemos considerarlas como un caso particular de las conexiones de Ehresmann, ya que la 1-forma de la conexión verifica las mismas condiciones que las de Ehresmann pero incluyendo la que dice que  $\Psi_p : T_p(P) \rightarrow \mathcal{G}$  es un isomorfismo. Además otra diferencia es que en la geometría de Cartan la 1-forma toma valores en  $\mathcal{G}$  en vez de en  $\mathcal{H}$ . La condición de que sea un isomorfismo lo que significa es que la variedad base  $X$  debe tener la misma dimensión que  $G/H$ . Así la geometría de Cartan hereda cualquier estructura que tenga los espa-

cios tangentes de la geometría de Klein  $G/H$ . Estudiaremos particularmente el caso en el que el modelo geométrico es reductivo, es decir cuando existe una descomposición de  $\mathcal{H}$ -módulos  $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{I}$  e introduciremos las conexiones de Cartan-Yang-Mills y una caracterización de las mismas en función de la codiferencial covariante. Estudiaremos algunos ejemplos de modelos reductivos y veremos una aplicación de la geometría de Cartan a la teoría BF gravitacional, en donde aplicando esta teoría utilizando conexiones de Cartan obtenemos las ecuaciones de Macdowell-Mansouri.

En el Capítulo 6 introduciremos el desarrollo de una curva en las geometrías de Cartan, lo que nos permitirá definir la orientación y los grupos de holonomía en esta geometría. Veremos que existe una relación, cumpliendo ciertas condiciones, entre las conexiones de Cartan en un fibrado principal  $P$  y las conexiones de Ehresmann en el fibrado principal asociado  $Q = P \times_G G$  (teorema 6.3.13). Considerando esa relación se demostrará que el grupo de holonomía en la geometría de Cartan  $(P, \Psi)$  es un subgrupo del grupo de holonomía en el sentido de Ehresmann en el fibrado principal  $Q$ . Y así podemos identificar el álgebra de Lie del grupo de holonomía según Cartan con una subálgebra del álgebra generada por las imágenes  $\Omega(u, v)$  con  $u, v$  vectores horizontales en  $[(p, g)] \in Q$  (teorema 6.3.16). En la última sección del capítulo veremos una descripción de las conexiones de Erhesmann que son reducibles a un subfibrado. Este resultado es el teorema 6.4.4.

En el capítulo 7 utilizaremos el fibrado de 1-jets asociado a un fibrado  $\pi : P \rightarrow X$ , que será el espacio de las configuraciones asociado a un problema variacional con densidad lagrangiana  $\mathcal{L}\omega$ , y lo abordaremos desde un punto de vista geométrico, definiendo formas diferenciales que permiten encontrar nuevas simetrías y leyes de conservación. El punto de partida será la teoría de campos de primer orden de [39] y [42]. Primero describiremos la estructura geométrica del fibrado de 1-jets. La diferencial vertical de una sección es el concepto fundamental para construir otros elementos. En particular, daremos una caracterización diferencial de la noción de transformación de contacto y formularemos el problema variacional de primer orden como una cuestión de invarianza de la acción definida por una densidad lagrangiana con respecto al álgebra de las transformaciones infinitesimales de contacto del fibrado  $P$ . Después, expresaremos la fórmula de variación de la densidad lagrangiana en términos de la forma de Poincaré-Cartan y de su diferencial exterior. Junto con esta forma definiremos otras y encontraremos sus expresiones explícitas e implícitas. Con todo esto estudiaremos las simetrías de un problema lagrangiano desde este punto de vista. Probaremos el teorema clásico de Noether y buscaremos nuevas leyes de conservación a partir de las simetrías infinitesimales de las formas diferenciales que previamente hemos introducido (teoremas 7.7.5, 7.7.6 y 7.7.7).

En el último capítulo se completará el estudio de las fibraciones principales de las que nos hemos ocupado en el capítulo 2 con otro tipo de fibraciones igualmente importantes: las vectoriales. En concreto se trabaja sobre el fibrado cotangente a una variedad, donde beneficiándonos de su estructura simpléctica natural, puede trasladarse el problema de Hamilton-Jacobi de la mecánica analítica. En concreto, hemos abordado el estudio de sistemas de ecuaciones de Hamilton-Jacobi involutivos como generadores de subvariedades coisótropas en el fibrado cotangente.

Así, se estudiará la reducción y reconstrucción de un sistema de Hamilton-Jacobi extendiendo trabajos previos en los que se trataba el tema para una única ecuación de Hamilton-Jacobi.

# Capítulo 1

## Grupos de Lie

**Definición 1.0.1.** *Un grupo de Lie es un grupo que tiene una estructura de variedad diferenciable respecto de la cual la operación de grupo y el paso al inverso son diferenciables:*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G & G &\longrightarrow G \\ (\sigma, \tau) &\longmapsto \sigma\tau & \sigma &\longmapsto \sigma^{-1} \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.0.2.** 1. *La circunferencia unidad  $S^1$  es un grupo de Lie considerando la multiplicación inducida por  $\mathbb{C}^*$ .*

2. *El producto de dos grupos de Lie  $G \times H$  es un grupo de Lie con la estructura de variedad del producto y la multiplicación*

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)$$

3. *De esta manera tenemos que el  $n$ -toro  $T^n = S^1 \times S^1 \dots \times S^1$  es un grupo de Lie*

4.  *$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K}) / \det(A) \neq 0\}$  es un grupo de Lie siendo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ . Como  $\det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}) = GL(n, \mathbb{K})$  tenemos que  $GL(n, \mathbb{K})$  es un abierto al ser imagen inversa de un abierto mediante una función diferenciable (ya que  $\det$  es un polinomio y por tanto diferenciable). Además el producto y la inversa son diferenciables ya que estas funciones son polinomios y  $A^{-1} = \frac{Adj A^t}{\det(A)}$*

Denotaremos por  $L_\sigma(\tau) = \sigma\tau$  (resp.  $R_\sigma(\tau) = \tau\sigma$  la traslación por la izquierda (resp. derecha) con  $\tau \in G$

**Definición 1.0.3.** *Un campo vectorial  $D \in \mathfrak{X}(G)$  es invariante por la izquierda si verifica que  $D \circ L_\sigma = (L_\sigma)_*(D)$  o  $D_{\sigma g} = (L_\sigma)_*(D_g)$  para todo  $\sigma, g \in G$ .*

Se cumple que todo campo invariante es diferenciable, ya que si  $f \in C^\infty(G)$ , se verifica que  $Df(\sigma) = D_\sigma f = (L_\sigma)_*(D_e)(f) = D_e(f \circ L_\sigma)$  y considerando un vector tangente

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G \quad \gamma(0) = e \quad \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_0 = D_e$$

y la aplicación diferenciable

$$g : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(t, \sigma) = f(\sigma\gamma(t))$$

entonces

$$D_e(f \circ L_\sigma) = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_0(f \circ L_\sigma) = \frac{d}{dt}(f \circ L_\sigma \circ \gamma)|_0 = \frac{\partial g}{\partial t}(0, g)$$

Luego  $Df(\sigma)$  es diferenciable para todo  $\sigma \in G$ .

Llamaremos álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$  al conjunto de todos los campos invariantes por la izquierda de  $G$  con la suma y el producto por escalares usual y el corchete de Lie. Se tiene que  $\mathcal{G}$  es un espacio vectorial real y la aplicación  $\alpha : \mathcal{G} \longrightarrow T_e G$  definida por  $\alpha(D) = D(e)$  es un isomorfismo donde  $e$  es el elemento neutro de  $G$ . De esta forma  $\dim(\mathcal{G}) = \dim(T_e G) = \dim(G)$ , y así  $\mathcal{G}$  es una subálgebra del álgebra de los campos tangentes de  $G$ .

**Ejemplo 1.0.4.** 1. *Los campos invariantes por la izquierda del grupo de Lie  $\mathbb{R}$  con la adición son simplemente los campos de vectores constantes  $\{\lambda(\frac{d}{dr}) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . El corchete de Lie de dos campos de este conjunto es siempre 0.*

2. *Sea el conjunto  $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$  el espacio vectorial de todas las matrices  $n \times n$  de dimensión  $n^2, 2n^2, 4n^2$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ , respectivamente.*

*Si tomamos  $[A, B] = AB - BA$  las matrices cuadradas son un álgebra de Lie.*

*Se cumple que el álgebra de Lie de  $GL(n, \mathbb{K})$  es  $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$*

*Para ver esto consideremos  $x_{ij}$  una función coordenada global de  $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$  que asigna a cada matriz su entrada  $ij$ .*

*Sea  $\mathcal{G}$  el álgebra de Lie de  $GL(n, \mathbb{K})$ . Consideremos la aplicación:*

$$\alpha : T_I(\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})) \longrightarrow \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$$

*la identificación canónica del espacio tangente a  $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$  en la matriz identidad  $I$  con  $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$ . Así si  $v \in T_I(\mathcal{GL}(n, \mathbb{K}))$  se cumple que  $\alpha(v)_{ij} = v(x_{ij})$ .*

Definamos ahora la aplicación:

$$\begin{aligned}\beta : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{GL}(n, \mathbb{K}) \\ \beta(D) &= \alpha(D(e))\end{aligned}$$

Veamos que  $\beta$  es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Es claro que  $\beta$  es un isomorfismo de espacios vectoriales. falta ver que  $\beta[D, D'] = [\beta(D), \beta(D')]$  para todo  $D, D' \in \mathcal{G}$ .

Tenemos:

$$x_{ij} \circ L_\sigma(\tau) = x_{ij}(\sigma\tau) = \sum_k x_{ik}(\sigma)x_{kj}(\tau)$$

Sea  $D \in \mathcal{G}$  un campo invariante:

$$\begin{aligned}D(x_{ij})(\sigma) &= (L_\sigma)_*(D_I(x_{ij})) = D_I(x_{ij} \circ L_\sigma) = \\ &= \sum_k x_{ik}(\sigma)D_I(x_{kj}) = \sum_k x_{ik}(\sigma)(D_I)_{kj} = \sum_k x_{ik}(\sigma)\beta(D)_{kj}\end{aligned}$$

Ahora tenemos:

$$\begin{aligned}\beta([D, D'])_{ij} &= [D, D']_I(x_{ij}) = D_I(D'(x_{ij})) - D'_I(D(x_{ij})) = \\ &= \sum_k D_I(x_{ik})\beta(D')_{kj} - D'_I(x_{ik})\beta(D)_{kj} = \\ &= \sum_k \beta(D)_{ik}\beta(D')_{kj} - \beta(D')_{ik}\beta(D)_{kj} = [\beta(D), \beta(D')]_{ij}\end{aligned}$$

Por tanto es un isomorfismo de álgebras de Lie. Con lo cual el álgebra de Lie de  $GL(n, \mathbb{K})$  la podemos identificar con  $\mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$

Sea  $D \in \mathcal{G}$  y consideremos la curva integral  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$  de  $D$  que pasa por el elemento neutro  $e \in G$ . Se cumple que si  $|t|, |s| < \frac{\epsilon}{2}$  entonces  $\gamma(t+s) = \gamma(t) \cdot \gamma(s)$ .

Definiendo ahora

$$\varphi(t) = \gamma\left(\left(\frac{t}{n}\right)^n\right)$$

Se cumple que es un homomorfismo que coincide con  $\gamma$  en el origen,  $\varphi_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right) = D_e$  y  $\varphi(t+s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$ . A esta aplicación la denotaremos por  $exp_D(t)$ .

La aplicación  $\tau_t(\sigma) = \sigma exp_D(t)$  es un subgrupo uniparamétrico del campo  $D$  definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.0.5.** Se define la aplicación exponencial

$$\exp : \mathcal{G} \rightarrow G$$

mediante  $\exp(D) = \tau_1(e)$ .

Esta aplicación es diferenciable y es un hecho notable que es un difeomorfismo local en el origen.

**Ejemplo 1.0.6.** En el caso en que  $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , se tiene que la aplicación  $\exp : \mathcal{GL}(n, \mathbb{K}) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$  es la exponencial de matrices clásica definida por

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots \forall A \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$$

Esta definición tiene sentido ya que el lado derecho converge. Para ver esto, consideremos la norma euclídea definida por

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 + b_{ij}^2}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} & \dots & a_{1n} + ib_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + ib_{n1} & \dots & a_{nn} + ib_{nn} \end{pmatrix}$$

Tenemos que  $e^A$  converge si para todo  $i, j$  se tiene que  $I_{ij} + (A)_{ij} + \frac{(A^2)_{ij}}{2!} + \dots$  es convergente. Pero se cumple que  $|(A^n)_{ij}| \leq |A^n| \leq |A|^n$ , con lo cual  $I_{ij} + (A)_{ij} + \frac{(A^2)_{ij}}{2!} + \dots \leq I + |A| + \frac{|A|^2}{2!} + \dots = e^{|A|}$  y vemos que es convergente.

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} Be^AB^{-1} &= B\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots\right)B^{-1} = I + BAB^{-1} + B\frac{A^2}{2!}B^{-1} + \dots = \\ &= I + BAB^{-1} + \frac{(BAB^{-1})^2}{2!} + \dots = e^{BAB^{-1}} \end{aligned}$$

Así para cada  $A \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{C})$ , por la forma canónica de Jordan existe  $B$  tal que  $BAB^{-1}$  es triangular superior, es decir todas las entradas son cero menos las de debajo de la diagonal. Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  la diagonal de  $BAB^{-1}$ , entonces  $e^{BAB^{-1}}$  tiene la diagonal  $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$ , y es triangular

superior. En particular  $\det(e^{BAB^{-1}}) \neq 0$  por tanto  $e^A \in Gl(n, \mathbb{K})$  para todo  $A \in Gl(n, \mathbb{K})$ . Usando esto se obtiene que  $\det(e^A) = e^{\text{traza}A}$ .

En el caso en que  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  no sea diagonalizable podemos demostrar que  $\det(e^A) = e^{\text{traza}A}$  de la siguiente manera. Sea  $f(t) = \det e^{tA}$ , vamos a encontrar una ecuación diferencial para  $f(t)$ . Ahora si  $|\delta t/t| \ll 1$ , entonces

$$\det(e^{A(t+\delta t)}) = \det(e^{At}e^{A\delta t}) = \det(e^{At})\det(e^{A\delta t}) = \det(e^{At})\det(I+A\delta t) \quad (1.1)$$

después de expandirse a orden lineal. Ahora bien

$$\det(I+A\delta t) = \det \begin{pmatrix} 1+A_{11}\delta t & A_{12}\delta t & \dots & A_{1n}\delta t \\ A_{21}\delta t & 1+A_{22}\delta t & \dots & A_{2n}\delta t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}\delta t & A_{n2}\delta t & \dots & 1+A_{nn}\delta t \end{pmatrix}$$

$$= (1+A_{11}\delta t)(1+A_{22}\delta t)\dots(1+A_{nn}\delta t) + \mathcal{O}((\delta t)^2) =$$

$$1 + \delta t(A_{11} + A_{22} + \dots A_{nn} + \mathcal{O}((\delta t)^2)) = 1 + \delta t \text{traza}(A) + \mathcal{O}((\delta t)^2)$$

Así, escribiendo este resultado en la ecuación (1.1), se tiene

$$\frac{\det(e^{A(t+\delta t)}) - \det(e^{At})}{\delta t} = \text{traza}(A)\det(e^{At}) + \mathcal{O}(\delta t)$$

Tomando límites cuando  $\delta t \rightarrow 0$  se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}\det(e^{At}) = \text{traza}(A)\det(e^{At})$$

La solución de esta ecuación es

$$\ln(\det(e^{At})) = t(\text{traza}(A))$$

donde la constante de integración ha sido determinada teniendo en cuenta que  $(\det(e^{At}))|_{t=0} = \det I = 1$ . Tomando exponenciales obtenemos que  $\det(e^{At}) = \exp(t \cdot \text{traza}(A))$ , y considerando  $t = 1$  obtenemos de nuevo que se cumple  $\det(e^A) = e^{\text{traza}(A)}$ .

Vamos a probar ahora que  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$  si  $AB = BA$ . Se tiene que

$$e^A \cdot e^B = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i \frac{A^k B^{i-k}}{k!(i-k)!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} A^k B^{i-k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(A+B)^i}{i!} = e^{A+B}$$

donde hemos utilizado que  $AB = BA$   
 Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{K}) \\ t &\mapsto e^{tA} \end{aligned}$$

la cual, es diferenciable ya que las componentes reales e imaginarias de cada entrada son series de potencias con radio de convergencia infinito. El vector tangente en 0 es  $A$  (derivando término a término la serie) y es un homomorfismo por la igualdad  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$  si  $AB = BA$ .

Así  $t \mapsto e^{tA}$  es el único grupo uniparamétrico de  $\text{Gl}(n, \mathbb{K})$  cuyo vector tangente en 0 es  $A$ . Así la aplicación exponencial en  $\text{Gl}(n, \mathbb{K})$  es la exponenciación de matrices:

$$\exp(A) = e^A \quad A \in \mathcal{G}(n, \mathbb{K})$$

**Definición 1.0.7.** Un morfismo entre grupos de Lie es un homomorfismo diferenciable  $\varphi : G \rightarrow H$  entre dos grupos de Lie.

Todo morfismo de grupos de Lie induce una aplicación lineal entre las correspondientes álgebras de Lie  $\varphi_* : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ , de la siguiente manera:  $\varphi_*(D)$  es el único campo invariante en  $\mathcal{H}$  cuyo valor en el elemento neutro es  $\varphi_*(D_e)$ , donde esta última  $\varphi_*$  designa la aplicación lineal entre espacios tangentes  $\varphi_* : T_e(G) \rightarrow T_e(H)$ . Además  $\varphi_*$  es un morfismo de álgebras de Lie.

**Definición 1.0.8.** Se llama subgrupo de Lie de un grupo de Lie  $G$  al par formado por otro grupo de Lie  $H$  y un morfismo inyectivo  $\varphi : H \rightarrow G$ , que es una inmersión de variedades, es decir que  $\varphi_*$  es inyectiva.

Además se tiene que

**Proposición 1.0.9.** Sea  $\varphi : G \rightarrow H$  un morfismo de grupos de Lie. Se verifica la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathcal{H} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Por la definición de subgrupo de Lie se tiene que un campo de vectores invariante en  $H$  determina un campo de vectores invariante en  $G$ , es decir que  $\mathcal{H}$  es una subálgebra de  $\mathcal{G}$ . La inversa la tenemos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.0.10.** *Dada una distribución diferenciable  $c$ -dimensional en  $M$ , se tiene que  $\mathcal{D}$  es involutiva si y solo si para todo punto de  $M$  pasa una variedad integral de  $\mathcal{D}$ .*

*Demostración.* Se puede consultar en [7], □

**Teorema 1.0.11.** *Sea  $G$  un grupo de Lie con álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  y sea  $\overline{\mathcal{H}} \subset \mathcal{G}$  una subálgebra. Entonces existe un único subgrupo de Lie conexo  $(H, \varphi)$  de  $G$  tal que  $\varphi_*(\mathcal{H}) = \overline{\mathcal{H}}$ .*

*Demostración.* Para demostrarlo consideramos la distribución

$$\mathcal{D}(\sigma) = \{X(\sigma) : X \in \overline{\mathcal{H}}\}$$

para todo  $\sigma \in G$ .

Esta distribución es involutiva e invariante bajo traslaciones, por lo que por el teorema anterior existe una variedad integral maximal conexa  $(H, \varphi)$  de  $\mathcal{D}$  en  $e$ . Se prueba que  $\varphi(H)$  es un subgrupo de Lie y su álgebra de Lie es  $\mathcal{H}$  y cumple que  $\varphi_*(\mathcal{H}) = \mathcal{D}(e) = \overline{\mathcal{H}}$ . □

Así tenemos que existe una relación 1:1 entre las subálgebras de Lie de un grupo de Lie conexo y los subgrupos de Lie.

**Teorema 1.0.12.** *Si  $A$  es un subgrupo de un grupo de Lie  $G$  que tiene estructura de variedad diferenciable la cual hace que  $(A, i)$  sea una subvariedad de  $G$ , donde  $i$  es la inclusión, entonces tiene una estructura de variedad única y con esa estructura  $A$  es un grupo de Lie.*

*Demostración.* Se demuestra de forma parecida salvo alguna cuestión técnica. Se considera la distribución  $\mathcal{D}$  en  $G$  determinada por las traslaciones del espacio tangente a  $A$  en la identidad. Se demuestra que  $A$  es una variedad integral de  $\mathcal{D}$  a través de la identidad  $e \in G$ , con lo cual  $\mathcal{D}$  es una distribución involutiva. El cuidado que hay que tener en esta prueba, es que hay que demostrar que no hay elementos de  $\mathcal{D}(\sigma)$  que no son tangentes a  $A$ . Una vez demostrado esto se continúa igual que en el teorema anterior. □

El siguiente teorema nos indica en que situaciones la estructura de variedad diferenciable del grupo de Lie es la topología relativa y esto ocurre cuando el subgrupo es cerrado.

**Teorema 1.0.13.** *Sea  $(H, \varphi)$  un subgrupo de Lie de  $G$ . Entonces  $\varphi$  es un embebimiento (esto es,  $\varphi$  es un homeomorfismo de  $H$  con  $\varphi(H)$  en la topología relativa) si y solo si  $(H, \varphi)$  es un subgrupo cerrado de  $G$  (es decir  $\varphi(H)$  es cerrado en  $G$ )*

*Demostración.* "  $\Leftarrow$  "

La idea es encontrar un conjunto abierto no vacío  $V \subset H$  de manera que  $\varphi|_V$  sea un homeomorfismo de  $V$  en  $\varphi(H)$  con la topología relativa. Como  $\varphi$  conmuta con las traslaciones por la izquierda entonces  $\varphi$  es un embebimiento en todo  $H$ . El conjunto abierto será  $V = \varphi^{-1}(S_0)$  donde  $S_0$  es una rebanada aislada del conjunto  $\varphi(H) \cap U$  que consiste en la unión de rebanadas de la forma  $\tau_i = cte$  donde  $(U, \tau_i)$  es un sistema de coordenadas cubico centrado en  $e \in G$ .

"  $\Rightarrow$  " Se demuestra viendo que cualquier sucesión de puntos en  $\varphi(H)$  converge a un punto  $\sigma \in \varphi(H)$ . □

**Teorema 1.0.14.** *Sea  $H$  un subgrupo de un grupo de Lie  $G$  y sea  $\mathcal{H}$  un subespacio del álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ . Sea  $U$  un entorno de  $0$  en  $\mathcal{G}$  difeomorfo bajo la aplicación exponencial con un entorno  $V$  de la identidad en  $G$ . Supongamos que  $\exp(U \cap \mathcal{H}) = H \cap V$ . Entonces  $H$  con la topología relativa es un subgrupo de Lie de  $G$ ,  $\mathcal{H}$  es una subálgebra de Lie de  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$  es el álgebra de Lie de  $H$ .*

*Demostración.* Para demostrar este teorema utilizamos el teorema 1.0.12. Luego solo nos hace falta demostrar que el subgrupo  $H$  tiene una estructura diferenciable tal que  $(H, i)$  es una subvariedad de  $G$ .

La estructura diferenciable en  $H$  es la colección maximal de sistemas de coordenadas diferenciables superpuestos conteniendo la colección

$$\{(H \cap hV, \phi^{-1} \circ l_{h^{-1}}) : h \in H\}$$

donde  $\phi = \exp|_{U \cap \mathcal{H}} : U \cap \mathcal{H} \rightarrow H \cap V$  □

Este teorema nos permite identificar quienes son las álgebras de Lie de algunos subgrupos de las matrices.

**Ejemplo 1.0.15.** *Sea el subgrupo unitario  $U(n) = \{A \in Gl(n, \mathbb{K}) : A^{-1} = \bar{A}^t\}$  de  $Gl(n, \mathbb{K})$ :*

*$Sl(n, \mathbb{K}) = \{A \in Gl(n, \mathbb{K}) : \det(A) = 1\}$  grupo lineal especial*

*$O(n, \mathbb{K}) = \{A \in Gl(n, \mathbb{K}) : A^{-1} = A^t\}$  grupo ortogonal*

*Vamos a ver que su álgebra de Lie es  $\mathcal{U}(n) = \{A \in \mathcal{G}l(n, \mathbb{K}) : \bar{A} + A^t = 0\}$  matrices antihermitianas.*

*$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{G}l(n, \mathbb{K}) : \text{traza}(A) = 0\}$  matrices de traza 0*

$O(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{G}l(n, \mathbb{K}) : A + A^t = 0\}$  matrices antisimétricas.

Al conjunto  $U(n)$  y su álgebra de Lie  $\mathcal{U}(n)$  se le designa cuando  $\mathbb{H} = \mathbb{K}$  como  $Sp(n)$  y  $\mathfrak{sp}(n)$  y se le llama grupo simpléctico de orden  $n$ .

Podemos considerar una entorno  $W$  de cero en  $\mathcal{G}l(n, \mathbb{K})$  suficientemente pequeño de manera que si  $A \in W$  entonces  $\bar{A}, A^t, -A \in W$  y que  $|\text{traza}(A)| < 2\pi$  y que cumpla que  $\exp(W \cap \mathcal{G}l(n, \mathbb{K})) = Gl(n, \mathbb{K}) \cap V$ , donde  $V$  es un entorno de la identidad en  $Gl(n, \mathbb{K})$ .

Para ver que  $U(n)$  es un subgrupo de Lie cerrado de  $Gl(n, \mathbb{K})$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{u}(n)$  vamos a utilizar el teorema 1.0.14. Para ello tenemos que comprobar que  $W \cap \mathfrak{u}(n) = U(n) \cap V$ .

Para ver esto, si  $A \in W \cap \mathfrak{u}(n)$ , entonces  $(\overline{e^A})^t = e^{\bar{A}^t} = e^{-A}$ ; como  $(\overline{e^A})^t e^A = e^{-A} e^A = e^0 = I$ , con lo que  $e^A \in U(n) \cap V$ . Recíprocamente si  $A \in W$  y  $e^A \in U(n) \cap V$  entonces  $e^{-A} = (e^A)^{-1} = (\overline{e^A})^t = e^{\bar{A}^t}$  lo que implica que  $-A = \bar{A}^t$ .

De manera similar lo podemos hacer con  $O(n, \mathbb{K})$  y obtenemos que es un subgrupo de Lie cerrado de  $Gl(n, \mathbb{K})$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$  y tenemos de la misma manera que  $Sp(n)$  es un subgrupo de Lie cerrado con álgebra de Lie  $\mathfrak{sp}(n)$ .

También se cumple que si  $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  entonces  $\det(e^A) = 1$ ; y así  $e^A \in Sl(n, \mathbb{K})$ . Recíprocamente si  $\det(e^A) = 1$ , entonces  $\text{traza}(A) = (2\pi i)j$  para algún entero  $j$ . Como  $A \in W$  por la condición impuesta anteriormente para  $W$  se tiene que  $j = 0$  y por tanto  $\text{traza}(A) = 0$ . Así tenemos que  $Sl(n, \mathbb{K})$  es un subgrupo de Lie cerrado con álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ .

Se sigue entonces que  $SU(n) = U(n) \cap Sl(n, \mathbb{K})$ , es un subgrupo cerrado de  $Gl(n, \mathbb{K})$  con álgebra  $\mathfrak{su}(n) = \mathcal{U}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  la subálgebra de  $\mathcal{G}l(n, \mathbb{K})$  consistentes en las matrices de traza 0 antihermitianas. El grupo especial lineal real, que por definición es  $Sl(n, \mathbb{C}) \cap Gl(n, \mathbb{R})$  es un subgrupo de Lie cerrado de  $Gl(n, \mathbb{R})$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{G}l(n, \mathbb{R})$  las matrices reales de traza 0. El grupo ortogonal  $O(n)$ , que por definición es  $U(n) \cap Gl(n, \mathbb{R})$  es un subgrupo de Lie cerrado de  $Gl(n, \mathbb{R})$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(n) = \mathcal{U}(n) \cap \mathcal{G}l(n, \mathbb{R})$  las matrices antisimétricas reales.

Cada uno de estos ejemplos son subgrupos cerrados, y por los teoremas 1.0.12 y 1.0.13 son subgrupos de Lie con la topología relativa.

Las dimensiones de los grupos de Lie son fáciles calculando las de sus álgebras. Así  $Sp(n)$  tiene dimensión  $n(2n + 1)$ ,  $U(n, \mathbb{C})$  tiene dimensión  $n^2$ ,  $Sl(n, \mathbb{C})$  dimensión  $n^2 - 1$ ,  $O(n)$  dimensión  $\frac{n(n-1)}{2}$  y la dimensión de  $O(n, \mathbb{C})$  es  $n(n-1)$ .

Si  $G$  es un grupo de Lie, cada elemento  $\sigma \in G$ , define una operación diferenciable por conjugación  $a_\sigma : G \rightarrow G$  definida por  $a_\sigma(x) = \sigma x \sigma^{-1}$ , que

induce pasando a álgebras de Lie una aplicación  $(a_\sigma)_* : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ . Escribiendo  $Ad(\sigma) = (a_\sigma)_*$ , se obtiene un morfismo de grupos de Lie

$$Ad : G \longrightarrow Aut(\mathcal{G})$$

que recibe el nombre de representación adjunta.

Llamando ahora  $Ad_* = ad$  la aplicación entre álgebras de Lie se tiene, simplemente utilizando la proposición 1.0.9, que el diagrama siguiente es conmutativo, .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{ad} & End(\mathcal{G}) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{Ad} & Aut(\mathcal{G}) \end{array}$$

Utilizando de nuevo la proposición 1.0.9 vemos que se cumple que

$$\exp(tAd_\sigma(D)) = \sigma \exp(tD) \sigma^{-1}$$

por la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{Ad_\sigma} & \mathcal{G} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{a_\sigma} & G \end{array}$$

**Ejemplo 1.0.16.** Se verifica que en el caso de las matrices si  $B \in Gl(n, \mathbb{K})$  y  $C \in \mathcal{G}(n, \mathbb{K})$  entonces  $Ad_B(C) = BCB^{-1}$ .

Esto se demuestra de la siguiente manera: sea la curva  $\gamma(t) = \exp(tC)$  en  $Gl(n, \mathbb{K})$  se cumple que  $C = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)|_{t=0}$  y  $(a_B \circ \gamma)(t) = Be^{tC}B^{-1} = e^{tBCB^{-1}}$ , luego

$$Ad_B(C) = (a_B)_*(C) = (a_B \circ \gamma)_*\left(\frac{d}{dt}\right)|_{t=0} = \exp BCB^{-1}\left(\frac{d}{dt}\right)|_{t=0} = BCB^{-1}$$

Se tiene que si  $D, D' \in \mathcal{G}$  entonces  $ad_D(D') = [D, D']$

Puesto que  $Ad_*(D)$  es el vector tangente en  $t=0$  a la curva  $t \mapsto Ad(\exp(tD)) = (a_{\exp(tD)})_*$  se tiene que:

$$\begin{aligned} (ad_D(D'))_e &= Ad_*(D)(D'_e) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a_{\exp tD})_* D'_e - D'_e}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R_{\exp(-tD)} L_{\exp(tD)} D'_e - D'_e}{t} \end{aligned}$$

Ahora, puesto que el grupo uniparamétrico de  $D$  es  $\tau_t(x) = R_{\exp(tD)}(x)$ , tendremos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\tau_{-t})_* L_{\exp(tD)_*} D'_e - D'_e}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\tau_{-t})_* D'_{\tau_t(e)} - D'_e}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\tau_t)_* D'_{\tau_{-t}(e)} - D'_e}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D'_e - (\tau_t)_* D'_{\tau_{-t}(e)}}{t} = [D, D']_e \end{aligned}$$

**Definición 1.0.17.** Una  $p$ -forma  $\omega \in \bigwedge^p T^*(G)$  es invariante por la izquierda si  $(L_\sigma)^* \omega = \omega$  para todo  $\sigma \in G$ .

**Definición 1.0.18.** Llamaremos constantes de estructura de una base  $(D_1, \dots, D_n)$  de  $G$  a los números reales  $c_{jk}^i$  que verifican

$$[D_j, D_k] = \sum_i c_{jk}^i D_i$$

**Proposición 1.0.19.** Sea  $\omega_1, \dots, \omega_n$ , la base dual de  $D_1, \dots, D_n$ . Se cumple que

$$d\omega_i = -\frac{1}{2} \sum_{j < k} c_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k$$

*Demostración.* Se tiene:

$$d\omega_i(D_j, D_k) = \frac{1}{2} \{D_j(\omega_i(D_k)) - D_k(\omega_i(D_j)) - \omega_i([D_j, D_k])\} = -\frac{1}{2} c_{jk}^i$$

Teniendo en cuenta que  $\{\omega_j \wedge \omega_k : j < k\}$  es una base de  $\bigwedge^2 T^*(G)$  y  $d\omega_i = \sum_{j < k} d\omega_i(D_j, D_k) \omega_j \wedge \omega_k$  se infiere que  $d\omega_i = -\sum_{j < k} c_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k$ .  $\square$

**Proposición 1.0.20.** Dado un grupo de Lie  $G$  existe una única 1-forma  $\omega_G$  sobre  $\mathcal{G}$  con valores en  $\mathcal{G}$  tal que  $\omega_G(D) = D$  para todo campo invariante  $D \in \mathcal{G}$ . A esta 1-forma se le denomina 1-forma canónica o de Maurer-Cartan.

*Demostración.* Sea  $(D_1, \dots, D_n)$  una base de  $\mathcal{G}$  y sea  $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ , su base dual, tomando

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega^i D_i$$

es claro que  $\omega(D_i) = D_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ , con lo que se concluye.  $\square$

**Teorema 1.0.21.** Sea  $\omega_G$  la 1-forma canónica de un grupo de Lie. Se verifica

$$d\omega_G + \frac{1}{2} [\omega_G, \omega_G] = 0$$

donde  $[\omega_G, \omega_G]$  es la 2-forma sobre  $G$  con valores en  $G$ , definida como sigue:  
 $\frac{1}{2} [\omega_G, \omega_G](D_1, D_2) = [\omega_G(D_1), \omega_G(D_2)]$

*Demostración.* Se tiene que

$$d\omega_G(D_1, D_2) = D_1(\omega_G(D_2)) + D_2(\omega_G(D_1)) - \omega_G([D_1, D_2])$$

Vamos a considerar  $D_1, D_2$  dos campos invariantes por la izquierda, de manera que  $\omega_G(D_i)$  son constantes. Así los dos primeros términos de la igualdad anterior se anulan. Al ser  $\mathcal{G}$  un álgebra de Lie el corchete de Lie de dos campos invariantes es invariante con lo que se cumple  $\omega_G([D_1, D_2]) = [D_1, D_2]_e$ . Así tenemos que  $[D_1, D_2]_e = [D_{1_e}, D_{2_e}]$ , donde por definición, el corchete último es el corchete de Lie de  $\mathcal{G}$ . Obtenemos que  $d\omega_G(D_1, D_2) = -[\omega_G(D_1), \omega_G(D_2)]$  con lo que se ve que

$$d\omega_G(D_1, D_2) + \frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G](D_1, D_2) = 0$$

□

**Ejemplo 1.0.22.** *Vamos a encontrar la expresión de la 1-forma de Maurer-Cartan. para  $GL(n, \mathbb{R})$  que es una subvariedad abierta de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Como antes denotaremos por  $x_{ij}$  las funciones coordenadas estándar  $\mathbb{R}^{n^2}$ , de manera que si  $g \in GL(n, \mathbb{R})$  entonces  $x_{ij}(g) = g_{ij}$  es la entrada  $ij$  de  $g$ . Sea ahora  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  esta matriz da lugar a un campo invariante por la izquierda  $D$  en  $GL(n, \mathbb{R})$  satisfaciendo que  $D(Id) = \sum_{ij} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}|_{id}}$  y se cumple que*

$$D(g) = \sum_{ij} \sum_{k=1}^n x_{ik}(g) A_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}|_g}$$

*Esta expresión la podemos abreviar como que  $D(g) = gA$ .*

*Vamos a construir  $\omega_G$ . Consideremos la base  $\{\frac{\partial}{\partial x_{ij}}|_{id}\}_{i,j=1\dots n}$  para  $\mathcal{G}(n, \mathbb{R})$ . La base dual correspondiente es  $\{dx_{ij}(id)\}_{i,j=1\dots n}$ . Debemos encontrar 1-formas  $\mathbb{R}$ -valuadas invariantes por la izquierda  $\{\omega_G^{ij}\}_{i,j=1\dots n}$  tal que  $\omega_G^{ij} = dx_{ij}(id)$  y según se ha visto en la demostración de la proposición 1.0.20 tendremos que  $\omega_G = \sum_{i,j=1}^n \omega_G^{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ .*

*La invariancia por la izquierda requiere que  $\omega_G^{ij}(g) = (L_{g^{-1}})^*(\omega_G^{ij}(id))$ , y así para cada  $v \in T_g(GL(n, \mathbb{R}))$  se tiene que  $\omega_G^{ij}(g)(v) = \omega_G^{ij}(id)((L_{g^{-1}})_*g(v)) = dx_{ij}(id)((L_{g^{-1}})_*g(v))$ .*

*Consideremos ahora  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  con  $\alpha(t) = \alpha_{ij}(t)$  una curva diferenciable con  $\alpha'(0) = v$ . Entonces  $\omega_G^{ij}(g)(v) = dx_{ij}(id)((L_{g^{-1}})_*g(\alpha'(0))) = dx_{ij}(id)((L_{g^{-1}} \circ \alpha)'(0)) = dx_{ij}(id)(\frac{d}{dt}(g^{-1}\alpha)|_{t=0})$ .*

*Ahora  $g^{-1}\alpha(t) = \sum_{k=1}^n g_{ik}^{-1} \alpha_{kj}(t)$  y así*

$$\frac{d}{dt}(g^{-1}\alpha)|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n (g^{-1})_{ik} \alpha_{kj}(t) \right) \Big|_{t=0} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}|_{id}} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n (g^{-1})_{ik} v_{kj} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij} |_{id}}$$

donde  $v = \sum_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{kj} |_g}$ .

Así

$$\omega_G^{ij}(g)(v) = \sum_{k=1}^n (g^{-1})_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^n x_{ik}(g^{-1})(dx_{kj}(g))(v)$$

con lo que

$$\omega_G^{ij}(g) = \sum_{k=1}^n x_{ik}(g^{-1})(dx_{kj}(g))$$

Así tenemos que la 1-forma canónica será

$$\omega_G = \sum_{i,j=1}^n \omega_G^{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} = \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}(g^{-1})(dx_{kj}(g)) \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

La matriz de los coeficientes en esta última expresión es una matriz de 1-formas  $\mathbb{R}$ -valuadas en  $GL(n, \mathbb{R})$  que es usualmente identificada con  $\omega_G$ . Hay que tener en cuenta que es el producto de la matriz  $g^{-1}$  con la matriz de las coordenadas diferenciables  $dx_{ij}$ , con lo que podemos abreviar la anterior expresión por

$$\omega_G(g) = g^{-1} dx(g)$$

donde  $dx(g)$  es la matriz de orden  $n \times n$  dada por

$$\begin{pmatrix} dx_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & dx_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ dx_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & dx_{nn} \end{pmatrix}$$

El resultado es una matriz de 1-formas, la cual evaluada en cualquier  $v \in T_g(GL(n, \mathbb{R}))$  nos da una matriz en  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ .

Tenemos que si  $H$  es un subgrupo de Lie de  $G$  e  $\iota : H \rightarrow G$  es la inclusión se tiene que  $\omega_H = \iota^* \omega_G$ . Utilizando esto vamos a obtener la 1-forma canónica para  $SO(2)$ . Vamos a considerar  $G = GL(2, \mathbb{R})$  y  $H = SO(2)$  e  $\iota : SO(2) \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$  la inclusión. Para cada  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$   $\omega_G$  está dado por la matriz

$$\omega_G(g) = g^{-1}dx = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_{11} & dx_{12} \\ dx_{21} & dx_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ddx_{11} - bdx_{21} & ddx_{12} - bdx_{22} \\ -cdx_{11} + adx_{21} & -cdx_{12} + adx_{22} \end{pmatrix}$$

Si ahora  $g \in SO(2)$  entonces  $d = a$ ,  $c = -b$  y  $a^2 + b^2 = 1$  con lo que la matriz se reduce a

$$\begin{pmatrix} adx_{11} - bdx_{21} & adx_{12} - bdx_{22} \\ bdx_{11} + adx_{21} & bdx_{12} + adx_{22} \end{pmatrix}$$

Esta expresión se puede reducir más si nos restringimos a  $T_g(SO(2))$  y consideramos que  $\omega_H = \omega_G \circ \iota_*$ . Cualquier elemento de  $T_g(SO(2))$  puede ser escrito como  $\alpha'(0)$  donde  $\alpha$  es una curva en  $SO(2)$  con  $\alpha(0) = g$ . Ahora tenemos que  $\iota_{*g}(\alpha'(0)) = (\iota \circ \alpha)'(0)$  e  $\iota \circ \alpha$  es una curva en  $GL(2, \mathbb{R})$  con lo que podemos escribirla en términos de sus coordenadas

$$(\iota \circ \alpha)(t) = \begin{pmatrix} x_{11}((\iota \circ \alpha)(t)) & x_{12}((\iota \circ \alpha)(t)) \\ x_{21}((\iota \circ \alpha)(t)) & x_{22}((\iota \circ \alpha)(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix}$$

Pero  $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$  y derivando esta expresión en  $t = 0$  obtenemos que  $a(0)a'(0) + b(0)b'(0) = 0$ , es decir,  $aa'(0) + bb'(0) = 0$ . Observemos que  $a'(0) = dx_{11}(\iota_{*g}(\alpha'(0))) = dx_{22}(\iota_{*g}(\alpha'(0)))$  y  $b'(0) = dx_{12}(\iota_{*g}(\alpha'(0))) = -dx_{21}(\iota_{*g}(\alpha'(0)))$ . Así  $adx_{11} - bdx_{21}$  y  $bdx_{12} + adx_{22}$  se anulan en  $\iota_{*g}(\alpha'(0))$  y por lo tanto en todo  $T_g(SO(2))$ . Tenemos también que  $bdx_{11}(\iota_{*g}(\alpha'(0))) + adx_{21}(\iota_{*g}(\alpha'(0))) = bdx_{22}(\iota_{*g}(\alpha'(0))) - adx_{12}(\iota_{*g}(\alpha'(0)))$ . Teniendo todo esto en cuenta la 1-forma de Maurer-Cartan. para  $SO(2)$  es, en cada  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in SO(2)$  la restricción a  $T_g(SO(2))$  de

$$\begin{pmatrix} 0 & adx_{12} - bdx_{22} \\ -adx_{12} + bdx_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente considerando que  $a = x_{22}(g)$  y  $b = x_{12}(g)$  llegamos a la 1-forma de Cartan en  $SO(2)$  representada por la matriz de 1-formas  $\mathbb{R}$ -valuadas siguiente

$$\omega_H = \begin{pmatrix} 0 & x_{22}dx_{12} - x_{12}dx_{22} \\ -x_{22}dx_{12} + x_{12}dx_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.1. Actuaciones de un grupo de Lie

**Definición 1.1.1.** Una operación o una acción por la derecha de un grupo de Lie  $G$  sobre una variedad diferenciable  $X$  es una aplicación diferenciable  $\mu : G \times X \rightarrow X$  que verifica que  $\mu(\sigma, \mu(\tau, x)) = \mu(\sigma\tau, x)$  y que  $\mu(1, x) = x$ . Se escribirá  $\mu(\sigma, x) = \sigma x$ . Se dice que  $\mu$  es efectiva si  $\sigma x = x$  para todo  $x \in X$  entonces  $\sigma = 1$ , y se dice que es libre si  $\sigma x = x$  para algún  $x \in X$  entonces  $\sigma = 1$ .

**Definición 1.1.2.** Sea  $G$  un grupo de Lie operando por la derecha en una variedad  $X$ . Un elemento del álgebra de Lie  $A \in \mathcal{G}$  define un grupo uniparamétrico sobre  $X$  de la siguiente forma  $\tau_t(x) = x \exp(tA)$   $x \in X$ . El generador infinitesimal de  $\tau_t$  se designa por  $A^*$  y recibe el nombre de campo fundamental asociado al campo invariante  $A \in \mathcal{G}$ .

**Proposición 1.1.3.** La aplicación

$$\mathcal{G} \rightarrow T(X)$$

$$A \rightarrow A^*$$

es  $\mathbb{R}$  lineal y verifica:

1. Es un homomorfismo de álgebras de Lie  $[A, B]^* = [A^*, B^*]$
2. Si  $G$  opera efectivamente es inyectiva.
3. Si  $G$  opera libremente y  $A_x^* = 0$  para algún  $x \in X$  lo que implica que  $A = 0$
4. Si  $X/G$  existe entonces  $A^*$  es tangente a las órbitas, es decir  $A^*$  es vertical para la proyección canónica  $X \rightarrow \frac{X}{G}$

*Demostración.* 1. Definamos  $\mu_x : G \rightarrow X, \mu_x(\sigma) = x\sigma$ , y sea  $\gamma(t) = \exp(tA)$ . Veamos que  $(\mu_x)_* : T_e(G) \rightarrow T_x(X)$  cumple que  $A_x^* = (\mu_x)_*(A_e)$ . En efecto si  $f$  es una función diferenciable definida en un entorno de  $x \in X$ , entonces

$$\begin{aligned} A_x^*(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\tau_t x) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x \exp(tA)) - f(x)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mu_x \circ \gamma)(t) - f(\mu_x \circ \gamma)(0)}{t} = \frac{d}{dt} f(\mu_x \circ \gamma)(t)|_{t=0} = \\ &= (\mu_x \circ \gamma)_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) (f) = (\mu_x)_*(A_e)(f) \end{aligned}$$

ya que  $\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right) = A_e$ .

De esta forma se tiene que  $(A + B)_x^* = (\mu_x)_*(A + B) = A_x^* + B_x^*$

Por otra parte

$$[A^*, B^*] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B_x^* - (R_{\text{exp}tA} B^*)_x)$$

pero

$$\begin{aligned} (R_{\text{exp}tA} B^*)_x &= (R_{\text{exp}tA})_* B_{\text{exp}(-tA)}^* = (R_{\text{exp}(tA)} \circ \mu_{\text{exp}(-tA)})_*(B_e) = \\ &= (\mu_x \circ a_{\text{exp}(-tA)})_* B_e \end{aligned}$$

con lo que tendremos

$$[A^*, B^*] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B_x^* - (\mu_x \circ a_{\text{exp}(-tA)})_* B_e) = (\mu_x)_* \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (B_e - a_{\text{exp}(-tA)})_* B_e \right)$$

$$\begin{aligned} (\mu_x)_* \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (a_{\text{exp}(tA)})_* B_e - B_e \right) &= (\mu_x)_* \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Ad_{\text{exp}(tA)} B_e - B_e) \right) = \\ &= (\mu_x)_* (ad_A(B)_e) = (\mu_x)_* [A, B]_e = [A, B]_x^* \end{aligned}$$

2. Se cumple que  $A^* = 0$  si y solo si  $\text{exp}(tA) = x$  por tanto  $\text{exp}(tA) = e$  con lo cual  $A=0$ .
3. Ahora si  $A_x^* = 0$  si y solo si  $\text{exp}(tA) = x$  y como  $G$  opera libremente  $\text{exp}(tA) = e$ , lo que implica que  $A = 0$ .
4. Si  $X/G$  existe, entonces la curva integral de  $A^*$  que pasa por  $x \in X$  es  $\gamma(t) = \text{exp}(tA)$ , con lo que este campo es tangente a las órbitas ya que  $\gamma(t)$  pertenece a la órbita de  $x$ .

□

# Capítulo 2

## Fibrados principales y conexiones de Ehresmann

### 2.1. Fibrados principales

#### 2.1.1. La estructura de fibrado principal

**Definición 2.1.1.** Se llama fibrado principal de grupo de Lie  $G$  a toda operación libre de  $G$  por la derecha sobre una variedad  $P$  para la cual la variedad cociente

$$\pi_G : P \longrightarrow P/G = X$$

exista. Se dice que  $P$  es el espacio total,  $X$  la variedad base y  $G$  el grupo estructural de la fibración.

Que el espacio cociente exista implica que  $\pi_G$  es regular.

Se tiene también que las fibras  $\pi_G^{-1}(x) = \{u' \in P/\pi_G(u') = x = [u]\}$  con  $x \in X$  y  $\pi_G(u) = x = [u]$  son subvariedades cerradas difeomorfas a  $G$  ya que si definimos

$$f : G \longrightarrow \pi_G^{-1}(x)$$

$$g \longmapsto ug$$

se tiene que es un difeomorfismo, donde hay que tener en cuenta para demostrarlo que la acción es libre.

**Definición 2.1.2.** Un morfismo entre dos fibrados principales  $F : (P', G') \longrightarrow (P, G)$  es un par  $F = (f, f')$  formado por una aplicación diferenciable  $f : P' \longrightarrow P$  y un homomorfismo de grupos de Lie  $f' : G' \longrightarrow G$  que verifican que

$$f(u'g') = f(u')f'(g')$$

para todo  $u' \in P', g' \in G'$

Se tiene que si  $f$  es un morfismo de fibrados principales entonces aplica la fibra  $(\pi')^{-1}(x')$  de un punto  $x' \in X' = P'/G'$  en la fibra de algún otro punto  $x \in X = P/G$  ya que si

$u'_1, u' \in (\pi')^{-1}(x')$  con lo cual  $\pi'(u') = x', \pi'(u'_1) = x'$  lo que implica  $u'_1 = u'g'$  para algún  $g' \in G'$ , por tanto

$$u_1 = f(u'_1) = f(u'g') = f(u')f'(g') = uf'(g')$$

y así  $u_1$  y  $u$  están en la misma fibra.

Así podemos definir una única aplicación diferenciable  $\varphi : X' \rightarrow X$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{f} & P \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ X' & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

a esta aplicación la llamaremos aplicación inducida en la base.

La unicidad de  $\varphi$  se debe a la epiyectividad de  $\pi$ . Que es diferenciable es debido a la propiedad característica de las submersiones epiyectivas que dice que una aplicación continua  $f$  es diferenciable si y solo si  $f \circ \pi$  lo es, y como  $\varphi \circ \pi' = \pi \circ f$  y esta última es diferenciable obtenemos que  $\varphi$  es diferenciable.

Fijados la base  $X$  y el grupo de Lie  $G$  se cumple que la composición de morfismos de fibrados es otro morfismo y podemos hablar de la categoría de fibrados principales.

**Definición 2.1.3.** Se llama automorfismo de un fibrado principal  $(P, G)$  a un morfismo  $F = (f, f')$  tal que  $f$  sea un difeomorfismo y  $f'$  sea la identidad, entonces para cualquier  $u \in P$  y  $g \in G$  se cumple:

$$f(ug) = f(u)g$$

El conjunto de los automorfismos de  $P$  es un grupo bajo la composición de aplicaciones y se denotará por  $Aut(P)$ .

**Definición 2.1.4.** Diremos que  $f \in Aut(P)$  es una transformación gauge del fibrado si estabiliza cada órbita por  $G$  en  $P$ , es decir si para cada  $u \in P$ , los puntos  $u$  y  $f(u)$  están en la misma órbita por  $G$ . El conjunto de todas las transformaciones gauge es un subgrupo de  $Aut(P)$  que se denotará por  $Gau(P)$  llamado grupo de gauge del fibrado dado.

**Proposición 2.1.5.**  $f \in \text{Gau}(P)$  si y solo si  $\varphi = \text{Id}_X$ , donde  $\varphi$  es la aplicación inducida en la base.

*Demostración.*  $f \in \text{Gau}(P)$  si y solo si  $u$  y  $f(u)$  están en la misma órbita, y esto se cumple si y solo si  $\pi(u) = \pi(f(u)) = (\pi \circ f)(u)$  que es equivalente a  $\pi \circ f = \pi$ , luego  $\varphi = \text{Id}_X$ .  $\square$

**Definición 2.1.6.** Un subfibrado principal es un morfismo  $F : (P', G') \rightarrow (P, G)$  de fibrados tales que  $f : P' \rightarrow P$  es una subvariedad y  $f' : G' \rightarrow G$  es un subgrupo de Lie.

Una reducción de un fibrado principal  $(P, G)$  es un subfibrado  $F : (P', G') \rightarrow (P, G)$  de manera que  $X=X'$  y  $\varphi = \text{Id}_X$ .

**Definición 2.1.7.** El fibrado trivial sobre  $X$  de grupo estructural  $G$  viene dado por la operación de  $G$  sobre el producto  $X \times G$  definida por  $(x, g_1) \cdot g_2 = (x, g_1 \cdot g_2)$ , con  $g_1, g_2 \in G$  y  $x \in X$ .

Enunciamos siguiente resultado cuya demostración se puede ver en [3].

**Lema 2.1.8.** Sean  $Z$  e  $Y$  dos variedades diferenciables,  $W$  una subvariedad de  $Y$ . Sea  $f : Z \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable de manera que para todo  $x \in Z$   $T_{f(x)}Y = (f_x)_*(T_xZ) + T_{f(x)}W$ , es decir,  $f$  es transversal a  $W$ , entonces  $f^{-1}(W)$  es una subvariedad de  $Z$ .

**Proposición 2.1.9.** Sea  $\varphi : X' \rightarrow X$  una aplicación diferenciable y sea  $\pi : P \rightarrow X$  un fibrado principal de grupo  $G$ , el subconjunto

$$\varphi^*P = \{(x', u) \in X' \times P / \varphi(x') = \pi(u)\}$$

es una subvariedad de  $X' \times P$ , y la proyección sobre el primer factor  $pr_1 : \varphi^*P \rightarrow X'$  junto con la operación de  $G$  sobre  $\varphi^*P$  definida por  $(x', u) \cdot g = (x', u \cdot g)$  dotan a  $\varphi^*P$  de estructura de fibrado principal con grupo  $G$  sobre  $X'$ . Además la proyección sobre el segundo factor  $pr_2 : \varphi^*P \rightarrow P$  es un morfismo de  $G$ -fibrados principales tal que la aplicación inducida en las bases es  $\varphi$ .

*Demostración.* Usaremos el lema anterior con  $Z = X' \times P, Y = X \times X$ ,  $f = \varphi \times \pi$  y  $W = \{(x, x) / x \in X\}$ . Veamos que se cumple la condición de transversalidad.

$$(\varphi \times \pi)_{*(x', u)}(T_{(x', u)}(X' \times P)) = (\varphi_*)_{x'}(T_{x'}X') \oplus (\pi_*)_u(T_uP) = (\varphi_*)_{x'}(T_{x'}X') \oplus T_xX$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que  $\pi$  es una submersión. Así

$$(\varphi \times \pi)_{*(x',u)}(T_{(x',u)}X' \times P) + T_{(x,x)}W = ((\varphi_*)_{x'}(T_{x'}X') \oplus T_xX) + T_{(x,x)}W$$

que es igual al espacio total  $T_{(x,x)}(X \times X)$ , ya que si

$$(A, B) \in T_xX \oplus T_xX = T_{(x,x)}(X \times X)$$

podemos escribir

$$(A, B) = (0, B - A) + (A, A)$$

con lo cual  $\varphi$  es transversal a  $W$ . Y como  $\varphi^*P = (\varphi \times \pi)^{-1}(W)$  podemos asegurar por el lema anterior que  $\varphi^*P$  es una subvariedad de  $X' \times P$ .

Demostraremos que  $pr_1 : \varphi^*P \rightarrow X'$  es un  $G$ -fibrado principal con la operación indicada en el enunciado. Veamos primero que  $pr_1$  es suprayectiva. En efecto si  $x' \in X'$ , tomo  $u \in P$  tal que  $\pi(u) = \varphi(x')$  y se tiene que  $pr_1(x', u) = x'$ .

Demostremos que la proyección  $pr_1$  es una submersión. Sea  $(x'_0, u_0) \in \varphi^*P$  cualquiera y  $x_0 = \varphi(x'_0)$ . Como  $\pi$  es submersión existe una sección local alrededor de  $x_0$ , es decir, existe un entorno  $U$  de  $x_0$  y una aplicación diferenciable  $s : U \rightarrow P$  tal que  $\pi \circ s = Id_U$  y  $s(x_0) = u_0$ . Llamemos ahora  $U' = \varphi^{-1}(U)$  y  $s' : U' \rightarrow \varphi^*P \subset X' \times P$  definida por  $s'(x') = (x', s(\varphi(x')))$ . Se verifica que  $s'$  es una sección de  $pr_1$  en torno al punto  $x'_0$  con  $s'(x'_0) = (x'_0, u_0)$ , por tanto existe una sección local para cada punto, luego  $pr_1$  es una submersión.

Por último la acción de  $G$  es libre y las fibras coinciden con las órbitas como se comprueba fácilmente.  $\square$

**Ejemplo 2.1.10.** Consideremos  $i : U \rightarrow X$  la inclusión donde  $X$  es la variedad base del fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$  con grupo  $G$ . En este caso, a la construcción de la proposición anterior  $i^*P = P_U$  se le denomina restricción de  $P$  al abierto  $U$ .

**Proposición 2.1.11.** Todo fibrado principal es localmente trivial.

*Demostración.* Como  $\pi : P \rightarrow P/G = X$  es una proyección regular, cada  $x_0 \in X$  existe  $U \subset X$  abierto tal que  $s : U \rightarrow P$  es una sección. Definimos

$$f : U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U) = P_U \subset P$$

$$(x, g) \mapsto s(x) \cdot g$$

es diferenciable porque  $s$  es diferenciable y la acción también. Es un morfismo ya que

$$f((x, g)\tau) = f(x, g\tau) = s(x)g\tau = f(x, g) \cdot \tau$$

Es biyectiva ya que la función  $r(u) = (\pi(u), g)$  es la inversa de  $f$ , donde  $g$  es el único elemento de  $G$  que cumple que  $s(\pi(u))g = u$ , el cuál existe porque las fibras coinciden con las órbitas. Veámoslo:

$$\begin{aligned} f \circ r(u) &= f(\pi(u), g) = s(\pi(u)) \cdot g = u \\ r \circ f(x, g) &= r(s(x) \cdot g) = (\pi(s(x))g, g) = (\pi(s(x)), g) = (x, g) \end{aligned}$$

Por tanto es biyectiva y es un isomorfismo. □

**Proposición 2.1.12.** *La condición necesaria y suficiente para que un fibrado principal sea trivial es que admita una sección global.*

*Demostración.* La demostración es igual que la proposición anterior. Partiendo de una sección global  $s : X \rightarrow P$ , se define  $f : X \times G \rightarrow P$  por la misma fórmula, sustituyendo el abierto  $U$  por la variedad  $X$  en toda la demostración. □

Dado  $\pi_G : P \rightarrow X$  un fibrado principal, tomamos un recubrimiento abierto  $\{U_\alpha\}$  de  $X$  sobre el que el fibrado trivializa. Tenemos que para todo  $U_\alpha$  existe  $f_\alpha : P_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times G$  definida por  $f_\alpha(u) = (\pi_G(u), (\phi_\alpha(u)))$  para cierta función  $\phi_\alpha : P_{U_\alpha} \rightarrow G$  que verifica  $\phi_\alpha(ug) = \phi_\alpha(u)g$ . Si  $f_\beta : P_{U_\beta} \rightarrow U_\beta \times G$  es la trivialización correspondiente a otro abierto  $U_\beta$ , entonces sobre  $P_{U_\alpha \cap U_\beta}$  se tiene:

$$\phi_\beta(ug)\phi_\alpha(ug)^{-1} = \phi_\beta(u)g(\phi_\alpha(u)g)^{-1} = \phi_\beta(u)\phi_\alpha(u)^{-1}$$

con lo cual el valor de  $\phi_\beta(u)\phi_\alpha(u)^{-1}$  no depende del representante de la fibra elegido y por tanto podemos definir una aplicación

$$\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G, \psi_{\beta\alpha}(x) = \phi_\beta(u)\phi_\alpha(u)^{-1}$$

donde  $x = \pi_G(u)$ .

Las funciones  $\{\psi_{\gamma\alpha}\}$  verifican la condición

$$\psi_{\gamma\alpha} = \psi_{\gamma\beta}\psi_{\beta\alpha}$$

sobre  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ . Esta condición recibe el nombre de condición de ciclo. Las funciones  $\{\psi_{\gamma\alpha}\}$  reciben el nombre de funciones de transición de la trivialización  $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ .

Tenemos también que para cada  $U_\alpha$  existe una sección  $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow P$  del fibrado dado por  $s_\alpha(x) = f_\alpha^{-1}(x, e) = u$  donde  $\pi_G(u) = x$  y  $\phi_\alpha(u) = e$ . Si  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  entonces tenemos que  $s_\beta(x) = u$ ,  $s_\alpha(x) = u'$  y  $\pi_G(u) = \pi_G(u') = x$  por tanto  $u$  y  $u'$  están en la misma fibra luego  $u = u' \cdot g$ . Por tanto  $s_\beta(x) = s_\alpha(x) \cdot g$ . Se tiene también que  $\phi_\alpha(s_\alpha(x)) = e$ , ya que se cumple

$$(x, \phi_\alpha(s_\alpha(x))) = f_\alpha(s_\alpha(x)) = (x, e)$$

Por otro lado  $\phi_\alpha(s_\alpha(x)) = \phi_\alpha(u') = e = \phi_\beta(u) = \phi_\beta(s_\beta(x))$  y entonces

$$\psi_{\beta\alpha}(x) = \phi_\beta(s_\beta(x))\phi_\alpha(s_\beta(x))^{-1} = \phi_\alpha(s_\beta(x))^{-1} = \phi_\alpha(s_\alpha(x) \cdot g)^{-1} = e \cdot g^{-1} = g^{-1}$$

y por tanto tenemos que  $s_\beta(x) = s_\alpha(x) \cdot g$  con lo cual  $s_\beta(x) = s_\alpha(x) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x)$ .

Veamos ahora un teorema que es lo inverso a este último comentario que hemos hecho.

**Teorema 2.1.13.** *Sea  $X$  una variedad diferenciable y  $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  funciones diferenciables definidas sobre las intersecciones binarias de un recubrimiento abierto  $\{U_\alpha\}$  de  $X$  verificando la condición de cociclo. Existe un fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$  de grupo estructural  $G$  que trivializa sobre  $\{U_\alpha\}$  y que admite de funciones de transición las funciones  $\psi_{\beta\alpha}$ .*

*Demostración.* Vamos a llamar  $V = \bigcup U_\alpha \times G$ , provisto con la topología de suma directa.  $V$  es una variedad diferenciable y definimos la relación de equivalencia  $(\alpha, x, \sigma)R(\beta, y, \tau)$  si y solo si  $x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$  y  $\tau = \psi_{\beta\alpha}(x)\sigma$ .

Para demostrar que  $V/R$  es una variedad diferenciable vamos a probar que  $R$  es una subvariedad cerrada de  $V \times V$  y que  $p : R \rightarrow V$  es regular con lo que tendremos que  $V/R$  existe y que la proyección  $p : V \rightarrow V/R$  es regular.

Para ver que es una subvariedad cerrada se utiliza que  $R$  es el grafo de una aplicación continua. Sea  $U_x \subset U_\alpha \cap U_\beta$  y definimos

$$g : U_x \times G \rightarrow U_\beta \times G$$

$$(\alpha, x', \sigma') \mapsto (\beta, x', \psi_{\beta\alpha}(x')\sigma')$$

y así tenemos que  $R = \text{grafo}(g)$ . Para demostrar que la función  $g$  es continua se demuestra que  $\lim(g(\alpha_n, x_n, \sigma_n)) = g(\lim(\alpha_n, x_n, \sigma_n))$  para una sucesión convergente  $(\alpha_n, x_n, \sigma_n) \in U_x \times G$

Sea  $[x, \sigma]$  la clase de equivalencia de  $(x, \sigma) \in U_\alpha \times G \text{ mod } R$ . Definimos la acción  $[x, \sigma] \cdot \tau = [x, \sigma\tau]$ . Esta acción no depende del representante y es libre.

Sea  $\pi' : V \rightarrow X$  definida por  $\pi'(\alpha, x\sigma) = x$ , claramente  $\pi'$  es regular y toma valores constantes sobre las clases de equivalencia, luego  $\pi'$  factoriza a

través de  $p$ . Y así existe una aplicación  $\pi : P = V/R \longrightarrow X$  con  $\pi([\alpha, x, \sigma]) = x$ . Como  $\pi'$  y  $p$  son regulares y diferenciables entonces  $\pi$  también es regular y diferenciable. Tenemos que  $\pi^{-1}(x) = \{[x, \sigma]\} = [x, e] \cdot \sigma$  con  $\sigma \in G$  que es la órbita de  $G$  en  $P$ , luego  $X = P/G$ .

Para finalizar se puede ver que  $P$  trivializa sobre  $\{U_\alpha\}$  con funciones de transición  $\{\psi_{\beta\alpha}\}$ .

Sea  $f_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$  definida del siguiente modo: si  $u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$  entonces admite un único representante de la forma  $u = [\alpha, x, \sigma]$  y definimos  $f_\alpha(u) = (\pi(u), \phi_\alpha(u)) = (x, \sigma)$ , donde  $\phi_\alpha([\alpha, x, \sigma]) = \sigma$ . Claramente  $f_\alpha$  es biyectiva y diferenciable, y además las funciones de transición que están definidas por  $\psi'_{\beta\alpha}(x) = \phi_\beta(u)\phi_\alpha(u)^{-1}$  coinciden con  $\psi_{\beta\alpha}(x)$  en  $U_\alpha \cap U_\beta$ .  $\square$

## 2.1.2. Ejemplos de fibrados principales

Veamos unos ejemplos de fibrados principales.

**Ejemplo 2.1.14.** *Fibrado de las referencias lineales de un fibrado vectorial*

**Definición 2.1.15.** *Llamaremos fibrado vectorial a una proyección regular  $p : E \longrightarrow X$  tal que  $E_x = p^{-1}(x)$  es un espacio vectorial real de  $m$ -dimensional y de tal forma que existe un recubrimiento abierto  $\{U_\alpha\}$  de  $X$ , y una familia de difeomorfismos*

$$\xi_{U_\alpha} : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$$

$$e \longmapsto (p(e), \sigma_\alpha(e))$$

tal que si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  entonces se cumple  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta \cdot g_{\alpha\beta}$  para cierta aplicación diferenciable  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^m$ .

Un ejemplo de fibrado vectorial lo tenemos en el fibrado tangente de la variedad  $X$ , que denotaremos por  $TX = \{(x, v), x \in X, v \in T_x X\}$ .

Se tiene que la aplicación canónica  $\pi : TX \longrightarrow X$ , que es trivialmente epiyectiva y  $\pi^{-1}(x)$  es isomorfo a  $T_x X$ . Por otra parte si,  $(U, \phi)$  es una carta sobre  $X$  con coordenadas  $\{x_i\}$ , los vectores  $v \in T_x X$  pueden escribirse  $v = \sum a_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x$ . Este hecho permite definir una aplicación biyectiva

$$\xi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

por  $\xi_U(x, v) = (x, a_i(x))$ .  $TX$  tiene una estructura de variedad  $2m$ -dimensional de la siguiente manera: Para cada carta  $(U, \phi)$  de  $X$ , definimos la carta  $(\pi^{-1}(U), \hat{\phi})$  definida por  $\hat{\phi}(p, v) = (x_i(p), a_i(p)) \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Si consideramos otra carta  $(V, \psi)$  se puede construir otra trivialización  $\xi_V : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$  con  $\xi_V(x, v) = (x, b_i(x))$  donde  $v = \sum b_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_x$ , donde  $\{y_i\}$  son las coordenadas de la carta  $\psi$ . Además escribiendo  $s_V(x, v) = (b_i(x))$  y  $s_U(x, v) = (a_i(x))$  se tiene

$$s_V(x, v) = g_{VU}(x) s_U(x, v)$$

donde  $g_{VU}(x) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)_x$  es la matriz Jacobiana de la transformación. Y por tanto  $TX$  es un fibrado vectorial.

**Proposición 2.1.16.** Sea  $p : E \rightarrow X$  un fibrado vectorial de rango  $m$  sobre una variedad y  $R(E)$  el subespacio de  $E \oplus \dots \oplus E$  formado por los sistemas de vectores  $(e_1, \dots, e_n)$  que son base de la fibra  $E_x$ . La proyección canónica  $\pi : R(E) \rightarrow X$  posee estructura de fibrado principal con grupo estructural  $GL(n, \mathbb{R})$ . A este fibrado lo llamaremos fibrado de las referencias lineales del fibrado vectorial  $E$ . A su vez se denomina fibrado de las referencias lineales de una variedad diferenciable  $X$  al fibrado de las referencias de su fibrado tangente:  $R(X) = R(TX)$ .

*Demostración.* El grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  actúa en  $R(E)$  por la fórmula  $(e_1, \dots, e_m)A = (e'_1, \dots, e'_m)$  donde  $e'_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} e_j, A = (a_{ij})$ . Esta operación es libre y dadas dos referencias  $u, v$  de  $E$ , existe una única matriz  $A$  tal que  $v = u \cdot A$ . Y por tanto las fibras de  $\pi$  coinciden con las órbitas de  $GL(n, \mathbb{R})$ , con lo cual es un fibrado principal.  $\square$

**Ejemplo 2.1.17.** Fibración de Hopf

Consideremos  $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ . Tanto  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  como  $S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$  son grupos de Lie, ya que  $|xy| = |x||y|$  y por tanto  $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ . Definimos la aplicación diferenciable:

$$f : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{R}$$

por la fórmula  $f(x, y) = (2x\bar{y}, |x|^2 - |y|^2)$ . Este morfismo aplica  $S^7$  en  $S^4$  en el caso de  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  o  $S^3$  en  $S^2$  en el caso de  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , ya que si  $(x, y) \in S^7, S^3$  por tanto  $|x|^2 + |y|^2 = 1$ :

$$|f(x, y)|^2 = |2x\bar{y}|^2 + (|x|^2 - |y|^2)^2 = (|x|^2 + |y|^2)^2 = 1$$

Así  $f$  define un morfismo  $\pi : S^7 \rightarrow S^4$  o  $\pi : S^3 \rightarrow S^2$  dependiendo del cuerpo elegido. Veamos que es un fibrado principal de grupo estructural  $S^3$  y  $S^1$  respectivamente. La prueba es idéntica en los dos casos. La operación de  $S^3$  sobre  $S^7$  o de  $S^1$  sobre  $S^3$  viene dado por la fórmula:

$$(x, y)z = (xz, yz)$$

y las fibras de  $\pi$  coinciden con las órbitas de  $S^3$  o de  $S^1$ , ya que

$$f(xz, yz) = (2xz\bar{z}y, (|x|^2 - |y|^2)|z|^2) = (2x\bar{y}, |x|^2 - |y|^2) = |f(x, y)|$$

ya que  $|z|=1$ .

Recíprocamente si  $f(x, y) = f(x', y')$ , se tiene  $x\bar{y} = x'\bar{y}'$  y  $|x|^2 - |y|^2 = |x'|^2 - |y'|^2$ . Luego se tiene que  $|x||y| = |x'||y'|$ ,  $|x|^2 + |y|^2 = |x'|^2 + |y'|^2$  y por tanto podemos suponer que  $x \neq 0$ , con lo que  $z = x^{-1}x'$  es un elemento de  $S^3$  o de  $S^1$  que verifica:  $x' = xz$  y de  $x\bar{y} = x'\bar{y}'$  se sigue  $\bar{y} = z\bar{y}'$ , tomando conjugados tenemos que  $y = y'\bar{z}$ . Luego  $y' = y\bar{z}^{-1} = yz$  ya que si  $z \in S^3, S^1$  entonces  $z^{-1} = \bar{z}$ , es decir  $(x', y') = (x, y) \cdot z$ .

Veamos que  $\pi$  es proyección regular. Sea  $U_1$  el abierto complementario de  $e_0 = (0, 0, 0, 0, 1)$  en  $S^4$  y  $U_2$  el complementario de  $-e_0$ . La aplicación  $\pi$  admite como secciones las aplicaciones

$$s_1 : U_1 \longrightarrow S^7, s_1(z, t) = \left( \frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}, \sqrt{\frac{1-t}{2}} \right), (z, t) \in S^4, t \neq 1$$

$$s_2 : U_1 \longrightarrow S^7, s_2(z, t) = \left( \sqrt{\frac{1+t}{2}}, \frac{\bar{z}}{\sqrt{2(1+t)}} \right), (z, t) \in S^4, t \neq 1$$

. Las mismas aplicaciones se consideran en el caso de  $S^3$

Como  $\pi$  trivializa sobre  $U_1$  y  $U_2$ , porque admite secciones sobre  $U_1$  y  $U_2$ ) tal fibrado está descrito por una única función de transición  $\psi_{21} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow S^3$  que pasamos calcular. Según hemos visto se tiene que  $s_1(z, t) = s_2(z, t)\psi_{21}(z, t)$ . Por tanto se obtiene que  $\psi_{21}(z, t) = \frac{z}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{z}{|z|}$  ya que  $|z|^2 + |t|^2 = 1$ .

Si consideramos el caso de  $S^3$  obtenemos el fibrado del monopolio magnético, mientras que si consideramos  $S^7$  se obtiene el fibrado del instantón. Estos ejemplos aparecen a veces utilizando los grupos de Lie  $U(1) = S^1$  o  $SU(2) = S^3$

### Ejemplo 2.1.18. Grupos homogéneos

Para este ejemplo usaremos el resultado siguiente cuya demostración se puede ver en [7]

**Teorema 2.1.19.** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $H \subset G$  un subgrupo cerrado de Lie, entonces existe una única estructura de variedad diferenciable en  $G/H$  tal que  $\pi : G \longrightarrow G/H$  es una submersión.

**Teorema 2.1.20.**  $\pi : G \longrightarrow G/H$  con  $\pi(g) = gH$  es un fibrado principal con la acción  $g \cdot h = gh$  la operación del grupo  $G$ .

*Demostración.* La acción es libre claramente y las fibras de  $\pi$  coinciden con las órbitas de  $H$ . Con lo cual es un fibrado principal por el teorema anterior.  $\square$

Se tiene que  $S^{n-1} = \frac{O(n)}{O(n-1)}$ ,  $S^{2n-1} = \frac{U(n)}{U(n-1)}$ ,  $S^{4n-1} = \frac{Sp(n)}{Sp(n-1)}$ , por tanto:

$$\pi : O(n) \longrightarrow S^{n-1}$$

$$\pi : U(n) \longrightarrow S^{2n-1}$$

$$\pi : Sp(n) \longrightarrow S^{4n-1}$$

son fibrados principales.

La variedad de Grassmann  $G(k, n, \mathbb{K})$  es el espacio de todos los  $k$ -planos que contienen a  $0$  en  $\mathbb{K}^n$ . Se tiene que

$$G(k, n, \mathbb{R}) = \frac{O(n)}{O(k) \times O(n-k)}$$

$$G(k, n, \mathbb{C}) = \frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)}$$

$$G(k, n, \mathbb{H}) = \frac{Sp(n)}{Sp(k) \times Sp(n-k)}$$

Por tanto

$$\pi : O(n) \longrightarrow G(k, n, \mathbb{R})$$

$$\pi : U(n) \longrightarrow G(k, n, \mathbb{C})$$

$$\pi : Sp(n) \longrightarrow G(k, n, \mathbb{H})$$

son fibrados principales.

### 2.1.3. Campos $G$ -invariantes

De la misma forma a como se definieron los campos invariantes de un grupo de Lie tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.1.21.** Si tenemos  $\pi : P \longrightarrow X$  un fibrado principal, se dice que un campo  $D \in \mathfrak{X}(P)$  es  $G$ -invariante si  $(R_g)_*(D) = D$  para todo  $g \in G$ . Al conjunto de campos  $G$ -invariantes se le denotara por  $\text{aut}(P)$ .

De la misma forma a como se hizo para los grupos de Lie se tiene que  $\text{aut}(P)$  es un subálgebra de Lie de  $\mathfrak{X}(P)$ .

**Proposición 2.1.22.** Se tiene que  $D$  es  $G$ -invariante si y solo si  $\phi_t \circ R_g = R_g \circ \phi_t$  (es decir  $\phi_t \in \text{Aut}(P)$ ) donde  $\phi_t$  es el flujo del campo  $D$ .

*Demostración.* Se tiene que

$$\begin{aligned} ((R_g)_*D)_x(f) &= D_{R_g^{-1}(x)}(f \circ R_g) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^*(f \circ R_g)(R_g^{-1}(x)) - (f \circ R_g)(R_g^{-1}(x))) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((f \circ R_g \circ \phi_t \circ R_g^{-1})(x) - f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((R_g \circ \phi_t \circ R_g^{-1})^*(f)(x) - f(x)) \end{aligned}$$

De donde se obtiene el resultado.  $\square$

**Definición 2.1.23.** Se dice que un campo es  $\pi$ -proyectable si verifica que  $D_{ug}(f \circ \pi) = D_u(f \circ \pi)$  para toda  $f \in C^\infty(X)$  que es equivalente a que  $\pi_*(D_{ug}) = \pi_*(D_u)$ .

**Proposición 2.1.24.** Si  $D$  es  $G$ -invariante entonces es  $\pi$ -proyectable.

*Demostración.*  $(R_g)_*(D_u) = D_{ug}$  por lo tanto  $\pi_*(D_{ug}) = \pi_*((R_g)_*(D_u)) = (\pi \circ R_g)_*(D_u) = \pi_*(D_u)$   $\square$

Así tiene sentido hablar de  $\pi_*D \in \mathfrak{X}(P)$  para todo  $D \in \text{aut}(P)$ .

**Definición 2.1.25.** Al subfibrado  $VP = \{D \in TP / \pi_*D = 0\}$  de vectores tangentes a la fibra de  $P$  se le llama fibrado vertical de  $P$ .

Para cada  $u \in \pi^{-1}(x)$  con  $x \in X$ , se tiene la sucesión exacta de espacios vectoriales:

$$0 \rightarrow T_u(\pi^{-1}(x)) = V_u(P) \rightarrow T_uP \rightarrow T_xX \rightarrow 0$$

**Definición 2.1.26.** Un campo  $D \in \mathfrak{X}(P)$  es un campo gauge si es un campo  $G$ -invariante que es  $\pi$ -vertical, es decir  $\pi_*D = 0$ . Al conjunto de campos gauge se le denota por  $\text{gau}(P)$ .

**Proposición 2.1.27.** Se tiene que  $\text{gau}(P)$  es un ideal de  $\text{aut}(P)$ .

*Demostración.* El resultado se obtiene de la conmutatividad de  $\pi_*$  y el corchete de Lie.  $\square$

Si los campos  $G$ -invariantes son los generadores infinitesimales de los automorfismos (podemos considerarlos como el álgebra de Lie de  $Aut(P)$ ), los campos gauge se consideran los generadores infinitesimales de los automorfismos verticales, es decir, de  $Gau(P)$ .

El siguiente resultado geométrico es esencial en la teoría de fibrados principales:

**Proposición 2.1.28.** *Sea  $B \in \mathcal{G}$  y  $B^* \in \mathfrak{X}(P)$  su campo fundamental que definimos en 1.1.2 entonces se tiene que:*

1.  $B^*$  es  $\pi$ -vertical

2.

$$* : \mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{X}(P)$$

$$B \mapsto B^*$$

es un monomorfismo de álgebras de Lie.

3.  $(R_g)_* B_u^* = (Ad_{g^{-1}} B)_{ug}^*$ , para todo  $u \in P$  y  $g \in G$ .

4. Para cada  $u \in P$  se tiene que

$$* : \mathcal{G} \longrightarrow V_u P$$

$$B \mapsto B_u^*$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Así el fibrado  $VP$  es isomorfo a  $P \times \mathcal{G}$  mediante la aplicación  $(u, B) \mapsto B_u^*$ .

#### 2.1.4. Fibrado asociado a un fibrado principal

**Proposición 2.1.29.** *Sea  $\pi : P \longrightarrow X$  un fibrado principal de grupo  $G$  y sea  $F$  una variedad diferenciable sobre la cual  $G$  actúa por la izquierda. El grupo  $G$  opera sobre el producto  $P \times F$  mediante la fórmula  $(u, y) \cdot g = (ug, g^{-1}y)$  y se verifica:*

1. La variedad  $\frac{P \times F}{G}$  existe y se designa por  $P \times_G F$

2. La aplicación  $\pi_F : P \times_G F \longrightarrow X$  definida por  $\pi_F([(u, y)]) = \pi(u)$  es una fibración de fibra  $F$ .

3. Si  $s : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$  es una sección de  $\pi$  sobre un abierto  $U \subset X$  la aplicación

$$f : U \times F \longrightarrow \pi_F^{-1}(U) \\ (x, y) \mapsto [(s(x), y)]$$

es un isomorfismo de variedades sobre  $U$ .

La fibración  $\pi_F$  recibe el nombre de fibrado asociado al fibrado principal y a la acción de  $G$  por  $F$ .

*Demostración.* Sea  $R \subset (P \times F) \times (P \times F)$  la relación de equivalencia inducida por  $G$  en  $P \times F$ . Probaremos que  $R$  es una subvariedad cerrada, ello implicará la existencia de la variedad cociente.  $R$  esta formada por los puntos  $((u, y), (u', y'))$  tales que:  $u' = ug, y' = g^{-1}y$  para algún  $g \in G$ . Sea  $p : P \times_X P \longrightarrow G$  la aplicación definida del siguiente modo:  $p(u, u')$  es el único punto de  $G$  tal que  $u' = up(u, u')$ . Sea  $\tau : P \times P \times F \times F \longrightarrow (P \times F) \times (P \times F)$  el difeomorfismo obtenido permutando los factores. Se tiene que  $R$  es la composición de  $\tau$  con la gráfica de la aplicación  $h : (P \times_X P) \times F \longrightarrow F$   $h(u, u', y) = p(u, u')^{-1} \cdot y$ . Es decir:

$$R = \text{Im}[(P \times_X P) \times F \xrightarrow{(id, h)} (P \times_X P) \times F \times F \xrightarrow{\tau} (P \times F) \times (P \times F)]$$

Como la gráfica de un morfismo es una inmersión cerrada y  $\tau$  es un difeomorfismo se concluye que  $R$  es una subvariedad cerrada.

Para demostrar 3) como la cuestión es local podemos suponer que  $P$  es trivial, es decir  $P = X \times G$ . Sea  $q : P \longrightarrow G$  la aplicación  $q(u) = p(u, s(\pi u))$  y  $\phi : P \times F \longrightarrow X \times F$  el morfismo sobre  $X$  definido por  $\phi(u, y) = (\pi(u), q(u)^{-1}y)$ . Tal aplicación es invariante frente a la acción de  $G$  en  $P \times F$ . En efecto

$$\phi(ug, g^{-1}y) = (\pi(ug), q(ug)^{-1}g^{-1}y) = (\pi(u), q(u)^{-1}y) = \phi(u, y)$$

Por tanto  $\phi$  factoriza dando lugar a una aplicación diferenciable  $\bar{\phi} : P \times^G F \longrightarrow X \times F$  que es la inversa de  $f$ . En efecto:

$$(f \circ \bar{\phi})[u, y] = f\phi(u, y) = f(\pi(u), q(u)^{-1} \cdot y) = \\ = [s\pi(u), q(u)^{-1} \cdot y] = s\pi(u) \circ (u)^{-1}, y] = [u, y]; \\ (\bar{\phi} \circ f)(x, y) = \bar{\phi}[s(x), y] = \phi(s(x), y) = (\pi s(x), q(s(x))^{-1} \cdot y) = (x, y)$$

□

**Proposición 2.1.30.** *Cada punto  $u \in P$  le podemos poner en correspondencia una aplicación  $u : F \rightarrow P \times_G F$  definida por  $u(y) = [(u, y)]$ . Se tiene que si  $x = \pi(u)$  entonces  $u : F \rightarrow \pi_F^{-1}(x)$  es un difeomorfismo.*

Este resultado nos dice que las fibras tipo de  $P \times_G F$  son  $F$ .

**Definición 2.1.31.** *Una aplicación  $\eta : P \rightarrow F$  es  $G$ -equivariante si verifica que  $\eta(u \cdot g) = g^{-1}\eta(u)$*

Si tenemos  $\eta : P \rightarrow F$   $G$ -equivariante y  $x = \pi(u)$  podemos definir  $s : X \rightarrow P \times_G F$  mediante  $s(x) = [(u, \eta(u))]$ . Se tiene que  $\pi_F \circ s(x) = \pi_F([(u, \eta(u))]) = \pi(u) = x$ , la cual es una sección de  $\pi_F : P \times_G F \rightarrow X$  y así tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.32.** *Las secciones  $s$  de un fibrado asociado  $\pi_F : P \times_G F \rightarrow X$  están en correspondencia biunívoca con el conjunto de aplicaciones  $\eta : P \rightarrow F$  que son  $G$ -equivariantes.*

**Observación 2.1.33.** *En el caso de que sea un grupo de Lie y la acción por la izquierda de  $G$  sobre  $F$  es por automorfismos, entonces las fibras del fibrado  $\pi_F : P \times_G F \rightarrow X$  poseen estructura de grupo de Lie isomorfo a  $F$  con la operación dada por  $[(u, y)] \cdot [(u, y')] = [(u, yy')]$  de modo que  $\pi_F$  es un fibrado de grupos de Lie.*

## 2.1.5. Fibrados AdP y adP

**Definición 2.1.34.** *Si consideramos la acción de  $G$  sobre si mismo a través de la conjugación  $c_g : G \rightarrow G$ ,  $c_g(h) = ghg^{-1}$  el fibrado asociado  $\pi_G : P \times_G G \rightarrow X$  se le denota por  $AdP$ . Por la observación anterior el fibrado  $\pi_G : AdP \rightarrow X$  es un fibrado de grupos de Lie y como consecuencia el conjunto de secciones de  $\pi_G$ , que lo denotaremos por  $\Gamma(X, AdP)$ , tiene estructura de grupo con la operación*

$$(s \cdot s')(x) = s(x) \cdot s'(x) \forall x \in X$$

**Proposición 2.1.35.** *El conjunto  $Gau(P)$  de transformaciones gauge está en biyección natural con el conjunto  $\Gamma(X, AdP)$ . Con la estructura de grupo definida antes para  $\Gamma(X, AdP)$  y la estructura de grupo de  $Gau(P)$  como grupo de transformaciones, se tiene que dicha biyección es un isomorfismo de grupos.*

*Demostración.* Por la proposición 2.1.32 el conjunto  $\Gamma(X, AdP)$  se corresponde biunívocamente con el de funciones  $G$ -equivariantes  $\phi : P \rightarrow G$ .

Dada una  $\phi$   $G$ -equivariante se define

$$\begin{aligned}\psi : P &\longrightarrow P \\ u &\mapsto u\phi(u)\end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que  $\psi \in \text{Gau}(P)$ .

Recíprocamente: Sea  $\psi \in \text{Gau}(P)$ . Definimos  $\phi : P \longrightarrow G$  que verifique  $\psi(u) = u\phi(u)$ .

Se ve de forma similar que  $\phi$  es  $G$ -equivariante, y por tanto existe una sección del fibrado  $AdP$ . □

**Definición 2.1.36.** Si consideramos la acción de  $G$  sobre su álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  a través de la aplicación adjunta  $Ad_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$  el fibrado vectorial sobre  $X$  asociado a  $\pi_G : P \times_G \mathcal{G} \longrightarrow X$  se llama adjunto y se denota por  $adP = \frac{P \times \mathcal{G}}{G}$  donde la acción de  $G$  sobre  $P \times \mathcal{G}$  viene dada por

$$(u, D) \cdot g = (ug, Ad_{g^{-1}}(D))$$

para todo  $u \in P$ ,  $D \in \mathcal{G}$ ,  $g \in G$

Denotaremos las clases por  $(u, D)_{ad}$  con  $u \in P$  y  $D \in \mathcal{G}$ .

**Proposición 2.1.37.** El conjunto  $\text{gau}(P)$  de campos gauge está en biyección natural con el conjunto  $\Gamma(X, adP)$  de las secciones del fibrado  $adP$ .

*Demostración.* El conjunto  $\Gamma(X, adP)$  en virtud de la proposición 2.1.32 esta en biyección con el conjunto de funciones  $\phi : P \longrightarrow \mathcal{G}$   $G$ -equivariantes.

Dada  $\phi$   $G$ -equivariante se define el campo  $D$  como  $D_u = (\phi(u))_u^*$ . Es claro que el campo es vertical y se verifica que es  $G$ -invariante, luego  $D \in \text{gau}(P)$ .

Si  $D \in \text{gau}(P)$  entonces  $D \in VP$ . Por la biyección de la proposición 2.1.28 apartado 4, se tiene que existe una única aplicación  $\phi : P \longrightarrow \mathcal{G}$  que verifica que  $(\phi(u))^*u = D_u$  y esta aplicación es  $G$ -equivariante, con lo que se acaba la demostración. □

Consideremos el fibrado tangente,  $TP$ , y sobre él vamos a hacer actuar  $G$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}TP \times G &\longrightarrow TP \\ (D_u, G) &\mapsto (R_g)_*D_u\end{aligned}$$

y llamamos  $T_G(P) = \frac{TP}{G}$ . Un punto de  $T_G(P)$  es un campo de vectores definido a lo largo de la fibra  $u = \pi^{-1}(x)$  y que es  $G$ -invariante. La clase de

equivalencia la denotaremos por  $\{D_u\}$ . Veamos que  $T_G(P)$  tiene estructura de fibrado vectorial sobre  $X$ .

Sea  $x_0 \in X$  y sea  $U$  un entorno de  $x_0$  suficientemente pequeño de manera que exista una sección  $s : U \rightarrow P$ . Sea  $TP|_s$  la restricción de  $TP$  a  $s(U)$ . Definimos

$$\begin{aligned} \phi_s : T_G(U) &\rightarrow TP|_s \\ \{D_u\} &\mapsto D_{s(x)} \end{aligned}$$

Esta correspondencia es biyectiva. Veamos que la estructura de fibrado vectorial de  $TP|_s$  induce una estructura de fibrado vectorial en  $T_G(U)$ . Si  $TX|_s$  denota al fibrado tangente en  $s(U)$  y consideramos como proyección la composición

$$\begin{aligned} T_G(U) &\xrightarrow{\pi_*} TX|_s \xrightarrow{\pi'} U \\ \{D_u\} &\longmapsto \pi_*(D_u) \longmapsto \pi(u) \end{aligned}$$

Se demuestra que si  $(U, \xi)$  es una trivialización local de  $TP|_s$  entonces el par  $(U, \xi \circ \phi_s)$  es una trivialización local en  $T_G(U)$  en donde se utiliza que  $s : U \rightarrow s(U)$  es un homeomorfismo. Faltaría ver que esta estructura es independiente de  $s$ .

Sean  $s$  y  $s'$  dos secciones de  $P$  sobre  $U$ , tenemos que existe  $\psi_{\alpha\beta} : U \rightarrow G$  cumpliendo  $s(x) \cdot \psi_{\alpha\beta} = s'(x)$ . Así esta aplicación induce un isomorfismo de fibrados vectoriales  $\psi_{\alpha\beta} : TP|_s \rightarrow TP|_{s'}$  que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_G(U) & \xrightarrow{\phi_s} & TP|_s \\ & \searrow \phi_{s'} & \downarrow \psi_{\alpha\beta} \\ & & TP|_{s'} \end{array}$$

con lo cual la estructura de fibrado vectorial de  $T_G(P)$  sobre  $X$  está bien definida.

Sea  $VP$  el subfibrado vertical de  $TP$ .  $G$  también opera sobre  $VP$  y se define  $V_G(P) = \frac{VP}{G}$ . Si consideramos la aplicación  $\phi_s$  pero restringida a  $V_G(U)$  se tiene que  $\phi_s : V_G(U) \rightarrow VP|_s$ . Como  $VP|_s$  es un subfibrado de  $TP|_s$  entonces  $V_G(P)$  es un subfibrado de  $T_G(P)$ .

Por otro lado tenemos que la proyección  $\pi : P \rightarrow X$  induce una aplicación  $\pi_G : T_G(P) \rightarrow TX$  definida por  $\pi_G(\{D_u\}) = \pi_*(D_u)$ . De la definición de fibrado vectorial de  $T_G(P)$  se tiene que  $\pi_G$  es un homomorfismo de fibrados vectoriales.

Se tiene que  $TP|_s = VP|_s \oplus TX|_s$  y tendremos que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & V_G(U) & \rightarrow & T_G(U) & \rightarrow & TU \rightarrow 0 \\
& & \downarrow \phi_s & & \downarrow \phi_s & & \downarrow \phi_s \\
0 & \rightarrow & VP|_s & \rightarrow & TP|_s & \rightarrow & TX|_s \rightarrow 0
\end{array}$$

y de aquí se deduce que

$$0 \rightarrow V_G(P) \rightarrow T_G(P) \rightarrow TX \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre  $X$ .

Con esto hemos demostrado el siguiente teorema

**Teorema 2.1.38.** *Se tiene que la siguiente sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre  $X$*

$$0 \rightarrow V_G(P) \rightarrow T_G(P) \rightarrow TX \rightarrow 0$$

**Proposición 2.1.39.** *La aplicación  $\xi : adP \rightarrow V_G(P)$  definida por  $\xi((u, B)_{ad}) = \{B_u^*\}$  es un isomorfismo de fibrados vectoriales.*

*Demostración.* Esta bien definida ya que si  $(u, B), (u', B') \in P \times \mathcal{G}$  con  $(u, B)_{ad} = (u', B')_{ad}$  entonces existe un  $g \in G$  tal que  $u' = ug$  y  $B' = Ad_{g^{-1}}B$ . Por tanto  $(B')_{u'}^* = (Ad_{g^{-1}}B)_{ug}^* = (R_g)_*B_u^*$  por lo que  $\{B_u^*\} = \{B_{u'}^*\}$ . La aplicación es biyectiva porque la aplicación  $*$  :  $\mathcal{G} \rightarrow V_uP$  es biyectiva por la proposición 2.1.28.  $\square$

**Proposición 2.1.40.** *Las secciones globales del fibrado  $T_G(P) \rightarrow X$  se corresponden biunívocamente con los campos  $G$ -invariantes de  $P$ . Esto es  $\Gamma(X, T_G(P)) \cong aut(P)$ . Análogamente  $\Gamma(X, V_G(P)) \cong gau(P)$ .*

*Demostración.* Una clase  $\{D_u\} \in T_G(P)$  son campos  $G$ -invariantes a lo largo de la fibra  $\pi^{-1}(x)$  con  $\pi(u) = x$ .

Si tenemos  $s : X \rightarrow T_G(P)$  definida por  $s(x) = \{D_u\}$ , tomando ese campo  $D$  es  $G$ -invariante en todo  $P$ .

Si  $D$  es  $G$ -invariante y restringimos  $D$  a  $\pi^{-1}(x) \in X$ , se tiene que determina una clase de equivalencia  $\{D_u\} \in (T_G(P))_x$  y que la aplicación  $x \mapsto \{D_u\}$  es una sección de  $T_G(P)$ .

La igualdad  $\Gamma(X, V_G(P)) \cong gau(P)$  se obtiene restringiendo el resultado anterior a vectores verticales, o utilizando las proposiciones 2.1.35 y 2.1.39.  $\square$

**Observación 2.1.41.** *Si tomamos secciones globales de fibrados sobre  $X$  en la sucesión del teorema anterior se obtiene una sucesión exacta de  $C^\infty$ -módulos y álgebras de Lie*

$$0 \rightarrow gau(P) \rightarrow aut(P) \rightarrow \mathfrak{X}(X) \rightarrow 0$$

## 2.2. Conexiones de Ehresmann

### 2.2.1. Conexiones en un fibrado principal

Veamos tres definiciones de una conexión en un fibrado principal que son equivalentes:

**Definición 2.2.1.** Una conexión en un fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$  es un homomorfismo de fibrados vectoriales  $\Gamma : TP \rightarrow VP$  tal que:

1.  $\Gamma$  es un retracto de la inclusión, es decir,  $\Gamma|_{VP} = Id_{VP}$ .
2.  $\Gamma \circ (R_g)_* = (R_g)_* \circ \Gamma$ .

**Definición 2.2.2.** Una conexión en un fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$  es una distribución diferenciable  $\mathcal{H}$  (llamada parte horizontal) que cumple:

1.  $T_u P = V_u(P) \oplus H_u$  para cada  $u \in P$ .
2.  $(R_g)_* H_u = H_{ug}$  para cada  $u \in P$  y  $g \in G$ .

Las componentes de un vector tangente  $D_u \in T_u(P)$  con respecto a los subespacios  $V_u(P)$  y  $H_u$ , serán llamadas componentes vertical y horizontal y escribiremos  $D_u = D_u^v + D_u^h$ .

Esta definición lo que nos muestra es que una conexión es una regla para descomponer un vector en su parte vertical y horizontal.

**Definición 2.2.3.** Una conexión en un fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$  es equivalente a dar una 1-forma  $\omega$  en  $P$  con valores en  $\mathcal{G}$  que verifique:

1.  $\omega(B_u^*) = B$  para todo  $B \in \mathcal{G}$  y  $u \in P$ .
2.  $(R_g)^* \omega = Ad_{g^{-1}} \circ \omega$ .

Veamos que son equivalentes:

*Demostración.* Definición 2  $\rightarrow$  Definición 1

Definimos  $\Gamma_u : T_u P = V_u P \oplus H_u \rightarrow V_u P$  por  $\Gamma(D_u) = \Gamma(D_u^v + D_u^h) = D_u^v$ . Las condiciones 1 y 2 son fáciles de demostrar.

Definición 1  $\rightarrow$  Definición 2

Tomamos  $H_u = \ker \Gamma_u$  entonces se cumple que  $T_u P = V_u(P) \oplus H_u$ . De forma sencilla se ve que  $H_{ug} = (R_g)_*(H_u)$ .

Definición 3  $\rightarrow$  Definición 2

Definimos  $H_u = \{D_u \in T_u(P) : \omega(D_u) = 0\}$  por la condición 1 es claro que  $T_u(P) = V_u(P) \oplus H_u$  y haciendo un sencillo cálculo se tiene que  $(R_g)_*H_u = H_{ug}$ .

Definición 2  $\rightarrow$  Definición 3

Tenemos que la aplicación  $*$  :  $\mathcal{G} \rightarrow V_uP$  es un isomorfismo lineal, así podemos definir una 1-forma  $\omega$  sobre  $P$  con valores en el álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de la siguiente manera: Dado  $D_u \in T_uP$  existe un único campo  $A \in \mathcal{G}$  tal que la componente vertical de  $D_u$  es  $A_u^*$ . Así definimos  $\omega(D_u) = A$ . Es claro que  $\omega(D_u) = 0$  si y solo si  $D_u$  es horizontal.

La condición 1 se verifica por la definición. La condición 2 basta probarla en los casos en que  $D_u$  sea horizontal o vertical debido a la linealidad de las 1-formas y se comprueba fácilmente en ambos casos. □

## 2.2.2. Forma de curvatura

**Definición 2.2.4.** Llamaremos forma de curvatura de una conexión  $\mathcal{H}$  a la 2-forma sobre  $P$  con valores en  $\mathcal{G}$  definida por

$$\Omega(D_1, D_2) = d\omega(D_1^h, D_2^h)$$

donde  $\omega$  es la forma de la conexión  $\mathcal{H}$  de la definición 3.

**Lema 2.2.5.** Si  $D$  es horizontal,  $[D, A^*]$  también es horizontal para todo  $A \in \mathcal{G}$

*Demostración.* Se tiene que:

$$[D, A^*] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (R_{\exp(tA)_*} D - D)$$

pero si  $D$  es horizontal entonces  $(R_g)_*(D)$  también lo es ya que los campos horizontales son invariantes por traslaciones por la derecha. Luego  $R_{\exp(tA)_*} D - D$  también es horizontal y por paso al límite se concluye. □

**Teorema 2.2.6.** (Ecuación de estructura) Se verifica:

$$d\omega(D_1, D_2) = -[\omega(D_1), \omega(D_2)] + \Omega(D_1, D_2)$$

*Demostración.* Vamos a probar la igualdad en 3 casos y el resultado se obtendrá debido a la linealidad y antisimetría de  $\Omega$ :

1. Si  $D_1$  y  $D_2$  son horizontales. En esta situación  $\omega(D_1) = \omega(D_2) = 0$  y como

$$d\omega(D_1, D_2) = d\omega(D_1^h, D_2^h) = \Omega(D_1, D_2)$$

se deduce el resultado

2. Si  $D_1$  y  $D_2$  son verticales. podemos escribir  $D_1 = A_1^*$  y  $D_2 = A_2^*$  con  $A_1, A_2 \in \mathcal{G}$ . Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} d\omega(D_1, D_2) &= D_1\omega(D_2) - D_2\omega(D_1) - \omega([D_1, D_2]) = \\ &= A_1^*\omega(A_2^*) - A_2^*\omega(A_1^*) - \omega[A_1^*, A_2^*] = A_1^*A_2 - A_2^*A_1 - \omega([A_1, A_2]^*) = \\ &= -\omega([A_1, A_2]^*) = [A_1, A_2] = -[\omega(A_1^*), \omega(A_2^*)] = -[\omega(D_1), \omega(D_2)] \end{aligned}$$

y como  $\Omega(D_1, D_2) = d\omega(D_1^h, D_2^h) = 0$  se sigue el resultado.

3. Si  $D_1$  es horizontal y  $D_2$  es vertical. Tomamos  $D_2 = A^*$  y tenemos que

$$\begin{aligned} d\omega(D_1, D_2) &= D_1\omega(D_2) - D_2\omega(D_1) - \omega([D_1, D_2]) = \\ &= D_1A + A^*\omega(D_1) - \omega([D_1, A^*]) = -\omega([D_1, A^*]) = 0 \end{aligned}$$

esta última igualdad es debida al lema 2.2.5. Por otro lado  $-\omega([D_1, A^*]) + \Omega(D_1, D_2) = -[0, \omega(D_2)] + d\omega(D_1, 0) = 0$

□

**Corolario 2.2.7.** (*Identidad de Bianchi para una conexión de un fibrado principal*). Se verifica:

$$d\Omega(D_1^h, D_2^h, D_3^h) = 0$$

para cualquier sistema de campos vectoriales  $D_1, D_2, D_3$  sobre  $P$ .

*Demostración.* Sea  $(A_1, A_2, \dots, A_r)$  una base de  $\mathcal{G}$ . La forma de conexión se expresará  $\omega = \sum_i \omega_i \otimes A_i$  para ciertas 1-formas ordinarias  $\omega_1, \dots, \omega_r$ . La 2-forma  $\omega$  se puede escribir como  $\omega = \sum_i \Omega_i \otimes A_i$

Así la ecuación de estructura se escribe:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_k d\omega_k \otimes A_k = - \sum_{i,j} [\omega_i \otimes A_i, \omega_j \otimes A_j] + \sum_k \Omega_k \otimes A_k = \\ &= -2 \sum_{i<j} \omega_i \wedge \omega_j \otimes [A_i, A_j] + \sum_k \Omega_k \otimes A_k = \\ &= -2 \sum_k \left( \sum_{i<j} c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j \right) \otimes A_k + \sum_k \Omega_k \otimes A_k \end{aligned}$$

Esto es

$$d\omega_k = -2\left(\sum_{i<j} c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j\right) + \Omega_k$$

Diferenciando:

$$0 = d^2\omega_k = -2\left(\sum_{i<j} c_{ij}^k d\omega_i \wedge \omega_j\right) + s\left(\sum_{i<j} c_{ij}^k \omega_i \wedge d\omega_j\right) + d\Omega_k$$

Como  $\omega_i$  se anula sobre campos horizontales si aplicamos la igualdad anterior a  $D_1^h, D_2^h, D_3^h$  se concluye.  $\square$

### 2.2.3. El fibrado de conexiones

**Proposición 2.2.8.** *Un campo horizontal es  $\pi_G$ -proyectable si y solo si es  $G$  invariante.*

*Demostración.* Si  $D$  es  $\pi$ -proyectable sabemos que  $\pi_*(D_{ug}) = \pi_*(D_u)$  y como  $\pi \circ R_{g^{-1}} = \pi$  tenemos que  $\pi_*(D_{ug}) = \pi_*(R_{g^{-1}})_*D_{ug} = \pi_*(D_u)$ , luego  $(R_{g^{-1}})_*D_{ug} - D_u$  es horizontal al ser suma de vectores horizontales y además es vertical, por tanto  $(R_{g^{-1}})_*D_{ug} - D_u = 0$  y  $(R_{g^{-1}})_*D_{ug} = D_u$  y así  $D$  es  $G$ -invariante.  $\square$

**Proposición 2.2.9.** *Dada una conexión  $\mathcal{H}$  sobre  $\pi_g : P \rightarrow X$  para cada campo  $D \in \mathfrak{X}(X)$  existe un único campo horizontal  $G$ -invariante  $D^* \in \mathfrak{X}(P)$  denominado levantamiento horizontal de  $D$  tal que  $(\pi_G)_*D^* = D$ .*

*Demostración.* Probaremos primero que existe un campo  $\pi_G$ -proyectable  $\overline{D}$  sobre  $P$  cuya proyección es  $D$ . Es claro que si  $P$  es trivial la afirmación se verifica. Consideremos  $\{U_i\}$  un recubrimiento abierto de  $X$  trivializante para  $P$ . Sea  $D_i$  un campo de  $\pi^{-1}(U_i)$  proyectable sobre  $U_i$  y cuya proyección sea  $D|_{U_i}$ . Si  $\{\phi_i\}$  es una partición de  $X$  subordinada a  $\{U_i\}$ , el campo  $\overline{D} = \sum_i (\phi_i \circ \pi) D_i$ , está globalmente definido, ya que  $\text{sup}(\phi_i \circ \pi) \subset \pi^{-1}(U_i)$ , es  $\pi$ -proyectable ya que es suma localmente finita de campos  $\pi$ -proyectables, y su proyección es  $D$ . Por tanto basta definir  $D^* = \overline{D}^h$  para obtener el resultado.  $\square$

**Proposición 2.2.10.** *Existe una correspondencia biunívoca entre las secciones  $\sigma : T(X) \rightarrow T_G(P)$  de la proyección de la sucesión exacta del teorema 2.1.38 y el conjunto de conexiones de un fibrado principal.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{H}$  una conexión del fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$  y consideremos la elevación horizontal de vectores definida antes. Si  $Y \in T_x(X)$

el campo  $Y_u^*$  con  $u \in \pi^{-1}(x)$  es  $G$ -invariante a lo largo de la fibra de  $x$  y determina la clase  $\{Y^*\} \in (T_G P)_x$ . Así podemos definir  $\sigma : TX \rightarrow T_G(P)$  mediante  $\sigma(Y) = \{Y^*\}$  y se cumple  $\pi_* \circ \sigma(Y) = \pi_*(Y^*) = Y$

Recíprocamente si  $\sigma$  es una sección de  $\pi_*$ , definimos la conexión sobre  $P$  siguiente:  $H_u = \{(\sigma D)_u : D \in T_x X\}$ . Tenemos que  $H_u \cap V_u(P) = 0$  ya que si  $D' \in H_u \cap V_u(P)$  entonces  $D' = \sigma D$  y  $\pi_* D' = 0$  con lo cual  $\pi_* D' = D = 0$  y por tanto  $D' = 0$ .

Falta ver que si  $g \in G$  se cumple que  $(R_g)_* H_u = H_{ug}$ . Basta ver que  $(R_g)_* H_u \subset H_{ug}$ . Si  $(\sigma D)_u \in H_u$  entonces  $\sigma D$  es  $G$ -invariante y por tanto  $(R_g)_*(\sigma D)_u = (\sigma D)_{ug} \in H_{ug}$   $\square$

**Proposición 2.2.11.** *Dado un fibrado principal  $\pi_G : P \rightarrow X$ , existe un fibrado afín  $C(P) \rightarrow X$  modelado sobre el fibrado  $T^*(X) \otimes adP$  cuyas secciones globales se corresponden de modo natural con las conexiones de  $P$ .*

*Demostración.* Sea  $\pi_* : T_G(P) \rightarrow T(X)$  la proyección canónica. La composición con  $\pi_*$  da lugar a una aplicación diferenciable

$$q : Hom(T(X), T_G(P)) \rightarrow Hom(T(X), T_G(P))$$

definida por  $q(\varphi) = \pi_* \circ \varphi$ , que resulta ser una proyección regular entre variedades. Para probar esto basta ver que  $q$  admite secciones locales. Como el problema es local podemos suponer que  $P = X \times G$ . En este caso si denotamos  $E$  al espacio vectorial de los campos de  $G$ -invariantes por la derecha, se tiene que  $Hom(T(X), T_G(P)) = Hom(T(X), T(X)) \oplus Hom(T(X), X \times E)$ , y entonces  $q$  consiste en proyectar en el primer factor con lo que probamos que es una proyección regular. Sea  $I$  la subvariedad cerrada de  $Hom(T(X), T(X))$  definida por la sección identidad. Entonces definimos  $C(P) = q^{-1}(I)$ . Como  $q$  es proyección regular  $C(P)$  es una subvariedad cerrada de  $Hom(T(X), T_G(P))$ . De esta forma, una aplicación lineal  $\sigma_x : T_x(X) \rightarrow T_G(P)_x$  pertenece a  $C(P)$  si y solo si  $q(\sigma_x) = \pi_* \circ \sigma_x$  es la identidad en  $T_x(X)$ . Sea  $q : C(P) \rightarrow X$  la restricción a la subvariedad  $C(P)$ .

Veamos por último que  $C(P)$  es un fibrado afín modelado sobre  $T^*(X) \otimes adP = Hom(T(X), adP)$ . Sean  $\sigma_x$  y  $\sigma'_x$  dos puntos de  $C(P)_x$ . Por definición  $\pi_* \circ \sigma'_x = \pi_* \circ \sigma_x$ , es la identidad de  $T_x(X)$  luego  $\pi_*(\sigma'_x - \sigma_x) = 0$ . Por tanto el homomorfismo  $\sigma'_x - \sigma_x$  valora en el  $Ker \pi_* = V_G(P) = adP$ , con lo que  $\sigma'_x - \sigma_x \in Hom(T_x(X), (adP)_x) = T^*(X) \otimes adP$ . Recíprocamente, si  $e \in T^*(X) \otimes adP = Hom(T_x(X), (adP)_x)$  el homomorfismo suma  $\sigma'_x = e + \sigma_x$ , verifica  $\pi_* \sigma'_x = \pi_* e + \pi_* \sigma_x$  que es la identidad sobre  $T_x(X)$ , luego  $\sigma'_x \in C(P)$ , y se concluye.  $\square$

Ahora veamos la existencia de conexiones en un fibrado principal.

**Definición 2.2.12.** Una sección  $\sigma : Z \rightarrow Y$  de una proyección regular  $p : Y \rightarrow X$  definida sobre un subespacio  $Z$  de  $X$  se dice que es diferenciable si para todo  $z \in Z$  existen  $\sigma_z : U_z \rightarrow Y$  secciones diferenciables de  $p$  definidas en un entorno de  $Z$  tales que  $\sigma = \sigma_z$  en  $Z \cap U_z$ .

**Proposición 2.2.13.** Toda conexión de un fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$  definidas sobre un cerrado  $Z$  de  $X$  puede extenderse a una conexión global. En particular, todo fibrado principal admite una conexión.

*Demostración.* Por hipótesis existe un recubrimiento de abiertos  $\{U_i\}$  de  $Z$  y conexiones  $\sigma_i : U_i \rightarrow C(P)$  tales que  $\sigma = \sigma_i$  en  $Z \cap U_i$ . Sea  $\{U'_i\}$  un recubrimiento de abiertos de  $X-Z$  trivializante para  $C(P)$  y  $\sigma'_i : U'_i \rightarrow C(P)$  secciones arbitrarias. Dada una partición de la unidad  $\{\varphi_i, \varphi'_i\}$  asociada al recubrimiento  $\{U_i, U'_i\}$  se puede definir una sección

$$\bar{\sigma} : X \rightarrow \text{Hom}(T(X), T_G(P))$$

por la fórmula  $\bar{\sigma} = \sum_i \varphi_i \sigma_i + \sum_j \varphi'_j \sigma'_j$ . Como  $\varphi'_j(z) = 0$  si  $z \in Z$  es claro que  $\bar{\sigma}$  prolonga a  $\sigma$ . por otra parte  $\pi_* \circ \bar{\sigma}_x = \sum_i \varphi_i(x) (\pi_* \circ \sigma_i(x)) + \sum_j \varphi'_j(x) (\pi_* \circ \sigma'_j(x)) = (\sum_i \varphi_i(x) + \sum_j \varphi'_j(x)) I_{T_x(X)} = I_{T_x(X)}$ . Luego  $\bar{\sigma}$  es un elemento de  $C(P)$  y se concluye.  $\square$

## 2.2.4. Ejemplo de conexión

**Ejemplo 2.2.14.** Veamos ahora un ejemplo de una conexión el fibrado de Hopf que vimos anteriormente  $(S^3, S^1, S^2)$ , pero vamos a verlo desde un punto de vista distinto a como lo vimos en aquel ejemplo. Como  $S^3 \cong SU(2)$ , podemos considerar los puntos de este fibrado como matrices  $A \in SU(2)$ . Una matriz de este tipo mediante la parametrización de ángulos de euler  $\{\xi\} = \{\chi, \varphi, \psi\}$  se puede escribir

$$\begin{aligned} A(\chi, \varphi, \psi) &= \exp\left(\frac{i\tau_3\varphi}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{i\tau_2\chi}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{i\tau_3\psi}{2}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\chi}{2}\right) & \text{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) \\ -\text{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\chi}{2}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\psi}{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\chi}{2}\right)\exp\left[i\frac{\varphi+\psi}{2}\right] & \text{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right)\exp\left[i\frac{\varphi-\psi}{2}\right] \\ -\text{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right)\exp\left[i\frac{\psi-\varphi}{2}\right] & \cos\left(\frac{\chi}{2}\right)\exp\left[-i\frac{\varphi+\psi}{2}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \bar{w} \\ -w & \bar{z} \end{pmatrix} \in SU(2) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que las  $\tau_i$  son las matrices de Pauli, es decir

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado el grupo de estructura  $S^1 = U(1) = \{e^{i\alpha} : 0 \leq \alpha < 2\pi\}$ , y la acción vendrá dada por

$$A \cdot a(\alpha) = A \cdot e^{i\alpha} = A \exp(\alpha \tau_3) = A \cdot \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

Se cumple claramente que  $A(\chi, \varphi, \psi) \cdot a(\alpha) = A(\chi, \varphi, \psi + 2\alpha)$ .

Se verifica la siguiente propiedad: Si  $A \in SU(2)$ , entonces se cumple que

$$A \tau_3 \overline{A^t} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \cdot \vec{\nu}$$

con  $\vec{\nu} \in S^2$ , es decir  $|\vec{\nu}|^2 = 1$ . Veamos quien es  $\vec{\nu}$ .

Sea  $A = \begin{pmatrix} z & \overline{w} \\ -w & \overline{z} \end{pmatrix}$  entonces  $\overline{A^t} = \begin{pmatrix} \overline{z} & -\overline{w} \\ w & z \end{pmatrix}$  y así

$$A \tau_3 \overline{A^t} = \begin{pmatrix} |z|^2 - |w|^2 & -2z\overline{w} \\ -2w\overline{z} & |w|^2 - |z|^2 \end{pmatrix}$$

Si tomamos ahora  $\vec{\nu} = (Re(-2z\overline{w}), Im(-2w\overline{z}), |z|^2 - |w|^2)$  obtenemos que

$$(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \cdot \vec{\nu} = \begin{pmatrix} |z|^2 - |w|^2 & -2z\overline{w} \\ -2w\overline{z} & |w|^2 - |z|^2 \end{pmatrix} = A \tau_3 \overline{A^t} \text{ y además } |\vec{\nu}|^2 = 1$$

Con esto podemos definir la proyección del fibrado  $\pi : S^3 \rightarrow S^2$  por la fórmula  $\pi(A) = \vec{\nu}$ . Esta definición coincide con la que dimos en el ejemplo del fibrado de Hopf. Si parametrizamos  $\vec{\nu}$  con los ángulos de Euler obtenemos  $\vec{\nu} = (-\sin\chi \cos\varphi, -\sin\chi \sin\varphi, \cos\chi)$ .

Se cumple que la fibra coincide con la órbita ya que

$$A e^{i\alpha \tau_3} \tau_3 ((A e^{i\alpha \tau_3})^t) = A \tau_3 \overline{A^t}$$

y por tanto  $\pi(A) = \pi(A \cdot e^{i\alpha})$

Vamos a ver ahora que aspecto tienen los campos vectoriales fundamentales en el fibrado de Hopf. Sea  $X$  un campo vectorial en  $U(1)$ , correspondiente con el subgrupo uniparamétrico  $a_t = e^{it}$ . Se cumple que  $X_{a(\alpha_0)} = \frac{\partial}{\partial \alpha}|_{\alpha=\alpha_0}$ . En particular,  $X_e = \frac{\partial}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} \in T_e(U(1)) \simeq \mathfrak{u}(1)$ . El respectivo elemento del álgebra de Lie  $\mathfrak{u}(1)$  es  $A=1$ . Para hallar el campo fundamental  $A^*$  correspondiente a  $A=1$ , introduzcamos una función  $f(B(\chi, \varphi, \psi)) = \tilde{f}(\chi, \varphi, \psi)$  en el fibrado y calculemos  $A^*f$ . Por definición

$$\begin{aligned} A^* \tilde{f}(\chi, \varphi, \psi) &= A^* f(B(\chi, \varphi, \psi)) = \frac{d}{dt} f(B(\chi, \varphi, \psi) \cdot a_t)|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} f(B(\chi, \varphi, \psi + 2t)) = 2 \frac{\partial}{\partial \psi} \tilde{f}(\chi, \varphi, \psi) \end{aligned}$$

es decir,  $A^* = 2 \frac{\partial}{\partial \psi}$ .

Así la forma de conexión(en coordenadas de los ángulos de Euler) se puede escribir como  $\omega = ad\psi + bd\varphi + cd\chi$ . La forma de conexión satisface que  $\omega(A^*) = A$ , lo que implica que  $a = \frac{1}{2}$ . Los coeficientes  $b$  y  $c$  dependen de la elección del subespacio horizontal  $T_u(S^3)$ . Vamos a considerar dos casos:

- Si elegimos el subespacio horizontal generado por los vectores  $\frac{\partial}{\partial\chi}$  y  $\frac{\partial}{\partial\varphi} - \cos\chi\frac{\partial}{\partial\chi}$ , como la forma de conexión se anula sobre estos vectores se tiene:

$$\omega = \frac{1}{2}(d\psi + \cos\chi d\varphi)$$

- Si tomamos el subespacio generado por los vectores  $\frac{\partial}{\partial\varphi} - \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\chi}$  y  $\frac{\partial}{\partial\chi} - \frac{\partial}{\partial\psi}$ , entonces:

$$\omega = \frac{1}{2}(d\psi + d\chi + \cos\chi d\varphi)$$

Como el grupo estructural es abeliano se tiene que  $\Omega = d\omega$ , y así se obtiene que la forma de curvatura en los dos casos es

$$\Omega = \frac{1}{2}\sin\chi d\varphi \wedge d\chi$$

## 2.2.5. Conexiones inducidas

**Proposición 2.2.15.** Sea  $f : P' \rightarrow P$  un morfismo de  $G$ - fibrados principales que verifique  $f(u'g') = f(u')g'$ , y sea  $\mathcal{H}$  una conexión en  $P$  con forma de conexión  $\omega$  y curvatura  $\Omega$ , entonces existe una única conexión  $\mathcal{H}'$  en  $P'$  tal que  $f_*$  aplica subespacios horizontales  $\mathcal{H}'$  en subespacios horizontales de  $\mathcal{H}$ . Además se verifica  $f^*\omega = \omega'$  y  $f^*\Omega = \Omega'$ .

*Demostración.* Definamos la forma de conexión de  $\mathcal{H}'$  como  $\omega' = f^*\omega$ . Veamos que  $\omega'$  es una forma de conexión.

Dado  $D' \in T_{u'}P'$  y  $g' \in G$  y sea  $D = f_*(D')$ . Se verifica  $\omega'((R_{g'})_*D') = f^*(\omega((R_{g'})_*D')) = \omega(f_*(R_{g'})_*D') = \omega((R_{g'})_*D') = Ad_{g'^{-1}}(\omega(D)) = Ad_{g'^{-1}}(\omega'(D'))$ . Sea  $A' \in \mathcal{G}$  y sea  $A = f_*(A')$ . Sea ahora  $A^*$  y  $A'^*$  los campos de vectores fundamentales, entonces  $\omega'(A'^*) = f^*(\omega(A^*)) = \omega(f_*(A^*)) = \omega(A^*) = A$ . Y lleva campos horizontales a campos horizontales ya que si  $H'$  es horizontal entonces

$$\omega(f_*(H')) = f^*(\omega(H')) = \omega'(H') = 0$$

□

**Proposición 2.2.16.** Sea  $f : P' \longrightarrow P$  un morfismo de  $G$ -fibrados principales y supongamos que la aplicación  $\bar{f}$  inducida en la base es un difeomorfismo. Dada una conexión  $\mathcal{H}'$  en  $P'$  con formas de conexión y curvatura  $\omega'$  y  $\Omega'$  respectivamente, existe una única conexión  $\mathcal{H}$  en  $P$  tales que los subespacios horizontales de  $\mathcal{H}'$  son aplicados por  $f_*$  en subespacios horizontales de  $\mathcal{H}$ . Además verifica  $f^*\omega = \omega'$  y  $f^*\Omega = \Omega'$ . Se dice que  $\mathcal{H}$  es la imagen de  $\mathcal{H}'$  por  $f$ .

*Demostración.* Dado  $u \in P$  elegimos  $u' \in P'$  y  $g \in G$  tal que  $u = f(u') \cdot g$ . Definimos el subespacio horizontal  $H_u$  de  $T_u P$  por  $H_u = (R_g)_* \circ f_*(H_{u'})$  donde  $H_{u'}$  es el subespacio horizontal de  $T_{u'} P'$  con respecto a  $\mathcal{H}'$ . Se demuestra sin mucha dificultad que  $H_u$  es independiente de la elección de  $u'$  y  $\sigma$ .

Veamos que es una conexión en  $P$ . Fácilmente se ve que  $H_{ug} = (R_g)_*(f(H_u))$  y así es invariante.

Falta probar que  $T_u(P) = H_u \oplus V_u$ . Para ello veremos que  $\pi_* : H_u \longrightarrow T_x(X)$  con  $\pi(u) = x$  es un isomorfismo lineal. Pero en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{u'} & \xrightarrow{f_*} & H_u \\ \pi'_* \downarrow & & \downarrow \pi \\ T_{x'}(X') & \xrightarrow{\bar{f}_*} & T_x(X) \end{array}$$

las aplicaciones  $\pi_*$  y  $\bar{f}_*$  son isomorfismos por tanto  $\pi_*$  también lo es y se concluye.

Para demostrar que  $f^*\omega = \omega'$  se demuestra de forma sencilla en dos casos, si  $D$  es horizontal y vertical, y trivialmente se ve que  $\Omega'(D, D') = f^*\Omega(D, D')$ .  $\square$

**Definición 2.2.17.** Una conexión  $\mathcal{H}$  sobre  $P$  se dice que es reducible a una reducción  $i : (P', G') \longrightarrow (P, G)$  si existe una conexión  $\mathcal{H}'$  sobre  $P'$  tal que  $\mathcal{H}$  es la imagen de  $\mathcal{H}'$  por la inmersión  $i$ .

Ahora vamos a probar que la forma de conexión se puede expresar en función de una familia de 1-formas definidas en ciertos entornos.

Sea  $\pi_G : P \longrightarrow X$  un fibrado principal y  $\{u_\alpha, f_\alpha\}$  una trivialización, es decir, existen isomorfismos  $f_\alpha : \pi_G^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$ , con funciones de transición  $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ . Supongamos a su vez definidas las secciones  $s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow P$  verificando  $s_\beta = s_\alpha \psi_{\alpha\beta}$  en  $U_\alpha \cap U_\beta$ . Sea  $\omega$  la forma de conexión de una conexión  $\mathcal{H}$  sobre el fibrado  $P$ , para cada  $\alpha$  definimos una 1-forma  $\omega_\alpha$  sobre  $U_\alpha$  con valores en  $\mathcal{G}$  por la fórmula  $\omega_\alpha = s_\alpha^*(\omega)$ . Podemos escribir la relación

$s_\beta = s_\alpha \psi_{\alpha\beta}$  como  $s_\beta = p \circ (s_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ , donde  $p : P \times G \rightarrow P$  es la operación en  $G$ . De esta forma si  $D_x \in T_x(X)$  se tiene

$$(s_\beta)_*(D_x) = p(-, g)_*((s_\alpha)_*(D_x)) + p(u, -)_*((\psi_{\alpha\beta})_*D_x)$$

donde  $g = \psi_{\alpha\beta}(x)$ ,  $u = s_\alpha(x)$ . Se tiene que  $p(-, g) = R_g$  y llamando  $\mu_u = p(u, -)$  se escribe

$$(s_\beta)_*(D_x) = (R_g)_*((s_\alpha)_*D_x) + (\mu_u)_*((\psi_{\alpha\beta})_*D_x)$$

y aplicando  $\omega$  a ambos lados

$$\omega_\beta(D_x) = (R_g^*\omega)((s_\alpha)_*D_x) + \omega[(\mu_u)_*(\psi_{\alpha\beta})_*D_x]$$

Ahora si  $\psi_{\alpha\beta}D_x = A_g$ , para un cierto campo  $A$  sobre  $G$ , invariante por la izquierda, entonces  $(\mu_u)_*(\psi_{\alpha\beta})_*D_x = A_{ug}^*$ . Sea ahora  $\Theta$  la 1-forma canónica y escribiendo  $\Theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^*(\Theta)$  se cumple que

$$\omega_\beta = Ad_{\psi_{\beta\alpha}} \circ \omega_\alpha + \Theta_{\alpha\beta}$$

ya que  $\psi_{\alpha\beta}^*(D_x) = \Theta((\psi_{\alpha\beta})_*(D_x)) = \Theta(A_g) = A_g$ . En esta expresión podemos sustituir  $\Theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^*(\Theta) = \psi_{\alpha\beta}^{-1}d\psi_{\alpha\beta}$

El recíproco también se puede obtener siguiendo un argumento contrario y obtener  $\{\omega_\alpha\}$  a partir de  $\omega$ .

**Teorema 2.2.18.** *Sea  $\pi_G : P \rightarrow X$  un fibrado principal,  $\{U_\alpha\}$  un recubrimiento trivializante con funciones de transición  $\{\psi_{\alpha\beta}\}$  y  $\omega_\alpha$  1-formas sobre  $U_\alpha$  con valores en  $\mathcal{G}$ . Existe una forma de conexión  $\omega$  sobre  $P$  verificando  $\omega_\alpha = s_\alpha^*\omega$  si y solo si se verifica la relación anterior. Además en este caso la forma de conexión es única.*

Estas 1-formas  $\omega_\alpha$  corresponden físicamente a lo que se llaman potenciales gauge.

Consideremos ahora  $\Omega_\alpha = s_\alpha^*\Omega$ . Tenemos que  $\omega_\alpha = s_\alpha^*\omega$ ,  $\sigma_\alpha^*d\omega = d\sigma_\alpha^*\omega$  y  $\sigma_\alpha^*(\xi \wedge \eta) = \sigma_\alpha^*(\xi) \wedge \sigma_\alpha^*(\eta)$ . Por tanto utilizando la ecuación de estructura se cumple:

$$\Omega_\alpha = \sigma_\alpha^*(d\omega + \omega \wedge \omega) = d\sigma_\alpha^*\omega + \sigma_\alpha^*\omega \wedge \sigma_\alpha^*\omega = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha$$

Encontremos la expresión de  $\Omega_\alpha$  en la carta  $U_\alpha$  cuyas coordenadas son  $x^\mu$ . Así podemos poner  $\omega_\alpha = \sum \omega_{\alpha\mu} dx^\mu$ , y también  $\Omega_\alpha = \frac{1}{2} \sum \Omega_{\alpha\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ , y por un cálculo directo

$$\Omega_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu \omega_{\alpha\nu} - \partial_\nu \omega_{\alpha\mu} + [\omega_{\alpha\mu}, \omega_{\alpha\nu}]$$

$\Omega_\alpha$  se corresponde en física con el campo de fuerza de Yang-Mills.

Como  $\omega_{\alpha\mu}$  y  $\Omega_{\alpha\mu\nu}$  son  $\mathcal{G}$ -valoradas, se pueden poner en términos de una base  $\{T_i\}$  de  $\mathcal{G}$  mediante

$$\omega_{\alpha\mu} = \sum A_\mu^i T_i \quad \Omega_{\alpha\mu\nu} = \sum F_{\mu\nu}^i T_i$$

Esta base satisface  $[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k$  y encontramos la expresión

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + f_{jk}^i A_\mu^j A_\nu^k$$

**Teorema 2.2.19.** *Si  $U_\alpha$  y  $U_\beta$  son cartas de  $X$  y consideremos  $\Omega_\alpha$  y  $\Omega_\beta$ , sus campos de fuerza, entonces se verifica en  $U_\alpha \cap U_\beta$  la condición*

$$\Omega_\alpha = Ad_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}} \Omega_\beta$$

*Demostración.* Sea  $\omega_\alpha$  y  $\omega_\beta$  entonces por lo visto anteriormente

$$\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha \quad \Omega_\beta = d\omega_\beta + \omega_\beta \wedge \omega_\beta$$

Sustituyendo ahora  $\omega_\beta = Ad_{\psi_{\beta\alpha}} \omega_\alpha + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta}$  y obtendremos

$$\begin{aligned} \Omega_\beta &= d(Ad_{\psi_{\beta\alpha}} \omega_\alpha + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta}) + (Ad_{\psi_{\beta\alpha}} \omega_\alpha + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta}) \wedge (Ad_{\psi_{\beta\alpha}} \omega_\alpha + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta}) = \\ &= d(\psi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta}) + (\psi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta}) \wedge (\psi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta}) = \\ &= [d(\psi_{\alpha\beta}^{-1}) \wedge (\omega_\alpha \psi_{\alpha\beta}) + \psi_{\alpha\beta}^{-1} \wedge d(\omega_\alpha \psi_{\alpha\beta}) + d(\psi_{\alpha\beta}^{-1}) \wedge d\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d^2 \psi_{\alpha\beta}] + \\ &+ [\psi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} \wedge \psi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} \wedge \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta} \wedge \psi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} + \\ &+ \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta} \wedge \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta}] = [-\psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}^{-1} \wedge \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} \wedge d\omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} - \psi_{\alpha\beta}^{-1} \wedge \omega_\alpha d\psi_{\alpha\beta} - \\ &- \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}^{-1} \wedge d\psi_{\alpha\beta}] + [\psi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} \wedge \omega_\alpha d\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta} \wedge \psi_{\alpha\beta}^{-1} \wedge \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} + \\ &+ \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}^{-1} \wedge d\psi_{\alpha\beta}] = \psi_{\alpha\beta}^{-1} \wedge d\omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha \psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^{-1} (d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha) \psi_{\alpha\beta} = \\ &= Ad_{\psi_{\alpha\beta}} \Omega_\alpha \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que  $d(\psi_{\alpha\beta}^{-1}) = -\psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}^{-1}$

□

## 2.2.6. Transporte paralelo y grupo de holonomía

**Proposición 2.2.20.** *Sea  $\omega$  una forma de conexión sobre un fibrado principal  $\pi_G : P \rightarrow X$ , y sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  una curva diferenciable. Dado un punto  $u \in P$  en la fibra de  $x=\gamma(0)$ , existe una única curva  $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$  tal que  $\hat{\gamma}$  es un levantamiento de  $\gamma$ , es decir  $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$ , el vector tangente a  $\hat{\gamma}$  es horizontal respecto de la conexión y  $\hat{\gamma}(0) = u$ . Con estas condiciones  $\hat{\gamma}$  será llamada el levantamiento horizontal de  $\gamma$  con respecto a la conexión  $\omega$ .*

*Demostración.* Extenderemos diferenciablemente  $\gamma$  a un intervalo abierto  $I$ . Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} I \times_X P & \xrightarrow{p_2} & P \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ I & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

Consideremos  $\beta : I \rightarrow I \times_X P$  una curva integral que pasa a través de  $(0, u) \in I \times_X P$  del levantamiento horizontal del campo vectorial  $\frac{d}{dt}$  de  $I$ . Definimos así  $\hat{\gamma} = p_2 \circ \beta$ , y claramente  $\pi(\hat{\gamma}(t)) = \pi \circ p_2 \circ \beta(t) = \gamma \circ p_1 \circ \beta(t) = \gamma(t)$  Además

$$\omega_{\hat{\gamma}(t)}(\hat{\gamma}_*(t)) = \omega_{\hat{\gamma}(t)}((p_2 \circ \beta)_*) = \omega_{\hat{\gamma}(t)}((p_2)_*(\beta_*)) = (p_2^*\omega)_{\beta(t)}(\beta_*) = 0$$

ya que  $\beta_*$  es horizontal, por tanto  $\hat{\gamma}$  es horizontal.

La unicidad se deduce de la unicidad de  $\beta$ . □

**Definición 2.2.21.** *Dada una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma(1) = y$ , para cada punto  $u \in \pi_G^{-1}(x)$ , existe un levantamiento  $\hat{\gamma}$  tal que  $\hat{\gamma}(0) = u$ , entonces  $\hat{\gamma}(1) \in \pi_G^{-1}(y)$  y se puede establecer una aplicación*

$$\begin{aligned} \tau_\gamma : \pi_G^{-1}(x) &\rightarrow \pi_G^{-1}(y) \\ u &\mapsto \hat{\gamma}(1) \end{aligned}$$

Se dice que  $\tau_\gamma$  es el traslado paralelo a lo largo de la curva  $\gamma$  según la conexión  $\omega$ .

El siguiente resultado prueba que el traslado paralelo es un isomorfismo  $\tau_\gamma : \pi_G^{-1}(x) \rightarrow \pi_G^{-1}(y)$ .

**Proposición 2.2.22.** *El traslado paralelo verifica las siguientes propiedades:*

1. *Conmuta con la acción del grupo  $\tau_\gamma \circ R_g = R_g \circ \tau_\gamma$*

2.  $\tau_{\gamma^{-1}} = (\tau_\gamma)^{-1}$

3. Si  $\gamma'$  es una curva que une  $y$  con  $z$ , entonces  $\tau_{\gamma \vee \gamma'} = \tau_{\gamma'} \circ \tau_\gamma$

**Definición 2.2.23.** Para cada  $x \in X$ , denotaremos con  $C(x)$  el espacio de lazos en  $x$ . Para cada  $\gamma \in C(x)$ ,  $\tau_\gamma$  es un isomorfismo de la fibra  $\pi_G^{-1}(x)$  en si misma. El conjunto de todos esos isomorfismos forma un grupo  $\Phi(x)$ , que denotaremos por grupo de holonomía de la conexión dada con respecto a  $x$ . Denotaremos por  $C_0(x) \subset C(x)$  al subconjunto formado por los lazos homotópicos a cero y por  $\Phi_0(x) \subset \Phi(x)$  el subgrupo definido por él, y lo denotaremos por grupo de holonomía restringido.

Si dos puntos  $u, v \in P$  pueden ser unidos por una curva horizontal escribiremos  $u \sim v$ , claramente es una relación de equivalencia.

Ahora, dado  $u \in \pi_G^{-1}(x)$  denotaremos por  $\Phi(u)$  al siguiente subconjunto de  $G$

$$\Phi(u) = \{g \in G : u \sim ug\}$$

existe un isomorfismo  $\Phi(x) \longrightarrow \Phi(u)$  que a cada  $\tau_\gamma$  le hace corresponder el elemento  $g \in G$  que cumple que  $u = g\hat{\gamma}(1)$ .

**Proposición 2.2.24.** 1. Se cumple  $\Phi(ug) = g^{-1}\Phi(u)g$ .

2. Si  $u$  y  $v$  pueden ser unidos por una curva horizontal entonces  $\Phi(u) = \Phi(v)$ .

*Demostración.* 1. Si  $g' \in \Phi(ug)$  entonces  $ug \sim ugg'$  luego existe  $\alpha : I \longrightarrow P$  con  $\alpha(0) = ug$  y  $\alpha(1) = ugg'$ . Ahora definiendo  $\beta : I \longrightarrow P$  por  $\beta(t) = \alpha(t)g^{-1}$  se cumple que  $\beta(0) = u$  y  $\beta(1) = ugg'g^{-1} = ug''$ . Con lo cual  $g'' \in \Phi(u)$  y por tanto  $g' = g^{-1}g''g \in g^{-1}\Phi(u)g$ . Recíprocamente, si  $g' \in g^{-1}\Phi(u)g$  entonces existe  $g'' \in \Phi(u)$  tal que  $g' = g^{-1}g''g$  y una curva  $\alpha : I \longrightarrow P$  con  $\alpha(0) = u$  y  $\alpha(1) = ug''$ . Definiendo  $\beta : I \longrightarrow P$  por  $\beta(t) = \alpha(t)g$  se cumple que  $\beta(0) = ug$  y  $\beta(1) = ug''g = ugg'g^{-1}g = ugg'$  con lo cual  $g' \in \Phi(ug)$ .

2. Si  $u \sim v$  entonces  $ub \sim vb$  y por la transitividad  $u \sim ub$  si y solo si  $v \sim vb$  y esto es lo mismo que decir que  $b \in \Phi(u)$  si y solo si  $b \in \Phi(v)$ , con lo que se obtiene que  $\Phi(u) = \Phi(v)$ .  $\square$

**Corolario 2.2.25.** Si  $X$  es conexo todos los grupos de holonomía son conjugados.

*Demostración.* Si  $X$  es conexo entonces para todo  $u, v \in P$  existe un  $g \in G$  que cumple que  $v \sim ug$ , y por la proposición anterior se concluye.  $\square$

**Teorema 2.2.26.** Para cada punto  $u \in P$  el subgrupo  $\Phi_0(u) \subset G$  es arcoconexo.

*Demostración.* Sea  $g \in \Phi_0(u)$ , esto es, existe una curva cerrada  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  con un punto base  $x = \pi(u)$  homótopa a cero cumpliendo que  $\tau_\gamma(u) = ug$ . Por lo tanto existe una homotopía  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  uniendo  $\gamma$  con la el cero, es decir, que cumplirá:

1.  $h_s : t \rightarrow h(s, t)$  es un lazo con base  $x$  para todo  $0 \leq s \leq 1$
2.  $h(0, t) = \gamma(t)$  para todo  $0 \leq t \leq 1$
3.  $h(1, t) = x$  para todo  $0 \leq t \leq 1$

Entonces existe una única aplicación  $\hat{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow P$  verificando las siguientes condiciones

1.  $\pi \circ \hat{h} = h$
2. Para cada  $0 \leq s \leq 1$  la curva  $\hat{h}_s(t) = \hat{h}(s, t)$  es horizontal respecto de la conexión dada. En particular  $\hat{h}(0, t) = \hat{h}_0(t) = \hat{\gamma}(t)$
3.  $\hat{h}(s, 0) = u, 0 \leq t \leq 1$

De hecho,  $h$  induce un fibrado principal  $h^*(P) \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  y una conexión sobre dicho fibrado. Fijado  $s$  el camino  $t \rightarrow (s, t)$  puede ser levantado a  $h^*(P)$  de modo horizontal. Tal levantamiento depende diferencialmente de  $s$ , en virtud del teorema de dependencia diferenciable de los parámetros para los sistemas diferenciables ordinarios, de donde se deduce la existencia del levantamiento  $\hat{h}$ .

Sea ahora  $\beta : [0, 1] \rightarrow G$  la curva definida de la siguiente manera.  $\beta(s)$  es el único elemento de  $G$  que verifica  $u\beta(s) = \hat{h}(s, 1)$ .

La función  $\beta$  es diferenciable, y se cumple que  $\beta(1) = e$ , ya que  $\hat{h}(1, 1)$  es un punto de la fibra de  $h(1, 1)$  y la curva  $h(1, t)$  es constante y  $\beta(0) = g$ . Claramente  $\beta$  valora en  $\Phi_0(u)$ .  $\square$

**Lema 2.2.27.** *Sea  $G$  un subgrupo de Lie y  $H$  un subgrupo con la siguiente propiedad: todo elemento de  $H$  puede unirse con la identidad por una curva diferenciable que valora en  $H$ . En estas condiciones,  $H$  es la imagen de un subgrupo de Lie de  $G$ .*

*Demostración.* Sea  $S$  el subconjunto de los campos  $D \in \mathcal{G}$  tales que  $D_e$  es el vector tangente en el elemento neutro de  $G$ , a una de las curvas del enunciado. Probaremos que  $S$  es una subálgebra de Lie de  $\mathcal{G}$ . Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  una curva diferenciable con valores en  $H$  tal que  $\gamma(0) = e$ . Pongamos  $D_t = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_t$  y  $\gamma'(t) = \gamma(rt)$ , donde  $r$  es un número real. Entonces  $rD_t = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_t$ , con lo

cual  $rD_t \in S$ . Pongamos ahora  $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$  y designamos por  $D'_t$  y  $D''_t$  los vectores tangentes a  $\alpha$  y  $\beta$ . Como se puede ver en [19]  $D_0 = D'_0 + D''_0$ . Con lo cual hemos probado que  $S$  es un espacio vectorial. Por otra parte se tiene que si  $\delta(t) = \alpha(t)\beta(t)\alpha(t)^{-1}\beta(t)^{-1}$  entonces  $\delta_*\left(\frac{d}{dt}\right)_0 = [D'_e, D''_e]$ , lo cual se puede ver en [19]. Con lo cual si  $D, D' \in S$  entonces  $[D, D'] \in S$ , con lo que es una subálgebra de  $\mathcal{G}$ .

Por el teorema 1.0.11, sea  $i : K \rightarrow G$  el subgrupo conexo asociado a la subálgebra  $S$ . Vamos a ver que  $H = K$  con lo que concluiríamos la prueba. Primero veamos que  $H \subset K$ , para ello hemos de comprobar que las curvas en  $H$  tienen su vector tangente en  $S$ . Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow H$  una de esas curvas. Tenemos que probar que para cada vector tangente a esta curva en un punto  $t_0 \in [0, 1]$ , esto es,  $\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=t_0}$  existe un campo invariante  $D \in \mathcal{G}$  tal que  $D_e$  es el vector tangente a una curva  $g(t)$  en  $H$  y tal que

$$(L_{\gamma(t_0)})_*D_e = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=t_0}$$

Si tomamos  $g(t) = L_{\gamma(t_0)}^{-1} \circ \gamma \circ L_{\gamma(t_0)}(t)$ , es una curva del enunciado verificando que  $g(1) = e$  y tomando  $D_e = g_*\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=1}$  se concluye.

Para la otra inclusión consideremos  $D_1, \dots, D_m$  una base de  $S$  y  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  curvas diferenciables con valores en  $H$  tales que  $\gamma_i(0) = e$ ,  $(\gamma_i)_*\left(\frac{d}{dt}\right)_0 = (D_i)_e$ . Definimos ahora  $f : (-1, 1)^m \rightarrow K$  por  $f(t_1, \dots, t_m) = \gamma_1(t_1) \cdots \gamma_m(t_m)$ .

La diferenciabilidad de  $f$  se deduce de la propiedad universal de las immersiones integrables pues  $f$  valora en  $K$ . Tenemos que  $f_*$  es no singular ya que  $(\gamma_i)_*(0)$  forman una base de  $S$ . Luego  $f$  establece un difeomorfismo entre un entorno abierto  $U$  del origen de  $\mathbb{R}^m$  y un entorno abierto del neutro de  $K$ . Ahora bien como  $K$  es conexo  $f(U)$  genera  $K$ , y como  $f$  valora en  $H$  se tiene que  $K \subset H$ .  $\square$

**Teorema 2.2.28.** *Dada una conexión en un fibrado principal  $\pi_G : P \rightarrow X$ , para cada  $u \in P$ , el grupo de holonomía restringido  $\Phi_0(u)$  es un subgrupo de Lie de  $G$ .*

*Demostración.* Se tiene del lema 2.2.27 y del teorema 2.2.26.  $\square$

**Proposición 2.2.29.**  $\Phi_0(u)$  es un subgrupo normal de  $\Phi(u)$ .

*Demostración.* Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos lazos. Supongamos que  $\beta$  es homotópica a cero entonces la composición  $\beta * \alpha * \beta^{-1}$  es también homotópica a cero y por tanto  $\Phi_0(u)$  es un subgrupo normal de  $\Phi(u)$ .  $\square$

**Proposición 2.2.30.** *Existe un epimorfismo canónico*

$$h : \pi_1(X, x) \rightarrow \Phi(u)/\Phi_0(u)$$

*Demostración.* Se puede demostrar que todo arco continuo es homótopo a uno diferenciable como aparece en [4]. Así pues, podemos definir  $h$  como sigue:  $h([\gamma]) = [\tau_\gamma]$ . La epiyectividad se deduce directamente de la definición de grupo de holonomía. □

**Corolario 2.2.31.**  $\Phi(u)$  es un grupo de Lie.

*Demostración.* Por ser  $\pi_1(X, x)$  numerable, por el teorema anterior tenemos que  $\Phi(u)/\Phi_0(u)$  es numerable y así la estructura de  $\Phi_0(u)$  se puede trasladar a una base numerable de abiertos de  $\Phi(u)$ . □

**Teorema 2.2.32.** Sea  $\pi : P \rightarrow X$  un fibrado principal con conexión  $\mathcal{H}$ . Sea  $u_0 \in P$ . Denotaremos por  $P(u_0)$  al conjunto de puntos de  $P$  que pueden ser unidos con  $u_0$  por una curva horizontal. Entonces se tiene que  $P(u_0)$  es un fibrado con grupo estructural  $\Phi(u_0)$  y la conexión  $\mathcal{H}$  es reducible a una conexión en  $P(u_0)$ .

*Demostración.* Denotaremos por  $P' = P(u_0)$  al conjunto de puntos de  $P$  que pueden ser unidos con  $u$  por una curva horizontal. Tenemos que  $(P', \Phi(u))$  cumple las siguientes condiciones

1.  $R_g(P') = P'$  si  $g \in \Phi(u)$
2. Si  $u, v \in P'$  pertenecen a la misma fibra en  $\pi_G$ , entonces existe un  $g \in \Phi(u)$  tal que  $u = vg$
3. Cada punto  $x \in X$  tienen un entorno  $U$  y una sección  $\sigma : U \rightarrow P$  tal que  $\sigma(U) \subset P'$ .

Veamos la condición 3, las otras dos son fáciles de ver. Consideremos una sistema de coordenadas alrededor de  $x$  de manera que  $x$  sea el origen  $(0, \dots, 0)$  con respecto al sistema de coordenadas. Sea  $U$  el entorno coordinado. Dado cualquier  $y \in U$ , consideramos  $\tau_y$  el segmento que une  $x$  e  $y$  con respecto al sistema de coordenadas. Fijemos  $v \in P'$  tal que  $\pi(v) = x$ . Sea  $\sigma(y)$  el punto de  $P$  obtenido por el transporte paralelo de  $v$  a lo largo de  $\tau_y$ . Entonces  $\sigma : U \rightarrow P$  es una sección tal que  $\sigma(U) \subset P'$ .

Utilizando estas secciones podemos trasladar la estructura diferenciable de  $U \times \Phi(u)$  a  $\pi_G^{-1}(U) \cap P'$ . Claramente  $P'$  es un fibrado principal de  $X$  con grupo estructural  $\Phi(u)$  y  $P'$  es una subvariedad de  $P$ .

Con lo que trasladamos la estructura diferenciable de  $U \times \Phi(u)$  a  $\pi_G^{-1}(U) \cap P'$ . Claramente  $P'$  es un fibrado principal de  $X$  con grupo estructural  $\Phi(u)$  y  $P'$  es una subvariedad de  $P$ .

Para ver que la restricción de  $\Gamma$  a  $\Phi(u)$  es una conexión en  $P'$ , solo tenemos que darnos cuenta que el espacio horizontal de  $\Gamma$  en un punto  $p \in P'$  es tangente a  $P'$  ya que cualquier vector horizontal se puede ver como un vector tangente a una curva horizontal. □

**Teorema 2.2.33.** *Sea  $\pi : P \rightarrow X$  un fibrado principal con  $P$  conexo, entonces existe una conexión en  $P$  tal que todos los fibrados  $P(u), u \in P$  coinciden con  $P$ .*

*Demostración.* Se puede ver en [4] La idea de la demostración es construir una conexión  $\Gamma'$  en  $P|_U = \pi^{-1}(U)$  donde  $U$  es un entorno de  $u_0$  donde  $P$  trivializa, de manera que el grupo de holonomía del fibrado  $P|_V$  coincida con la componente de la identidad, donde  $V \subset U$  es entorno de  $u_0$ . Después se extiende  $\Gamma'$  a una conexión  $\Gamma$  en  $P$ , de manera que  $\Gamma$  coincide con  $\Gamma'$  en  $P|_V$ . Como el grupo de holonomía  $\Phi(u_0)$  de  $\Gamma$  contiene a la componente identidad de  $G$ , el fibrado  $P(u_0)$  tiene la misma dimensión que  $P$  y por tanto es un abierto en  $P$ . Como  $P$  es unión disjunta de fibrados de holonomía los cuales son abiertos se sigue, por ser  $P$  conexo, que  $P = P(u_0)$ . □

En el subfibrado que resulta de la reducción al grupo de holonomía, considerando  $u \in P$  y el espacio  $E_u$  generado por los vectores horizontales junto con los vectores de la forma  $\Omega(v, w)$  donde  $v$  y  $w$  son vectores horizontales, se prueba que  $E$  es una distribución involutiva, con lo que por el teorema 1.0.10 existe, para cada  $p \in P$ , una variedad integral maximal  $M(p)$  que coincide con  $P$  y con el siguiente argumento dimensional

$$\dim X + \dim \mathcal{G} = \dim X + \dim G = \dim P = \dim M(p) = \dim E = n + \dim X$$

se ve que  $\mathcal{G}$  está generado por los vectores de la forma  $\Omega(v, w)$  donde  $v$  y  $w$  son vectores horizontales. Obtenemos así el conocido resultado de Ambrose-Singer.

**Teorema 2.2.34.** *Sea  $\mathcal{H}$  una conexión sobre un fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$ , sea  $\Omega$  su forma de curvatura y  $\Phi(u)$  el grupo de holonomía con respecto a un punto  $u \in P$ . Entonces el álgebra de Lie de  $\Phi(u)$  es igual al subespacio de  $\mathcal{G}$  generado por los elementos de la forma  $\Omega(v, w)$  donde  $v$  e  $w$  son vectores horizontales.*

## Capítulo 3

# Álgebra gauge y clases características

La Topología Algebraica es una rama de las matemáticas, donde la idea fundamental es asociar objetos algebraicos a los espacios topológicos o variedades, de manera que la estructura asociada sea un invariante, en ese sentido estudiando las propiedades algebraicas del objeto asociado podemos extraer consecuencias sobre la geometría y la topología del espacio.

La cohomología de Rham y la cohomología con soporte compacto, son los dos principales invariantes topológicos de una variedad  $C^\infty$ , en ambos casos son herramientas algebraicas, que se trata de cierta estructura algebraica extraída de una variedad diferenciable, permitirá distinguir si dos variedades son o no homeomorfas.

Con el propósito de seguir buscando más objetos algebraicos que permitan proporcionar más información geométrica y/o topológica del espacio se empieza estudiar la variedad producto, cuya generalización conduce a la teoría de fibrados.

Con todo esto obtenemos las llamadas clases características que se iniciaron en 1935 con Whitney y en 1942 por Shing-Shen Chern, éstas son invariantes que miden en cierta manera como se aparta esa estructura producto local de una estructura producto.

Si tenemos el fibrado  $\pi : P \rightarrow X$  con grupo  $G$  se define, como veremos en la siguiente sección, la diferencial covariante  $d^\omega$  sobre formas en  $P$  con valores en  $\mathcal{G}$ , que verifica  $d^\omega \Omega = 0$

Un polinomio de Weil de grado  $m$  es una aplicación multilineal y simétrica  $f : \mathcal{G} \times \dots \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(ad(g)A_1, \dots, ad(g)A_m) = f(A_1, \dots, A_m)$  para todo  $g \in G$  y  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{G}$ . Denotaremos por  $I^m(\mathcal{G})$  al conjunto de polinomios de Weil de grado  $m$ .

Usando esto podemos definir la 2m-forma diferencial en P por

$$f(\Omega, \dots, \Omega)(X_1, \dots, X_{2m}) = \frac{1}{2m} \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} f(\Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \dots, \Omega(X_{\sigma(2m-1)}, X_{\sigma(2m)}))$$

con  $f \in I^m(\mathcal{G})$ ,  $\sigma \in S_{2m}$  las permutaciones,  $\varepsilon_{\sigma}$  el signo de la permutación y  $X_1, \dots, X_{2m} \in TP$ .

Esta forma diferencial es una forma diferencial cerrada, lo que implica que define una clase característica la cual es independiente de la elección de la conexión  $\omega$ . Se puede ver que es cerrada en 3.2.3, en donde se utilizan los lemas 3.2.1 y 3.2.2. Para ver que es independiente de la conexión se consideran dos conexiones  $\omega_0$  y  $\omega_1$  y la familia de conexiones  $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$ . Esta familia verifica que  $\frac{d}{dt}\Omega_t = d^{\omega_t}(\omega_1 - \omega_0)$  además podemos definir  $\Phi = k \int_0^1 f(\omega_1 - \omega_0, \Omega, \dots, \Omega) dt$  verificando que  $\Phi$  proyecta a una forma en X y además  $d\Phi = f(\Omega_1, \dots, \Omega_1) - f(\Omega_2, \dots, \Omega_2)$  con lo que se ve que  $f(\Omega, \dots, \Omega)$  es independiente de la conexión escogida.

De la misma forma, pretendemos construir clases características utilizando los polinomios de Weil, la curvatura y elementos del álgebra  $gau(P)$ .

### 3.1. Diferencial covariante

**Definición 3.1.1.** Sea  $\pi : P \rightarrow X$  un fibrado principal con grupo de estructura  $G$ . Denotaremos por  $\overline{\wedge}^r(P, \mathcal{G})$  al conjunto de  $r$ -formas sobre  $P$  con valores en  $\mathcal{G}$  que satisfacen:

1. Para todo  $g \in G$  se tiene que  $(R_g)^*\phi = Ad(g^{-1})\phi$ .
2. Si  $D \in T(P)$  es  $\pi$ -vertical entonces  $i_D\phi = 0$ .

Si  $\omega$  es una forma de conexión entonces  $\omega \notin \overline{\wedge}^1(P, \mathcal{G})$  ya que por ejemplo  $i_{A^*}\omega = A$  para cualquier  $A \in \mathcal{G}$ . En cambio, la 2-forma de curvatura  $\Omega$  si pertenece a  $\overline{\wedge}^2(P, \mathcal{G})$ , ya que claramente  $i_D\Omega = 0$  si  $D$  es vertical y además teniendo en cuenta que  $d \circ R_g^* = R_g^* \circ d$  se verifica que  $(R_g)^*\Omega = Ad(g^{-1})\Omega$ . Además  $\overline{\wedge}^0(P, \mathcal{G})$  son las aplicaciones que verifica que  $\psi(pg) = Ad(g^{-1})\psi(p)$ .

**Definición 3.1.2.** Dada una conexión  $\omega$  de  $P$  se define la diferencial covariante

$$d^{\omega} : \overline{\wedge}^r(P, \mathcal{G}) \rightarrow \overline{\wedge}^{r+1}(P, \mathcal{G})$$

por  $(d^{\omega}\psi)(X_1, \dots, X_r) = (d\psi)(X_1^h, \dots, X_r^h)$

**Teorema 3.1.3.** (*Ecuación de estructura*) *Se verifica*

$$d^\omega \psi = d\psi + [\omega, \psi]$$

*Demostración.* Veamos los siguientes casos:

Si son todos los  $X_i \in T_p P$  horizontales tenemos que  $[\omega, \psi](X_1 \dots X_{r+1}) = 0$ , y por definición  $d^\omega \psi(X_1, \dots, X_{r+1}) = d\psi(X_1, \dots, X_{r+1})$ .

Si dos de los campos son verticales tenemos que  $d^\omega \psi(X_1, \dots, X_{r+1}) = 0$ ,  $[\omega, \psi](X_1, \dots, X_{r+1}) = 0$ , y por último

$$d\psi(X_1, \dots, X_{r+1}) = \psi([X_j, X_k], X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_{r+1}) = 0$$

donde los dos campos verticales son  $X_j$  y  $X_k$  y se verifica que  $[X_j, X_k]$  es vertical.

Por último veremos si se verifica la ecuación de estructura si solo hay un campo vertical que sera  $X_j = A^*$  para algún  $A \in \mathcal{G}$ . Tomaremos  $X_i$  horizontales y los extendemos a un campo  $G$ -invariante horizontal ( $\pi_* X_i$  se extiende en  $X$  y se levanta a  $P$ ) y así tendremos que  $[X_i, A^*] = 0$ . Por un lado se cumple que  $d^\omega \psi = 0$  y por otro tenemos que

$$\begin{aligned} d\psi(X_1, \dots, X_{r+1}) &= A^*(\psi(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1})) + \sum \psi([X_k, A^*], X_1, \dots, X_{r+1}) = \\ &= A^*(\psi(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1})) \end{aligned}$$

y se tiene también que

$$[\omega, \psi] = [\omega(A^*), \psi(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1})]$$

Para comprobar la ecuación de estructura falta ver que

$$[\omega(A^*), \psi(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1})] + A^*(\psi(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{r+1})) = 0$$

Sea  $a_t$  el subgrupo uniparamétrico de  $G$  generado por  $A$ .

$$\begin{aligned} A_u(\psi(X_1, \dots, X_{r+a})) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\psi_{ua_t}(X_1, \dots, X_{r+1}) - \psi_u(X_1, \dots, X_{r+1})) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((R_{a_t}^* \psi)_u(X_1, \dots, X_{r+1}) - \psi_u(X_1, \dots, X_{r+1})) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Ad(a_t^{-1})\psi_u(X_1, \dots, X_{r+1}) - \psi_u(X_1, \dots, X_{r+1})) = -[A, \psi_u(X_1, \dots, X_{r+1})] \end{aligned}$$

ya que  $\{X_i\}$  son invariantes por  $R_{a_t}$ .

□

**Corolario 3.1.4.** (*Identidad de Bianchi*) Se cumple que  $d^\omega \Omega = 0$ .

*Demostración.* Si algún campo es vertical claramente se cumple.

Si los tres campos son horizontales tenemos que

$$d^\omega \Omega(X_1, X_2, X_3) = d\Omega(X_1, X_2, X_3) + [\omega, \Omega](X_1, X_2, X_3) = 0$$

ya que  $d\Omega = d^2\omega = 0$  y  $\omega$  se anula en los campos horizontales. □

## 3.2. Clases características

**Lema 3.2.1.** Una  $r$ -forma  $\varphi$  en  $P$  proyecta a una (única)  $r$ -forma en  $X$ , la denotaremos por  $\bar{\varphi}$ , si:

1.  $\varphi(X_1, \dots, X_r) = 0$  si algún  $X_i$  es vertical.
2.  $\varphi((R_g)X_1, \dots, (R_g)X_r) = \varphi(X_1, \dots, X_r)$  para todo  $g \in G$ .

*Demostración.* Sea  $V_1, \dots, V_r$  campos de vectores de  $X$ , y definamos la  $r$ -forma  $\bar{\varphi}$  como  $\bar{\varphi}(V_1, \dots, V_r) = \varphi(X_1, \dots, X_r)$  donde  $X_1, \dots, X_r \in T_u P$  son campos de vectores que cumplen  $\pi_*(X_i) = V_i$  para todo  $i$  con  $1 \leq i \leq r$ . Veamos que  $\bar{\varphi}(X_1, \dots, X_r)$  esta bien definida y no depende de  $X_1, \dots, X_r$ . Sea  $Y_1, \dots, Y_r \in T_v P$  con  $\pi_*(Y_i) = V_i$ . Por la condición 2 podemos asumir que  $u = v$  y así  $X_i - Y_i$  son verticales y por tanto, por 1 se tiene

$$\varphi(X_1, \dots, X_r) = \varphi(Y_1, X_2, \dots, X_r) = \dots = \varphi(Y_1, \dots, Y_r)$$
□

**Lema 3.2.2.** Si una  $r$ -forma  $\varphi$  en  $P$  proyecta sobre una  $r$ -forma  $\bar{\varphi}$  en  $X$ , es decir  $\varphi = \pi^*(\bar{\varphi})$ , entonces  $d\varphi = d^\omega \varphi$ .

*Demostración.* Sea  $X_1, \dots, X_{r+1}$  campos de vectores de  $P$ . Se cumple

$$\begin{aligned} d\varphi(X_1, \dots, X_{r+1}) &= (d\pi^*\bar{\varphi})(X_1, \dots, X_{r+1}) = \pi^*(d\bar{\varphi}(X_1, \dots, X_{r+1})) = \\ &= d\bar{\varphi}(\pi_*X_1, \dots, \pi_*X_{r+1}) = (d\bar{\varphi})(\pi_*X_1^h, \dots, \pi_*X_{r+1}^h) = \pi^*(d\bar{\varphi})(X_1^h, \dots, X_{r+1}^h) = \\ &= d(\pi^*\bar{\varphi})(X_1^h, \dots, X_{r+1}^h) = (d\varphi)(X_1^h, \dots, X_{r+1}^h) = d^\omega \varphi(X_1, \dots, X_{r+1}) \end{aligned}$$
□

**Proposición 3.2.3.**  $f(\Omega..^m).. \Omega$  es cerrada, es decir  $df(\Omega..^m).. \Omega = 0$ .

*Demostración.* La forma  $f(\Omega..^m)..\Omega$  es una forma que verifica la condición 1 del lema 3.2.1. Como  $R_g^*(\Omega) = ad(g^{-1})\Omega$  para todo  $g \in G$  y como  $f$  es invariante por  $G$ , entonces

$$f(\Omega..^m)..\Omega)(R_g(X_1), \dots, R_g(X_{2m})) = f(\Omega..^m)..\Omega)(X_1, \dots, X_{2m})$$

que es la condición 2 del lema. Así tenemos que  $f(\Omega..^m)..\Omega$  proyecta sobre una  $r$ -forma en  $X$ , que la denotaremos por  $\bar{f}(\Omega..^m)..\Omega$ , y por el lema 3.2.2 se cumple que  $df(\Omega..^m)..\Omega) = d^\omega f(\Omega..^m)..\Omega)$ . Ahora bien, como  $d^\omega$  actúa como una diferenciación exterior y  $d^\omega(\Omega) = 0$  por la identidad de Bianchi obtenemos

$$d^\omega(f(\Omega..^m)..\Omega)) = f(d^\omega\Omega..^m)..\Omega) + \dots + f(\Omega..^m)..d^\omega\Omega) = \sum_i f(\Omega, \dots, d^\omega\Omega, \dots, \Omega) = 0$$

y por tanto  $f(\Omega..^m)..\Omega)$  es cerrada. □

**Proposición 3.2.4.** *Dado  $f \in I^1(G)$  para cada  $D \in gau(P)$  existe una 1-forma exacta  $\xi_D$  en  $P$  la cual proyecta en una 1-forma exacta  $\bar{\xi}_D$  en  $X$ .*

*Demostración.* Sea  $D \in gau(P)$ , podemos definir la función  $\tau_D(p) = A_p$  donde  $A \in \mathcal{G}$  es el único campo que cumple  $A_p^* = D_p$ . Se tiene que  $\tau_D \in \bar{\Lambda}^0(P, \mathcal{G})$ , esto es debido a que  $\tau_D(pg) = A_{pg} = (R_g)_*A_p = ad(g^{-1})A_p$  ya que el campo  $(R_g)_*A^*$  es el campo vectorial fundamental de  $ad(g^{-1})A$ .

De esta forma tenemos que  $d^\omega\tau_D \in \bar{\Lambda}^1(P, \mathcal{G})$ . Sea  $f \in I^1(G)$  y definimos la 1-forma  $\xi_D = f(d^\omega\tau_D)$ . Definimos ahora  $\bar{\xi}_D(\pi_*Y) = \xi_D(Y)$  para todo  $Y \in T_pP$  horizontal y con  $\pi(p) = x$ , si vemos que esta definición no depende de  $p \in \pi^{-1}(x)$ , tendremos que  $\xi_D$  proyecta sobre  $X$ . Sean  $p_1, p_2 \in \pi^{-1}(x)$ , entonces  $p_1 = p_2g$  para algún  $g \in G$ . Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_D(\pi_*X_{p_1}) &= \bar{\xi}_D(\pi_*X_{p_2g}) = \xi_D(X_{p_2g}) = f(d^\omega\tau_D)(X_{p_2g}) = \\ &= f(d^\omega\tau_D)((R_g)_*X_{p_2}) = f((R_g)^*d^\omega\tau_D(X_{p_2})) = f(ad(g^{-1})d^\omega\tau_D(X_{p_2})) = \\ &= f(d^\omega\tau_D(X_{p_2})) = \xi_D(X_{p_2}) = \bar{\xi}_D(\pi_*X_{p_2}) \end{aligned}$$

Por otro lado  $\xi_D$  se anula en los campos verticales por tanto  $\xi_D = \pi^*\bar{\xi}_D$ .

De forma similar podemos ver que la aplicación diferenciable  $f(\tau_D)$  proyecta en la función  $\bar{f}(\tau_D)(x) = f(\tau_D)(p)$  con  $\pi(p) = x$ . Esta función no depende del representante de la fibra ya que

$$f(\tau_D(p)) = f(A) = f(ad(g^{-1})A) = f(\tau_D(pg))$$

donde  $A \in \mathcal{G}$  es el único campo que cumple que  $A_p^* = D_p$ . Por tanto por el lema 3.2.2 se tiene que  $d^\omega(f(\tau_D)) = d(f(\tau_D))$ . Y así podemos escribir

$$\xi_D = f(d^\omega \tau_D) = d^\omega(f(\tau_D)) = d(f(\tau_D))$$

Por tanto  $\xi_D$  es una 1-forma exacta y no depende de  $\omega$ .  $\square$

Pretendemos construir, a partir del álgebra gauge  $gau(P)$  2-formas  $\Lambda_2 \in \overline{\Lambda}^2(P, \mathcal{G})$  que sea cerrada. La siguiente proposición nos permite calcular canónicamente una 2-forma de  $\overline{\Lambda}^2(P, \mathcal{G})$ .

**Proposición 3.2.5.** *Sea  $D \in gau(P)$ , se verifica que  $d^\omega(d^\omega(\tau_D)) \in \overline{\Lambda}^2(P, \mathcal{G})$ , y además  $[\Omega^\omega, \tau_D] = d^\omega(d^\omega(\tau_D))$ .*

*Demostración.*

$$\begin{aligned} d^\omega(d^\omega(\tau_D)) &= d(d^\omega \tau_D) + [\omega, d^\omega \tau_D] = d(\tau_D + [\omega, \tau_D]) + [\omega, d\tau_D + [\omega, \tau_D]] = \\ &= d^2\tau_D + [d\omega, \tau_D] - [\omega, d\tau_D] + [\omega, d\tau_D] + [\omega, [\omega, \tau_D]] = \\ &= [d\omega, \tau_D] + \frac{1}{2}[[\omega, \omega], \tau_D] = [\Omega^\omega, \tau_D] \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la identidad de Jacobi  $2[\omega, [\omega, \tau_D]] = [[\omega, \omega], \tau_D]$ .

Claramente se verifica que esta 2-forma verifica las dos condiciones de  $\overline{\Lambda}^2(P, \mathcal{G})$ , ya que  $\Omega^\omega$  las verifica.  $\square$

**Proposición 3.2.6.** *Dado  $D \in gau(P)$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $\tau_D : P \rightarrow \mathcal{G}$  es constante
2.  $\tau_D$  valora en el centro de  $\mathcal{G}$ , lo denotaremos por  $C(\mathcal{G})$ .
3. Para toda conexión  $\omega$  en  $P$ ,  $d^\omega \tau_D = d\tau_D + [\omega, \tau_D] = 0$
4.  $d^\omega([\Omega^\omega, \tau_D]) = 0$

*Demostración.* 1)  $\Rightarrow$  2) Si  $\tau_D$  es constante, se tiene

$$0 = L_{A^*} \tau_D = -[A, \tau_D]$$

lo que implica que  $\tau_D$  valora en  $C(\mathcal{G})$ .

2)  $\Rightarrow$  1) Para ver que  $\tau_D$  es constante basta ver que  $d\tau_D = 0$ , y para esto solo tenemos que probar que  $X(\tau_D) = 0$  para cualquier campo  $X$ . Sea  $\{X_i\}$  una base local de vectores  $G$ -invariantes horizontales para una conexión

determinada. Sea también  $A_1, \dots, A_r$  una base de  $\mathcal{G}$ . Tenemos que  $A_i^*(\tau_D) = -[A, \tau_D] = 0$ . Solo nos falta ver que  $X_i\tau_D = 0$ . Se cumple que  $L_D\omega = d^\omega\tau_D$ . Tenemos lo siguiente:

$$X_i\tau_D = d^\omega\tau_D(X_i) = (L_D\omega)(X_i) = D(\omega(X_i)) - \omega([D, X_i]) = -\omega([D, X_i]) = 0$$

donde la última igualdad se debe al lema 2.2.5.

1) y 2)  $\Rightarrow$  3) Claramente se cumple que  $d^\omega\tau_D = d\tau_D + [\omega, \tau_D] = 0$ .

1)  $\Leftrightarrow$  4) Se tiene que

$$d^\omega(\Omega^\omega, \tau_D) = [\Omega^\omega, d^\omega\tau_D]$$

y con esto se comprueba fácilmente.

3)  $\Rightarrow$  1) Podemos elegir por el teorema 2.2.33 una conexión  $\omega$  en  $P$  para la cual el subfibrado de holonomía coincide con  $P$ . De esta forma como  $d\tau_D + [\omega, \tau_D] = 0$ , tomando diferencial exterior en esta igualdad se obtiene

$$[d\omega, \tau_D] - [\omega, d\tau_D] = 0$$

y entonces se cumple

$$[d\omega, \tau_D] - [\omega, [\omega, \tau_D]] = 0$$

La identidad de Jacobi nos proporciona la igualdad  $2[\omega, [\omega, \tau_D]] = -[[\omega, \omega], \tau_D]$  y así se tiene

$$[d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \tau_D] = [\Omega^\omega, \tau_D] = 0$$

Por el teorema 2.2.33 la imagen de la curvatura coincide con el álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  y así se sigue que  $\tau_D \in C(\mathcal{G})$ . □

Al conjunto de elementos  $D \in \text{gau}(P)$  que verifican las condiciones del teorema anterior lo denotaremos por  $\text{gau}_0(P)$ .

**Ejemplo 3.2.7.** *El conjunto  $\text{gau}_0(P)$  es no vacío, ya que si consideramos  $A \in C(\mathcal{G})$ , tenemos que se verifica que  $\text{ad}(g^{-1})A = A$ , y definiendo  $D = A^*$ , se tiene que  $D \in \text{gau}(P)$  y  $\tau_D : P \rightarrow \mathcal{G}$  definida por  $\tau_D(p) = A$ . Trivialmente se cumple  $[\Omega^\omega, \tau_D] = 0$ .*

Vamos a utilizar  $\text{gau}_0(P)$  para construir clases características.

**Proposición 3.2.8.** Sea  $f \in I^k(P)$  y  $D \in \text{gau}_0(P)$ , la  $2j$ -forma

$$F(\tau_D, \Omega^\omega) = f(\tau_D, \dots^i \dots \tau_D, \Omega^\omega, \dots^j \dots, \Omega^\omega)$$

con  $i + j = k, j \geq 1$  es cerrada y su clase de cohomología no depende de la conexión  $\omega$ .

Aún mas si el fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$  es trivial entonces  $F(\tau_D, \Omega^\omega)$  tiene una primitiva de Chern-Simons  $TP(\tau_D, \omega)$  en  $P$  tal que

$$d(TP(\tau_D, \omega)) = F(\tau_D, \Omega^\omega)$$

*Demostración.* Como  $F(\tau_D, \Omega^\omega)$  es una forma horizontal la diferencial covariante y la diferenciación exterior coinciden y así

$$\begin{aligned} dF(\tau_D, \Omega^\omega) &= d^\omega F(\tau_D, \Omega^\omega) = \\ &= if(d^\omega \tau_D, \dots^i \dots \tau_D, \Omega^\omega, \dots^j \dots, \Omega^\omega) + jf(\tau_D, \dots^i \dots \tau_D, d^\omega \Omega^\omega, \dots^j \dots, \Omega^\omega) = 0 \end{aligned}$$

debido a que  $d^\omega$  actúa como una antiderivación en el álgebra de las formas de  $P$  y de que  $d^\omega \Omega^\omega = 0$  y  $d^\omega \tau_D = 0$ .

Como en el caso clásico, consideramos dos conexiones  $\omega_0$  y  $\omega_1$  y definimos la familia de conexiones  $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$ . Esta familia verifica que  $\frac{d}{dt} \Omega_t = d^{\omega_t}(\omega_1 - \omega_0)$  considerando  $\Omega_t$  la curvatura de  $\omega_t$  además podemos definir  $\Phi = j \int_0^1 f(\tau_D, \dots^i \dots \tau_D, \omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots^{j-1} \dots, \Omega_t) dt$  verificando que  $\Phi$  proyecta a una forma en  $X$  por el lema 3.2.1 y utilizando el lema 3.2.2 se cumple

$$\begin{aligned} jdf(\tau_D, \dots^i \dots \tau_D, \omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots^{j-1} \dots, \Omega_t) &= jd^{\omega_t} f(\tau_D, \dots^i \dots \tau_D, \omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots^{j-1} \dots, \Omega_t) = \\ &= jf(\tau_D, \dots^i \dots \tau_D, d^{\omega_t}(\omega_1 - \omega_0), \Omega_t, \dots^{j-1} \dots, \Omega_t) = \\ &= jf(\tau_D, \dots^i \dots \tau_D, \frac{d}{dt} \Omega_t, \Omega_t, \dots^{j-1} \dots, \Omega_t) = \\ &= \frac{d}{dt} (f(\tau_D, \dots^i \dots \tau_D, \Omega_t, \dots^j \dots, \Omega_t)) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} d\Phi &= j \int_0^1 df(\tau_D, \dots^i \dots \tau_D, \omega_1 - \omega_0, \Omega_t, \dots^{j-1} \dots, \Omega_t) dt = \\ &= j \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(\tau_D, \dots^i \dots \tau_D, \Omega_t, \dots^j \dots, \Omega_t)) dt \\ &= F(\tau_D, \Omega_1) - F(\tau_D, \Omega_2) \end{aligned}$$

con lo que se ve que  $F(\tau_D, \Omega^\omega)$  es independiente de la conexión escogida.

Para ver el segundo resultado, podemos suponer sin perdida de generalidad que  $f \in I^3(\mathcal{G})$  y así considerar la 4-forma  $F(\tau_D, \Omega^\omega) = f(\tau_D, \Omega^\omega, \Omega^\omega)$

Definimos  $\phi_t = t d\omega + \frac{t^2}{2}[\omega, \omega]$  y sea

$$TP(\tau_D, \omega) = 2 \int_0^1 f(\tau_D, \omega, \phi_t) dt$$

El objetivo es probar que  $dTP(\tau_D, \omega) = f(\tau_D, \Omega^\omega, \Omega^\omega)$

Sea  $h(t) = f(\tau_D, \phi_t, \phi_t)$ . Se tiene que

$$f(\tau_D, \Omega^\omega, \Omega^\omega) = \int_0^1 h'(t) dt$$

Es suficiente con ver que  $h'(t) = 2df(\tau_D, \omega, \phi_t)$

Por la invarianza de f se tiene que

$$f([\tau_D, \omega], \omega, \phi_t) - f(\tau_D, [\omega, \omega], \phi_t) - f(\tau_D, \omega, [\phi_t, \omega]) = 0$$

Como  $[\tau_D, \omega] = 0$  tenemos que

$$-f(\tau_D, [\omega, \omega], \phi_t) = f(\tau_D, \omega, [\phi_t, \omega])$$

Ahora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}h'(t) &= f(\tau_D, d\omega + t[\omega, \omega], \phi_t) = f(\tau_D, d\omega, \phi_t) + f(\tau_D, t[\omega, \omega], \phi_t) = \\ &= f(d\tau_D, \omega, \phi_t) + f(\tau_D, d\omega, \phi_t) - f(\tau_D, \omega, t[\phi_t, \omega]) = \\ &= f(d\tau_D, \omega, \phi_t) + f(\tau_D, d\omega, \phi_t) - f(\tau_D, \omega, d\phi_t) = df(\tau_D, \omega, \phi_t) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a la relación anterior y a que  $d\tau_D = 0$  ya que  $D \in gau_0(P)$ .

□

La proposición 3.2.3 nos dice que no podemos construir una clase de cohomología no nula de la forma  $f([\Omega^\omega, \tau_D])$ , con lo que vamos a buscar otra manera de construir una 3-forma cerrada  $\Lambda \in \overline{\Lambda}^3(P, \mathcal{G})$ .

**Definición 3.2.9.** Sea el álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$ . Definimos recursivamente

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}, \quad \mathcal{G}_1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}], \dots, \mathcal{G}_{i+1} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}_i], \dots$$

La serie decreciente  $\mathcal{G}_0 \supseteq \mathcal{G}_1 \supseteq \dots$  es llamada la serie central de  $\mathcal{G}$ . Diremos que  $\mathcal{G}$  es nilpotente si  $\mathcal{G}_h = 0$  para algún  $h$ .

Un álgebra nilpotente  $\mathcal{G}$  tiene un centro distinto de cero, y coincide con el último  $\mathcal{G}_j$  que sea distinto de cero.

**Proposición 3.2.10.** *Sea  $D \in \text{gau}(P)$  se verifica que  $L_D(\Omega^\omega) = [\tau_D, \Omega^\omega]$*

*Demostración.* Se tiene que  $\varphi_t(p) = \text{pexp}(t\tau_D(p))$  es el flujo del campo  $D$ , y por la definición de derivada de Lie y que  $[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(Y - (\varphi_t)_*Y)$  obtenemos la igualdad.  $\square$

**Definición 3.2.11.** *Sea  $\mathcal{G}$  un álgebra de Lie nilpotente de un grupo de Lie  $G$ . Consideremos  $D \in \text{gau}(P) \setminus \text{gau}_0(P)$  tal que  $\text{Im}\tau_D = \mathcal{G}$ . Definimos la 2-forma:*

$$\Omega_D^\omega = L_{D..^i}..L_D(\Omega^\omega) = [\tau_D, ..^i].., [\tau_D, [\tau_D, \Omega^\omega]]$$

Como  $\mathcal{G}$  es nilpotente existe un índice  $i$  tal que  $\Omega_D^\omega$  toma valores en  $C(\mathcal{G})$  y lo mismo ocurre con  $d\Omega_D^\omega$ . Por tanto se cumple

$$d^\omega \Omega_D^\omega = d\Omega_D^\omega + [\omega, \Omega_D^\omega] = d\Omega_D^\omega$$

y

$$d^\omega (d^\omega \Omega_D^\omega) = d^2 \Omega_D^\omega + [\omega, d\Omega_D^\omega] = 0$$

Se tiene que  $\Lambda = d^\omega \Omega_D^\omega \in \overline{\bigwedge}^3(P, \mathcal{G})$  y además  $d^\omega \Lambda = 0$ .

**Teorema 3.2.12.** *Para cada  $f \in I^k(G)$ , la  $2i+3j$ -forma  $f(\Omega^\omega, ..^i].., \Omega^\omega, \Lambda, ..^j].. \Lambda)$ , con  $i + j = k$ , es cerrada.*

*Demostración.* Se tiene que

$$\begin{aligned} df(\Omega^\omega, ..^i].., \Omega^\omega, \Lambda, ..^j].. \Lambda) &= d^\omega f(\Omega^\omega, ..^i].., \Omega^\omega, \Lambda, ..^j].. \Lambda) = \\ &= f(d^\omega \Omega^\omega, ..^i].., d^\omega \Omega^\omega, d^\omega \Lambda, ..^j].. d^\omega \Lambda) = 0 \end{aligned}$$

debido a que  $d^\omega$  actúa como una antiderivación del álgebra de las formas tensoriales de  $P$ .  $\square$

Podemos proyectar  $\Lambda$  en  $X$ . La denotaremos de la misma manera  $\Lambda$ . La clase característica formada por  $f(\Omega^\omega, ..^i].., \Omega^\omega, \Lambda, ..^j].. \Lambda)$  es independiente de la conexión elegida. Para poder demostrar esto debemos introducir el fibrado de 1-jets y trabajar en el fibrado de conexiones  $C(P)$ .

### 3.2.1. Fibrado de 1-jets

**Definición 3.2.13.** *Dos secciones locales  $s, s'$  de un fibrado  $\pi : P \rightarrow X$  definidas sobre un entorno de un punto  $x \in X$  tienen el mismo 1-jet, se denotara por  $j_x^1 s = j_x^1 s'$ , si  $s(x) = s'(x)$  y  $s_* X = s'_* X$  para todo  $X \in T_x X$ . Al espacio de clases de equivalencia lo denotaremos por  $J^1 P$ .*

**Proposición 3.2.14.** *La aplicación*

$$\begin{aligned} \pi_{10} : J^1 P &\rightarrow P \\ j_x^1 &\mapsto s(x) \end{aligned}$$

*es un fibrado.*

*Demostración.* La función  $\pi_{10}$  es suprayectiva ya que si  $u \in P$  existe una sección local que verifica  $s(\pi(u)) = u$  y entonces  $\pi_{10}(j_{\pi(u)}^1 s) = s(\pi(u)) = u$ . Que sea submersión se ve de la misma manera. Que sea diferenciable se puede ver en [1].  $\square$

Considerando  $\pi_1 = \pi \circ \pi_{10} : J^1 P \rightarrow X$  se ve que también es un fibrado.

**Definición 3.2.15.** *Consideremos el fibrado de 1-jets de un  $G$ -fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$ . Definimos la acción por la derecha de  $G$  en  $J^1 P$  como  $j_x^1 s \cdot g = j_x^1 (R_g \circ s)$  para toda  $s$  sección local y  $x \in X$ . Definimos*

$$\begin{aligned} p : \frac{J^1 P}{G} &\rightarrow X \\ j_x^1 s \cdot G &\mapsto \pi_1(j_x^1 s) \end{aligned}$$

**Proposición 3.2.16.** *Esta acción esta bien definida y es libre.*

*Demostración.* Esta bien definida ya que si  $j_x^1 s = j_x^1 s'$  y  $a \in G$  tenemos

$$\begin{aligned} (R_a \circ s)(x) &= R_a(s(x)) = R_a(s'(x)) = (R_a \circ s')(x) \\ (R_a \circ s)_*(x) &= (R_{a_*})_{s(x)} s_*(x) = (R_{a_*})_{s'(x)} s'_*(x) = (R_a \circ s')_*(x) \end{aligned}$$

Por tanto  $j_x^1 (R_a \circ s) = j_x^1 (R_a \circ s')$

$G$  es libre ya que tenemos que si  $j_x^1 s \cdot a = j_x^1 s$ , entonces  $j_x^1 (R_a \circ s) = j_x^1 s$ , por tanto  $(R_a \circ s)(x) = s(x)$ , con lo cual  $s(x)a = s(x)$ , y esto implica que  $a = e$ .  $\square$

Se verifica que

$$p : \frac{J^1P}{G} \rightarrow X$$

tiene estructura de fibrado (se puede ver en [39]).

**Proposición 3.2.17.**  $\bar{\pi} : J^1P \rightarrow \frac{J^1P}{G}$  es un  $G$ -fibrado principal.

*Demostración.* Tenemos que la acción es libre. Faltaría ver que  $\bar{\pi}$  es una aplicación diferenciable ([39]) y que es localmente trivial.

Sea  $p^{-1}(U) = (\frac{J^1P}{G})_U$  para cualquier entorno  $U$ . Sea  $x_0 \in X$  y  $U$  un entorno tal que exista una sección sobre  $U$ ,  $\sigma : U \rightarrow P$ . Existe un único  $g : P_U \rightarrow G$  que verifica  $ug(u) = \sigma(\pi(u))$ . Definimos entonces

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : (J^1P)_U &\rightarrow (\frac{J^1P}{G})_U \times G \\ j_x^1s &\mapsto (\bar{\pi}(j_x^1s, g(s(x))^{-1})) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo y además

$$\bar{\varphi}(j_x^1s \cdot a) = (\bar{\pi}(j_x^1sa), g(s(x)a)^{-1}) = (\bar{\pi}(j_x^1sa), g(s(x))^{-1}a) = \bar{\varphi}(j_x^1s) \cdot a$$

Por tanto es un isomorfismo de fibrados principales y  $\bar{\pi}$  es un  $G$ -fibrado principal. □

**Proposición 3.2.18.**  $J^1P$  es isomorfo al fibrado inducido por  $p$ ,  $p^*(P) = \frac{J^1P}{G} \times_X P$  del fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$ . Además  $\pi_{10}$  coincide con el morfismo canónico  $p_G : p^*(P) = \frac{J^1P}{G} \times_X P \rightarrow P$ .

*Demostración.* Definiendo

$$\begin{aligned} f : J^1P &\rightarrow p^*(P) = \frac{J^1P}{G} \times_X P \\ j_x^1s &\mapsto (j_x^1s \cdot G, s(x)) \end{aligned}$$

Esta bien definida y además  $p(j_x^1s \cdot G) = \pi(s(x))$ , luego  $(j_x^1s \cdot G, s(x)) \in \frac{J^1P}{G} \times_X P$ .

La aplicación  $f$  es biyectiva y es un isomorfismo de fibrados principales ya que

$$\begin{aligned} f(j_x^1s \cdot a) &= f(j_x^1(R_a \circ s)) = (j_x^1(R_a \circ s) \cdot G, R_a \circ s(x)) = (j_x^1s \cdot Ga, s(x)a) = \\ &= (j_x^1s \cdot G, s(x)) \cdot a = f(j_x^1s) \cdot a \end{aligned}$$

Claramente se tiene que  $\pi_{10} = p_G$ . por tanto  $J^1P \cong \frac{J^1P}{G} \times_X P = p^*(P)$  □

**Definición 3.2.19.** Definimos para todo  $D \in T_{s(x)}P$  la diferencial vertical  $d^v s(D) = B$  con  $B \in \mathcal{G}$  cumpliendo que  $B^* = D - s_*\pi_*D$ .  $d^v s$  es una 1-forma con valores en  $\mathcal{G}$ .

**Proposición 3.2.20.**  $d^v s$  es una 1-forma de conexión.

*Demostración.* Se verifica  $d^v s(D^*) = D$  para todo  $D \in \mathcal{G}$  ya que  $D^* = D^* - s_*\pi_*D^*$  ya que  $\pi_*(D^*) = 0$ .

Sea  $u = s(x)$ . Falta ver que  $(R_g)^*d^v s(D_u) = Ad_{g^{-1}}(d^v_s(D_u))$ .

Sea  $B = d^v s((R_g)_*D_u)$  cumpliendo  $B^* = (R_g)_*D_u - s_*\pi_*(R_g)_*D_u = (R_g)_*D_u - s_*\pi_*D_u$  ya que  $(\pi \circ R_g) = \pi$ . Por otro lado  $(Ad_{g^{-1}}d^v s(D_u))^* = (R_g)_*((d^v s)^*) = (R_g)_*(D_u - s_*\pi_*(D_u)) = (R_g)_*D_u - s_*\pi_*D_u = B^*$ . Esta última igualdad es debida a que  $R_g \circ s = s$ . Así tenemos que  $B = (Ad_{g^{-1}}d^v s(D_u))$ . Con lo cual  $d^v s$  es una 1-forma de conexión. □

De esta forma podemos definir

$$q : J^1P \longrightarrow C(P)$$

$$q(j_x^1s) = d^v s$$

Si definimos ahora

$$\varphi : J^1P \longrightarrow C(P) \times_X P = h^*(P)$$

$$j_x^1s \mapsto (d^v s, s(x))$$

donde  $h : C(P) \longrightarrow X$  es el fibrado afín de la proposición 2.2.11. La aplicación  $\varphi$  es un isomorfismo de  $G$  fibrados y además la proyección canónica  $C(P) \longrightarrow C(P) \times_X P$  coincide con  $\pi_{10}$ . Por tanto tenemos que  $C(P) \times_X P \cong \frac{J^1P}{G} \times_X P$  lo que implica que  $C(P) \cong \frac{J^1P}{G}$ .

De esta forma podemos considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} p^*(P) = J^1P & \xrightarrow{\pi_{10}} & P \\ q \downarrow & & \downarrow \pi \\ C(P) \cong \frac{J^1P}{G} & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

**Definición 3.2.21.** Definimos la 1-forma  $\theta$  en  $J^1P$  con valores en  $\mathcal{G}$  de la siguiente manera. Para cada  $Y \in T_{j_x^1s}(J^1P)$  tenemos que existe un  $B \in \mathcal{G}$  tal que  $(q(j_x^1s)((\pi_{10})_*Y))^* = B^*_{s(x)}$ . Así definimos  $\theta(Y) = B = q(j_x^1s)((\pi_{10})_*Y)$ .

**Proposición 3.2.22.** Se tiene que  $\theta$  es una 1-forma de conexión del fibrado principal  $q : J^1P \longrightarrow C(P)$ , que llamaremos conexión canónica.

*Demostración.* Claramente si  $B \in \mathcal{G}$  tenemos que  $\theta(B^*) = d^v s((\pi_{10*})B^*) = B$ . Veamos ahora que  $(R_g)^*\theta = Ad_{g^{-1}}(\theta)$ . Se verifica

$$\begin{aligned} (R_g)^*\theta(Y) &= \theta((R_g)_*Y) = d^v s(((\pi_{10})_* \circ (R_g)_*)Y) = d^v s((R'_g)_* \circ (\pi_{10})_*Y) = \\ &= Ad_{g^{-1}}d^v s(\pi_{10})_*Y = Ad_{g^{-1}}(\theta)(Y) \end{aligned}$$

Donde hemos considerado  $R_g : J^1P \longrightarrow J^1P$  y  $R'_g : P \longrightarrow P$  la traslación por la derecha en  $J^1P$  y en  $P$ , y se cumple que  $\pi_{10} \circ R_g = R'_g \circ \pi_{10}$ .  $\square$

Vimos en la proposición 2.2.10 que las conexiones de  $P$  se podían identificar con las secciones globales de  $p : C(P) \longrightarrow X$ . Denotaremos ahora por  $\sigma_\Gamma : X \longrightarrow C(P)$  la sección del fibrado de conexiones inducida por la conexión  $\Gamma$ .

Ya estamos en disposición de enunciar y demostrar el siguiente teorema

**Teorema 3.2.23.** *Sea la forma  $\Lambda = d^\omega \Omega_D^\omega = d^\omega[\tau_D, \dots, [\tau_D, [\tau_D, \Omega\omega]]]$ , y sea  $f \in I^k(G)$ . Entonces la clase de cohomología  $f(\Omega^\omega, \dots, \Omega^\omega, \Lambda, \dots, \Lambda)$  no depende de  $\omega$ .*

*Demostración.* Sea  $\bar{\tau}_D = \tau_D(\pi_{10*})$ . Se cumple que  $\bar{\tau}_D(j_x^1 s) = \tau_D(s(x)) = A$ , que cumple que  $A_{s(x)}^* = D$ . De esta manera podemos definir la forma  $\Omega_D^\theta = [\tau_D, \dots, [\tau_D, [\tau_D, \Omega^\theta]]]$  y  $\bar{\Lambda} = d^\theta \Omega^\theta$ . Así la forma  $f(\Omega^\theta, \dots, \Omega^\theta, \bar{\Lambda}, \dots, \bar{\Lambda})$  en  $J^1P$  que es proyectable a  $C(P)$  y que define una clase de cohomología en  $H^{2k}(C(P))$ . Ahora bien  $p^* : H^{2k}(X) \longrightarrow H^{2k}(C(P))$  es un isomorfismo, y el pullback de cualquier sección de  $p$  coincide con  $p^{*-1}$ , es decir  $\sigma_\Gamma^* = p^{*-1}$ , para toda conexión  $\Gamma$  de  $P$ . De esta forma la clase de cohomología  $\sigma_\Gamma^* f(\Omega^\theta, \dots, \Omega^\theta, \bar{\Lambda}, \dots, \bar{\Lambda})$  en  $H^{2d}(X)$  no depende de  $\Gamma$  y coincide con la clase de  $f(\Omega^\omega, \dots, \Omega^\omega, \Lambda, \dots, \Lambda)$  por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} J^1P & \xrightarrow{\pi_{10}} & P \\ q \downarrow & & \downarrow \pi \\ C(P) & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

$\square$

## 3.3. Conexiones de Yang-Mills

### 3.3.1. Introducción

La teoría de Yang-Mills se introdujo para describir la interacción débil y fuerte entre partículas, siendo fundamental en el estudio de las partículas

elementales y física nuclear. Esta teoría es una generalización de la teoría de Maxwell electromagnética. La interacción electromagnética se introduce aplicando el principio de simetría gauge al grupo  $U(1)$ . Yang y Mills generalizaron este principio al grupo  $SU(2)$ , obteniendo la generalización de las ecuaciones de Maxwell que describe todas las interacciones fundamentales entre partículas elementales. En general la idea básica del principio de simetría gauge es que un sistema es invariante bajo la acción de un grupo de Lie  $G$ , entonces es invariante en las fibras del  $G$ -fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$ .

Para obtener las ecuaciones de Yang-Mills se aplica el principio de mínima acción en donde se considera el funcional de Yang-Mills definido por  $S(\omega) = \int_X \text{tr}(\Omega^\omega \wedge \bar{*}\Omega^\omega) d\mu$ , donde utilizamos la forma de Killing y  $\bar{*}$  se definirá en esta sección para lo que necesitaremos que  $X$  tenga una métrica. Lo que intentamos es encontrar los puntos críticos de este funcional, para ello se considera la conexión  $\omega_t = \omega + t\beta$  entonces

$$\Omega_t^\omega = \Omega + t(d^\omega \beta) + t^2[\beta, \beta]$$

de manera que

$$\left. \frac{d\Omega_t^\omega}{dt} \right|_{t=0} = d^\omega \beta$$

Con lo cual

$$\frac{d}{dt} S(\omega_t) = 2 \int_X \text{tr} \left( \frac{d\Omega_t^\omega}{dt} \wedge \bar{*}\Omega_t^\omega \right)$$

y evaluando en  $t = 0$  obtenemos que

$$\left. \frac{d}{dt} S(\omega_t) \right|_{t=0} = 2 \int_X \text{tr}(d^\omega \beta \wedge \bar{*}\Omega^\omega) = 2 \int_X \text{tr}(\beta \wedge d^\omega \bar{*}\Omega)$$

Con lo que para que se anule tiene que ocurrir que  $d^\omega \bar{*}\Omega = 0$  y junto con la identidad de Bianchi,  $d^\omega \Omega^\omega = 0$ , constituyen las ecuaciones de Yang-Mills. Cuando una conexión  $\omega$  verifica estas dos condiciones se dice que es una conexión de Yang-Mills.

Si consideramos el grupo  $U(1)$  vamos a ver que las ecuaciones de Maxwell en el vacío se obtienen de las ecuaciones de Yang-Mills  $d\Omega^\omega = 0$  y  $d\bar{*}\Omega^\omega = 0$ . En este caso  $d$  y  $d^\omega$  coinciden al ser un  $U(1)$  un grupo abeliano cuya álgebra de Lie es  $\mathbb{R}$ .

Considerando  $P = \mathbb{R}^4$  podemos definir el potencial electromagnético como  $\omega = \sum_j \omega_j dx^j$  que es la 1-forma de conexión. Debemos ahora calcular  $\Omega = d\omega$ .

Haciendo un cálculo sencillo se obtiene que

$$\Omega = \left(\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0}\right)dx^1 \wedge dx^0 + \left(\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0}\right)dx^2 \wedge dx^0 + \left(\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0}\right)dx^3 \wedge dx^0 +$$

$$+ \left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right)dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}\right)dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right)dx^1 \wedge dx^2$$

Escribiendo en términos del campo eléctrico y magnético se sigue que

$$\Omega = E \wedge dx^0 + B$$

donde las componentes de los campos son

$$E_i = \left(\frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^0}\right)dx^i$$

$$B_k = \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\right)dx^i \wedge dx^j$$

A la curvatura  $\Omega$  también se le conoce como la intensidad del campo de Yang-Mills.

De la ecuación  $d\Omega = 0$  aplicando la diferencial a  $\Omega$  llegamos a dos ecuaciones

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) \right\} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Esta expresión en forma vectorial es  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  que corresponde con una de las ecuaciones de Maxwell.

La otra ecuación es

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) \right\} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 -$$

$$- \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) \right\} dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) \right\} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = 0$$

que en forma vectorial es la ley de Faraday de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Para obtener las dos ecuaciones que faltan hay que aplicar el operador estrella de Hodge a  $\Omega$ , el cual intercambia el papel de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  y derivar, obteniendo después de varios cálculos

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) \right\} = 0$$

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) \right\} = 0$$

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) \right\} = 0$$

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) \right\} = 0$$

La primera ecuación nos da  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  y las otras tres juntas nos proporcionan la ecuación  $\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ .

Cuando consideramos el grupo de estructura el grupo  $SU(2)$  obtenemos la descripción de la interacción débil y fuerte entre partículas, tal y como hicieron Yang-Mills. En aquella época se estaba estudiando la relación que existe entre los protones, neutrones y mesones. Lo curioso es que los mesones eran capaces de convertir un proton en un neutrón o que un neutrón se convirtiese en un protón. Existen tres tipos distintos de mesones que son  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  y  $\pi^0$  según la carga sea positiva, negativa o neutra.

Desde el punto de vista de las fuerzas nucleares el protón y el neutrón se comportan de la misma manera, por lo tanto podemos pensar que son estados distintos de una misma partícula llamada nucleón. Así el nucleón se puede escribir como  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$

El campo del nucleón es una sección de un  $\mathbb{C}^2$ -fibrado vectorial con grupo  $SU(2)$ . En este fibrado la derivada covariante viene dada localmente por

$$\nabla_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \omega_j$$

donde  $\omega_j = \omega(\partial/\partial x^j)$  y  $\omega$  es una 1-forma de conexión con valores en  $\mathfrak{su}(2)$ , el álgebra de Lie de  $SU(2)$ , formada por las matrices antihermitianas

con traza cero. Una base de este álgebra viene dada por  $\{i\sigma_j\}$  donde las matrices de Pauli son:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, para cada  $j = 1, 2, 3$ , se tiene

$$\omega_j = -iq\sigma_a A_j^a = -iq\sigma \cdot A_j = -iq(\sigma_1 A_j^1 + \sigma_2 A_j^2 + \sigma_3 A_j^3)$$

De esta manera hemos introducido tres campos de vectores covariantes  $A^1, A^2, A^3$ , llamados los campos de Yang-Mills, para mediar en las fuerzas entre nucleones.

La derivada covariante es

$$\nabla_j \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^j} - iq\sigma \cdot A_j \psi$$

Consideramos la curvatura  $\Omega^\omega$  se tiene localmente que

$$\Omega_{jk}^\omega = \partial_j A_k - \partial_k A_j - iq[A_j, A_k]$$

y es de nuevo una matriz 2x2 antihermitiana de traza nula, que es el campo de fuerza de los campos de Yang-Mills.

Después de la segunda cuantización los campos  $A^1, A^2, A^3$  producen tres partículas, que median en la fuerza nuclear fuerte que son los mesones.

Este modelo ahora mismo está obsoleto debido a que los nucleones no son partículas elementales, están formadas por los quarks. Cada quark aparece en tres estados de diferentes colores  $\psi = (\psi_R, \psi_B, \psi_G)^t$  igual que anteriormente el nucleón  $(\psi_p, \psi_n)^t$ . En este caso el grupo es  $SU(3)$ . Su álgebra de Lie son las matrices antihermitianas con traza nula, cuya base está dada por  $\{i\lambda_b\}$  donde tenemos

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La conexión es de la forma  $\omega_j = -ig_s \lambda_a A_j^a$ , donde ahora tenemos ocho campos de vectores covariantes  $A^1, \dots, A^8$  y  $g_s$  es una constante llamada constante de acoplamiento fuerte. Así tenemos ocho campos gauge, que son los

gluones, los cuales producen las fuerzas entre quarks y son los responsables de que los constituyentes de un protón o de un neutrón estén juntos formando una sola unidad.

Los tres campos vistos anteriormente en el caso de  $SU(2)$  y el único campo de  $U(1)$  se combinan para dar los campos de la interacción débil y el fotón del electromagnetismo. De esta forma considerando el grupo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  obtenemos el modelo estándar que engloba el estudio de las tres interacciones fundamentales, la electromagnética, la débil y la fuerte. El modelo estándar es un gran logro de la física moderna y es ciertamente la base para comprender las interacciones entre las partículas elementales. No obstante hay grandes problemas que todavía no se comprenden, como son el por qué hay campos gauge que tienen masa, o por qué los quarks no pueden estar libres y están siempre agrupados formando neutrones, protones, etc.

En este capítulo vamos a escribir los detalles matemáticos que nos han permitido anteriormente obtener las ecuaciones de Yang-Mills y también, utilizando las conexiones de Yang-Mills, encontraremos formas cerradas en  $X$ .

### 3.3.2. Conexiones de Yang-Mills

Consideremos que  $G$  es semisimple, es decir que la forma Killing

$B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $B(Y, Z) = -tr(ad(Y), ad(Z))$  es definida positiva o que  $G$  es un grupo de Lie dotado con una métrica bi-invariante que induce un ad-invariante producto interno en  $\mathcal{G}$ , el cual también denotaremos por  $B$  cumpliendo

$$B(ad(g)Y, ad(g)Z) = B(Y, Z)$$

para todo  $g \in G$  y todo  $Y, Z \in \mathcal{G}$

Vamos a considerar ahora que  $X$  tiene una métrica  $g$  y  $dim(X) = n$ . Supongamos que  $X$  está orientada por un elemento de volumen  $\mu \in \Lambda(X)$  relativo a  $g$ . Sea  $(x_1, \dots, x_n)$  una base de un sistema de coordenadas local definido en un entorno  $U$  de  $x \in X$ . Consideremos  $\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}$  una base de los campos. Sea también  $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$  y consideremos  $g^{ij}$  la entrada  $i, j$  de la inversa de la matriz  $(g_{ij})$ . Tenemos que en  $U \subset X$  una  $k$ -forma  $\omega \in \Lambda^k(TU, adP)$  está definida por unas funciones  $\{\omega_{i_1 \dots i_k}^\beta\}$  con  $1 \leq \beta \leq n$  de manera que

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k}^\beta dx^{i_1} \dots dx^{i_k} \otimes [u_x, A_\beta]$$

donde  $A_\beta$  es una base de  $\mathcal{G}$  y  $\pi(u_x) = x$ .

**Definición 3.3.1.** En la situación anterior si tomamos otra  $k$ -forma  $v \in \Lambda^k(TU, adP)$  con  $\{v_{i_1 \dots i_k}^\beta\}$  definimos

$$\tilde{g}(u, v) = \sum g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \omega_{i_1 \dots i_k}^\beta v_{i_1 \dots i_k}^\beta$$

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $g$  una métrica en  $X$  y sea  $\mu$  un elemento de volumen relativo a  $g$ . Existe un único isomorfismo lineal*

$$* : \bigwedge^k(TU, adP) \longrightarrow \bigwedge^{n-k}(TU, adP)$$

que verifica

$$u \wedge *v = \tilde{g}(u, v)\mu$$

para cualquier  $u, v \in \bigwedge^k(TU, adP)$

*Demostración.* Sea  $\gamma \in \bigwedge^{n-k}(TU, adP)$ , Definimos  $\psi_\gamma : \bigwedge^k(TU, adP) \rightarrow \mathbb{R}$  de manera que se cumple que  $\psi_\gamma(u)\mu = u \wedge \gamma$ . Definimos entonces la función  $\bigwedge^{n-k}(TU, adP) \rightarrow \text{Hom}(\bigwedge^k(TU, adP), \mathbb{R})$  que le asigna a cada  $\gamma \in \bigwedge^{n-k}(TU, adP)$  la aplicación  $\psi_\gamma$ . Esta función es un isomorfismo. Es fácil ver que es inyectiva ya que si  $\psi_\gamma(u) = 0$  entonces  $u \wedge \gamma = 0$ , para cualquier  $u \in \bigwedge^k(TU, adP)$  luego  $\gamma = 0$ .

Tenemos además que

$$\dim \bigwedge^{n-k}(TU, adP) = \dim \bigwedge^k(TU, adP) = \dim(\text{Hom}(\bigwedge^k(TU, adP), \mathbb{R}))$$

Con lo cual es sobreyectiva y es un isomorfismo.

De esta manera, para cada  $v \in \bigwedge^k(TU, adP)$  se verifica que  $\tilde{g}(-, v) \in \text{Hom}(\bigwedge^k(TU, adP), \mathbb{R})$ , luego existe un  $\gamma \in \bigwedge^{n-k}(TU, adP)$  tal que  $\psi_\gamma = \tilde{g}(-, v)$ , con lo que  $\psi_\gamma(u) = \tilde{g}(u, v)$  para todo  $u \in \bigwedge^k(TU, adP)$ . De esta manera eligiendo  $*v$  ese  $\gamma$  tenemos que

$$u \wedge *v = u \wedge \gamma = \Psi_\gamma(u)\mu = \tilde{g}(u, v)\mu$$

De esta ecuación claramente la aplicación  $*$  es inyectiva y por tanto un isomorfismo.  $\square$

**Proposición 3.3.3.** *Existe un isomorfismo  $\xi : \overline{\bigwedge}^r(P, \mathcal{G}) \rightarrow \bigwedge^r(TX, adP)$ , para cada  $r \geq 0$ .*

*Demostración.* Sea un elemento  $\Phi \in \overline{\bigwedge}^r(P, \mathcal{G})$ , si la imagen por  $\Phi$  de  $\{X_i\}_1^r \in T_p P$  ( $p \in P$ ) es  $A \in \mathcal{G}$  entonces se tiene que la imagen de  $\{(R_g)_* X_i\}_1^r \in T_{pg} P$  ( $g \in G$ ) es  $ad(g^{-1})A$ . De esta manera asignando  $\{\pi_* X_i\} \mapsto (p, A) \in P \times \mathcal{G}$  se tiene que se define un elemento  $\varphi \in \bigwedge^r(TX, adP)$ . Esta asignación es un isomorfismo  $\xi$  entre  $\overline{\bigwedge}^r(P, \mathcal{G})$  y  $\bigwedge^r(TX, adP)$ . Es suprayectiva por construcción.

Es inyectiva ya que si  $\xi(\Phi_1) = \xi(\Phi_2)$  tenemos para  $\{X_i\}_1^r \in T_p P$  que  $[(p, A_1)] = \varphi_1(\pi_* X_1, \dots, \pi_* X_r) = \varphi_2(\pi_* X_1, \dots, \pi_* X_r) = [(p, A_2)]$

donde  $A_1 = \Phi(X_1, \dots, X_r)$  y  $A_2 = \Phi(X_1, \dots, X_r)$ . Así se tiene que  $A_1 = A_2$  y por tanto  $\Phi_1 = \Phi_2$ , con lo  $\xi$  es inyectiva. □

De esta manera podemos definir un isomorfismo  $\bar{*} : \overline{\Lambda}^r(P, \mathcal{G}) \longrightarrow \overline{\Lambda}^{n-r}(P, \mathcal{G})$ .

**Definición 3.3.4.** Para una conexión  $\omega$  en  $P$  y una función automorfa  $\Psi \in \overline{\Lambda}^0(P, \mathcal{G})$ , le asociamos al par  $(\omega, \Psi)$  la 1-forma  $J^\omega(\Psi) \in \overline{\Lambda}^1(P, \mathcal{G})$  definida por

$$J^\omega(\Psi) = [\Psi, d^\omega \Psi]$$

donde  $[,]$  es el corchete de Lie en el álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$

**Definición 3.3.5.** Una conexión  $\omega$  en  $P$  es llamada una conexión de Yang-Mills si su curvatura verifica que es covariantemente cerrada,  $d^\omega \Omega^\omega = 0$  (identidad de Bianchi) y covariantemente cocerrada, esto es que la forma  $\bar{*}\Omega^\omega \in \overline{\Lambda}^{n-2}(P, \mathcal{G})$  verifica  $d^\omega(\bar{*}\Omega^\omega) = 0$ . De la misma manera, se dice que el par  $(\omega, \Psi)$  es un par de Yang-Mills-Higgs si se cumple que

$$d^\omega(\bar{*}\Omega^\omega) = \pm \bar{*}J^\omega(\Psi)$$

**Teorema 3.3.6.** Sea  $f \in I^k(G)$  y sea  $\omega$  una forma de conexión de Yang-Mills del fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$  con grupo estructural  $G$ . Entonces la forma

$$F = f(\Omega^\omega, \dots, \Omega^\omega, \bar{*}\Omega^\omega, \dots, \bar{*}\Omega^\omega), i + j = k$$

es una  $2i + (n-2)j$ -forma cerrada en  $P$  que proyecta a una forma cerrada en  $X$ .

Por otro lado. si  $h \in I^1(G)$  y  $(\omega, \Psi)$  es una par de Yang-Mills-Higgs entonces

$$L = h(\bar{*}J^\omega(\Psi))$$

proyecta a una  $(n-1)$ -forma cerrada en  $X$ .

*Demostración.* La demostración de que  $F$  y  $L$  proyectan a  $X$ , se obtiene fácilmente viendo que se cumplen las dos condiciones del lema 3.2.1. Que  $F$  es cerrada se obtiene aplicando el mismo argumento que en la proposición 3.2.3 y teniendo en cuenta las condiciones de que  $\omega$  es una forma de conexión de Yang-Mills y que  $d^\omega$  actúa como una antiderivación.

Lo único que falta por comprobar es que  $d^\omega\{\bar{*}J^\omega(\Psi)\} = 0$ , e igual que antes se obtiene que es cerrada.

Escribimos  $\Omega^\omega = \sum \gamma_\alpha D_\alpha$  y  $*\Omega^\omega = \sum *\gamma_\beta D_\beta$  para ciertas formas reales  $\{\gamma_\alpha\}$  en P. Entonces

$$\begin{aligned} d^\omega \{\bar{*}J^\omega(\Psi)\} &= d^\omega \{d^\omega(\bar{*}\Omega^\omega)\} = [\Omega^\omega, \bar{*}\Omega^\omega] = \sum \gamma_\alpha \wedge *\gamma_\beta [D_\alpha, D_\beta] = \\ &= \sum \tilde{g}(\gamma_\alpha, \gamma_\beta) \mu[D_\alpha, D_\beta] = - \sum \tilde{g}(\gamma_\beta, \gamma_\alpha) \mu[D_\beta, D_\alpha] = -[\Omega^\omega, \bar{*}\Omega^\omega] \end{aligned}$$

Con lo que tenemos que  $d^\omega \{\bar{*}J^\omega(\Psi)\} = 0$ . □

# Capítulo 4

## Campos de Higgs

La ruptura espontánea de simetría es un fenómeno cuántico que constituye el concepto de fondo de un gran número de fenómenos físicos desde el ferromagnetismo y superconductividad hasta la mecánica de Higgs en el modelo estándar de partículas elementales. . La ruptura ocurre cuando un sistema definido por un lagrangiano simétrico respecto de un grupo de simetría cae en un estado vacío que no es simétrico. El grupo de simetría suele ser un grupo de Lie  $G$ . En la teoría clásica de campos, la ruptura espontánea de simetría es modelada por los campos de Higgs. En la teoría de gauge en un fibrado principal  $\pi : P \rightarrow X$  con grupo de estructura  $G$ , una rotura de simetría se dice que ocurre cuando existe una reducción a un subgrupo cerrado  $H$ . En varios estudios se ve que esta reducción existe si y solo si existe una sección global del fibrado cociente  $P \times_G (G/H) = P/H \rightarrow X$ , el cual se definirá a continuación. A estas secciones es a lo que se ha llamado tradicionalmente campos de Higgs. Aquí definiremos de una manera distinta a los campos de Higgs.

Sea  $P$  un fibrado principal sobre  $X$ , con grupo estructural  $G$ . Sea  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$ . Consideremos el fibrado asociado  $E = P \times_G (G/H)$ . Este fibrado se puede identificar con  $P/H$  de la siguiente manera. Si  $[(u, gf_0)] \in E$  le podemos asignar el elemento de  $P/H$  representado por  $u \cdot gf_0$  donde  $g \in G$  y  $f_0$  es el origen de  $G/H$ , es decir el conjugado  $eH$ . Sabemos que el subgrupo de isotropía de  $f_0$  es  $H$ .

Así  $P$  es un fibrado principal con base  $P/H = E$  y grupo estructural  $H$ . La proyección  $\pi_E : P \rightarrow E$  definida por  $\pi_E(u) = u(f_0)$  donde  $u$  es la aplicación considerada en la proposición 2.1.30.

Antes de demostrar el teorema principal de este capítulo daremos unos resultados previos.

**Proposición 4.0.7.** *Dada una acción de un grupo de Lie  $G$  sobre una variedad  $F$ . La aplicación  $\star : \mathcal{G} \times F \rightarrow TF$  definida por:*

$$A \star f = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tA) \cdot f$$

donde  $A \in \mathcal{G}$  y  $f \in F$  es una acción. La denotaremos por acción del álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  derivada de la acción de  $G$ .

Tenemos también que si la acción del grupo de Lie sobre  $F$  es transitiva entonces la acción derivada del álgebra de Lie es también transitiva.

*Demostración.* Se puede ver en [17]. □

**Proposición 4.0.8.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable con  $q \in \text{codom}(f)$  y  $f$  una submersión en todo punto  $p \in f^{-1}(q)$ , entonces  $f^{-1}(q)$  es una subvariedad regular de  $M$  de dimensión igual a  $\dim M - \dim N$ .*

*Demostración.* Se puede ver en [18]. □

**Teorema 4.0.9.** *Un  $G$ -fibrado principal  $P$  es reducible a un subfibrado  $P_H$  de grupo estructural  $H$  cerrado de  $G$  si y solo si existe una acción transitiva de  $G$  en una variedad  $F$  y una función equivariante  $\eta : P \rightarrow F$  tal que  $\eta^{-1}(f_0) = P_H$  donde  $f_0 \in F$  tiene a  $H \subset G$  como subgrupo de isotropía.*

*Demostración.* Supongamos que  $P_H$  es la reducción de  $P$  con  $H$  cerrado.

Consideremos  $F = G/H$  y la acción transitiva natural, sea  $i : P_H \rightarrow P$  la inyección de esa reducción y sea  $\pi_H : P_H \rightarrow X$  la proyección. Se tiene que  $\pi_H = \pi \circ i$

Tenemos que para cada  $x \in X$  existe  $u \in P$  tal que  $\pi(u) = x$ , pero por otro lado también existe  $u' \in P_H$  tal que  $x = \pi_H(u') = \pi(i(u'))$ , de manera que  $\pi(u) = \pi(i(u'))$  y así  $u$  y  $u'$  están en la misma fibra de  $P$ , luego existe  $g \in G$  tal que  $i(u') = u \cdot g$ . Además se cumple que  $u \in P_H$  si y solo si  $g = e$  ya que si  $u \in P_H$  entonces  $i(u') = u \cdot g = u$  luego  $g = e$ , y la inversa si  $g = e$  entonces  $u = u' \in P_H$ .

Definimos entonces  $\eta : P \rightarrow F$  por  $\eta(u) = g \cdot f_0$  donde  $g \in G$  es el elemento que cumple que  $i(u') = u \cdot g$  y  $f_0$  es el origen de  $G/H$  que tiene a  $H$  como subgrupo de isotropía.

Se tiene que  $\eta$  es equivariante ya que para cualquier  $u \cdot a$  con  $a \in G$  se verifica que existirá  $u'' \in P$  que cumple que  $i(u'') = u \cdot ag_1$  con  $g_1 \in G$  de manera que  $\eta(u \cdot a) = g_1 \cdot f_0$ . Pero  $i(u'')$  e  $i(u')$  están en la misma fibra de  $P_H$ , luego existe  $h \in H$  tal que  $i(u'') = i(u') \cdot h = u \cdot gh$ , por lo tanto  $ag_1 = gh$ , con lo que  $g_1 = a^{-1}gh$ . Así tenemos que  $\eta(u \cdot a) = a^{-1}ghf_0 = a^{-1}gf_0 = a^{-1}\eta(u)$ , con lo que se demuestra que la aplicación es equivariante.

Para el recíproco, tenemos que como existe en  $F$  una acción transitiva será un espacio homogéneo por tanto se puede considerar que  $F = G/H$ . Sea ahora  $v \in T_{f_0}F$  entonces por la proposición 4.0.7 tenemos que la acción

derivada de la acción de  $F$  es transitiva, por tanto existe  $A \in \mathcal{G}$  tal que  $v = A \star f_0$ . Vamos a ver que  $\eta$  es una submersión. Sea  $u \in P_H$  se tiene

$$\begin{aligned} \eta_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{uexp}(-tA) \right) &= (\eta \circ \tau_t(u))_* \Big|_{t=0} = (\text{exp}(tA)\eta(u))_* \Big|_{t=0} = \\ &= \text{exp}(tA)_* \Big|_{t=0} f_0 = A \star f_0 = v \end{aligned}$$

Por tanto  $\eta$  es una submersión para todo  $u \in P_H$ , y por la proposición 4.0.8 se tiene que  $P_H = \eta^{-1}(f_0)$  es una subvariedad de  $P$  de dimensión  $\dim P - \dim G/H$ .

Veamos ahora que es una reducción de  $P$ . Sea  $u \in P_H$  y  $g \in G$  se tiene que si  $u \cdot g \in P_H$  entonces  $\eta(u \cdot g) = f_0$  luego  $g^{-1}\eta(u) = f_0$  y así  $f_0 = \eta(u) = g \cdot f_0$  con lo cual  $g \in H$ . y recíprocamente si  $g \in H$  entonces se ve que  $\eta(u \cdot g) = g^{-1}\eta(u) = g^{-1}f_0 = f_0$  con lo que  $u \cdot g \in P_H$ .

Por último veamos que  $\pi^{-1}(x) \cap P_H \neq \emptyset$ . Sea  $u \in P$  con  $\pi(u) = x$ . Se tiene que  $\eta(u) = g \cdot f_0 \in G/H$  para algún  $g \in G$ . Si tomamos ahora  $u \cdot g$  se tiene que pertenece a  $\pi^{-1}(x)$  y además se verifica que  $\eta(u \cdot g) = g^{-1}\eta(u) = f_0$ , por tanto  $u \cdot g$  pertenece también a  $P_H$  luego  $\pi^{-1}(x) \cap P_H \neq \emptyset$ . □

**Proposición 4.0.10.** *En las condiciones del teorema anterior y tomando  $F = G/H$ , las reducciones de  $P$  quedan determinadas por las aplicaciones equivariantes  $\eta : P \rightarrow F$  y no depende de la elección de  $f_0$ .*

*Demostración.* Tomamos  $f_1 \in F$  entonces, al ser una acción transitiva existirá un determinado  $g \in G$  verificando que  $f_1 = g \cdot f_0$ . Sea  $P_{H'} = \eta^{-1}(f_1)$  donde  $H'$  es el grupo de isotropía de  $f_1$ . Se tiene que  $H' = g^{-1}Hg$ , y además  $P_H$  es difeomorfo a  $P_{H'}$  ya que la aplicación  $f : P_{H'} \rightarrow P_H$  definida por  $f(u') = u' \cdot g$  es una biyección, lo cual es muy sencillo de ver. □

**Definición 4.0.11.** *Al conjunto de aplicaciones equivariantes  $\eta : P \rightarrow G/H$  lo denotaremos por  $C(P, G/H)$  y a cada elemento de este conjunto lo denotaremos por campo de Higgs.*

**Definición 4.0.12.** *Definimos una acción de  $\text{Aut}(P)$  o  $\text{Gau}(P)$  en el conjunto  $C(P, G/H)$  simplemente con la composición.*

**Proposición 4.0.13.** *La acción definida anteriormente está bien definida*

*Demostración.* Si  $f \in \text{Aut}(P)$  y  $\eta \in C(P, G/H)$  entonces  $\eta \circ f$  es equivariante también, porque  $\eta(f(u \cdot g)) = \eta(f(u) \cdot g) = g^{-1}\eta(f(u))$ . □

Consideremos ahora el módulo  $\frac{C(P,G/H)}{Gau(P)}$ . Tomamos dos funciones  $\eta_1, \eta_2 \in \frac{C(P,G/H)}{Gau(P)}$ , existirá entonces una función  $f \in Gau(P)$  verificando que  $\eta_1 = \eta_2 \circ f$ .

**Proposición 4.0.14.** *Dos funciones  $\eta_1, \eta_2 \in \frac{C(P,G/H)}{Gau(P)}$  dan lugar a las misma reducción.*

*Demostración.* Si demostramos que  $P_H = \eta_1^{-1}(f_0)$  y  $P'_H = \eta_2^{-1}(f_0)$  son iguales habremos terminado ya que por el párrafo anterior  $P_H = P'_H \cong P'_{H'}$ , y entonces  $\eta_1$  y  $\eta_2$  producen la misma reducción de  $P$ .

Veamos que  $P_H = \eta_1^{-1}(f_0)$  y  $P'_H = \eta_2^{-1}(f_0)$  son iguales. Primero se tiene que como  $f \in Gau(P)$ , si  $u \in P_H$  entonces  $u$  y  $f(u)$  están en la misma órbita, luego existe un  $h \in H$  tal que  $f(u) = u \cdot h$ .

Sea  $u \in P_H$  se tiene que

$$\eta_1(u) = \eta_2(f(u)) = \eta_2(u \cdot h) = h^{-1}\eta_2(u)$$

con lo cual  $\eta_2(u) = h\eta_1(u) = h \cdot f_0 = f_0$ , con lo que  $u \in P'_H$ . De la misma manera si  $u' \in P'_H$  se tiene

$$\eta_1(u') = \eta_2(f(u')) = \eta_2(u' \cdot h) = h^{-1}\eta_2(u') = h^{-1} \cdot f_0 = f_0$$

con lo que  $u' \in P_H$ . Por lo tanto  $P_H = P'_H$ . □

Así tenemos que cada elemento de  $\frac{C(P,G/H)}{Gau(P)}$  corresponde con una reducción de  $P$ .

**Teorema 4.0.15.** *Consideremos la reducción  $P_H$  de  $P$  de tal forma que  $P_H = \eta^{-1}(f_0)$  con  $f_0 \in G/H$  y  $\eta \in C(P, G/H)$ . Sea  $\omega$  la forma de conexión de una conexión  $\Gamma$  en  $P$ . Entonces  $\omega$  es reducible a  $P_H$  si y solo si  $d^\omega \eta = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{H}$  la distribución horizontal de campos sobre  $P$  relativa a las conexión  $\Gamma$ . Entonces se tiene

$$d^\omega \eta = d\eta|_{\mathcal{H}}$$

Si  $\omega$  es reducible a  $P_H$  se tiene que  $\mathcal{H} \in \mathcal{X}(P_H)$  y por tanto  $d\eta|_{\mathcal{H}} = \{d\eta|_{P_H}\}|_{\mathcal{H}}$ . Pero esta expresión se anula, puesto que  $\eta|_{P_H}$  es constante.

Recíprocamente, supongamos que

$$d^\omega \eta = d\eta|_{\mathcal{H}} = 0$$

Esto significa que para todo  $D \in \mathcal{H}$  se tiene que  $D\eta = 0$  lo que implica que  $D \in \mathcal{X}(\eta^{-1}(f_0))$  y por tanto que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}(P_H)$ . □

# Capítulo 5

## Geometrías de Cartan

### 5.1. Introducción

Las conexiones de Cartan son las que permiten generalizar el tratamiento que Klein hizo sobre como estudiar las geometrías. La idea de Klein fue analizar geometrías a través del estudio de grupos de movimientos que preservasen las propiedades que las caracterizan. Por ejemplo en la geometría euclídea las propiedades a estudiar son los ángulos y las distancias de figuras y el grupo de movimientos que los preservan son los movimientos rígidos. Klein consideró que la geometría se constituye con un grupo  $G$ , una variedad diferencial  $X$  y una acción efectiva y transitiva de  $G$  sobre  $X$ . El estudio de la geometría es el estudio de las propiedades de objetos que se preservan por la acción de  $G$ . Un punto clave en la idea de Klein es darse cuenta que uno puede olvidarse de  $X$  y centrar su interés en  $G$ , ya que si tomamos un  $x \in X$  entonces, como  $G$  actúa transitivamente sobre  $X$ , se verifica que todo punto de  $X$  se obtiene por la acción sobre  $x$ , pero como  $H_x = \{g \in G/gx = x\}$  de  $G$  no tiene por que ser vacío, la acción de  $G$  sobre  $X$  no es biyectiva. Pero el espacio  $G/H_x$ , si que está en biyección con  $X$ . Luego la geometría de Klein consiste en un grupo  $G$  actuando sobre  $G/H_x$ . Esta definición, en principio, parece que depende de la elección de  $x$ , pero como para distintos puntos de  $X$  sus estabilizadores son conjugados, en realidad no depende de la elección de  $x$ .

Debido a a la transitividad de la acción no se puede distinguir un punto de otro por propiedades geométricas, luego las geometrías de Klein son completamente homogéneas.

La definición formal de geometrías de Klein es

**Definición 5.1.1.** *Una geometría de Klein es un par  $(G, H)$ , donde  $G$  es un grupo de Lie y  $H \subset G$  es un subgrupo cerrado tal que  $G/H$  es conexo.  $G$  es*

llamado el grupo principal de la geometría y al espacio conexo  $X=G/H$  se le llama espacio de la geometría de Klein o simplemente geometría de Klein. El núcleo de una geometría de Klein es el mayor subgrupo  $K$  de  $H$  que es normal en  $G$ . Si  $K=1$  se dice que la geometría de Klein  $(G,H)$  es efectiva.

Vamos a considerar dos ejemplos de geometrías de Klein. El primero es euclídeo y el segundo no.

**Plano euclídeo:** En este caso  $X = \mathbb{R}^2$ , el grupo de Lie

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R(\theta) \end{pmatrix} \mid R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\}$$

y la acción sobre  $X$  viene dada por la fórmula

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R(\theta) \end{pmatrix} \cdot x = R(\theta)x + v$$

donde  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

En este caso el estabilizador del origen de  $\mathbb{R}^2$  es el subgrupo

$$H = SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Así obtenemos que  $G/H \approx \mathbb{R}^2$  y que  $G \approx H \times \mathbb{R}^2$

**Plano hiperbólico:** En este caso  $X = \{z = x + iy \in \mathbb{C}/y > 0\}$ . El grupo  $G$  es el de las transformaciones de Möbius  $G = \{A \in \mathcal{G}l(2, \mathbb{R})/\det A = 1\}$  y que actúa en  $X$  por la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

El estabilizador en el punto  $i \in X$  es el grupo

$$H = \{A \in \mathcal{G}l(2, \mathbb{R})/\det A = 1; AA^t = I\}$$

De esta forma podemos definir el fibrado  $\pi : G \rightarrow G/H$ . Considerando la 1-forma de Maurer-Cartan definida en la proposición 1.0.20 y pensando en ella como una conexión(aunque no es precisamente una conexión ya que toma valores en  $\mathcal{G}$  en vez de en  $\mathcal{H}$  y solo se anula en  $0 \in T_g G$ ) se verifican estas propiedades

1.  $\omega_G$  es un isomorfismo lineal en cada fibra.
2.  $R_h^* \omega_G = Ad(h^{-1})\omega_G$  para todo  $h \in H$

3.  $\omega_G(A^*) = A$  para todo  $A \in \mathcal{H}$ , donde  $A^*$  es el vector fundamental asociado a  $A$ .

Podemos definir la curvatura como  $\Omega = \omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G] = 0$  y obtenemos una geometría plana.

Otra manera de ver las geometrías de Klein es considerarlas desde un punto de vista de gauge. Si consideramos una carta trivializante  $(U_\alpha, f_\alpha)$  del fibrado principal  $\pi : G \rightarrow G/H$ . Como se ha hecho en el capítulo 2, a cada función  $f_\alpha$  le podemos asignar una sección  $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow P$  definida por  $s_\alpha(x) = f_\alpha^{-1}(x, e) = u$  y tenemos que dadas dos secciones  $s_\alpha$  y  $s_\beta$  existen las llamadas funciones de transición  $\psi_{\alpha\beta}$  que verifican que  $s_\beta = s_\alpha \psi_{\alpha\beta}$ . El fibrado principal  $\pi : G \rightarrow G/H$ , es decir la geometría de Klein, se puede reconstruir dando las funciones de transición.

Considerando la forma de Maurer-Cartan y cualquier sección  $s_\alpha$  ( que llamaremos gauge) y haciendo el pull back  $s_\alpha^*(\omega_G) = \Psi_\alpha$  se verifica que  $d\Psi_\alpha + \frac{1}{2}[\Psi_\alpha, \Psi_\alpha] = 0$ . Cada sección  $s_\alpha$  define un  $\Psi_\alpha$ , pero se tiene el contrario, es decir cada  $\Psi_\alpha$  define un  $s_\alpha \cdot g$  con  $g \in G$  fijo, si la geometría es efectiva  $g = e$ . Por tanto podemos llamar también gauge a las 1-formas  $\Psi_\alpha$ . Estas 1-formas verifican las siguiente relación

$$\Psi_\beta = Ad(h^{-1})\Psi_\alpha + \psi_{\alpha\beta}^*\omega_H$$

De manera que si tenemos un recubrimiento abierto y una familia de 1-formas  $(U_\alpha, \Psi_\alpha)$  verificando la relación anterior con las funciones de transición  $\psi_{\alpha\beta}$  verificando la condición de cociclo, podemos reconstruir el fibrado principal  $\pi : G \rightarrow G/H$  y por tanto la geometría de Klein, teniendo una definición distinta de las geometrías de Klein.

La idea de Cartan fue generalizar las geometrías de Klein, de manera que localmente la geometría de Cartan es una geometría de Klein y las conexiones de Cartan son un medidor de cuanto se aleja la geometría de dicho modelo local. Las geometrías de Cartan representan una mezcla entre homogeneidad y no homogeneidad, mientras que las geometrías de Klein son completamente homogéneas.

## 5.2. Conexiones de Cartan

**Definición 5.2.1.** *Un modelo geométrico consiste en*

1. Un par  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  con  $\mathcal{H}$  una subálgebra de Lie de  $\mathcal{G}$ , de manera que no existe ningún ideal contenido en  $\mathcal{H}$ .
2. Un grupo de Lie  $H$  realizando  $\mathcal{H}$ .

3. La representación  $Ad : H \rightarrow Aut(\mathcal{G})$  que extiende a  $Ad : H \rightarrow Aut(\mathcal{H})$ .

Vamos a denotar por  $K$  al núcleo de la representación  $Ad : H \rightarrow Aut(\mathcal{G})$  y lo denotaremos por núcleo del modelo geométrico.

**Lema 5.2.2.** Si  $H$  es un subgrupo normal de  $G$  entonces  $\mathcal{H}$  es un ideal de  $\mathcal{G}$

*Demostración.* Sea  $H$  es normal en  $G$ . Sea  $X \in \mathcal{G}$ ,  $A \in \mathcal{H}$  y considerando  $\sigma = \exp(tX)$  se cumple que  $\sigma \exp(sA) \sigma^{-1} \in H$ . Se verifica que

$$\sigma \exp(sA) \sigma^{-1} = \exp Ad_\sigma(sA) = \exp s((\exp ad_{tX})(A))$$

Con lo cual se tiene  $(\exp ad_{tX})(A) \in \mathcal{H}$ .

Por otro lado tenemos que

$$\exp ad_{tX}(A) = (\exp t(ad_X))(A) = A + t[X, A] + \frac{t^2}{2}[X, [X, A]] + \dots$$

la cual es una curva diferenciable en  $\mathcal{H}$  cuyo vector tangente en  $t = 0$  es  $[X, A]$ . Así  $[X, A] \in \mathcal{H}$  y entonces  $\mathcal{H}$  es un ideal de  $\mathcal{G}$ . □

**Proposición 5.2.3.** Se tiene que la representación  $Ad : H \rightarrow Aut(\mathcal{G})$  es inyectiva.

*Demostración.* Veamos que  $K$  es un subgrupo normal de  $G$ . De esta manera como  $\mathcal{G}$  no tiene ideales no triviales contenidos en  $\mathcal{H}$ , tendremos que  $K = \{0\}$ .

Se tiene que  $K = \{k \in H : Ad(k)v - v = 0, \forall v \in \mathcal{G}\}$ . Sea  $g \in G$  entonces se cumple que

$$Ad(g^{-1}kg)v - v = Ad(g^{-1})(Ad(k)Ad(g)v - Ad(g)v) = 0$$

Con lo que  $K$  es normal en  $G$ . □

Cuando ocurre que  $K$  es trivial se dice que el modelo geométrico es efectivo. Esta condición es la que hemos introducido en la definición de modelo geométrico al imponer que  $\mathcal{G}$  no tiene ideales contenidos en  $\mathcal{H}$ .

**Definición 5.2.4.** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Consideremos  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  un modelo geométrico. Tomemos ahora  $\pi : P \rightarrow X$  un fibrado principal con grupo estructural  $H$ . Una conexión de Cartan es una 1-forma  $\Psi : TP \rightarrow \mathcal{G}$  que verifica:

1. Para cada  $p \in P$  la aplicación lineal  $\Psi_p : T_p(P) \longrightarrow \mathcal{G}$  es un isomorfismo.
2.  $R_h^* \Psi = Ad(h^{-1})\Psi$ , para todo  $h \in H$ .
3.  $\Psi(A^*) = A$  para cada  $A \in \mathcal{H}$  donde  $A^*$  es el vector fundamental asociado a  $A$ .

Se dice entonces que  $(P, \Psi)$  es una geometría de Cartan modelada sobre  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  con grupo  $H$ .

Podemos considerar una definición equivalente de una conexión de Cartan que viene dada por la siguiente proposición.

**Proposición 5.2.5.** *Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  sobre el modelo geométrico  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ , entonces existe una familia de 1-formas  $\{\Psi_\alpha\}$ , definidas en entornos  $U_\alpha$  de  $X$  con valores en  $\mathcal{G}$  cumpliendo la siguiente condición:*

$$\Psi_\beta = Ad(\psi_{\alpha\beta}^{-1}) \circ \Psi_\alpha + \psi_{\alpha\beta}^* w_H$$

en  $U_\alpha \cap U_\beta$ , donde  $w_H$  es la conexión canónica de  $H$  y  $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow H$

*Demostración.* Sea  $\pi_H : P \longrightarrow X$  un fibrado principal y  $\{U_\alpha, f_\alpha\}$  una trivialización, es decir, existen isomorfismos  $f_\alpha : \pi_H^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times H$ , con funciones de transición  $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ . Supongamos a su vez definidas las secciones  $s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow P$  verificando  $s_\beta = s_\alpha \psi_{\alpha\beta}$  en  $U_\alpha \cap U_\beta$ . Sea  $\Psi$  una forma de conexión de Cartan sobre el fibrado  $P$ , para cada  $\alpha$  definimos una 1-forma  $\Psi_\alpha$  sobre  $U_\alpha$  con valores en  $\mathcal{G}$  por la fórmula  $\Psi_\alpha = s_\alpha^*(\Psi)$ . Podemos escribir la relación  $s_\beta = s_\alpha \psi_{\alpha\beta}$  como  $s_\beta = p \circ (s_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ , donde  $p : P \times H \longrightarrow P$  es la operación en  $H$ . De esta forma si  $D_x \in T_x(X)$  se tiene

$$(s_\beta)_*(D_x) = p(-, \sigma)_*((s_\alpha)_*(D_x)) + p(u, -)_*((\psi_{\alpha\beta})_* D_x)$$

donde  $\sigma = \psi_{\alpha\beta}(x)$ ,  $u = s_\alpha(x)$ . Se tiene que  $p(-, \sigma) = R_\sigma$  y llamando  $\mu_u = p(u, -)$  se escribe

$$(s_\beta)_*(D_x) = (R_\sigma)_*((s_\alpha)_* D_x) + (\mu_u)_*((\psi_{\alpha\beta})_* D_x)$$

y aplicando  $\Psi$  a ambos lados

$$\Psi_\beta(D_x) = (R_\sigma^* \Psi)((s_\alpha)_* D_x) + \Psi[(\mu_u)_*(\psi_{\alpha\beta})_* D_x]$$

Ahora si  $(\psi_{\alpha\beta})_* D_x = A_\sigma$ , para un cierto campo  $A$  sobre  $H$  invariante por la izquierda, entonces  $(\mu_u)_*(\psi_{\alpha\beta})_* D_x = A_{u\sigma}^*$ . Sea ahora  $\omega_H$  la 1-forma canónica y escribiendo  $\omega_{H_{\alpha\beta}} = \psi_{\alpha\beta}^*(\omega_H)$  se cumple que

$$\Psi_\beta = Ad_{\psi_{\beta\alpha}} \circ \Psi_\alpha + \omega_{H_{\alpha\beta}}$$

ya que  $\psi_{\alpha\beta}^*(D_x) = \omega_H((\psi_{\alpha\beta})_*(D_x)) = \omega_H(A_\sigma) = A_\sigma$ .

□

El recíproco a este teorema se puede ver en [20], el cual se cumple si la geometría de Cartan es efectiva.

**Proposición 5.2.6.** *Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  sobre el modelo geométrico  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ . Entonces se tiene que  $T(X) \approx P \times_H \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ . Más aún, para cada  $p \in P$  con  $\pi(p) = x$  hay un isomorfismo lineal  $\varphi_p : T_x(X) \rightarrow \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$  cumpliendo que  $\varphi_{ph} = Ad(h^{-1})\varphi_p$*

*Demostración.* Se tiene el siguiente diagrama en el que las columnas son sucesiones exactas y cortas y las dos aplicaciones de encima son isomorfismos, así que la aplicación de abajo es un isomorfismo canónico que hace que el diagrama conmute.

$$\begin{array}{ccc} T_p(pH) & \xrightarrow{\omega_H} & \mathcal{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_p(P) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{G} \\ \pi_* \downarrow & & \rho \downarrow \\ T_x(X) & \xrightarrow{\varphi_p} & \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}} \end{array}$$

Se tiene que si  $v \in T_x(X)$  entonces  $v = \pi_{*p}(u) = \pi_{*ph}(R_{h*}u)$  para algún  $u \in T_p(P)$ . De esta forma

$$\begin{aligned} \varphi_{ph}(v) &= \varphi_{ph}(\pi_{*ph}(R_{h*}u)) = \rho(\Psi_{ph}(R_{h*}u)) = \rho(Ad(h^{-1})\Psi_p(u)) = \\ &= Ad(h^{-1})\rho(\Psi_p(u)) = Ad(h^{-1})\varphi_p(\pi_{*p}(u)) = Ad(h^{-1})\varphi_p(v) \end{aligned}$$

Podemos definir ahora la aplicación  $q : P \times \mathcal{G} \rightarrow T(X)$  por  $q(p, A) = (\pi(p), \varphi_p^{-1}(\rho(A)))$  cumpliendo para cualquier  $h \in H$

$$\begin{aligned} q(ph, Ad(h^{-1})A) &= (\pi(ph), \varphi_p^{-1}(\rho(Ad(h^{-1})(A)))) = (\pi(h), (Ad(h)\varphi_{ph})^{-1}(\rho(A))) = \\ &= (\pi(p), \varphi_p^{-1}(\rho(A))) = q(p, A) \end{aligned}$$

Así podemos definir  $\bar{q} : P \times_H \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}} \rightarrow T(X)$  que es un isomorfismo de fibrados ya que es un isomorfismo de fibras y la aplicación inducida es la identidad en  $X$ . □

**Proposición 5.2.7.** Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  sobre el modelo geométrico  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ . Los campos vectoriales de  $X$  están en correspondencia biyectiva con las funciones  $f : P \longrightarrow \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$  que cumplen  $f(ph) = Ad_{\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}}(h^{-1})f(p)$ . La correspondencia esta dada por

$$Y \mapsto f_Y = \{p \in P \mapsto \varphi_p(Y_{\pi(p)}) \in \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}\}$$

*Demostración.*  $f_Y$  cumple la condición ya que

$$f_Y(ph) = \varphi_p(Y_{\pi(p)}) = Ad(h^{-1})\varphi_p(Y_{\pi(p)}) = Ad(h^{-1})f_Y(p)$$

Sea ahora  $f : P \longrightarrow \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$  y definimos  $Y_x = \varphi_p^{-1}(f(p))$  donde  $p = \pi(x)$ . Veamos que no depende de la elección de  $p$ . Sea  $p_1 = \pi(x)$  entonces  $p_1 = ph$  y se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_{ph}^{-1}(f(ph)) &= \varphi_{ph}^{-1}(Ad(h^{-1})f(p)) = (Ad(h^{-1})\varphi_p)^{-1}Ad(h^{-1})f(p) = \\ &= \varphi_p^{-1}(Ad(h)Ad(h^{-1})f(p)) = \varphi_p^{-1}(f(p)) \end{aligned}$$

Con lo que se ve la correspondencia biyectiva. □

### 5.3. Derivada covariante y curvatura

**Proposición 5.3.1.** Sea  $\Psi$  una conexión de Cartan en  $P$  y sea  $\phi \in \overline{\Lambda}^n(P, \mathcal{G})$ , entonces la 1-forma definida por

$$d^\Psi(\phi) = d\phi + [\Psi, \phi]$$

pertenece a  $\overline{\Lambda}^{n+1}(P, \mathcal{G})$ .

*Demostración.* Para demostrarlo debemos probar que se cumplen las dos condiciones de la definición anterior. Sean  $X_0, X_1, \dots, X_n$  campos en  $P$ . Sea  $\phi \in \overline{\Lambda}^i(P, \mathcal{G})$  veamos que se cumple la condición 1.

$$\begin{aligned} R_h^*(d\phi)(X_0, X_1, \dots, X_n) &= d(R_h^*\phi) = \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(R_h^*\phi(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n)) + \\ &+ \sum_{0 < i < j < n} (-1)^{i+j} R_h^*\phi([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n X_i(Ad(h^{-1})\phi(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n)) + \\
&+ \sum_{0 < i < j < n} (-1)^{i+j} Ad(h^{-1})\phi([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n) = \\
&= \sum_{i=1}^n Ad(h^{-1}(X_i)\phi(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n)) + \\
&+ Ad(h^{-1}) \sum_{0 < i < j < n} (-1)^{i+j} \phi([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n) = Ad(h^{-1})(d\phi)
\end{aligned}$$

Veamos ahora la condición 2. Se tiene que

$$\begin{aligned}
i_{A^*}d_p\phi &= (\mathfrak{L}_{A^*} - di_{A^*})\phi_p = \mathfrak{L}_{A^*}\phi_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tA)^*\phi_p = \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ad(\exp - tA)\phi_p = -[A, \phi_p] = -[\Psi(A^*), \phi_p]
\end{aligned}$$

Con lo que tenemos que

$$i_{A^*}(d^\Psi\phi_p) = i_{A^*}d_p\phi + i_{A^*}[\Psi, \phi : p] = -[\Psi(A^*), \phi_p] + [\Psi(A^*), \phi_p] = 0$$

□

**Definición 5.3.2.** Por la proposición anterior podemos definir la aplicación

$$d^\Psi : \overline{\bigwedge}^n(P, \mathcal{G}) \longrightarrow \overline{\bigwedge}^{n+1}(P, \mathcal{G})$$

mediante  $d^\Psi(\phi) = d\phi + [\Psi, \phi]$  y la denotaremos por derivada covariante.

**Proposición 5.3.3.** Sea  $\Psi$  una conexión de Cartan, entonces existe una combinación lineal real  $d\Psi + \lambda[\Psi, \Psi]$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que pertenece a  $\overline{\bigwedge}^2(P, \mathcal{G})$ . Justamente se cumple cuando  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

*Demostración.* Para que  $d\Psi + \lambda[\Psi, \Psi] \in \overline{\bigwedge}^2(P, \mathcal{G})$  se debe cumplir que sea horizontal. Sea  $X$  un campo vertical, al igual que antes existe un  $A \in \mathcal{H}$  que verifica que  $X = A^*$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned}
i_{A^*}(d\Psi + \lambda[\Psi, \Psi])(Y) &= i_{A^*}d\Psi(Y) + 2\lambda[\Psi(A^*), \Psi(Y)] = \\
&= \mathfrak{L}_{A^*}(\Psi(Y)) - (di_{A^*}\Psi)(Y) + 2\lambda[A, \Psi(Y)] = A^*(\Psi(Y)) + 2\lambda[A, \Psi(Y)] = \\
&= -[A, \Psi(Y)] + 2\lambda[A, \Psi(Y)]
\end{aligned}$$

Con lo cual para que sea una forma horizontal  $\lambda = \frac{1}{2}$ . La demostración de la condición 1 se hace igual que en la proposición anterior.

□

**Definición 5.3.4.** Definimos la curvatura de  $\Psi$  como la 2-forma  $\Omega_\Psi \in \overline{\Lambda}^2(P, \mathcal{G})$  dada por la fórmula

$$\Omega_\Psi = d\Psi + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi]$$

Si  $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$  es la proyección canónica entonces  $\rho(\Omega)$  se le llama torsión. Si  $\Omega$  toma valores en  $\mathcal{H}$  diremos que es libre de torsión.

**Proposición 5.3.5.** (Identidad de Bianchi)

La derivada covariante  $d^\Psi : \overline{\Lambda}^2(P, \mathcal{G}) \rightarrow \overline{\Lambda}^3(P, \mathcal{G})$  verifica que

$$d^\Psi \Omega = d\Omega + [\Psi, \Omega] = 0$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} d^\Psi \Omega &= d(d\Psi + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi]) + [\Psi, \Omega] = \frac{1}{2}d[\Psi, \Psi] + [\Psi, \Omega] = \\ &= \frac{1}{2}[d\Psi, \Psi] - \frac{1}{2}[\Psi, d\Psi] + [\Psi, \Omega] = \\ &= \frac{1}{2}[\Omega - \frac{1}{2}[\Psi, \Psi], \Psi] - \frac{1}{2}[\Psi, \Omega - \frac{1}{2}[\Psi, \Psi]] + [\Psi, \Omega] = \\ &= \frac{1}{2}[\Omega, \Psi] - \frac{1}{4}[[\Psi, \Psi], \Psi] - \frac{1}{2}[\Psi, \Omega] + \frac{1}{4}[\Psi, [\Psi, \Psi]] + [\Psi, \Omega] = -[\Psi, \Omega] + [\Psi, \Omega] = 0 \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado que  $[\Psi, [\Psi, \Psi]] = 0$  y que  $d[\Psi, \Psi] = [d\Psi, \Psi] - [\Psi, d\Psi]$ .  $\square$

**Lema 5.3.6.** Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  modelado en  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  con grupo  $H$ . Sea  $\psi : P \rightarrow H$  una aplicación diferenciable. Consideramos  $f : P \rightarrow P$  definida por  $f(p) = \psi(p)p$  entonces se cumple que  $f^*\Omega = Ad(\psi(p))\Omega$ .

*Demostración.* Podemos descomponer  $f$  de la siguiente manera:

$$P \xrightarrow{\Delta} P \times P \xrightarrow{id \times \psi} P \times H \xrightarrow{\mu} P$$

donde  $\mu$  es la multiplicación por la derecha. Así tenemos

$$\begin{aligned} f^*(\Psi) &= (\mu \circ (id \times \psi) \circ \Delta)^*\Psi = \Delta^*(id \times \psi)^*\mu^*\Psi = \\ &= \Delta^*(id \times \psi)^*\{\pi_1^*Ad(\psi^{-1})\Psi + \pi_2^*\omega_H\} = Ad(\psi^{-1})\Psi + \psi^{-1}\omega_H \end{aligned}$$

Donde  $\omega_H$  es la forma canónica del grupo de Lie  $H$ .

Así tenemos

$$\begin{aligned}
f^*\Omega &= f^*(d\Psi + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi]) = d(f^*(\Psi)) + \frac{1}{2}f^*([\Psi, \Psi]) = \\
&= d(Ad(\psi^{-1})\Psi + \psi^*(\omega_H)) + \frac{1}{2}f^*([\Psi, \Psi]) = d(Ad(\psi^{-1})\Psi) + d\psi^*\omega_H + \frac{1}{2}f^*[\Psi, \Psi] = \\
&= Ad(\psi^{-1})d\Psi - [Ad(\psi^{-1})\Psi, \psi^*\omega_H] + d\psi^*(\omega_H) + \frac{1}{2}[f^*\Psi, f^*\Psi] = \\
&= Ad(\psi^{-1})d\Psi - \frac{1}{2}[Ad(\psi^{-1})\Psi, \psi^*\omega_H] - \frac{1}{2}[Ad(\psi^{-1})\Psi, \psi^*\omega_H] + d\psi^*(\omega_H) + \\
&\quad + \frac{1}{2}[Ad(\psi^{-1})\Psi + \psi^*\omega_H, Ad(\psi^{-1})\Psi + \psi^*\omega_H] = \\
&= Ad(\psi^{-1})d\Psi + \frac{1}{2}[Ad(\psi^{-1})\Psi, Ad(\psi^{-1})\Psi] + \psi^*(d\omega_H) + \frac{1}{2}[\psi^*\omega_H, \psi^*\omega_H] = \\
&= Ad(\psi^{-1})(d\Psi + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi]) + \psi^*(d\omega_H + \frac{1}{2}[\omega_H, \omega_H]) = Ad(\psi^{-1})\Omega
\end{aligned}$$

□

**Teorema 5.3.7.** *La forma de curvatura  $\Omega(u, v)$  se anula si  $u$  o  $v$  son tangentes a la fibra.*

*Demostración.* Supongamos que  $u, v \in T_p(P)$  son independientes y  $v$  es tangente a la fibra. Podemos elegir una función cualquiera  $\phi : (P, p) \rightarrow (H, e)$  que cumpla que  $\phi_{*p}(v) = -\Psi_p(v)$  ya que  $v$  es tangente a la fibra por lo que  $\phi_{*p}(v) \in \mathcal{H} = T_e(H)$ . Ahora definimos  $f : P \rightarrow P$  por  $f(q) = q \cdot \phi(q)$ . Igual que en el lema 5.3.6 se puede ver que :

$$f^*\Psi = Ad(\phi^{-1})\Psi + \phi^*\omega_H = \Psi + \phi^*\omega_H$$

y que

$$f^*\Omega = \Omega$$

De manera que  $\Psi(f_*v) = \Psi_p(v) + \omega_H\phi_{*p}(v) = \Psi_p(v) - \Psi_p(v) = 0$  es decir que  $f_*v = 0$ . Así se cumple que  $\Omega(u, v) = (f^*\Omega)(u, v) = \Omega(f_*u, f_*v) = \Omega(f_*u, 0) = 0$  □

**Definición 5.3.8.** *La función de curvatura  $K : P \rightarrow Hom(\lambda^2(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}, \mathcal{G}))$  se define por*

$$K(p)(X_1, X_2) = \Omega_p(\Psi^{-1}(X_1), \Psi^{-1}(X_2))$$

**Proposición 5.3.9.** *La función de curvatura está bien definida y cumple*

$$K(ph)(X_1, X_2) = Ad(h^{-1})K(p)(Ad(h)X_1, Ad(h)X_2)$$

*Demostración.* Sea  $p \in P$  y sea  $Y_j = X_j + V_j$  con  $j = 1, 2$  con  $V_j \in \mathcal{H}$ . Como  $\Psi_p^{-1}(V_j)$  es tangente a la fibra se tiene que  $\Omega_p(\Psi_p^{-1}(V_j), u) = 0$  por el teorema 5.3.7, por tanto  $\Omega_p(\Psi^{-1}(X_1), \Psi^{-1}(X_2)) = \Omega_p(\Psi^{-1}(Y_1), \Psi^{-1}(Y_2))$

Ahora se tiene

$$\begin{aligned} K(ph) &= \Omega_{ph}(\Psi_{ph}^{-1}(X_1), \Psi_{ph}^{-1}(X_2)) = \\ &= Ad(h^{-1})\Omega_p(((Ad(h^{-1})\Psi_p)^{-1}(X_1), ((Ad(h^{-1})\Psi_p)^{-1}(X_2))) = \\ &= Ad(h^{-1})\Omega_p((\Psi_p)^{-1}(Ad(h)X_1), (\Psi_p)^{-1}(Ad(h)X_2)) = \\ &= Ad(h^{-1})K(p)(Ad(h)X_1, Ad(h)X_2) \end{aligned}$$

□

**Proposición 5.3.10.** *Se tiene que una geometría de Cartan es libre de torsión si y solo si la función de curvatura toma valores en la subrepresentación  $Hom(\lambda^2(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}), \mathcal{H}) \subset Hom(\lambda^2(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}), \mathcal{G})$*

*Demostración.* Si es libre de torsión  $\Omega(X_1, X_2) \in \mathcal{H}$  por tanto  $K$  va a tomar valores en  $Hom(\lambda^2(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}), \mathcal{H})$ .

Al contrario si  $v_1, v_2 \in T_p(P)$  entonces existe  $X_1, X_2 \in \mathcal{G}$  tales que  $v_i = \Psi^{-1}(X_i)$  y tenemos que  $\Omega(v_1, v_2) = \Omega(\Psi^{-1}(X_1), \Psi^{-1}(X_2)) = K(p)(X_1, X_2) \in \mathcal{H}$

□

**Proposición 5.3.11.** *Se verifica que*

$$K(p)(X_1, X_2) = [X_1, X_2] - \Psi_p([\Psi^{-1}(X_1), \Psi^{-1}(X_2)])$$

*Es decir que la función de curvatura se puede considerar como la medida de la diferencia entre el corchete del álgebra de Lie y el corchete de los correspondientes campos de vectores de  $P$ .*

*Demostración.* Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} K(p)(X_1, X_2) &= \Omega(\Psi^{-1}(X_1), \Psi^{-1}(X_2)) = \\ &= d\Psi_p(\Psi_p^{-1}(X_1), \Psi_p^{-1}(X_2)) + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi](\Psi_p^{-1}(X_1), \Psi_p^{-1}(X_2)) = \\ &= \frac{1}{2}\Psi(\Psi_p^{-1}(X_2))\Psi^{-1}(X_1) - \frac{1}{2}\Psi(\Psi_p^{-1}(X_1))\Psi^{-1}(X_2) - \frac{1}{2}\Psi([\Psi_p^{-1}(X_1), \Psi_p^{-1}(X_2)]) + \\ &\quad + [\Psi(\Psi_p^{-1}(X_1), \Psi(\Psi_p^{-1}(X_1))] = -\Psi([\Psi_p^{-1}(X_1), \Psi_p^{-1}(X_2)]) + [X_1, X_2] \end{aligned}$$

□

## 5.4. Mutaciones

**Definición 5.4.1.** Sea  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  y  $(\mathcal{G}', \mathcal{H})$  dos modelos con grupo  $H$ . una mutación es un isomorfismo de  $Ad(H)$ -módulos  $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  que cumple

1.  $\lambda|_{\mathcal{H}} = Id_{\mathcal{H}}$
2. Para todo  $u, v \in \mathcal{G}$  se cumple que  $[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u, v]) \text{ mod } \mathcal{H}$ .

Decimos entonces que el modelo  $(\mathcal{G}', \mathcal{H})$  es una mutación del modelo  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  con grupo  $H$ .

**Proposición 5.4.2.** Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  sobre el modelo geométrico  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ . Sea  $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  una mutación y sea  $\Psi' = \lambda\Psi$ . Entonces  $(P, \Psi')$  es una geometría de Cartan en  $X$  modelada en  $(\mathcal{G}', \mathcal{H})$  con grupo  $H$ . Además se cumple:

1. La curvatura está relacionada por  $\Omega' = \lambda\Omega + \frac{1}{2}([\Psi', \Psi'] - \lambda[\Psi, \Psi])$
2. Si  $(P, \Psi)$  es libre de torsión entonces  $(P, \Psi')$  es libre de torsión.

*Demostración.* Veamos que se cumplen las tres condiciones para que  $\Psi'$  sea una conexión de Cartan.

- Como  $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  es un isomorfismo y  $\Psi_p : T_p P \rightarrow \mathcal{G}$  también es un isomorfismo al ser una conexión de Cartan, entonces  $\Psi'_p = \lambda\Psi_p : T_p P \rightarrow \mathcal{G}'$  también es un isomorfismo.
- $(R_h^*)\Psi' = (R_h^*(\lambda\Psi)) = \lambda(R_h^*\Psi) = \lambda Ad(h^{-1})\Psi = Ad(h^{-1})\Psi'$ , ya que  $\lambda$  es un isomorfismo de  $Ad(H)$ -módulo.
- Sea  $Y \in \mathcal{H}$ . Sea  $Y^t$  el correspondiente campo en  $P$  que cumple que  $\Psi(Y^t) = Y$ . Se cumple

$$\Psi'(Y^t) = \lambda\Psi(Y^t) = \lambda(Y) = Y$$

1. Se tiene el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \Omega' &= d\Psi' + \frac{1}{2}[\Psi', \Psi'] = d\lambda\Psi + \frac{1}{2}[\Psi', \Psi'] = \\ &= \lambda d\Psi + \frac{1}{2}[\Psi', \Psi'] = \lambda(d\Psi + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi]) + \frac{1}{2}([\Psi', \Psi'] - \lambda[\Psi, \Psi]) = \\ &= \lambda\Omega + \frac{1}{2}([\Psi', \Psi'] - \lambda[\Psi, \Psi]) \end{aligned}$$

2. Se tiene que  $\frac{1}{2}([\Psi', \Psi'] - \lambda[\Psi, \Psi]) \in \mathcal{H}$  luego  $\Omega \in \mathcal{H}$  si y solo si  $\lambda\Omega \in \mathcal{H}$  si y solo si  $\Omega' \in \mathcal{H}$ .

□

## 5.5. Geometrías reductivas

**Definición 5.5.1.** Se dice que una geometría de Cartan  $(P, \Psi)$  es reductiva si existe una descomposición de  $\mathcal{H}$ -módulos de la forma  $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{I}$

**Proposición 5.5.2.** Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan reductiva. La conexión  $\Psi$  puede ser escrita como  $\Psi = \omega + e$ . Se verifica que  $\omega$  es una conexión de Ehresmann y  $e \in \overline{\Lambda}^1(P, \mathcal{I})$

*Demostración.* Se tiene que  $R_h^* \Psi = Ad(h^{-1})\Psi$ . De esta manera

$$R_h^* \omega + R_h^* e = Ad(h^{-1})\omega + Ad(h^{-1})e$$

Con lo cual

$$R_h^* \omega - Ad(h^{-1})\omega = -R_h^* e + Ad(h^{-1})e$$

y como el lado izquierdo de la igualdad toma valores en  $\mathcal{H}$  y el derecho en  $\mathcal{I}$  tendremos que  $R_h^* \omega = Ad(h^{-1})\omega$  y  $R_h^* e = Ad(h^{-1})e$ .

Por otro lado tenemos que  $\Psi(A^*) = A$  para todo  $A \in \mathcal{H}$ . Como

$$A = \Psi(A^*) = \omega(A^*) + e(A^*)$$

se tiene que

$$A - \omega(A^*) = e(A^*)$$

El lado derecho de la igualdad toma valores en  $\mathcal{H}$  y el lado izquierdo toma valores en  $\mathcal{I}$ , con lo cual  $A = \omega(A^*)$  y  $e(A^*) = 0$ . □

**Definición 5.5.3.** Los elementos  $\Psi \in \overline{\Lambda}^1(P, \mathcal{G})$  que verifican que  $\Psi = \omega + e$  con  $\omega \in \overline{\Lambda}^1(P, \mathcal{H})$  y con  $e \in \overline{\Lambda}^1(P, \mathcal{I})$  se denominan 1-formas de Cartan, y el conjunto de ellas se denotará por  $\overline{\Lambda}_C^1(P, \mathcal{G})$ . Denotaremos por  $\Lambda_{CC}^1(P, \mathcal{G}) \subset \overline{\Lambda}_C^1(P, \mathcal{G})$  al subconjunto formado por las conexiones de Cartan.

**Proposición 5.5.4.** Una 1-forma de Cartan  $\Psi = \omega + e \in \overline{\Lambda}_C^1(P, \mathcal{G})$  es una conexión de Cartan si y solo si e define un isomorfismo  $e : \ker(\omega) \rightarrow \mathcal{I}$ .

*Demostración.* Si  $\Psi$  es una conexión de Cartan, veamos que  $e : \ker(\omega) \rightarrow \mathcal{I}$  es un isomorfismo.

Es inyectiva ya que si  $A \in \ker(\omega)$  entonces  $\omega(A) = 0$ , luego  $A = Y^*$  para algún campo  $Y \in \mathcal{H}$ , así que  $e(A) = 0$ . Por tanto  $\Psi(A) = 0$  y como  $\Psi$  es un isomorfismo tenemos que  $A = 0$ .

Sea  $A_{\mathcal{I}} \in \mathcal{I}$ , consideremos el campo fundamental  $A_{\mathcal{H}}^* + A_{\mathcal{I}}^*$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{H}} + A_{\mathcal{I}} &= \Psi(A_{\mathcal{H}}^* + A_{\mathcal{I}}^*) = \omega(A_{\mathcal{H}}^* + A_{\mathcal{I}}^*) + e(A_{\mathcal{H}}^* + A_{\mathcal{I}}^*) = \\ &= \omega(A_{\mathcal{H}}^*) + \omega(A_{\mathcal{I}}^*) + e(A_{\mathcal{H}}^*) + e(A_{\mathcal{I}}^*) = A_{\mathcal{H}} + \omega(A_{\mathcal{I}}^*) + e(A_{\mathcal{I}}^*) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $A_{\mathcal{I}} = \omega(A_{\mathcal{I}}^*) + e(A_{\mathcal{I}}^*)$ . Así se tiene que  $\omega(A_{\mathcal{I}}^*) = 0$  y  $e(A_{\mathcal{I}}^*) = A_{\mathcal{I}}$ . Con lo cual es sobreyectiva.

Para la implicación inversa, veamos que cumple las tres condiciones para ser una conexión de Cartan.

1.  $\Psi_p$  es un isomorfismo. Veamos que es sobreyectiva. Sea  $A = A_{\mathcal{H}} + A_{\mathcal{I}} \in \mathcal{G}$ , se tiene entonces que

$$\Psi(A_{\mathcal{H}}^* + A_{\mathcal{I}}^*) = \omega(A_{\mathcal{H}}^* + A_{\mathcal{I}}^*) + e(A_{\mathcal{H}}^* + A_{\mathcal{I}}^*) = \omega(A_{\mathcal{H}}^*) + e(A_{\mathcal{I}}^*) = A_{\mathcal{H}} + A_{\mathcal{I}} = A$$

Se tiene que es inyectiva ya que si  $\Psi_p(Y) = 0$  se tiene que  $\omega(Y) = e(Y)$ , con lo que  $\omega(Y) = 0$  y  $e(Y) = 0$  por tanto  $Y = A^*$  para algún  $A \in \mathcal{H}$  y por tanto  $A = 0$  e  $Y = 0$ .

2. Se tiene que  $R_h^* \Psi = R_h^* \omega + R_h^* e = Ad(h^{-1})\omega + Ad(h^{-1})e = Ad(h^{-1})\Psi$ .

3. Si  $A \in \mathcal{H}$  entonces  $\Psi(A^*) = \omega(A^*) + e(A^*) = A$ .

Con lo cual queda demostrado que  $\Psi$  es una conexión de Cartan.  $\square$

**Proposición 5.5.5.** *Sea  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  un modelo geométrico reductivo. Entonces existe, salvo isomorfismo, una única mutación  $(\mathcal{G}', \mathcal{H})$  con  $\mathcal{G}' = \mathcal{H} \oplus \mathcal{I}'$  y  $[\mathcal{I}', \mathcal{I}'] = 0$*

*Demostración.* Tomemos  $\mathcal{I}' = \mathcal{I}$  como un  $\mathcal{H}$ -módulo pero con la multiplicación en  $\mathcal{I}'$  dada por  $[\mathcal{I}', \mathcal{I}'] = 0$ .

Se verifica fácilmente que  $\mathcal{G}' = \mathcal{H} \oplus \mathcal{I}'$  es un álgebra de Lie.

También se verifica que la aplicación canónica  $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  es una mutación.

La primera condición de mutación es clara. La segunda tenemos por un lado que

$$[\lambda(h_1 + p_1), \lambda(h_2 + p_2)] = [h_1 + p'_1, h_2 + p'_2] = [h_1, h_2] + [h_1, p'_2] + [p'_1, h_2] + [p'_1, p'_2]$$

Por otro lado se tiene

$$\lambda[h_1 + p_1, h_2 + p_2] = \lambda[h_1, h_2] + \lambda[h_1, p_2] + \lambda[p_1, h_2] + \lambda[p_1, p_2] =$$

$$= [h_1, h_2] + [h_1, p'_2] + [p'_1, h_2] + [p_1, p_2]'$$

Tomando mod  $\mathcal{H}$  se cumple que  $\lambda[h_1 + p_1, h_2 + p_2] \text{ mod } \mathcal{H} = [h_1, h_2] + [h_1, p'_2] + [p'_1, h_2]$  con lo que queda demostrado que es una mutación.  $\square$

De esta forma, en el caso reductivo podemos encontrar una mutación cumpliendo  $[\mathcal{I}, \mathcal{I}] = 0$ , y como no se pierde información pasando a la mutación, se sigue que para geometrías de Cartan reductivas podemos asumir que  $[\mathcal{I}', \mathcal{I}'] = 0$ . Esto nos permite olvidarnos completamente de lo grande que sea  $\mathcal{G}$  y conservar solo la subálgebra  $\mathcal{H}$  y el H-módulo  $\mathcal{I}$ .

El caso en el que  $[\mathcal{I}, \mathcal{I}] = 0$  diremos que  $\Psi$  es una conexión de Cartan reducida.

**Proposición 5.5.6.** *Sea  $\Psi$  una conexión de Cartan reducida. Entonces se cumple que*

$$\Omega^\Psi = \Omega^\omega + d^\omega e$$

*Demostración.* Se cumple

$$\begin{aligned} \Omega^\Psi &= d\Psi + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi] = d\omega + de + \frac{1}{2}[\omega + e, \omega + e] = \\ &= d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] + de + [\omega, e] = \Omega^\omega + d^\omega e \end{aligned}$$

$\square$

### 5.5.1. Conexiones de Cartan-Yang-Mills

Vamos a considerar la métrica  $g$ , y las definiciones de  $*$  y  $\bar{*}$  como en la sección 3.3.

Consideremos ahora que  $B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  una métrica compuesta por dos métricas en  $\mathcal{H}$  y en  $\mathcal{I}$  verificando que  $\mathcal{H} \perp \mathcal{I}$ . Aún más las representaciones

$$H \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{H}), H \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{I})$$

son ortogonales con respecto a la correspondiente métrica. Además induce un producto interior en  $\mathcal{G}$  que es ad-invariante, es decir que

$$B(\text{ad}(g)X, \text{ad}(g)Y) = B(X, Y)$$

para cualquier  $g \in G$  y  $X, Y \in \mathcal{G}$ .

**Definición 5.5.7.** Se define la aplicación  $\langle, \rangle : \overline{\Lambda}^r(P, \mathcal{G}) \times \overline{\Lambda}^r(P, \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{\sigma} \text{sig}(\sigma) B(\alpha(\overline{X}_{\sigma(1)}, \dots, \overline{X}_{\sigma(r)}), \overline{*}\beta(\overline{X}_{\sigma(r+1)}, \dots, \overline{X}_{\sigma(n)}))$$

donde  $\{\overline{X}_i\} \in T_p P$  con  $\pi(p) = x$  y  $\pi_*(\overline{X}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Esta definición no depende de la elección de la base en  $T_x X$  y debido al carácter automórfico de los elementos de  $\overline{\Lambda}^r(P, \mathcal{G})$  y la ad-invarianza de B se tiene que no depende tampoco del punto  $p$  en la fibra de  $x \in X$ .

**Definición 5.5.8.** Consideremos la elección de signo del operador  $\delta^\omega = \pm \overline{*} d^\omega \overline{*} : \overline{\Lambda}^r(P, \mathcal{G}) \rightarrow \overline{\Lambda}^{r-1}(P, \mathcal{G})$ , que denotaremos por codiferencial covariante.

**Teorema 5.5.9.** Se tiene que para cada subconjunto abierto  $U$  con clausura compacta y siendo  $\alpha \in \overline{\Lambda}^r(P, \mathcal{G})$  y  $\beta \in \overline{\Lambda}^{r+1}(P, \mathcal{G})$  se cumple que

$$\int_U \langle d^\omega \alpha, \beta \rangle \mu = \int_U \langle \alpha, \delta^\omega \beta \rangle \mu$$

*Demostración.* Se cumple que

$$\tilde{g}(\alpha, \delta^\omega \beta) \mu = \alpha \wedge * \delta^\omega \beta = \pm \alpha \wedge \overline{*} d^\omega \overline{*} \beta = \pm \alpha \wedge d^\omega \overline{*} \beta$$

donde se ha utilizado que  $\overline{*} \overline{*} = \pm 1$  como se puede ver en [21]. De esta manera tenemos que

$$\tilde{g}(d^\omega \alpha, \beta) - \tilde{g}(\alpha, \delta^\omega \beta) = d^\omega \alpha \wedge * \beta - \alpha \wedge d^\omega * \beta = d^\omega(\alpha \wedge * \beta)$$

Aplicando el teorema de Stokes tenemos que

$$\int_U \langle d^\omega \alpha, \beta \rangle \mu = \int_U \langle \alpha, \delta^\omega \beta \rangle \mu$$

□

**Definición 5.5.10.** Definimos  $\Theta : \Lambda_{cc}^1(P, \mathcal{G}) \rightarrow C^\infty(X)$  por  $\Psi \mapsto \langle \Omega^\Psi, \Omega^\Psi \rangle$ . Decimos que la conexión de Cartan  $\Psi = \omega + e$  es estacionaria relativa a  $\langle, \rangle$  si para todo conjunto abierto  $U \subset X$  con clausura compacta y  $\tau \in \overline{\Lambda}^1(P, \mathcal{G})$  cuyo proyección esta en  $U$ , se tiene que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_U \Theta(\Psi + t\tau) = 0$$

Nótese que si  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  con  $\tau_1 \in \overline{\Lambda}^1(P, \mathcal{H})$  y  $\tau_2 \in \overline{\Lambda}^1(P, \mathcal{I})$  entonces  $\Psi + t\tau = (\omega + e) + t(\tau_1 + \tau_2)$  es una conexión de Cartan si y solo si  $e + t\tau_2 : \ker(\omega + t\tau_1) \rightarrow \mathcal{I}$  es un isomorfismo. De esta forma la conexión de Cartan es estacionaria en el espacio  $\Lambda_{CC}^1(P, \mathcal{G})$ , y en este caso la conexión  $\Psi$  es llamada una conexión de Cartan-Yang-Mills.

**Teorema 5.5.11.** *Una conexión reducida de Cartan  $\Psi = \omega + e$  es una conexión de Cartan-Yang-Mills si y solo si*

$$\delta^\omega \Omega^\omega = 0, \delta d^\omega e = 0$$

*Demostración.* Sea  $\tau \in \overline{\Lambda}^1(P, \mathcal{H})$  y sea  $f \in \overline{\Lambda}^1(P, \mathcal{I})$  con soporte proyectado en  $U$ .

Se cumple que

$$\Omega^{\Psi+t(\tau+f)} = d\omega + [\omega, \omega] + td^\omega \tau + \frac{t^2}{2}[\tau, \tau] + d^\omega e + td^\omega f$$

Por lo que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \Omega^{\Psi+t(\tau+f)}, \Omega^{\Psi+t(\tau+f)} \rangle = 2 \langle \Omega^\Psi + d^\omega e, d^\omega \tau + d^\omega f \rangle$$

De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_U \langle \Omega^{\Psi+t(\tau+f)}, \Omega^{\Psi+t(\tau+f)} \rangle &= 2 \int_U \langle \Omega^\omega + d^\omega e, d^\omega \tau + d^\omega f \rangle = \\ &= 2 \int_U \langle \Omega^\omega, d^\omega \tau \rangle + 2 \int_U \langle d^\omega e, d^\omega f \rangle = 2 \int_U \langle \delta^\omega \Omega^\omega, \tau \rangle + 2 \int_U \langle \delta^\omega d^\omega e, f \rangle \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que las métricas en  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{I}$  son ortogonales.

De aquí se concluye la suficiencia y necesidad del teorema.  $\square$

## 5.5.2. Ejemplos de modelos geométricos reductivos

Vamos a considerar los modelos homogéneos del espaciotiempo. Estos son:

$$\begin{array}{l} \text{Lorentzianos} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Anti de Sitter} & \text{SO}(3,2)/\text{SO}(3,1) \\ \text{Minkoswki} & \text{ISO}(3,1)/\text{SO}(3,1) \\ \text{de Sitter} & \text{SO}(4,1)/\text{SO}(3,1) \end{array} \right. \\ \\ \text{Riemmanianos} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Hiperbólico} & \text{SO}(4,1)/\text{SO}(4) \\ \text{Euclideo} & \text{ISO}(4)/\text{SO}(4) \\ \text{Esférico} & \text{SO}(5)/\text{SO}(4) \end{array} \right. \end{array}$$

donde los grupos  $SO(p, q) = \{A \in GL(p+q) / A^{-1}\eta = \eta A^t \text{ y } \det A = 1\}$  y donde  $\eta$  es  $(\overbrace{-1, \dots, -1}^q, \overbrace{1, \dots, 1}^p)$  e  $ISO(p, q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } A \in O(p, q) \text{ y } t \in \mathbb{R}^{p+q} \right\}$

Vamos a considerar primero el caso Riemmaniano.  
Las álgebras de Lie

$$\mathfrak{so}(5) = \{A \in GL(5) / A + A^t = 0 \text{ y } \text{traza}(A) = 0\}$$

$$\mathfrak{iso}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & A \end{pmatrix} / A \in \mathfrak{so}(4) \text{ y } t \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$\mathfrak{so}(4, 1) = \{A \in \mathfrak{o}(4, 1) / \text{traza}(A) = 0\}$$

La forma de las matrices de estas álgebras son

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -\epsilon a & 0 & e & f & g \\ -\epsilon b & -e & 0 & h & i \\ -\epsilon c & -f & -h & 0 & j \\ -\epsilon d & -g & -i & -j & 0 \end{pmatrix}.$$

donde cada álgebra depende del valor de  $\epsilon$  de la siguiente manera

$$\begin{cases} \mathfrak{so}(5) & \text{si } \epsilon = 1 \\ \mathfrak{iso}(4) & \text{si } \epsilon = 0 \\ \mathfrak{so}(4, 1) & \text{si } \epsilon = -1 \end{cases}$$

Para los casos en que  $\epsilon \neq 0$  podemos definir una métrica no degenerada, sobre el álgebra de Lie dada por

$$\langle C, D \rangle = -\frac{\epsilon}{2} \text{tr}(CD)$$

con  $C, D \in \mathcal{G}$ , que es invariante bajo  $Ad(G)$  y por tanto bajo  $Ad(H)$ , ya que se tiene que si  $A \in G$  se cumple que

$$\begin{aligned} \langle GCG^{-1}, GDG^{-1} \rangle &= -\frac{\epsilon}{2} \text{tr}(GCG^{-1}GDG^{-1}) = -\frac{\epsilon}{2} \text{tr}(GCDG^{-1}) = \\ &= -\frac{\epsilon}{2} \text{tr}(DGG^{-1}C) = -\frac{\epsilon}{2} \text{tr}(DC) = -\frac{\epsilon}{2} \text{tr}(CD) = \langle C, D \rangle \end{aligned}$$

La métrica es no degenerada porque es proporcional a la forma Killing y además las álgebras son semisimples.

En el caso de  $\epsilon = 0$  el grupo  $ISO(4)$  no tiene una métrica no degenerada invariante en su álgebra de Lie. Lo que ocurre es que la métrica inducida por la traza anula al subespacio correspondiente a  $\mathbb{R}^4$  formado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero lo que necesitamos es que la métrica sea invariante únicamente sobre  $SO(4)$ . La construcción la podemos conseguir utilizando que

$$\mathfrak{iso}(4) = \mathfrak{so}(4) \times \mathbb{R}^4$$

De esta forma utilizando la traza en  $\mathfrak{so}(4)$  junto con la métrica usual de  $\mathbb{R}^4$ , nos da una métrica no degenerada y  $SO(4)$ -invariante en el álgebra de Lie  $\mathfrak{iso}(4)$ .

En cualquiera de los tres casos podemos, con la métrica correspondiente, descomponer el álgebra de Lie en una  $Ad(SO(4))$ -invariante suma directa ortogonal de la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & g \\ 0 & -e & 0 & h & i \\ 0 & -f & -h & 0 & j \\ 0 & -g & -i & -j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -\epsilon a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así tenemos  $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(4) \oplus \mathcal{I}$ , donde  $\mathcal{I} \cong \mathcal{G}/\mathcal{H} \cong \mathbb{R}^4$  y en este subespacio la métrica se restringe a la métrica usual de  $\mathbb{R}^4$ . Con lo cual vemos que estos modelos geométricos son reductivos, y además es una descomposición ortogonal referido a la métrica que hemos definido en cada caso.

En el caso Lorentziano podemos hacer lo mismo y obtenemos que las álgebras de Lie son

$$\mathfrak{so}(4, 1) = \{A \in \mathfrak{o}(4, 1) / \text{traza}(A) = 0\}$$

$$\mathfrak{iso}(3, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & A \end{pmatrix} / A \in \mathfrak{so}(3, 1) \text{ y } t \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$\mathfrak{so}(3, 2) = \{A \in \mathfrak{o}(3, 2) / \text{traza}(A) = 0\}$$

La forma matricial de estas álgebras se puede compactar en una dependiendo de  $\epsilon$  al igual que en el caso Riemanniano, como sigue

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 0 & e & f & g \\ b & -e & 0 & h & i \\ c & -f & -h & 0 & j \\ \epsilon d & -\epsilon g & -\epsilon i & -\epsilon j & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde tenemos los casos

$$\begin{cases} \mathfrak{so}(4,1) & \text{si } \epsilon = 1 \\ \mathfrak{iso}(3,1) & \text{si } \epsilon = 0 \\ \mathfrak{so}(3,2) & \text{si } \epsilon = -1 \end{cases}$$

Al igual que antes podemos definir, para los casos en que  $\epsilon \neq 0$ , una métrica no degenerada, sobre el álgebra de Lie dada por

$$\langle C, D \rangle = -\frac{\epsilon}{2} \text{tr}(CD)$$

con  $C, D \in \mathcal{G}$

Al igual que en caso anterior cuando  $\epsilon = 0$  no podemos definir una métrica no degenerada en el álgebra de Lie, pero solo necesitamos que sea invariante sobre  $\text{SO}(3,1)$  no sobre  $\text{ISO}(3,1)$ . Utilizando que  $\mathfrak{iso}(4,1) = \mathfrak{so}(3,1) \ltimes \mathbb{R}^{3,1}$  y de la misma manera que antes utilizamos la métrica derivada de la traza en  $\mathfrak{so}(3,1)$  y la métrica de Minkowski en  $\mathbb{R}^{3,1}$  conseguimos una métrica en  $\mathfrak{iso}(4,1)$  que es  $\text{Ad}(\text{SO}(3,1))$ -invariante y no degenerada.

En cualquiera de los casos tenemos que podemos, con la métrica correspondiente, descomponer el álgebra de Lie en una  $\text{Ad}(\text{SO}(3,1))$ -invariante suma directa ortogonal de la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & 0 \\ a & 0 & e & f & 0 \\ b & -e & 0 & h & 0 \\ c & -f & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j \\ \epsilon d & -\epsilon g & -\epsilon h & -\epsilon j & 0 \end{pmatrix}$$

Así tenemos  $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(3,1) \oplus \mathcal{I}$ , donde  $\mathcal{I} \cong \mathcal{G}/\mathcal{H} \cong \mathbb{R}^{3,1}$  y en este subespacio la métrica se restringe a la métrica de Minkowski de  $\mathbb{R}^{3,1}$ . Con lo cual vemos que estos modelos geométricos son reductivos, y además es una descomposición ortogonal referido a la métrica que hemos definido en cada caso.

Vamos a considerar las formas utilizando la notación matricial. Así la 1-forma de conexión de Cartan  $\Psi = \omega + e$ , donde  $\omega$  es la conexión de Ehresmann de  $\text{SO}(3,1)$ , tiene unas componentes

$$\Psi_j^i = \omega_j^i$$

para  $i, j=1, 2, 3, 4$ .

$$\Psi_j^5 = -\epsilon e_j \text{ y } \Psi_5^i = e^i$$

. Aquí  $\epsilon$  toma los valores como anteriormente dependiendo del álgebra que fuera.

Ahora podemos calcular las componentes de la curvatura quedando para la parte de  $\mathfrak{so}(3, 1)$

$$\begin{aligned} \Omega^{\Psi_j^i} &= d\Psi_j^i + \Psi_4^i \wedge \Psi_j^4 + \Psi_5^i \wedge \Psi_j^5 = d\omega_j^i + \omega_j^i \wedge \omega_4^j + -\epsilon e_5 \wedge e^5 = \\ &= \Omega_j^i - \epsilon e_5 \wedge e^5 \end{aligned}$$

para  $i, j = 1, 2, 3, 4$  y donde  $\Omega$  es la curvatura de  $SO(3, 1)$

Para la parte de  $\mathbb{R}^{3,1}$  se tiene

$$\Omega^{\Psi_5^i} = d\Psi_5^i + \sum_{j=1, j \neq i}^4 \Psi_j^i \wedge \Psi_5^j = de^i + \sum_{j=1, j \neq i}^4 \omega_j^i \wedge e_5 = d^\omega e^i$$

Por lo tanto

$$\Omega^\Psi = (\Omega - \epsilon e \wedge e) + d^\omega e$$

De esta forma para que la conexión de Cartan en unos de estos modelos reductivos sea plana tiene que ocurrir

$$\Omega = \epsilon e \wedge e \text{ y } d^\omega e = 0$$

Estas son las ecuaciones de Einstein para la gravedad ya que vienen dadas por  $e \wedge \Omega - \frac{\Lambda}{3} e \wedge e \wedge e = 0$ . Donde  $\Lambda$  es la constante cosmológica. Esta constante en nuestra formulación aparecería si en las matrices de las álgebras de Lie la hubiésemos considerado.

### 5.5.3. Aplicación de la geometría de Cartan a la teoría BF gravitacional

Sea un grupo de Lie  $G$  cuya álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  está equipada con una forma bilineal no degenerada  $\langle \Delta, \Delta \rangle$ . Consideremos una variedad cualquiera  $X$   $n$ -dimensional y elegimos un fibrado principal  $P$  sobre  $X$ . Consideremos una conexión  $\omega$  en  $P$  y sea  $F$  una  $(n-2)$ -forma  $\text{ad}(P)$ -valuada en  $X$ . Consideremos la curvatura de la conexión  $\Omega$ . Aquí  $\text{ad}(P) = P \times_G \mathcal{G}$ .

El lagrangiano de la teoría es  $\mathcal{L} = \text{tr}(F \wedge \Omega)$ .

De este lagrangiano podemos obtener las ecuaciones del campo igualando su variación a cero.

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \int_X \mathcal{L} = \int_X \text{tr}(\delta F \wedge \Omega + F \wedge \delta \Omega) = \\
&= \int_X \text{tr}(\delta F \wedge \Omega + F \wedge d^\omega \delta \omega) = \int_X \text{tr}(\delta F \wedge \Omega + (-1)^{n-1} d^\omega F \wedge \delta \omega)
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado la integración por partes y que  $\delta \Omega = d^\omega \delta \omega$ . Vamos a probar esta última igualdad, para ello tenemos en cuenta que la variación de cualquier función  $f$  de una 1-forma  $A$  viene dada por  $\delta f = \frac{d}{ds} f(A_s)|_{s=0}$  donde  $A_s = A + s\delta A$  y  $\delta A$  es cualquier 1-forma. De esta manera

$$\begin{aligned}
\delta \Omega &= \frac{d}{ds} (d\omega_s + \frac{1}{2}[\omega_s, \omega_s]) = d(\frac{d}{ds} \omega_s) + \frac{1}{2}[\frac{d}{ds} \omega_s, \omega] + \frac{1}{2}[\omega_s, \frac{d}{ds} \omega]_{|s=0} = \\
&= d\delta(\omega) + \frac{1}{2}[\delta\omega, \omega] + \frac{1}{2}[\omega, \delta\omega] = d(\delta\omega) + [\omega, \delta\omega] = d^\omega(\delta\omega)
\end{aligned}$$

Tenemos que tener en cuenta que la variación del lagrangiano tiene que ser igual a cero para todo  $\delta F$  y para todo  $\delta \omega$  y eso ocurre si y solo si  $d^\omega F = 0$  y  $\Omega = 0$ , que son las ecuaciones del campo. Estas ecuaciones nos dicen que  $\omega$  es plana y que  $d^\omega F = 0$ .

Estas ecuaciones son invariantes bajo cualquier transformación del tipo  $F' \rightarrow F + d^\omega \eta$  para cualquier  $\eta$  un  $\text{ad}(\mathbb{P})(n-3)$ -forma. Veamos que  $d^\omega F = 0$  es invariante. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_X \text{tr}((F + d^\omega \eta) \wedge \Omega) &= \int_X \text{tr}(F \wedge \Omega + d^\omega \eta \wedge \Omega) = \\
&= \int_X \text{tr}(F \wedge \Omega + (-1)^n \eta \wedge d^\omega \Omega) = \int_X \text{tr}(F \wedge \Omega)
\end{aligned}$$

Hemos utilizado la identidad de Bianchi  $d^\omega \Omega = 0$ . Luego tenemos que las ecuaciones son invariantes respecto de las transformaciones indicadas anteriormente.

De forma similar vamos a intentar hacer la misma teoría con las conexiones de Cartan y vamos a tratar los casos de los modelos geométricos reductivos hiperbólicos.

Consideremos una conexión de Cartan  $\Psi$  del tipo  $G/H$  en vez de una conexión de Ehresmann. Para ello necesitamos que  $G/H$  tenga la misma dimensión que  $X$ . Para el campo  $F$  consideremos una  $(n-2)$ -forma con valores

en  $ad(P) = P \times_H \mathcal{G}$ , donde  $H$  actúa en  $\mathcal{G}$  por medio de la restricción de la representación adjunta de  $G$ . Igual que antes llegaremos a las ecuaciones

$$\begin{aligned}\Omega^\Psi &= 0 \\ d^\Psi F &= 0\end{aligned}$$

Vamos a considerar los ejemplos de de Sitter, anti de Sitter y Minkowski, en donde las formas  $\Psi$ ,  $\Omega^\Psi$  y  $F$  se pueden descomponer en la parte  $\mathfrak{so}(3,1)$  y  $\mathbb{R}^{3,1}$  como vimos en la sección anterior. Así considerando las entradas de las matrices, tenemos que

$$\Psi_j^i = \omega_j^i$$

para  $i,j=1,2,3,4$ .

$$\Psi_j^5 = -\epsilon e_j \text{ y } \Psi_5^i = e^i$$

$$\Omega_j^{\Psi^i} = \Omega_j^i - \epsilon e_5 \wedge e^5 \text{ y } \Omega_5^{\Psi^i} = d^\Psi e^i$$

De igual modo para  $d^\Psi F$ , podemos calcular sus componentes. Si llamamos a la parte de  $\mathfrak{so}(3,1)$  por  $\phi$  y a la parte de  $\mathbb{R}^{3,1}$  por  $f$  tenemos que

$$F_j^i = \phi_j^i$$

para  $i,j=1,2,3,4$ .

$$F_j^5 = -\epsilon f_j \text{ y } F_5^i = f^i$$

Teniendo en cuenta que

$$d^\Psi F_j^i =: dF_j^i + [\Psi, F]_j^i = dF_j^i + \sum_k \Psi_k^i \wedge F_j^k - F_k^i \wedge F_j^k$$

Podemos calcular para  $i,j=1,2,3,4$  las componentes obteniendo

$$d^\Psi F_j^i =: dF_j^i + \sum_{k=1}^4 \Psi_k^i \wedge F_j^k - F_k^i \wedge \Psi_j^k + \Psi_5^i \wedge F_j^5 - F_5^i \wedge \Psi_j^5 = d^\omega \phi_j^i + \epsilon f^i \wedge e_j - \epsilon e^i \wedge f_j$$

y para el índice 5 tenemos

$$d^\Psi F_5^i = d^\Psi f_5^i = dF_5^i + \sum_{k=1}^4 \Psi_k^i \wedge F_4^k - F_k^i \wedge \Psi_4^k = d^\omega f^i - \sum_{k=1}^4 \phi_k^i \wedge e^k$$

De esta forma tenemos las siguientes ecuaciones junto con las que habíamos calculado antes

$$\begin{aligned}\Omega &= \epsilon e \wedge e \\ d^\omega e &= 0 \\ d^\omega \phi + \epsilon(f \wedge e - e \wedge f) &= 0 \\ d^\omega f - \phi \wedge e &= 0\end{aligned}$$

Estas cuatro ecuaciones que corresponden a la teoría clásica BF desde el punto de vista de Cartan son similares a las que se encuentran en la formulación gravitatoria de Macdowell-Mansouri.

## Capítulo 6

# Desarrollo de una curva, orientación y holonomía en las geometrías de Cartan

En los últimos años varios científicos, entre ellos Lee Smolin o Peter Woit, han sido muy críticos con la importancia de la teoría de cuerdas en la física teórica contemporánea, que cree que ha suprimido la investigación en otros enfoques prometedores. Sugieren que la teoría de cuerdas poseen serias deficiencias y ha impedido que la comunidad científica haya fomentado otros programas de investigación en la teoría de partículas. Se pidió mayor número de puntos de vista a la gravedad cuántica, entre ellos se debe prestar más atención a la gravedad cuántica de lazos. A diferencia de la teoría de cuerdas y supercuerdas en las que la gravedad es un campo entre infinitos lo que pretende la gravedad cuántica es cuantizar la relatividad general. Una manera de hacerlo es utilizando lazos en la variedad base  $X$  de un fibrado principal con una conexión de Ehresmann  $\omega$ . Con lo que la holonomía juega un papel importantísimo en la teoría. Una mayor controversia y construcción de nuevas teorías contribuye al progreso de la ciencia.

En este capítulo estudiaremos las holonomías en geometrías de Cartan y su relación con las de Ehresmann las cuales pueden ser de importante ayuda en el desarrollo de la teoría de la gravedad cuántica de lazos. De esta manera este capítulo nos sirve para encuadrar, en el contexto citado anteriormente, posibles líneas de investigación con las que se puede continuar después de la tesis.

Llamaremos  $H_\omega(\alpha)$  a la holonomía del lazo  $\alpha$  en la conexión  $\omega$ , y se define la aplicación de holonomía  $H_\omega : C(x) \rightarrow G$  que es un homomorfismo de grupos.

Vamos a considerar el conjunto de conexiones módulo el grupo gauge,

que denotaremos por  $\mathcal{A}/Gau(P)$ . Una teoría de gauge puede ser definida como un teoría de campos cuyo espacio de configuración es  $\mathcal{A}/Gau(P)$ , es decir que los estados son parametrizados por las clases de equivalencia de conexiones en un fibrado principal, es decir por los puntos de  $\mathcal{A}/Gau(P)$ .

A partir de aquí consideraremos que el grupo de estructura será  $U(n)$  o  $SU(n)$  y definimos las funciones de Wilson, las cuales desempeñan un papel muy importante en la cuantización de la relatividad general, de la siguiente manera

$$T_\alpha : \mathcal{A}/Gau(P) \rightarrow \mathbb{C}$$

definidas por  $T_\alpha([\omega]) := \frac{1}{N} Tr(H_\omega(\alpha))$  donde  $Tr$  es el operador traza en la representación del grupo  $G$ . Las funciones de Wilson son gauge-invariantes.

Si consideramos las combinaciones lineales de productos de funciones de Wilson conseguimos un  $*$ -álgebra conmutativa con unidad denotada por  $hol(X, G)$  con la aplicación  $T_\alpha^* = T_{\alpha^{-1}}$ . Haciendo la completitud de este álgebra con la topología inducida por la norma  $|||_\infty$  obtenemos una  $C^*$ -álgebra conmutativa con unidad llamada  $C^*$ -álgebra de holonomía y denotada por  $Hol(X, G)$ , la cual depende únicamente de  $X$  y  $G$ , pero no del fibrado principal  $P$ .

Un carácter en  $Hol(X, G)$ , es un homomorfismo no nulo del álgebra  $Hol(X, G)$  a  $\mathbb{C}$ . El espectro del álgebra es el conjunto de todos los caracteres, y se denotará por  $\overline{\mathcal{A}/Gau(P)}$ .

Se obtiene que el  $\mathcal{A}/Gau(P) := espec(Hol(X, G)) \simeq Hom(L_*(X), G)/Ad_G$ . Así tenemos que cada conexión en un fibrado principal sobre  $X$  con grupo  $G$  corresponde con un punto de  $\overline{\mathcal{A}/Gau(P)}$ .

Tenemos el isomorfismo de Gelfand  $\hat{\cdot} : Hol(X, G) \rightarrow \mathcal{C}(\overline{\mathcal{A}/Gau(P)})$  definido por  $\hat{f}(\bar{A}) := \bar{A}(f)$  que nos indica que  $Hol(X, G)$  es isométricamente isomorfo a la  $C^*$ -álgebra conmutativa con unidad formada por las funciones continuas en  $\overline{\mathcal{A}/Gau(P)}$  con valores en  $\mathbb{C}$ . Con esta identificación existe una biyección entre los funcionales lineales positivos y las medidas de probabilidad en  $\overline{\mathcal{A}/Gau(P)}$ . Finalmente para cada medida de probabilidad en  $\overline{\mathcal{A}/Gau(P)}$  uno puede asociar a cada  $f \in Hol(X, G)$  el elemento  $M_{\hat{f}}$  donde  $M_{\hat{f}}$  es el operador multiplicación en  $L^2(\overline{\mathcal{A}/Gau(P)}, \mu)$  definido por  $M_{\hat{f}}\psi := \hat{f}\psi$  para cada  $f \in Hol(X, G)$  y  $\psi \in L^2(\overline{\mathcal{A}/Gau(P)}, \mu)$ .

$\overline{\mathcal{A}/Gau(P)}$  es un espacio Hausdorff compacto y con dimensión infinita la cual se puede equipar con una medida de probabilidad  $\mu_0$ , llamada medida uniforme y que es invariante bajo difeomorfismos. Asociada a esta medida existe una y solo una representación de la  $C^*$ -álgebra  $Hol(X, G)$  apoyada en el espacio de Hilbert  $L^2(\overline{\mathcal{A}/Gau(P)}, \mu_0)$ . Los vectores normalizados de este

espacio son los estados cuánticos y la representación de la parte real de las funciones de Wilson son los observables en la teoría cuántica.

Rovelli y Smolin definieron lo que llamaron la transformada de lazos, con ello consiguieron describir los estados como funciones de lazos en vez de funciones de conexiones generalizadas, cuya importancia reside en que es más sencillo encontrar difeomorfismos invariantes de funciones de lazos que difeomorfismos invariantes de funciones de conexiones.

Matemáticamente existen varios problemas que se pueden afrontar, como son la construcción de medidas (invariantes bajo difeomorfismos), lo que lleva al producto interno de estados, estudiar la transformada de lazos desde un punto de vista riguroso, ampliar el estudio para un grupo de Lie  $G$  cualquiera o con alguna condición.

Al final del capítulo al estudiar la comparación entre el concepto clásico de holonomía y el de las geometrías de Cartan, se ha obtenido como resultado colateral una descripción de las conexiones de Ehresmann que son reducibles a un subfibrado.

## 6.1. Desarrollo de una curva en las geometrías de Cartan

Necesitamos primero un resultado que es el teorema de Frobenius pero en términos de formas diferenciables.

**Lema 6.1.1.** *Sea  $\omega$  una 1-forma diferenciable en  $X$  con valores en un espacio vectorial  $V$ . Asumamos que  $n = \dim \ker(\omega_x)$  es constante para cada  $x \in M$ . Entonces  $\mathcal{D} = \ker \omega_x$  es una distribución. Además  $\mathcal{D}$  es integrable si y solo si  $d\omega(X, Y) = 0$  cuando  $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ .*

*Demostración.* Se puede ver en [20]. □

**Teorema 6.1.2.** *Sea  $G$  un grupo de Lie con álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ . Sea  $\omega$  una 1-forma con valores en  $\mathcal{G}$  en una variedad diferenciable  $M$  satisfaciendo la ecuación  $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$ . Entonces, para cada punto  $p \in M$  existe un entorno  $U$  de  $p$  y una aplicación diferenciable  $f : U \rightarrow G$  que verifica que  $f^*(\omega_G) = \omega$ .*

*Demostración.* Sea  $\pi_G : G \times M \rightarrow G$  y  $\pi_M : G \times M \rightarrow M$  las proyecciones canónicas. Consideremos  $\Omega = \pi_M^*(\omega) - \pi_G^*(\omega_G)$  y sea  $\mathcal{D} = \ker \Omega$ . Veamos que es una distribución aplicando el lema anterior, para ello veremos que tiene rango constante.

Fijemos un punto  $(p, g) \in M \times G$ . Vamos a ver que

$$\pi_{M^*(g,p)}|_{\mathcal{D}_{(g,p)}} : \mathcal{D}_{(g,p)} \longrightarrow T_p(M)$$

es un isomorfismo. Así tendremos que  $\mathcal{D}$  tiene rango constante igual a  $\dim(M)$ . Si  $\pi_{M^*}(v, w) = 0$  para algún  $(v, w) \in \mathcal{D}_{(g,p)} = \{(v, w) \in T_p(M) \times T_g(G) / \omega(w) = \omega_G(w)\}$ . De esta manera tenemos que  $\pi_{M^*}(v, w) = 0$  entonces  $v = 0$ , lo que implica que  $\omega_G(w) = 0$  por lo que  $w = 0$ . Por tanto  $(v, w) = 0$  y la función  $\pi_{M^*(g,p)}|_{\mathcal{D}_{(g,p)}}$  es inyectiva. La función es suprayectiva ya que si  $v \in T_p(M)$  entonces  $(v, \omega_G^{-1}(\omega(v))) \in \mathcal{D}_{(g,p)}$ .

Veamos ahora que es  $\mathcal{D}$  es integrable. Vamos a calcular la derivada exterior de  $\Omega$

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\pi_M^*(\omega) - d\pi_G^*(\omega_G) = \pi_M^*(d\omega) - \pi_G^*(d\omega_G) = \\ &= \pi_M^*\left(-\frac{1}{2}[\omega, \omega]\right) - \pi_G^*\left(\frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G]\right) = \frac{1}{2}[\pi_M^*\omega, \pi_M^*\omega] + \frac{1}{2}[\pi_G^*\omega_G, \pi_G^*\omega_G] \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo  $\pi_M^*(\omega) = \Omega + \pi_G^*(\omega_G)$  tenemos que

$$d\Omega = -\frac{1}{2}[\pi_G^*\omega_G, \Omega] - \frac{1}{2}[\Omega, \pi_G^*\omega_G] - \frac{1}{2}[\Omega, \Omega]$$

Así  $d\Omega(X, Y) = 0$  cuando  $\Omega(X) = \Omega(Y) = 0$  y por el lema anterior tenemos que  $\ker\Omega$  es integrable.

Finalmente construiremos para cada  $p$  un entorno  $U$  de  $p$  en  $M$  y una función  $f : U \rightarrow G$  que cumpla que  $f^*(\omega_G) = \omega|_U$ . Vamos a considerar la hoja  $\mathcal{L}$  a través de  $(p, g) \in M \times G$ .

Tenemos el isomorfismo que hemos visto anteriormente  $\pi_{M^*} : \mathcal{D}_{(g,p)} \longrightarrow T_p(M)$ , por lo que  $\pi_{M|_{\mathcal{L}}}$  es un difeomorfismo local de un entorno de  $(p, g)$  a un entorno  $U$  de  $p \in M$ . Sea  $F : U \rightarrow \mathcal{L}$  la aplicación inversa. Como  $\pi_M F = id_U$ ,  $F$  debe tener la forma  $F(p) = (p, f(p))$  para alguna función  $f : U \rightarrow G$ . Ahora se tiene que  $F^*(\Omega) = \Omega F_* = 0$  ya que la imagen de  $F$  es tangente a la distribución la cual anula a  $\Omega$ . Así tenemos que

$$0 = F^*(\Omega) = F^*(\pi_M^*(\omega)) - F^*(\pi_G^*(\omega_G)) = (\pi_X F)^*\omega - (\pi_G F)^*\omega_G = \omega - f^*(\omega_G)$$

Con lo que  $\omega|_U = f^*(\omega_G)$ . □

**Lema 6.1.3.** Sea  $f_1, f_2 : M \rightarrow G$  y sea  $h(x) = f_1(x)f_2(x)^{-1}$ . Entonces

$$h^*\omega_G = Ad(f_2(x))\{f_1^*\omega_G - f_2^*\omega_G\}$$

*Demostración.* Se puede ver en [20]. □

**Proposición 6.1.4.** *Sea  $M$  una variedad conexa y sea  $f_1, f_2 : M \rightarrow G$  dos funciones que cumplen que  $f_1^*(\omega_G) = f_2^*(\omega_G)$ . Entonces existe un elemento  $g \in G$  tal que  $f_2(x) = gf_1(x)$  para todo  $x \in M$ .*

*Demostración.* Consideremos la aplicación  $h : M \rightarrow G$  dada por  $h(x) = f_2(x)f_1(x)^{-1}$ . Por el lema anterior tenemos que

$$h^*\omega_G = Ad(f_2(x))\{f_1^*\omega_G - f_2^*\omega_G\}$$

la cual se anula por la hipótesis. Teniendo en cuenta que  $h^*(\omega_G) = \omega_G h_*$ , vemos que  $h_* : T(M) \rightarrow T(G)$  induce la aplicación cero en cada espacio tangente. Con lo cual se sigue que  $h$  es la función constante. Luego  $h(x) = g$  para todo  $x \in M$  donde  $g$  es algún elemento de  $G$ . Con lo cual  $f_2(x) = g \cdot f_1(x)$  para todo  $x \in M$ .  $\square$

Vamos a considerar ahora que  $M = [a, b]$  de manera que se cumple la ecuación de estructura para cualquier 1-forma, ya que en una variedad de dimensión 1 no existen 2-formas que sean distintas de cero.

**Teorema 6.1.5.** *Sea  $\omega$  una 1-forma diferenciable con valores en  $\mathcal{G}$  en  $I = [a, b]$ . Entonces existe una única aplicación  $f : I \rightarrow G$  con  $f(a) = g$  y  $f^*(\omega_G) = \omega$ .*

*Demostración.* Por la proposición 6.1.4 si  $f$  existe es única. Por el teorema 6.1.2 cada punto se halla en un intervalo en el cual existe una aplicación  $f : U \rightarrow G$  que cumple que  $f^*(\omega_G) = \omega|_U$ . Como  $I$  es compacto existe un número finito de intervalos abiertos  $U_i, 1 \leq i \leq n$  en los que existe una  $f_i : U_i \rightarrow G$  cumpliendo  $f_i^*(\omega_G) = \omega|_{U_i}$ . Vamos a asumir que  $U_i \cap U_j = \emptyset$  a menos que  $|i - j| \leq 1$  y que  $t_0 = a \in U_1$ . Elegimos  $t_i \in U_i \cap U_{i+1}$  para  $1 \leq i \leq n - 1$ . Inductivamente elegimos  $f_i : U_i \rightarrow G$  tales que  $f_1(a) = g$ ,  $f_{i+1}(t_i) = f_i(t_i)$  para  $1 \leq i \leq n - 1$ . Por la unicidad tenemos que  $f_{i+1} = f_i$  en  $U_i \cap U_{i+1}$ . Así podemos unir estas funciones juntas y definir  $f(t) = f_i(t)$  para  $t \in U_i$ , y obtener una función  $f : I \rightarrow G$ . Claramente  $f(a) = g$  y  $f^*(\omega_G) = \omega$ .  $\square$

**Definición 6.1.6.** *En las condiciones del teorema anterior, la única aplicación  $f : I \rightarrow G$  satisfaciendo  $f(a) = g$  y  $f^*(\omega_G) = \omega$  es llamado el desarrollo de  $\omega$  en  $G$  a través de  $I$  comenzando en  $g$ .*

**Definición 6.1.7.** *Sea  $I=[a,b]$  y  $M$  una variedad de cualquier dimensión, y sea  $\omega$  una 1-forma diferenciable en  $M$  con valores en  $\mathcal{G}$ . Dado un camino  $\sigma : I \rightarrow M$  con  $\sigma(a) = p$  y  $\sigma(b) = q$ . Sea la 1-forma en  $I$ ,  $\sigma^*(\omega)$  con valores en  $\mathcal{G}$  y consideremos el desarrollo  $\tilde{\sigma} : I \rightarrow G$  que cumple que  $\tilde{\sigma}(a) = g$  y  $\tilde{\sigma}^*(\omega_G) = \sigma^*(\omega)$ . Llamaremos a  $\tilde{\sigma}$  el desarrollo de  $\omega$  a lo largo de  $\sigma$  empezando en  $g$ .*

## 6.2. Orientación en las geometrías de Cartan

Consideremos  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan modelada en  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ .

**Lema 6.2.1.** *Sea  $\lambda : (I, a, b) \rightarrow (P, p, q)$  un camino en  $P$ . Sea*

1.  $\tilde{\lambda} : (I, a) \rightarrow (G, e)$  el desarrollo de  $\lambda$  a lo largo de  $\Psi$ .
2.  $\hat{\lambda} : (I, a) \rightarrow (Gl(\mathcal{G}), e)$  el desarrollo de  $\lambda$  a lo largo de  $ad\Psi$ .

*Entonces se cumple que  $\hat{\lambda}(t) = Ad(\tilde{\lambda}(t))$ .*

*Demostración.* Veamos primero que  $Ad^*\omega_{Gl(\mathcal{G})} = Ad_{*e}\omega_G$ ,

$$\begin{aligned} (Ad^*\omega_{Gl(\mathcal{G})})(v) &= \omega_{Gl(\mathcal{G})}(Ad_{*g}(v)) = L_{Ad(g)^{-1}*}(Ad_{*g}(v)) = \\ &= Ad_{*e}(L_{g^{-1}*}(v)) = Ad_{*g}(\omega_G(v)) \end{aligned}$$

donde las igualdades son debidas a la definición de la forma canónica excepto la tercera que viene de la conmutatividad del diagrama siguiente ya que  $Ad$  es un homomorfismo de grupos de Lie.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & Gl(\mathcal{G}) \\ L_{g^{-1}} \downarrow & & \downarrow L_{Ad(g)^{-1}} \\ G & \xrightarrow{Ad} & Gl(\mathcal{G}) \end{array}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} Ad(\tilde{\lambda})^*\omega_{Gl(\mathcal{G})} &= \tilde{\lambda}^*Ad^*\omega_{Gl(\mathcal{G})} = \tilde{\lambda}^*Ad_{*e}\omega_G = Ad_{*e}(\tilde{\lambda}^*\omega_G) = \\ &= Ad_{*e}(\lambda^*\Psi) = \lambda^*Ad_{*e}(\Psi) = \lambda^*ad\Psi = \hat{\lambda}^*\omega_{Gl(\mathcal{G})} \end{aligned}$$

Como  $\hat{\lambda}(0) = e = Ad(\tilde{\lambda}(0))$ , se sigue que  $Ad(\tilde{\lambda}) = \hat{\lambda}$ . □

**Definición 6.2.2.** *Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  sobre el modelo geométrico  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ . Sea  $p \in P$  un punto fijo. Un elemento  $h \in H$  se dice que preserva la orientación con respecto a  $p$  si existe un camino  $\lambda : (I, a, b) \rightarrow (P, p, ph)$  que une  $p$  con  $ph$  cuyo desarrollo a lo largo de  $ad\Psi$  produce un camino  $\hat{\lambda}$  de  $Gl(\mathcal{G})$  uniendo la identidad  $e$  con  $Ad(h)$ . El subconjunto de  $H$  formado por los elementos que preservan geoméricamente la orientación se denomina  $H_{or}$ .*

**Lema 6.2.3.** Sea  $p, q \in P$  y sea  $\sigma$  un camino uniendo  $p$  con  $q$ , y  $\hat{\sigma} : (I, b) \rightarrow (Gl(\mathcal{G}, e))$  el desarrollo a lo largo de  $ad\Psi$ . Se tiene que para cualquier  $h \in H$  el desarrollo de  $R_h\sigma$  en  $Gl(\mathcal{G})$ , a lo largo de  $ad\Psi$ , y empezando en la identidad es la composición

$$(I, 0) \longrightarrow (Gl(\mathcal{G}, e)) \xrightarrow{a_{Ad(h)^{-1}}} (Gl(\mathcal{G}, e))$$

*Demostración.* Calculamos

$$\begin{aligned} (a_{Ad(h)^{-1}} \circ \hat{\sigma})^* \omega_{Gl(\mathcal{G})} &= \hat{\sigma}^*(a_{Ad(h)^{-1}})^* \omega_{Gl(\mathcal{G})} = \hat{\sigma}^*(Ad(Ad(h)^{-1})) \omega_{Gl(\mathcal{G})} = \\ &= Ad(Ad(h^{-1})) \sigma^* \omega_{Gl(\mathcal{G})} = Ad(Ad(h^{-1})) \hat{\sigma}^*(ad\Psi) = \sigma^*(Ad(Ad(h^{-1})) ad\Psi) = \\ &= \sigma^*(ad(Ad(h^{-1})\Psi)) = \sigma^*(ad(R_h^*\Psi)) = \sigma^* R_h^* ad(\Psi) = (R_h\sigma)^* ad(\Psi) \end{aligned}$$

Por la unicidad del teorema fundamental del cálculo se tiene que  $a_{Ad(h)^{-1}} \circ \hat{\sigma}$  es el desarrollo de  $R_h\sigma$  a lo largo de  $ad\Psi$ .  $\square$

**Proposición 6.2.4.** Si  $P$  es conexo, el subconjunto  $H_{or} \subset H$  de elementos que preservan la orientación geométrica no depende de la elección de  $p \in P$ .

*Demostración.* Fijemos  $p, q \in P$ . Sea  $h \in H_{or}$  preserve la orientación geométrica respecto de  $p$ . Veamos que también preserve la orientación geométrica respecto de  $q$ .

Sea  $\lambda$  un camino uniendo  $p$  y  $ph$  y sea  $\sigma$  un camino uniendo  $p$  y  $q$ , que existe por ser  $P$  conexo. Denotaremos los desarrollos de  $\lambda$  y  $\sigma$  en  $Gl(\mathcal{G})$  a lo largo de  $ad\Psi$  y empezando en la identidad por  $\hat{\lambda} : (I, b, c) \rightarrow (Gl(\mathcal{G}), e, Ad(h))$  y  $\hat{\sigma} : (I, b, c) \rightarrow (Gl(\mathcal{G}), e, Ad(l))$  respectivamente.

Por el lema 6.2.3 el desarrollo de  $R_h\sigma$ , a lo largo de  $ad\Psi$  empezando en la identidad y terminando en  $a_{Ad(h)^{-1}} Ad(l) = Ad(h^{-1}lh)$ .

Usando esto se ve que el camino  $\sigma^{-1} \star \lambda \star (R_h\sigma)$ , que une  $q$  con  $qh$ , desarrolla a lo largo de  $ad\Psi$  al camino en  $Gl(\mathcal{G})$  uniendo  $e$  con  $Ad(l^{-1})Ad(h)Ad(h^{-1}lh) = Ad(h)$ , con lo que  $h$  preserva la orientación geométrica con respecto a  $q$ .  $\square$

**Proposición 6.2.5.** Si  $P$  es conexo se tiene que  $H_e \subset H_{or} \triangleleft H$ .

*Demostración.* Si  $h \in H_e$  entonces existe un camino  $h(t)$  en  $H$  con  $h(0) = e$  y  $h(1) = h$ . Este camino produce un camino  $ph(t)$  en  $P$  uniendo  $p$  y  $ph$ . Como este camino pertenece a una fibra en  $pH$ , donde  $\Psi$  restringe a la forma canónica en  $H$ , se sigue que  $ph(t)$  desarrolla a  $h(t)$  en  $H$  y también a  $Ad(h(t))$  en  $Gl(\mathcal{G})$ . Así une  $e$  con  $Ad(h)$  con lo que  $h \in H_{or}$ .

Veamos que es un subgrupo de  $H$ . Si  $h_1, h_2 \in H_{or}$ , entonces existen caminos  $\lambda_i$  uniendo  $p$  a  $ph_i$  cuyos desarrollos  $\hat{\lambda}_i$  en  $Gl(\mathcal{G})$  a lo largo de  $ad\Psi$

uniendo la identidad con  $Ad(h_i)$  con  $i=1,2$ . Por el lema 6.2.3,  $R_{h_2}$  desarrolla a  $a_{Ad(h_2)^{-1}}\hat{\lambda}_1$ .

Así el camino  $\lambda_2 \star (R_{h_2}\lambda_1)$  une  $p$  a  $ph_1h_2$  y desarrolla a lo largo de  $ad\Psi$  al camino  $\hat{\lambda}_2 \star Ad(h_2)a_{Ad(h_2)^{-1}}\lambda_1$  en  $Gl(\mathcal{G})$  uniendo  $e$  con  $Ad(h_1h_2)$ . Así  $h_1h_2 \in H_{or}$ .

Si  $h \in h_{or}$  entonces existe un camino  $\lambda$  uniendo  $p$  a  $ph$  cuyo desarrollo  $\hat{\lambda}$  en  $Gl(\mathcal{G})$  a lo largo de  $ad\Psi$ , une la identidad con  $Ad(h)$ . Entonces  $\lambda^{-1}$  es un camino uniendo  $q = ph$  con  $qh^{-1} = p$  y el desarrollo de  $\lambda^{-1}$  a lo largo de  $ad\Psi$ , empezando en  $e$  en  $Gl(\mathcal{G})$  es  $Ad(h)^{-1}\hat{\lambda}^{-1}$ , el cual termina en  $Ad(h^{-1})$ . Así  $h^{-1} \in H_{or}$ .

Falta ver que es normal, para ello sea  $h \in H_{or}$  y  $k \in H$ . Elegimos el camino  $\lambda$  uniendo  $p$  a  $ph$ , así desarrolla a lo largo de  $ad\Psi$  al camino  $\hat{\lambda}$  en  $Gl(\mathcal{G})$  uniendo  $e$  a  $Ad(h)$ . Por el lema 6.2.3,  $R_k\lambda$ , el cual une  $pk$  a  $phk = pk(k^{-1}hk)$  desarrolla a lo largo de  $ad\Psi$  a la composición

$$(I, 0) \longrightarrow (Gl(\mathcal{G}, e)) \xrightarrow{a_{Ad(k)^{-1}}} (Gl(\mathcal{G}, e))$$

la cual termina en  $a_{Ad(k)^{-1}}Ad(h) = Ad(k^{-1}hk)$ . Por tanto  $k^{-1}hk \in H_{or}$  y el subgrupo  $H_{or}$  es normal.  $\square$

En general es difícil describir el subgrupo  $H_{or}$ , con más precisión que el dado en la proposición anterior, pero el siguiente resultado nos da un importante caso en el que  $H_{or} = H_e$

**Proposición 6.2.6.** *Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  sobre el modelo geométrico  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ . Sea  $G$  un grupo de Lie con álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ , conteniendo a  $H$  como subgrupo. Si se cumple*

1.  $G_e \cap H = H_e$ .
2.  $Ad_g : G \rightarrow Gl(\mathcal{G})$  es inyectiva.

entonces  $H_{or} = H_e$

*Demostración.* Por la proposición anterior sólo falta demostrar que  $H_{or} \subset H_e$ . Sea  $h \in H_{or}$  y fijemos  $p$ , entonces existe un camino uniendo  $p$  a  $ph$  cuyo desarrollo a lo largo de  $ad\Psi$  produce un camino  $\hat{\lambda}$  en  $Gl(\mathcal{G})$  uniendo la identidad con  $Ad_g(h)$ . Se puede también desarrollar  $\lambda$  a lo largo de  $\Psi$ , para producir un camino  $\tilde{\lambda}$  en  $G$  uniendo la identidad con  $g \in G$ . Por el lema 6.2.1, se tiene que  $Ad_g(\tilde{\lambda}) = \hat{\lambda}$ , en particular  $Ad_g(g) = Ad_g(h)$ . Como  $Ad_g$  es inyectiva tenemos que  $g = h$ , y se sigue que  $h \in G_e \cap H = H_e$ . Por lo tanto  $H_{or} = H_e$ .  $\square$

**Definición 6.2.7.** Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  sobre el modelo geométrico  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ . Se dice que  $(P, \Psi)$  es geoméricamente orientada si  $H_{or} = H$ . El cubrimiento principal  $H_{or} = \frac{P}{H_{or}} \rightarrow X$  con grupo  $\frac{H}{H_{or}}$ , es llamado cubrimiento de orientación geométrica de  $X$ .

$(P, \Psi)$  es llamado orientable geoméricamente si existe una reducción del fibrado  $P \rightarrow X$  al subgrupo  $H_{or}$ . Una orientación geométrica es la elección de una de esas reducciones.

Vamos a definir el desarrollo de una curva  $\sigma : (I, a, b) \rightarrow X$  a  $G/H$ , siendo  $G/H$  una geometría de Klein, es decir  $H$  es un subgrupo cerrado de  $G$  y  $G/H$  es conexo

**Lema 6.2.8.** Sea  $f_1, f_2 : M \rightarrow G$  y sea  $h(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ , donde  $G$  es un grupo de Lie y  $M$  una variedad diferenciable. Entonces se cumple que

$$h^*\omega_G = Ad(f_2(x)^{-1})f_1^*\omega_G + f_2^*\omega_G$$

*Demostración.* Consideramos la siguiente descomposición

$$M \xrightarrow{\Delta} M \times M \xrightarrow{f_1 \times f_2} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

Entonces

$$\begin{aligned} h^*\omega_G &= (\mu \circ (f_1 \times f_2) \circ \Delta)^*\omega_G = ((f_1 \times f_2)\Delta)\mu^*\omega_G = \\ &= ((f_1 \times f_2)\Delta)\pi_1^*(Ad(f_2^{-1})\omega_G) + \pi_2^*\omega_G = \\ &= (\pi_1(f_1 \times f_2)\Delta)^*Ad(f_2^{-1})\omega_G + (\pi_2(f_1 \times f_2)\Delta)^*\omega_G = \\ &= f_1^*Ad(f_2^{-1})\omega_G + f_2^*\omega_G \end{aligned}$$

□

**Lema 6.2.9.** Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  modelada sobre una geometría de Klein  $(G, H)$ . Sean  $\sigma : (I, a, b) \rightarrow (P, p, q)$  y  $h : I \rightarrow H$  dos aplicaciones diferenciables. Entonces  $(\widetilde{\sigma h}) = \widetilde{\sigma}h$  donde el desarrollo  $(\widetilde{\sigma h})$  empieza en  $h(a)$  y el desarrollo  $\widetilde{\sigma}$  empieza en  $e \in G$ .

*Demostración.* Nótese que  $\widetilde{\sigma h}(a) = h(a) = \widetilde{\sigma}(a)h(a)$ , por lo que las dos curvas en  $G$  empiezan en el mismo sitio. Falta ver que  $(\widetilde{\sigma h})^*\omega_G = (\widetilde{\sigma}h)^*\omega_G$ .

Por el lema 6.2.8 tenemos que

$$(\widetilde{\sigma}h)^*\omega_G = Ad(h^{-1})\widetilde{\sigma}^*\omega_G + h^*\omega_G$$

Por otro lado tenemos por definición de levantamiento que  $(\widetilde{\sigma h})^*\omega_G = (\sigma h)^*\Psi$ . No podemos utilizar el lema anterior en este caso porque  $\sigma h$  toma

valores en  $P$ , el cual no es un grupo de Lie. Sin embargo, podemos hacer un cálculo similar al del lema 6.2.8 factorizando  $\sigma h$  como

$$I \xrightarrow{\Delta} I \times I \xrightarrow{\sigma \times h} P \times H \xrightarrow{\mu}$$

De esta forma tendremos

$$\begin{aligned} (\sigma h)^* \Psi &= (\mu \circ (\sigma \times h) \circ \Delta)^* \Psi = ((\sigma \times h) \circ \Delta)^* \mu^* \Psi = \\ &= ((\sigma \times h) \circ \Delta)^* (Ad(h^{-1})\pi_P^* \Psi + \pi_H^* \omega_H) = \\ &= Ad(h^{-1})(\pi_P \circ (\sigma \times h) \circ \Delta)^* \Psi + \pi_H \circ (\sigma \times h) \circ \Delta)^* \omega_H = \\ &= Ad(h^{-1})\sigma^* \Psi + h^* \omega_H = Ad(h^{-1})\tilde{\sigma}^* \omega_G + h^* \omega_G \end{aligned}$$

Por lo tanto  $(\tilde{\sigma h})^* \omega_G = (\tilde{\sigma} h)^* \omega_G$  y así  $(\tilde{\sigma h}) = \tilde{\sigma} h$ . □

Una consecuencia de este resultado es que podemos extender la noción de desarrollo de caminos en  $P$  a desarrollos de caminos en  $X$ . Si un camino en  $P$  desarrolla a otro en  $G$ , un camino en  $X$  desarrolla a un camino en el espacio  $\frac{G}{H}$ , la manera de hacerlo aparece en el siguiente resultado.

**Proposición 6.2.10.** *Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  modelada sobre una geometría de Klein  $(G, H)$ . Sea  $\sigma : (I, a, b) \rightarrow (X, x, y)$ . Sea  $\hat{\sigma} : (I, a, b) \rightarrow (P, p, q)$  cualquier levantamiento en  $P$  y sea  $\tilde{\sigma} : (I, a) \rightarrow (G, e)$  el desarrollo en  $G$ . Entonces su imagen  $\tilde{\sigma} = \pi \tilde{\sigma} : (I, a) \rightarrow (\frac{G}{H}, e)$  en  $\frac{G}{H}$  es una curva independiente de la elección del levantamiento  $\hat{\sigma}$ .*

*Demostración.* Si  $\hat{\sigma} : (I, a, b) \rightarrow (X, x, y)$  es un levantamiento de  $\sigma$  desarrollando a  $\tilde{\sigma} : (I, a) \rightarrow (G, e)$ , entonces cualquier otro levantamiento tiene la forma  $\hat{\sigma} h$  para alguna aplicación  $h : I \rightarrow H$  y por el lema 6.2.9  $\hat{\sigma} h$  desarrolla a  $\tilde{\sigma}$ . Como  $\pi \tilde{\sigma} h = \pi \tilde{\sigma}$  los dos desarrollos en  $G/H$  son el mismo. □

**Definición 6.2.11.** *Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan en  $X$  modelada sobre una geometría de Klein  $(G, H)$ . Sea  $\sigma : (I, a, b) \rightarrow (X, x, y)$ . Entonces el desarrollo de  $\sigma$  en  $G/H$  es la proyección a  $G/H$  del desarrollo en  $G$  de cualquier levantamiento a  $P$  de  $\sigma$ .*

## 6.3. Holonomía de Cartan

**Proposición 6.3.1.** *Sea  $P$  una variedad diferencial y sean  $\sigma_0, \sigma_1 : (I, a, b) \rightarrow (P, p, q)$  dos caminos homotópicos. Si  $\omega$  es una 1-forma diferencial en  $P$  con valores en  $\mathcal{G}$  que satisface la ecuación de estructura, entonces sus desarrollos empezando en  $g$  a lo largo de  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$  terminan en el mismo punto.*

*Demostración.* Sea  $h : (I \times I, a \times I, b \times I \rightarrow (P, p, q)$  la homotopía uniendo  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$ . Consideremos  $h^*\omega$  la 1-forma diferencial en  $I \times I$  con valores en  $\mathcal{G}$  que satisface la ecuación de estructura, ya que  $d(h^*\omega) + \frac{1}{2}[h^*\omega, h^*\omega] = h^*(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = 0$ . Ahora, por el teorema 6.1.2, tenemos que cada punto de  $I \times I$  tiene un entorno cuadrado en el cual  $h^*\omega = f^*\omega_G$  con  $f$  una aplicación en ese entorno con valores en  $G$ . Dado un punto  $t \in I$  el conjunto compacto  $I \times t$  esta cubierto por un número finito de intervalos abiertos y por un argumento similar al hecho en la prueba del teorema 6.1.2, tenemos que existe un conjunto abierto de la forma  $I \times U$  con  $U$  un intervalo abierto en el que se cumple  $h^*\omega = f^*\omega_G$  para alguna función  $f$  definida en  $I \times U$  y con valores en  $G$ . De manera similar al teorema anterior podemos unir estas funciones y obtener finalmente una función  $H : I \times I \rightarrow G$  tal que  $H(a, a) = g$  y  $h^*\omega = H^*\omega_G$ . Ahora tenemos que  $h(b, t) = q$  es constante para  $t \in I$  y se sigue que  $h^*\omega = H^*\omega_G$  se anula a lo largo del lado derecho del  $I \times I$  y así  $H$  es también constante a lo largo de ese lado derecho. En particular  $H(b, a) = H(b, b)$  y así los desarrollos de  $\omega$  a lo largo de  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$  terminan en el mismo punto. □

Vamos a considerar, como antes, una variedad diferenciable  $P$  y una 1-forma diferenciable en  $P$  con valores en  $\mathcal{G}$  que satisface la ecuación de estructura. Consideramos  $I = [0, 1]$ , un punto  $p \in P$  y un lazo en  $p$ ,  $\lambda : I \rightarrow P$ . De acuerdo con la proposición 6.3.1, podemos desarrollar  $\omega$  a lo largo de  $\lambda$  comenzando en  $e \in G$  y el punto final  $\Theta(\lambda) = \tilde{\lambda}(1)$  será un punto de  $G$  que es independiente del lazo elegido dentro de la misma clase de homotopía. De esta manera el desarrollo nos da una función bien definida  $\Theta : \pi_1(P, p) \rightarrow G$ , que es un homomorfismo de grupos ya que se tiene que  $\Theta(\lambda_1 \star \lambda_2) = (\tilde{\lambda}_1 \star \tilde{\lambda}_2)(1) = \Theta(\lambda_1)\tilde{\lambda}_2(1) = \Theta(\lambda_1)\Theta(\lambda_2)$  donde la traslación por la izquierda  $\Theta(\lambda_1)\tilde{\lambda}_2$  es el desarrollo de  $\lambda_2$  empezando en  $\Theta(\lambda_1)$ .

**Proposición 6.3.2.** *Se tiene que si existe una función  $f : P \rightarrow G$  que cumple que  $f^*(\omega_G) = \omega$  entonces el homomorfismo  $\Theta$  es trivial.*

*Demostración.* Sea  $\omega = f^*\omega_G$ , donde  $f : P \rightarrow G$  con  $f(p) = g$ . Podemos reemplazar  $f$  por  $L_{g^{-1}}f$  si fuese necesario y podemos suponer sin pérdida de generalidad que la función  $f : P \rightarrow G$  cumple que  $f(p) = e$ . Así para cualquier lazo  $\lambda : I \rightarrow P$  tenemos que  $(f\lambda)^*\omega_G = \lambda^*f^*\omega_G = \lambda^*\omega$ , luego el desarrollo de  $\omega$  a lo largo de  $\lambda$  es justamente  $f\lambda$  y así  $f\lambda(1) = f(p) = e$ , para cualquier lazo en  $p$ . Así tenemos que  $\Theta([\lambda]) = e$ . □

**Definición 6.3.3.** *Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan sobre un modelo geométrico  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  con  $(G, H)$  una geometría de Klein. Sea  $x \in X$  y sea  $\sigma : I =$*

$[0, 1] \rightarrow X$  un lazo en  $x$ , de manera que se levanta a un lazo en  $P$ ,  $\hat{\sigma} : I \rightarrow P$ . Consideremos el desarrollo  $\tilde{\sigma} : I \rightarrow G$  con  $\tilde{\sigma}(0) = e$  y  $\tilde{\sigma}^* \omega_G = \hat{\sigma}^* \Psi$ . Entonces las imágenes  $\tilde{\sigma}(1) = g$  forman un grupo,  $\Phi(p)$ , que llamaremos grupo de holonomía de Cartan con respecto a  $p$ .

**Proposición 6.3.4.** *La holonomía de un lazo en  $X$  es independiente de la elección del levantamiento a  $P$ .*

*Demostración.* Sea  $\sigma : I \rightarrow X$  un lazo y consideremos dos levantamientos en  $P$  que denotaremos por  $\hat{\sigma}_1$  y  $\hat{\sigma}_2$  con  $\hat{\sigma}_1(0) = \hat{\sigma}_2(1) = p$  con  $\pi(p) = x$ . Como  $\hat{\sigma}_1$  y  $\hat{\sigma}_2$  están en la misma fibra existe  $h : I \rightarrow H$  que cumple que  $\hat{\sigma}_1(t) = \hat{\sigma}_2(t)h(t)$  y  $h(0) = h(1) = e$ , así tenemos, por lema 6.2.9 que  $\tilde{\sigma}_1(t) = \tilde{\sigma}_2(t)h(t)$ . Por lo tanto  $\tilde{\sigma}_1(1) = \tilde{\sigma}_2(1)$ .  $\square$

**Proposición 6.3.5.** *Se tiene que si la holonomía de un lazo en  $X$  con respecto a  $p$  es  $g$ , entonces la holonomía con respecto a  $ph$  es  $h^{-1}gh$ . Es decir,  $\Phi(ph) = h^{-1}\Phi(p)h$*

*Demostración.* Sea  $g \in \Phi(p)$  entonces existe  $\sigma : I \rightarrow X$  un lazo con  $\sigma(0) = \sigma(1) = x$  y un levantamiento a  $P$ ,  $\hat{\sigma} : I \rightarrow P$  con  $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}(1) = p$  y su desarrollo  $\tilde{\sigma} : I \rightarrow G$  cumple que  $\tilde{\sigma}(0) = e$  y  $\tilde{\sigma}(1) = g$

Consideremos ahora un levantamiento  $\hat{\alpha} : I \rightarrow P$  de  $\sigma$  con  $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1) = ph$  y su desarrollo  $\tilde{\alpha}(0) = e$  y  $\tilde{\alpha}(1) = g' \in \Phi(p)$ .

Definimos ahora  $\hat{\beta} : I \rightarrow P$  por  $\hat{\beta}(t) = \hat{\alpha}(t)h^{-1}$ . Tenemos que  $\hat{\beta}(0) = \hat{\beta}(1) = p$ . Su desarrollo cumplirá que  $\tilde{\beta}(t) = \tilde{\alpha}(t)h^{-1}$ , con lo que  $\tilde{\beta}(0) = h^{-1}$  y  $\tilde{\beta}(1) = g'h^{-1}$

Se tiene que  $h\tilde{\beta}(t)$  es un desarrollo de  $\hat{\sigma}$  que cumple que  $h\tilde{\beta}(0) = e$  luego por la unicidad del desarrollo se tiene que  $h\tilde{\beta}(t) = \tilde{\sigma}(t)$ , y así  $h\tilde{\beta}(1) = hg'h^{-1} = \tilde{\sigma}(1) = g$ , con lo que  $g' \in h^{-1}\Phi(p)h$ . Con lo cual  $\Phi(ph) \subset h^{-1}\Phi(p)h$ . La otra inclusión se hace de manera similar.  $\square$

**Proposición 6.3.6.**  $\Phi(p)$  es un subgrupo de  $G$

*Demostración.* Sea  $g_i \in \Phi(p)$ , con  $i = 1, 2$  entonces existen  $\sigma_i : I \rightarrow X$  lazos con  $\sigma_i(0) = \sigma_i(1) = x$  y dos levantamiento a  $P$ ,  $\hat{\sigma}_i : I \rightarrow P$  con  $\hat{\sigma}_i(0) = \hat{\sigma}_i(1) = p$  y su desarrollo  $\tilde{\sigma}_i : I \rightarrow G$  cumple que  $\tilde{\sigma}_i(0) = e$  y  $\tilde{\sigma}_i(1) = g_i$

Consideramos  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 * \hat{\sigma}_2$ . Se tiene que  $\hat{\sigma}$  es un lazo en  $P$  ya que  $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}(1) = p$ . Además  $\pi(\hat{\sigma}) = \sigma$  donde  $\sigma$  es un lazo en  $x$ . El desarrollo de  $\hat{\sigma}$  será  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2$  y tenemos que  $\tilde{\sigma}(0) = e$  y  $\tilde{\sigma}(1) = g_1 g_2$ . Con lo cual  $g_1 \cdot g_2 \in \Phi(p)$ .

Por otro lado si  $g_1 \in \Phi(p)$  consideramos  $\hat{\sigma}(t) = \hat{\sigma}_1(1-t)$ . Igual que antes  $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}(1) = p$  y es un levantamiento de un lazo en  $X$ . El desarrollo de  $\hat{\sigma}(t)$  será  $(\tilde{\sigma}_1(t))^{-1}$ , y por tanto  $\tilde{\sigma}(0) = e$  y  $\tilde{\sigma}(1) = g_1^{-1}$ . Luego  $g_1^{-1} \in \Phi(p)$ .  $\square$

**Definición 6.3.7.** Sea  $x \in X$  y  $p \in P$  con  $\pi(p) = x$ . Se define  $\Phi_0(p)$  como el grupo formado por las holonomías de los lazos en  $X$  cuyos levantamientos a  $P$  son homotópicos a cero.

**Proposición 6.3.8.**  $\Phi_0(p)$  es un subgrupo normal de  $\Phi(p)$

*Demostración.* Sea  $g_1 \in \Phi_0(p)$  y sea  $g_2 \in \Phi(p)$  entonces existen  $\sigma_i : I \rightarrow X$  un lazo con  $\sigma_i(0) = \sigma_i(1) = x$  y dos levantamientos a  $P$   $\hat{\sigma}_i : I \rightarrow P$  con  $\hat{\sigma}_i(0) = \hat{\sigma}_i(1) = p$  y su desarrollo  $\tilde{\sigma}_i : I \rightarrow G$  cumple que  $\tilde{\sigma}_i(0) = e$  y  $\tilde{\sigma}_i(1) = g_i$  con  $i = 1, 2$

Consideremos  $\hat{\beta}(t) = \tilde{\sigma}_2 * \hat{\sigma}_1 * \tilde{\sigma}_2(t)$  donde  $\tilde{\sigma}_2(t) = \hat{\sigma}_2(1-t)$ . Tenemos que  $\hat{\beta}(0) = \hat{\beta}(1) = p$  y es homotópica a cero ya que  $[\hat{\beta}] = [\tilde{\sigma}_2][\hat{\sigma}_1][\tilde{\sigma}_2] = [\tilde{\sigma}_2][\hat{\sigma}_2] = [p]$ . Su desarrollo será  $\tilde{\beta}(t) = \tilde{\sigma}_2(t)\tilde{\sigma}_1(t)\tilde{\sigma}_2(t)$  y se cumple que  $\tilde{\beta}(0) = e$  y  $\tilde{\beta}(1) = g_2^{-1}g_1g_2$ . Por lo tanto  $g_2^{-1}g_1g_2 \in \Phi_0(p)$  y  $\Phi_0(p)$  es un subgrupo normal de  $\phi(p)$ .  $\square$

**Proposición 6.3.9.** Para cualquier  $x \in X$  y  $p \in P$  con  $\pi(p) = x$ , , el subgrupo  $\Phi_0(p)$  es arco-conexo.

*Demostración.* Sea  $g \in \Phi_0(p)$  entonces existe  $\sigma : I \rightarrow X$  un lazo en  $X$  con  $\sigma(0) = \sigma(1) = x$  y un levantamiento a  $P$   $\hat{\sigma} : I \rightarrow P$  con  $\hat{\sigma}(0) = \hat{\sigma}(1) = p$  y su desarrollo  $\tilde{\sigma} : I \rightarrow G$  cumple que  $\tilde{\sigma}(0) = e$  y  $\tilde{\sigma}(1) = g$  y además existe una función  $\hat{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow P$  que cumple que  $\hat{H}(t, 1) = \sigma(t), \hat{H}(t, 0) = p, \hat{H}(0, s) = p, \hat{H}(1, s) = p$ .

Definimos  $\hat{H}_s : I \rightarrow P$  por  $\hat{H}_s(t) = \hat{H}(t, s)$ . Tenemos que para todo  $s$ ,  $\hat{H}_s(0) = \hat{H}_s(1) = p$ ,  $\hat{H}_0(t) = p$  y  $\hat{H}_1(t) = \sigma(t)$ . Consideremos el desarrollo  $\tilde{H}_s(1)$

Definamos ahora  $f : I \rightarrow \Phi_0(p)$  mediante  $f(s) = \tilde{H}_s(1)$ . Claramente  $f(0) = \tilde{H}_0(1) = e$  y  $f(1) = \tilde{H}_1(1) = \tilde{\sigma}(1) = g$ . Con lo que tenemos un aplicación diferenciable que valora en  $\Phi_0(p)$  y que une  $e$  con  $g$ . Por tanto  $\Phi_0(p)$  es arcoconexo.  $\square$

**Teorema 6.3.10.**  $\Phi_0(p)$  es un subgrupo de Lie.

*Demostración.* Aplicando la proposición 6.3.9 y el lema 2.2.27  $\square$

**Proposición 6.3.11.** Existe un epimorfismo canónico

$$h : \Pi_1(X, x) \rightarrow \Phi(p)/\Phi_0(p)$$

*Demostración.* Se puede demostrar que todo arco continuo es homótopo a uno diferenciable como aparece en [4]. Definimos  $h(\sigma) = [\tilde{\sigma}(1)]$ . La epiyectividad se deduce de la definición de grupo de holonomía.  $\square$

**Corolario 6.3.12.**  $\Phi(p)$  es un grupo de Lie

*Demostración.* Como  $X$  es conexa y paracompacta cumple el segundo axioma de numerabilidad por lo que se tiene que  $\Pi_1(X, x)$  es numerable, la estructura diferenciable de  $\Phi_0(p)$  puede trasladarse a una base numerable de abiertos de  $\Phi(p)$ .  $\square$

### 6.3.1. Relación entre holonomía de Cartan y Ehresmann

Supongamos que tenemos una geometría de Cartan  $(P, \Psi)$  en  $X$  modelada sobre un modelo geométrico  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  de manera que  $(G, H)$  es una geometría de Klein. Podemos considerar el fibrado principal asociado  $Q = P \times_H G \rightarrow X$ . Vamos a ver que ciertas conexiones de Ehresmann en  $Q$  nos dan conexiones de Cartan en  $P$ .

**Teorema 6.3.13.** *En las condiciones anteriores, supongamos que  $\dim P = \dim G$  y que  $\phi : P \rightarrow Q$  es una  $H$  aplicación de fibrados. Entonces la correspondencia  $\phi^*$  entre las conexiones de Ehresmann,  $\omega$  en  $Q$  que no cortan al núcleo de  $\phi_*(T(P))$  y las conexiones de Cartan,  $\Psi$  en  $P$  es una biyección de conjuntos.*

*Demostración.* Demostraremos que la correspondencia  $\omega \mapsto \Psi = \phi^*\omega$  es una conexión de Cartan.

Como  $\phi_*(T(P)) \cap \ker \omega = 0$ , se sigue que  $\Psi = \phi^*\omega$  es una 1-forma en  $P$  con valores en  $\mathcal{G}$  sin núcleo.

Como  $\dim P = \dim \mathcal{G}$  y  $\omega : T_p(P) \rightarrow \mathcal{G}$  es inyectiva, ya que el núcleo es nulo, se tiene que es un isomorfismo, con lo que se cumple la primera condición de una conexión de Cartan.

Veamos que se cumple la segunda condición. Se tiene que

$$\begin{aligned} R_h^* \Psi &= R_h^* \phi^* \omega = (\phi R_h)^* \omega = \phi^* R_h^* \omega = \\ &= \phi^* Ad(h^{-1}) \omega = Ad(h^{-1}) \phi^* \Psi \end{aligned}$$

Veamos la tercera condición. Sea  $A \in \mathcal{H}$  y sea el campo de vectores  $Z = A^\dagger = \mu_{*(p,e)}(0, A)$  en  $P$ , calculado vía la acción de  $H$  en  $P$ , que denotaremos por  $\mu$ , e  $Y = A^\dagger = \nu_{*(\phi(p),e)}(0, A)$  en  $Q$ , calculado vía la acción de  $G$  sobre  $Q$  que la denotaremos por  $\nu$ . Se tiene al ser  $\phi$  una aplicación entre fibrados que  $\phi_* \circ \mu_* = \nu_* \circ (\phi \times id)_*$ , de esta forma se cumple

$$\begin{aligned} \phi_*(Z_p) &= \phi_*(\mu_{*(p,e)}(0, A)) = (\nu_* \circ (\phi \times id)_*)(0, A) = \\ &= \nu_{*(\phi(p),e)}(0, A) = Y_{\phi(p)} \end{aligned}$$

Con lo que los dos campos están  $\phi$ -relacionados. Así tenemos que  $\Psi(Z_p) = \phi^*\omega(Z_p) = \phi^*\omega(Z_p) = \omega(\phi_*(Z_p)) = \omega(Y_{\phi(p)}) = A$  para cualquier  $A \in \mathcal{H}$ .

De esta forma hemos visto que  $\Psi = \phi^*\omega$  es una conexión de Cartan.

Dada una conexión de Cartan en  $P$ , extenderemos a una forma  $\omega$  en  $P \times G$  mediante la fórmula

$$\omega_{(p,g)} = Ad(g^{-1})\pi_1^*\Psi + \pi_2^*\omega_G$$

donde  $\pi_1 : P \times G \rightarrow P$   $\pi_2 : P \times G \rightarrow G$  son las proyecciones canónicas. Vamos a demostrar que  $\omega$  es un levantamiento de una conexión de Ehresmann en  $P \times_H G$  cuyo núcleo no toca a  $\phi_*(T(P))$ . Esto mostrara que la correspondencia  $\Psi \mapsto \omega = j(\Psi)$  es una aplicación, y veremos que  $j$  es la inversa de  $\phi^*$ .

Vemos que la forma  $\omega$  cumple la condición  $\omega(0 \times A^\dagger) = A$  para cualquier  $A \in \mathcal{G}$ , con lo que cumple la condición segunda de las conexiones de Ehresmann en  $P \times G$ . También se cumple que  $\omega$  restringe a  $\Psi$  en  $P \times e$ . Con lo que  $\omega$  no se anula en  $T(P \times e)$ .

Veamos ahora la primera condición de las conexiones de Ehresmann que es como se comporta por la multiplicación de  $g \in G$  en el segundo factor de  $P \times G$ , la cual denotaremos por  $id \times R_g$ . Así

$$\begin{aligned} (id \times R_g)^*\omega_{(p,g'g)} &= \omega_{(p,g'g)} \circ (id \times R_g)_* = \\ &= ((Ad(g'g)^{-1})\pi_1^*\Psi + \pi_2^*\omega_G) \circ (id \times R_g)_* = \\ &= (Ad(g'g)^{-1})\Psi(\pi_{1*} \circ (id \times R_g)_*) + \omega_G(\pi_{2*} \circ (id \times R_g)_*) = \\ &= (Ad(g'g)^{-1})\Psi(\pi_{1*}) + \omega_G(R_g \circ \pi_{2*}) = (Ad(g'g)^{-1})\pi_1^*\Psi + Ad(g^{-1})\omega_G(\pi_{2*}) = \\ &= (Ad(g)^{-1})(Ad(g'^{-1})\pi_1^*\Psi + \pi_2^*\omega_G) = Ad(g^{-1})\omega \end{aligned}$$

Así vemos que se verifica la condición primera de las conexiones de Ehresmann en  $P \times G$ .

Veamos ahora que  $\omega$  es el levantamiento de una forma en  $P \times_H G$  considerando la aplicación de fibrados  $P \times G \rightarrow P \times_H G$ .

Para ello aplicaremos el lema 3.2.1 y debemos verificar que se  $\omega$  es invariante mediante las aplicaciones

$$\alpha_h : P \times G \rightarrow P \times_H G$$

definida por  $\alpha_h(p.g) = (ph.h^{-1}g)$  y que se anula en la dirección de las fibras de  $P \times G \rightarrow P \times_H G$ . Veamos la primera condición

$$(\alpha_h^*\omega)_{(p,g)} = \omega_{(ph,h^{-1}g)} \circ \alpha_{h*} =$$

$$\begin{aligned}
&= Ad(g^{-1}h)\pi_1^*\Psi \circ \alpha_{h*} + \pi_2^*\omega_G \circ \alpha_{h*} = Ad(g^{-1}h)\Psi(\pi_{1*} \circ \alpha_{h*}) + \omega_G(\pi_{2*} \circ \alpha_{h*}) = \\
&\quad = Ad(g^{-1}h)\Psi(R_{h*} \circ \pi_{1*}) + \omega_G(L_{h^{-1}} \circ \pi_{2*}) = \\
&\quad = Ad(g^{-1}h)Ad(h^{-1})\Psi(\pi_{1*}) + \omega_G(\pi_{2*}) = Ad(g^{-1})\pi_1^*\Psi + \pi_2^*\omega_G = \omega_{(p,g)}
\end{aligned}$$

Ahora consideremos la última condición. Sea  $A \in \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ . Sea  $A^\dagger$  el campo de vectores correspondiente a  $A$  con respecto a la acción de  $H$  en  $P \times G$  dada por

$$\begin{aligned}
(A^\dagger)_{(p,g)} &= ((\mu_P \times \mu_G) \circ (id \times id \times \iota \times id) \circ (id\Delta \times id) \circ \rho)_{*(p,g,e)}(0, 0, A) = \\
&= (\mu_P \times \mu_G)_* \circ (id \times id \times \iota \times id)_* \circ (id\Delta \times id)_* \circ \rho_{*(p,g,e)}(0, 0, A) = \\
&= (\mu_P \times \mu_G)_* \circ (id \times id \times \iota \times id)_{*(p,e,e,g)}(0, A, A, 0) = \\
&= (\mu_P \times \mu_G)_{*(p,e,e,g)}(0, A, -A, 0) = (\mu_{P*(p,e)}(0, A), \mu_{G*(e,g)}(-A, 0)) = \\
&= (\Psi^{-1}(A)_p, -\Psi^{-1}(Ad(g)A)_g)
\end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}
\omega(A^\dagger) &= \omega_{(p,g)}(\Psi^{-1}(A), -\omega_G(Ad(g^{-1})A)) = \\
&= Ad(g^{-1})\pi_1^*\Psi(\Psi^{-1}(A), -\omega_G(Ad(g^{-1})A)) + \pi_2^*\omega_G(\Psi^{-1}(A), -\omega_G(Ad(g^{-1})A)) = \\
&= Ad(g^{-1})A - Ad(g^{-1})A = 0
\end{aligned}$$

Como los campos de vectores  $A^\dagger$  generan el espacio de las fibras, se concluye que  $\omega = \pi^*\eta$  donde  $\eta$  es una 1-forma con valores en  $\mathcal{G}$  en  $P \times_H G$ . Es claro que esta forma cumple las dos condiciones de una conexión de Ehresmann y también que el núcleo de  $ker\bar{\eta}$  corta a  $\phi_*(T(P))$  solo en el cero.

Veamos que  $j$  es inversa de  $\phi^*$ :

$$\phi^*(j(\Psi_p)) = \phi^*\bar{\Psi}_{(p,e)} = Ad(e^{-1})\phi^*\pi_1^*\Psi_p + \phi^*\pi_2^*\omega_{G_e} = (\pi_1\phi)^*\Psi_p + 0 = \Psi_p$$

Por otro lado  $\phi^*$  es inyectiva, ya que si  $\phi^*(\omega_1) = \phi^*(\omega_2)$  entonces  $\omega_1$  y  $\omega_2$  coinciden en la imagen  $\phi_*(T(P))$  y en todos los traslados por la derecha  $R_{g*}\phi_*(T(P))$ , pero entonces también coinciden en los campos de vectores  $A^\dagger$  para todo  $A \in \mathcal{G}$ . Como estas dos clases de vectores generan todo  $T(Q)$ , tenemos que  $\omega_1 = \omega_2$ . En definitiva  $j$  y  $\phi^*$  son inversas una de otra.  $\square$

**Lema 6.3.14.** *Sea  $\iota : G \rightarrow G$  la inversa. Se cumple que  $\iota^*\omega_G = -Ad\omega_G$*

*Demostración.* Se puede ver en [20].  $\square$

**Teorema 6.3.15.** Sean  $(P, \Psi)$  y  $(Q, \omega)$  como en el teorema 6.3.13. Sea  $c : I \rightarrow X$  un lazo en  $x_0$  que levanta a un lazo  $c_1$  en  $p_0 \in P$ . Entonces la holonomía de Cartan y de Ehresmann de  $c$  son iguales.

*Demostración.* Sea  $\hat{c} : (I, 0, 1) \rightarrow (P \times_H G, (p_0, e), (p_0, g))$  el levantamiento horizontal de  $c$  y sea  $\hat{c} = (c_1, c_2) : (I, 0, 1) \rightarrow (P \times G, (p_0, e), (p_0, g))$  un levantamiento de  $\hat{c}$  a  $P \times G$ . Por definición de holonomía de Ehresmann tenemos que la holonomía de  $c$  es  $g^{-1}$ .

Por otro lado tenemos,  $0 = \hat{c}^* \omega_{(p,g)}$  y teniendo en cuenta la demostración de la proposición anterior obtenemos que

$$0 = Ad(g^{-1})\hat{c}^* \pi_1^* \Psi + \hat{c}^* \pi_2^* \omega_G = Ad(c_2^{-1})c_1^* \Psi + c_2^* \omega_G$$

Por el lema 6.3.14, considerando  $c_2^{-1} = \iota \circ c_2$  se cumple:

$$(c_2^{-1})^* \omega_G = (\iota \circ c_2)^* \omega_G = c_2^* \iota^* \omega_G = -c_2^* Ad(c_2) \omega_G = -Ad(c_2) c_2^* \omega_G = c_1^* \Psi$$

Como  $c_1$  es el levantamiento a  $P$  de  $c$ , se sigue que  $c_2^{-1}$  es el desarrollo de  $c$  en el sentido de Cartan, así que la holonomía de  $c$  es  $c_2^{-1}(1) = g^{-1}$ , con lo que las dos holonomías coinciden. □

Vamos a llamar  $\Phi^E(q)$  con  $q \in Q$  al grupo de Lie de las holonomías de Ehresmann.

**Teorema 6.3.16.** Sea  $(P, \Psi)$  una geometría de Cartan sobre  $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  donde  $(G, H)$  es una geometría de Klein. Sea  $Q = P \times_H G$ , el fibrado principal que hemos considerado en un teorema 6.3.13 con  $\omega$  la 1-forma de conexión y  $\Omega$  la forma de curvatura. Tenemos entonces que el álgebra del grupo de holonomía  $\Phi(p)$  con  $p \in P$ , es una subálgebra del álgebra generada por las imágenes de  $\Omega(u, v)$  con  $u, v$  vectores horizontales en  $[(p, g)] \in Q$

*Demostración.* Por el teorema 6.3.15, tenemos que  $\Phi(p)$  es un subgrupo de Lie de  $\Phi^E(q)$  con  $q = [(p, g)] \in Q$ , ya que las holonomías coinciden cuando el lazo en  $X$  se levanta a un lazo en  $P$ . Así el álgebra de Lie de  $\Phi(p)$  será una subálgebra del álgebra de Lie de  $\Phi^E(q)$ , la cual coincide con  $\{\Omega(u, v)/u, v \text{ vectores horizontales en } q \in Q\}$ , por el teorema 2.2.34, con lo que queda demostrado. □

## 6.4. Descripción de las conexiones de Ehresmann que son reducibles a un subfibrado

**Definición 6.4.1.** Sea un fibrado principal  $Q$  con grupo estructural  $G$ . Dos reducciones de  $Q$ ,  $P_H$  y  $P'_H$ , son equivalentes si existe una  $f \in \text{Gau}(P)$  tal que  $f(P_H) = P'_H$ . Denotaremos por  $\text{Red}_H(Q)$  al espacio cociente con esa relación de equivalencia.

**Proposición 6.4.2.** Sea  $P \in \text{Red}_H(Q)$ . El fibrado asociado  $P \times_H G$  es un  $G$ -fibrado principal difeomorfo a  $Q$ .

*Demostración.* Consideremos la aplicación  $\phi : P \times_H G \rightarrow Q$  dada por  $\phi([p, g]) = pg$ .

Esta aplicación es inyectiva, ya que si  $\phi([p, g]) = \phi([p', g'])$  se tiene que  $pg = p'g'$ , luego  $p' = pgg'^{-1}$ . Ahora bien,

$$[p, g] = [pg, g^{-1}g] = [pg, e] = [pgg'^{-1}, g'] = [p', g']$$

También es suprayectiva ya que dado  $q \in Q$ , sea  $x \in X$  tal que  $\pi_G(q) = x$ . Con lo que existe un  $p \in P$  tal que  $\pi_H(p) = x$ . por tanto  $p$  y  $q$  están en la misma fibra, luego existe un  $g \in G$  tal que  $pg = q$ , con lo cual  $\phi([p, g]) = pg = q$ .  $\square$

**Proposición 6.4.3.** Sea  $P_H$  una reducción de  $Q$  con una forma de conexión  $\omega$ . Consideramos las proyecciones canónicas  $\pi_1 : P \times G \rightarrow P$  y  $\pi_2 : P \times G \rightarrow G$  y sea  $\omega_G$  la forma de Maurer-Cartan en  $G$ . Entonces

$$Ad(g^{-1})\pi_1^*\omega + \pi_2^*\omega_G$$

define una forma de conexión en  $Q$ .

*Demostración.* La prueba de que cumple las condiciones de conexión en  $P \times_H G$  se ha hecho en el teorema 6.3.13, y aplicando el difeomorfismo de la proposición anterior se tiene.  $\square$

**Teorema 6.4.4.** Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i} & Q \\ & \searrow \pi_H & \downarrow \pi_G \\ & & X \end{array}$$

Sea  $\mathcal{H}_Q$  una conexión definida en  $Q$  definida por su forma de conexión  $\eta$ , reducible a una conexión  $\mathcal{H}_P$  en  $P$  con forma de conexión  $\omega$ , entonces (vía el difeomorfismo de la proposición 6.4.2)

$$\eta_{(p,g)} = Ad(g^{-1})\pi_1^*\omega + \pi_2^*\omega_G$$

*Demostración.* Se tiene que  $i^*\eta$  es la restricción de  $\eta$  a la subvariedad cuyos elementos son de la forma  $(p, e)$ , con lo cual  $i^*\eta = ad(e^{-1})i^*\pi_1^*\omega = \omega$  y por la unicidad establecida en la proposición 2.2.16 se obtiene lo deseado.  $\square$

# Capítulo 7

## Invariantes asociados al problema variacional

### 7.1. Introducción

Hace un siglo, Emmy Noether descubrió que cada simetría continua de un sistema lagrangiano tenía asociada una magnitud física que permanece constante en la evolución del sistema, por lo que las simetrías han adquirido un papel central en la física matemática. Así, la existencia de simetrías es la base de técnicas de integración como en la teoría de Hamilton-Jacobi, en la cual la existencia de magnitudes constantes es inherente a la reducción de la dimensión en el cual el sistema está definido.

Así en relatividad general, para la cual ese fibrado de configuraciones es un fibrado natural, la covarianza general es una simetría. La derivada de Lie a lo largo de los campos de vectores del espacio-tiempo da las leyes de conservación actuales dadas por corrientes de Noether.

Las teorías gauge describen las interacciones fundamentales y necesitan grupos de simetrías mayores. Las teorías de gauge dependen del fibrado principal  $P$  con grupo de estructura  $G$  sobre el espacio-tiempo  $M$ . El grupo de automorfismos de  $P$ ,  $Aut(P)$ , actúa en el espacio de configuraciones generando las simetrías de Noether y las ecuaciones de campos pueden ser obtenidas completamente de las leyes de conservación. Como hemos visto en el capítulo 3 la teoría de Yang-Mills es un ejemplo de teoría gauge y su lagrangiano definido en el fibrado de conexiones  $C(P)$  asociado a  $P$ , presenta simetrías obtenidas por una representación natural de  $Aut(P)$  en  $C(P)$ .

En nuestro marco geométrico para sistemas lagrangianos, el concepto fundamental es la construcción de la forma de Poincaré-Cartan  $\Theta$  asociado a la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}\omega$ . Surgió como una generalización del invariante de

Poincaré-Cartan del cálculo de variaciones en una variable, y proporciona una estructura geométrica al formalismo de Hamilton-Cartan de la dinámica analítica.

Esta herramienta cae dentro del propósito de asentar la teoría clásica de campos y el cálculo variacional en un marco capaz de sostener las aspiraciones de los teóricos de campos y de la mecánica geométrica clásica. Se convierte en una herramienta poderosa para describir de forma geométrica algunos problemas físicos.

Esta aproximación geométrica tiene como principal objetivo obtener una descripción parecida a la simpléctica para la mecánica hamiltoniana. La formulación geométrica de las teorías de campos sobre una densidad lagrangiana es definida por el fibrado de 1-jets  $\pi_{10} : J^1(P/X) \rightarrow P$  de una submersión suprayectiva  $\pi : P \rightarrow X$  que juega el papel de espacio de configuraciones finito. El principio fundamental es que los campos de vectores son secciones del fibrado de configuraciones  $\pi$  de la teoría y para este propósito, la prolongación del fibrado de 1-jet  $J^1(P/X)$  es dotado de formas construidas a partir de la densidad lagrangiana asociada a una forma de volumen en la variedad base  $X$ .

El punto de partida de esta aproximación es el enfoque seguido por la teoría de campos de primer orden en [39] y [42], donde el fundamento de todo es unir al fibrado de 1-jets  $J^1(P/X)$ , la 1-forma de estructura  $\theta$ . Esta 1-forma globalmente definida con valores en  $V(P)$  toma su esencia en la noción de diferencial vertical de una sección de  $\pi$ . Este protagonismo de la forma  $\theta$  obliga a usar el cálculo diferencial exterior de formas en la variedad  $J^1(P/X)$  con valores en el fibrado vectorial  $V(P)$  y así, usar conexiones en ese fibrado vectorial. Este hecho dota a este marco geométrico de un procedimiento de cálculo que permite introducir problemas esenciales como las simetrías infinitesimales y arrojar luz en la nueva estructura de la teoría.

El trabajo de E. Noether citado al principio de esta introducción, tenía el propósito de introducir fórmulas explícitas que involucraran la simetría y el correspondiente lagrangiano, tuvo una gran repercusión en la teoría de campos. Como el espacio de fases de esta teoría son los fibrados  $P \rightarrow X$  sobre una variedad orientable, y que las ecuaciones de campos pueden ser obtenidas del principio variacional, las técnicas de cálculo variacional han buscado su marco geométrico en los fibrados, los cuales han sido dotados con una gran variedad de estructuras geométricas. De esta manera, como la evolución dinámica del sistema esta descrita por las secciones de la proyección  $\pi_{10} \circ \pi : J^1(P/X) \rightarrow X$ , que son prolongaciones de secciones de  $\pi$ , la búsqueda de movimientos del espacio de fases que dejen invariante el lagrangiano del sistema dinámico, implica la consideración de difeomorfismos  $\phi : P \rightarrow P$  cuyas prolongaciones al fibrado de 1-jets  $j^1\phi : J^1P \rightarrow J^1P$  dejen invariante

la función lagrangiana. En este sentido, es común considerar simetrías del sistema dada por grupos uniparamétricos de difeomorfismos  $\phi_t : P \rightarrow P$  los cuales, nos llevan al concepto de simetría infinitesimal con la incorporación de un gran poder de cálculo. Esta aproximación infinitesimal para la búsqueda de leyes de conservación ha polarizado la formulación geométrica lagrangiana de la teoría de campos de primer orden durante décadas.

El marco de este capítulo es intentar dar una nueva aproximación al estudio de las simetrías para sistemas lagrangianos. De hecho nuestro objetivo es buscar nuevas leyes de conservación del sistema. Así, aparte de considerar las simetrías infinitesimales clásicas (en el sentido que son simetrías de formas diferenciales ordinarias), existen otras, que podemos considerar superiores, que aparecen cuando consideramos factorizaciones de las formas diferenciales clásicas de la teoría en términos de las formas con valores en el fibrado  $(J^1(P/X), \theta)$ . Es precisamente en este punto cuando la combinación de las simetrías clásicas con estas superiores, y la combinación entre esas simetrías superiores, producen nuevas constantes de movimiento.

En este capítulo definiremos varias formas diferenciales que permiten dar una representación global de la teoría, cuya base se encuentra en la definición de diferencial vertical de una sección. Encontraremos sus expresiones intrínsecas y explícitas de esas formas. Por último acometeremos la búsqueda de nuevas leyes de conservación asociadas al problema variacional, a partir de simetrías infinitesimales de las formas diferenciales introducidas previamente.

En este sentido, nuestra formulación busca una base geométrica de la teoría variacional, asentada en la geometría del fibrado dado.

## 7.2. Fibrado de 1-jets

Vamos a considerar el fibrado de 1-jets definido en 3.2.1. Consideremos que  $\dim X = n$  y  $\dim P = n + m$ . Cualquier carta del fibrado en  $P$  con coordenadas locales  $(x^\lambda, y^i)$ ,  $1 \leq \lambda \leq n$ ,  $1 \leq i \leq m$  induce una carta en el fibrado  $J^1$  con coordenadas locales  $(x^\lambda, y^i, p_\lambda^i)$  donde

$$p_\lambda^i(j_x^1 s) = \frac{\partial(y^i \circ s)}{\partial x^\lambda}(x)$$

La definición de la diferencial vertical de una sección  $s$  que dimos en 3.2.19 se puede hacer, de la misma manera, sin necesidad de utilizar el grupo de Lie  $G$ .

**Definición 7.2.1.** *Sea  $\pi : P \rightarrow X$  una proyección regular, se llama diferencial vertical de una sección  $s$  de  $\pi$  en el punto  $x \in X$  a la aplicación*

lineal

$$\begin{array}{ccc} d_x^v s : T_{s(x)}P & \rightarrow & V_{s(x)}P \\ D & \mapsto & D - (s \circ \pi)_* D \end{array}$$

siendo  $V(P) = T(P/X)$  el fibrado vertical de la proyección dada.

También podemos definir la 1-forma de estructura  $\theta$  del fibrado de 1-jets sin tener en cuenta el grupo de Lie  $G$ . La definición, de manera similar a como se he hecho en 3.2.21, es

**Definición 7.2.2.** Sea  $\pi : P \rightarrow X$  una proyección regular. Se llama forma de estructura a la 1-forma diferencial sobre  $J^1P$  con valores en el fibrado vectorial  $V(P)_{J^1}$  definida por la formula

$$\theta_{j_x^1 s}(D) = d_x^v s(\pi_{10*} D)$$

**Proposición 7.2.3.** La expresión de  $\theta$  en términos de las coordenadas del fibrado  $(x^\lambda, y^i, p_\lambda^i)$  es

$$\theta = \sum_i \theta^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$$

donde

$$\theta^i = dy^i - \sum_\lambda p_\lambda^i dx^\lambda$$

*Demostración.* Basta con ver que se cumple la igualdad para los campos de vectores  $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y^i}$  y  $\frac{\partial}{\partial p_\lambda^i}$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) &= d_x^v s\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - s_* \frac{\partial}{\partial x^\lambda} = \\ &= - \sum_i \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial y^i} = - \sum_i p_\lambda^i \frac{\partial}{\partial y^i} \end{aligned}$$

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = d_x^v \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial p_\lambda^i}\right) = 0$$

donde hemos usado que  $\frac{\partial}{\partial p_\lambda^i}$  es  $\pi_{10}$ -vertical y que  $\frac{\partial}{\partial y^i}$  es  $\pi$ -vertical. Lo cual prueba la igualdad en los tres casos.

□

**Proposición 7.2.4.** *La forma de estructura es una sección del subfibrado  $\text{Hom}_{J^1}(T(P), V(P)) = T^*P \otimes V(P)$  que induce la identidad sobre  $V(P)_{J^1}$ . Por tanto la imagen inversa sobre  $J^1$  de la sucesión exacta*

$$0 \rightarrow V(P) \rightarrow T(P) \rightarrow T(X) \rightarrow 0$$

*escinde canónicamente y la escisión está producida por la forma de estructura.*

*Demostración.* Se sigue de la expresión local de  $\theta$  de la proposición anterior.  $\square$

**Definición 7.2.5.** *Un campo de vectores  $D$  en  $J^1$  es una transformación infinitesimal de contacto si para cualquier derivación  $\nabla$  en  $V(P)_{J^1}$  existe un endomorfismo  $\phi : V(P)_{J^1} \rightarrow V(P)_{J^1}$  tal que  $L_D\theta = \phi \circ \theta$ , donde  $L_D$  es la derivada de Lie con respecto a la conexión lineal inducida por imagen inversa de  $\nabla$  sobre  $J^1(P)$ .*

Si la condición anterior se satisface para una conexión  $\nabla$ , también se satisface para cualquier otra  $\nabla'$ , pues  $\nabla'D - \nabla D = g$  es un endomorfismo del fibrado vertical y se tiene

$$L'_D\theta = (f + g) \circ \theta$$

**Proposición 7.2.6.** *Dado  $D \in T_pP$  existe una única transformación infinitesimal de contacto  $D^{(1)}$  que es  $\pi_{10}$ -proyectable a  $D$ .*

*Demostración.* Basta probar la existencia y unicidad locales del campo  $D^{(1)}$ , pues en otro caso, dicho campo debe globalizar necesariamente. Ahora bien, localmente será

$$D = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$D^{(1)} = \sum_{\lambda=1}^n \eta_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{i,\lambda} \nu_{i\lambda} \frac{\partial}{\partial p_\lambda^i}$$

pues por hipótesis el campo  $D^{(1)}$  debe proyectar a  $D$ .

Pero  $f = \sum_{h,i} a_{ji} dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^h}$ . Por tanto, la condición  $L_{D^{(1)}}\theta = f \circ \theta$  significa

$$\sum_i [(L_{D^{(1)}}\theta^i) \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} + \theta^i \otimes (\nabla_{D^{(1)}} \frac{\partial}{\partial y^i})] = \sum_{h,i} a_{hi} \theta^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^h}$$

Por otra parte, como se deriva respecto a la conexión imagen inversa de  $\nabla$ , se tiene

$$\nabla_{D^{(1)}} \frac{\partial}{\partial y^i} = \nabla_D \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_h b_{hi} \frac{\partial}{\partial y^h}$$

de donde

$$\sum_i [(L_{D^{(1)}} \theta^i) \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}] = \sum_h (\sum_i c_{hi} \theta^i) \circ \frac{\partial}{\partial y^h}$$

con  $c_{hi} = a_{hi} - b_{hi}$ . Cambiando  $i$  por  $h$  en el primer miembro e igualado componentes se tiene que

$$L_{D^{(1)}} \theta^h = \sum c_{hi} \theta^i, \quad \text{para } h = 1, \dots, m \quad (7.1)$$

Por tanto, una transformación infinitesimal de contacto deja invariante el submódulo generado por las componentes  $\theta^1, \dots, \theta^m$  de la forma de estructura. Y recíprocamente, si las ecuaciones (7.1) se satisfacen, se puede definir  $f$  por la fórmula

$$a_{hi} = b_{hi} + c_{hi}$$

Así pues, todo se reduce a ver si las ecuaciones (7.1) determinan de modo único los coeficientes  $\nu_{i\lambda}$  de  $D^{(1)}$ . Para ello es suficiente ver que los dos miembros de (7.1) coinciden sobre una base. ahora bien,  $\{dx^\lambda, \theta^i, dp_\lambda^i\}$  es una base local de  $T^*(J^1)$  con base dual

$$\{D_\lambda\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \sum_i p_\lambda^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial p_\lambda^i} \right\}$$

Así, las ecuaciones (7.1) son equivalentes al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} L_{D^{(1)}} \theta^h(D_\lambda) &= \theta^h([D_\lambda, D^{(1)}]) = 0 \\ L_{D^{(1)}} \theta^h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) &= \theta^h\left(\left[\frac{\partial}{\partial y^i}, D^{(1)}\right]\right) = c_{hi} \\ L_{D^{(1)}} \theta^h\left(\frac{\partial}{\partial p_\lambda^i}\right) &= \theta^h\left(\left[\frac{\partial}{\partial p_\lambda^i}, D^{(1)}\right]\right) = 0 \end{aligned}$$

La segunda ecuación determina los coeficientes  $c_{hi}$ . Desarrollando las otras dos se tiene

$$\nu_{h\lambda} = D_\lambda \mu_h - \sum_k p_h^k (D_\lambda \eta_k)$$

Finalmente,  $[D_1^{(1)}, D_2^{(1)}]$  es una transformación infinitesimal de contacto cuya proyección es  $[D_1, D_2]$ . Luego por unicidad  $[D_1, D_2]^{(1)} = [D_1^{(1)}, D_2^{(1)}]$   $\square$

El conjunto  $\mathfrak{X}^{(1)}(P)$  de todas las transformaciones infinitesimales de contacto es un álgebra de Lie como se puede ver en [39] y [45] y llamaremos  $\mathfrak{X}_c^{(1)}(P)$  el ideal de este álgebra de Lie definida por las transformaciones infinitesimales de contacto cuyo soporte tiene imagen compacta en  $X$ .

### 7.3. Problema variacional

**Definición 7.3.1.** *Fijemos  $\omega$  un elemento de volumen de la variedad orientable  $X$ . Sea  $\mathcal{L} : J^1 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, se define el funcional  $\mathbb{L}$  como*

$$\mathbb{L}(s) = \int_{j^1 s} \mathcal{L}\omega = \int_U (j^1 s)^*(\mathcal{L}\omega)$$

para cada sección local  $s : U \rightarrow P$  de  $\pi$  para la cual la integral existe.

**Definición 7.3.2.** *Decimos que una sección  $s$  es crítica para la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}\omega$  si la variación infinitesimal del funcional  $\mathbb{L}(s)$  en el espacio  $\mathfrak{X}_c^{(1)}(P)$  se anula. De manera explícita, la sección  $s : U \rightarrow X$  es crítica si*

$$\int_{j^1 s} L_D(\mathcal{L}\omega) = 0$$

para cualquier transformación infinitesimal de contacto  $D \in \mathfrak{X}_c^{(1)}(P)$ .

### 7.4. Formas de Legendre, Poincaré-Cartan y Euler-Lagrange asociadas al problema variacional

Las secciones del fibrado vectorial  $T(J^1) \otimes_{J^1} V^*(P)$  se pueden interpretar como campos vectoriales sobre  $J^1$  con valores en  $V^*(P)_{J^1}$ . Sea  $H$  una de tales secciones y  $\eta_2$  una 2-forma sobre  $J^1$  con valores en  $V(P)_{J^1}$ . Designamos  $i_H \eta_2$  la 1-forma ordinaria sobre  $J^1$  obtenida contrayendo la componente contravariante de  $F$  con el primer argumento de  $\eta_2$  y componiendo con la forma bilineal  $V^*(P) \times_{J^1} V(P) \rightarrow J^1 \times \mathbb{R}$  inducida canónicamente por dualidad. Así pues, la aplicación

$$(H, \eta_2) \mapsto i_H \eta_2$$

está completamente caracterizada por la condición

$$i_{(D \otimes w)}(\omega_2 \otimes D') = (i_D \omega_2) \omega(D')$$

donde  $D$  es un campo vectorial sobre  $J^1$ ,  $\omega_2$  una 2-forma ordinaria sobre  $J^1$  y  $D', w$  secciones de  $V(P)_{J^1}$ ,  $V^*(P)_{J^1}$ , respectivamente.

Dualizando la sucesión exacta  $0 \rightarrow T(J^1/P) \rightarrow T(J^1) \rightarrow T(P)_{J^1} \rightarrow 0$  se obtiene:  $0 \rightarrow T^*(P)_{J^1} \rightarrow T^*(J^1) \rightarrow T^*(J^1/P) \rightarrow 0$ . Si  $\eta$  es una 1-forma ordinaria sobre  $J^1$ , se designa por  $\bar{\eta}$  la imagen de  $\eta$  por el epimorfismo  $T^*(J^1) \rightarrow T^*(J^1/P) \rightarrow 0$ . Esto es,  $\bar{\eta}$  es la restricción de  $\eta$  al subfibrado  $T(J^1/P)$  de los vectores tangentes de  $J^1$  verticales sobre  $P$ .

Dada una conexión lineal  $\nabla$  sobre  $V(P)$  definimos el homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} T(J^1) \otimes_{J^1} V^*(P) & \rightarrow & T^*(J^1/P) \\ H & \mapsto & \overline{i_H d_{\nabla} \theta} \end{array}$$

El homomorfismo no depende de la conexión elegida. Como se puede ver en [39] y [45].

Localmente  $H = \sum_i D_i \otimes dy^i$  donde  $D_1, \dots, D_m$  son campos ordinarios sobre  $J^1$ , y usando la conexión plana respecto de este sistema de coordenadas se tiene que

$$\overline{i_H d_{\nabla} \theta} = \sum_{i, \lambda} (D_i x^\lambda) \overline{dp_\lambda^i}$$

donde, para simplificar la escritura, a partir de ahora escribiremos  $d = d_{\nabla}$ , y la distinguiremos de la diferencial exterior normal teniendo en cuenta sobre que formas actúa.

El núcleo de  $H \mapsto \overline{i_H d_{\nabla} \theta}$  es  $V(J^1) \otimes V^*(P)$ , y tomando rangos tenemos que el homomorfismo anterior determina la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow V(J^1) \otimes V^*(P) \rightarrow T(J^1) \otimes_{J^1} C^*(P) \rightarrow T^*(J^1/P) \rightarrow 0$$

Utilizando este hecho tenemos el siguiente resultado

**Proposición 7.4.1.** *Sea  $\mathcal{L}\omega$  la densidad lagrangiana existe un campo de vectores  $H$ , de  $J^1$  con valores en  $V^*(P)$  satisfaciendo*

$$\overline{i_H d_{\nabla} \theta} = \overline{d\mathcal{L}}$$

*En este caso se dice que  $H$  es un campo de vectores hamiltoniano asociado a la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}\omega$ .*

**Definición 7.4.2.** *Dado un elemento de volumen  $\omega$  sobre  $X$  y una función diferenciable  $\mathcal{L} : J^1 \rightarrow \mathbb{R}$  se llama forma de Legendre asociada a la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}\omega$  a la  $(n-1)$ -forma sobre  $J^1$  con valores en  $V^*(J^1)$  definida por*

$$\Omega_{\mathcal{L}} = i_H \omega$$

donde  $H$  es el campo de vectores hamiltoniano asociado a la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}\omega$

**Proposición 7.4.3.** *La forma de Legendre  $\Omega_{\mathcal{L}}$  no depende del campo hamiltoniano elegido.*

*Demostración.* Si  $H$  y  $H'$  son dos campos de vectores hamiltonianos. Entonces se tiene que  $i_{(H-H')}d\theta = 0$ ; luego  $H - H'$  es vertical sobre  $X$  y por tanto,  $i_H\omega = i_{H'}\omega$ . □

**Definición 7.4.4.** *Se llama forma de Poincaré-Cartan asociada a la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}\omega$  a la  $n$ -forma sobre  $J^1$  definida por*

$$\Theta = \mathcal{L}\omega + \theta \wedge \Omega_{\mathcal{L}}$$

Escribiremos que  $\eta \equiv \eta'$  donde  $\eta, \eta'$  son dos 1-formas sobre  $J^1$  si  $\eta(D) = \eta'(D')$  para todo campo vectorial  $D$  de  $V(J^1)$ ; o en otras palabras si  $\eta' - \eta$  pertenece a  $T^*(X)_{J^1}$ .

**Proposición 7.4.5.** *Sea  $\nabla$  una conexión lineal sobre  $V(P)$  y  $H$  una sección de  $T(J^1) \otimes_{J^1} V^*(P)$  tal que  $\overline{i_H d\theta} = \overline{d\mathcal{L}}$ . Existe una única sección  $f$  de  $V^*(P)$  tal que  $i_H d\theta - d\mathcal{L} \equiv f \circ \theta$ .*

*Demostración.* Como vimos en la proposición 7.2.4,  $\theta$  es un retracto de la inclusión  $V(P)_{J^1} \rightarrow T(P)_{J^1}$ , su aplicación dual  $\theta^*$  es una sección de la proyección

$$0 \rightarrow T^*(X)_{J^1} \rightarrow T(P)_{J^1}^* \rightarrow V^*(P)_{J^1} \rightarrow 0$$

Ahora bien, la ecuación que  $\overline{i_H d\theta} = \overline{d\mathcal{L}}$  significa que  $i_H d\theta + d\mathcal{L}$  pertenece al subfibrado  $T^*(P)_{J^1}$ . Luego  $f$  es necesariamente igual a la clase de  $i_H d\theta + d\mathcal{L}$  en  $V^*(P)$ . □

**Teorema 7.4.6.** *Si  $\nabla$  es simétrica, se verifica*

$$d\Theta = -\theta \wedge (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)$$

*Demostración.* Se tiene  $d\Theta = d(\mathcal{L}\omega) + d(\theta \wedge \Omega_{\mathcal{L}}) = d\mathcal{L}\omega + d\theta \wedge \Omega_{\mathcal{L}} - \theta \wedge d\Omega_{\mathcal{L}}$ . Por tanto

$$\begin{aligned} d\Theta &= d\mathcal{L} \wedge \omega + d\theta \wedge (i_H\omega) - \theta \wedge d\Omega_{\mathcal{L}} = \\ &= d\mathcal{L} \wedge \omega + i_H[d\theta \wedge \omega] - (i_H d\theta) \wedge \omega - \theta \wedge d\Omega_{\mathcal{L}} \end{aligned}$$

Supongamos que hemos demostrado que  $d\theta \wedge \omega = 0$ . Entonces, por la proposición anterior, se cumple que  $i_H d\theta - d\mathcal{L} - f \circ \theta$  pertenece a  $T^*(X)_{J^1}$  y así  $[i_H d\theta - d\mathcal{L} - f \circ \theta] \wedge \omega = 0$ . O sea

$$i_H d\theta \wedge \omega = d\mathcal{L} \wedge \omega + (f \circ \theta) \wedge \omega = d\mathcal{L} \wedge \omega + \theta \wedge (\omega \otimes f)$$

y sustituyendo

$$d\Theta = -\theta \wedge (\omega \otimes f) - \theta \wedge d\Omega_{\mathcal{L}} = -\theta \wedge (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)$$

Nos queda por demostrar que  $d\theta \wedge \omega = 0$ . Tenemos

$$d\theta \wedge \omega = \sum_i (d\theta^i \wedge \omega) \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} - \sum_i \theta^i \wedge d\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \wedge \omega$$

Ahora bien

$$d\theta^i \wedge \omega = - \sum_{\lambda} dp_{\lambda}^i \wedge dx^{\lambda} \wedge \omega = - \sum_{\lambda} dp_{\lambda}^i \wedge dx^{\lambda} \wedge [dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n] = 0$$

De esta forma

$$d\theta \wedge \omega = \sum_i \theta^i \wedge d\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \wedge \omega$$

Ahora bien

$$\left(d\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \wedge \omega\right) \left(\frac{\partial}{\partial y^h}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = i_{\left(\frac{\partial}{\partial y^h}\right)} \left[d\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \wedge \omega\right] \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^h}} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

De esta manera

$$\sum_i \theta^i \wedge d\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \wedge \omega = \sum_{h,i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^h}} \frac{\partial}{\partial y^i} dy^i \wedge dy^h \wedge \omega = 0$$

donde hemos usado que la conexión es simétrica. □

**Teorema 7.4.7.** *Para cada transformación infinitesimal de contacto  $D$ , existe una  $(n-1)$  forma  $\Omega'$  sobre  $J^1$  con valores en  $V^*(P)_{J^1}$  tal que*

$$L_D(\mathcal{L}\omega) = -\theta(D) \circ (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) + d(i_D \Theta) + \theta \wedge \Omega'$$

*Demostración.* Por la fórmula del teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} L_D(\mathcal{L}\omega) &= L_D(\Theta - \theta \wedge \Omega_{\mathcal{L}}) = i_D d\Theta + d(i_D \Theta) - (L_D \theta) \wedge \Omega_{\mathcal{L}} - \theta \wedge (L_D \Omega_{\mathcal{L}}) = \\ &= -\theta(D) \circ (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) + \theta \wedge i_D (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) + d(i_D \Theta) - (\phi \circ \theta) \wedge \Omega_{\mathcal{L}} - \theta \wedge (L_D \Omega_{\mathcal{L}}) = \\ &= -\theta(D) \circ (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) + d(i_D \Theta) + \theta \wedge [-\phi^* \Omega_{\mathcal{L}} + i_D (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) - L_D \Omega_{\mathcal{L}}] \end{aligned}$$

con lo que basta con tomar  $\Omega' = -\phi^* \Omega_{\mathcal{L}} + i_D (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) - L_D \Omega_{\mathcal{L}}$ .  $\square$

**Definición 7.4.8.** La  $n$ -forma  $d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f$  sobre  $J^1$  con valores en  $V^*(P)_{J^1}$  recibe el nombre de forma de Euler-Lagrange asociada a la conexión simétrica  $\nabla$ .

## 7.5. Caracterización de las secciones críticas

**Teorema 7.5.1.** Sea  $\nabla$  una conexión lineal simétrica sobre  $V(P)$ . La condición necesaria y suficiente para que una sección  $s$  de  $\pi : P \rightarrow X$  sea crítica es que la imagen inversa sobre  $j^1 s$  de la forma de Euler-Lagrange asociada a  $\nabla$  sea nula. Esto es:

$$(d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)|_{j^1 s} = 0$$

*Demostración.* Sea  $D$  una transformación de contacto con soporte compacto. Por la fórmula del teorema anterior tenemos que

$$\int_{j^1 s} L_D(\mathcal{L}\omega) = - \int_{j^1 s} \theta(D) \circ (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)$$

ya que el término  $\theta \wedge \Omega'$  se anula al especializar a  $j^1 s$  y por el teorema de Stokes  $\int_{j^1 s} d(i_D \Theta) = \int_X d[(j^1 s)^*(i_D \Theta)] = 0$ . Por tanto

$$\int_{j^1 s} L_D(\mathcal{L}\omega) = - \int_X [\theta(D) \circ j^1 s] \circ \{(d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)|_{j^1 s}\}$$

luego la suficiencia de la condición se cumple.

Veamos también la necesidad. La imagen inversa  $(d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)|_{j^1 s}$  es una  $n$ -forma sobre  $X$  con valores en  $s^* V^*(P)$ . Luego localmente

$$(d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)|_{j^1 s} = \sum_i f_i \omega \otimes dy^i$$

donde  $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  es el elemento de volumen y  $f_i$  son funciones diferenciales en  $X$  definidas en un abierto coordenado  $U$ . Para cada función

diferenciable  $g_i \in C^\infty(U)$  con soporte compacto se puede definir un campo vertical  $D_i = g_i \frac{\partial}{\partial y^i}$  cuya transformación infinitesimal de contacto asociada  $D_i^{(1)}$  tiene soporte compacto. Puesto que  $D_i^{(1)}$  es vertical, se tiene  $\theta(D_i^{(1)}) = g_i \frac{\partial}{\partial y^i}$ . Por tanto

$$[\theta(D_i^{(1)}) \circ j^1 s] \circ \{(d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)|_{j^1 s}\} = (g_i f_i)\omega$$

Luego

$$\int_U g_i f_i = 0$$

para toda función diferenciable  $g_i$  con soporte compacto contenido en  $U$ . En particular, si tomamos  $g_i = \phi f_i$ , donde  $\phi$  es una función diferenciable positiva en el interior del disco cerrado  $C$  contenido en  $U$  y nula en el complementario. Entonces

$$\int_U \phi f_i^2 = \int_C \phi f_i^2 = 0$$

y puesto que  $\phi f_i^2$  es no negativa, se sigue que  $\phi f_i^2 = 0$  sobre  $C$ . Luego  $f_i$  debe anularse en  $C$ , y puesto que  $C$  es arbitrario  $f_i = 0$ . Es decir

$$(d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)|_{j^1 s} = 0$$

□

**Teorema 7.5.2.** *Una sección  $s$  es crítica si y solo si*

$$(i_D d\Theta)|_{j^1 s} = 0$$

para todo campo  $D$  sobre  $J^1$ .

*Demostración.* De la fórmula del teorema 7.4.6 se sigue que

$$i_D d\Theta = -\theta(D) \circ (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) + \theta \wedge \{i_D (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)\}$$

Por tanto

$$i_D d\Theta|_{j^1 s} = -\theta(D) \circ (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)|_{j^1 s}$$

Así pues si  $s$  es crítica  $i_D d\Theta|_{j^1 s} = 0$  para toda campo  $D$  de  $J^1$  usando el teorema anterior. Recíprocamente si  $(i_D d\Theta)|_{j^1 s} = 0$  tomando  $D_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ , y usando el mismo argumento de la demostración del teorema anterior se obtiene de nuevo que  $f_i = 0$ , con lo que  $(d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)|_{j^1 s} = 0$ .

□

## 7.6. Expresión local de las formas de Legendre, Euler-Lagrange y Poincaré-Cartan

Vamos a calcular la expresión de la forma de Legendre  $\Omega_{\mathcal{L}} = i_H\omega$ . Hemos visto que la condición no dependía de la conexión elegida, por lo que podemos usar la conexión plana. En este caso si  $H = \sum_i H_i \otimes dy^i$ , donde  $H_i$  son campos vectoriales de  $J^1$ , se tiene:

$$i_H d\theta = i_H \left\{ \sum_{i,\lambda} dx^\lambda \wedge dp_\lambda^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \right\} = \sum_{i,\lambda} (H_i x^\lambda) dp_\lambda^i - \sum_{i,\lambda} (H_i p_\lambda^i) dx^\lambda$$

De esta forma

$$\overline{i_H d\theta} = \sum_{i,\lambda} H_i(x^\lambda) \overline{dp_\lambda^i} = d\mathcal{L} = \sum_{i,\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} \overline{dp_\lambda^i}$$

Por tanto  $H_i x^\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i}$ . Ahora bien como la definición de  $\Omega_{\mathcal{L}}$  no depende de la sección  $H$  elegida, se puede tomar  $H_i = \sum_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ , en cuyo caso

$$\Omega_{\mathcal{L}} = \sum_i (i_{H_i} \omega) \otimes dy^i$$

Elegiendo las coordenadas de manera que se cumpla que el elemento de volumen es  $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  se tiene:

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{L}} &= \sum_i (i_{H_i} \omega) \otimes dy^i = \\ &= \sum_i (i_{H_i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \otimes dy^i = \sum_{i,\lambda} (-1)^{\lambda-1} (H_i x^\lambda) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \otimes dy^i \end{aligned}$$

Es decir,

$$\Omega_{\mathcal{L}} = \sum_{i,\lambda} (-1)^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \otimes dy^i \quad (7.2)$$

Ahora, tenemos por definición que  $\Theta = \mathcal{L}\omega + \theta \wedge \Omega_{\mathcal{L}}$  con lo que se obtiene la expresión local de la forma de Poincaré-Cartan

$$\Theta = \mathcal{L}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) + \sum_{i,\lambda} (-1)^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} \theta^i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \quad (7.3)$$

donde  $\theta^i = dy^i - \sum_\lambda p_\lambda^i dx^\lambda$ .

Para calcular la expresión de la forma de Euler-Lagrange es más laborioso porque esta forma depende de la conexión simétrica elegida  $\nabla$  en el fibrado vertical. La conexión  $\nabla$  está determinada localmente por los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\lambda}}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) &= \sum_h \Gamma_{\lambda i}^h \frac{\partial}{\partial y^h} \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) &= \sum_a \Pi_{ji}^a \frac{\partial}{\partial y^a}\end{aligned}$$

Para determinar  $d_\nabla \Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f$  hay que determinar la diferencial de  $\Omega_{\mathcal{L}}$  y la sección  $f$  que se definió en la proposición 7.4.5. Vamos a calcular primero  $\omega \otimes f$ . Elegimos localmente  $H$  de manera que verifique  $i_H d\theta = \overline{d\mathcal{L}}$ , es decir, según hemos visto antes  $H_i x^\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i}$ . Se tiene que  $f = \sum_i f_i dy^i$  y

$$\begin{aligned}d_\nabla \theta &= \sum_{i,\lambda} (dp_\lambda^i \wedge dx^\lambda) \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} - \sum_i \theta^i \wedge d\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \\ &= \sum_{i,\lambda} (dp_\lambda^i \wedge dx^\lambda) \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} - \sum_i \theta^i \wedge \left\{ \sum_\lambda dx^\lambda \otimes \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\lambda}} \frac{\partial}{\partial y^i} - \sum_h dy^h \otimes \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^h}} \frac{\partial}{\partial y^i}\right) \right\} = \\ &= \sum_{i,\lambda} (dp_\lambda^i \wedge dx^\lambda) \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} - \sum_{h,i,\lambda} \Gamma_{\lambda i}^h (\theta^i \wedge dx^\lambda) \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} - \sum_{a,h,i} \Pi_{hi}^a (\theta^i \wedge dy^h) \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}\end{aligned}$$

y agrupando términos

$$d_\nabla \theta = \sum_i \left\{ \sum_\lambda dp_\lambda^i \wedge dx^\lambda - \sum_{h,\lambda} \Gamma_{jh}^i (\theta^h \wedge dx^\lambda) - \sum_{h,a} \Pi_{ha}^i (\theta^a \wedge dy^h) \right\} \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$$

De modo que la condición  $i_H d\theta + d\mathcal{L} \equiv f \circ \theta$  se expresa localmente como

$$\begin{aligned}\sum_i \left\{ \sum_\lambda (H_i p_\lambda^i) dx^\lambda - \sum_\lambda (H_i x^\lambda) dp_\lambda^i - \sum_{h,\lambda} \Gamma_{h,\lambda}^i \theta^h (H_i) dx^\lambda + \sum_{h,\lambda} \Gamma_{jh}^i (H_i x^\lambda) \theta^h - \right. \\ \left. \sum_{h,a} \Pi_{ha}^i \theta^a (H_i) dy^h + \sum_{h,a} \Pi_{ha}^i (H_i y^h) \theta^a \right\} + \sum_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda + \sum_h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_y^h} dy^h + \\ + \sum_{i,\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} dp_\lambda^i \equiv \sum_i f_i \theta^i\end{aligned}$$

y puesto que la congruencia es módulo  $dx^1 \dots dx^n$ , por la definición de  $H$ , lo anterior es equivalente a

$$\sum_{h,i,\lambda} \Gamma_{\lambda h}^i (H_i x^\lambda) \theta^h - \sum_{a,h,i} \Pi_{ha}^i \theta^a (H_i) dy^h + \sum_{a,h,i} \Pi_{ha}^i (H_i y^h) \theta^a + \sum_h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} dp_\lambda^i \equiv \sum_i f_i \theta^i$$

Ahora, teniendo en cuenta que  $dy^h = \theta^h$ , deducimos que

$$f_h = \sum_{i,\lambda} \Gamma_{\lambda h}^i (H_i x^\lambda) - \sum_{a,i} \Pi_{ha}^i \theta^a (H_i) + \sum_{a,i} \Pi_{ah}^i (H_i y^a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^h}$$

y por ser  $\nabla$  simétrica  $\Pi_{ha}^i = \Pi_{ah}^i$  queda

$$f_h = - \sum_{i,\lambda} \Gamma_{\lambda h}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} - \sum_{a,i,\lambda} \Pi_{ha}^i p_\lambda^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^h}$$

Por último

$$f_h = - \sum_{i,\lambda} [\Gamma_{\lambda h}^i + \sum_a \Pi_{ha}^i dp_\lambda^a] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^h} \quad (7.4)$$

Vamos a calcular ahora  $d_\nabla \Omega_{\mathcal{L}}$ . De la ecuación (7.2) se sigue

$$\begin{aligned} d_\nabla \Omega_{\mathcal{L}} &= \sum_{i,\lambda} (-1)^\lambda d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \otimes dy^i + \\ &+ (-1)^{n-1} \sum_{i,\lambda} (-1)^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d_\nabla (dy^i) \end{aligned}$$

Calculemos  $d_\nabla (dy^i)$ :

$$[d_\nabla (dy^i) \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right)] \left( \frac{\partial}{\partial y^h} \right) = \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\lambda}} dy^i \right) \left( \frac{\partial}{\partial y^h} \right) = -dy^i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\lambda}} \frac{\partial}{\partial y^h} \right) = -\Gamma_{\lambda h}^i$$

$$[d_\nabla (dy^i) \left( \frac{\partial}{\partial y^a} \right)] \left( \frac{\partial}{\partial y^h} \right) = \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^a}} dy^i \right) \left( \frac{\partial}{\partial y^h} \right) = -dy^i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^a}} \frac{\partial}{\partial y^h} \right) = -\Pi_{ah}^i$$

Por tanto

$$d_\nabla (dy^i) \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right) = - \sum_h \Gamma_{\lambda h}^i dy^h$$

$$d_\nabla (dy^i) \left( \frac{\partial}{\partial y^a} \right) = - \sum_h \Pi_{ah}^i dy^h$$

de donde

$$d_{\nabla}(dy^i) = - \sum_{h,\lambda} dx^\lambda \otimes \Gamma_{\lambda h}^i dy^h - \sum_{ah} dy^a \otimes \Pi_{ah}^i dy^h$$

Es decir

$$d_{\nabla}(dy^i) = - \sum_h \left\{ \sum_{\lambda} \Gamma_{\lambda h} dx^\lambda + \sum_a \Pi_{ah}^i dy^a \right\} \otimes dy^h$$

Así pues:

$$\begin{aligned} & dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d_{\nabla}(dy^i) = \\ = & (-1)^{n-\lambda+1} \sum_h \Gamma_{\lambda h}^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \otimes dy^h - \sum_{sh} \Pi_{ah}^i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^a \otimes dy^h \end{aligned}$$

Y sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} d_{\nabla}\Omega_{\mathcal{L}} = & \sum_{i\lambda} d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i}\right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \otimes dy^i + \sum_{h,\lambda,i} \Gamma_{\lambda h}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \otimes dy^h + \\ & (-1)^n \sum_{h,i,a} \sum_{\lambda} (-1)^j \Pi_{ah}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^a \otimes dy^h \end{aligned}$$

De la ecuación (7.4) se sigue

$$\begin{aligned} d_{\nabla}\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f = & \sum_{i\lambda} d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i}\right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \otimes dy^i + \\ + & \sum_h \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^h} + \sum_{h,a} \left\{ \sum_{i,\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} \Pi_{ah}^i (-1)^{\lambda-1} (dy^a - p_\lambda^a dx^\lambda) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \otimes dy^h \right\} \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} d_{\nabla}\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f = & \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n + \sum_{\lambda} (-1)^\lambda d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i}\right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \right\} \otimes dy^i + \\ & + \sum_{h,i,a} \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda-1} \Pi_{ah}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\lambda^i} \theta^a dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n \otimes dy^h \end{aligned}$$

Al especializar a una sección el segundo sumando del segundo miembro de la ecuación anterior, se obtiene

$$(d_{\nabla}\Omega_{\mathcal{L}\omega} \otimes f)|_{j^1s} = \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^i} \circ j^1s - \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{\lambda}^i} \circ j^1s \right) \right\} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \otimes dy^i$$

ya que la diferencial exterior conmuta con la imagen inversa.

También tenemos entonces

$$d_{\nabla}\Theta = \sum_{\lambda,i} \theta^i \left\{ (-1)^{\lambda} d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{\lambda}^i} \right) dx^1 \dots \widehat{dx^{\lambda}} \dots dx^n + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^i} \dots dx^n \right\} + \quad (7.5)$$

$$\sum_{\lambda,i,j,l} (-1)^{\lambda-1} \theta^l \theta^j \Gamma_{lj}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{\lambda}^i} dx^1 \dots \widehat{dx^{\lambda}} \dots dx^n$$

## 7.7. Leyes de conservación asociadas al problema variacional

Ahora derivaremos leyes de conservación considerando simetrías de algunas de las formas con valores en  $V^*(P)$  definidas anteriormente. Lo primero vamos a recordar las simetrías clásicas de la densidad lagrangiana.

**Definición 7.7.1.** *Un campo de vectores  $\pi$ -proyectable  $D$  en la variedad  $P$  se dice ser una simetría Noether de la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}\omega$ , si  $L_{D(1)}(\Theta) = 0$ , donde  $\Theta$  es la forma de Poincaré-Cartan asociada a  $\mathcal{L}\omega$ .*

**Proposición 7.7.2.** *Sea  $D$  un campo vectorial sobre  $P$   $\pi$ -proyectable, y  $D'$  su proyección. La  $n$ -forma  $L_{D(1)}\Theta$  es la forma de Poincaré-Cartan asociada a la densidad lagrangiana*

$$L_{D(1)}(\mathcal{L}\omega) = (D^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}divD')\omega$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{L}' = D^{(1)}\mathcal{L} + \mathcal{L}divD'$ . Localmente por la ecuación 7.3 tenemos que

$$L_{D(1)}\Theta = \mathcal{L}'(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) + \sum_{i\lambda} f_{i\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{\lambda}^i} \theta^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{\lambda}} \wedge \dots \wedge dx^n$$

ya que  $L_{D(1)}(dx^{\lambda})$  se expresa como combinación lineal de  $dx^1, \dots, dx^n$ , por ser  $D$  proyectable, de hecho  $L_{D(1)}(dx^{\lambda}) = d(D'x^{\lambda})$ , y por ser  $D^{(1)}$  una transformación de contacto  $L_{D(1)}(\theta^i) = \sum_h a_{ih}\theta^h$ .

Ahora diferenciando

$$\begin{aligned}
d(L_{D^{(1)}}\Theta) &= \mathcal{L}'(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) + \sum_{i,\lambda} df_{i\lambda} \wedge \theta^i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n + \\
&+ \sum_{i,\lambda} (-1)^\lambda f_{ij} dp_\lambda^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = L_{D^{(1)}}(d\Theta) = \\
&= -(L_{D^{(1)}}\Theta) \wedge (d\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) - \theta \wedge L_{D^{(1)}}(\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) = \sum_i \theta^i \wedge \eta_i
\end{aligned}$$

para ciertas n-formas  $\eta_i$ .

Es decir, hemos llegado a la igualdad

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) + \sum_{i,\lambda} df_{i\lambda} \wedge \theta^i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n + \\
+ \sum_{i,\lambda} (-1)^\lambda f_{ij} dp_\lambda^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_i \theta^i \wedge \eta_i
\end{aligned}$$

Sea  $D_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \sum_i p_\lambda^i \frac{\partial}{\partial y^i}$  de modo que  $\theta^i(D_\lambda) = 0$ . Así pues, aplicando la igualdad anterior a  $(\frac{\partial}{\partial p_\lambda^i}, D_1, \dots, D_n)$  se obtiene que

$$(-1)^\lambda f_{i\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial p_\lambda^i} = 0$$

Esto es

$$L_{D^{(1)}}\Theta = \mathcal{L}'(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) + \sum_{i\lambda} (-1)^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial p_\lambda^i} \theta^i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \dots \wedge dx^n$$

con lo que se concluye la prueba. □

**Proposición 7.7.3.** *Un campo  $D$  de  $P$  proyectable a  $X$  es una simetría Noether si y solo si  $L_{D^{(1)}}(\mathcal{L}\omega) = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $L_{D^{(1)}}(\mathcal{L}\omega) = \mathcal{L}'\omega$ , y  $\Theta'$  la forma de Poincaré-Cartan asociada a  $\mathcal{L}'$ . Por la proposición anterior  $L_{D^{(1)}}\Theta = \Theta'$ .

Si  $D$  es una simetría de Noether  $L_{D^{(1)}}\Theta = \Theta' = 0 = L_{D^{(1)}}(\theta \wedge \Omega_{\mathcal{L}}) - \mathcal{L}'$ . Especializando en una sección arbitraria  $j^1s$ :

$$\mathcal{L}'(j^1s)\omega = 0$$

Luego  $\mathcal{L}'\omega = L_{D^{(1)}}(\mathcal{L}\omega) = 0$

Recíprocamente, si  $L_{D^{(1)}}(\mathcal{L}\omega) = 0$  entonces  $\mathcal{L}' = 0$  con lo que  $\Theta' = 0$  y por tanto  $_{D^{(1)}}\Theta = 0$   $\square$

Si  $D$  es una simetría de Noether se tiene que  $L_{D^{(1)}}(\Theta) = i_{D^{(1)}}d\Theta + di_{D^{(1)}}\Theta = 0$ , por el teorema 7.5.2, para cada sección crítica del problema variacional definido por  $\mathcal{L}\omega$ , se cumple que  $d[(i_{D^{(1)}}\Theta)|_{j^1s}] = 0$ .

De esta manera, la forma

$$i_{D^{(1)}}\Theta$$

llamada el invariante Noether correspondiente a  $D$ , proporciona restringiendo a la sección crítica una  $(n-1)$ -forma cerrada en  $X$ .

Recordamos la fórmula de la expresión para la diferencial exterior de la forma de Poincaré-Cartan con respecto a la derivación  $\nabla$  en  $V(P)$

$$d_{\nabla}\Theta = -\theta \wedge (d_{\nabla}\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)$$

la cual usaremos junto con la diferencial exterior ordinaria de formas sobre  $J^1$ . Usaremos la misma expresión  $L_D$  para la derivada de Lie asociada a las diferenciales exteriores  $d$  y  $d_{\nabla}$ , donde en las formas en las cuales se aplica, indicarán que derivada de Lie estamos considerando.

**Definición 7.7.4.** *Un campo de vectores  $\pi$ -proyectable  $D$  en la variedad  $P$  se dice ser una simetría de Euler-Lagrange de la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}\omega$  si*

$$L_{D^{(1)}}(d_{\nabla}\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) = 0$$

**Teorema 7.7.5.** *Dados  $D_1$  y  $D_2$  dos simetrías de Euler-Lagrange, entonces la  $(n-1)$ -forma ordinaria en  $X$*

$$(j^1s)^*(i_{D_1^{(1)}}i_{D_2^{(1)}}d\Theta)$$

*es una forma cerrada para una sección crítica  $s$ . La forma*

$$i_{D_1^{(1)}}i_{D_2^{(1)}}d\Theta$$

*es llamada el invariante primero de Euler-Lagrange asociado a las simetrías  $D_1, D_2$  y a la conexión  $\nabla$ .*

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} d(i_{D_1^{(1)}}i_{D_2^{(1)}}d\Theta) &= L_{D_1^{(1)}}(i_{D_2^{(1)}}d\Theta) - i_{D_1^{(1)}}di_{D_2^{(1)}}\Theta = \\ &= i_{D_2^{(1)}}L_{D_1^{(1)}}d\Theta + i_{[D_1^{(1)}, D_2^{(1)}]}d\Theta - i_{D_1^{(1)}}L_{D_2^{(1)}}d\Theta \end{aligned}$$

donde, el segundo término se anula cuando restringimos a  $j^1s$  por el teorema 7.5.2. Siguiendo con el primer y tercer término, calcularemos

$$(j^1s)^*[i_{D_1^{(1)}}\{L_{D_2^{(1)}}d\Theta\}]$$

De la expresión en coordenadas locales (7.5) para  $d_{\nabla}\Theta$  y del hecho que  $D_2^{(1)}$  es una transformación infinitesimal de contacto. se sigue que la n-forma diferencial  $(j^1s)^*[i_{D_1^{(1)}}\{L_{D_2^{(1)}}d_{\nabla}\Theta\}]$  sobre  $X$ , no depende de la derivación  $\nabla$  utilizada para obtener  $d_{\nabla}\Theta$ . De esta manera podemos obtener  $(j^1s)^*[i_{D_1^{(1)}}\{L_{D_2^{(1)}}d\Theta\}]$  de  $(j^1s)^*[i_{D_1^{(1)}}\{L_{D_2^{(1)}}d_{\nabla}\Theta\}]$ . Así, como  $D_2$  es una simetría de Euler-Lagrange, se cumple

$$\begin{aligned} L_{D_2^{(1)}}d_{\nabla}\Theta &= -L_{D_2^{(1)}}\{\theta \wedge (d_{\nabla}\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f)\} = \\ &= -(L_{D_2^{(1)}}\theta) \wedge (d_{\nabla}\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} i_{D_1^{(1)}}(L_{D_2^{(1)}}d_{\nabla}\Theta) &= -(L_{D_2^{(1)}}\theta)(D_1^{(1)}) \wedge d_{\nabla}\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f + \\ &(L_{D_2^{(1)}}d_{\nabla}\Theta) \wedge i_{D_1^{(1)}}(d_{\nabla}\Omega_{\mathcal{L}} + \omega \otimes f) \end{aligned}$$

El primer término en esta expresión se anula cuando restringimos a  $j^1s$ , porque  $s$  es una sección crítica, también el segundo término se anula ya que contiene a la forma de estructura. De forma similar se llega a que  $(j^1s)^*[i_{D_2^{(1)}}\{L_{D_1^{(1)}}d\Theta\}] = 0$   $\square$

**Teorema 7.7.6.** *Si  $D_1$  es una simetría de Noether y  $D_2$  una simetría de Euler-Lagrange, la  $(n-1)$ -forma en  $X$*

$$(j^1s)^*[i_{D_2^{(1)}}d(i_{D_1^{(1)}}\Theta)]$$

es cerrada, donde  $s$  es una sección crítica del problema variacional definido por  $\mathcal{L}\omega$ . La forma

$$i_{D_2^{(1)}}d(i_{D_1^{(1)}}\Theta)$$

la llamaremos segundo invariante de Euler-Lagrange asociado a  $D_1$  y  $D_2$ .

*Demostración.* Tenemos

$$d\{i_{D_2^{(1)}}d(i_{D_1^{(1)}}\Theta)\} = L_{D_2^{(1)}}d(i_{D_1^{(1)}}\Theta) = L_{D_2^{(1)}}\{L_{D_1^{(1)}}\Theta - i_{D_1^{(1)}}d\Theta\} =$$

$$= -L_{D_2^{(1)}} i_{D_1^{(1)}} d\Theta = -i_{D_1^{(1)}} \{L_{D_2^{(1)}} d\Theta\} - i_{[D_1^{(1)}, D_2^{(1)}]} d\Theta$$

Así el segundo término de esta expresión se anula cuando restringimos a  $j^1s$  de nuevo por el teorema 7.5.2.

Por el mismo argumento de la proposición anterior. como  $D_2$  es una simetría de Euler-Lagrange tenemos que  $(j^1s)^*[i_{D_1^{(1)}} \{L_{D_2^{(1)}} d\Theta\}] = 0$ .  $\square$

**Teorema 7.7.7.** Sean  $D_1, \dots, D_n$  ( $n \geq 3$ ) simetrías de Noether con  $D_1$  y  $D_2$  linealmente independientes. La  $(n-1)$ -forma en  $X$

$$(j^1s)^*(i_{D_n^{(1)}} di_{D_{n-1}^{(1)}} d \dots i_{D_3^{(1)}} di_{D_2^{(1)}} i_{D_1^{(1)}} d\Theta)$$

es cerrada para cada sección crítica  $s$ .

La forma

$$i_{D_n^{(1)}} di_{D_{n-1}^{(1)}} d \dots i_{D_3^{(1)}} di_{D_2^{(1)}} i_{D_1^{(1)}} d\Theta$$

es llamada el invariante Noether asociado a  $D_1, \dots, D_n$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} & d\{i_{D_n^{(1)}} di_{D_{n-1}^{(1)}} d \dots i_{D_3^{(1)}} di_{D_2^{(1)}} i_{D_1^{(1)}} d\Theta\} \\ &= L_{D_n^{(1)}} (-i_{D_{n-1}^{(1)}} d + L_{D_{n-1}^{(1)}}) \cdots (-i_{D_2^{(1)}} d + L_{D_2^{(1)}}) (L_{D_1^{(1)}} - di_{D_1^{(1)}}) \Theta \\ &= (-1) L_{D_n^{(1)}} (-i_{D_{n-1}^{(1)}} d + L_{D_{n-1}^{(1)}}) \cdots (-i_{D_3^{(1)}} d + L_{D_3^{(1)}}) L_{D_2^{(1)}} - di_{D_1^{(1)}} \Theta \\ &= (-1) L_{D_n^{(1)}} (-i_{D_{n-1}^{(1)}} d + L_{D_{n-1}^{(1)}}) \cdots (-i_{D_3^{(1)}} d + L_{D_3^{(1)}}) d(i_{D_1^{(1)}} L_{D_2^{(1)}} - i_{[D_1^{(1)}, D_2^{(1)}]}) \Theta \\ &= (-1)^2 L_{D_n^{(1)}} (-i_{D_{n-1}^{(1)}} d + L_{D_{n-1}^{(1)}}) \cdots L_{D_3^{(1)}} di_{[D_1^{(1)}, D_2^{(1)}]} \Theta \\ &= (-1)^3 L_{D_n^{(1)}} (-i_{D_{n-1}^{(1)}} d + L_{D_{n-1}^{(1)}}) \cdots di_{[[D_1^{(1)}, D_2^{(1)}], D_3^{(1)}]} \Theta \\ &= \dots \\ &= (-1)^n di_{[[[D_1^{(1)}, D_2^{(1)}], D_3^{(1)}], \dots, D_n^{(1)}]} \Theta \\ &= (-1)^{n+1} i_{[[[D_1^{(1)}, D_2^{(1)}], D_3^{(1)}], \dots, D_n^{(1)}]} d\Theta \end{aligned}$$

y este último término es cero cuando restringimos al elemento  $j^1s$  de la sección.  $\square$

# Capítulo 8

## Sistemas de ecuaciones de Hamilton-Jacobi

### 8.1. Introducción

La teoría de Hamilton-Jacobi surge con William Hamilton en los años 20 del siglo XIX, quien llevó su propósito de unificación de los conceptos de onda y partícula de la luz, bajo la óptica geométrica, para cristalizar en 1835 en el método de transformaciones canónicas para determinar trayectorias de sistemas. Después Carl Gustav Jacobi interpretó la dinámica de sistemas mecánicos en términos de soluciones completas de la ecuación asociada en derivadas parciales.

Vamos a hacer un breve resumen de lo que se consigue y pretende con la teoría clásica de Hamilton-Jacobi.

Sean las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} ; \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

Se pretende encontrar una transformación canónica libre ( $\frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0$ ) tal que el nuevo hamiltoniano sea idénticamente nulo ( $H = 0$ ), es decir,

$$\frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_j} = 0 ; \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_j} = 0$$

Si esto fuese así, podríamos integrar fácilmente y obtendríamos

$$Q_j(q, p, t) = \alpha_j ; P_j(q, p, t) = -\beta_j$$

con  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  constantes. Deshaciendo la transformación canónica llegaríamos a

$$q_j = q_j(\alpha, \beta, t) ; p_j = p_j(\alpha, \beta, t)$$

Por lo tanto el problema se resume en encontrar la función generatriz  $S(q, p, t)$  que logre lo anteriormente explicado, es decir que verifique

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, p, t) + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0$$

Así si encontramos la función  $S$  que verifique esta última ecuación y con la condición de  $\det(\partial^2 S / \partial q_j \partial Q_i) \neq 0$ , tenemos que las ecuaciones  $\frac{\partial S}{\partial q_j} = cp_j$  y  $\frac{\partial S}{\partial Q_j} = -p_j$  definen la transformación canónica buscada. Ahora tomando  $Q_j = \alpha_j$  constante tenemos que las ecuaciones del movimiento son

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j ; \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j$$

Haciendo esto lo que se gana es que el problema se reduce a encontrar una solución de una única ecuación en derivadas parciales (sin ser un problema sencillo) en vez de encontrar las ecuaciones del movimiento y luego resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La teoría tiene su traducción geométrica considerando una variedad  $Q$  y el fibrado cotangente  $T^*Q$  (sería el espacio de fases), dotado con su estructura symplectica  $\omega_2$ .

Si consideramos, de nuevo, la ecuación de Hamilton-Jacobi  $\frac{\partial S}{\partial t}(q, p, t) + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0$  y hacemos el cambio  $S = W - Et$  obtenemos la ecuación

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t) = E$$

, la cual en terminos geométricos sería  $(dW)^*H = E$ , donde  $dW : Q \rightarrow T^*Q$  es una sección de  $T^*Q$ . Como veremos lo que se pretende es encontrar subvariedades lagrangianas  $L \subset T^*Q$  y campos de vectores  $Z_H \in \mathfrak{X}(L)$  de manera que verifiquen la ecuación  $i_{Z_H}\omega_2 = dH$  lo que implica que  $H|_L = 0$  y las curvas integrales de  $Z_H$  serán las trayectorias del sistema.

En este capítulo consideraremos los sistemas de ecuaciones de Hamilton-Jacobi sometido a la condición de compatibilidad (el carácter involutivo) y consideramos el problema geométrico clásico de encontrar foliaciones transversales a las fibras de  $T^*Q$  e invariantes bajo cambios dinámicos. Un argumento, que nos lleva a la consideración de coordenadas de Darboux, nos permitirá resolver el problema localmente.

La importancia del procedimiento de reducción de Marsden-Weinstein junto con la técnica de generación de funciones motivó la consideración de la

reducción en la teoría de Hamilton-Jacobi. Por tanto la última sección del capítulo se dedica a extender los procedimientos de reducción y reconstrucción para el marco de los sistemas involutivos.

## 8.2. Preliminares

**Definición 8.2.1.** *Una variedad simpléctica es una variedad diferenciable  $M$ , equipada con una 2-forma diferencial cerrada, no degenerada  $\omega_2$  que llamaremos forma simpléctica.*

Por la antisimetría de  $\omega_2$  se tiene que la dimensión de  $M$  debe ser par.

**Ejemplo 8.2.2.** 1.  $\mathbb{R}^{2n}$  con las coordenadas  $(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n)$  definiendo  $\omega_2 = \sum_{i=1}^n dx \wedge dy_i$  es una variedad simpléctica.

2. Dada una variedad  $Q$  veamos que su fibrado cotangente  $T^*Q$  (con la proyección natural  $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$ ) tiene estructura de variedad simpléctica.

Para ello consideramos la 1-forma de Liouville o canónica,  $\omega_1$ , definida de la siguiente manera. Sea  $X \in T_{\alpha_q}(T^*Q)$

$$\omega_1(X) = \alpha_q(\pi_{Q*}(X))$$

donde  $\pi_{Q*} : T(T^*Q) \rightarrow TQ$ .

Consideremos  $(q^1, \dots, q^n)$  coordenadas locales en  $Q$ , entonces  $(dq^1, \dots, dq^n)$  es una base de  $T_q^*Q$ . Así cualquier 1-forma será  $\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$ . De esta forma se inducen coordenadas locales  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  en  $T^*Q$ . Con estas coordenadas tenemos que  $(dq^1_{|\alpha_q}, \dots, dq^n_{|\alpha_q}, dp_1_{|\alpha_q}, \dots, dp_n_{|\alpha_q})$  es una base de  $T_{\alpha_q}(T^*Q)$ .

Así  $\omega_1 = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$  es diferenciable porque los  $p_i$  lo son. Definimos la 2-forma dada por  $\omega_2 = -d\omega_1$ . Claramente es una 2-forma cerrada. Veamos que es no degenerada. Se tiene que  $\omega_2 = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$

Sea  $X = \sum_{i=1}^n q_j dq^j + p_j dp_j$  tal que  $\omega_2(X, Y) = 0$  para todo  $Y \in T_{\alpha_q}(T^*Q)$ . Si consideramos  $Y_j = dq^j$  y  $Z_j = dp_j \in T_{\alpha_q}(T^*Q)$  tenemos que  $\omega(X, Y_j) = q_j = 0$  y  $\omega(X, Z_j) = p_j = 0$ , con lo cual  $X = 0$  y vemos que es no-degenerada.

3. Sea  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera y sea  $p = (x, y, z) \in S^2$ , se tiene que  $T_p S^2 = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 / v \cdot p = xv^1 + yv^2 + zv^3 = 0\}$ .

Definimos la 2-forma en  $S^2$  por

$$\omega(p)(u, v) = p \cdot (u \times v)$$

con  $u, v \in T_p S^2$  donde  $\times$  es el producto vectorial.

Tenemos que  $\omega$  es bilineal, antisimétrica por las propiedades del producto vectorial. Es cerrada por ser 2 la dimensión de la esfera. Además es no degenerada ya que tomando  $v = u \times p \neq 0$  se cumple que  $\omega(p)(u, v) \neq 0$ . Con lo que  $\omega$  es una 2-forma simpléctica.

**Definición 8.2.3.** Sea  $(M_1, \omega_1)$  y  $(M_2, \omega_2)$  dos variedades simplécticas. Una función  $f : M_1 \rightarrow M_2$  se dice que es un simplectomorfismo si  $f^* \omega_2 = \omega_1$

**Definición 8.2.4.** Sea  $(M, \omega_2)$  una variedad simpléctica, un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se llama simetría infinitesimal de la estructura simpléctica si  $L_X \omega_2 = 0$ .

**Proposición 8.2.5.** Sea  $(M, \omega_2)$  una variedad simpléctica y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Son equivalentes:

1.  $X$  es simetría infinitesimal
2.  $i_X \omega_2$  es cerrada
3. El flujo de  $X$  es un simplectomorfismo,
4. Para todo  $x \in M$  existe un abierto  $U \subset M$  de  $x$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable tal que  $i_X \omega_2 = df$ .

*Demostración.* (1)  $\Leftrightarrow$  (2). Con la siguiente igualdad se demuestra trivialmente

$$L_X \omega_2 = i_X \omega_2 + di_X \omega_2 = di_X \omega_2 = 0$$

(2)  $\Leftrightarrow$  (3). Tenemos que  $\frac{d}{dt} \phi_t^*(\omega_2) = L_X \omega_2$  donde  $\phi_t$  es el flujo del campo  $X$ . Si  $L_X \omega_2 = 0$  entonces  $\phi_t^*(\omega_2) = cte$  pero como  $\phi_0^*(\omega_2) = \omega_2$  obtenemos que  $\phi_t^*(\omega_2) = \omega_2$  con lo que el flujo de  $X$  es simplectomorfismo.

Si el flujo es un simplectomorfismo entonces por el mismo razonamiento anterior  $L_X \omega_2 = 0$

(2)  $\Leftrightarrow$  (4) Se demuestra aplicando el lema de Poincare, que nos dice que toda forma cerrada es localmente exacta, a la forma  $i_X \omega_2$ .

□

**Definición 8.2.6.** Dada  $(M, \omega_2)$  una variedad simpléctica. Sea una cierta función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .  $X_f \in \mathfrak{X}(M)$  es llamado campo de vector hamiltoniano si  $i_{X_f}(\omega_2) = df$ .

El campo de vectores hamiltoniano existe siempre porque la aplicación  $h : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  definida por  $h(X) = i_X \omega_2$  es un isomorfismo al ser  $\omega_2$  no degenerada. Claramente se tiene que si  $X$  es hamiltoniano entonces es una simetría infinitesimal.

**Proposición 8.2.7.** *Sea  $(M, \omega_2)$  una variedad simpléctica. Sea  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $(H \circ \sigma) = cte$  donde  $\sigma$  es la curva integral del campo hamiltoniano  $X_H$ .*

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(\sigma(t))) &= dH(\sigma(t))(X_H(\sigma(t))) = \\ &= \omega_2(X_H(\sigma(t)), X_H(\sigma(t))) = 0 \end{aligned}$$

□

**Proposición 8.2.8.** *Sean  $(M_1, \omega_1)$  y  $(M_2, \omega_2)$  dos variedades simplécticas y  $H \in C^\infty(M_2)$ . Si el difeomorfismo  $F : M_1 \rightarrow M_2$  es un simplectomorfismo, entonces*

$$F_*(X_{H \circ F}) = X_H$$

*Demostración.* Dado  $x \in M_1$  y  $v \in T_x M_1$  se tiene

$$\begin{aligned} v(H \circ F)(x) &= F_{*x}(v)(H) = dH(F(x))(F_{*x}(v)) = \\ &= \omega_2(X_H(F(x)), F_{*x}(v)) \end{aligned}$$

Por otro lado usando que  $F$  es un simplectomorfismo

$$\begin{aligned} v(H \circ F)(x) &= d(H \circ F)(x)(v) = \omega_1(X_{H \circ F}(x), v) = F^* \omega_2(X_{H \circ F}(x), v) = \\ &= \omega_2((F_{*x} X_{H \circ F}(x), F_{*x}(v))) \end{aligned}$$

por la bilinealidad de  $\omega_2$

$$0 = \omega_2((F_{*x}(X_{H \circ F}(x) - X_H(F(x))), F_{*x}(v)))$$

Como  $F_{*x}$  es sobreyectiva y  $\omega_2$  es no degenerada se tiene que

$$F_*(X_{H \circ F}) = X_H$$

□

**Definición 8.2.9.** Sea  $(M, \omega_2)$  una variedad simpléctica. Sean  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones diferenciables. Se define el corchete de Poisson como  $[f, g] = \omega_2(X_f, X_g)$ , donde  $X_f, X_g$  son los campos de vectores hamiltonianos de  $f$  y  $g$  respectivamente.

**Proposición 8.2.10.** En las condiciones de la definición anterior se cumple

$$[f, g] = X_f(g) = L_{X_f}g = -L_{X_g}(f)$$

*Demostración.* Se tiene

$$X_f(g) = L_{X_f}g = i_{X_f}dg = i_{X_f}i_{X_g}\omega_2 = \omega_2(X_f, X_g) = [f, g]$$

□

**Proposición 8.2.11.** El corchete de Poisson satisface

1. Es bilineal
2. Es antisimétrico
3. (Identidad de Jacobi)  $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$
4. (Regla de Leibniz)  $[f, gh] = h[f, g] + g[f, h]$
5. Si  $\phi : M_1 \rightarrow M_2$  es un simplectomorfismo entonces  $\phi^*([f, g]) = [\phi^*(f), \phi^*(g)]$

*Demostración.* 1.  $[af+bg, h] = X_h(af+bg) = aX_h(f)+bX_h(g) = a[f, h]+b[g, h]$

$$2. [f, g] = \omega_2(X_f, X_g) = -\omega_2(X_g, X_f) = -[g, f]$$

3. Vamos a usar la misma notación para el corchete de Lie y de Poisson. Como  $\omega_2$  es cerrada tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_2(X_f, X_g, X_h) = X_h(\omega_2(X_f, X_g)) - X_g(\omega_2(X_h, X_f)) + X_f(\omega_2(X_h, X_g)) \\ &\quad - \omega_2([X_h, X_g], X_f) + \omega_2([X_h, X_f], X_g) - \omega_2([X_g, X_f], X_h) \\ &= [[g, f], h] - [[h, f], g] + [[h, g], f] - i_{[X_h, X_g]}\omega_2(X_f) \\ &\quad + i_{[X_h, X_f]}\omega_2(X_g) - i_{[X_g, X_f]}\omega_2(X_h) \\ &= [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] \\ &\quad - (L_{X_h}i_{X_g})(X_f) + (L_{X_h}i_{X_f})(X_g) - (L_{X_g}i_{X_f})(X_h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] \\
&- (L_{X_h} dg)(X_f) + (L_{X_h} df)(X_g) - (L_{X_g} df)(X_h) \\
&= [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] \\
&- (d[g, h])(X_f) + (d[f, h])(X_g) - (d[f, g])(X_h) \\
&= 2([f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]])
\end{aligned}$$

4.  $[f, gh] = -[gh, f] = -X_f(gh) = -hX_f(g) - gX_f(h) = h[f, g] + g[f, h]$

5. Sea  $x \in M_1$  usando la proposición 8.2.8 se tiene

$$\begin{aligned}
(\phi^*[f, g])(x) &= [f, g](\phi(x)) = X_g(f)(\phi(x)) = \\
&= X_g(\phi(x))(f) = (\phi_{*x}(X_{\phi^*g})(x))(f) = \\
&= X_{\phi^*g}(x)(\phi^*f) = [\phi^*f, \phi^*g](x)
\end{aligned}$$

□

Por tanto  $C^\infty(M)$  con el corchete de Poisson es un álgebra de Lie.

**Proposición 8.2.12.** Sea  $f, g \in C^\infty(M)$  y  $\sigma$  una curva integral de  $X_g$ . Entonces

$$\frac{d}{dt}(f \circ \sigma) = [f, g] \circ \sigma$$

*Demostración.*

$$\frac{d}{dt}(f \circ \sigma) = X_g(\sigma(t))(f) = [f, g] \circ \sigma(t)$$

□

**Corolario 8.2.13.**  $f$  es constante en las curvas integrales de  $X_g$  si y solo si  $[f, g] = 0$

**Definición 8.2.14.** Sea  $(M, \omega_2)$  una variedad simpléctica de dimensión  $2n$  y sea  $N$  una subvariedad de  $M$ . Para cada  $p \in N$  definimos

$$(T_p N)^\perp = \{X \in T_p M / \omega_2(X, Y) = 0; \forall Y \in T_p N\}$$

y lo llamaremos el complemento ortogonal de  $T_p N$  en  $T_p M$ . Diremos que  $N$  es una variedad coisotrópica de  $M$  de dimensión  $m$  si para cada  $p \in N$  se cumple que  $(T_p N)^\perp \subseteq T_p N$ . Claramente se tiene que  $2n - m \leq m$  lo que implica que  $n \leq m$ . En el caso en que  $\dim(N) = n$  se dice que  $N$  es una subvariedad lagrangiana de  $M$  y se cumple que  $(T_p N)^\perp = T_p N$ .

**Proposición 8.2.15.** Sea  $(M, \omega_2)$  una variedad simpléctica de dimensión  $2n$ . Se tiene que una subvariedad  $j : N \hookrightarrow M$  de dimensión  $n$  es lagrangiana si y solo si  $\omega_{2|_N} = 0$  si y solo si  $j^*\omega = 0$

*Demostración.* Si  $N$  es lagrangiana entonces  $(T_p N)^\perp = T_p N$  y claramente  $\omega_{2|_N} = 0$ . El contrario es claro ya que al ser  $\omega_2(X, Y) = 0$  para todo  $X, Y \in T_p N$  se tiene que  $T_p N \subseteq (T_p N)^\perp$  y al tener la misma dimensión se cumple que es lagrangiana.  $\square$

**Proposición 8.2.16.** Sea  $(M, \omega_2)$  una variedad simpléctica de dimensión  $2n$  se tiene

1. Si  $N$  es una subvariedad lagrangiana de  $M$  de dimensión  $m = 2n - r$ . Sea  $\mathcal{I}$  un haz de funciones de  $N$ . Sea  $f_1, \dots, f_r$  los generadores locales de  $\mathcal{I}$  en el abierto  $U \subset M$ . Entonces los campos de vectores hamiltonianos  $X_{f_i} (1 \leq i \leq r)$  constituyen una base de  $(T_p N)^\perp$  para todo  $p \in U \cap N$
2.  $N$  es coisotrópica si y solo si el corchete de Poisson se anula en  $\mathcal{I}$ .

*Demostración.* 1. Si  $X \in T_p N$  para cada  $1 \leq i \leq r$  se tiene que

$$0 = X f_i = df_{i_p}(X) = \omega_{2_p}(X_{f_i}, X)$$

por tanto  $X_{f_i} \in (T_p N)^\perp$  y son una base.

2. Teniendo en cuenta que para cada  $1 \leq i, k \leq r$  se cumple que  $X_{f_i} f_k = [f_i, f_k]$ , se tiene que  $[f_i, f_k] = 0$  si y solo si  $X_{f_i}(f_k) = 0$  si y solo si  $X_{f_i} \in \mathfrak{X}(N \cap U)$  si y solo si  $N$  es coisotrópica, al ser  $X_{f_i}$  una base de  $(T_p N)^\perp$  por el apartado (1)

$\square$

**Proposición 8.2.17.** Sea  $(M, \omega_2)$  una variedad simpléctica y sea  $j : L \rightarrow M$  una subvariedad lagrangiana. Si  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función (hamiltoniano) entonces  $H$  es constante en  $L$  si y solo si  $X_H$  es tangente a  $L$ , es decir, en cualquier punto  $p \in L$  se tiene que  $X_H \in T_p L$ .

*Demostración.* Si  $H$  es constante en  $L$  significa que  $dH(X) = 0$  para todo  $X \in T_p L$ . Teniendo en cuenta que  $\omega_2(X_H, Y) = (i_{X_H} \omega_2)(Y) = dH(Y) = 0$  con  $Y \in T_p L$ , por tanto  $X_H \in (T_p L)^\perp$  y como  $T_p L = (T_p L)^\perp$  se tiene que  $X_H \in T_p L$ . EL recíproco se hace utilizando el mismo argumento.  $\square$

**Definición 8.2.18.** Se dice que una variedad simpléctica  $(M, \omega_2)$  es homogénea si existe una 1-forma  $\omega_1$  en  $M$  tal que  $\omega_2 = d\omega_1$ .

**Proposición 8.2.19.** *El campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es hamiltoniano en una variedad homogénea  $(M, \omega_2)$  si y solo si  $L_X \omega_1$  es exacta.*

*Demostración.* Se verifica que

$$L_X \omega_1 = d(i_X \omega_1) + i_d \omega_1 = d\omega_1(X) + i_X \omega_2$$

Si  $L_X \omega_1$  es exacta entonces  $L_X \omega_1 = df$  para una cierta función  $f$ . Luego  $i_X \omega_2 = df - d\omega_1(X) = d(f - \omega_1(X))$ , con lo que  $X$  es hamiltoniano.

Al contrario si  $i_X \omega_2$  es hamiltoniano entonces  $i_X \omega_2 = df$  lo que implica que  $L_X \omega_1 = d(\omega_2(X) + f)$  y  $L_X \omega_1$  es exacta  $\square$

**Definición 8.2.20.** *Sea  $G$  un grupo de Lie conexo y  $\mathcal{G}$  su álgebra de Lie. Supongamos que existe una acción por la izquierda libre y propia de  $G$  en la variedad simpléctica  $(M, \omega_2)$ . Se dice que la acción es simpléctica si para cada  $g \in G$  se tiene que  $g^* \omega_2 = \omega_2$  donde  $g^*$  denota el pullback en las formas diferenciales en  $M$ .*

**Proposición 8.2.21.** *Se tiene que si una acción es simpléctica entonces  $L_{A^*} \omega_2 = 0$  lo que es equivalente a que  $i_{A^*} \omega_2$  sea una 1-forma cerrada.*

*Demostración.* Si la acción es simpléctica se tiene que  $\tau^* \omega_2 = \omega_2$ . Con lo cual  $L_{A^*} \omega_2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau^* \omega_2 - \omega_2}{t} = 0$

Para ver que  $L_{A^*} \omega_2 = 0$  es equivalente a que  $i_{A^*} \omega_2$  es cerrada solo hay que tener en cuenta que  $L_{A^*} \omega_2 = di_{A^*} \omega_2 + i_{A^*} d\omega_2 = di_{A^*} \omega_2$   $\square$

**Definición 8.2.22.** *Si para cada  $A \in \mathcal{G}$  se cumple que  $i_{A^*} \omega_2 = df_{A^*}$  para alguna  $f_{A^*}; M \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que la acción de  $G$  en  $M$  es hamiltoniana.*

**Definición 8.2.23.** *Si la acción de  $G$  en  $M$  es hamiltoniana se define la aplicación momento  $J : M \rightarrow \mathcal{G}^*$  en la que para cada  $x \in M$  le hace corresponde una aplicación lineal  $J(x) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $J(x)(A) = f_{A^*}(x)$*

**Definición 8.2.24.** *Sea  $(Q, \omega_2)$  con una acción en  $G$ . Consideremos el fibrado cotangente  $M = T^*Q$ . Sea  $(q, p) \in M$  y sea  $\phi_g : Q \rightarrow Q$  la acción de  $G$  en  $Q$ . Se define la acción de  $G$  en  $M$  mediante*

$$\psi_g(q, p) = (\phi_g q, \phi_{g^{-1}}^* p)$$

**Proposición 8.2.25.** *Consideremos la variedad simpléctica  $(T^*Q, \omega_2)$  definida en el ejemplo 8.2.2. La acción de la definición anterior es simpléctica y hamiltoniana.*

*Demostración.* Se verifica que

$$\psi_g^* \omega_2 = -\psi_g^* d\omega_1 = -d\psi_g^* \omega_1$$

donde  $\omega_1$  es la 1-forma de Liouville. Ahora bien si  $(u, v) \in T_{(q,p)}(T^*Q)$

$$\begin{aligned} \psi_g^* \omega_{1(q,p)}(u, v) &= \omega_{1(\phi_g q, \phi_{g^{-1}}^*(p))}(\psi_{g^*}(u, v)) = \\ &= \phi_{g^{-1}}^* p(\phi_{g^*}(u)) = p(u) = \omega_{1(q,p)}(u, v) \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\psi_g^*(\omega_2) = -d\psi_g^* \omega_1 = -d\omega_1 = \omega_2$$

y la acción es simpléctica.

Por lo hecho anteriormente tenemos que  $\psi_g^* \omega_1 = \omega_1$  y por la proposición 8.2.21 se tiene que  $L_{A^*} \omega_1 = 0$  con lo que tenemos que

$$i_{A^*} \omega_2 = -i_{A^*} d\omega_1 = d(i_{A^*} \omega_1 - L_{A^*} \omega_1) = di_{A^*} \omega_1 = d(\omega_1(A^*))$$

y por tanto la acción es hamiltoniana.  $\square$

**Proposición 8.2.26.** *La aplicación momento  $J : T^*Q \rightarrow \mathcal{G}^*$  está dada por  $J(\alpha_q)(A) = P_{A^*}(\alpha_q)$  donde  $P_X : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $P_X(\alpha_q) = \alpha_q(X)$*

*Demostración.* Se tiene que

$$\omega_1(A^*)(\alpha_q) = \alpha_q(\pi_{Q^*}(A^*)) = \alpha_q(A^*) = P_{A^*}(\alpha_q)$$

Por tanto  $i_{A^*} \omega_2 = dP_{A^*}$  y así la aplicación momento es  $J(\alpha_q)(A) = P_{A^*}(\alpha_q)$

Aquí hemos usado la misma notación  $A^*$  para el campo de vectores fundamental asociado a la acción de  $G$  en  $Q$  y de  $G$  en  $T^*Q$  y que la última proyecta en la anterior.  $\square$

**Proposición 8.2.27.** *La aplicación  $J : T^*Q \rightarrow \mathcal{G}^*$  definida en la proposición anterior es  $G$ -equivariante, es decir,  $J(\psi_g^* \alpha_q) = ad_{g^{-1}}^* J(\alpha_q)$*

*Demostración.* Sea  $A \in \mathcal{G}$  se verifica que

$$\begin{aligned} J(\psi_g^* \alpha_q)(A) &= P_{A^*}(g^* \alpha_q) = g^* \alpha_q(A^*) = \alpha_q((\psi_g)_* A^*) = \alpha_q((ad_{g^{-1}} A)^*) = \\ &= \alpha_q(ad_{g^{-1}*} A^*) = ad_{g^{-1}}^*(\alpha_q(A^*)) = ad_{g^{-1}}^*(P_{A^*}(\alpha_q)) = ad_{g^{-1}}^* J(\alpha_q)(A) \end{aligned}$$

$\square$

**Proposición 8.2.28.** Sea  $\mu \in \mathcal{G}^*$  se tiene que  $J^{-1}(\mu)$  es una subvariedad de  $T^*Q$ , donde  $J$  es la aplicación momento definida en la proposición 8.2.26.

*Demostración.* Sea  $\mu \in \mathcal{G}^*$ . Sea  $\alpha_q \in J^{-1}(\mu)$  pretendemos ver que  $J$  es una submersión en cada  $\alpha_q$  es decir que  $J_*(\alpha_q)$  sea suprayectiva. Esto es equivalente a probar que el aniquilador de  $\text{Im}(J_*(\alpha_q)) = \{0\}$ . Tomemos  $A \in \mathcal{G}$  de manera que  $J_*(\alpha_q)(X)(A) = 0$  para todo  $X \in T_p(T^*Q)$ . Así vemos que

$$0 = J_*(\alpha_q)(X)(A) = dP_{A^*}(X) = i_{A^*}\omega_2(X) = \omega_2(X, A^*)$$

con lo cual tenemos que  $A^*(p) = 0$  y por ser una acción libre  $A = 0$ . Por lo tanto todos los  $\mu \in \mathcal{G}^*$  son regulares y aplicando la proposición 4.0.8  $J^{-1}(\mu)$  es una subvariedad de  $T^*Q$   $\square$

**Definición 8.2.29.** Sea  $\mu \in \mathcal{G}^*$  verificando que  $\text{ad}_{g^{-1}}^*\mu = \mu$ . Sea la variedad cociente  $J^{-1}(\mu)/G$  cuya proyección canónica es  $\pi : J^{-1}(\mu) \rightarrow J^{-1}(\mu)/G$ . Definimos la 2-forma  $\bar{\omega}_2$  por

$$\bar{\omega}_2(\bar{X}_{\alpha_q}, \bar{Y}_{\alpha_q}) = \omega_2(X_{\alpha_q}, Y_{\alpha_q})$$

donde  $\bar{X}_{\alpha_q}, \bar{Y}_{\alpha_q}$  son las clases de  $X_{\alpha_q}, Y_{\alpha_q}$  respectivamente de  $T_{\alpha_q}J^{-1}(\mu)/T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q)$ .

**Lema 8.2.30.** Se tiene que  $T_{\alpha_q}J^{-1}(\mu) = T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q)^\perp$ .

*Demostración.* Tenemos que  $T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q) = \{A^*(\alpha_q)/A \in \mathcal{G}\}$  y  $\ker J_* = T_{\alpha_q}(J^{-1}(\mu))$ . Sea  $X \in T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q)$ , existirá un  $A \in \mathcal{G}$  tal que  $X = A^*(\alpha_q)$ . Sea ahora  $Y \in T_{\alpha_q}(J^{-1}(\mu))$  se cumple que

$$\omega_2(A^*(\alpha_q), Y) = (i_{A^*}\omega_2)(Y) = dP_{A^*}(Y) = J_{*\alpha_q}(Y)(A)$$

Entonces si  $Y \in T_{\alpha_q}(J^{-1}(\mu))$  se tiene que  $\omega_2(X, Y) = J_{*\alpha_q}(Y)(A) = 0$  luego  $Y \in T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q)^\perp$ .

Si  $Y \in T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q)^\perp$  entonces para todo  $X \in T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q)$  se tiene que  $\omega_2(X, Y) = 0 = J_{*\alpha_q}(Y)(A)$  y por tanto  $Y \in T_{\alpha_q}(J^{-1}(\mu))$   $\square$

**Proposición 8.2.31.** La 2-forma de la definición anterior,  $\bar{\omega}_2$ , está bien definida.

*Demostración.* Sean  $\bar{X}_1$  y  $\bar{X}_2$  que están en la misma clase de equivalencia de  $T_{\alpha_q}J^{-1}(\mu)/T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q)$ . Sean  $X_1, X_2 \in T_{\alpha_q}J^{-1}(\mu)$  los campos de vectores cumpliendo que  $\pi_*(X_1) = \pi_*(X_2)$ . Se tiene que  $\pi_*(X_1 - X_2) = 0$  lo que implica que  $X_1 - X_2 \in T_{\alpha_q}(J^{-1}(\mu)) = T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q)^\perp$ . Con lo cual  $\omega_2(X_1 - X_2, Y) = 0$  para todo  $Y \in T_{\alpha_q}J^{-1}(\mu)$ , con lo cual no depende del representante elegido.  $\square$

**Proposición 8.2.32.** Sea  $\mu \in \mathcal{G}^*$  verificando que  $ad_{g^{-1}}^* \mu = \mu$ . La variedad  $J^{-1}(\mu)$  es una variedad coisotrópica.

*Demostración.* Por el lema 8.2.30 se tiene que  $(T_{\alpha_q}(J^{-1}(\mu)))^\perp = T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q)$  para todo  $\alpha_q \in J^{-1}(\mu)$ . De esta manera, por ser  $J$  equivariante, se cumple  $J(\psi_g^*(\alpha_q)) = ad_{g^{-1}}^* J(\alpha_q) = ad_{g^{-1}}^* \mu = \mu$ . Luego  $\psi_g^*(\alpha_q) \in J^{-1}(\mu)$ . Con lo que  $T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q) \subset T_{\alpha_q} J^{-1}(\mu)$ . Así tenemos que

$$T_{\alpha_q} J^{-1}(\mu)^\perp = T_{\alpha_q}(G \cdot \alpha_q) \subset T_{\alpha_q} J^{-1}(\mu)$$

y se cumple que  $J^{-1}(\mu)$  es coisotrópica.  $\square$

**Proposición 8.2.33.** Si tenemos una forma cerrada  $\alpha : Q \rightarrow T^*Q$  la  $Im(\alpha)$  es una subvariedad lagrangiana.

*Demostración.* Para ver esto tenemos que ver primero que  $\alpha^* \omega_1 = \alpha$ . Sea  $Y$  un campo de vectores en el punto  $(q, \alpha_q)$ .

$$\alpha^*(\omega_q(Y)) = \omega_1(\alpha_*(Y)) = \alpha_q(\pi_{Q^*} \alpha_*(Y)) = \alpha(Y)$$

donde hemos usado que  $\pi \circ \alpha = id$  y que  $\alpha_q = \alpha$  a lo largo de la imagen de  $\alpha$ .

De esta forma tenemos que

$$\alpha^* \omega_2 = d\alpha^* \omega_1 = d\alpha = 0$$

con lo cual  $Im\alpha$  es una subvariedad lagrangiana.  $\square$

El marco geométrico de la teoría de Hamilton-Jacobi en un espacio  $Q$   $n$ -dimensional es el espacio de fase de momentos  $T^*Q$  y su estructura simpléctica canónica exacta  $\omega_2$  utilizada anteriormente. Así, dado un hamiltoniano  $H \in C^\infty(T^*Q)$  existe un campo de vectores  $X_H$  previsto de la ecuación dinámica

$$i_{X_H} \omega_2 = dH$$

cuyas curvas integrales son las trayectorias del sistema.

En la formulación clásica, el problema de Hamilton-Jacobi consiste en encontrar una función  $S(t, q)$  que satisfaga la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) = 0$$

Si escribimos  $S = W - Et$  con  $E \in \mathbb{R}$  constante la función  $W$  satisface

$$H(t, q, \frac{\partial W}{\partial q}) = E$$

En términos geométricos la ecuación es  $(dW)^*H = E$  donde  $dW^*$  es una sección de  $T^*Q$ . Como las formas cerradas son exactas localmente, buscamos 1-formas cerradas  $\alpha : Q \rightarrow T^*Q$  tales que  $H|_{Im\alpha} = E$ . Que  $\alpha$  sea cerrada implica que  $Im\alpha$  es una subvariedad lagrangiana de  $T^*Q$  por la proposición anterior. Nuestro objetivo es encontrar subvariedades lagrangianas  $L \subset T^*Q$  y campos de vectores  $Z_H \in \mathfrak{X}(L)$  de manera que las curvas integrales contenidas en  $L$  sean las trayectorias del sistema.

**Teorema 8.2.34.** (Hamilton-Jacobi) Sea  $(T^*Q, \omega_2)$ . Consideremos la ecuación

$$i_{Z_H}\omega_2 = dH$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una subvariedad lagrangiana  $L \subset T^*Q$

1. El campo de vectores  $Z_H$  es tangente a  $L$ .
2.  $H|_L$  es constante.

En cualquiera de los casos decimos que  $L$  es una solución de  $i_{Z_H}\omega_2 = dH$ .

*Demostración.* Si  $Z_H \in \mathfrak{X}(L)$  entonces podemos restringir la ecuación  $i_{Z_H}\omega_2 = dH$  a  $L$  y así  $\omega_2|_L = 0$  y  $H|_L$  es constante.

Al contrario si  $H|_L$  es constante entonces  $Z_H \in \mathfrak{X}(L)^\perp$ , pero como  $L$  es lagrangiana se tiene que  $Z_H \in \mathfrak{X}(L)$ .  $\square$

Consideremos ahora  $(q_i)$  las coordenadas de  $Q$  y sea  $(q_i, p_i)$  las coordenadas inducidas en  $T^*Q$ . Si  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dq_i$  es una 1-forma cerrada, como las funciones  $f_i = \alpha_i - p_i$  con  $1 \leq i \leq n$  generan la subvariedad lagrangiana  $Im\alpha$  en  $T^*Q$ , los campos de vectores hamiltonianos  $X_{f_i}$  con  $1 \leq i \leq n$  generan, por la proposición 8.2.16, el complemento ortogonal de  $(T_x(Im\alpha))^\perp$  con  $x \in Im\alpha$ .

De esta forma la condición necesaria y suficiente para que  $Im\alpha$  sea una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi es que  $\omega_2(X_{f_i}, X_H) = 0$  para todo  $x \in Im\alpha$

**Proposición 8.2.35.** La 1-forma cerrada  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dq_i$  en  $Q$  es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi  $i_{Z_H}\omega_2 = dH$  si y solo si  $Z_{H,x}(\alpha_i - p_i) = 0$  para todo  $x \in L$   $1 \leq i \leq n$

*Demostración.* Solo hay que tener en cuenta lo antes comentado y que  $0 = \omega_2(X_{f_i}, X_H) = [f_i, H] = X_H(f_i) = X_H(\alpha_i - p_i)$ .  $\square$

### 8.3. Sistemas involutivos

Consideremos el sistema de ecuaciones de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} i_{X_{H_1}} \omega_2 = dH_1 \\ \dots \\ i_{X_{H_k}} \omega_2 = dH_k \end{cases} \quad (8.1)$$

donde las funciones  $H_i$  están en involución por parejas, es decir,  $[H_i, H_j] = 0 = \omega_2(X_{H_i}, X_{H_j})$  con  $1 \leq i, j \leq k$  y cuyas diferenciales son linealmente independientes en cada punto de  $T^*Q$ . En este caso decimos que el sistema es involutivo.

En el marco de referencia de la teoría de Hamilton-Jacobi, la cuestión es encontrar subvariedades lagrangianas  $L$  de  $T^*Q$  invariantes bajo los flujos de los campos de vectores  $X_{H_i}$   $1 \leq i \leq k$ .

Vamos a dar una solución local usando un argumento basado en el resultado clásico de Jacobi-Lie siguiente cuya demostración la podemos ver [31].

**Teorema 8.3.1.** *(Carathodory-Jacobi-Lie) Sea  $(M, \omega_2)$  una variedad simpléctica de dimensión  $2n$  y sea  $p \in M$ . Sean  $f_1 \dots f_k$  con  $0 \leq k \leq n$  funciones diferenciables en un entorno abierto  $V$ , de  $p$  las cuales son involutivas por parejas y cuyas diferenciales son linealmente independientes. Entonces existe  $2n-k$  funciones diferenciales  $f_{k+1} \dots f_n, g_1, \dots, g_n$  definidas en un entorno abierto  $U$  de  $p$  ( $U \subset V$ ) tal que  $\omega_2$  está expresado en  $U$  como*

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dg_i$$

y  $[f_i, f_j] = 0$ ,  $[g_i, g_j] = 0$  y  $[f_i, g_j] = \delta_{ij}$ .

**Teorema 8.3.2.** *Sea el sistema involutivo (8.1). La subvariedad  $M$  de  $T^*Q$  definida por las ecuaciones*

$$H_i = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

*es coisotrópica y  $k \leq n$ . Denotaremos por  $\omega'_2$  y  $X'_{H_i}$  las restricciones respectivas de la forma simpléctica  $\omega_2$  y los campos  $X_{H_i}$  a  $M$ . Para cada punto  $p \in M$  existe un entorno abierto  $U$  en  $M$  de tal manera que la familia  $\{N_{k_j}\}$  de subvariedades lagrangianas contenidas en  $U$  es obtenida igualando a constantes las  $n - k$  primeras integrales comunes a  $X'_{H_i}$  con  $1 \leq i \leq k$  y tal que  $X_{H_i} \in \mathfrak{X}(N_{k_j})$*

*Demostración.* Que  $M$  sea coisotrópica se obtiene de la proposición 8.2.16 ya que  $[H_i, H_j] = 0$ . Al ser coisotrópica tenemos que  $\dim(M) \geq n$  lo que implica que  $2n - k \geq n$  y así  $k \leq n$ . Del teorema anterior tenemos que en un entorno  $V$  de cada punto  $p \in T^*Q$  hay  $2n - k$  funciones

$$H_{k+1}, \dots, H_n, J_1, \dots, J_n$$

cumpliendo  $[H_i, H_j] = 0, [J_i, J_j] = 0, [H_i, J_j] = \delta_{ij}$  y de manera que

$$\omega_2 = \sum_{j=1}^n dH_j \wedge dJ_j$$

Por consiguiente para la restricción  $\omega'_2$  de  $\omega_2$  a  $U = V \cap M$  tenemos  $\omega'_2 = \sum_{j=1}^{n-k} dH'_{k+j} \wedge dJ'_{k+j}$ . De nuevo por la proposición 8.2.16 en cada punto  $p \in M$  los vectores tangentes  $X_{H_i, p}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) generan el complemento ortogonal  $(T_p M)^\perp$  de  $T_p M$  en  $T(T^*Q)$ . Como  $M$  es una variedad coisotrópica se cumple que  $(T_p M)^\perp \subset T_p M$ , con lo que los vectores tangentes  $X_{H_i, p}$  forman una base del espacio de los vectores tangentes  $X_p \in T_p M$  tales que  $i_{X_p} \omega'_2 = 0$ .

De esta forma la condición  $i_{X_p} \omega'_2 = 0$ , significa que  $H'_{k+j}$  ( $1 \leq j \leq n - k$ ) son primeras integrales de los campos  $X'_{H_i}$ .

Así las subvariedades de  $M$

$$N_{k_j} = \{H'_{k+j} = k_j, k_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n - k\}$$

es una subvariedad lagrangiana en  $U$  ya que  $\omega'_2|_{N_{k_j}} = 0$ .

El argumento anterior nos dice que  $H_{i|N_{k_j}} = cte$  y combinado con el teorema de Hamilton- Jacobi proporciona que  $X_{H_i} \in \mathfrak{X}(N_{k_j})$  para  $1 \leq i \leq k$  lo cual completa la demostración.  $\square$

## 8.4. Reducción y reconstrucción

En esta sección veremos los procedimientos de reducción y reconstrucción de un sistema de ecuaciones de Hamilton-Jacobi involutivo con simetrías.

**Teorema 8.4.1.** *Sea  $G$  un grupo de Lie que actúa sobre la variedad diferenciable  $Q$  con  $\dim(G) = m$  y  $\dim(Q) = n$ . Sea  $H_i : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  con ( $1 \leq i \leq k$ ) funciones diferenciales invariantes bajo la acción de  $G$ . Sea  $\mu \in \mathcal{G}^*$  un punto fijo por la acción coadjunta de  $G$ , y consideremos la estructura simpléctica  $\bar{\omega}_2$  definida en el cociente por la proyección*

$$\pi : J^{-1}(\mu) \rightarrow J^{-1}(\mu)/G$$

Asumamos que las proyecciones  $\bar{H}_i$  de las funciones  $H_i(1 \leq i \leq k)$  a la variedad cociente  $J^{-1}(\mu)/G$  son funcionalmente independientes. El sistema de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} i_{X_{H_1}} \omega_2 = dH_1 \\ \dots \\ i_{X_{H_k}} \omega_2 = dH_k \end{cases} \quad (8.2)$$

con  $k \leq n - m$ , determina un sistema de Hamilton-Jacobi reducido a la variedad simpléctica  $J^{-1}(\mu)/G$ ,

$$\begin{cases} i_{\bar{X}_{H_1}} \bar{\omega}_2 = d\bar{H}_1 \\ \dots \\ i_{\bar{X}_{H_k}} \bar{\omega}_2 = d\bar{H}_k \end{cases} \quad (8.3)$$

de tal manera que  $L \subset J^{-1}(\mu)$  es una subvariedad lagrangiana de  $T^*Q$  solución del sistema (8.2) entonces  $\pi(L)$  es solución del sistema (8.3).

Inversamente si  $\bar{L}$  es una subvariedad lagrangiana de  $J^{-1}(\mu)/G$  solución del sistema (8.3) entonces  $L = \pi^{-1}(\bar{L}) \subset J^{-1}(\mu)$  es una subvariedad lagrangiana de  $T^*Q$  solución del sistema (8.2).

*Demostración.* Lo primero que vamos a probar es que cada campo de vectores  $X_{H_i}$  es tangente a  $J^{-1}(\mu)$ . Es suficiente ver que si  $p \in J^{-1}(\mu)$  entonces  $J_{*p}(X_H) = 0$  ya que  $T_p(J^{-1}(\mu)) = \ker(J_{*p})$ . Pero tenemos que para todo  $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} J_{*p}(X_{H_i})(A) &= dJ(X_H)(A) = (i_{A^*} \omega_2)(X_{H_i}) = \omega_2(X_{H_i}, A^*) = \\ &= dH_i(A^*) = A_p^*(X_{H_i}) = 0 \end{aligned}$$

por la  $G$ -invarianza de  $H$ . Ahora, por la  $G$ -invarianza de  $\omega_2$  y  $H_i$  definimos  $X_{H_i}$  como un campo de vectores  $G$ -invariantes en  $J^{-1}(\mu)$  induciendo un campo de vectores  $\bar{X}_{H_i} \in \mathfrak{X}(J^{-1}(\mu)/G)$ . De esta manera cada una de las ecuaciones del sistema (8.2) proporciona una ecuación reducida  $i_{\bar{X}_{H_k}} \bar{\omega}_2 = d\bar{H}_k$  con  $1 \leq i \leq k$  en  $J^{-1}(\mu)/G$ .

Sea  $L \subset J^{-1}(\mu)$  una subvariedad lagrangiana de  $T^*Q$ . Veamos que  $L$  es  $G$ -invariante, para ello basta con probar que para todo  $A^*$  con  $A \in \mathcal{G}$  se tiene que  $A^* \in \mathfrak{X}(L)$ . Como antes se tiene que

$$\omega_{2p}(X, A^*) = J_{*p}(X)(A) = 0$$

con lo cual  $A_p^* \in (T_p L)^\perp = T_p L$  y así  $A^* \in \mathfrak{X}(L)$ .

Veamos que  $\bar{L} = \pi(L)$  es una subvariedad lagrangiana de  $J^{-1}(\mu)$ . Para ello consideramos un argumento dimensional. Como  $\dim(J^{-1}(\mu)) = 2n - m$  entonces  $\dim(J^{-1}(\mu)/G) = 2(n - m)$ , ahora bien  $\dim(\bar{L}) = \dim L - \dim G = n - m$ , para que sea  $\bar{L}$  una subvariedad lagrangiana solo falta ver que  $\bar{\omega}_{2|\bar{L}} = 0$  pero eso es claro ya que

$$\bar{\omega}_{2|\bar{L}} = \omega_{2|L} \quad (8.4)$$

Finalmente  $\bar{L}$  es solución del sistema (8.3) ya que por la  $G$ -invarianza

$$\bar{H}_{i|\bar{L}} = H_{i|L} = c_i \quad (8.5)$$

con  $1 \leq i \leq k$ .

inversamente si la subvariedad lagrangiana  $\bar{L}$  de  $J^{-1}(\mu)/G$  es una solución del sistema (8.3) entonces  $L = \pi^{-1}(\bar{L})$  tiene dimensión  $n$  ya que  $\dim L = \dim \bar{L} + \dim G = n$ . Igual que antes basta ver que  $\omega_{2|L} = 0$ , pero eso es claro por (8.4). Por lo que  $L$  es una subvariedad lagrangiana de  $J^{-1}(\mu)$ . Otra vez usando (8.5) se ve que  $L$  es solución del sistema (8.2).  $\square$

# Conclusiones

En este último capítulo recopilaremos las conclusiones y resultados a los que se ha llegado en esta tesis, así como posibles desarrollos futuros.

## Conclusiones

- Se ha encontrado una forma característica cerrada asociada con el álgebra gauge. (Teoremas 3.2.12 y 3.2.23)
- Utilizando las conexiones de Yang-Mills y de Yang-Mills-Higgs se han definido formas características cerradas. (Teorema 3.3.6)
- Se ha encontrado una caracterización de las formas de Cartan-Yang-Mills en función de la codiferencial covariante. (Teorema 5.5.11)
- Se ha obtenido la condición sobre el campo de Higgs para que la forma de conexión  $\omega$  del fibrado  $P \rightarrow X$  reduzca a  $P_H$  (teorema 4.0.15)
- Se ha obtenido una nueva descripción de las conexiones de Erhesmann que son reducibles a un subfibrado. (Teorema 6.4.4)
- Se han encontrado nuevos invariantes del problema variacional, utilizando la forma de Poincaré-Cartan. (Teoremas 7.7.5, 7.7.6 y 7.7.7)
- Se ha dado una solución local de un sistema de ecuaciones de Hamilton-Jacobi involutivo. (Teorema 8.3.2)
- Se ha descrito la reducción y reconstrucción de un sistema involutivo de ecuaciones de Hamilton-Jacobi. (Teorema 8.4.1)

## Posibles desarrollos futuros

- Las formas características equivariantes son un instrumento que producen formas diferenciales partiendo de polinomios invariantes en el

álgebra de Lie. Considerando las extensiones equivariantes de las formas características asociadas a polinomios de Weil, se producen clases características en cocientes del espacio de conexiones  $\mathcal{A} = \Gamma(X, C(P))$ , con muchas aplicaciones en física matemática como los caracteres de Chern de familias de operadores de Dirac, los invariantes de Donaldson o las construcciones de la teoría topológica de campo. Como las formas características equivariantes y la forma diferencial construida en el capítulo 3 partiendo del álgebra gauge son conceptos cercanos, podríamos hacer la misma construcción utilizando esta última forma. Una guía útil para canalizar esta investigación sería [46].

- Tras haber encontrado invariantes asociados al problema variacional definido por una densidad lagrangiana  $\mathcal{L} : J^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos ampliar interpretando estos invariantes en el caso en el que el funcional

$$\mathbb{L}(s) = \int_{j^1 s} \mathcal{L}\omega = \int_U (j^1 s)^*(\mathcal{L}\omega)$$

este definido sobre secciones  $s : U \rightarrow P$  cuya extensión 1-jet valora en una subvariedad de restricciones  $S \subset J^1 P$ . Una referencia a tener en cuenta será [45].

- Teniendo en cuenta la estructura simpléctica canónica  $\omega$  en el fibrado cotangente del último capítulo, retomando la ecuación de Hamilton-Jacobi  $i_{X_H}\omega = dH$  y considerando el campo definido en el fibrado cotangente  $V = \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ , se tiene

$$L_V\omega = \omega$$

De esta manera, de la ecuación de Hamilton-Jacobi, se sigue

$$i_{[V, X_h]}\omega = L_V(i_{X_H}\omega) - i_{X_H}(L_V\omega) = L_V(dH) - dH = d(VH - H)$$

La expresión

$$i_{[V, X_h]}\omega = d(VH - H) \tag{8.6}$$

recibirá el nombre de ecuación dual de la ecuación de Hamilton-Jacobi. El estudio de la relación entre la ecuación (8.6) y la de Hamilton-Jacobi es una próxima investigación. Como punto de partida es nuestro artículo Cambronero y Pérez [47].

- Comparando las materias del capítulo 2 y el capítulo 7, podemos considerar sobre un  $G$ -fibrado principal  $\pi_G : P \rightarrow X$  una densidad lagrangiana  $\mathcal{L} : TP \rightarrow \mathbb{R}$  que es  $G$ -invariante, es decir,

$$\mathcal{L} \circ (R_g)_* = \mathcal{L} \quad \text{para todo } g \in G$$

De esta forma, fijando una conexión  $\Gamma$  en  $P$  se puede definir una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}^* : TX \rightarrow \mathbb{R}$ . Así, podemos estudiar las leyes de conservación de  $\mathcal{L}^*$  en función de las de  $\mathcal{L}$ . Podemos buscar resultados estableciendo la dependencia de estas constantes de movimiento en función de las componentes  $\omega_i$  de la forma de conexión  $\omega$  y de las formas de curvatura. Como guía se puede usar [48].

# Bibliografía

- [1] D.J.Saunders. The geometry of jet bundles.Cambridge university press.1989
- [2] P.L García Pérez. Connections and 1-jets bundle. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. Tome 47(1972) p.227-242.
- [3] Guilleman, Victor and Pollack, Allan, Differential Topology, Prentice-Hall, 1974.
- [4] S.Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of differential geometry. John Wiley and sons. Inc.(Interscience division) New York, Volume I(1963),Volume II(1969).
- [5] K. Tapp. Matrix Groups for undergraduates. Student mathematical library, volume 79. 2016
- [6] G. L. Naber. Topology, geometry and gauge fields. Springer. 2010
- [7] Frank W. Warner. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer 1971.
- [8] Michael Spivak. A comprehensive introduction to diferencial geometry. Volume I Publis or perish.Inc. Houston.Texas 1999.
- [9] Peter W. Michor. Topics in diferencial geometry.Graduate studies in mathematics. Volume 93. American mathematical society.2000
- [10] M.Nakahara. Geometry, topoolgy and physics.Institute of Physics Publishing, 2003
- [11] Clifford Henry Taubes. Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature. Oxford University Press, 13/10/2011.
- [12] David Bleecker.Gauge Theory And Variational Principles.Dover Publications, Incorporated, 2005

- [13] Andreas Arvanitoyeorgos. Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces. Student Mathematical Library Volume 22. American Mathematical Society. 2003.
- [14] Kristopher Tapp. Matrix Groups for undergraduates. Student Mathematical Library Volume 29. American Mathematical Society. 2005.
- [15] Peter W. Michor. Gauge theory for fiber bundles. American Institute of Physics, 1991.
- [16] M.F. Atiyah. Complex analytic connections in fibre bundles. Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 181-207.
- [17] Eckhard Meinrenken. Group actions on manifolds. Lecture notes. University of Toronto. 2003,5-9.
- [18] Antonio Díaz Miranda. GEOMETRÍA III. Universidad Autónoma de Madrid. 2003. 143-160.
- [19] Chevalley, C. Theory of Lie Groups, Princeton University Press, 1946.
- [20] R.W. Sharpe, Differential Geometry. Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program. Springer. 1997
- [21] David Bleeker. Gauge theory and variational principles. Addison Wesley. 1981
- [22] Derek K. Wise. MacDowell Mansouri Gravity and Cartan Geometry. Department of Mathematics University of California. 2009
- [23] Andrew Zaedecki. Gravity as a gauge theory with Cartan connection. Journal of Mathematical Physics 29,1661. 1988
- [24] D.V. Alekseevsky, P. W. Michor Differential geometry of Cartan connection. Publicationes mathematicae Debrecen. 1995
- [25] S. Kobayashi. On connections of Cartan. Canadian journal of mathematics, 1956
- [26] John C. Baez .An Introduction to Spin Foam Models of BF Theory and Quantum Gravity. University of California, 1999
- [27] Edoardo Provenzi. An introduction to the mathematical framework of the loop quantization of gauge theories and gravity. Università di Torino. 2001

- [28] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* 57(18), 2244-2247, 1986
- [29] A. Ashtekar, C. Isham: Representation of the holonomy algebras of gravity and non-abelian gauge theories, *Clas. Aquan. Grav.* 9 1433-1485, 1992.
- [30] J.C. Baez: Diffeomorphism-invariant generalized measures on the spaces of connection modulo gauge transformations. The proceedings of the conference on quantum topology, ed. Yetter, World Scientific, Singapore (1994).
- [31] Liberman, P., Marle, C. M. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Mathematics and its Applications 35, D. Reidel Publ. Comp., 1
- [32] V. Periwal. Quantum Hamilton-Jacobi equation. *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998), no. 20, 4366-4369.
- [33] R. Ferraro. The Jacobi principal function in quantum mechanics. *J. Phys. A* 32 (1999), no. 13, 2589-2599.
- [34] A. Faraggi, M. Matone. Quantum mechanics from an equivalence principle. *Phys. Lett. B* 450 (1999), no. 1-3, 34-40.
- [35] A.M. Vinogradov, I.S. Krasil'shchik. What is Hamiltonian formalism? *Russian Math. Surveys* 30(1) (1975) 177-202.
- [36] J.F. Cariñena, X. Gracia, G. Marmo, E. Martínez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy. Geometric Hamilton-Jacobi Theory. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 3(2006), 7, 1417-1458.
- [37] J.F. Cariñena, X. Gracia, G. Marmo, E. Martínez, M.C. Muñoz-Lecanda, N. Román-Roy. Structural aspects of Hamilton-Jacobi Theory. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 13(2016). 29p.
- [38] M. Barbero-Liñán, M. de León, D. Martín de Diego. Lagrangian submanifolds and Hamilton-Jacobi equation. *Monatsh. Math.* 171 (2013) no. 3-4, 269-290.
- [39] Garcia, P.L. The Poincaré-Cartan invariant in the Calculus of Variations. *Symposia Mathematica* 14, Academic Press, London, (1974), 219-246.
- [40] Betounes, D. Differential aspects of the Cartan form: Symmetry theory. *J. Math. Phys.* 28 (10) (1987) 2347-2353.

- [41] Giachetta, G., Mangiarotti, L. Sardanashvily, G. New Lagrangian and Hamiltonian methods in field theory. World Scientific (1997).
- [42] Goldschmidt, H., Sternberg, S. The Hamilton-Cartan Formalism in the Calculus of Variations. Ann. Inst. Fourier, 23 (1973), 203-267.
- [43] Jost J. Riemannian geometry and geometric analysis. 2008. Springer
- [44] Andrés Viña. Geometría diferencial. Universidad de Oviedo, 2000
- [45] A. Garcia, Pedro L. García and César Rodrigo. Cartan forms for first order constrained variational problems. Journal of geometry and physics 56(4), 571-610. 2006
- [46] Ferreiro, R. Equivariant characteristic forms on the bundle of connections. J. Geom. Phys. 54 (2005), no. 2, 197-212.
- [47] J. Cambroner, J. Perez. Systems of Hamilton-Jacobi equations. J. Non-linear Math. Phys, 26 4 1-9 (2019).
- [48] J. Koiller. Reduction of some classical non-holonomic systems with symmetry. Arch. Rational Mech. Anal. 118 (1992), no. 2, 113-148.
- [49] J.F. Cariñena, L. A. Ibort. Locally Hamiltonian Systems with Symmetry and Generalized Noether's Theorem. Nuovo Cimento B (11) 87 (1985), no. 1, 41-49.