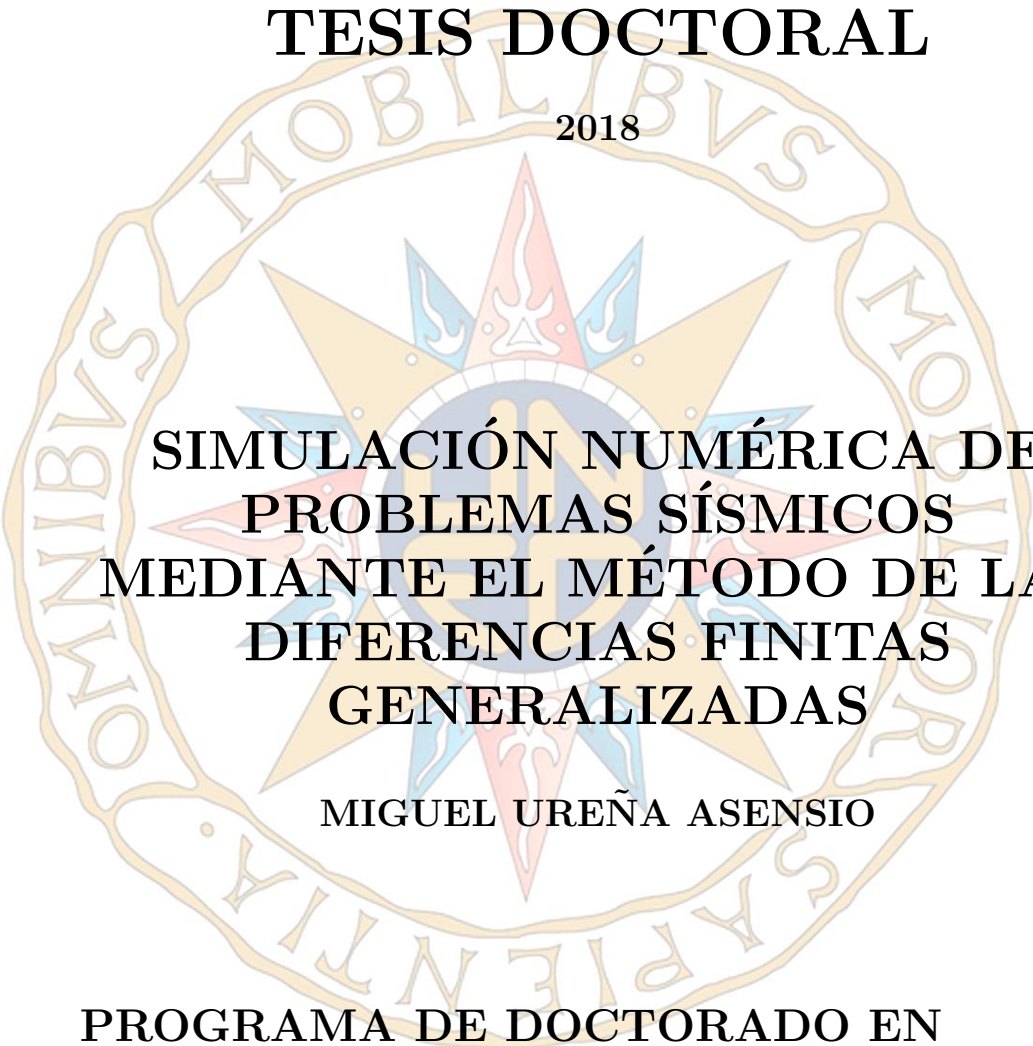


TESIS DOCTORAL

2018



SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS SÍSMICOS MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS

MIGUEL UREÑA ASENSIO

**PROGRAMA DE DOCTORADO EN
TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES**

JUAN JOSÉ BENITO MUÑOZ

EDUARDO SALETE CASINO

Agradecimientos

A Juan José Benito y Eduardo Saleté

A Francisco Ureña

A mi familia

A Cris

Índice general

Lista de Símbolos, Abreviaturas y Siglas	9
Lista de tablas	13
Lista de figuras	15
1. Introducción	23
1.1. Motivación y objetivos	23
1.2. Sobre los métodos sin malla	24
1.3. Sobre el método de las diferencias finitas generalizadas	30
1.4. Sobre la adaptatividad con el método de las diferencias finitas generalizadas	33
1.5. Sobre ondas en medios elásticos	37
1.6. Sobre las heterogeneidades	37
1.7. Sobre ondas en medios en medios con modelos viscoelásticos .	42
1.8. Sobre los contornos absorbentes	44
2. Método de las diferencias finitas generalizadas	47
2.1. Definiciones	47
2.2. Fórmulas en diferencias finitas generalizadas para las variables espaciales	49
2.3. Teorema de existencia y unicidad	52
2.4. Fórmulas en diferencias finitas para la variable temporal	54
2.5. Consistencia, orden, estabilidad y convergencia	56
2.6. Parámetros fundamentales del método	59

2.7. Adaptatividad	62
2.7.1. Indicador del error	63
2.7.2. Método h-adaptativo	64
3. Fórmulas en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de onda	69
3.1. Elasticidad, ecuaciones de Navier y ondas sísmicas	69
3.2. Ondas en medio elástico homogéneo	74
3.2.1. Esquemas en diferencias finitas generalizadas	74
3.2.2. Consistencia, orden, estabilidad y convergencia	76
3.2.3. Dispersión numérica	82
3.3. Ondas en medio elástico heterogéneo	84
3.3.1. Tratamiento de la interfaz entre dos sólidos	85
3.3.2. Esquemas en diferencias finitas generalizadas	88
3.3.3. Consistencia, orden, estabilidad y convergencia	92
3.3.4. Dispersión numérica	93
3.4. Viscoelasticidad, modelo de Kelvin y ondas sísmicas	93
3.5. Ondas en medio viscoelástico homogéneo	96
3.5.1. Esquemas en diferencias finitas generalizadas	97
3.5.2. Consistencia, orden, estabilidad y convergencia	102
3.5.3. Dispersión numérica	123
3.6. Condiciones de contorno	126
4. Resultados numéricos	137
4.1. Onda en medio isótropo, elástico y homogéneo	140
4.2. Influencia de la irregularidad de la discretización en la propagación de ondas	142
4.3. Adaptatividad y aplicación al problema sísmico	143
4.3.1. Comparación entre el algoritmo de adición y el método adaptativo	146
4.3.2. Aplicación a problemas dependientes del tiempo	149
4.4. Reflexión y transmisión	150
4.4.1. Reflexión de ondas en superficie libre	154

4.4.2. Reflexión y transmisión de ondas en una interfaz sólido – sólido	158
4.5. Guía de ondas	181
4.6. Principio de Huygens	184
4.7. Medios viscoelásticos	188
5. Conclusiones y desarrollos futuros	197
5.1. Conclusiones	197
5.2. Desarrollos futuros	202
Bibliografía	203

Lista de Símbolos, Abreviaturas y Siglas

C-SPH	corrected SPH
DEM	diffuse element method
EFG	element free Galerkin
FDM	finite difference method
FEM	finite element method
FMM	free mesh method
FPM	finite point method
GFDM	generalized finite difference method
GFEM	generalized finite element method
GRKCM	gradient RKCM
HPC	hp clouds
LRIPIM	local radial point interpolation method
MaxEnt	maximum entropy
MFEM	meshless finite element method
MFS	method of finite spheres
MLPG	meshless local Petrov-Galerkin
MLS	moving least squares
MLSPH	moving least squares particle hydrodynamics
MPS	moving particle semi-implicit
M-SCNI	modified stabilized conforming nodal integration
NEM	natural element method
OTM	optimal transport meshfree

LISTA DE SÍMBOLOS, ABREVIATURAS Y SIGLAS

PFEM	particle finite element method
PPU	particle partition of unity method
PU	partition of unity
PUM	partition of unity method
RBCM	radial basis collocation method
RBF	radial basis functions
RK	reproducing kernel
RKCM	Reproducing kernel collocation method
RKPM	reproducing kernel particle method
RPIM	radial point interpolation method
SLRKPM	semi-Lagrangian RKPM
SPH	smoothed particle hydrodynamics
VCI	variationally consistent integration
XEFG	extended EFG
XFEM	extended finite element method
IIC	índice de irregularidad de la discretización
PML	perfectly matched layers
dpa	distancia mínima entre dos nodos cualesquiera
dmm	distancia mínima entre el nodo central de una estrella y cualquier otro nodo de la estrella
D	dominio
Ω	interior del dominio
Γ	frontera del dominio
M	discretización
E	estrella
N	número de nodos de la estrella sin incluir el central
NO	número de nodos óptimo
\bar{r}	radio de la estrella
f_d	función de penalización de distancia
f_b	función de penalización de desequilibrios
B	función de la estrella

LISTA DE SÍMBOLOS, ABREVIATURAS Y SIGLAS

\mathbf{D}_ϕ	vector de derivadas parciales
w	función de ponderación de la estrella
$\boldsymbol{\varepsilon}$	vector de pasos espaciales
A	matriz de coeficientes del GFDM
\mathbf{b}	matriz de términos independientes del GFDM
\mathbf{m}	vector de coeficientes de la aproximación lineal de las derivadas parciales
λ	coeficientes de la estrella / longitud de onda
h, k, l	pasos espaciales
Δt	paso temporal
ET	error de truncamiento
e	indicador del error
ε	deformaciones
σ	tensiones
λ, μ	coeficientes de Lamé en medio elástico
λ', μ'	coeficientes de Lamé en medio viscoso
η	coeficiente de viscosidad
ρ	densidad
T	vector tensión
α	velocidad de las ondas P
β	velocidad de las ondas S
U, V, W	funciones desplazamiento exactas
u, v, w	funciones desplazamiento aproximadas
ω	frecuencia angular
κ	número de onda
ξ	coeficiente de amplificación en el análisis de Von Neumann
τ	tiempo de retardo o de relajación
Q	factor de calidad
Q^{-1}	factor de disipación
A, B, C	coeficientes del esquema para la ecuación de onda en medio viscoelástico
f	frecuencia
g	pulso de Ricker / función exponencial

LISTA DE SÍMBOLOS, ABREVIATURAS Y SIGLAS

Gran parte de los símbolos listados se encuentran en la tesis con otros significados diferentes a los aquí mostrados. Se han mostrado aquí únicamente los símbolos más relevantes con su principal significado.

Lista de tablas

1.1. Clasificación de métodos sin malla en función de su formulación (débil o fuerte)	31
4.1. Errores relativos cometidos al aproximar el desplazamiento máximo y mínimo con el GDFM	140
4.2. Errores inicial y final y número de nodos del ejemplo 1 con 8 pasos de ambos casos	147
4.3. Errores inicial y final y número de nodos del ejemplo 2 con 6 pasos en ambos casos	149
4.4. Errores inicial y final y número de nodos del ejemplo 2 con 6 pasos del método adaptativo y 8 pasos del algoritmo de adición	149
4.5. Errores relativos para las ondas planas en los nodos $P = (4000, -1200)$ para las ondas P-SV y $Q = (4000, -1500)$ para las ondas SH. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis.	155
4.6. Errores relativos para las ondas planas en los nodos $P = (4000, -24000)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $Q = (4000, -26000)$ para las ondas transmitidas. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis.	164

4.7. Errores relativos para las ondas planas P-SV en los nodos $P_1 = (0,8025, -0,6150)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $P_2 = (0,8025, -1,0200)$ para las ondas transmitidas y errores relativos para las ondas planas SH en los nodos $Q_1 = (1,0500, -0,9975)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $Q_2 = (1,0500, -0,5025)$ para las ondas transmitidas. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis. 167

4.8. Errores relativos para la onda plana en los nodos $Q_R = (0,525, -0,6)$ y $P_R = (1,575, -0,6)$ para las ondas reflejadas y en los nodos $Q_T = (0,525, -0,84)$ y $P_T = (1,575, -0,84)$ para las ondas transmitidas. 170

4.9. Errores relativos para las ondas planas P-SV en los nodos $Q_1 = (0,9, 1,1062)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $Q_2 = (0,9, 0,6037)$ para las ondas transmitidas y errores relativos para las ondas planas SH en los nodos $P_1 = (1,005, 0,9996)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $P_2 = (1,005, 0,5946)$ para las ondas transmitidas. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis. 174

4.10. Errores relativos para las ondas planas P-SV en los nodos $P_1 = (1,005, 1,1526)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $P_2 = (0,75, 0,5572)$ para las ondas. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis. 177

4.11. Errores relativos para las ondas planas P-SV en los nodos $Q_1 = (1,005, 1,2051)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $Q_2 = (0,75, 0,5047)$ para las ondas. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis. 179

4.12. Desplazamientos onda P 194

4.13. Desplazamientos onda SH 196

Lista de figuras

1.1. Izquierda: División de la discretización inicial en cuadriláteros. Derecha: Aplicación del método quadtree en dos nodos interiores. (Cortesía de Gavete et al. [58])	36
1.2. Discretización con nodos en la interfase y nodos en posiciones no recomendables.	41
1.3. Izquierda: Modelo de Maxwell. Derecha: Modelo de Kelvin - Voight. La figura pertenece a H. Brinson y L.C. Brinson [28].	43
2.1. Discretización polar de un dominio	54
2.2. Estrella regular de 8 nodos	61
2.3. Estrella formada por el criterio de la distancia (izquierda) y estrella formada por el criterio del cuadrante (derecha)	61
2.4. Peso asignado a cada nodo de la estrella para una función de ponderación con $p = 1$	62
2.5. Peso asignado a cada nodo de la estrella para una función de ponderación con $p = 1$	63
2.6. Ejemplo de la aplicación de la primera restricción $C1$. El radio de la circunferencia en línea discontinua es dmm y el radio de la circunferencia en línea continua es $\mu \cdot dmm$. El nodo en blanco representa la posición sin aplicar la restricción $C1$ y el nodo en gris representa la posición teniendo en cuenta la restricción $C1$	66

3.1. La dirección del movimiento es la dirección del vector que une el origen con el receptor. Los desplazamientos de las ondas P son en la dirección del movimiento y los desplazamientos de las ondas S son perpendiculares a dicha dirección. Las ondas S están polarizadas en ondas SV con desplazamientos dentro del plano X-Z y en ondas SH con desplazamientos en el eje Y hacia fuera del papel.	73
3.2. Dominio considerado. La interfaz está definida por $f(x)$. $P_0 = (x_0, z_0)$ es un nodo de la discretización y $P_1 = (x_0 - n_1(x_0)h, z_0 - n_3(x_0)h)$ y $P_2 = (x_0 + n_1(x_0)h, z_0 + n_3(x_0)h)$ pueden ser nodos de la discretización. $\tilde{P}_1 = (x_0 - n_1(x_0)\frac{h}{2}, z_0 - n_3(x_0)\frac{h}{2})$ y $\tilde{P}_2 = (x_0 + n_1(x_0)\frac{h}{2}, z_0 + n_3(x_0)\frac{h}{2})$ son nodos ficticios. Los nodos de la interfaz que se encuentran en el contorno son substituidos por dos nodos, B_1 y B_2 , situados próximos a las curvas \tilde{f}_1 y \tilde{f}_2	86
3.3. Función a trozos φ . Por cada nodo de la interfaz consideramos un plano conteniendo a los puntos $\tilde{Q}_1 = (x_0 - n_1(x_0)\frac{h}{2}, \varphi_1, z_0 - n_3(x_0)\frac{h}{2})$ y $\tilde{Q}_2 = (x_0 + n_1(x_0)\frac{h}{2}, \varphi_2, z_0 + n_3(x_0)\frac{h}{2})$ y al vector $\mathbf{v} = (1, 0, f'(x_0)) = (-n_3(x_0), 0, n_1(x_0))$	88
3.4. Contorno con condición Neumann. Se añaden tantos nodos en el exterior del dominio como nodos con condición Neumann tenga el problema.	127
4.1. Lóbulo central del pulso de Ricker	138
4.2. Condiciones de contorno Dirichlet para el caso de ondas SH planas. Los nodos sobre la línea discontinua en el contorno toman los valores del pulso de Ricker mientras que los nodos sobre la línea continua toman el valor cero	138
4.3. Pulso de Ricker viajando hacia arriba como un frente de ondas. La flecha en fondo blanco señala la dirección de propagación. .	141
4.4. Onda plana P en el nodo $(x, z) = (1000, 200)$ situado a 200 metros del origen.	141
4.5. Discretización con grado de irregularidad de $r = 20\%$	143

4.6.	Discretización con grado de irregularidad de $r = 40\%$	144
4.7.	Izquierda: Cocientes en la dirección radial. Derecha: Cocientes en la dirección tangencial	144
4.8.	Onda en la discretización con grado de irregularidad del 20% en el instante $t = 0,6$ s	145
4.9.	Onda en la discretización con grado de irregularidad del 40% en el instante $t = 0,6$ s	146
4.10.	Discretizaciones, inicial (55 nodos) y final (120 nodos), aplicando el método adaptativo en el ejemplo 1	147
4.11.	Ampliación de la región con errores más elevados en la discretización del ejemplo 1 en el sexto paso de aplicación del método adaptativo, en particular de la aplicación del algoritmo del movimiento. Leyenda: \star nodos interiores y frontera, ∇ posición inicial nodo interior seleccionado, \circ posición final del nodo interior seleccionado y \otimes nodo eliminado.	148
4.12.	Discretizaciones, inicial (81 nodos) y final (126 nodos), aplicando el método adaptativo en el ejemplo 2	149
4.13.	Discretización irregular con 5151 nodos. El nodo crítico está en el interior del círculo en línea continua los nodos de la estrella están dentro de la circunferencia en línea discontinua.	151
4.14.	Instantáneas de la onda en $t = 0,25$ s y $t = 0,5$ s antes de aplicar el método adaptativo en la discretización de 5151 nodos.151	
4.15.	Instantáneas de la onda en $t = 0,25$ s y $t = 0,5$ s después de aplicar el método adaptativo en la discretización de 5153 nodos.151	
4.16.	Onda P incidente y ondas P y SV reflejadas en el instante $t = 0,7$ s. Puede verse también una onda Rayleigh. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.	156
4.17.	Onda SH incidente y onda SH reflejada en el instante $t = 1,1$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.	156
4.18.	Onda de Rayleigh.	157

4.19. Onda SH incidente y onda SH reflejada en el instante $t = 0,55$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso. 158

4.20. Izquierda: Ángulos de reflexión y transmisión para una onda P incidente. Derecha: Ángulos de reflexión y transmisión para una onda SH incidente 160

4.21. Onda plana SH incidente, reflejada y transmitida en el instante $t = 1,25$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso. 162

4.22. Onda plana SH incidente y reflejada en el nodo $P_2 = (1, -1)$. El lóbulo de la izquierda corresponde a la onda incidente y el lóbulo de la derecha a la onda reflejada. Las colas después de cada lóbulo son debidas a la dispersión numérica. 163

4.23. Onda plana SH transmitida en el nodo $P_1 = (1, -0,5)$. La cola después del lóbulo se debe a la dispersión numérica. 163

4.24. Onda P incidente, ondas P y SV reflejadas y ondas P y SV transmitidas en el instante $t = 0,825$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso. . . . 165

4.25. Onda SH incidente, reflejada y transmitida en el instante $t = 1,35$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso. 166

4.26. Onda P incidente, ondas P y SV reflejadas y ondas P y SV transmitidas en el instante $t = 1,3$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso. . . . 168

4.27. Onda SH incidente, reflejada y transmitida en el instante $t = 1,3$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso. 169

4.28. Discretización irregular cerca de la interfase (izquierda). Detalle de la irregularidad de la interfase (derecha). 170

4.29. Onda SH reflejada y transmitida en el instante $t = 0,6$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso. 171

- 4.30. Onda plana SH incidente y reflejada en el nodo $Q_R = (0,525, -0,6)$.
 El lóbulo de la izquierda corresponde a la onda incidente y el lóbulo de la derecha a la onda reflejada. Las colas después de cada lóbulo son debidas a la dispersión numérica. 172
- 4.31. Onda plana SH transmitida en el nodo $Q_T = (0,525, -0,84)$.
 La cola después del lóbulo se debe a la dispersión numérica. 172
- 4.32. Izquierda: Dominio formado por dos medios homogéneos y separados por una interfaz inclinada 5° . Centro: Interfaz ampliada. Derecha: Estrella cuyo nodo central es un nodo de la interfase. Los nodos con forma de diamante están en el dominio D_1 , los nodos con forma de circunferencia están en el dominio D_2 y los nodos denotados por puntos están en la interfase. Esta imagen pone de manifiesto que no se trata de una discretización regular a la que se ha realizado un giro. 173
- 4.33. Onda P reflejada y transmitida en el instante $t = 0,65$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso. 175
- 4.34. Onda SH incidente, reflejada y transmitida en el instante $t = 1,19$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso. 176
- 4.35. Izquierda: Dominio formado por dos medios homogéneos y separados por una interfaz inclinada 30° . Parte superior derecha: Detalle del contorno. Esta imagen pone de manifiesto los huecos provocados por la irregularidad. Parte inferior derecha: Estrella cuyo nodo central es un nodo de la interfase. Los nodos con forma de diamante están en el dominio D_1 , los nodos con forma de circunferencia están en el dominio D_2 y los nodos denotados por puntos están en la interfase. Esta imagen pone de manifiesto que no se trata de una discretización regular a la que se ha realizado un giro. 177
- 4.36. Onda P incidente, ondas P y SV reflejadas y ondas P y SV transmitidas en el instante $t = 0,7$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso. 178

4.37. Discretización irregular formada por capas de discretizaciones regulares que son más finas cerca de la interfase y más gruesas lejos de ella. El medio superior con nodos grises es D_1 y el medio inferior con nodos negros es D_2 180

4.38. Direcciones de la onda plana conforme a la ley de Snell. 181

4.39. Ondas reflejadas y transmitidas en el instante $t = 0,9$ s. 181

4.40. Explosión generada en la región intermedia. 183

4.41. Izquierda: Un medio de baja velocidad entre dos medios de alta velocidad en el instante $t = 1,3$ s. Derecha: Un medio de alta velocidad entre dos medios de baja velocidad en el instante $t = 0,9$ s. 184

4.42. Frente de ondas propagándose a través de una hendedura con anchura menor a media longitud de onda en los instantes $t = 0,6$ s (izquierda) y $t = 0,8$ s (derecha). 186

4.43. Frente de ondas propagándose a través de una hendedura con anchura de varias longitudes de onda en los instantes $t = 0,6$ s (izquierda) y $t = 0,8$ s (derecha). 186

4.44. Frente de ondas atravesando un obstáculo circular en los instantes $t = 0.5$ s (izquierda) y $t = 0.9$ s (derecha). 188

4.45. Frente de ondas atravesando una anomalía circular de menor velocidad que el medio que la rodea en los instantes $t = 0.45$ s (izquierda) y $t = 0.9$ s (derecha). 188

4.46. Frente de ondas atravesando una anomalía circular de mayor velocidad que el medio que la rodea en los instantes $t = 0.4$ s (izquierda) y $t = 0.75$ s (derecha). 189

4.47. Desplazamientos en la recta $x = 1$ en el instante $t = 1,5$ s. La línea continua representa la solución exacta y los asteriscos representan la solución numérica obtenida con el GDFM. 190

4.48. Desplazamientos en la recta $x = 1$ en el instante $t = 1,5$ s. La línea continua representa la solución exacta y los asteriscos representan la solución numérica obtenida con el GDFM. 192

4.49. Instantánea del frente de ondas en $t = 1,125$ s. Debido al amortiguamiento, los desplazamientos en la dirección de propagación del frente van decayendo. La dirección de propagación del frente de ondas viene indicado por la flecha en fondo blanco. 193

4.50. Discretización irregular en $D = [0, 1] \times [0, 0,5]$ 194

4.51. Instantánea del frente de ondas en $t = 0,15$ s (izquierda) y $t = 0,375$ s (derecha). Debido al amortiguamiento, los desplazamientos en la dirección de propagación del frente van decayendo como se observa en la figura de la derecha. La dirección de propagación del frente de ondas viene indicado por la flecha en fondo blanco. 195

4.52. Instantánea del frente de ondas en $t = 0,125$ s (izquierda) y $t = 0,375$ s (derecha). Debido al amortiguamiento, los desplazamientos en la dirección de propagación del frente van decayendo como se observa en la figura de la derecha. La dirección de propagación del frente de ondas viene indicado por la flecha en fondo blanco. 196

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y objetivos

Muchos autores coinciden en que los métodos basados en diferencias finitas son los dominantes en problemas de propagación de ondas. Sin embargo, estos métodos sufren el condicionamiento de mallas regulares que provocan grandes dificultades en dominios geométricos complejos.

El método de las diferencias finitas generalizadas (GFDM) permite la resolución de problemas en discretizaciones irregulares del dominio de manera natural, lo que es razón suficiente para la aplicación del método en problemas de propagación de ondas de diversa índole.

Por tanto, se establecen los siguientes objetivos para la presente tesis:

- Realización de un desarrollo teórico más amplio sobre el método de las diferencias finitas generalizadas, estableciendo una notación matricial sencilla y compacta y demostrando el teorema de existencia y unicidad.
- Obtención de un método adaptativo mejorado. Aplicación a problemas de ondas. Análisis de resultados.
- Incorporación de frentes de ondas como excitación, lo que permitirá abordar muchos problemas sísmicos.

- Obtención de las fórmulas en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de onda SH en medios isótropos, elásticos y homogéneos. Análisis de la estabilidad y la dispersión. Análisis de resultados.
- Obtención de las fórmulas en diferencias finitas generalizadas, utilizando aproximación heterogénea, para la ecuación de onda P-SV y SH en medios elásticos y heterogéneos formado por capas de medios isótropos, elásticos y homogéneos. Análisis de la estabilidad y la dispersión. Análisis de resultados.
- Obtención de las fórmulas para el tratamiento de contornos Neumann de para las ondas SH en medio homogéneo. Análisis de los resultados.
- Obtención de las fórmulas en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de onda P-SV en medios viscoelásticos lineales homogéneos. Tratamiento del modelo Kelvin-Voight. Análisis de la estabilidad y la dispersión. Análisis de resultados.
- Obtención de las fórmulas para el tratamiento de contornos Neumann para las ondas P-SV y SH en modelos viscoelásticos. Análisis de los resultados.
- Programación en FORTRAN de todo lo expuesto.

1.2. Sobre los métodos sin malla

Problemas del amplio espectro científico requieren de la resolución de una ecuación en derivadas parciales. La obtención de una solución analítica del problema no es siempre posible, ya sea porque no se puede encontrar la solución o porque no se puede expresar a través de funciones elementales. Para resolver, por tanto, este tipo de problemas se recurre a los métodos numéricos, entre los que se puede destacar, por ser los más comúnmente utilizados, el método de los elementos finitos (finite element method) (FEM) y el método de las diferencias finitas (finite differences method) (FDM).

Tanto el FEM como el FDM presentan una serie de desventajas comunes, como señala J. S. Chen [40].

- El tiempo que consumen para generar mallas de calidad en geometrías arbitrarias para una obtener precisión deseada.
- La dificultad para construir aproximaciones con un orden cualesquiera de continuidad, lo que provoca que las soluciones de problemas con derivadas parciales de orden alto o problemas con discontinuidades sean difíciles de resolver.
- La realización de refinamientos h-p adaptativos puede llegar a ser muy tediosa.
- Son ineficientes al tratar con dificultades relativas al entramado de la malla, como en problemas de grandes deformaciones o problemas de grietas.

Puede decirse, por tanto, que su principal desventaja es la necesidad de malla, lo que provoca la aparición de los métodos sin malla.

El objetivo fundamental de los denominados métodos sin malla (meshless methods o meshfree methods) es eliminar o reducir la dependencia de la malla. Definiciones de método sin malla han sido realizadas por Oñate et al. [117], Liu y Gu [99] y J. S. Chen [40], y son, en el mismo orden,

- *Un método sin malla es aquel en el que la aproximación puede ser construida estrictamente en términos de nodos*
- *Un método sin malla es un método usado para establecer un sistema de ecuaciones algebraicas para el dominio entero del problema sin el uso de una malla predefinida para la discretización del dominio*
- *La aproximación de las incógnitas en la ecuación en derivadas parciales es construida basándose en puntos dispersos sin conectividad de malla*

Según Fries y Matthies [53], algunas de las características generales de los métodos sin malla son:

- *Ausencia de malla.* Los vínculos entre nodos no se fijan a priori sino que se determinan en tiempo de ejecución por lo que, por ejemplo, no es necesaria la generación de la malla al principio del cálculo. No hay sensibilidad al alineamiento de la malla. La adaptatividad, en especial la h-adaptatividad, es más simple pues sólo tienen que añadirse nodos. No es necesario el remallado durante el cálculo, sobre todo en problemas con grandes deformaciones o discontinuidades móviles.
- *Continuidad de las funciones de forma.* Los métodos sin malla cumplen con facilidad la condición de continuidad que surge del orden del problema en consideración. No es necesario un postproceso para suavizar la solución eliminando saltos entre elementos, como por ejemplo ocurre en el FEM para las tensiones. Los casos especiales en los que la continuidad de las funciones de forma y las derivadas no sea deseable, por ejemplo propagación de grietas, se pueden manejar con mayor facilidad.
- *Convergencia.* Para el mismo orden de consistencia, los experimentos sugieren que los resultados de convergencia de los métodos sin malla son considerablemente mejores que los resultados con funciones de forma de métodos basados en mallas.
- *Coste computacional.* En general, los métodos sin malla consumen un mayor tiempo computacional que los métodos basados en mallas. Las funciones de forma son de naturaleza más complejas que las funciones de forma de los métodos basados en mallas. En cada punto es necesario buscar su entorno, resolver pequeños sistemas de ecuaciones y operaciones matriciales para determinar las derivadas. Además, el sistema de ecuaciones global tiene matrices con bandas más anchas que las de los métodos basados en mallas.
- *Condiciones de contorno esenciales.* La mayoría de los métodos sin malla no cumple la propiedad de la delta de Kronecker y, por tanto,

la imposición de condiciones de contorno esenciales puede degradar la convergencia del método.

- *Bloqueo.* Contrariamente a lo que había sido establecido en [12], los métodos sin malla sufren del fenómeno del bloqueo como en el FEM.

Entre las aplicaciones más adecuadas para los métodos sin malla, podemos señalar problemas de grandes deformaciones, problemas con necesidad de refinamientos adaptativos, problemas de localización de deformaciones, problemas de mecánica de fractura, problemas de contacto suave o incluso problemas de la mecánica cuántica.

Los pasos que se deben considerar para clasificar los métodos sin malla son, según Fries y Matthies [53],

- El orden de la partición de la unidad realizada con una base intrínseca.
- La elección de una función de aproximación que sólo utilice una base intrínseca o también una base extrínseca.
- La elección de la función de ponderación.

Según Liu y Gu [99]:

- El procedimiento de formulación
- El esquema de aproximación
- La representación del dominio

Siguiendo a J.S. Chen et al. [40], la clasificación dada aquí se debe al procedimiento de formulación:

- Los métodos sin malla de Galerkin basados en la formulación débil. Aunque no se necesita malla para construir la aproximación, la integración del dominio si es necesaria, además de precisar de técnicas para hacer cumplir las condiciones esenciales de contorno.

- Los métodos de colocación basados en la formulación fuerte. Debido a la facilidad de construir aproximaciones suaves sin malla, las ecuaciones en derivadas parciales pueden ser resueltas directamente en los puntos de colocación sin integración del dominio, ni procedimientos especiales para la aplicación de las condiciones de contorno esenciales.

Con respecto a la formulación débil, podemos situar su origen en 1977 de la mano de Lucy [103] y Gingold y Monaghan [64] con el método Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) que utilizaron para modelar fenómenos astrofísicos sin contornos tales como la explosión de estrellas o de nubes de partículas.

Por otro lado, con respecto a la formulación fuerte, Jensen [80] fue el primero en considerar métodos en diferencias finitas con nodos dispersos. En particular, consideró el desarrollo de Taylor interpolado en estrellas de seis nodos para obtener las fórmulas en diferencias finitas aproximando las derivadas hasta orden dos. Perrone y Kao [122] sugirieron que se deberían considerar nodos adicionales en el esquema de seis nodos y un proceso promedio para la generalización de los coeficientes en diferencias finitas aplicados. La idea de usar estrellas de ocho nodos y funciones de ponderación para obtener fórmulas en diferencias finitas para mallas irregulares, fue presentada por primera vez por Lyszka y Orkisz [96, 97].

Métodos sin malla de Galerkin

Entre los métodos sin malla utilizados en la formulación de Galerkin encontramos, el diffuse element method (DEM) [116] en el que las derivadas son aproximadas diferenciando una parte de las funciones base (derivadas difusas). Belytschko et al. [10, 11, 102] introdujeron el element free Galerkin (EFG) como una mejora del DEM, introduciendo multiplicadores de Lagrange para hacer cumplir las condiciones de contorno y obteniendo derivadas de las variables de campo y las derivadas que aparecen en las integrales de las funciones de aproximación por mínimos cuadrados móviles (MLS). W.

K. Liu et al. [100] introdujeron, de forma simultánea al EFG, el reproducing kernel particle method (RKPM), basado en la aproximación reproducing kernel (RK), que podía servir como corrección al SPH que es particularmente impreciso cerca de los contornos.

La integración del dominio en la formulación débil plantea una seria complejidad en los métodos sin malla de Galerkin. La utilización de la cuadratura de Gauss puede llevar a errores de integración cuando los elementos no coinciden con las funciones de forma. El EFG y el RKPM no pasan ni el ajuste lineal. Una stabilized conforming nodal integration (SCNI) [36] se introdujo para asegurar el ajuste lineal.

A partir de Melenk y Babuska [107] ha surgido una serie de métodos sin malla basados en la partición de la unidad (PU). Duarte y Oden [49] introdujeron un método sin malla llamado *nubes hp*, que está basado en la PU, donde la aproximación MLS fue enriquecida extrínsecamente, lo que les daba la posibilidad de realizar *p* adaptatividad sin introducir discontinuidades, al contrario de lo que ocurre con los métodos basados en MLS. Para un estudio general de los resultados matemáticos relativos a los métodos basados en PU, puede verse [7].

En los métodos sin malla de Galerkin, la integración con frecuencia precisa de una malla. El meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) introducido por Alturi y Zhu [5] utiliza formas locales débiles formuladas en dominios que coinciden con el soporte de las funciones de aproximación, evitando la utilización de una malla de integración. De y Bathe [44, 45] introdujeron el method of finite spheres (MFS), como un caso especial de MPLG.

Entre los métodos sin malla con formulación débil que han ido surgiendo se encuentran, por ejemplo, el generalized finite element method (GFEM) [134, 135, 136], el natural element method (NEM) [137, 27], el radial point interpolation method (RPIM) [153] o el optimal transport meshfree (OTM) [92].

Métodos sin malla de colocación

Entre estos métodos encontramos todos aquellos basados en radial basis functions (RBF) que fue introducido por Hardy [68, 69] para problemas de interpolación. De forma alternativa, las aproximaciones como el MLS o el RK pueden ser empleadas para la solución por colocación de ecuaciones en derivadas parciales. Por ejemplo, el finite point method (FPM) de Oñate et al. [117] utiliza aproximaciones de mínimos cuadrados ponderados en cada nodo. También se han introducido métodos basados en la aproximación de núcleo de reproducción como en Hu et al. [74]

La tabla 1.1, que es un extracto del esquema presentado en [40], muestra algunos métodos sin malla de los que han ido surgiendo en los últimos años, ordenados por fecha, bien de aparición o bien de la primera versión robusta.

1.3. Sobre el método de las diferencias finitas generalizadas

Tras los trabajos de Liszka y Orkisz [96, 97], la versión más avanzada del GFDM fue dada por Orkisz [120, 119, 118], incluyendo: generación de malla, aproximación local, generación de fórmulas en diferencias finitas y ecuaciones resultantes de las diferencias finitas a través de formulaciones locales (colocación) o globales (Galerkin, variacional,...). En el trabajo de Lancaster y Salkauskas [91] se describe la aproximación mínimos cuadrados móviles que se usa en Benito et al. [15], que muestra las fórmulas explícitas para el GFDM en el caso bidimensional y estudia la influencia de los parámetros involucrados en la aproximación, esto es, el número de nodos, el criterio de selección de los mismos y la función de ponderación. En [56] se comparan el método de las diferencias finitas generalizadas y el EFG con aproximación lineal obteniendo mejores resultados en el primer caso. En [140] se dan las fórmulas explícitas

Tabla 1.1: Clasificación de métodos sin malla en función de su formulación (débil o fuerte)

Método sin malla	Referencias	Débil	Fuerte
SPH - smoothed particle hydrodynamics	[103, 64]	x	
GFDM - generalized finite difference method	[96, 97]		x
RBCM - radial basis collocation method	[84, 85]		x
DEM - diffuse element method	[116]	x	
EFG - element free Galerkin	[10, 11, 102]	x	
XEFG - extended EFG	[124, 125]	x	
RKPM - reproducing kernel particle method	[100, 35]	x	
SLRKPM - semi-Lagrangian RKPM	[38]	x	
GFEM - generalized finite element method	[106, 136]	x	
XFEM - extended finite element method	[13, 47]	x	
MPS - moving particle semi-implicit	[89]		x
PUM - partition of unity method	[107]	x	
HPC - hp clouds	[49, 50]	x	
FPM - finite point method	[117]		x
FMM - free mesh method	[156]	x	
C-SPH - corrected SPH	[46]	x	
MLSPH - moving least squares particle hydrodynamics	[46]	x	
MLPG - meshless local Petrov-Galerkin	[5]	x	
NEM - natural element method	[137, 27]	x	
PPU - particle partition of unity method	[66]	x	
MFS - method of finite spheres	[44]	x	
RKCM - Reproducing kernel collocation method	[3, 74]		x
GRKCM - gradient RKCM	[42]		x
M-SCNI - modified stabilized conforming nodal integration	[36, 37, 157]	x	
LRPIM - local radial point interpolation method	[98]	x	
RPIM - radial point interpolation method	[153]	x	
MFEM - meshless finite element method	[76]	x	
PFEM - particle finite element method	[77, 78]	x	
MaxEnt - maximum entropy	[4, 138]	x	
Peridynamics	[130, 131]		x
OTM - optimal transport meshfree	[92]	x	
Meshless VCI - meshless variationally consistent integration	[39]	x	

en el caso tridimensional. En [17] se resuelven ecuaciones en derivadas parciales parabólicas e hiperbólicas empleando esquemas explícitos, analizando la consistencia, el orden, la convergencia y la estabilidad. En [19] se compara el método de las diferencias finitas generalizadas con el clásico obteniendo mejores resultados con el primero. En [60] se presenta un índice de irregularidad de la discretización, IIC, que se obtiene hallando la desviación típica del

radio medio de las estrellas que es la distancia media entre el nodo central y el resto de nodos de la estrella. En M. Ureña [143] se estudia la influencia de los parámetros claves del método en tres dimensiones, poniéndose de manifiesto la necesidad de realizar el análisis del número de nodos y el criterio de selección de los mismos de forma conjunta. En esta tesis este radio medio se llamará simplemente radio. En [145] se presenta una formulación matricial más compacta del método, se demuestra el teorema de existencia y unicidad y se extraen una serie de consecuencias inmediatas, como se muestra en la presente tesis. En [146] se proponen dos funciones de penalización, que serán expuestas en esta tesis, permitiendo una selección automática de los nodos de la estrella. Este selección automática es especialmente importante en tres dimensiones, por lo que, aunque no ha sido aplicada en dos dimensiones, su extensión no supone ninguna dificultad.

Benito, F. Ureña y Gavete han contribuido notablemente al desarrollo del método, también a nivel de aplicabilidad, en problemas de diferente índole. En [123] se obtiene el esquema explícito para la ecuación parabólica de advección difusión, analizando la consistencia, el orden, la estabilidad y la convergencia. En [141] se aplica el GFDM a la resolución de placas finas y gruesas y se comparan los resultados con los obtenidos con un software comercial que usa FEM obteniendo resultados similares. En [62] se utiliza el GFDM para simular la conductividad eléctrica de un tejido. En [57] se emplea el GFDM en problemas de análisis dinámico como la vibración de vigas y de placas, analizando la consistencia, el orden, la estabilidad y la convergencia de los esquemas obtenidos. En [59] se combina el GFDM con el método de Newton Raphson para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales no lineales.

Otros grupos han llevado a cabo diferentes aplicaciones del método, por ejemplo Zhang et al. [159] lo utilizan para simular la propagación de ondas marinas no lineales en el canal de ondas numéricas y en [160] para simular el fenómeno del sloshing, Mochnacki y Majchrzak [109] lo usan para realizar modelados numéricos de solidificación de moldes, Chan et al. [34] lo emplean para resolver problemas de obstáculos no lineales de dos dimensiones, Hos-

seini [73] lo aplica a problemas de difusión-elasticidad no-Fickiana acoplada inducida por choque en dos dimensiones y en [72] lo aplica al análisis de la frecuencia natural de cilindros de nanocompuesto graduados funcionalmente reforzados por nanotubos de carbono y lo hace forma híbrida, utilizando el GFDM para las derivadas espaciales y las diferencias finitas de Newmark (NFD) para la variable temporal, C.M. Fan et al. [51] lo han utilizado para resolver problemas con valores en la frontera biarmónicos inversos y en [52] para resolver problemas inversos de Cauchy en dos dimensiones, P. W. Li y C.M. Fan [93] lo aplican a la resolución de las ecuaciones para ondas superficiales en dos dimensiones y Hua et al. [75] lo aplican para resolver problemas inversos de Cauchy asociados a ecuaciones tridimensionales de tipo Helmholtz.

1.4. Sobre la adaptatividad con el método de las diferencias finitas generalizadas

La adaptatividad de tipo p se produce cuando la mejora de los resultados es consecuencia de un aumento en el grado del polinomio de interpolación y la adaptatividad de tipo h se produce cuando la mejora de los resultados se obtiene aumentando el número de nodos en la discretización.

Los avances en adaptatividad con el método de las diferencias finitas generalizadas hasta el momento se pueden sintetizar como sigue.

Para un problema regido por una ecuación en derivadas parciales de orden n , Orkisz [119] propone como indicador del error en un nodo la diferencia entre el valor aproximado truncando el desarrollo de Taylor para términos de orden superior a $2n$ y el valor aproximado truncando el desarrollo de Taylor para términos de orden superior a n , obteniendo así una estimación del error cometido. Esta forma del indicador del error tiene el inconveniente de que para calcularlo se tiene que resolver, nuevamente, el sistema para el cálculo de los coeficientes de las derivadas parciales, pero siendo ahora el rango de

la matriz $2n^2 + 3n$, véase Casasús [33]. Por ello, Benito et al. [16] proponen como indicador del error una combinación lineal de las derivadas parciales de grado superior ponderada por los coeficientes de la estrella, obteniendo las derivadas parciales de forma recursiva a partir de las derivadas inferiores. Puede verse en el Anexo A del artículo [16] un ejemplo donde se comparan ambos indicadores. Por otro lado, la tasa de convergencia de la solución utilizada por Orkisz es $\beta_i^k = \frac{\|u_i^k - u_i^{k-1}\|}{\|u_i^k\|} \leq c_3$ donde i son los nodos comunes que se mantienen en las sucesivas discretizaciones, desde $k = 1$, y c_3 es el umbral del error que se pretende alcanzar.

En [16] se contemplan tres enfoques para reducir el error. Uno de ellos consiste en actuar sobre el orden de truncamiento del desarrollo de Taylor, pero se concluye que el error no se reduce mucho en comparación con el aumento en cálculos. Otro enfoque consiste en actuar sobre la estrellas, seleccionando un número de nodos mayor para su formación, un criterio de selección que se adapte mejor a la discretización o una función de ponderación adecuada. El último enfoque consiste en actuar en el número de nodos de la discretización, aumentándolos. En este último caso, y contrariamente a lo que ocurre con el método de las diferencias clásico donde el número de nodos se aumenta de forma uniforme en todo el dominio, se puede aumentar el número de nodos de forma selectiva en determinados subdominios. El método adaptativo propuesto consiste en añadir hasta un máximo de cuatro nodos por estrella a mitad de distancia entre el nodo central y los nodos más alejados del mismo. Para decidir en que nodos reducir el error, es decir un límite de error, calculan la media (o un múltiplo suyo) de todos los errores y escogen aquellos nodos que tienen un error superior. Para evitar estrellas mal condicionadas se establece un nuevo parámetro, la distancia mínima, $dpa = \alpha \times maximumdistance$, $0 < \alpha < 1$, que permite no añadir un nodo cuando la distancia entre éste y los existentes sea menor que la distancia dpa . Esta distancia mínima ha sido redefinida en la presente tesis. Se estudia la influencia de la distancia dpa concluyendo que es preferible reducirla poco a poco en varios pasos del proceso adaptativo. En cuanto a la influencia

del error límite concluyen, en la misma dirección, que es preferible reducirlo poco a poco en varios pasos del proceso adaptativo. Para evitar estos inconvenientes, limitan el número de nodos seleccionados para aplicarles el método adaptativo a un máximo del 20 % de los nodos interiores, reduciéndose así el límite del error de forma automática, y no permiten que se añadan más de un 15 % del total de nodos en cada paso del adaptativo.

Gavete et al. [56] muestran una forma de generar irregularidades estratégicas que proporcionan resultados casi tan precisos como aquellos proporcionados por una discretización regular más fina, con el consecuente ahorro computacional. Recientemente, M. Ureña et al. [146] muestran una forma más efectiva, en términos de error, de construir una discretización irregular, a las que llamamos discretización con densidad de nodos progresiva, proporcionando mejores resultados que aquellos proporcionados por una discretización regular más fina. Esto pone de manifiesto que, incluso aunque una discretización regular tenga cabida en un problema, puede ser preferible en determinados casos la utilización de discretizaciones irregulares no aleatorias, lo que en esta tesis se llamarán discretizaciones de patrón regular.

En [140] se desarrolla el método adaptativo consistente en añadir nodos a mitad de distancia entre el central y el resto de nodos de la estrella en 3D. Además se examina de forma puntual la disminución del error y se propone un índice de calidad mostrando como mejora en cada paso del adaptativo.

En [19] se incorpora al método adaptativo otro algoritmo para añadir nodos. Por cada nodo seleccionado para aplicarle el método adaptativo, se forman triángulos entre el nodo central y el resto de nodos de la estrella y se calcula su área. Se añaden los nodos en el baricentro de los triángulos cuya área sea mayor que la media de todas las áreas de la estrella.

En [58] se propone un método adaptativo diferente de los anteriores que está basado en el uso del quadtree y en la computación de los gradientes. Como indicador del error se usa las diferencias entre los gradientes en cada

quadtree. Un método quadtree es un método para organizar datos en los cuatro cuadrantes de forma jerárquica. Una estructura quadtree requiere que cada nodo interno tenga exactamente cuatro nodos hijos. Aunque el método de las diferencias finitas generalizadas es un método sin malla, dada una discretización se puede crear una estructura inicial de cuadriláteros como la mostrada en la figura 1.1 (izquierda) con la condición de que los cuadriláteros sean convexos. Se calculan entonces los gradientes en cada nodo, con el propio GFDM, y se hace una media de las diferencias entre los gradientes de los cuatro nodos que forman el cuadrilátero multiplicado por su área. Aquellos cuadriláteros con valores más altos que el establecido son elegidos para aplicarles el método. En la figura 1.1 (derecha) se muestra un ejemplo donde dos cuadriláteros son seleccionados y el método quadtree es aplicado.

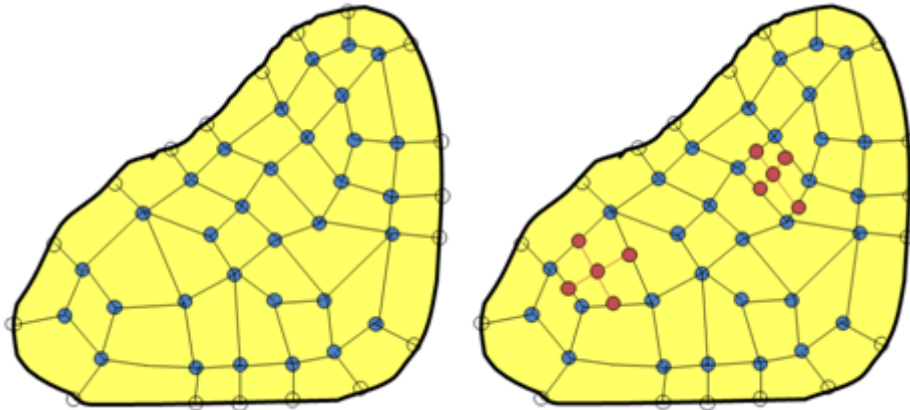


Figura 1.1: Izquierda: División de la discretización inicial en cuadriláteros. Derecha: Aplicación del método quadtree en dos nodos interiores. (Cortesía de Gavete et al. [58])

En [146] se propone un método adaptativo más versátil, permitiendo, no sólo añadir nodos, sino también moverlos y eliminarlos. Este método proporciona mejores resultados que los obtenidos hasta ahora y con menos nodos.

1.5. Sobre ondas en medios elásticos

Como afirman Moczo et al. [111], el método de las diferencias finitas es el método dominante en modelos sísmicos. Entre las razones para ello, se encuentra la robustez del método, la precisión y la eficiencia computacional, aunque son conscientes de sus limitaciones como puede ser la aplicación en modelos complejos.

La aplicación del GFDM está teniendo una presencia muy importante en problemas de propagación de ondas. En esta línea se encuentran, por ejemplo, los trabajos ya mencionados de Zhang et al. [159] y de P. W. Li y C.M. Fan [93]. La primera aplicación del método de las diferencias finitas generalizadas a problemas de propagación sísmica se debe a F. Ureña et al. [142], quienes obtuvieron los esquemas en diferencias finitas generalizadas para las ondas P-SV en un medio isótropo, homogéneo y elástico y analizaron tanto la estabilidad como la dispersión. En [20], y también para ondas P-SV, se incluyeron contornos absorbentes, en particular Perfectly Matched Layers (PML), al modelo anterior, obteniendo el esquema en diferencias finitas correspondiente y su estabilidad se analizó en [127]. La influencia de los parámetros que aparecen en el esquema con PML se estudió en [21]. En [22] se comparan la formulación en velocidades tensiones con la formulación en desplazamientos tensiones, siendo más estables las últimas.

1.6. Sobre las heterogeneidades

Diferentes capas reflejan, refractan y/o retrasan las señales de forma diferente, por lo que observando las ondas incidentes, se puede extraer información sobre estas capas. Esta información sísmica permite a los geofísicos, a los ingenieros del petróleo y de minas, a los hidrólogos a encontrar depósitos de mineral y reservas de aguas subterráneas, ayuda a los ingenieros civiles a obtener un buen conocimiento de la estabilidad de las capas del subsuelo debajo de futuras estructuras, edificios, túneles, presas, vertederos, etc.

Una onda P incidiendo en una interfase entre dos medios genera ondas P reflejadas y transmitidas. Además, parte de la onda P es convertida en ondas SV reflejadas y transmitidas. Una onda SH incidente genera ondas SH reflejadas y transmitidas.

Para tratar numéricamente problemas sismológicos en los que se tiene un medio heterogéneo formado por capas de medios homogéneos, se consideran dos enfoques o aproximaciones, la aproximación homogénea y la aproximación heterogénea. En la aproximación homogénea se utiliza un esquema para las capas homogéneas y otro esquema, basado en la discretización de las condiciones de contorno, en la interfase o cerca de ella, mientras que en la aproximación heterogénea, las discontinuidades del material son tenidas en cuenta sólo por las variaciones espaciales de los parámetros del material en la ecuación del movimiento. La aproximación heterogénea es preferible a la aproximación homogénea puesto que esta última puede ser complicada o incluso impracticable. Ejemplos de aproximación homogénea se encuentran en [79] para ondas P-SV y en [90] para ondas SH. Ejemplos de aproximación heterogénea se encuentran en [149] y [86] para ondas P-SV y en [148] para ondas SH. En 3D podemos encontrar trabajos como el de Moczo et al. [111].

Un breve repaso puede ser como muestran Moczo et al. [111]. Alterman y Karal [2] introdujeron nodos ficticios en la malla para aproximar las condiciones de contorno en la discontinuidad con la aproximación homogénea. Boore [25] intentó introducir explícitamente condiciones de tensión y continuidad para ambas aproximaciones. Ilan et al. [79] resolvieron el problema para discontinuidades horizontales y verticales con la aproximación homogénea acoplando la ecuación del movimiento con las condiciones de contorno mediante el desarrollo de Taylor. Kelly et al. [86] utilizaron la aproximación heterogénea con un promedio de las velocidades y la aproximación homogénea para comparar sismogramas sintéticos, aunque no realizaron una comparación de ambos esquemas para lo que habrían necesitado utilizar reflexión de ondas planas. Virieux [148, 149] fue el primero en utilizar mallas staggered, debidas a Madariaga [104], para la propagación de ondas sísmicas.

Aunque Virieux obtuvo resultados muy precisos con este tipo de malla, encontró dificultades para explicar las características de la solución homogénea.

Las dos preguntas claves para la aproximación heterogénea son: 1) ¿Es posible encontrar una formulación heterogénea de la ecuación del movimiento? 2) ¿Cómo se determinan los valores de los parámetros del material en la interfase y cerca de ella? Zahradnik y Priolo [158] fueron los primeros en contestar ya que los términos de movimiento obtenidos son equivalentes a la condición de continuidad de las tensiones, lo que ha sido interpretado como una justificación de la misma. No obstante, al utilizar esquemas en diferencias finitas en el caso de superficies libre no pueden evitar la aparición de términos falsos, aunque los consideran de poca importancia al no ser términos dominantes. Es inmediato comprobar que los esquemas presentados en esta tesis presentan los mismos términos en casos de interfases verticales y horizontales que los esquemas de Zahradnik y Priolo. Graves [65] fue el primero en explicar claramente cómo la discontinuidad es tomada en cuenta. Moczo et al. [111] obtienen valores de los parámetros para un medio heterogéneo entre dos medios homogéneos suponiendo que la deformación del medio completo es la suma de las deformaciones en ambos medios y que las tensiones son iguales como en el caso de dos resortes en serie, llegando así a que el coeficiente elástico es la media armónica de los coeficientes elásticos y la densidad es la media de las densidades de ambos medios. Sin embargo, para poder utilizar un único esquema en todo el medio utilizan (1.1) en el que obviamente se comete una imprecisión cuando un nodo de la malla se encuentra exactamente en la discontinuidad, como ellos mismos justifican en [111] (página 3049). Además, en la integración del coeficiente elástico se debe introducir una función auxiliar que evita tener que aproximar la derivada primera del coeficiente elástico.

$$\begin{cases} \rho^A d(x, t) = \tau_{,x}(x, t) + f(x, t) \\ \tau(x, t) = c^H d_{,x}(x, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

En Lisitsa et al. [95] utilizan un esquema numérico conservativo unidi-

mensional para analizar el error en la interfase tratando los coeficientes de reflexión y transmisión como variables dependientes del espacio. En la formulación se tienen en cuenta las diferentes posiciones de la interfase con respecto a la malla. Los autores ponen de manifiesto la complejidad de extender el esquema propuesto a dos y tres dimensiones debido, principalmente, a la geometría de la interfase y, aunque existen técnicas para alinear la malla a la interfase, como por ejemplo en [81], en esos casos el orden de la aproximación decaería a uno.

Vishnevsky et al. [150] mostraron que los tres esquemas en diferencias finitas con mallas staggered más usados para la ecuación de ondas pierden precisión en interfases inclinadas puesto que, en esos casos, las derivadas parciales primeras utilizadas son un orden menor que el orden utilizado para las derivadas parciales segundas. Además, Vishnevsky et al. [150] también hacen referencia a la dificultad de la generación de la discretización en métodos tipo Galerkin.

En esta tesis, se trata el problema de la interfase considerando que los parámetros elásticos y la densidad son funciones lineales de la posición en un entorno de la interfase. Kelly et al. [86] hicieron algo similar pero, por un lado, ellos consideraron el cuadrado de las velocidades como funciones lineales de la profundidad y, por otro lado, mantuvieron la misma densidad a ambos lados de la interfase, reduciendo así la generalidad del procedimiento, como ellos mismos asumieron en el citado artículo. Además, en discretizaciones regulares y con interfases de forma compleja es difícil que no haya nodos en la interfase o cerca de ella en posiciones poco deseables, esto es, con más nodos en el medio al que no pertenece el nodo central, como puede ocurrir en diferencias finitas clásicas, figura 1.2. Para evitar tales dificultades es necesario refinar la discretización, con el consecuente aumento temporal en la resolución del problema, o recurrir a otro tipo de artificios como, por ejemplo, los llevados a cabo por Moczo et al. [111] que utiliza medias aritméticas y armónicas de los parámetros del medio para el esquema en la interfase. El método de las diferencias finitas generalizadas evita estos inconvenientes

al no precisar de una discretización regular lo que permite situar los nodos cercanos a la interfase de forma independiente al resto.

Muy recientemente, en febrero de 2017, Martin y Fornberg [105] han publicado un interesante artículo donde proponen un procedimiento para tratar las interfases en discretizaciones irregulares. Estos resultados junto con los presentados en esta tesis dan respuesta al tratamiento de las interfases con dos de los principales métodos basados en la formulación fuerte.

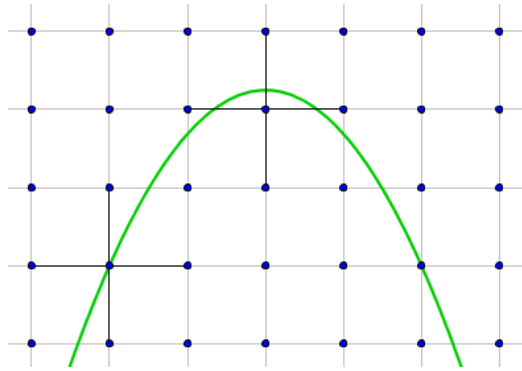


Figura 1.2: Discretización con nodos en la interfase y nodos en posiciones no recomendables.

En casi todos los ejemplos analizados en esta tesis se utilizarán pulsos de Ricker puesto que en el procesamiento de datos sísmicos resulta ser muy eficiente describir el espectro de señales como una combinación lineal de espectros de ondículas de Ricker. En concreto, para propagación a través de varias capas se tiene que la ondícula de Ricker es la solución no trivial más simple para el correspondiente problema de procesamiento de datos, bajo determinadas condiciones [63].

1.7. Sobre ondas en medios en medios con modelos viscoelásticos

Los medios cuya ley constitutiva sigue la ley de Hooke no tienen pérdida interna de energía, por lo que cualquier onda se propagaría sin atenuación y, por tanto, indefinidamente. Aunque los medios con un amortiguamiento muy débil puedan ser modelados con esta relación constitutiva, es fundamental considerar el amortiguamiento en su relación constitutiva. Señalan Robertsson et al. [126] que aunque el modelo elástico es un buen modelo para la Tierra, la dispersión y la atenuación que se produce debe ser tomada en cuenta pues en algunos casos puede ser significativa y puede llevar a errores si se desprecia. Calizas agrietadas, rocas agrietadas rellenas de algún fluido, areniscas porosas, etc. son ejemplos de materiales que presentan considerables propiedades de atenuación. El comportamiento viscoelástico puede ser representado por un muelle elástico y un amortiguador viscoso en paralelo, lo que se conoce como modelo de Kelvin - Voight, figura 1.3 derecha. Por supuesto, pueden utilizarse otros modelos viscoelásticos como el modelo de Maxwell que puede representarse por un muelle elástico y un amortiguador viscoso en serie, figura 1.3 izquierda. De las múltiples combinaciones, tanto en serie como en paralelo del muelle elástico y el amortiguador viscoso, se extraen una infinidad de modelos, por ejemplo, una serie de elementos de Kelvin - Voight en paralelo se conoce como modelo Kelvin - Voight generalizado, una serie de elementos Maxwell en paralelo se conoce como modelo de Maxwell generalizado, un elemento Maxwell y un elemento Kelvin - Voight en serie se conoce como modelo de Burger, etc.

Es claro, por tanto, que el modelo Kelvin-Voight es un caso particular, pero aún así, es utilizado en muchas aplicaciones como señala Carcione [30]. Algunas de estas aplicaciones están relacionadas con la exploración sísmica para monitorizar y evaluar yacimientos de minerales. También puede usarse para modelar pérdidas producidas por capas intermedias de fluido a bajas frecuencias [67]. Otro ejemplo de aplicación puede ser el mostrado por Sahu et al. [129] que estudiaron el efecto de la gravedad, la fricción interna y la

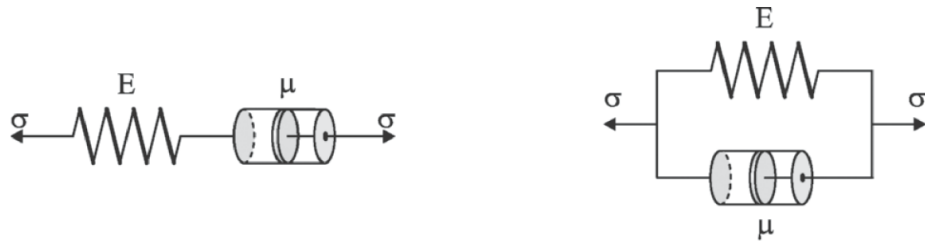


Figura 1.3: Izquierda: Modelo de Maxwell. Derecha: Modelo de Kelvin - Voight. La figura pertenece a H. Brinson y L.C. Brinson [28].

heterogeneidad a través de la propagación de ondas sísmicas SH aplicando la relación constitutiva de Kelvin - Voight.

Muchos autores, como Carcione [32], Moczo et al. [112] y Borchardt [26], tratan con variables de memoria para evitar la implementación de la ley constitutiva dada por la relación de convolución. El modelo de Kelvin - Voight puede obtenerse a partir de las funciones de relajación en la formulación con variables de memoria pero, a pesar de ello, como apunta [31], el modelo de Kelvin - Voight tiene la ventaja de no requerir variables adicionales en el modelo, disminuyendo así el coste computacional. Además, a temperatura ambiente, la atenuación en muchos medios puede ser descrita de forma adecuada a través de un término de amortiguamiento viscoso, esto es, a través del modelo de Kelvin - Voight.

El esquema en diferencias finitas clásicas para ondas SH en medios viscoelásticos con la relación constitutiva de Kelvin - Voight ha sido obtenido recientemente por Kalyani et al. [83]. Los mismos autores enfatizan la superioridad del método de las diferencias finitas para modelar problemas de propagación sísmica debido a su potencia, rapidez, flexibilidad y precisión. También señalan como principal inconveniente de este método, la dependencia de una malla regular que puede complicar la discretización en geometrías complejas. Este inconveniente puede ser eliminado utilizando el método de las diferencias finitas generalizadas.

1.8. Sobre los contornos absorbentes

Como una primera aproximación a los contornos absorbentes puede servir la dada por Johnson [82] en sus notas para los cursos del MIT.

En problemas como el de la propagación de ondas, la solución es oscilatoria y decae lentamente con la distancia. Si se establecen condiciones Dirichlet o Neumann se provocan reflexiones dentro de la zona de interés, además de no cumplir con la condición de radiación. Para evitarlo, un primer intento fue crear contornos absorbentes, en particular, absorbing boundary conditions (ABCs) [139] que daba buenos resultados en una dimensión pero no en 2 o 3 dimensiones. Berenger [23] en 1994 cambió el enfoque de los contornos absorbentes por el de las capas absorbentes situadas de forma adyacente a la región de interés y fue el primero en encontrar una capa absorbente que aplicó para ondas electromagnéticas. Estas capas, llamadas Perfectly Matched Layers (PML), extienden la variable real al campo complejo evitando reflexiones en la frontera de la capa, ya que resuelve la misma ecuación en derivadas parciales, y provocan la atenuación de las ondas en su interior. Este tipo de estrategias son utilizadas en métodos numéricos aplicables en dominios de dimensión finita y no son necesarios en métodos numéricos como por ejemplo el BEM (boundary element method) que se aplica en dominios infinitos o semiinfinitos y, por tanto, es posible situar los contornos lo suficientemente alejados como para tener una influencia despreciable en la zona de interés.

Chew y Liu [41] fueron los primeros en proponer el PML para ondas elásticas en sólidos y probaron que las reflexiones son despreciables en un medio elástico discretizado regularmente. El PML también ha sido aplicado a la propagación de ondas en medios poroelásticos por Zheng y Huang [161], en problemas elásticos por Collino y Tsogka [43] y Basu y Chopra [9], con esquemas en diferencias finitas por Moczo et al. [112], Kirsch [87], Skelton et al. [132] y, en particular, para la ecuación de onda escrito como un sistema de segundo orden en desplazamientos por Komatitsch y J. Tromp [88] y Benito

et al. [20]. En Salet et al. [127] se analiza la estabilidad de los esquemas PML.

Para obtener los esquemas correspondientes para la región PML se realizan las asignaciones (1.2), como señala Johnson [82].

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &\longrightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} &\longrightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_z(z)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}\tag{1.2}$$

La dependencia de la frecuencia ω en el cambio de variable es para que la tasa de atenuación en el PML sea independiente de la frecuencia en un material sin dispersión.

En el caso de ondas evanescentes el PML añade oscilaciones pero no incrementa la tasa de decaimiento. Para acelerar el decaimiento en el PML tendría que escogerse la función δ puramente imaginaria, lo que debe tenerse en cuenta en caso de ondas viscoelásticas [82].

Dado que el estudio de los esquemas PML no son objeto de la presente tesis, estos no han sido incluidos al tratar los aspectos teóricos aunque se utiliza en el código desarrollado ante la necesidad de su utilización debido al tipo de problemas abordados en las aplicaciones prácticas.

Capítulo 2

Método de las diferencias finitas generalizadas

2.1. Definiciones

Definición 1 (Discretización). *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con $\text{int}(D) = \Omega$ y $\text{fr}(D) = \Gamma$. Llamamos discretización del dominio D a cualquier subconjunto finito de puntos, en adelante nodos, $M \subset D$. Así mismo, llamamos nodos interiores de la discretización a los nodos del conjunto $\Omega \cap M$, en adelante $\text{int}(M)$, y nodos frontera de la discretización a los nodos del conjunto $\Gamma \cap M$, en adelante $\text{fr}(M)$. Llamaremos paso de referencia a la distancia mínima entre dos nodos cualesquiera del dominio.*

Definición 2 (Estrella). *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio y M una discretización de D y sea $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)$. Llamamos estrella de N nodos, o simplemente estrella, con nodo central \mathbf{x}_0 al conjunto $E(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset M$. Llamamos nodos de la estrella a los N elementos del conjunto $E(\mathbf{x}_0) - \{\mathbf{x}_0\}$.*

Definición 3 (Radio de la estrella). *Se define el radio de la estrella como la distancia media entre el nodo central y el resto de nodos de la estrella y se denota por \overline{sr} .*

Definición 4 (Función de penalización de distancia de una estrella). *Se define la función de penalización de distancia de una estrella, $f_d : \Omega \rightarrow$*

$[0, 1]$, como el número de nodos fuera del intervalo $[\bar{s}_r - 2\sigma_{\bar{s}_r}, \bar{s}_r + 2\sigma_{\bar{s}_r}]$ dividido por el número de nodos de la estrella, siendo $\sigma_{\bar{s}_r}$ la desviación típica de las distancias entre el nodo central y el resto de nodos de la estrella.

Dada una estrella de N nodos, se dice que el número óptimo de nodos por cuadrante es la parte entera de $N/4$ y se denota por NO .

Definición 5 (Función de penalización de desequilibrio de una estrella). *Se define la función de penalización de desequilibrio de una estrella, $f_b : \Omega \rightarrow [0, 1]$, como la suma del número de nodos sobrantes o faltantes con respecto al número óptimo de nodos (NO) en cada cuadrante dividido por la penalización máxima en la estrella.*

La penalización máxima en una estrella es $N + 2NO$.

Definición 6 (Discretización de patrón regular). *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio. Se dice que la discretización M es una discretización de patrón regular si para cada $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)$, $f_d(\mathbf{x}_0) = 0$ y $f_b(\mathbf{x}_0) = 0$. En tal caso, llamaremos paso de referencia al radio medio de los radios de las estrellas del dominio.*

Definición 7 (Discretización regular). *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio. Se dice que la discretización M es una discretización regular de paso h si para cada $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)$, el conjunto de nodos $\{\mathbf{x} = (x_0 + ih, z_0 + jh) \in D, |i, j = -1, 0, 1\} \subset \text{int}(M)$ y además la discretización es de patrón regular.*

Definición 8 (Discretización irregular). *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio. Se dice que la discretización M es una discretización irregular cuando no es ni regular ni de patrón regular.*

Nótese que las definiciones 6, 7 y 8 son propias del método de las diferencias finitas generalizadas pues están íntimamente relacionadas con las estrellas formadas en el dominio. Por ejemplo, una discretización puede ser de patrón regular o regular con estrellas de N nodos e irregular con estrellas de $N + 1$ nodos.

2.2. Fórmulas en diferencias finitas generalizadas para las variables espaciales

Sean D un dominio, Ω el interior del dominio y Γ la frontera. Sean $\mathbf{x} = (x, z) \in \mathbb{R}^2$ y $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en D .

Sea el problema regido por la ecuación lineal en derivadas parciales de orden dos

$$\mathcal{L}_2(\Phi(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.1)$$

con la condición de contorno

$$\mathcal{L}_1(\Phi(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.2)$$

siendo $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Sean M una discretización del dominio D , $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)$ y $E(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ la estrella de nodo central \mathbf{x}_0 . Para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, se denota $\Phi_0 = \Phi(\mathbf{x}_0)$ y $\Phi_i = \Phi(\mathbf{x}_i)$ y se obtiene el desarrollo de Taylor en un entorno de \mathbf{x}_0 ,

$$\Phi_i = \Phi_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \nabla \Phi_0 + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \mathcal{H} \Phi_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \dots \quad (2.3)$$

Ignorando los términos de orden 3 en adelante, se tienen aproximaciones ϕ_0 de Φ_0 y ϕ_i de Φ_i y sumando las N ecuaciones se llega a

$$\sum_{i=1}^N \phi_i = \sum_{i=1}^N \left[\phi_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \nabla \phi_0 + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \mathcal{H} \phi_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right] \quad (2.4)$$

donde las coordenadas relativas del nodo i -ésimo al nodo central son denotadas por $h_i = x_i - x_0$ y $k_i = z_i - z_0$

Se construye el funcional

$$B(\mathbf{D}_\phi) = \sum_{i=1}^N (\phi_0 - \phi_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_\phi)^2 w_i^2 \quad (2.5)$$

donde $w_i = w(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$ es la función de ponderación o de peso y, $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$ y $\mathbf{D}_\phi = \mathbf{D}_\phi(\mathbf{x}_0)$ son los vectores

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \left(h_i \quad k_i \quad \frac{h_i^2}{2} \quad h_i k_i \quad \frac{k_i^2}{2} \right)^T \quad (2.6)$$

$$\mathbf{D}_\phi = \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \quad \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial xz} \quad \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} \right)^T \quad (2.7)$$

Se expande el funcional y se halla el gradiente

$$B(\mathbf{D}_\phi) = \sum_{i=1}^N \left[w_i^2 (\phi_0 - \phi_i)^2 + w_i^2 (\boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_\phi)^2 + 2w_i^2 (\phi_0 - \phi_i) \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_\phi \right] \quad (2.8)$$

$$\nabla B(\mathbf{D}_\phi) = \sum_{i=1}^N \left[2w_i^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_\phi + 2w_i^2 (\phi_0 - \phi_i) \boldsymbol{\varepsilon}_i \right] \quad (2.9)$$

Para minimizar el funcional se hace $\nabla B(\mathbf{D}_\phi) = \mathbf{0}$ y se obtiene

$$\sum_{i=1}^N w_i^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_\phi = \sum_{i=1}^N w_i^2 (\phi_i - \phi_0) \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (2.10)$$

obteniendo así un sistema de ecuaciones lineales

$$A \mathbf{D}_\phi = \mathbf{b} \quad (2.11)$$

siendo A y \mathbf{b} ,

$$A = \sum_{i=1}^N w_i^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \quad (2.12)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N w_i^2 (\phi_i - \phi_0) \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (2.13)$$

Resolviendo el sistema

$$\mathbf{D}_\phi = A^{-1}\mathbf{b} = A^{-1} \sum_{i=1}^N w_i^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i \phi_i - A^{-1} \sum_{i=1}^N w_i^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i \phi_0 \quad (2.14)$$

Denotando por \mathbf{m}_0 y \mathbf{m}_i a

$$\mathbf{m}_0 = A^{-1} \sum_{i=1}^N w_i^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (2.15)$$

$$\mathbf{m}_i = A^{-1} w_i^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (2.16)$$

se escribe el vector de derivadas parciales como

$$\mathbf{D}_\phi = -\mathbf{m}_0 \phi_0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \phi_i \quad (2.17)$$

siendo

$$\mathbf{m}_0 = \left(m_{0x} \quad m_{0z} \quad m_{0xx} \quad m_{0xz} \quad m_{0zz} \right)^T \quad (2.18)$$

$$\mathbf{m}_i = \left(m_{ix} \quad m_{iz} \quad m_{ixx} \quad m_{ixz} \quad m_{izz} \right)^T \quad (2.19)$$

Denotando por \mathbf{a} el vector de coeficientes de las derivadas parciales en la ecuación (2.1) se tiene $\mathbf{a}^T \mathbf{D}_\phi = f(\mathbf{x})$ y sustituyendo por el valor obtenido en (2.17) se llega a

$$-\mathbf{a}^T \mathbf{m}_0 \phi_0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{a}^T \mathbf{m}_i \phi_i = f(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

Renombrando $\lambda_0 = \mathbf{a}^T \mathbf{m}_0$ y $\lambda_i = \mathbf{a}^T \mathbf{m}_i$ se obtiene finalmente la *ecuación de la estrella*

$$-\lambda_0 \phi_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi_i = f(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

Realizando el mismo proceso para cada nodo interior de la discretización,

se obtendrá un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas, $\text{card}(\text{int}(M))$.

De los valores de \mathbf{m}_0 y \mathbf{m}_i obtenidos en (2.18) y (2.19) se sigue de forma inmediata que

$$\mathbf{m}_0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \quad (2.22)$$

Esta es la razón por la que el GDFM está incluido en los llamados métodos de partición de la unidad.

2.3. Teorema de existencia y unicidad

Proposición 1. *La matriz A es semidefinida positiva.*

Demostración. En efecto, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^5 - \{\mathbf{0}\}$,

$$\mathbf{v}^T A \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \left(\sum_{i=1}^N w_i^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \right) \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N w_i^2 \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N w_i^2 (\mathbf{v}^T \boldsymbol{\varepsilon}_i)^2 \geq 0 \quad (2.23)$$

□

Teorema 1 (De existencia y unicidad). *El sistema $A\mathbf{D}_\phi = \mathbf{b}$ tiene solución única si, y sólo si, el conjunto $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N\}$ contiene una base de \mathbb{R}^5 .*

Demostración. El sistema $A\mathbf{D}_\phi = \mathbf{b}$ tiene solución única si, y sólo si, la matriz A es definida positiva, esto es, si $\nexists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^5 - \{\mathbf{0}\}$ tal que $\mathbf{v}^T \boldsymbol{\varepsilon}_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, N$, es decir, si $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N\}$ contiene una base de \mathbb{R}^5 . □

Corolario 1. *Si el número de nodos de una estrella es menor que cinco, entonces el sistema no tiene solución única.*

Se dice que un problema es *resoluble en una discretización* si el sistema $A\mathbf{D}_\phi = \mathbf{b}$ tiene solución única. De esta manera se pueden extraer importantes consecuencias del teorema de existencia y unicidad.

- I La resolubilidad de un problema en una discretización sólo depende del número de nodos por estrella y del criterio de formación de las mismas. Por tanto, si un problema es resoluble en una discretización, entonces cualquier problema es resoluble en dicha discretización. Un problema puede no ser muy preciso o incluso no tener solución, pero esto será debido a otros factores, como pueden ser la pérdida de estabilidad en problemas parabólicos e hiperbólicos, la no convergencia debida a métodos iterativos como en problemas no lineales [59] o el uso de una función de peso inapropiada.
- II Si un problema es resoluble en una discretización usando estrellas con N nodos, entonces cualquier problema es resoluble en la misma discretización usando estrellas con $N + 1$ nodos.
- III Es sencillo detectar estrellas que generan problemas no resolubles para una discretización concreta antes incluso de generar la discretización. Por ejemplo, en una discretización regular donde el paso horizontal sea triple que el vertical, el problema no será resoluble usando estrellas de menos de nueve nodos y formadas por los usuales criterios de selección de nodos. Otro ejemplo es el problema asociado con la figura 2.1 que no sería resoluble usando estrellas con menos de nueve nodos y formadas por los usuales criterios de selección de nodos¹. Nótese que en el primer ejemplo, ninguna estrella puede tener menos de nueve nodos mientras que en el segundo ejemplo sólo la estrella marcada con x no puede tener menos de nueve nodos.
- IV También es sencillo detectar las estrellas que provocan que un problema no sea resoluble para una discretización una vez generada la discretización y antes de resolver el problema. Por tanto, es posible actuar antes de resolver el problema aplicando algoritmos adaptativos sólo a las estrellas problemáticas.

¹En realidad, en este caso particular, la resolubilidad del problema dependerá de cómo el algoritmo computacional escoja nodos que se encuentren a la misma distancia.

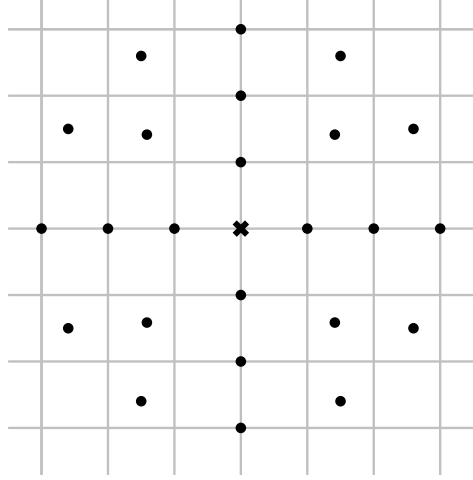


Figura 2.1: Discretización polar de un dominio

2.4. Fórmulas en diferencias finitas para la variable temporal

Dado que la variable temporal será discretizada con paso regular, se pueden emplear diferencias finitas clásicas. En particular, se utilizarán diferencias finitas de segundo orden centradas y diferencias finitas de primer orden hacia atrás.

Sean $[t_0, t_N]$ el intervalo temporal y $t_n = t_0 + n\Delta t$ el instante n -ésimo. Se denotan $\Phi_{\mathbf{x}}^n = \Phi(\mathbf{x}, t_n)$, $\Phi_{\mathbf{x}}^{n-1} = \Phi(\mathbf{x}, t_n - \Delta t)$, $\Phi_{\mathbf{x}}^{n-2} = \Phi(\mathbf{x}, t_n - 2\Delta t)$ y $\Phi_{\mathbf{x}}^{n+1} = \Phi(\mathbf{x}, t_n + \Delta t)$. Desarrollando por Taylor,

$$\Phi_{\mathbf{x}}^{n+1} = \Phi_{\mathbf{x}}^n + \Delta t \frac{\partial \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} + \dots \quad (2.24)$$

$$\Phi_{\mathbf{x}}^{n-1} = \Phi_{\mathbf{x}}^n - \Delta t \frac{\partial \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} + \dots \quad (2.25)$$

$$\Phi_{\mathbf{x}}^{n-2} = \Phi_{\mathbf{x}}^n - 2\Delta t \frac{\partial \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} + 2\Delta t^2 \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} + \dots \quad (2.26)$$

Truncando hasta los términos de segundo orden y denotando por ϕ la

aproximación de Φ se obtiene

$$\phi_{\mathbf{x}}^{n+1} = \phi_{\mathbf{x}}^n + \Delta t \frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

$$\phi_{\mathbf{x}}^{n-1} = \phi_{\mathbf{x}}^n - \Delta t \frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} \quad (2.28)$$

$$\phi_{\mathbf{x}}^{n-2} = \phi_{\mathbf{x}}^n - 2\Delta t \frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} + 2\Delta t^2 \frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

Sumando las igualdades (2.27) y (2.28) y operando se llega al esquema para la segunda derivada parcial centrada en el tiempo

$$\frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} = \frac{\phi_{\mathbf{x}}^{n-1} - 2\phi_{\mathbf{x}}^n + \phi_{\mathbf{x}}^{n+1}}{\Delta t^2} \quad (2.30)$$

Sumando la igualdad (2.29) con la igualdad (2.28) multiplicada por -4 y operando se llega al esquema para la primera derivada parcial hacia atrás en el tiempo

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} = \frac{3\phi_{\mathbf{x}}^n - 4\phi_{\mathbf{x}}^{n-1} + \phi_{\mathbf{x}}^{n-2}}{2\Delta t} \quad (2.31)$$

Despejando la primera derivada temporal en la igualdad (2.28) se llega a otro esquema para la primera derivada parcial hacia atrás en el tiempo

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} = \frac{\phi_{\mathbf{x}}^n - \phi_{\mathbf{x}}^{n-1}}{\Delta t} \quad (2.32)$$

La diferencia entre (2.31) y (2.32) es que en el primer caso el orden de aproximación es dos y en el segundo caso es uno.

Finalmente, despejando la primera derivada temporal en la igualdad (2.27) se llega al esquema para la primera derivada parcial hacia adelante en el tiempo

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} = \frac{\phi_{\mathbf{x}}^n - \phi_{\mathbf{x}}^{n-1}}{\Delta t} \quad (2.33)$$

2.5. Consistencia, orden, estabilidad y convergencia

Para cualquier esquema en diferencias finitas deben ser consideradas tres propiedades: consistencia, orden y convergencia. Además, en caso de ecuaciones en derivadas parciales parabólicas e hiperbólicas en las que se empleen esquemas explícitos, la propiedad de estabilidad debe ser analizada.

Definición 9 (Consistencia). *Una ecuación en diferencias finitas es consistente con una ecuación en derivadas parciales si la diferencia entre ambas, es decir, el error de truncamiento, tiende a cero a medida que el espaciado de la variable tiende a cero.*

Definición 10 (Orden). *El orden de una aproximación en diferencias finitas de una ecuación en derivadas parciales es la tasa a la cual el error de la solución en diferencias finitas se aproxima a cero a medida que el espaciado de la variable se aproxima a cero.*

Definición 11 (Estabilidad). *Una ecuación en diferencias finitas es estable si proporciona una solución acotada para una ecuación en derivadas parciales estable y es inestable si proporciona una solución no acotada para una ecuación en derivadas parciales estable.*

Definición 12 (Convergencia). *Un método en diferencias finitas es convergente si la solución de la ecuación en diferencias finitas se aproxima a la solución exacta de la ecuación en derivadas parciales a medida que el espaciado de la variable tiende a cero.*

Teorema 2 (Teorema de equivalencia de Lax). *Dado un problema de valor inicial adecuadamente planteado y una aproximación en diferencias finitas al problema que es consistente, la estabilidad es condición necesaria y suficiente para que el problema sea convergente.*

Se va a analizar a continuación la consistencia y el orden de los esquemas espaciales y temporales considerados. La convergencia será consecuencia de

la estabilidad en virtud del teorema de equivalencia de Lax y ésta será analizada para los esquemas en diferencias finitas generalizadas obtenidos para la ecuación de onda.

En la discretización temporal se toman más términos en el desarrollo de Taylor

$$\Phi_{\mathbf{x}}^{n+1} = \Phi_{\mathbf{x}}^n + \Delta t \frac{\partial \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^4} + \dots \quad (2.34)$$

$$\Phi_{\mathbf{x}}^{n-1} = \Phi_{\mathbf{x}}^n - \Delta t \frac{\partial \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^4} + \dots \quad (2.35)$$

$$\Phi_{\mathbf{x}}^{n-2} = \Phi_{\mathbf{x}}^n - 2\Delta t \frac{\partial \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} + 2\Delta t^2 \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} - \frac{4\Delta t^3}{3} \frac{\partial^3 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^3} + \dots \quad (2.36)$$

Por un lado, sumando las igualdades (2.34) y (2.35) y operando se obtiene

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} = \frac{\Phi_{\mathbf{x}}^{n-1} - 2\Phi_{\mathbf{x}}^n + \Phi_{\mathbf{x}}^{n+1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^4} + \dots \quad (2.37)$$

El error de truncamiento es, por tanto,

$$ET_t = -\frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^4} + \dots \quad (2.38)$$

que verifica $ET_t \rightarrow 0$ a medida que $\Delta t \rightarrow 0$, luego el esquema temporal para la derivada segunda centrado en el tiempo es consistente y de orden 2, por ser éste el orden del error de truncamiento.

Por otro lado, sumando la igualdades (2.36) con -4 veces la igualdad (2.35) y operando se obtiene

$$\frac{\partial \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} = \frac{3\Phi_{\mathbf{x}}^n - 4\Phi_{\mathbf{x}}^{n-1} + \Phi_{\mathbf{x}}^{n-2}}{2\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{3} \frac{\partial^3 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^3} + \dots \quad (2.39)$$

El error de truncamiento es, por tanto,

$$ET_t = -\frac{\Delta t^2}{3} \frac{\partial^3 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^3} + \dots \quad (2.40)$$

que verifica $ET_t \rightarrow 0$ a medida que $\Delta t \rightarrow 0$, luego el esquema temporal para la derivada primera hacía atrás en el tiempo es consistente y de orden 2, por ser éste el orden del error de truncamiento.

Finalmente, despejando la derivada temporal primera en (2.35) se obtiene

$$\frac{\partial \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t} = \frac{\Phi_{\mathbf{x}}^n - \Phi_{\mathbf{x}}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} + \dots \quad (2.41)$$

El error de truncamiento es, por tanto,

$$ET_t = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{x}}^n}{\partial t^2} + \dots \quad (2.42)$$

que verifica $ET_t \rightarrow 0$ a medida que $\Delta t \rightarrow 0$, luego el esquema temporal para la derivada primera hacía atrás en el tiempo es consistente y de orden 1, por ser éste el orden del error de truncamiento.

Para la discretización espacial, denotamos $R_i = R_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$ los términos de orden 3 en adelante del desarrollo de Taylor para el nodo i -ésimo en un entorno de \mathbf{x}_0 y se construye el funcional como en (2.5), obteniendo

$$B^*(\mathbf{D}_{\Phi}) = \sum_{i=1}^N \left(\Phi_0 - \Phi_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_{\Phi} + R_i \right)^2 w_i^2 \quad (2.43)$$

Se expande el funcional y se halla su gradiente

$$\begin{aligned} B^*(\mathbf{D}_{\Phi}) &= \sum_{i=1}^N \left[w_i^2 (\Phi_0 - \Phi_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_{\Phi})^2 + w_i^2 R_i^2 + 2w_i^2 R_i (\Phi_0 - \Phi_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_{\Phi}) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[w_i^2 (\Phi_0 - \Phi_i)^2 + w_i^2 (\boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_{\Phi})^2 + 2w_i^2 (\Phi_0 - \Phi_i) \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_{\Phi} + w_i^2 R_i^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2w_i^2 R_i (\Phi_0 - \Phi_i) + 2w_i^2 R_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_{\Phi} \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\nabla B^*(\mathbf{D}_\Phi) = \sum_{i=1}^N \left[2w_i^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \mathbf{D}_\Phi + 2w_i^2 (\Phi_0 - \Phi_i) \boldsymbol{\varepsilon}_i + 2w_i^2 R_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \right] \quad (2.45)$$

Minimizando el funcional y despejando \mathbf{D}_Φ se obtiene

$$A\mathbf{D}_\Phi = \mathbf{b} + \mathbf{b}^* \Rightarrow \mathbf{D}_\Phi = A^{-1}\mathbf{b} + A^{-1}\mathbf{b}^* \quad (2.46)$$

siendo A y \mathbf{b} las matrices (2.12) y (2.13), respectivamente, y

$$\mathbf{b}^* = - \sum_{i=1}^N w_i^2 R_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (2.47)$$

Sustituyendo \mathbf{D}_Φ en (2.1) y restando $f(\mathbf{x})$ en ambos miembros de la igualdad, se tiene

$$\mathbf{a}^T \mathbf{D}_\Phi - f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T A^{-1}\mathbf{b} - f(\mathbf{x}) + \mathbf{a}^T A^{-1}\mathbf{b}^* \quad (2.48)$$

de donde se sigue que el error de truncamiento es

$$ET_e = \mathbf{a}^T A^{-1}\mathbf{b}^* \quad (2.49)$$

Las expresiones explícitas del error de truncamiento aparecen en [17] y se sigue que $ET_e \rightarrow 0$ cuando $(h_i, k_i) \rightarrow 0$, por lo que el esquema es consistente, y es de orden 2 que es el orden del error de truncamiento.

2.6. Parámetros fundamentales del método

De la ecuación de la estrella (2.21) y, en particular, de los coeficientes \mathbf{m}_0 (2.18) y \mathbf{m}_i (2.19) se sigue que los parámetros involucrados en el método son el número de nodos seleccionados, la posición de los mismos respecto del nodo central y la función de ponderación. En [15] se estudia la influencia de dichos parámetros en el caso bidimensional y en [143] se estudia para el caso tridimensional. En este último se pone de manifiesto que los dos primeros parámetros están íntimamente relacionados pues el número de nodos óptimo puede variar en función del criterio de formación seleccionado en la estrella ya que repercute en las posiciones relativas de los nodos de la estrella respec-

to al nodo central.

Los criterios de formación más utilizados son el criterio de la distancia y el criterio del cuadrante y el número óptimo de nodos en ambos casos es ocho. El criterio de la distancia, que fue considerado por Jensen [80], consiste en seleccionar los nodos más próximos al nodo central y el criterio del cuadrante, que fue propuesto por Liszka y Orkisz [96], consiste en seleccionar los nodos más cercanos al nodo central por cuadrante según los ejes cartesianos. Nótese que en una discretización en la que se forman estrellas por el criterio del cuadrante el valor de la función de penalización por desequilibrio de cada estrella es cero. En general, el criterio del cuadrante proporciona mejores resultados en discretizaciones irregulares donde la distribución irregular de los nodos puede provocar estrellas distorsionadas mientras que el criterio de la distancia proporciona mejores resultados en discretizaciones regulares o de patrón regular. Por tanto, el criterio de la distancia será usado en discretizaciones regulares o de patrón regular y el criterio del cuadrante en discretizaciones irregulares.

El índice de irregularidad de una discretización (IIC) que se definió en [60] da una buena intuición de cómo de irregular es la discretización pero no proporciona información sobre la elección del número de nodos, el criterio de selección y el exponente de la función de ponderación. La utilización de las funciones de penalización 4 y 5 con tal propósito ha sido llevada a cabo con buenos resultados en [146] para el caso tridimensional que es donde cobra más fuerza la automatización de la selección de los parámetros de la estrella. Para el caso bidimensional nos limitaremos a lo expuesto en el párrafo anterior.

La figura 2.2 muestra una estrella regular y la figura 2.3 muestra los criterios de formación usuales.

Las funciones de ponderación estudiadas en [15] son potenciales, exponenciales y splines (cúbicas y cuárticas), siendo las primeras las que mejores

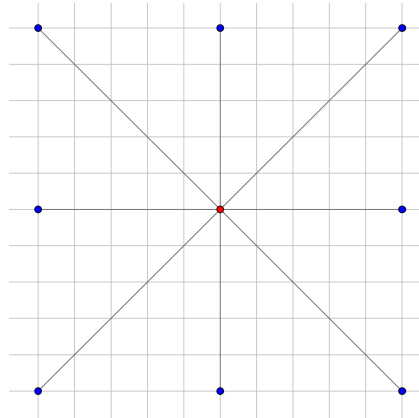


Figura 2.2: Estrella regular de 8 nodos

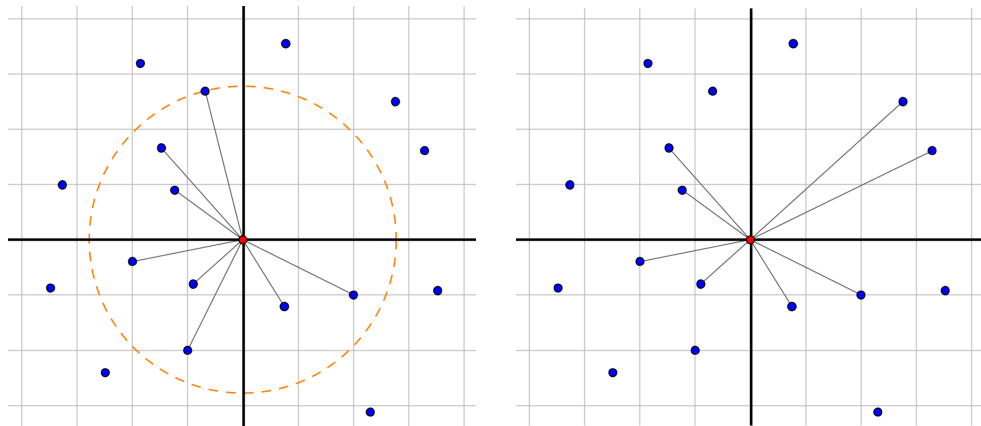


Figura 2.3: Estrella formada por el criterio de la distancia (izquierda) y estrella formada por el criterio del cuadrante (derecha)

resultados proporcionan y, por tanto, las únicas consideradas en esta tesis. La utilización de funciones de ponderación es una característica común a todos los métodos sin malla y se usan para disponer de un soporte, definiendo un subdominio relativamente pequeño en el que su valor es distinto de cero, siendo nulo en el resto del dominio. En el caso de las diferencias finitas generalizadas, las funciones de ponderación potencial son de la forma

$$w(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) = \begin{cases} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\|_2^{-p} & \mathbf{x}_i \in E(\mathbf{x}_0) - \{\mathbf{x}_0\} \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad (2.50)$$

siendo $E(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ la estrella de nodo central \mathbf{x}_0 , $\|\cdot\|_2$ la norma euclídea y $p \in \mathbb{N}$.

Estas funciones de ponderación permiten asignar un mayor peso a los nodos más cercanos como se muestra en la figura 2.4. Se muestra también la estrella en el plano, figura 2.5, para que pueda apreciarse mejor las distancias de cada nodo al nodo central.

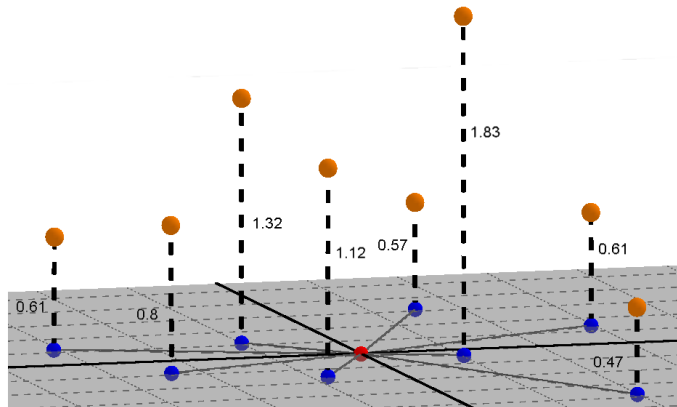


Figura 2.4: Peso asignado a cada nodo de la estrella para una función de ponderación con $p = 1$

2.7. Adaptatividad

Antes de entrar en detalle sobre el método adaptativo desarrollado, se muestra el indicador del error ya definido en [16].

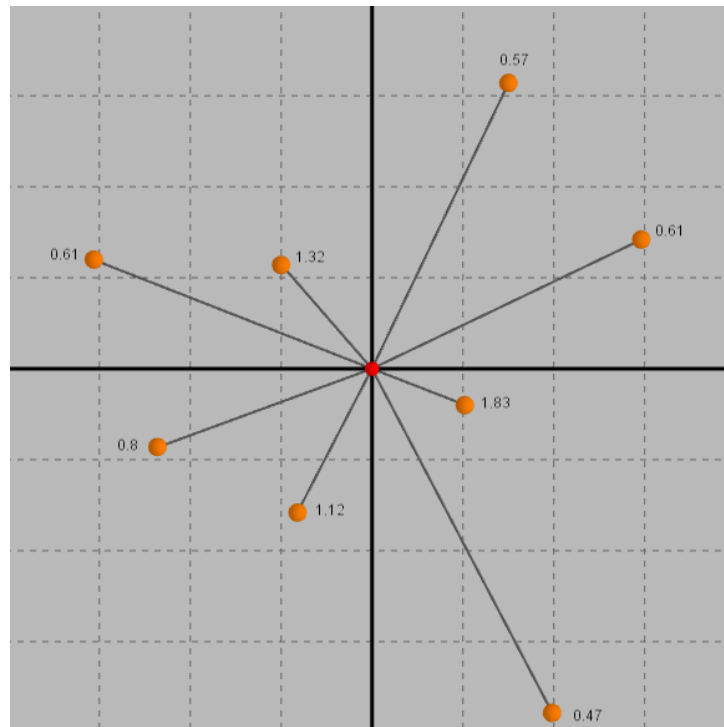


Figura 2.5: Peso asignado a cada nodo de la estrella para una función de ponderación con $p = 1$

2.7.1. Indicador del error

Se escribe el valor de la función ϕ_0 como una combinación lineal no homogénea de los nodos de la estrella resolviendo la ecuación de la estrella (2.21) para ϕ_0 . Por tanto, se escribe el error como una combinación lineal no homogénea de los errores de los nodos de la estrella. Para ello, se considera la diferencia entre el segundo y el cuarto orden en el desarrollo de Taylor y el indicador del error es

$$e_0 = \text{Ind}(\phi_0) = \sum_{i=1}^N |\bar{\lambda}_i| \cdot |\Upsilon_i^3 + \Upsilon_i^4| + \bar{\lambda}_f f \quad (2.51)$$

siendo $\bar{\lambda}_i = \lambda_i/\lambda_0$ y $\bar{\lambda}_f = -1/\lambda_0$ y

$$\Upsilon^n = \sum_{\substack{q,r \\ q+r=n}}^n \frac{1}{q!r!} \cdot \frac{\partial^n \phi_0}{\partial x^q \partial z^r} \cdot h_i^q k_i^r \quad (2.52)$$

donde $n = 3, 4$ y las derivadas parciales de tercer y cuarto orden se obtienen de forma recursiva por medio de la aproximación de las derivadas parciales de primer y segundo orden \mathbf{D}_Φ y teniendo en cuenta la siguiente igualdad

$$\frac{\partial^{q+r} u_0}{\partial x^q \partial y^r} = \frac{\partial^q}{\partial x^q} \left(\frac{\partial^r u_0}{\partial y^r} \right), \quad q + r = n \text{ and } q, r \in \{0, 1, 2\} \quad (2.53)$$

2.7.2. Método h-adaptativo

Se distinguen dos algoritmos en el método h-adaptativo, uno que permite la adición de nodos y otro que permite el movimiento y la eliminación. Por claridad y para evitar confusiones, se hablará de algoritmo aditivo en el primer caso, de algoritmo del movimiento en el segundo caso y de método adaptativo cuando se usen simultáneamente los dos primeros. En todos los casos, un nodo será procesado si el error en el nodo está por encima de un valor dado.

Algoritmo de adición. Se aplicará el algoritmo del baricentro definido en [19] que añade un nodo en el baricentro de los triángulos con mayor área formados en la estrella entre el nodo central y el resto de nodos de la estrella. Se añade un nodo si la distancia entre éste y el resto de nodos de la discretización es menor que $\alpha \cdot dpa$, $\alpha \in (0, 1]$. Se define la distancia dpa como la distancia mínima entre dos nodos cualesquiera de la discretización.

Algoritmo del movimiento. Para cada estrella $E(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$, se considerarán las conexiones entre el nodo central y el resto de nodos de la estrella como vectores de origen el nodo central y extremos el resto de nodos. El algoritmo modifica la posición del nodo central de la estrella. La nueva posición del nodo central viene determinada por el extremo del vector resultante de sumar los N vectores ponderados por la estimación del error

(e_i) en cada nodo, es decir, por la combinación lineal

$$\vec{\phi}_0 = \varphi_E(e_1)\vec{\phi}_1 + \varphi_E(e_2)\vec{\phi}_2 + \dots + \varphi_E(e_N)\vec{\phi}_N \quad (2.54)$$

siendo $\vec{\phi}_0 = \overrightarrow{\mathbf{x}_0\bar{\mathbf{x}}_0}$ con $\bar{\mathbf{x}}_0$ la nueva posición del nodo central, $\vec{\phi}_i = \overrightarrow{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_i}, \forall i = 1, \dots, N$ y φ_E la función de ponderación para la estrella E definida en términos de la estimación del error como sigue

$$\varphi_E(e_i) = \frac{1}{S_E^{\kappa+e_i}} \quad (2.55)$$

siendo $\kappa > 0$ una constante utilizada para evitar valores nulos en el denominador, como por ejemplo en problemas con contorno Dirichlet y

$$S_E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\kappa + e_i} \quad (2.56)$$

Para una adecuada implementación del algoritmo se deben tener en cuenta las siguientes restricciones:

C1. Si la distancia entre la nueva posición del nodo central y la posición inicial es mayor que $\mu \cdot dmm$, con $0 < \mu < 1$ y dmm la distancia mínima entre el nodo central y cualquier otro nodo de la estrella, entonces la nueva posición del nodo central está en la dirección del vector resultante pero a una distancia de $\mu \cdot dmm$, véase la figura 2.6.

C2. Si la distancia entre la nueva posición del nodo central y cualquier otro nodo de la discretización es menor que $\alpha \cdot dpa$ entonces el nodo es eliminado.

El algoritmo del movimiento permite reducir el error global debido a la reducción de la estimación del error en los nodos considerados. Esto es debido a una mejor distribución de los nodos y a un efecto de repulsión producido entre nodos con errores altos que se encuentren muy próximos lo que permite ampliar el espacio en la región de más error y éste podrá ser ocupado por una cantidad mayor de nuevos nodos al usar el algoritmo del baricentro.

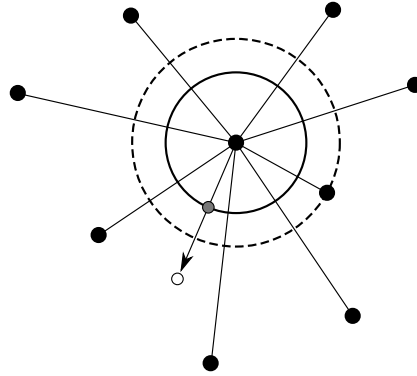


Figura 2.6: Ejemplo de la aplicación de la primera restricción $C1$. El radio de la circunferencia en línea discontinua es dmm y el radio de la circunferencia en línea continua es $\mu \cdot dmm$. El nodo en blanco representa la posición sin aplicar la restricción $C1$ y el nodo en gris representa la posición teniendo en cuenta la restricción $C1$.

Se sabe que para una discretización irregular el criterio del cuadrante proporciona mejores resultados que el criterio de la distancia [15] y, por tanto, es importante notar que tanto el algoritmo de adición como el algoritmo del movimiento se deben aplicar con estrellas formadas por el criterio del cuadrante puesto que la discretización se volverá más irregular en cada paso. Por esta razón, siempre se formarán las estrellas con el criterio del cuadrante, incluso en aquellos casos en que inicialmente sea más conveniente usar el criterio de la distancia. En tales casos, se mostrará en los ejemplos como el error final aplicando el método adaptativo con estrellas formadas por el criterio del cuadrante es menor que el error inicial con estrellas formadas por el criterio de la distancia.

Cuando se aplique el método adaptativo se hará de la forma más razonable, esto es, de forma alternada, empezando con el algoritmo del movimiento. Por supuesto, cualquier combinación es posible, como por ejemplo, alternando un paso del algoritmo del movimiento con dos pasos del algoritmo de adición. El límite del error para seleccionar los nodos a los que se les aplicará el método adaptativo puede ser fijado a conveniencia, por ejemplo en [16] se

CAPÍTULO 2. MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS

consideran el 20% de los nodos interiores con mayor error. En este caso, se van a considerar los nodos cuyo error sea mayor que la media del error más dos veces su desviación típica, esto es, los errores extremos.

Capítulo 3

Fórmulas en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de onda

3.1. Elasticidad, ecuaciones de Navier y ondas sísmicas

Las deformaciones en la Tierra producen ondas sísmicas. Para estudiar estas ondas usamos los conceptos de la mecánica de los medios continuos que describen el comportamiento de un material deformable continuo, aproximación que es adecuada para la mayoría de problemas sísmicos.

La teoría de la elasticidad proporciona las relaciones entre las deformaciones y los desplazamientos de un sólido que vienen dadas por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Phi_{i,j} + \Phi_{j,i}) \quad (3.1)$$

siendo $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t) = \left(\Phi_1(\mathbf{x}, t), \Phi_2(\mathbf{x}, t), \Phi_3(\mathbf{x}, t) \right)$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

Las relaciones entre las tensiones y las deformaciones vienen dadas por la *ecuación constitutiva* del material. Para un comportamiento elástico lineal y un medio isótropo, se tienen sólo dos módulos elásticos, el módulo de Young y el coeficiente de Poisson (E, ν) si se expresan las deformaciones en función de las tensiones (*ley de Hooke*), o las constantes de Lamé (λ, μ) si se expresan las tensiones en función de las deformaciones (*ecuaciones de Lamé*). Estas últimas son:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} \quad (3.2)$$

siendo θ la traza de la matriz de deformaciones ε_{ij} .

Aplicando la segunda ley de Newton en términos de fuerzas de superficie y de volumen, se llega a la *ecuación del movimiento*.

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + f_i(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \Phi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

siendo ρ la densidad y $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \left(f_1(\mathbf{x}, t), f_2(\mathbf{x}, t), f_3(\mathbf{x}, t) \right)$ las fuerzas aplicadas.

Otras dos formas de la ecuación del movimiento son la *ecuación de equilibrio*,

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + f_i(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.4)$$

y la *ecuación homogénea del movimiento* que describe la propagación de ondas sísmicas en todo punto excepto en el origen, como en un terremoto o en una explosión, donde una fuerza de volumen genera las ondas sísmicas

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \Phi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

La validez de estas ecuaciones requiere de la hipótesis de pequeños desplazamientos para las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) y de la hipótesis de pequeñas deformaciones para las ecuaciones (3.1), hipótesis que son válidas en general

para ondas sísmicas. Sin embargo, estas hipótesis fallan para deformaciones superiores a unos 10^{-4} m donde la relación entre tensiones y deformaciones no puede considerarse lineal. Esto ocurre en regiones del manto terrestre bajo altas presiones o cuando las rocas se rompen durante un terremoto. A gran escala, el interior de la Tierra tiene aproximadamente las mismas propiedades físicas en cualquier dirección, por lo que la hipótesis de isotropía considerada (3.2) es también válida. Finalmente, las ondas sísmicas surgen cuando la Tierra se comporta linealmente elástica, lo que es válido para pequeñas escalas temporales, ya que en caso contrario, para escalas de miles de años o más, el manto de rocas se comporta como un fluido viscoso.

Para expresar el problema sísmico en función de los desplazamientos, suponiendo que las constantes elásticas no varían, se sustituye (3.1) en (3.2) y éstas últimas en (3.5), obteniéndose las *ecuaciones de Navier*:

$$\mu\Phi_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu)\Phi_{j,ij}(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \Phi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

que en notación vectorial es

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \Phi(\mathbf{x}, t)) + \mu\nabla^2\Phi(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) puede escribirse, aplicando el teorema de Helmholtz, en términos de potenciales de desplazamiento, lo que permite distinguir dos tipos de ondas sísmicas, las ondas P que son ondas de compresión con velocidad $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ y las ondas S que son ondas de cortante con velocidad $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

Las condiciones de contorno que se van a considerar serán

- Condiciones de contorno en desplazamientos (condiciones Dirichlet)

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\Phi}(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.8)$$

donde $\bar{\Phi}$ es una función conocida.

- Condiciones de contorno en tensiones (condiciones Neumann)

$$T_i(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)n_j = \bar{T}_i(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \Gamma, i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.9)$$

donde el vector tensión \bar{T} es conocido.

- Condiciones de contorno mixtas (condiciones Robin). En casos de dominios con subcontornos de cada uno de los tipos anteriores.

Para propósitos sismológicos, se puede caracterizar la Tierra por la distribución de propiedades físicas que afectan a la propagación de ondas y pueden ser estudiados mediante ondas sísmicas. Los resultados sismológicos indican que esta distribución es complicada y difícil de caracterizar. Afortunadamente, se pueden hacer con frecuencia algunas aproximaciones útiles.

Se puede ignorar la curvatura de la Tierra si la longitud de la región a estudio es pequeña comparada con el radio terrestre y se puede considerar la Tierra como un medio lateralmente homogéneo o estratificado, en el que las propiedades varían sólo con la profundidad. Además, se puede tratar la Tierra como un semiespacio formado por capas homogéneas de grosor finito. Finalmente, se asume que un frente de onda esférico que esté suficientemente lejos del origen se comporta como una onda plana. Los modelos lateralmente homogéneos son útiles como representaciones de la estructura media de la Tierra y como modelos de partida para investigaciones más detalladas.

Es frecuente, por tanto, definir el plano X-Z como el plano que contiene al origen y al receptor. De esta manera, se puede elegir para las ondas S dos polarizaciones, ortogonales entre sí dentro del plano de desplazamientos de S, obteniendo ondas SV con desplazamientos en el plano X-Z y ondas SH con desplazamientos en el eje Y que son paralelos a la superficie terrestre, véase la figura 3.1. Esta polarización es particularmente conveniente pues las ondas P y SV están acopladas entre sí y las ondas SH están desacopladas con ellas. Además, el acoplamiento y el desacoplamiento se mantiene cuando estas ondas interactúan con una interfase cuya normal esté en el plano X-Z.

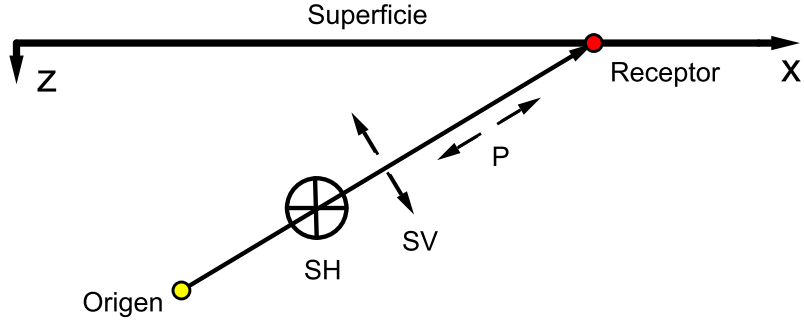


Figura 3.1: La dirección del movimiento es la dirección del vector que une el origen con el receptor. Los desplazamientos de las ondas P son en la dirección del movimiento y los desplazamientos de las ondas S son perpendiculares a dicha dirección. Las ondas S están polarizadas en ondas SV con desplazamientos dentro del plano X-Z y en ondas SH con desplazamientos en el eje Y hacia fuera del papel.

Por tanto, se pueden expresar las ecuaciones (3.6) para $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ como dos sistemas desacoplados haciendo las variables de campo independientes del eje Y, esto es, $\mathbf{x} = (x, z)$.

Movimiento en el plano (P-SV)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi_1(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi_1(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 \Phi_3(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \Phi_3(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi_3(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 \Phi_1(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Movimiento en el antiplano (SH)

$$\frac{\partial^2 \Phi_2(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} \right) \quad (3.11)$$

siendo α la velocidad de propagación de las ondas P y β la velocidad de propagación de las ondas S.

En adelante se considerará la notación $\Phi = (U, V, W)$

3.2. Ondas en medio elástico homogéneo

Las ecuaciones del sistema desacoplado son las ecuaciones (3.10) para las ondas P-SV

$$\begin{aligned} U_{,tt} &= \alpha^2 U_{,xx} + \beta^2 U_{,zz} + (\alpha^2 - \beta^2) W_{,xz} \\ W_{,tt} &= \beta^2 W_{,xx} + \alpha^2 W_{,zz} + (\alpha^2 - \beta^2) U_{,xz} \end{aligned} \quad (3.12)$$

y las ecuaciones (3.11) para las ondas SH

$$V_{,tt} = \beta^2 (V_{,xx} + V_{,zz}) \quad (3.13)$$

siendo α la velocidad de propagación de las ondas P y β la velocidad de propagación de las ondas S.

3.2.1. Esquemas en diferencias finitas generalizadas

Las fórmulas en diferencias finitas clásicas y generalizadas proporcionan las siguientes aproximaciones de las derivadas parciales en el punto (\mathbf{x}_0, t) ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial t^2} &= \frac{\phi_0^{n-1} - 2\phi_0^n + \phi_0^{n+1}}{\Delta t^2} & \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial x \partial z} &= -m_{0xz} \phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz} \phi_i^n \\ \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial x^2} &= -m_{0xx} \phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx} \phi_i^n & \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial z^2} &= -m_{0zz} \phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz} \phi_i^n \end{aligned} \quad (3.14)$$

siendo $\phi \in \{u, v, w\}$. Recuérdese que las minúsculas representan los valores aproximados.

Ondas P-SV

Se sustituyen las aproximaciones de las derivadas parciales en la ecuación de ondas P-SV

$$\begin{aligned}
 \frac{u_0^{n-1} - 2u_0^n + u_0^{n+1}}{\Delta t^2} &= \alpha^2 \left(-m_{0xx}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}u_i^n \right) + \beta^2 \left(-m_{0zz}u_0^n + \right. \\
 &+ \left. \sum_{i=1}^N m_{izz}u_i^n \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-m_{0xz}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz}w_i^n \right) \\
 \frac{w_0^{n-1} - 2w_0^n + w_0^{n+1}}{\Delta t^2} &= \beta^2 \left(-m_{0xx}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}w_i^n \right) + \alpha^2 \left(-m_{0zz}w_0^n + \right. \\
 &+ \left. \sum_{i=1}^N m_{izz}w_i^n \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-m_{0xz}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz}u_i^n \right) \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Operando y agrupando términos, se llega al esquema en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de ondas P-SV

$$\begin{aligned}
 u_0^{n+1} &= (2 - \alpha^2 \Delta t^2 m_{0xx} - \beta^2 \Delta t^2 m_{0zz})u_0^n - u_0^{n-1} + \\
 &+ \sum_{i=1}^N (\alpha^2 \Delta t^2 m_{ixx} + \beta^2 \Delta t^2 m_{izz})u_i^n - \\
 &- (\alpha^2 - \beta^2) \Delta t^2 m_{0xz}w_0^n + \sum_{i=1}^N (\alpha^2 - \beta^2) \Delta t^2 m_{ixz}w_i^n \\
 w_0^{n+1} &= (2 - \beta^2 \Delta t^2 m_{0xx} - \alpha^2 \Delta t^2 m_{0zz})w_0^n - w_0^{n-1} + \\
 &+ \sum_{i=1}^N (\beta^2 \Delta t^2 m_{ixx} + \alpha^2 \Delta t^2 m_{izz})w_i^n - \\
 &- (\alpha^2 - \beta^2) \Delta t^2 m_{0xz}u_0^n + \sum_{i=1}^N (\alpha^2 - \beta^2) \Delta t^2 m_{ixz}u_i^n \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Ondas SH

Se sustituyen las aproximaciones de las derivadas parciales en la ecuación de onda SH

$$\frac{v_0^{n-1} - 2v_0^n + v_0^{n+1}}{\Delta t^2} = \beta^2 \left(-m_{0xx}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}v_i^n - m_{0zz}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz}v_i^n \right) \quad (3.17)$$

Operando y agrupando términos, se llega al esquema en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de la onda SH

$$v_0^{n+1} = [2 - \beta^2 \Delta t^2 (m_{0xx} + m_{0zz})]v_0^n - v_0^{n-1} + \beta^2 \Delta t^2 \sum_{i=1}^N (m_{ixx} + m_{izz})v_i^n \quad (3.18)$$

3.2.2. Consistencia, orden, estabilidad y convergencia

Los esquemas en diferencias finitas generalizadas para las ecuaciones de ondas P-SV y SH son consistentes pues los errores de truncamiento, tanto de la derivada parcial temporal como de la ecuación en derivadas parciales espaciales, son conocidos y convergen a cero a medida que los pasos espaciales y temporales convergen a cero independientemente. El orden de los esquemas es el orden de los términos del error de truncamiento en la aproximación en diferencias finitas de cada uno de los esquemas en la ecuación de onda.

Los esquemas para ondas P-SV y SH son consistentes pues

$$\begin{aligned} U_{,tt} - \alpha^2 U_{,xx} - \beta^2 U_{,zz} - (\alpha^2 - \beta^2)W_{,xz} &= \\ &= u_{,tt} + ET_t - \alpha^2 u_{,xx} - \beta^2 u_{,zz} - (\alpha^2 - \beta^2)w_{,xz} + ET_e \\ W_{,tt} - \beta^2 W_{,xx} - \alpha^2 W_{,zz} - (\alpha^2 - \beta^2)U_{,xz} &= \\ &= w_{,tt} + ET_t - \beta^2 w_{,xx} - \alpha^2 w_{,zz} - (\alpha^2 - \beta^2)u_{,xz} + ET_e \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$V_{,tt} - \beta^2(V_{,xx} + V_{,zz}) = v_{,tt} + ET_t - \beta^2(v_{,xx} + v_{,zz}) + ET_e \quad (3.20)$$

de donde $ET = ET_t + ET_e$ y $ET \rightarrow 0$ cuando $((h_i, k_i), t) \rightarrow ((0, 0), 0)$ y su orden es $\mathcal{O}(h_i + k_i) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$.

Existen varios métodos para analizar la estabilidad de una aproximación en diferencias finitas de una ecuación en derivadas parciales. Algunos de estos métodos son el método de la perturbación discreta, el método matricial y el método de von Neumann, siendo este último el que se va a utilizar.

El método de von Neumann para el análisis de la estabilidad está basado en el análisis de Fourier y, por tanto, está generalmente limitado a EDPs lineales con coeficientes constantes. La idea básica del método de von Neumann consiste en expresar el dato inicial mediante su desarrollo en serie de Fourier y analizar la estabilidad de cada sumando.

Análisis de la estabilidad para las ondas P-SV

Utilizando el método de von Neumann para el análisis de la estabilidad se llega a que el esquema para la ecuación de ondas P-SV es estable si

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{4}{(\alpha^2 + \beta^2) \left[(m_{0xx} + m_{0zz}) + \sqrt{(m_{0xx} + m_{0zz})^2 + m_{0xz}^2} \right]}} \quad (3.21)$$

para cada estrella en la discretización.

Una prueba de (3.21) puede consultarse en [142].

Análisis de la estabilidad para las ondas SH

Para analizar el caso de la onda SH, se considera la onda armónica $v = c \cdot \exp(i(\omega\Delta t - \mathbf{k}^T \mathbf{x}))$ siendo c la amplitud, ω la frecuencia angular, $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ el vector de onda y $\mathbf{x}_0 = (x_0, z_0) \in \text{int}(M)$.

$$\begin{aligned} v_0^n &= c \cdot \exp(i\omega n\Delta t) \cdot \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) = c\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) \\ v_j^n &= c \cdot \exp(i\omega n\Delta t) \cdot \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) = c\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde $\xi = \exp(i\omega\Delta t)$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, z_0)$ y $\mathbf{x}_j = (x_j, z_j)$.

Aunque el módulo de ξ es 1 para la solución exacta, se puede considerar ξ como un factor de amplificación y calcular los valores de Δt que cumplan $\xi \leq 1$, véase [113]. Sustituyendo (3.22) en (3.18)

$$\begin{aligned} c\xi^{n+1} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) &= [2 - \beta^2 \Delta t^2 (m_{0xx} + m_{0zz})] c\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) - \\ &- c\xi^{n-1} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) + \beta^2 \Delta t^2 c\xi^n \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz}) \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{h}_j = (h_j, l_j) = (x_j - x_0, z_j - z_0)$ y dividiendo la ecuación anterior por $c\xi^{n-1} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0)$,

$$\begin{aligned} \xi^2 &= [2 - \beta^2 \Delta t^2 (m_{0xx} + m_{0zz})] \xi - 1 + \\ &+ \beta^2 \Delta t^2 \xi \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz}) \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \implies \\ \implies \xi^2 &- \left[2 - \beta^2 \Delta t^2 (m_{0xx} + m_{0zz}) + \right. \\ &\left. + \beta^2 \Delta t^2 \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz}) \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] \xi + 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Puesto que $m_{0xx} = \sum_{j=1}^N m_{jxx}$ y $m_{0zz} = \sum_{j=1}^N m_{jzz}$, se puede escribir

$$\xi^2 - M\xi + 1 = 0 \quad (3.25)$$

siendo $M = 2 - \beta^2 \Delta t^2 \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j))$

Aplicando las fórmulas de Cardano – Vieta, las soluciones de (3.25) cumplen

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = M \\ \xi_1 \cdot \xi_2 = 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

De la primera ecuación, y teniendo en cuenta que $|\xi_1| \leq 1$ y $|\xi_2| \leq 1$, se obtiene la siguiente condición

$$|M| = |\xi_1 + \xi_2| \leq |\xi_1| + |\xi_2| \leq 2 \quad (3.27)$$

Por la fórmula de Euler, $1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) = 1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + i \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)$, y por tanto,

$$\begin{aligned} M = & 2 - \beta^2 \Delta t^2 \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) + \\ & + i\beta^2 \Delta t^2 \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz}) \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Denotando $p = \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j))$ y $q = \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz}) \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)$, se reescribe la ecuación (3.28) como

$$M = 2 - \beta^2 \Delta t^2 p + i\beta^2 \Delta t^2 q \quad (3.29)$$

Elevando el módulo al cuadrado

$$|M|^2 = (2 - \beta^2 \Delta t^2 p)^2 + (\beta^2 \Delta t^2 q)^2 = \beta^4 (p^2 + q^2) \Delta t^4 - 4\beta^2 p \Delta t^2 + 4 \quad (3.30)$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

De $|M| \leq 2$ se sigue que $|M|^2 \leq 4$ por lo que debe satisfacerse la desigualdad

$$|M|^2 = (2 - \beta^2 \Delta t^2 p)^2 + (\beta^2 \Delta t^2 q)^2 = \beta^4 (p^2 + q^2) \Delta t^4 - 4\beta^2 p \Delta t^2 \leq 0 \quad (3.31)$$

Esta desigualdad es una inecuación bicuadrática que tiene solución positiva para Δt si, y sólo si, $p > 0$, en cuyo caso se cumple

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{4p}{\beta^2(p^2 + q^2)}} = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{p}{p^2 + q^2}} \quad (3.32)$$

El esquema será estable para la estrella considerada si lo es para el caso más desfavorable, esto es, cuando el valor de $\frac{p}{p^2 + q^2}$ es mínimo. Para ello se distinguen tres casos.

Si $q = 0$,

$$\frac{p}{p^2 + q^2} = \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \quad (3.33)$$

siendo $\bar{m}_{0xx} = \sum_{j=1}^N |m_{jxx}|$ y $\bar{m}_{0zz} = \sum_{j=1}^N |m_{jzz}|$

Si $q > 0$,

$$\frac{p}{p^2 + q^2} > \frac{p}{p^2 + q^2 + 2pq} = \frac{p}{(p + q)^2} \quad (3.34)$$

y $p + q = \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz})g(\theta_j)$ con $g(\theta_j) = 1 - \cos(\theta_j) + \sin(\theta_j)$. El máximo de esta función se alcanza en $\theta_j = 135^\circ$ y vale $g(\theta_j) = 1 + \sqrt{2}$, así se tiene $p + q \leq \sum_{j=1}^N |m_{jxx} + m_{jzz}|(1 + \sqrt{2}) \leq (1 + \sqrt{2})(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})$ y, por tanto,

$$\frac{p}{p^2 + q^2} > \frac{p}{(p + q)^2} \geq \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})}{(1 + \sqrt{2})^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \quad (3.35)$$

Si $q < 0$,

$$\frac{p}{p^2 + q^2} > \frac{p}{p^2 + q^2 - 2pq} = \frac{p}{(p - q)^2} \quad (3.36)$$

y $p - q = \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz})g(\theta_j)$ con $g(\theta_j) = 1 - \cos(\theta_j) - \sin(\theta_j)$. El máximo de esta función se alcanza en $\theta_j = 225^\circ$ y vale $g(\theta_j) = 1 + \sqrt{2}$, así se tiene $p - q \leq \sum_{j=1}^N |m_{jxx} + m_{jzz}|(1 + \sqrt{2}) \leq (1 + \sqrt{2})(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})$ y, por tanto,

$$\frac{p}{p^2 + q^2} > \frac{p}{(p - q)^2} \geq \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})}{(1 + \sqrt{2})^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \quad (3.37)$$

De esta manera se tiene

$$\begin{cases} \Delta t \leq \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{1}{2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})}} & \text{si } q = 0 \\ \Delta t \leq \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})}} & \text{si } q \neq 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

y, quedándonos con la más restrictiva, se tiene que el esquema es estable para la estrella considerada si se verifica

$$\Delta t \leq \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})}} \quad (3.39)$$

Por tanto, el esquema en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de onda SH es estable si lo es para todas las estrellas, es decir, si lo es para la estrella con suma de los coeficientes del nodo central máxima.

Puesto que los esquemas para ondas P-SV y para ondas SH son consistentes y estables en los rangos establecidos, se puede asegurar que los esquemas son convergentes en virtud del teorema de Lax.

3.2.3. Dispersión numérica

La dispersión numérica surge como consecuencia de la discretización espacial y temporal. Si la distancia entre nodos es muy grande en comparación con la longitud de onda la dispersión es mayor. Se va a tratar la discretización espacial y se hablará, por tanto, de la dispersión de la discretización.

Se consideran las ondas armónicas

$$u = a \cdot \exp(i(\omega\Delta t - \mathbf{k}^T \mathbf{x})) \quad (3.40)$$

$$v = c \cdot \exp(i(\omega\Delta t - \mathbf{k}^T \mathbf{x})) \quad (3.41)$$

$$w = b \cdot \exp(i(\omega\Delta t - \mathbf{k}^T \mathbf{x})) \quad (3.42)$$

siendo a , b y c amplitudes, ω la frecuencia angular, $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ el vector de onda y $\mathbf{x}_0 = (x_0, z_0) \in \text{int}(M)$.

$$u_0^n = a\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) \quad \text{y} \quad u_j^n = a\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) \quad (3.43)$$

$$v_0^n = c\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) \quad \text{y} \quad v_j^n = c\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) \quad (3.44)$$

$$w_0^n = b\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) \quad \text{y} \quad w_j^n = b\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) \quad (3.45)$$

donde $\xi = \exp(i\omega\Delta t)$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, z_0)$ y $\mathbf{x}_j = (x_j, z_j)$.

Dispersión de las ondas P-SV

Para analizar la dispersión debida a la discretización, se calcula, con la fórmula utilizada por Liang et al. [94],

$$\max_{\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)} \left| \frac{\alpha_{GDF}(\mathbf{x}_0) - \alpha}{\alpha} \right| = \max_{\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)} \left| \frac{\lambda_P \cos^{-1} R(\mathbf{x}_0)}{2\alpha\pi\Delta t} - 1 \right| \quad (3.46)$$

$$\max_{\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)} \left| \frac{\beta_{GDF}(\mathbf{x}_0) - \beta}{\beta} \right| = \max_{\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)} \left| \frac{\lambda_{SV} \cos^{-1} R(\mathbf{x}_0)}{2\beta\pi\Delta t} - 1 \right| \quad (3.47)$$

donde

$$R = 1 - \frac{\Delta t^2}{4} \left[(\alpha^2 + \beta^2)(R_1 + R_2) + \left((\alpha^2 + \beta^2)^2(R_1 + R_2)^2 - 4[(\alpha^2 R_1 + \beta^2 R_2)(\beta^2 R_1 + \alpha^2 R_2) - (\alpha^2 - \beta^2)^2 R_3^2] \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.48)$$

y

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{j=1}^N m_{jxx} (1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \\ R_2 &= \sum_{j=1}^N m_{jzz} (1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \\ R_3 &= \sum_{j=1}^N m_{jxz} (1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Estos valores permiten relacionar las velocidades reales de las ondas P y S con las velocidades obtenidas por la aplicación del GFDM. Cuanto más próximo a cero estén estos valores, menor será la dispersión producida como consecuencia de la discretización.

Un desarrollo más completo puede encontrarse en [142]. En cualquier caso, la obtención de la fórmula anterior es similar a la siguiente.

Dispersión de las ondas SH

Para el esquema de onda SH, se sustituyen las expresiones (3.44) en el esquema en GFD para la onda SH (3.18). De esta forma, se llega a la ecuación (3.25) y, puesto que $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \xi^2 - M\xi + 1 = 0 \implies \xi + \xi^{-1} = M \implies 2 \cos(\omega\Delta t) = 2 - \\ - \beta^2 \Delta t^2 \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Llamando $R(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j))$ y resolviendo para ω , la frecuencia angular del esquema es

$$\omega_{GDF}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\Delta t} \cos^{-1} \left(1 - \frac{\beta^2 \Delta t^2 R(\mathbf{x}_0)}{2} \right) \quad (3.51)$$

La velocidad de la onda debida al esquema para la estrella considerada es

$$\beta_{GDF}(\mathbf{x}_0) = \frac{\lambda_{SH} \omega_{GDF}(\mathbf{x}_0)}{2\pi} = \frac{\lambda_{SH}}{2\pi \Delta t} \cos^{-1} \left(1 - \frac{\beta^2 \Delta t^2 R(\mathbf{x}_0)}{2} \right) \quad (3.52)$$

Para analizar la dispersión debida a la discretización, se calcula

$$\max_{\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)} \left| \frac{\beta_{GDF}(\mathbf{x}_0) - \beta}{\beta} \right| \quad (3.53)$$

Como antes, cuanto más próximo a cero sea el resultado, menor dispersión se producirá.

3.3. Ondas en medio elástico heterogéneo

Se van a tratar en esta sección ondas en medios heterogéneos formados por capas de medios homogéneos. Como se dijo en la introducción, se han

considerado dos enfoques para el tratamiento de la interfase entre dos de estas capas, por un lado, el enfoque homogéneo, que considera el esquema para medio homogéneo en los medios homogéneos y un esquema diferente para la interfase y, por otro lado, el enfoque heterogéneo, que considera el mismo esquema en todo el medio y la interfase es tenida en cuenta por los valores de los parámetros en cada nodo.

En lo que sigue se ha considerado el esquema homogéneo en la superficie libre y el esquema heterogéneo en la interfase entre dos medios homogéneos.

3.3.1. Tratamiento de la interfaz entre dos sólidos

Se considera un medio heterogéneo formado por dos medios homogéneos. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la curva en el plano X-Z que divide al dominio en dos medios homogéneos. Se consideran las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verificando $\|f(x) - f_1\|_2 = \|f(x) - f_2\|_2 = h, \forall x \in D$ siendo h el paso de referencia. Del mismo modo, se consideran las funciones $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verificando $\|f(x) - \tilde{f}_1\|_2 = \|f(x) - \tilde{f}_2\|_2 = \frac{h}{2}, \forall x \in D$, véase la figura 3.2.

Para generar la discretización en un medio heterogéneo con las condiciones descritas se sitúan los nodos a lo largo de la curva f , los nodos a lo largo de las curvas f_1 y f_2 tan próximos a ellas como sea posible y el resto de nodos como se quiera. Claro está, es recomendable usar un número de nodos similar en las tres curvas y situarlos a distancias similares entre ellos en cada una de las tres curvas. Por ejemplo, por cada nodo de la interfaz, $P_0 = (x_0, z_0) \in G(f)$, se pueden añadir los nodos $P_1 = (x_0 - n_1(x_0)h, z_0 - n_2(x_0)h) \in G(f_1)$ y $P_2 = (x_0 + n_1(x_0)h, z_0 + n_2(x_0)h) \in G(f_2)$ (véase la figura 3.2), donde $\mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_3(x)) = \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \right)$ es el vector unitario y normal a la curva f y G es el grafo de cada función. En cualquier caso, nótese que la elección de los nodos no depende del problema considerado sino del propio método.

Sea (φ_1, φ_2) cualquier par de propiedades, $\{(\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2), (\rho_1, \rho_2)\}$ y

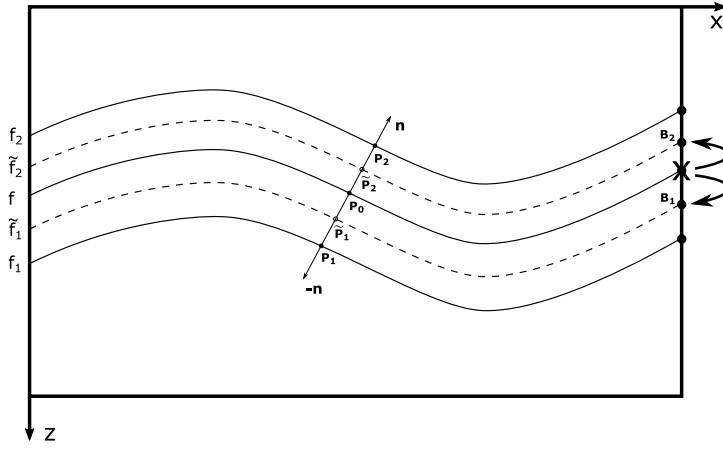


Figura 3.2: Dominio considerado. La interfaz está definida por $f(x)$. $P_0 = (x_0, z_0)$ es un nodo de la discretización y $P_1 = (x_0 - n_1(x_0)h, z_0 - n_3(x_0)h)$ y $P_2 = (x_0 + n_1(x_0)h, z_0 + n_3(x_0)h)$ pueden ser nodos de la discretización. $\tilde{P}_1 = (x_0 - n_1(x_0)\frac{h}{2}, z_0 - n_3(x_0)\frac{h}{2})$ y $\tilde{P}_2 = (x_0 + n_1(x_0)\frac{h}{2}, z_0 + n_3(x_0)\frac{h}{2})$ son nodos ficticios. Los nodos de la interfaz que se encuentran en el contorno son substituidos por dos nodos, B_1 y B_2 , situados próximos a las curvas \tilde{f}_1 y \tilde{f}_2

sea $P_0 = (x_0, z_0) \in G(f)$. Se supone que las propiedades de todo el medio varían linealmente cerca de la interfaz, en concreto, entre los nodos $\tilde{P}_1 = (x_0 - n_1(x_0)\frac{h}{2}, z_0 - n_3(x_0)\frac{h}{2}) \in G(\tilde{f}_1)$ y $\tilde{P}_2 = (x_0 + n_1(x_0)\frac{h}{2}, z_0 + n_3(x_0)\frac{h}{2}) \in G(\tilde{f}_2)$. Estos nodos son ficticios y no se encuentran en la discretización. Con este propósito, se halla el plano que contiene los puntos $\tilde{Q}_1 = (x_0 - n_1(x_0)\frac{h}{2}, \varphi_1, z_0 - n_3(x_0)\frac{h}{2})$ y $\tilde{Q}_2 = (x_0 + n_1(x_0)\frac{h}{2}, \varphi_2, z_0 + n_3(x_0)\frac{h}{2})$ y al vector $\mathbf{v} = (1, 0, f'(x_0)) = (-n_3(x_0), 0, n_1(x_0))$. Como $\tilde{\mathbf{Q}}_1 \tilde{\mathbf{Q}}_2 = (n_1(x_0)h, \varphi_2 - \varphi_1, n_3(x_0)h)$ se tiene

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - \left(x_0 - n_1(x_0)\frac{h}{2}\right) & y - \varphi_2 & z - \left(z_0 - n_3(x_0)\frac{h}{2}\right) \\ -n_3(x_0) & 0 & n_1(x_0) \\ n_1(x_0)h & \varphi_2 - \varphi_1 & n_3(x_0)h \end{vmatrix} = 0 \quad (3.54)$$

Operando y simplificando se llega a

$$\begin{aligned} \pi \equiv & n_1(x_0)(\varphi_2 - \varphi_1) \left(x - x_0 + n_1(x_0) \frac{h}{2} \right) - h(y - \varphi_1) + \\ & + n_3(x_0)(\varphi_2 - \varphi_1) \left(z - z_0 + n_3(x_0) \frac{h}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Resolviendo para y ,

$$y = \bar{\varphi} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{h} \left[n_1(x_0)(x - x_0) + n_3(x_0)(z - z_0) \right] \quad (3.56)$$

donde $\bar{\varphi}$ es la media de la propiedad tratada.

De esta manera, véase la figura 3.3, se define la función continua definida a trozos

$$\varphi(x, z) = \begin{cases} \varphi_1, & z < \tilde{f}_1(x) \\ \bar{\varphi} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{h} \left[n_1(x_0)(x - x_0) + n_3(x_0)(z - z_0) \right], & \tilde{f}_1(x) \leq z \leq \tilde{f}_2(x) \\ \varphi_2, & z > \tilde{f}_2(x) \end{cases} \quad (3.57)$$

siendo x_0 la abscisa verificando que $\|(x, z) - (x_0, f(x_0))\|_2$ es mínima y, en caso de existir más de un mínimo, también debe verificarse que $x_0 < x$. En realidad, no tiene mucha importancia cómo se defina el empate de distancias mínimas puesto que en la práctica la función φ sólo será evaluada en los nodos de la interfase.

Nótese que $\varphi(x_0, z_0) = \bar{\varphi}$ en el nodo de la interfaz $P_0 = (x_0, z_0)$.

Puesto que aparecerán las derivadas parciales de φ al obtener las ecuaciones de Navier, éstas se expresan a continuación

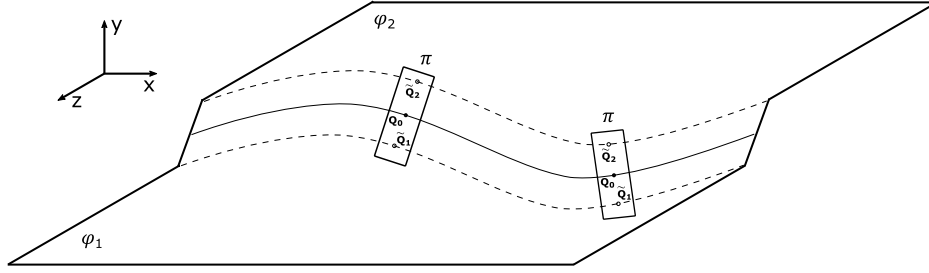


Figura 3.3: Función a trozos φ . Por cada nodo de la interfaz consideramos un plano conteniendo a los puntos $\tilde{Q}_1 = (x_0 - n_1(x_0)\frac{h}{2}, \varphi_1, z_0 - n_3(x_0)\frac{h}{2})$ y $\tilde{Q}_2 = (x_0 + n_1(x_0)\frac{h}{2}, \varphi_2, z_0 + n_3(x_0)\frac{h}{2})$ y al vector $\mathbf{v} = (1, 0, f'(x_0)) = (-n_3(x_0), 0, n_1(x_0))$

$$\varphi_{,x}(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < \tilde{f}_1(x) \\ \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{h} n_1(x_0) & \text{si } \tilde{f}_1(x) \leq z \leq \tilde{f}_2(x) \\ 0 & \text{si } z > \tilde{f}_2(x) \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\varphi_{,z}(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < \tilde{f}_1(x) \\ \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{h} n_3(x_0) & \text{si } \tilde{f}_1(x) \leq z \leq \tilde{f}_2(x) \\ 0 & \text{si } z > \tilde{f}_2(x) \end{cases} \quad (3.59)$$

3.3.2. Esquemas en diferencias finitas generalizadas

Se consideran las propiedades del medio como funciones en vez de constantes, las ecuaciones del movimiento para las ondas P-SV y SH vienen dadas por

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xz,z} = \rho U_{,tt} \quad (3.60)$$

$$\sigma_{xz,z} + \sigma_{zz,z} = \rho W_{,tt}$$

$$\sigma_{yx,x} + \sigma_{yz,z} = \rho V_{,tt} \quad (3.61)$$

Estas ecuaciones y la ley de Hooke

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)U_{,x} + \lambda W_{,z} \\
 \sigma_{xz} &= \mu U_{,z} + \mu W_{,x} \\
 \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)W_{,z} + \lambda U_{,x} \\
 \sigma_{yx} &= \mu V_{,x} \\
 \sigma_{yz} &= \mu V_{,z}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

donde λ , μ y ρ son las funciones definidas en (3.57). Sustituyendo (3.62) en (3.60) y (3.61), se obtienen las ecuaciones de Navier para el sistema desacoplado

$$\begin{aligned}
 U_{,tt} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} U_{,xx} + \frac{\mu}{\rho} U_{,zz} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} W_{,xz} + \frac{\lambda_{,x} + 2\mu_{,x}}{\rho} U_{,x} + \\
 &+ \frac{\mu_{,z}}{\rho} U_{,z} + \frac{\mu_{,z}}{\rho} W_{,x} + \frac{\lambda_{,x}}{\rho} W_{,z}
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
 W_{,tt} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} W_{,zz} + \frac{\mu}{\rho} W_{,xx} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} U_{,xz} + \frac{\lambda_{,z} + 2\mu_{,z}}{\rho} W_{,z} + \\
 &+ \frac{\mu_{,x}}{\rho} W_{,x} + \frac{\mu_{,x}}{\rho} U_{,z} + \frac{\lambda_{,z}}{\rho} U_{,x}
 \end{aligned}$$

$$V_{,tt} = \frac{\mu}{\rho} (V_{,xx} + V_{,zz}) + \frac{\mu_{,x}}{\rho} V_{,x} + \frac{\mu_{,z}}{\rho} V_{,z} \tag{3.64}$$

Las fórmulas en diferencias finitas clásicas y generalizadas proporcionan las siguientes aproximaciones de las derivadas parciales en el punto (\mathbf{x}_0, t) ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial t^2} &= \frac{\phi_0^{n-1} - 2\phi_0^n + \phi_0^{n+1}}{\Delta t^2} & \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial x^2} &= -m_{0xx} \phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx} \phi_i^n \\
 \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial z^2} &= -m_{0zz} \phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz} \phi_i^n & \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial x \partial z} &= -m_{0xz} \phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz} \phi_i^n \\
 \frac{\partial \phi_0^n}{\partial x} &= -m_{0x} \phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix} \phi_i^n & \frac{\partial \phi_0^n}{\partial z} &= -m_{0z} \phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz} \phi_i^n
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

siendo $\phi \in \{u, v, w\}$.

Ondas P-SV

Se sustituyen las aproximaciones de las derivadas parciales en la ecuación de ondas P-SV (3.63)

$$\begin{aligned}
 \frac{u_0^{n-1} - 2u_0^n + u_0^{n+1}}{\Delta t^2} &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0} \left(-m_{0xx}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}u_i^n \right) + \\
 &+ \frac{\mu_0}{\rho_0} \left(-m_{0zz}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz}u_i^n \right) + \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\rho_0} \left(-m_{0xz}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz}w_i^n \right) + \\
 &+ \frac{\lambda_{0,x} + 2\mu_{0,x}}{\rho_0} \left(-m_{0x}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}u_i^n \right) + \frac{\mu_{0,z}}{\rho_0} \left(-m_{0z}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}u_i^n \right) + \\
 &+ \frac{\mu_{0,z}}{\rho_0} \left(-m_{0x}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}w_i^n \right) + \frac{\lambda_{0,x}}{\rho_0} \left(-m_{0z}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}w_i^n \right) \\
 \\
 \frac{w_0^{n-1} - 2w_0^n + w_0^{n+1}}{\Delta t^2} &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0} \left(-m_{0zz}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz}w_i^n \right) + \\
 &+ \frac{\mu_0}{\rho_0} \left(-m_{0xx}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}w_i^n \right) + \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\rho_0} \left(-m_{0xz}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz}u_i^n \right) + \\
 &+ \frac{\lambda_{0,z} + 2\mu_{0,z}}{\rho_0} \left(-m_{0z}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}w_i^n \right) + \frac{\mu_{0,x}}{\rho_0} \left(-m_{0x}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}w_i^n \right) + \\
 &+ \frac{\mu_{0,x}}{\rho_0} \left(-m_{0z}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}u_i^n \right) + \frac{\lambda_{0,z}}{\rho_0} \left(-m_{0x}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}u_i^n \right) \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

Operando y agrupando términos, se llega al esquema en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de ondas P-SV

$$u_0^{n+1} = \left[2 - \frac{\Delta t^2}{\bar{\rho}} \left((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})m_{0xx} + \bar{\mu}m_{0zz} + \frac{n_1}{h}(\lambda_2 - \lambda_1 + 2\mu_2 - 2\mu_1)m_{0x} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n_3}{h}(\mu_2 - \mu_1)m_{0z} \Big] u_0^n - u_0^{n-1} - \frac{\Delta t^2}{\bar{\rho}} \left[(\bar{\lambda} + \bar{\mu})m_{0xz} + \frac{n_3}{h}(\mu_2 - \mu_1)m_{0x} + \right. \\
& + \frac{n_1}{h}(\lambda_2 - \lambda_1)m_{0z} \Big] w_0^n + \sum_{k=1}^N \frac{\Delta t^2}{\bar{\rho}} \left[\left((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})m_{kxx} + \bar{\mu}m_{kzz} + \frac{n_1}{h}(\lambda_2 - \right. \right. \\
& - \lambda_1 + 2\mu_2 - 2\mu_1)m_{kx} + \frac{n_3}{h}(\mu_2 - \mu_1)m_{kz} \Big) u_k^n + \left((\bar{\lambda} + \bar{\mu})m_{kxz} + \frac{n_3}{h}(\mu_2 - \right. \\
& - \mu_1)m_{kx} + \frac{n_1}{h}(\lambda_2 - \lambda_1)m_{kz} \Big) w_k^n \Big] \\
w_0^{n+1} = & \left[2 - \frac{\Delta t^2}{\bar{\rho}} \left((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})m_{0zz} + \bar{\mu}m_{0xx} + \frac{n_1}{h}(\mu_2 - \mu_1)m_{0x} + \frac{n_3}{h}(\lambda_2 - \lambda_1 + \right. \right. \\
& + 2\mu_2 - 2\mu_1)m_{0z} \Big) \Big] w_0^n - w_0^{n-1} - \frac{\Delta t^2}{\bar{\rho}} \left[(\bar{\lambda} + \bar{\mu})m_{0xz} + \frac{n_3}{h}(\lambda_2 - \lambda_1)m_{0x} + \right. \\
& + \frac{n_1}{h}(\mu_2 - \mu_1)m_{0z} \Big] u_0^n + \sum_{k=1}^N \frac{\Delta t^2}{\bar{\rho}} \left[\left((\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})m_{kzz} + \bar{\mu}m_{kxx} + \frac{n_1}{h}(\mu_2 - \right. \right. \\
& - \mu_1)m_{kx} + \frac{n_3}{h}(\lambda_2 - \lambda_1 + 2\mu_2 - 2\mu_1)m_{kz} \Big) w_k^n + \left((\bar{\lambda} + \bar{\mu})m_{kxz} + \frac{n_3}{h}(\lambda_2 - \right. \\
& - \lambda_1)m_{kx} + \frac{n_1}{h}(\mu_2 - \mu_1)m_{kz} \Big) u_k^n \Big] \tag{3.67}
\end{aligned}$$

Ondas SH

Se sustituyen las aproximaciones de las derivadas parciales en la ecuación de onda SH (3.64)

$$\begin{aligned}
\frac{v_0^{n-1} - 2v_0^n + v_0^{n+1}}{\Delta t^2} = & \frac{\mu_0}{\rho_0} \left(-m_{0xx}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}v_i^n - m_{0zz}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz}v_i^n \right) + \\
& + \frac{\mu_{0,x}}{\rho_0} \left(-m_{0x}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}v_i^n \right) + \frac{\mu_{0,z}}{\rho_0} \left(-m_{0z}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}v_i^n \right) \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Operando y agrupando términos, llegamos al esquema en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de la onda SH

$$\begin{aligned}
 v_0^{n+1} = & \left[2 - \frac{\Delta t^2}{\bar{\rho}} \left(\bar{\mu}(m_{0xx} + m_{0zz}) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{h}(n_1 m_{0x} + n_3 m_{0z}) \right) \right] v_0^n - \\
 & - v_0^{n-1} + \sum_{k=1}^N \frac{\Delta t^2}{\bar{\rho}} \left[\bar{\mu}(m_{kxx} + m_{kzz}) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{h}(n_1 m_{kx} + n_3 m_{kz}) \right] v_k^n
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Es trivial verificar que estos esquemas heterogéneos coinciden con los esquemas homogéneos en un medio homogéneo. De hecho, el algoritmo computacional usa el esquema para medios homogéneos en cada uno de los medios homogéneos que haya y el esquema heterogéneo sólo en la interfaz. De esta forma, se evita tanto un aumento de cálculos superfluos como errores numéricos.

3.3.3. Consistencia, orden, estabilidad y convergencia

Los esquemas en diferencias finitas generalizadas para las ecuaciones de ondas P-SV y SH son consistentes pues los errores de truncamiento, tanto de la derivada parcial temporal como de la ecuación en derivadas parciales espaciales, son conocidos y convergen a cero a medida que los pasos espaciales y temporales convergen a cero independientemente. El orden de los esquemas es el orden de los términos del error de truncamiento en la aproximación en diferencias finitas de cada una de las derivadas parciales en la ecuación de onda.

Los esquemas para ondas P-SV y SH son consistentes pues

$$\begin{aligned}
 & \rho U_{,tt} - (\lambda + 2\mu)U_{,xx} - \mu U_{,zz} - (\lambda + \mu)W_{,xz} - (\lambda_{,x} + 2\mu_{,x})U_{,x} - \\
 & - \mu_{,z}U_{,z} - \mu_{,z}W_{,x} - \lambda_{,x}W_{,z} = \rho u_{,tt} + ET_t - (\lambda + 2\mu)u_{,xx} - \mu u_{,zz} - \\
 & - (\lambda + \mu)w_{,xz} - (\lambda_{,x} + 2\mu_{,x})u_{,x} - \mu_{,z}u_{,z} - \mu_{,z}w_{,x} - \lambda_{,x}w_{,z} + ET_e \\
 & \rho W_{,tt} - (\lambda + 2\mu)W_{,zz} - \mu W_{,xx} - (\lambda + \mu)U_{,xz} - (\lambda_{,z} + 2\mu_{,z})W_{,z} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\mu_{,x}W_{,x} - \mu_{,x}U_{,z} - \lambda_{,z}U_{,x} = \rho w_{,tt} + ET_t - (\lambda + 2\mu)w_{,zz} - \mu w_{,xx} - \\
 & -(\lambda + \mu)u_{,xz} - (\lambda_{,z} + 2\mu_{,z})w_{,z} - \mu_{,x}w_{,x} - \mu_{,x}u_{,z} - \lambda_{,z}u_{,x} + ET_e \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho V_{,tt} - \mu(V_{,xx} + V_{,zz}) - \mu_{,x}V_{,x} - \mu_{,z}V_{,z} = \rho v_{,tt} + ET_t - \\
 & -\mu(v_{,xx} + v_{,zz}) - \mu_{,x}v_{,x} - \mu_{,z}v_{,z} + ET_e \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

de donde $ET = ET_t + ET_e$ y $ET \rightarrow 0$ cuando $((h_i, k_i), t) \rightarrow ((0, 0), 0)$ y su orden es $\mathcal{O}(h_i + k_i) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$.

La estabilidad de los esquemas heterogéneos es más difícil de analizar que la estabilidad de los esquemas homogéneos. Se han utilizado como cotas para la estabilidad las cotas de los esquemas homogéneos y los resultados numéricos realizados verifican que se cumple la estabilidad.

3.3.4. Dispersión numérica

Del mismo modo que no se analiza la estabilidad, tampoco se analiza la dispersión numérica, en particular, la dispersión debida a la discretización. Las fórmulas utilizadas en medios homogéneos verifican la dispersión de la discretización.

3.4. Viscoelasticidad, modelo de Kelvin y ondas sísmicas

El mecanismo más simple, que sirve de base para posteriores generalizaciones, está basado en la superposición de dos mecanismos de resistencia a la deformación, la elasticidad lineal y la viscosidad de Stokes. Un material de esta clase se llama viscoelástico. Un material se dice que es linealmente viscoelástico si cumple que las tensiones presentan una relación lineal con las deformaciones en un instante dado y el principio de superposición lineal

se mantiene, y si la deformación resultante de aplicar dos tensiones, arbitrarias, diferentes y aplicadas en diferentes instantes, es igual a la suma de las deformaciones resultantes de las dos tensiones actuando por separado. Para establecer una analogía mecánica, los modelos utilizados representan la parte elástica por un muelle y la parte viscosa por un amortiguador.

En el modelo de Kelvin - Voight, el muelle y el amortiguador están en paralelo. Si se aplica una tensión constante al modelo y se mantiene, esta tensión no producirá una deformación instantánea ya que el amortiguador, que está en paralelo, no se moverá instantáneamente. En vez de eso, se producirá una deformación de forma gradual. En función de la magnitud de la tensión aplicada, se determina un valor máximo de la extensión alcanzada y, al dejar de aplicar la tensión, la deformación de nuevo no es instantánea, sino que se retrasa debido a la relajación exponencial del amortiguador. Tras la recuperación completa no se mantiene ninguna deformación permanente. Para poner estas ideas en términos matemáticos, se desarrollan las diferentes tensiones en ambos mecanismos del sistema, el mecanismo elástico tendrá $\sigma_1 = \mu\varepsilon$ y el mecanismo viscoso tendrá $\sigma_2 = \eta\dot{\varepsilon}$. La tensión total vendrá dada por

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \mu\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} = \left(\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon \quad (3.72)$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación anterior se obtiene

$$\sigma = (\mu + i\omega\eta)\varepsilon \quad (3.73)$$

Luego se puede expresar el módulo elástico como un módulo elástico complejo dependiente de la frecuencia angular, $E(\omega) = \mu + i\omega\eta = \mu(1 + i\omega\tau)$, siendo $\tau = \frac{\eta}{\mu}$ el tiempo de relajación (o retardo).

Obsérvese que $v \rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ cuando $\omega \rightarrow 0$ y $v \rightarrow \infty$ cuando $\omega \rightarrow \infty$, luego las ondas en medios viscoelásticos con este modelo son más rápidas que las mismas ondas en medio elástico.

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

El factor de calidad Q caracteriza la atenuación de las ondas en un medio. Q es el número de longitudes de ondas que una onda debe propagarse a través de un medio antes de que su amplitud decaiga en un factor $e^{-\pi}$, White [155]. En modelos en los que se emplean tres o más elementos se ajusta la función $Q(\omega)$ para que sea constante sobre un rango de frecuencias lo que es muy conveniente en problemas de prospecciones y en sismología para parametrizar la atenuación en rocas puesto que la dependencia de la frecuencia normalmente no es conocida. Se tiene

$$\begin{aligned} Q_{\alpha}^{-1} &= \omega \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} \\ Q_{\beta}^{-1} &= \omega \frac{\mu'}{\mu} \end{aligned} \tag{3.74}$$

siendo λ y μ los parámetros de Lamé y λ' y μ' los coeficientes de viscosidad.

Es usual dar como parámetros de entrada los factores de disipación o sus inversos, llamados factores de calidad. Por ejemplo, Carcione [31] establece como parámetros de entrada la densidad, las velocidades a frecuencia cero y los factores de disipación a frecuencia cero. Además, proporciona las fórmulas explícitas para obtener los coeficientes elásticos y viscosos a partir de dichos parámetros de entrada. En el caso del modelo Maxwell, el factor de calidad es lineal con la frecuencia, $Q = \omega\tau$, y en el caso del modelo Kelvin - Voight, el factor de disipación, $Q^{-1} = \omega\tau$, es lineal con la frecuencia, razón por la que se utilizarán los tiempos de retardo en los ejemplos que se verán en los resultados numéricos.

Para el caso de las ondas P-SV y SH, se procede como en (3.72) y se usan las correspondencias $\lambda \rightarrow \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}$ y $\mu \rightarrow \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}$ para establecer las ecuaciones constitutivas de un medio viscoelástico lineal isótropo que sigue un modelo de Kelvin.

Para las ondas P-SV

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) (U_{,x} + W_{,z}) + 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{,x} \\
 \sigma_{zz} &= \left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) (U_{,x} + W_{,z}) + 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) W_{,z} \\
 \sigma_{xz} &= \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) (U_{,z} + W_{,x})
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

y para las ondas SH

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} &= \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) V_{,x} \\
 \sigma_{yz} &= \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) V_{,z}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

siendo λ y μ los parámetros de Lamé y λ' y μ' los coeficientes de viscosidad.

3.5. Ondas en medio viscoelástico homogéneo

Las ecuaciones generales del movimiento expresadas en términos de desplazamientos para ondas P-SV son

$$\begin{aligned}
 U_{,tt} &= \alpha^2 U_{,xx} + \beta^2 U_{,zz} + (\alpha^2 - \beta^2) W_{,xz} + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\tau_P \alpha^2 U_{,xx} + \tau_S \beta^2 U_{,zz} + (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) W_{,xz} \right] \\
 W_{,tt} &= \beta^2 W_{,xx} + \alpha^2 W_{,zz} + (\alpha^2 - \beta^2) U_{,xz} + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\tau_S \beta^2 W_{,xx} + \tau_P \alpha^2 W_{,zz} + (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) U_{,xz} \right]
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

y para ondas SH son

$$V_{,tt} = \beta^2(V_{,xx} + V_{,zz}) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\tau_S \beta^2 (V_{,xx} + V_{,zz}) \right] \quad (3.78)$$

siendo $\tau_P = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu}$ y $\tau_S = \frac{\mu'}{\mu}$ los tiempos de retardo para las ondas P y S, respectivamente.

3.5.1. Esquemas en diferencias finitas generalizadas

Las fórmulas en diferencias finitas clásicas y generalizadas proporcionan las siguientes aproximaciones de las derivadas parciales en el punto (\mathbf{x}_0, t) ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial t^2} &= \frac{\phi_0^{n-1} - 2\phi_0^n + \phi_0^{n+1}}{\Delta t^2} & \frac{\partial \phi_0^n}{\partial t} &= \frac{3\phi_0^n - 4\phi_0^{n-1} + \phi_0^{n-2}}{2\Delta t} \\ \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial x^2} &= -m_{0xx}\phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}\phi_i^n & \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial z^2} &= -m_{0zz}\phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz}\phi_i^n \\ & & \frac{\partial^2 \phi_0^n}{\partial x \partial z} &= -m_{0xz}\phi_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz}\phi_i^n \end{aligned} \quad (3.79)$$

siendo $\phi \in \{u, v, w\}$.

Ondas P-SV

Se sustituyen las aproximaciones de las derivadas parciales en la ecuación de ondas P-SV (3.77)

$$\begin{aligned} \frac{u_0^{n-1} - 2u_0^n + u_0^{n+1}}{\Delta t^2} &= \alpha^2 \left(-m_{0xx}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}u_i^n \right) + \\ &+ \beta^2 \left(-m_{0zz}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz}u_i^n \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-m_{0xz}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz}u_i^n \right) + \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial t} \left[\tau_P \alpha^2 \left(-m_{0xx} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx} u_i^n \right) + \tau_S \beta^2 \left(-m_{0zz} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz} u_i^n \right) + \right. \\
& \left. + (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) \left(-m_{0xz} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz} w_i^n \right) \right] \\
\frac{w_0^{n-1} - 2w_0^n + w_0^{n+1}}{\Delta t^2} & = \beta^2 \left(-m_{0xx} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx} w_i^n \right) + \\
& + \alpha^2 \left(-m_{0zz} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz} w_i^n \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-m_{0xz} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz} u_i^n \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \left[\tau_S \beta^2 \left(-m_{0xx} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx} w_i^n \right) + \tau_P \alpha^2 \left(-m_{0zz} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz} w_i^n \right) + \right. \\
& \left. + (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) \left(-m_{0xz} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz} u_i^n \right) \right] \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Por la linealidad de la derivada

$$\begin{aligned}
\frac{u_0^{n-1} - 2u_0^n + u_0^{n+1}}{\Delta t^2} & = \alpha^2 \left(-m_{0xx} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx} u_i^n \right) + \\
& + \beta^2 \left(-m_{0zz} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz} u_i^n \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-m_{0xz} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz} w_i^n \right) + \\
& + \tau_P \alpha^2 \left(-m_{0xx} \frac{\partial u_0^n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N m_{ixx} \frac{\partial u_i^n}{\partial t} \right) + \tau_S \beta^2 \left(-m_{0zz} \frac{\partial u_0^n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N m_{izz} \frac{\partial u_i^n}{\partial t} \right) + \\
& + (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) \left(-m_{0xz} \frac{\partial w_0^n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N m_{ixz} \frac{\partial w_i^n}{\partial t} \right) \\
\frac{w_0^{n-1} - 2w_0^n + w_0^{n+1}}{\Delta t^2} & = \beta^2 \left(-m_{0xx} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx} w_i^n \right) + \\
& + \alpha^2 \left(-m_{0zz} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz} w_i^n \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-m_{0xz} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz} u_i^n \right) +
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

$$\begin{aligned}
& + \tau_S \beta^2 \left(-m_{0xx} \frac{\partial w_0^n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N m_{ixx} \frac{\partial w_i^n}{\partial t} \right) + \tau_P \alpha^2 \left(-m_{0zz} \frac{\partial w_0^n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N m_{izz} \frac{\partial w_i^n}{\partial t} \right) + \\
& + (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) \left(-m_{0xz} \frac{\partial u_0^n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N m_{ixz} \frac{\partial u_i^n}{\partial t} \right) \tag{3.81}
\end{aligned}$$

Aplicando el esquema para la primera derivada temporal

$$\begin{aligned}
\frac{u_0^{n-1} - 2u_0^n + u_0^{n+1}}{\Delta t^2} & = \alpha^2 \left(-m_{0xx} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx} u_i^n \right) + \\
& + \beta^2 \left(-m_{0zz} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz} u_i^n \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-m_{0xz} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz} w_i^n \right) + \\
& + \tau_P \alpha^2 \left(-m_{0xx} \frac{3u_0^n - 4u_0^{n-1} + u_0^{n-2}}{2\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{ixx} \frac{3u_i^n - 4u_i^{n-1} + u_i^{n-2}}{2\Delta t} \right) + \\
& + \tau_S \beta^2 \left(-m_{0zz} \frac{3u_0^n - 4u_0^{n-1} + u_0^{n-2}}{2\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{izz} \frac{3u_i^n - 4u_i^{n-1} + u_i^{n-2}}{2\Delta t} \right) + \\
& + (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) \left(-m_{0xz} \frac{3w_0^n - 4w_0^{n-1} + w_0^{n-2}}{2\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{ixz} \frac{3w_i^n - 4w_i^{n-1} + w_i^{n-2}}{2\Delta t} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{w_0^{n-1} - 2w_0^n + w_0^{n+1}}{\Delta t^2} & = \beta^2 \left(-m_{0xx} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx} w_i^n \right) + \\
& + \alpha^2 \left(-m_{0zz} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz} w_i^n \right) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(-m_{0xz} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixz} u_i^n \right) + \\
& + \tau_S \beta^2 \left(-m_{0xx} \frac{3w_0^n - 4w_0^{n-1} + w_0^{n-2}}{2\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{ixx} \frac{3w_i^n - 4w_i^{n-1} + w_i^{n-2}}{2\Delta t} \right) + \\
& + \tau_P \alpha^2 \left(-m_{0zz} \frac{3w_0^n - 4w_0^{n-1} + w_0^{n-2}}{2\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{izz} \frac{3w_i^n - 4w_i^{n-1} + w_i^{n-2}}{2\Delta t} \right) + \\
& + (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) \left(-m_{0xz} \frac{3u_0^n - 4u_0^{n-1} + u_0^{n-2}}{2\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{ixz} \frac{3u_i^n - 4u_i^{n-1} + u_i^{n-2}}{2\Delta t} \right) \tag{3.82}
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

Despejando u_0^{n+1} y w_0^{n+1} en cada una de las ecuaciones y reordenado términos, se llega al esquema en diferencias finitas generalizadas para ondas P-SV

$$\begin{aligned}
 u_0^{n+1} = & (2 - A_{u_0}^0)u_0^n + (A_{u_0}^{-1} - 1)u_0^{n-1} - A_{u_0}^{-2}u_0^{n-2} + \\
 & + \sum_{k=0}^2 \left[(-1)^{k+1} A_{w_0}^{-k} w_0^{n-k} + \sum_{j=1}^N (-1)^k (A_{u_j}^{-k} u_j^{n-k} + A_{w_j}^{-k} w_j^{n-k}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}
 w_0^{n+1} = & (2 - B_{w_0}^0)w_0^n + (B_{w_0}^{-1} - 1)w_0^{n-1} - B_{w_0}^{-2}w_0^{n-2} + \\
 & + \sum_{k=0}^2 \left[(-1)^{k+1} B_{u_0}^{-k} u_0^{n-k} + \sum_{j=1}^N (-1)^k (B_{w_j}^{-k} w_j^{n-k} + B_{u_j}^{-k} u_j^{n-k}) \right]
 \end{aligned}$$

donde para $j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ los coeficientes¹ son

$$\begin{aligned}
 A_{u_j}^0 &= \varphi_1^P \alpha^2 m_{jxx} + \varphi_1^S \beta^2 m_{jzz} \\
 A_{u_j}^{-1} &= \varphi_2^P \alpha^2 m_{jxx} + \varphi_2^S \beta^2 m_{jzz} \\
 A_{u_j}^{-2} &= \varphi_3^P \alpha^2 m_{jxx} + \varphi_3^S \beta^2 m_{jzz} \\
 A_{w_j}^0 &= B_{u_j}^0 = (\varphi_1^P \alpha^2 - \varphi_1^S \beta^2) m_{jxz} \\
 A_{w_j}^{-1} &= B_{u_j}^{-1} = (\varphi_2^P \alpha^2 - \varphi_2^S \beta^2) m_{jxz} \\
 A_{w_j}^{-2} &= B_{u_j}^{-2} = (\varphi_3^P \alpha^2 - \varphi_3^S \beta^2) m_{jxz} \\
 B_{w_j}^0 &= \varphi_1^P \alpha^2 m_{jzz} + \varphi_1^S \beta^2 m_{jxx} \\
 B_{w_j}^{-1} &= \varphi_2^P \alpha^2 m_{jzz} + \varphi_2^S \beta^2 m_{jxx} \\
 B_{w_j}^{-2} &= \varphi_3^P \alpha^2 m_{jzz} + \varphi_3^S \beta^2 m_{jxx}
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \varphi_1^* &= \Delta t^2 + 1,5\tau_* \Delta t \\
 \varphi_2^* &= 2\tau_* \Delta t
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

¹No confundir los superíndices de los coeficientes A y B con exponentes.

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

$$\varphi_3^* = 0,5\tau_\star\Delta t$$

donde $\star \in \{P, S\}$.

Ondas SH

Se sustituyen las aproximaciones de las derivadas parciales en la ecuación de ondas SH (3.78)

$$\begin{aligned} \frac{v_0^{n-1} - 2v_0^n + v_0^{n+1}}{\Delta t^2} &= \beta^2 \left(-m_{0xx}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}v_i^n - m_{0zz}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz}v_i^n \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\tau_S \beta^2 \left(-m_{0xx}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}v_i^n - m_{0zz}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz}v_i^n \right) \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

Por la linealidad de la derivada

$$\begin{aligned} \frac{v_0^{n-1} - 2v_0^n + v_0^{n+1}}{\Delta t^2} &= \beta^2 \left(-m_{0xx}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}v_i^n - m_{0zz}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz}v_i^n \right) + \\ &+ \tau_S \beta^2 \left(-m_{0xx} \frac{\partial v_0^n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N m_{ixx} \frac{\partial v_i^n}{\partial t} - m_{0zz} \frac{\partial v_0^n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N m_{izz} \frac{\partial v_i^n}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Aplicando el esquema para la primera derivada temporal

$$\begin{aligned} \frac{v_0^{n-1} - 2v_0^n + v_0^{n+1}}{\Delta t^2} &= \beta^2 \left(-m_{0xx}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ixx}v_i^n - m_{0zz}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{izz}v_i^n \right) + \\ &+ \tau_S \beta^2 \left(-m_{0xx} \frac{3v_0^n - 4v_0^{n-1} + v_0^{n-2}}{2\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{ixx} \frac{3v_i^n - 4v_i^{n-1} + v_i^{n-2}}{2\Delta t} - \right. \\ &\left. - m_{0zz} \frac{3v_0^n - 4v_0^{n-1} + v_0^{n-2}}{2\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{izz} \frac{3v_i^n - 4v_i^{n-1} + v_i^{n-2}}{2\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Despejando v_0^{n+1} en la ecuación y reordenado términos, se llega al esquema

en diferencias finitas generalizadas para ondas SH

$$v_0^{n+1} = (2 - C_{v_0}^0)v_0^n + (C_{v_0}^{-1} - 1)v_0^{n-1} - C_{v_0}^{-2}v_0^{n-2} + \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N (-1)^k C_{v_j}^{-k} v_j^{n-k} \quad (3.89)$$

donde para $j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ los coeficientes² son

$$\begin{aligned} C_{v_j}^0 &= \varphi_1^S \beta^2 (m_{jxx} + m_{jzz}) \\ C_{v_j}^0 &= \varphi_2^S \beta^2 (m_{jxx} + m_{jzz}) \\ C_{v_j}^0 &= \varphi_3^S \beta^2 (m_{jxx} + m_{jzz}) \end{aligned} \quad (3.90)$$

siendo

$$\begin{aligned} \varphi_1^S &= \Delta t^2 + 1,5\tau_S \Delta t \\ \varphi_2^S &= 2\tau_S \Delta t \\ \varphi_3^S &= 0,5\tau_S \Delta t \end{aligned} \quad (3.91)$$

3.5.2. Consistencia, orden, estabilidad y convergencia

Los esquemas en diferencias finitas generalizadas para las ecuaciones de ondas P-SV y SH son consistentes pues los errores de truncamiento, tanto de la derivada parcial temporal como de la ecuación en derivadas parciales espaciales, son conocidos y convergen a cero a medida que los pasos espaciales y temporales convergen a cero independientemente. El orden de los esquemas es el orden de los términos del error de truncamiento en la aproximación en diferencias finitas de cada uno de los esquemas en la ecuación de onda.

Los esquemas para ondas P-SV y SH son consistentes pues

²No confundir los superíndices de los coeficientes C con exponentes.

$$\begin{aligned}
& U_{,tt} - \alpha^2 U_{,xx} - \beta^2 U_{,zz} - (\alpha^2 - \beta^2) W_{,xz} - \tau_P \alpha^2 U_{,xxt} - \tau_S \beta^2 U_{,zzt} - \\
& - (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) W_{,xzt} = u_{,tt} + ET_t - \alpha^2 u_{,xx} - \beta^2 u_{,zz} - (\alpha^2 - \beta^2) w_{,xz} + \\
& + ET_e - \tau_P \alpha^2 u_{,xxt} - \tau_S \beta^2 u_{,zzt} - (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) w_{,xzt} + ET_e + ET_t \\
& W_{,tt} - \beta^2 W_{,xx} - \alpha^2 W_{,zz} - (\alpha^2 - \beta^2) U_{,xz} - \tau_S \beta^2 W_{,xxt} - \tau_P \alpha^2 W_{,zzt} - \\
& - (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) U_{,xzt} = w_{,tt} + ET_t - \beta^2 w_{,xx} - \alpha^2 w_{,zz} - (\alpha^2 - \beta^2) u_{,xz} + \\
& + ET_e - \tau_S \beta^2 w_{,xxt} - \tau_P \alpha^2 w_{,zzt} - (\tau_P \alpha^2 - \tau_S \beta^2) u_{,xzt} + ET_e + ET_t
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
& V_{,tt} - \beta^2 (V_{,xx} + V_{,zz}) - \tau_S \beta^2 (V_{,xxt} + V_{,zzt}) = v_{,tt} + ET_t - \\
& - \beta^2 (v_{,xx} + v_{,zz}) + ET_e - \tau_S \beta^2 (v_{,xxt} + v_{,zzt}) + ET_e + ET_t
\end{aligned} \tag{3.93}$$

de donde $ET = ET_t + ET_e$ y $ET \rightarrow 0$ cuando $((h_i, k_i), t) \rightarrow ((0, 0), 0)$ y su orden es $\mathcal{O}(h_i + k_i) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$.

Para alcanzar una cota para la estabilidad en ambos casos se utiliza el método de von Neumann con las siguientes ondas armónicas

$$\begin{aligned}
u &= a \exp(i(\omega t - \mathbf{k}^T \mathbf{x}_0)) \\
w &= b \exp(i(\omega t - \mathbf{k}^T \mathbf{x}_0)) \\
v &= c \exp(i(\omega t - \mathbf{k}^T \mathbf{x}_0))
\end{aligned} \tag{3.94}$$

donde a , b y c son amplitudes, ω la frecuencia angular, $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ el vector de onda y $\mathbf{x}_0 = (x_0, z_0) \in \text{int}(M)$. Para cada estrella y para cada instante, denotando $\xi = \exp(i\omega \Delta t)$,

$$\begin{aligned}
 u_0^n &= a\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) \\
 u_j^n &= a\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) \\
 w_0^n &= b\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) \\
 w_j^n &= b\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) \\
 v_0^n &= c\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) \\
 v_j^n &= c\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j)
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

Análisis de la estabilidad para las ondas P-SV

Sustituyendo (3.95) en (3.83) se tiene

$$\begin{aligned}
 a\xi^{n+1} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) &= (2 - A_{u_0}^0) a\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) + \\
 &+ (A_{u_0}^{-1} - 1) a\xi^{n-1} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) - A_{u_0}^{-2} a\xi^{n-2} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) + \\
 &+ \sum_{k=0}^2 \left[(-1)^{k+1} A_{u_0}^{-k} b\xi^{n-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) + \right. \\
 &\left. + \sum_{j=1}^N (-1)^k (A_{u_j}^{-k} a\xi^{n-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) + A_{w_j}^{-k} b\xi^{n-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j)) \right] \\
 b\xi^{n+1} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) &= (2 - B_{w_0}^0) b\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) + \\
 &+ (B_{w_0}^{-1} - 1) b\xi^{n-1} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) - B_{w_0}^{-2} b\xi^{n-2} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) + \\
 &+ \sum_{k=0}^2 \left[(-1)^{k+1} B_{w_0}^{-k} a\xi^{n-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) + \right. \\
 &\left. + \sum_{j=1}^N (-1)^k (B_{w_j}^{-k} b\xi^{n-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) + B_{u_j}^{-k} a\xi^{n-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j)) \right] \tag{3.96}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{h}_j = (h_j, l_j) = (x_j - x_0, z_j - z_0)$ y dividiendo la ecuación (3.96) por $\xi^{n-2} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0)$,

$$\begin{aligned}
 a\xi^3 &= (2 - A_{u_0}^0)a\xi^2 + (A_{u_0}^{-1} - 1)a\xi - A_{u_0}^{-2}a + \sum_{k=0}^2 \left[(-1)^{k+1} A_{w_0}^{-k} b\xi^{2-k} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^N (-1)^k (A_{u_j}^{-k} a\xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + A_{w_j}^{-k} b\xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \right] \\
 b\xi^3 &= (2 - B_{w_0}^0)b\xi^2 + (B_{w_0}^{-1} - 1)b\xi - B_{w_0}^{-2}b + \sum_{k=0}^2 \left[(-1)^{k+1} B_{u_0}^{-k} a\xi^{2-k} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^N (-1)^k (B_{w_j}^{-k} b\xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + B_{u_j}^{-k} a\xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \right] \quad (3.97)
 \end{aligned}$$

Se escriben los términos multiplicados por las amplitudes a y b en lados opuestos de cada igualdad

$$\begin{aligned}
 a \left[\xi^3 - (2 - A_{u_0}^0)\xi^2 - (A_{u_0}^{-1} - 1)\xi + A_{u_0}^{-2} - \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N (-1)^k A_{u_j}^{-k} \xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] &= \\
 = b \left[\sum_{k=0}^2 \left((-1)^{k+1} A_{w_0}^{-k} \xi^{2-k} + \sum_{j=1}^N (-1)^k A_{w_j}^{-k} \xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right) \right] & \\
 b \left[\xi^3 - (2 - B_{w_0}^0)\xi^2 - (B_{w_0}^{-1} - 1)\xi + B_{w_0}^{-2} - \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N (-1)^k B_{w_j}^{-k} \xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] &= \\
 = a \left[\sum_{k=0}^2 \left((-1)^{k+1} B_{u_0}^{-k} \xi^{2-k} + \sum_{j=1}^N (-1)^k B_{u_j}^{-k} \xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right) \right] & \quad (3.98)
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $A_{w_j}^{-k} = B_{u_j}^{-k}$ para cada $k \in \{0, 1, 2\}$ y $j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, se denota

$$\Gamma = \xi^3 - (2 - A_{u_0}^0)\xi^2 - (A_{u_0}^{-1} - 1)\xi + A_{u_0}^{-2} - \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N (-1)^k A_{u_j}^{-k} \xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma} &= \xi^3 - (2 - B_{w_0}^0)\xi^2 - (B_{w_0}^{-1} - 1)\xi + B_{w_0}^{-2} - \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N (-1)^k B_{w_j}^{-k} \xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \\ \Phi &= \sum_{k=0}^2 \left[(-1)^{k+1} A_{w_0}^{-k} \xi^{2-k} + \sum_{j=1}^N (-1)^k A_{w_j}^{-k} \xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right]\end{aligned}\quad (3.99)$$

y se llega a

$$\begin{cases} a\Gamma = b\Phi \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\Phi}{\Gamma} \\ b\bar{\Gamma} = a\Phi \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\bar{\Gamma}}{\Phi} \end{cases} \Rightarrow \Gamma\bar{\Gamma} = \Phi^2 \quad (3.100)$$

Puesto que $m_{0xx} = \sum_{j=1}^N m_{jxx}$, $m_{0zz} = \sum_{j=1}^N m_{jzz}$ y $m_{0xz} = \sum_{j=1}^N m_{jxz}$, se tiene $A_{w_0}^{-k} = \sum_{j=1}^N A_{u_j}^{-k}$ y $B_{w_0}^{-k} = \sum_{j=1}^N B_{w_j}^{-k}$ para cada $k \in \{0, 1, 2\}$. Se reescriben las expresiones (3.99) como

$$\begin{aligned}\Gamma &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi + \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N (-1)^k A_{u_j}^{-k} \xi^{2-k} (1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \\ \bar{\Gamma} &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi + \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N (-1)^k B_{w_j}^{-k} \xi^{2-k} (1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \\ \Phi &= \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N (-1)^k A_{w_j}^{-k} \xi^{2-k} (-1 + \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j))\end{aligned}\quad (3.101)$$

Llegado a este punto, se renombran las variables φ_1^* , φ_2^* y φ_3^* , para $\star \in \{P, S\}$, como

$$\begin{aligned}\varphi_1^* &\rightarrow \frac{1}{\Delta t^2} \varphi_1^* \implies \varphi_1^* = 1 + 1,5\tau_\star \Delta t^{-1} \\ \varphi_2^* &\rightarrow \frac{1}{\Delta t^2} \varphi_2^* \implies \varphi_2^* = 2\tau_\star \Delta t^{-1} \\ \varphi_3^* &\rightarrow \frac{1}{\Delta t^2} \varphi_3^* \implies \varphi_3^* = 0,5\tau_\star \Delta t^{-1}\end{aligned}\quad (3.102)$$

lo que, junto con las igualdades,

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{j=1}^N m_{jxx}(1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \\
 Q &= \sum_{j=1}^N m_{jzz}(1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \\
 R &= \sum_{j=1}^N m_{jxz}(-1 + \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j))
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

permite escribir las expresiones (3.101) como

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi + \Delta t^2 \left[(\alpha^2 \varphi_1^P P + \beta^2 \varphi_1^S Q) \xi^2 - \right. \\
 &\quad \left. - (\alpha^2 \varphi_2^P P + \beta^2 \varphi_2^S Q) \xi + (\alpha^2 \varphi_3^P P + \beta^2 \varphi_3^S Q) \right] \\
 \bar{\Gamma} &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi + \Delta t^2 \left[(\alpha^2 \varphi_1^P Q + \beta^2 \varphi_1^S P) \xi^2 - \right. \\
 &\quad \left. - (\alpha^2 \varphi_2^P Q + \beta^2 \varphi_2^S P) \xi + (\alpha^2 \varphi_3^P Q + \beta^2 \varphi_3^S P) \right] \\
 \Phi &= \Delta t^2 \left[(\varphi_1^P \alpha^2 - \varphi_1^S \beta^2) \xi^2 - (\varphi_2^P \alpha^2 - \varphi_2^S \beta^2) \xi + \right. \\
 &\quad \left. + (\varphi_3^P \alpha^2 - \varphi_3^S \beta^2) \right] R
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi + \Delta t^2 \left[\alpha^2 P (\varphi_1^P \xi^2 - \varphi_2^P \xi + \varphi_3^P) + \beta^2 Q (\varphi_1^S \xi^2 - \varphi_2^S \xi + \varphi_3^S) \right] \\
 \bar{\Gamma} &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi + \Delta t^2 \left[\alpha^2 Q (\varphi_1^P \xi^2 - \varphi_2^P \xi + \varphi_3^P) + \beta^2 P (\varphi_1^S \xi^2 - \varphi_2^S \xi + \varphi_3^S) \right] \\
 \Phi &= \Delta t^2 \left[\alpha^2 (\varphi_1^P \xi^2 - \varphi_2^P \xi + \varphi_3^P) + \beta^2 (\varphi_1^S \xi^2 - \varphi_2^S \xi + \varphi_3^S) \right] R
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

Las ecuaciones (3.105) se pueden simplificar a la forma

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= r(\xi) + \Delta t^2 \left(\alpha^2 P p(\xi) + \beta^2 Q q(\xi) \right) \\
 \bar{\Gamma} &= r(\xi) + \Delta t^2 \left(\alpha^2 Q p(\xi) + \beta^2 P q(\xi) \right) \\
 \Phi &= \Delta t^2 \left(\alpha^2 p(\xi) + \beta^2 q(\xi) \right) R
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 r(\xi) &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \\
 p(\xi) &= \varphi_1^P \xi^2 - \varphi_2^P \xi + \varphi_3^P \\
 q(\xi) &= \varphi_1^S \xi^2 - \varphi_2^S \xi + \varphi_3^S
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Se operan las expresiones $p(\xi)$ y $q(\xi)$,

$$\begin{aligned}
 p(\xi) &= \varphi_1^P \xi^2 - \varphi_2^P \xi + \varphi_3^P = \left(1 + \frac{3\tau_P}{2\Delta t} \right) \xi^2 - \frac{2\tau_P}{\Delta t} \xi + \frac{\tau_P}{2\Delta t} = \\
 &= \frac{\tau_P}{2\Delta t} \left(s_P \xi^2 - 4\xi + 1 \right) \\
 q(\xi) &= \varphi_1^S \xi^2 - \varphi_2^S \xi + \varphi_3^S = \left(1 + \frac{3\tau_S}{2\Delta t} \right) \xi^2 - \frac{2\tau_S}{\Delta t} \xi + \frac{\tau_S}{2\Delta t} = \\
 &= \frac{\tau_S}{2\Delta t} \left(s_S \xi^2 - 4\xi + 1 \right)
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 s_P &= 3 + 2 \frac{\Delta t}{\tau_P} \\
 s_S &= 3 + 2 \frac{\Delta t}{\tau_S}
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

Sustituyendo (3.108) en (3.106), sacando factor común $\frac{1}{2\Delta t}$ y renombran-

do las expresiones (3.108)

$$\begin{aligned} p(\xi) \rightarrow \frac{\tau_P}{2\Delta t} p(\xi) &\implies p(\xi) = s_P \xi^2 - 4\xi + 1 \\ q(\xi) \rightarrow \frac{\tau_S}{2\Delta t} q(\xi) &\implies q(\xi) = s_S \xi^2 - 4\xi + 1 \end{aligned} \quad (3.110)$$

las igualdades (3.106) se transforman en

$$\begin{aligned} \Gamma &= r(\xi) + \frac{\Delta t}{2} \left(\tau_P \alpha^2 P p(\xi) + \tau_S \beta^2 Q q(\xi) \right) \\ \bar{\Gamma} &= r(\xi) + \frac{\Delta t}{2} \left(\tau_P \alpha^2 Q p(\xi) + \tau_S \beta^2 P q(\xi) \right) \\ \Phi &= \frac{\Delta t}{2} \left(\tau_P \alpha^2 p(\xi) + \tau_S \beta^2 q(\xi) \right) R \end{aligned} \quad (3.111)$$

Ahora se denota

$$\begin{aligned} M &= \tau_P \alpha^2 P p(\xi) + \tau_S \beta^2 Q q(\xi) \\ \bar{M} &= \tau_P \alpha^2 Q p(\xi) + \tau_S \beta^2 P q(\xi) \\ \bar{\bar{M}} &= \tau_P \alpha^2 p(\xi) + \tau_S \beta^2 q(\xi) \end{aligned} \quad (3.112)$$

Se sustituyen (3.112) en (3.111) y se resuelve la ecuación (3.100) para $r(\xi)$,

$$\begin{aligned} \Gamma \bar{\Gamma} = \Phi^2 &\implies \left(r(\xi) + \frac{\Delta t}{2} M \right) \left(r(\xi) + \frac{\Delta t}{2} \bar{M} \right) = \frac{\Delta t^2}{4} \bar{\bar{M}}^2 R^2 \implies \\ &\implies r^2(\xi) + \frac{\Delta t}{2} (M + \bar{M}) r(\xi) + \frac{\Delta t^2}{4} (M \bar{M} - \bar{\bar{M}}^2 R^2) = 0 \implies \\ &\implies r(\xi) = \frac{-\frac{\Delta t}{2} (M + \bar{M}) \pm \sqrt{\frac{\Delta t^2}{4} (M + \bar{M})^2 - 4 \frac{\Delta t^2}{4} (M \bar{M} - \bar{\bar{M}}^2 R^2)}}{2} = \\ &= \frac{-\frac{\Delta t}{2} (M + \bar{M}) \pm \frac{\Delta t}{2} \sqrt{M^2 + \bar{M}^2 + 2M\bar{M} - 4M\bar{M} + 4\bar{\bar{M}}^2 R^2}}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\Delta t}{4} \left(-(M + \bar{M}) \pm \sqrt{(M - \bar{M})^2 + 4\bar{M}^2 R^2} \right) \quad (3.113)$$

quedando

$$r(\xi) = \frac{\Delta t}{4} \left(-(M + \bar{M}) \pm \sqrt{(M - \bar{M})^2 + 4\bar{M}^2 R^2} \right) \quad (3.114)$$

Se va a acotar el lado derecho en (3.114) acotando el lado izquierdo. Para ello se consideran $x = \cos \omega \Delta t$ y $z = \sin \omega \Delta t$ y $\xi = x + iz$

$$\begin{aligned} |r(\xi)| &= |(x + iz)^3 - 2(x + iz)^2 + x + iz| = |x^3 + i3x^2z - 3x(1 - x^2) - \\ &\quad - iz(1 - x^2) - 2x^2 + 2(1 - x^2) - i4xz + x + iz| = 2|2x^3 - 2x^2 - x + \\ &\quad + 1 + i2z(x^2 - x)| = 2 \left((2x^3 - 2x^2 - x + 1)^2 + 4z^2(x^2 - x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \left(x^2 - 2x + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = 2(1 - x) \end{aligned} \quad (3.115)$$

de donde se sigue que $0 \leq |r(\xi)| \leq 4$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\Delta t}{4} \left(-(M + \bar{M}) \pm \sqrt{(M - \bar{M})^2 + 4\bar{M}^2 R^2} \right) \right| \leq 4 \implies \\ \implies 0 &\leq \Delta t \leq \left| \frac{16}{-(M + \bar{M}) \pm \sqrt{(M - \bar{M})^2 + 4\bar{M}^2 R^2}} \right| \end{aligned} \quad (3.116)$$

Para tomar la menor cota de Δt , se maximiza el denominador de (3.116) aplicando la desigualdad triangular y la desigualdad $\sqrt{A + B} \leq \sqrt{A} + \sqrt{B}$ para $A, B \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left| -(M + \bar{M}) \pm \sqrt{(M - \bar{M})^2 + 4\bar{M}^2 R^2} \right| &\leq |M + \bar{M}| + \\ &+ \left| \sqrt{(M - \bar{M})^2 + 4\bar{M}^2 R^2} \right| \leq |M| + |\bar{M}| + |M - \bar{M}| + \end{aligned}$$

$$+ 2|\bar{\bar{M}}R| \leq 2\left(|M| + |\bar{M}| + |\bar{\bar{M}}||R|\right) \quad (3.117)$$

Sustituyendo M , \bar{M} y $\bar{\bar{M}}$ por su valor, dado en (3.112), se puede continuar aplicando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} 2\left(|M| + |\bar{M}| + |\bar{\bar{M}}||R|\right) &= 2\left(|\tau_P\alpha^2 Pp(\xi) + \tau_S\beta^2 Qq(\xi)| + |\tau_P\alpha^2 Qp(\xi) + \right. \\ &+ \left. \tau_S\beta^2 Pq(\xi)| + |\tau_P\alpha^2 p(\xi) + \tau_S\beta^2 q(\xi)||R|\right) \leq 2\left(\tau_P\alpha^2 |P||p(\xi)| + \right. \\ &+ \left. \tau_S\beta^2 |Q||q(\xi)| + \tau_P\alpha^2 |Q||p(\xi)| + \tau_S\beta^2 |P||q(\xi)| + \tau_P\alpha^2 |R||p(\xi)| + \right. \\ &+ \left. \tau_S\beta^2 |R||q(\xi)|\right) = 2\left(\tau_P\alpha^2 |p(\xi)|(|P| + |Q| + |R|) + \tau_S\beta^2 |q(\xi)|(|P| + \right. \\ &+ \left. |Q| + |R|)\right) = 2\left(|P| + |Q| + |R|\right)\left(\tau_P\alpha^2 |p(\xi)| + \tau_S\beta^2 |q(\xi)|\right) \quad (3.118) \end{aligned}$$

Ahora se va a maximizar $|P|$, $|Q|$, $|R|$, $|p(\xi)|$ y $|q(\xi)|$. Por la simetría de $|P|$, $|Q|$ y $|R|$, se muestra sólo el desarrollo para $|P|$

$$\begin{aligned} |P| &= \left| \sum_{j=1}^N m_{jxx}(1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \right| = \left| \sum_{j=1}^N m_{jxx}(1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) + \right. \\ &+ \left. i \sum_{j=1}^N m_{jxx} \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right| = \left[\left(\sum_{j=1}^N m_{jxx}(1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\sum_{j=1}^N m_{jxx} \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(4\bar{m}_{0xx}^2 + \bar{m}_{0xx}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}\bar{m}_{0xx} \quad (3.119) \end{aligned}$$

siendo $\bar{m}_{0xx} = \sum_{j=1}^N |m_{jxx}|$. Del mismo modo, denotando $\bar{m}_{0zz} = \sum_{j=1}^N |m_{jzz}|$

y $\bar{m}_{0xz} = \sum_{j=1}^N |m_{jxz}|$ se tiene

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

$$\begin{aligned}
 |P| &= \sqrt{5}\bar{m}_{0xx} \\
 |Q| &= \sqrt{5}\bar{m}_{0zz} \\
 |R| &= \sqrt{5}\bar{m}_{0xz}
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Por la simetría de $|p(\xi)|$ y $|q(\xi)|$, se muestra sólo el desarrollo para $|p(\xi)|$ y para ello se consideran $x = \cos \omega \Delta t$ y $z = \sin \omega \Delta t$ y $\xi = x + iz$

$$\begin{aligned}
 |p(\xi)| &= |s_P \xi^2 - 4\xi + 1| = |s_P(x + iz)^2 - 4(x + iz) + 1| = |s_P(x^2 - (1 - x^2) + \\
 &+ i2xz) - 4x - i4z + 1| = |2s_P x^2 - 4x + 1 - s_P + i2z(s_P x - 2)| = \left((2s_P x^2 - \right. \\
 &- 4x + 1 - s_P)^2 + 4(1 - x^2)(s_P x - 2)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \left(4s_P x^2 - 8(s_P + 1)x + s_P^2 - \right. \\
 &\left. - 2s_P + 17 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

El radicando de (3.121) es una parábola convexa decreciente y positiva para $-1 \leq x \leq 1$, pues su vértice se encuentra en $V_x = \frac{8(s_P + 1)}{8s_P} = 1 + \frac{1}{s_P} > 1$ y para $x = 1$ se tiene $4s_P - 8(s_P + 1) + s_P^2 - 2s_P + 17 = s_P^2 - 6s_P + 9 = (s_P - 3)^2 > 0$. El máximo del radicando se alcanza por tanto en $x = -1$ y el módulo vale $|p(-1)| = \sqrt{s_P^2 + 10s_P + 25} = \sqrt{(s_P + 5)^2} = s_P + 5$. Por tanto, los valores máximos de $|p(\xi)|$ y $|q(\xi)|$ son

$$\begin{aligned}
 |p(\xi)| &\leq s_P + 5 \\
 |q(\xi)| &\leq s_S + 5
 \end{aligned} \tag{3.122}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en (3.120) y en (3.122) en la expresión obtenida en (3.118) y sustituyendo s_P y s_S por su valor, dado en (3.109), se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 & 2\left(|P| + |Q| + |R|\right)\left(\tau_P\alpha^2|p(\xi)| + \tau_S\beta^2|q(\xi)|\right) \leq 2\sqrt{5}\left(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz} + \bar{m}_{0xz}\right) \cdot \\
 & \cdot \left[\tau_P\alpha^2\left(8 + 2\frac{\Delta t}{\tau_P}\right) + \tau_S\beta^2\left(8 + 2\frac{\Delta t}{\tau_S}\right)\right] = 4\sqrt{5}\left(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz} + \bar{m}_{0xz}\right) \cdot \\
 & \cdot \left(\alpha^2\Delta t + 4\tau_P\alpha^2 + \beta^2\Delta t + 4\tau_S\beta^2\right) = 4\sqrt{5}\left(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz} + \bar{m}_{0xz}\right) \cdot \\
 & \cdot \left((\alpha^2 + \beta^2)\Delta t + 4(\tau_P\alpha^2 + \tau_S\beta^2)\right) \tag{3.123}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión (3.123) en (3.116) se tiene

$$\begin{aligned}
 0 \leq \Delta t \leq & \frac{16}{4\sqrt{5}\left(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz} + \bar{m}_{0xz}\right)\left((\alpha^2 + \beta^2)\Delta t + 4(\tau_P\alpha^2 + \tau_S\beta^2)\right)} \leq \\
 \leq & \left| \frac{16}{-(M + \bar{M}) \pm \sqrt{(M - \bar{M})^2 + 4\bar{M}^2R^2}} \right| \tag{3.124}
 \end{aligned}$$

Simplificando y operando, se llega a

$$(\alpha^2 + \beta^2)\Delta t^2 + 4(\tau_P\alpha^2 + \tau_S\beta^2)\Delta t - \frac{4}{\sqrt{5}(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz} + \bar{m}_{0xz})} \leq 0 \tag{3.125}$$

Se resuelve la inecuación de segundo grado convexa para Δt

$$\Delta t = \frac{-4(\tau_P\alpha^2 + \tau_S\beta^2) \pm \sqrt{16(\tau_P\alpha^2 + \tau_S\beta^2)^2 + \frac{16}{\sqrt{5}(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz} + \bar{m}_{0xz})}}}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \tag{3.126}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \Delta t = & -2 \frac{\tau_P \alpha^2 + \tau_S \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \pm \\ & \pm 2 \sqrt{\left(\frac{\tau_P \alpha^2 + \tau_S \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}(\alpha^2 + \beta^2)(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz} + \bar{m}_{0xz})}} \end{aligned} \quad (3.127)$$

Teniendo en cuenta que $\Delta t \geq 0$, la inecuación (3.125) es cierta siempre que

$$\begin{aligned} \Delta t \leq & -2 \frac{\tau_P \alpha^2 + \tau_S \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \\ & + 2 \sqrt{\left(\frac{\tau_P \alpha^2 + \tau_S \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}(\alpha^2 + \beta^2)(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz} + \bar{m}_{0xz})}} \end{aligned} \quad (3.128)$$

en cuyo caso el esquema para ondas P-SV en medio viscoelástico (3.83) es estable para la estrella considerada.

Por tanto, el esquema en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de onda P-SV en medio viscoelástico es estable si lo es para todas las estrellas, es decir, si lo es para la estrella con suma de los coeficientes del nodo central máxima.

Análisis de la estabilidad para las ondas SH

Sustituyendo (3.95) en (3.89) se tiene

$$\begin{aligned} c\xi^{n+1} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) = & (2 - C_{v_0}^0) c\xi^n \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) + \\ & + (C_{v_0}^{-1} - 1) c\xi^{n-1} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) - C_{v_0}^{-2} c\xi^{n-2} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0) + \\ & + \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N (-1)^k C_{v_j}^{-k} c\xi^{n-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (3.129)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{h}_j = (h_j, l_j) = (x_j - x_0, z_j - z_0)$ y dividiendo la

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

ecuación (3.129) por $\xi^{n-2} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0)$,

$$\begin{aligned} \xi^3 &= (2 - C_{v_0}^0)\xi^2 + (C_{v_0}^{-1} - 1)\xi - C_{v_0}^{-2} + \\ &+ \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N (-1)^k C_{v_j}^{-k} \xi^{2-k} \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \end{aligned} \quad (3.130)$$

Puesto que $m_{0xx} = \sum_{j=1}^N m_{jxx}$ y $m_{0zz} = \sum_{j=1}^N m_{jzz}$, se tiene $C_{v_0}^{-k} = \sum_{j=1}^N C_{v_j}^{-k}$ para cada $k \in \{0, 1, 2\}$. Se reescribe la ecuación (3.130) como

$$\xi^3 + \Phi_1 \xi^2 + \Phi_2 \xi + \Phi_3 = 0 \quad (3.131)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -2 + \sum_{j=1}^N \varphi_1(m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \\ \Phi_2 &= 1 - \sum_{j=1}^N \varphi_2(m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \\ \Phi_3 &= \sum_{j=1}^N \varphi_3(m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \end{aligned} \quad (3.132)$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \beta^2 \Delta t^2 + \frac{3}{2} \tau \beta^2 \Delta t \\ \varphi_2 &= 2\beta^2 \tau \Delta t \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2} \beta^2 \tau \Delta t \end{aligned} \quad (3.133)$$

Sean ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 las soluciones de la ecuación (3.131). Aplicando las fórmulas de Cardano-Vieta se tiene

$$\begin{aligned}
 -\Phi_1 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\
 \Phi_2 &= \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 \\
 -\Phi_3 &= \xi_1\xi_2\xi_3
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Tomando módulos y teniendo en cuenta que $|\xi_i| \leq 1$, $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned}
 |\Phi_1| &= |\xi_1 + \xi_2 + \xi_3| \leq |\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| \leq 3 \\
 |\Phi_2| &= |\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3| \leq |\xi_1\xi_2| + |\xi_1\xi_3| + |\xi_2\xi_3| \leq \\
 &\leq |\xi_1||\xi_2| + |\xi_1||\xi_3| + |\xi_2||\xi_3| \leq 3 \\
 |\Phi_3| &= |\xi_1\xi_2\xi_3| = |\xi_1||\xi_2||\xi_3| \leq 1
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
 |\Phi_1|^2 &\leq 9 \\
 |\Phi_2|^2 &\leq 9 \\
 |\Phi_3|^2 &\leq 1
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

Se acotan los módulos al cuadrado de los coeficientes (3.132)

$$\begin{aligned}
 |\Phi_1|^2 &= \left| -2 + \sum_{j=1}^N \varphi_1(m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) + i \sum_{j=1}^N \varphi_1(m_{jxx} + \right. \\
 &\quad \left. + m_{jzz}) \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right|^2 = \left(-2 + \sum_{j=1}^N \varphi_1(m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \right)^2 + \\
 &\quad + \left(\sum_{j=1}^N \varphi_1(m_{jxx} + m_{jzz}) \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right)^2 \leq (2 + 2\varphi_1(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}))^2 + \\
 &\quad + \varphi_1^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 = 5(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 \varphi_1^2 + 8(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})\varphi_1 + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\Phi_2|^2 &= \left| 1 - \sum_{j=1}^N \varphi_2(m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) + i \sum_{j=1}^N \varphi_2(m_{jxx} + \right. \\
 &\quad \left. + m_{jzz}) \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right|^2 = \left(1 - \sum_{j=1}^N \varphi_2(m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \right)^2 + \\
 &\quad + \left(\sum_{j=1}^N \varphi_2(m_{jxx} + m_{jzz}) \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right)^2 \leq (1 + 2\varphi_2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}))^2 + \\
 &\quad + \varphi_2^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 = 5(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 \varphi_2^2 + 4(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})\varphi_2 + 1 \\
 |\Phi_3|^2 &= |\varphi_3|^2 \left| \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) + i \sum_{j=1}^N (m_{jxx} + \right. \\
 &\quad \left. + m_{jzz}) \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right|^2 = |\varphi_3|^2 \left[\left(\sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz})(1 - \cos(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{j=1}^N (m_{jxx} + m_{jzz}) \sin(\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right)^2 \right] \leq 3(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 \varphi_3^2 \quad (3.137)
 \end{aligned}$$

$$\text{siendo } \bar{m}_{0xx} = \sum_{j=1}^N |m_{jxx}| \text{ y } \bar{m}_{0zz} = \sum_{j=1}^N |m_{jzz}|.$$

Imponiendo las restricciones de (3.136) a (3.137) se llega a un sistema de tres inecuaciones de cuarto grado para el incremento temporal

$$\begin{cases}
 5(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 \varphi_1^2 + 8(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})\varphi_1 - 5 \leq 0 \\
 5(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 \varphi_2^2 + 4(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})\varphi_2 - 8 \leq 0 \\
 3(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 \varphi_3^2 - 1 \leq 0
 \end{cases} \quad (3.138)$$

Se resuelven cada una de las inecuaciones del sistema (3.138).

$$\text{Inecuación } |\Phi_1|^2 \leq 9$$

$$\begin{aligned}
 5(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 \varphi_1^2 + 8(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})\varphi_1 - 5 = 0 &\implies \\
 \implies \varphi_1 = \frac{-8(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}) \pm \sqrt{64(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 + 100(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2}}{10(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2} &\implies
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

$$\implies \varphi_1 = \frac{-8 \pm \sqrt{164}}{10(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \quad (3.139)$$

de donde se sigue que $5(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 \varphi_1^2 + 8(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}) \varphi_1 - 5 \leq 0$ si

$$\frac{-8 - \sqrt{164}}{10(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \leq \varphi_1 \leq \frac{-8 + \sqrt{164}}{10(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \quad (3.140)$$

y puesto que $\varphi_1 \geq 0$, se tiene

$$0 \leq \varphi_1 \leq \frac{-8 + \sqrt{164}}{10(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \quad (3.141)$$

Sustituyendo φ_1 en (3.141) por su valor dado en (3.133) se obtiene una inecuación de segundo grado para el incremento temporal

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta^2 \Delta t^2 + \frac{3}{2} \beta^2 \tau \Delta t &\leq \frac{-8 + \sqrt{164}}{10(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \implies \\ \implies \beta^2 \Delta t^2 + \frac{3}{2} \beta^2 \tau \Delta t + \frac{8 - \sqrt{164}}{10(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.142)$$

Se resuelve ahora esta inecuación

$$\begin{aligned} \beta^2 \Delta t^2 + \frac{3}{2} \beta^2 \tau \Delta t + \frac{8 - \sqrt{164}}{10(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} = 0 \implies \\ \implies \Delta t = \frac{-\frac{3}{2} \beta^2 \tau \pm \sqrt{\frac{9}{4} \beta^4 \tau^2 + \frac{2}{5} \beta^2 \left(\frac{\sqrt{164} - 8}{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}} \right)}}{2\beta^2} \end{aligned} \quad (3.143)$$

luego $\beta^2 \Delta t^2 + \frac{3}{2} \beta^2 \tau \Delta t + \frac{8 - \sqrt{164}}{10(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \leq 0$ si

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{-\frac{3}{2} \beta^2 \tau \pm \sqrt{\frac{9}{4} \beta^4 \tau^2 + \frac{2}{5} \beta^2 \left(\frac{\sqrt{164} - 8}{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}} \right)}}{2\beta^2} \quad (3.144)$$

obteniendo así una cota temporal para la primera inecuación.

Inecuación $|\Phi_2|^2 \leq 9$

Se sustituye φ_2 en la segunda inecuación de (3.138) por su valor dado en (3.136)

$$20\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2\Delta t^2 + 8\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})\Delta t - 8 \leq 0 \quad (3.145)$$

y se resuelve

$$\begin{aligned} 20\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2\Delta t^2 + 8\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})\Delta t - 8 = 0 &\implies \\ \implies \Delta t = \frac{-8\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})}{40\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2} \pm & \\ \pm \frac{\sqrt{64\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 + 640\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2}}{40\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2} = & \quad (3.146) \\ = \frac{\pm\sqrt{11} - 1}{5\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} & \end{aligned}$$

y, puesto que $\Delta t \geq 0$, se obtiene así una cota temporal para la segunda inecuación del sistema (3.138)

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{\sqrt{11} - 1}{5\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \quad (3.147)$$

Inecuación $|\Phi_3|^2 \leq 1$

Se sustituye φ_3 en la tercera inecuación de (3.138) por su valor dado en (3.136) y se resuelve

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2\Delta t^2 - 1 \leq 0 &\implies \\ \implies -\sqrt{\frac{4}{3\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2}} \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{4}{3\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2}} & \quad (3.148) \end{aligned}$$

y, como $\Delta t \geq 0$, la cota temporal que se obtiene es

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{3}\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \quad (3.149)$$

En resumen, el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 5(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2\varphi_1^2 + 8(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})\varphi_1 - 5 \leq 0 \\ 5(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2\varphi_2^2 + 4(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})\varphi_2 - 8 \leq 0 \\ 3(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2\varphi_3^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \quad (3.150)$$

lleva a

$$\begin{cases} \Delta t \leq \frac{-\frac{3}{2}\beta^2\tau + \sqrt{\frac{9}{4}\beta^4\tau^2 + \frac{2}{5}\beta^2\left(\frac{\sqrt{164}-8}{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}}\right)}}{2\beta^2} \\ \Delta t \leq \frac{\sqrt{11}-1}{5\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \\ \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{3}\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \end{cases} \quad (3.151)$$

Es elemental comprobar que la segunda inecuación en (3.151) es más restrictiva que la tercera inecuación por lo que se puede reducir el sistema (3.151) a

$$\begin{cases} \Delta t \leq \frac{-\frac{3}{2}\beta^2\tau + \sqrt{\frac{9}{4}\beta^4\tau^2 + \frac{2}{5}\beta^2\left(\frac{\sqrt{164}-8}{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}}\right)}}{2\beta^2} \\ \Delta t \leq \frac{\sqrt{11}-1}{5\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \end{cases} \quad (3.152)$$

Se van a comparar ambas desigualdades para hallar la más restrictiva. Para ello, se divide la primera inecuación de (3.152) entre la segunda y se acota la expresión resultante

$$\frac{-\frac{3}{2}\beta^2\tau + \sqrt{\frac{9}{4}\beta^4\tau^2 + \frac{2}{5}\beta^2\left(\frac{\sqrt{164}-8}{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}}\right)}}{\frac{2\beta^2}{\sqrt{11}-1}} = \frac{5\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})}{\sqrt{11}-1} \quad (3.153)$$

Operando

$$\begin{aligned} & \frac{-\frac{3}{2}\beta^2\tau + \sqrt{\frac{9}{4}\beta^4\tau^2 + \frac{2}{5}\beta^2\left(\frac{\sqrt{164}-8}{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}}\right)}}{\frac{2\beta^2}{\sqrt{11}-1}} = \\ & \frac{-3\beta^2\tau}{4\beta^2} + \frac{\sqrt{45\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}) + 8\beta^2(\sqrt{164}-8)}}{4\beta^2\sqrt{5}\sqrt{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}}} = \\ & \frac{-3\beta^2\tau}{4\beta^2} + \frac{\sqrt{45\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}) + 8\beta^2(\sqrt{164}-8)}}{4\beta^2\sqrt{5}\sqrt{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}}} = \\ & = \left(-3\beta^2\tau\sqrt{5}\sqrt{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}} + \sqrt{45\beta^4\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}) + 8\beta^2(\sqrt{164}-8)} \right) \cdot \\ & \cdot \frac{5\beta^2\tau(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})}{(\sqrt{11}-1)4\beta^2\sqrt{5}\sqrt{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}}} = \frac{\sqrt{5}}{4(\sqrt{11}-1)} \cdot \left(-\sqrt{45}\beta^2\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}) + \right. \\ & \left. + \sqrt{45\beta^4\tau^4(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})^2 + 8(\sqrt{164}-8)\beta^2\tau^2(\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz})} \right) \end{aligned} \quad (3.154)$$

Por comodidad, se establecen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{5}}{4(\sqrt{11}-1)} \\ q &= \sqrt{45} \\ r &= 8(\sqrt{164}-8) \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

$$x = \beta^2 \tau^2 (\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}) \quad (3.155)$$

y se considera la función $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = p(-qx + \sqrt{q^2x^2 + rx}) \quad (3.156)$$

Esta función es continua, creciente, positiva y tiene una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$. Esto permite acotar la función y, por tanto, el cociente (3.153).

Es continua pues $q^2x^2 + rx > 0$ en \mathbb{R}^+ . Es creciente ya que su derivada es positiva,

$$g'(x) = p\left(-q + \frac{2q^2x + r}{2\sqrt{q^2x^2 + rx}}\right) > 0 \quad (3.157)$$

pues

$$\begin{aligned} \frac{2q^2x + r}{2\sqrt{q^2x^2 + rx}} - q &= \frac{2q^2x + r - 2q\sqrt{q^2x^2 + rx}}{2\sqrt{q^2x^2 + rx}} = \\ &= \frac{\sqrt{(2q^2x + r)^2} - \sqrt{4q^4x^2 + 4rq^2x}}{2\sqrt{q^2x^2 + rx}} = \frac{\sqrt{4q^4x + 4rq^2x + r^2} - \sqrt{4q^4x^2 + 4rq^2x}}{2\sqrt{q^2x^2 + rx}} > 0 \end{aligned} \quad (3.158)$$

La función es positiva ya que $\sqrt{q^2x^2 + rx} - qx = \sqrt{q^2x^2 + rx} - \sqrt{q^2x^2} > 0$.

La función está acotada y su supremo es el valor de su asíntota horizontal

$$\begin{aligned} \sup(g) &= \lim_{x \rightarrow \infty} p(-qx + \sqrt{q^2x^2 + rx}) = \\ &= p \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{q^2x^2 + rx} + qx)(\sqrt{q^2x^2 + rx} - qx)}{\sqrt{q^2x^2 + rx} + qx} = \\ &= p \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q^2x^2 + rx - q^2x^2}{\sqrt{q^2x^2 + rx} + qx} = p \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r}{\sqrt{q^2 + \frac{r}{x}} + q} = \end{aligned}$$

$$= \frac{pr}{2q} = \frac{\sqrt{164} - 8}{3\sqrt{11} - 3} < 1 \quad (3.159)$$

El cociente (3.153) es siempre menor que 1, luego el numerador es siempre menor que el denominador, por lo que la primera inecuación del sistema (3.152) es la más restrictiva.

Finalmente, el esquema es estable para la estrella considerada si

$$\Delta t \leq \frac{-\frac{3}{2}\beta^2\tau + \sqrt{\frac{9}{4}\beta^4\tau^2 + \frac{2}{5}\beta^2\left(\frac{\sqrt{164} - 8}{\bar{m}_{0xx} + \bar{m}_{0zz}}\right)}}{2\beta^2} \quad (3.160)$$

Por tanto, el esquema en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de onda SH en medio viscoelástico es estable si lo es para todas las estrellas, es decir, si lo es para la estrella con suma de los coeficientes del nodo central máxima.

Puesto que los esquemas para ondas P-SV y para ondas SH son consistentes y estables en los rangos establecidos, se puede asegurar que los esquemas son convergentes en virtud del teorema de Lax.

3.5.3. Dispersión numérica

Dispersión numérica de las ondas P-SV

En la igualdad (3.114) se sustituyen M , \bar{M} y $\bar{\bar{M}}$ por su valor (3.112), se opera y se extrae factor común

$$r(\xi) = -\frac{\Delta t}{4} \left(\tau_P \alpha^2 p(\xi) + \tau_S \beta^2 q(\xi) \right) \left(P + Q + \sqrt{(P - Q)^2 + 4R^2} \right) \quad (3.161)$$

Denotando

$$\Upsilon = \frac{\Delta t}{4} \left(P + Q + \sqrt{(P - Q)^2 + 4R^2} \right) \quad (3.162)$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

y sustituyendo en (3.161) el valor de $r(\xi)$ dado en (3.107), los valores de $p(\xi)$ y $q(\xi)$ dados en (3.110) y operando, se obtiene la ecuación cúbica

$$\xi^3 + \left(\Upsilon(\tau_P \alpha^2 s_P + \tau_S \beta^2 s_S) - 2 \right) \xi^2 + \left(1 - 4\Upsilon(\tau_P \alpha^2 + \tau_S \beta^2) \right) \xi - \Upsilon(\tau_P \alpha^2 + \tau_S \beta^2) = 0 \quad (3.163)$$

La notación

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Upsilon(\tau_P \alpha^2 s_P + \tau_S \beta^2 s_S) - 2 \\ \Phi_2 &= 1 - 4\Upsilon(\tau_P \alpha^2 + \tau_S \beta^2) \\ \Phi_3 &= -\Upsilon(\tau_P \alpha^2 + \tau_S \beta^2) \end{aligned} \quad (3.164)$$

permite escribir la ecuación (3.163) como

$$\xi^3 + \Phi_1 \xi^2 + \Phi_2 \xi + \Phi_3 = 0 \quad (3.165)$$

Si se denota

$$\begin{cases} \Delta_0 = \Phi_1^2 - 3\Phi_2 \\ \Delta_1 = 2\Phi_1^3 - 9\Phi_1\Phi_2 + 27\Phi_3 \\ \Delta_2 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \end{cases} \quad (3.166)$$

la solución de (3.165) es

$$\xi_k = -\frac{1}{3} \left(\Phi_1 + \zeta^k \Delta_2 + \frac{\Delta_0}{\zeta^k \Delta_2} \right) \quad (3.167)$$

siendo $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $k \in \{0, 1, 2\}$.

De $\xi_k = \exp(i\omega_k \Delta t)$ se sigue que $\omega_k = \frac{Arg(\xi_k)}{\Delta t}$ y

$$\omega_{GFD} = \min_{k \in \{0,1,2\}} |\omega_k - \omega| = \frac{Arg(\xi)}{\Delta t} \quad (3.168)$$

Por tanto, para analizar la dispersión debida a la discretización de las ondas P-SV se calcula

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)} \left| \frac{\alpha_{GFD} - \alpha}{\alpha} \right| = \max_{\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)} \left| \frac{\lambda_P \text{Arg}(\xi)}{2\alpha\pi\Delta t} - 1 \right| \\ \max_{\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)} \left| \frac{\beta_{GFD} - \beta}{\beta} \right| = \max_{\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)} \left| \frac{\lambda_{SV} \text{Arg}(\xi)}{2\beta\pi\Delta t} - 1 \right| \end{cases} \quad (3.169)$$

donde λ_P y λ_{SH} son las longitudes de onda de las ondas P y SV, respectivamente.

Estos valores permiten relacionar las velocidades reales de las ondas P y S con las velocidades obtenidas por la aplicación del GFD. Cuanto más próximo a cero estén estos valores, menor será la dispersión producida como consecuencia de la discretización.

Dispersión numérica de las ondas SH

Si se denota

$$\begin{cases} \Delta_0 = \Phi_1^2 - 3\Phi_2 \\ \Delta_1 = 2\Phi_1^3 - 9\Phi_1\Phi_2 + 27\Phi_3 \\ \Delta_2 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \end{cases} \quad (3.170)$$

la solución de (3.131) es

$$\xi_k = -\frac{1}{3} \left(\Phi_1 + \zeta^k \Delta_2 + \frac{\Delta_0}{\zeta^k \Delta_2} \right) \quad (3.171)$$

siendo $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $k \in \{0, 1, 2\}$.

De $\xi_k = \exp(i\omega_k \Delta t)$ se sigue que $\omega_k = \frac{\text{Arg}(\xi_k)}{\Delta t}$ y

$$\omega_{GFD} = \min_{k \in \{0,1,2\}} |\omega_k - \omega| = \frac{\text{Arg}(\xi)}{\Delta t} \quad (3.172)$$

Por tanto, para analizar la dispersión debida a la discretización de las

ondas SH se calcula

$$\max_{\mathbf{x}_0 \in \text{int}(M)} \left| \frac{\beta_{GFD} - \beta}{\beta} \right| = \left| \frac{\lambda_{SH} \text{Arg}(\xi)}{2\beta\pi\Delta t} - 1 \right| \quad (3.173)$$

donde λ_{SH} es la longitud de onda de la onda SH.

Como antes, cuanto más próximo a cero sea el resultado, menor dispersión se producirá.

3.6. Condiciones de contorno

Las condiciones en desplazamiento son condiciones Dirichlet y basta sustituir el valor de los desplazamientos en el contorno por su valor real. En el caso de utilizar esquemas heterogéneos, si un nodo del contorno B coincide con la interfase, entonces se cambia el nodo de la interfase por dos nodos B_1 y B_2 en los que los valores de los parámetros del medio son los valores del medio en que se encuentran, véase la figura 3.2.

En el caso de las ondas P-SV se tiene

$$U(\mathbf{x}, t) = \bar{U}(\mathbf{x}, t) \quad \text{y} \quad W(\mathbf{x}, t) = \bar{W}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.174)$$

y en el caso de las ondas SH

$$V(\mathbf{x}, t) = \bar{V}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.175)$$

Las condiciones en tensiones son condiciones Neumann y para tratarlas se procede como sigue. Por cada nodo con condición de contorno Neumann se añade un nuevo nodo en el exterior del dominio considerado, en la dirección de la normal y a una distancia la mitad del paso de referencia, figura 3.4.

Las condiciones en tensiones vienen dadas por

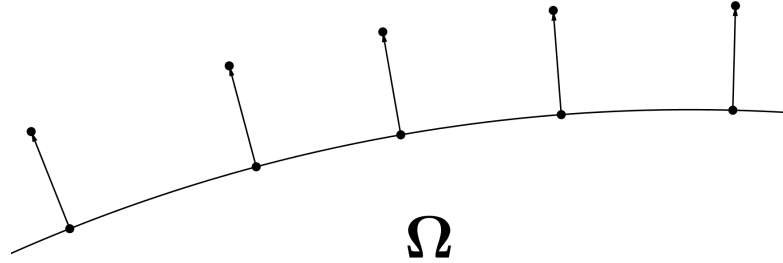


Figura 3.4: Contorno con condición Neumann. Se añaden tantos nodos en el exterior del dominio como nodos con condición Neumann tenga el problema.

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xz}n_z \\ T_z &= \sigma_{xz}n_x + \sigma_{zz}n_z \end{aligned} \quad (3.176)$$

para las ondas P-SV y

$$T_y = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yz}n_z \quad (3.177)$$

para las ondas SH.

En ambos casos, $\mathbf{T} = (T_x, T_y, T_z)^T$ es el vector tensión y $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ es la normal en el punto de aplicación.

Para este tipo de condiciones se distinguen dos casos, el elástico y el viscoelástico.

En el caso elástico, la ley de Hooke establece

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)U_{,x} + \lambda W_{,z} \\
 \sigma_{xz} &= \mu(W_{,z} + U_{,x}) \\
 \sigma_{zz} &= \lambda U_{,x} + (\lambda + 2\mu)W_{,z}
 \end{aligned} \tag{3.178}$$

para las ondas P-SV y

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} &= \mu V_{,x} \\
 \sigma_{yz} &= \mu V_{,z}
 \end{aligned} \tag{3.179}$$

para las ondas SH.

Sustituyendo en (3.176) y (3.177) la ley de Hooke (3.178) y (3.179) y tomando en éstas últimas las aproximaciones lineales obtenidas para las derivadas parciales primeras, obtenidas en (2.17), se llega a

$$\begin{aligned}
 T_x &= \left[(\lambda + 2\mu) \left(-m_{0x}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}u_i^n \right) + \lambda \left(-m_{0z}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}w_i^n \right) \right] n_x + \\
 &+ \mu \left[-m_{0z}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}u_i^n - m_{0x}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}w_i^n \right] n_z \\
 T_z &= \mu \left[-m_{0z}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}u_i^n - m_{0x}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}w_i^n \right] n_x + \\
 &+ \left[(\lambda + 2\mu) \left(-m_{0z}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}w_i^n \right) + \lambda \left(-m_{0x}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}u_i^n \right) \right] n_z
 \end{aligned} \tag{3.180}$$

para las ondas P-SV y

$$T_y = \mu \left[\left(-m_{0x}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}v_i^n \right) n_x + \left(-m_{0z}v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}v_i^n \right) n_z \right] \tag{3.181}$$

para las ondas SH.

Para cada estrella, se denota por J al conjunto de índices de nodos que no están en el dominio, los nodos añadidos, y se denota por K al conjunto de índices de nodos que están en el dominio. De esta manera, se establecen dos ecuaciones lineales para los desplazamientos u_j^n y w_j^n en el caso de las ondas P-SV

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \in J} \left[\left((\lambda + 2\mu)n_x m_{jx} + \mu n_z m_{jz} \right) u_j^n + \left(\lambda n_x m_{jz} + \mu n_z m_{jx} \right) w_j^n \right] = \\
 & = T_x + \left((\lambda + 2\mu)n_x m_{0x} + \mu n_z m_{0z} \right) u_0^n + \left(\lambda n_x m_{0z} + \mu n_z m_{0x} \right) w_0^n - \\
 & - \sum_{k \in K} \left[\left((\lambda + 2\mu)n_x m_{kx} + \mu n_z m_{kz} \right) u_k^n + \left(\lambda n_x m_{kz} + \mu n_z m_{kx} \right) w_k^n \right] \\
 & \sum_{j \in J} \left[\left(\mu n_x m_{jz} + \lambda n_z m_{jx} \right) u_j^n + \left(\mu n_x m_{jx} + (\lambda + 2\mu)n_z m_{jz} \right) w_j^n \right] = \\
 & = T_z + \left(\mu n_x m_{0z} + \lambda n_z m_{0x} \right) u_0^n + \left(\mu n_x m_{0x} + (\lambda + 2\mu)n_z m_{0z} \right) w_0^n - \\
 & - \sum_{k \in K} \left[\left(\mu n_x m_{kz} + \lambda n_z m_{kx} \right) u_k^n + \left(\mu n_x m_{kx} + (\lambda + 2\mu)n_z m_{kz} \right) w_k^n \right]
 \end{aligned} \tag{3.182}$$

y una ecuación lineal para los desplazamientos v_j en el caso de las ondas SH

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \in J} \mu (n_x m_{jx} + n_z m_{jz}) v_j^n = T_y + \mu (n_x m_{0x} + n_z m_{0z}) v_0^n - \\
 & - \sum_{k \in K} \mu (n_x m_{kx} + n_z m_{kz}) v_k^n
 \end{aligned} \tag{3.183}$$

Por cada nodo con condición de contorno Neumann, se establecen dos ecuaciones en el caso de las ondas P-SV y se establece una ecuación en el ca-

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

so de las ondas SH. En el caso de las ondas P-SV se obtiene un sistema de $2N$ ecuaciones con $2N$ incógnitas (u_j^n, w_j^n) cuya solución da los desplazamientos en los nodos añadidos y en el caso de las ondas SH se obtiene un sistema de N ecuaciones con N incógnitas v_j^n cuya solución da los desplazamientos en los nodos añadidos.

En el caso viscoelástico, las tensiones son

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)U_{,x} + \lambda W_{,z} + (\lambda' + 2\mu')U_{,xt} + \lambda'W_{,zt} \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)W_{,z} + \lambda U_{,x} + (\lambda' + 2\mu')W_{,zt} + \lambda'U_{,xt} \\ \sigma_{xz} &= \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right)(U_{,z} + W_{,x})\end{aligned}\tag{3.184}$$

para las ondas P-SV y

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right)V_{,x} \\ \sigma_{yz} &= \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}\right)V_{,z}\end{aligned}\tag{3.185}$$

para las ondas SH.

λ y μ son los parámetros de Lamé y λ' y μ' son los coeficientes de viscosidad.

Teniendo en cuenta que $\tau_P = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu}$ y $\tau_S = \frac{\mu'}{\mu}$, se tiene que $\lambda' = \lambda\tau_P + 2\mu(\tau_P - \tau_S)$ y las tensiones (3.184) y (3.185) se pueden reescribir como

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)U_{,x} + \lambda W_{,z} + (\lambda + 2\mu)\tau_P U_{,xt} + [\lambda\tau_P + 2\mu(\tau_P - \tau_S)]W_{,zt} = \\ &= (\lambda + 2\mu)(U_{,x} + \tau_P U_{,xt}) + [(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S]W_{,zt} + \lambda W_{,z} \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)W_{,z} + \lambda U_{,x} + (\lambda + 2\mu)\tau_P W_{,zt} + [\lambda\tau_P + 2\mu(\tau_P - \tau_S)]U_{,xt} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\lambda + 2\mu)(W_{,z} + \tau_P W_{,zt}) + [(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S]U_{,xt} + \lambda U_{,x} \\
 \sigma_{xz} &= \left(\mu + \mu\tau_S \frac{\partial}{\partial t} \right) (U_{,z} + W_{,x}) = \mu[U_{,z} + W_{,x} + \tau_S(U_{,zt} + W_{,xt})] \quad (3.186)
 \end{aligned}$$

para las ondas P-SV y

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} &= \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) V_{,x} = \mu[V_{,x} + \tau_S V_{,xt}] \\
 \sigma_{yz} &= \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) V_{,z} = \mu[V_{,z} + \tau_S V_{,zt}] \quad (3.187)
 \end{aligned}$$

para las ondas SH.

Sustituyendo en (3.176) y (3.177) las tensiones (3.186) y (3.187) y tomando en éstas últimas las aproximaciones lineales obtenidas para las derivadas parciales primeras, obtenidas en (2.17), se llega a

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \left[-m_{0x}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}u_i^n + \tau_P \frac{\partial}{\partial t} \left(-m_{0x}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}u_i^n \right) \right] + \\
 &+ [(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S] \frac{\partial}{\partial t} \left(-m_{0z}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}w_i^n \right) + \\
 &+ \lambda \left(-m_{0z}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}w_i^n \right) \\
 \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \left[-m_{0z}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}w_i^n + \tau_P \frac{\partial}{\partial t} \left(-m_{0z}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}w_i^n \right) \right] + \\
 &+ [(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S] \frac{\partial}{\partial t} \left(-m_{0x}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}u_i^n \right) + \\
 &+ \lambda \left(-m_{0x}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}u_i^n \right) \\
 \sigma_{xz} &= \mu \left[-m_{0z}u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz}u_i^n - m_{0x}w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix}w_i^n + \right.
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

$$+ \tau_S \frac{\partial}{\partial t} \left(-m_{0z} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz} u_i^n - m_{0x} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix} w_i^n \right) \quad (3.188)$$

para las ondas P-SV y

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \mu \left[-m_{0x} v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix} v_i^n + \tau_S \frac{\partial}{\partial t} \left(-m_{0x} v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix} v_i^n \right) \right] \\ \sigma_{yz} &= \mu \left[-m_{0z} v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz} v_i^n + \tau_S \frac{\partial}{\partial t} \left(-m_{0z} v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz} v_i^n \right) \right] \end{aligned} \quad (3.189)$$

para las ondas SH.

Por la linealidad de la derivada y sustituyendo el esquema obtenido en (2.32), se escriben las ecuaciones (3.188) y (3.189) de la forma

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \left[-m_{0x} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix} u_i^n + \tau_P \left(-m_{0x} \frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{ix} \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \right) \right] + \\ &+ [(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S] \left(-m_{0z} \frac{w_0^n - w_0^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{iz} \frac{w_i^n - w_i^{n-1}}{\Delta t} \right) + \\ &+ \lambda \left(-m_{0z} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz} w_i^n \right) \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \left[-m_{0z} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz} w_i^n + \tau_P \left(-m_{0z} \frac{w_0^n - w_0^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{iz} \frac{w_i^n - w_i^{n-1}}{\Delta t} \right) \right] + \\ &+ [(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S] \left(-m_{0x} \frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{ix} \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \right) + \\ &+ \lambda \left(-m_{0x} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix} u_i^n \right) \\ \sigma_{xz} &= \mu \left[-m_{0z} u_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz} u_i^n - m_{0x} w_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix} w_i^n + \tau_S \left(-m_{0z} \frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\Delta t} + \right. \right. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. FÓRMULAS EN DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

$$+ \left. \sum_{i=1}^N m_{iz} \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - m_{0x} \frac{w_0^n - w_0^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{ix} \frac{w_i^n - w_i^{n-1}}{\Delta t} \right] \quad (3.190)$$

para las ondas P-SV y

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \mu \left[-m_{0x} v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{ix} v_i^n + \tau_S \left(-m_{0x} \frac{v_0^n - v_0^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{ix} \frac{v_i^n - v_i^{n-1}}{\Delta t} \right) \right] \\ \sigma_{yz} &= \mu \left[-m_{0z} v_0^n + \sum_{i=1}^N m_{iz} v_i^n + \tau_S \left(-m_{0z} \frac{v_0^n - v_0^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^N m_{iz} \frac{v_i^n - v_i^{n-1}}{\Delta t} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.191)$$

para las ondas SH.

Agrupando términos, se escriben finalmente las ecuaciones (3.190) y (3.191) como

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -(\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{\tau_P}{\Delta t} \right) m_{0x} u_0^n + (\lambda + 2\mu) \frac{\tau_P}{\Delta t} m_{0x} u_0^{n-1} - \\ &\quad - \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} + \lambda \right) m_{0z} w_0^n + \frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} m_{0z} w_0^{n-1} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left[(\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{\tau_P}{\Delta t} \right) m_{ix} u_i^n - (\lambda + 2\mu) \frac{\tau_P}{\Delta t} m_{ix} u_i^{n-1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} + \lambda \right) m_{iz} w_i^n - \frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} m_{iz} w_i^{n-1} \right] \\ \sigma_{zz} &= -(\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{\tau_P}{\Delta t} \right) m_{0z} w_0^n + (\lambda + 2\mu) \frac{\tau_P}{\Delta t} m_{0z} w_0^{n-1} - \\ &\quad - \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} + \lambda \right) m_{0x} u_0^n + \frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} m_{0x} u_0^{n-1} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left[(\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{\tau_P}{\Delta t} \right) m_{iz} w_i^n - (\lambda + 2\mu) \frac{\tau_P}{\Delta t} m_{iz} w_i^{n-1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} + \lambda \right) m_{ix} u_i^n - \frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} m_{ix} u_i^{n-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz} = & \mu \left[- \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{0z} u_0^n + \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{0z} u_0^{n-1} - \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{0x} w_0^n + \right. \\
 & \left. + \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{0x} w_0^{n-1} \right] + \mu \sum_{i=1}^N \left[\left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{iz} u_i^n - \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{iz} u_i^{n-1} + \right. \\
 & \left. + \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{ix} w_i^n - \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{ix} w_i^{n-1} \right] \tag{3.192}
 \end{aligned}$$

para las ondas P-SV y

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} = & \mu \left[- \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{0x} v_0^n + \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{0x} v_0^{n-1} \right] + \\
 & + \mu \sum_{i=1}^N \left[\left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{ix} v_i^n - \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{ix} v_i^{n-1} \right] \\
 \sigma_{yz} = & \mu \left[- \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{0z} v_0^n + \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{0z} v_0^{n-1} \right] + \\
 & + \mu \sum_{i=1}^N \left[\left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{iz} v_i^n - \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{iz} v_i^{n-1} \right] \tag{3.193}
 \end{aligned}$$

para las ondas SH.

Para cada estrella, se denota por J al conjunto de índices de nodos que no están en el dominio, los nodos añadidos, y se denota por K al conjunto de índices de nodos que están en el dominio. De esta manera, se establecen dos ecuaciones lineales para los desplazamientos u_j^n y w_j^n en el caso de las ondas P-SV

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in J} \left[\left(n_x (\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{\tau_P}{\Delta t} \right) m_{jx} + n_z \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{jz} \right) u_j^n + \right. \\
 \left. + \left(n_x \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} + \lambda \right) m_{jz} + n_z \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{jx} \right) w_j^n \right] = T_x + \\
 + \left(n_x (\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{\tau_P}{\Delta t} \right) m_{0x} + n_z \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{0z} \right) u_0^n -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(n_x(\lambda + 2\mu) \frac{\tau_P}{\Delta t} m_{0x} + n_z \mu \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{0z} \right) u_0^{n-1} + \\
& + \left(n_x \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} + \lambda \right) m_{0z} + n_z \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{0x} \right) w_0^n - \\
& - \left(n_x \frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} m_{0z} + n_z \mu \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{0x} \right) w_0^{n-1} - \\
& - \sum_{k \in K} \left[\left(n_x(\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{\tau_P}{\Delta t} \right) m_{kx} + n_z \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{kz} \right) u_k^n + \right. \\
& + \left. \left(n_x \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} + \lambda \right) m_{kz} + n_z \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{kx} \right) w_k^n \right] + \\
& + \sum_{i=1}^N \left[\left(n_x(\lambda + 2\mu) \frac{\tau_P}{\Delta t} m_{ix} + n_z \mu \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{iz} \right) u_i^{n-1} + \right. \\
& + \left. \left(n_x \frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} m_{iz} + n_z \mu \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{ix} \right) w_i^{n-1} \right] \\
& \sum_{j \in J} \left[\left(n_x \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{jz} + n_z \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} + \lambda \right) m_{jx} \right) u_j^n + \right. \\
& + \left. \left(n_x \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{jx} + n_z(\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{\tau_P}{\Delta t} \right) m_{jz} \right) w_j^n \right] = T_z + \\
& + \left(n_x \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{0z} + n_z \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} + \lambda \right) m_{0x} \right) u_0^n - \\
& - \left(n_x \mu \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{0z} + n_z \frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} m_{0x} \right) u_0^{n-1} + \\
& + \left(n_x \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{0x} + n_z(\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{\tau_P}{\Delta t} \right) m_{0z} \right) w_0^n - \\
& - \left(n_x \mu \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{0x} + n_z(\lambda + 2\mu) \frac{\tau_P}{\Delta t} m_{0z} \right) w_0^{n-1} - \\
& - \sum_{k \in K} \left[\left(n_x \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{kz} + n_z \left(\frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} + \lambda \right) m_{kx} \right) u_k^n + \right. \\
& + \left. \left(n_x \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) m_{kx} + n_z(\lambda + 2\mu) \left(1 + \frac{\tau_P}{\Delta t} \right) m_{kz} \right) w_k^n \right] + \\
& + \sum_{i=1}^N \left[\left(n_x \mu \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{iz} + n_z \frac{(\lambda + 2\mu)\tau_P - 2\mu\tau_S}{\Delta t} m_{ix} \right) u_i^{n-1} + \right. \\
& + \left. \left(n_x \mu \frac{\tau_S}{\Delta t} m_{ix} + n_z(\lambda + 2\mu) \frac{\tau_P}{\Delta t} m_{iz} \right) w_i^{n-1} \right] \tag{3.194}
\end{aligned}$$

y una ecuación lineal para los desplazamientos v_j en el caso de las ondas SH

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in J} \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) (n_x m_{jx} + n_z m_{jz}) v_j^n &= \\
 = T_y + \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) (n_x m_{0x} + n_z m_{0z}) v_0^n - \mu \frac{\tau_S}{\Delta t} (n_x m_{0x} + n_z m_{0z}) v_0^{n-1} - \\
 - \sum_{k \in K} \mu \left(1 + \frac{\tau_S}{\Delta t} \right) (n_x m_{kx} + n_z m_{kz}) v_k^n + \sum_{i=1}^N \mu \frac{\tau_S}{\Delta t} (n_x m_{ix} + n_z m_{iz}) v_i^{n-1}
 \end{aligned} \tag{3.195}$$

Por cada nodo con condición de contorno Neumann, se establecen dos ecuaciones en el caso de las ondas P-SV y se establece una ecuación en el caso de las ondas SH. En el caso de las ondas P-SV se obtiene un sistema de $2N$ ecuaciones con $2N$ incógnitas (u_j^n, w_j^n) cuya solución da los desplazamientos en los nodos añadidos y en el caso de las ondas SH se obtiene un sistema de N ecuaciones con N incógnitas v_j^n cuya solución da los desplazamientos en los nodos añadidos.

Capítulo 4

Resultados numéricos

Las condiciones iniciales serán en todos los casos

$$\begin{aligned}U(x, z, 0) = U(x, z, \Delta t) = 0 \\ W(x, z, 0) = W(x, z, \Delta t) = 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

para las ondas P-SV y

$$V(x, z, 0) = V(x, z, \Delta t) = 0\tag{4.2}$$

para las ondas SH.

Para las condiciones de contorno, se va a excitar el medio mediante una onda plana formada por el lóbulo central de un pulso de Ricker, figura 4.1, en casi todos los casos, indicándose cuando no sea así. La onda plana está definida geoméricamente por dos rectas paralelas desplazándose a la velocidad de las ondas en el medio. Por tanto, en un instante determinado, los valores en el contorno serán los valores del pulso de Ricker en aquellos nodos que se encuentren entre dichas rectas y cero en el resto de nodos del contorno, véase la figura 4.2 para el caso de ondas SH.

Si $\mathbf{k} = (k_x, k_z)^T$ es el vector de onda normalizado y $r_0 : k_x x + k_z z + c_0 = 0$ es la recta que marca el comienzo de la onda plana en su primer contacto

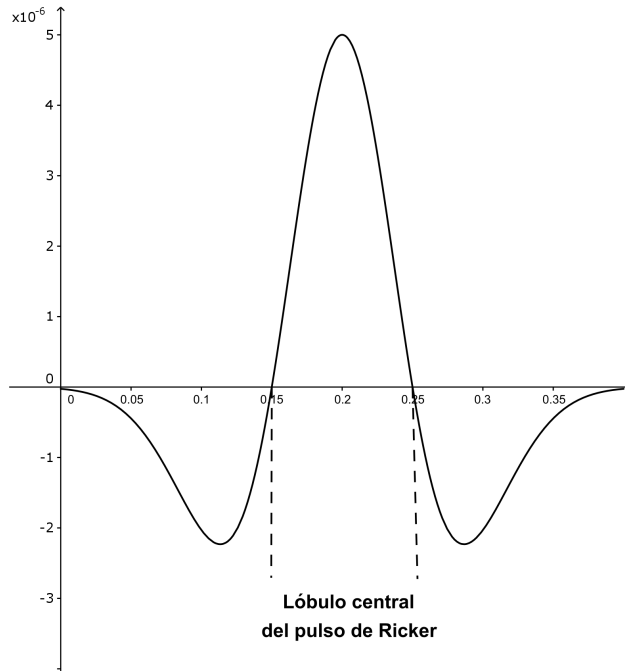


Figura 4.1: Lóbulo central del pulso de Ricker

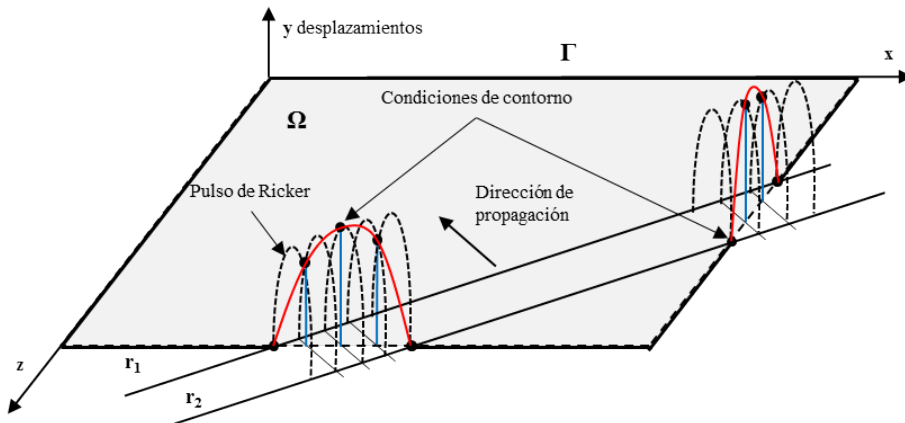


Figura 4.2: Condiciones de contorno Dirichlet para el caso de ondas SH planas. Los nodos sobre la línea discontinua en el contorno toman los valores del pulso de Ricker mientras que los nodos sobre la línea continua toman el valor cero

con el dominio de interés, entonces en cualquier instante, t , la onda plana se

encontrará entre las rectas $r_1 : k_x x + k_z z + c_1 = 0$ y $r_2 : k_x x + k_z z + c_2 = 0$ con $c_1 = c_0 + \frac{v}{k_z}(t - t_i)$ y $c_2 = c_0 + \frac{v}{k_z}(t - t_f)$ siendo $v \in \{\alpha, \beta\}$. Las condiciones de contorno son

$$U(x, z, t) = \begin{cases} k_x \cdot g\left(t - \frac{k_z}{v}(c - c_0)\right) & \text{si } c_2 \leq c \leq c_1 \text{ y } t \geq t_1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$W(x, z, t) = \begin{cases} k_z \cdot g\left(t - \frac{k_z}{v}(c - c_0)\right) & \text{si } c_2 \leq c \leq c_1 \text{ y } t \geq t_1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$V(x, z, t) = \begin{cases} g\left(t - \frac{k_z}{\beta}(c - c_0)\right) & \text{si } c_2 \leq c \leq c_1 \text{ y } t \geq t_1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (4.4)$$

donde $c = -k_x x - k_z z$, $\forall(x, z) \in \Gamma$ y g es el pulso de Ricker

$$g(t) = A(1 - 2\pi^2 f^2 (t - t_0)^2) \exp(-\pi^2 f^2 (t - t_0)^2) \quad t \in [t_i, t_f] \quad (4.5)$$

siendo $A = 5 \cdot 10^{-6}$ m la amplitud, $f = \frac{10\sqrt{2}}{\pi}$ Hz la frecuencia, $t_0 = 0,05 + 2\Delta t$ s el retardo¹, $t_i = 2\Delta t$ s el instante de comienzo del pulso y $t_f = \frac{\sqrt{2}}{\pi f} + 2\Delta t$ s el instante de final del pulso. Estos valores de amplitud, frecuencia y retardo serán siempre los casos analizados, salvo que se indique lo contrario. El valor máximo del desplazamiento se alcanza en $t_{max} = t_0$ y su valor es $g(t_{max}) = A$ y los valores mínimos del desplazamiento, contando con los lóbulos inferiores, se alcanzan en $t_{min} = t_0 \pm \frac{T_D}{2}$, siendo $T_D = \frac{\sqrt{6}}{\pi f}$, y ambos valen $g(t_{min}) = -2A \exp(-\frac{3}{2})$.

Los diferentes parámetros de las condiciones de contorno serán especifi-

¹No confundir con el tiempo de retardo o relajación de las ondas en medios viscoelásticos.

cados en cada caso particular.

4.1. Onda en medio isótropo, elástico y homogéneo

Para mostrar la precisión del método se va a resolver el problema (3.12) con condiciones iniciales (4.1) y condiciones de contorno (4.3). Se considera el dominio espacial $D = [0, 2000] \times [0, 1000]$ y el dominio temporal $t \in [0, 1]$. La discretización espacial es regular con paso de referencia $h = 10$ y 20301 nodos y la discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$. El medio tiene por velocidades $\alpha = 1 \text{ km/s}$ y $\beta = 0,5 \text{ km/s}$ y por densidad $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. La onda plana es un pulso de Ricker con $A = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $f = 4 \text{ Hz}$ y $t_0 = 0,5 \text{ s}$., luego $g(t_{max}) = 2,5 \cdot 10^{-6}$ y $g(t_{min}) = -1,11565 \cdot 10^{-6}$. La tabla 4.1 muestra los errores relativos cometidos al aproximar los valores reales por los obtenidos con el GFDM en un punto situado a 200 m de la entrada de la onda en el medio.

Tabla 4.1: Errores relativos cometidos al aproximar el desplazamiento máximo y mínimo con el GFDM

Nodo	Máximo	Primer mínimo	Segundo mínimo
$(x, z) = (1000, 200)$	$1,60 \cdot 10^{-3}$	$4,71 \cdot 10^{-2}$	$5,41 \cdot 10^{-2}$

En la figura 4.3 se muestra la onda plana en el instante $t = 0,55 \text{ s}$ y se pueden apreciar en ella tanto los lóbulos laterales como el lóbulo central. La figura 4.4 muestra la evolución temporal de la onda en el nodo $(x, z) = (1000, 200)$.

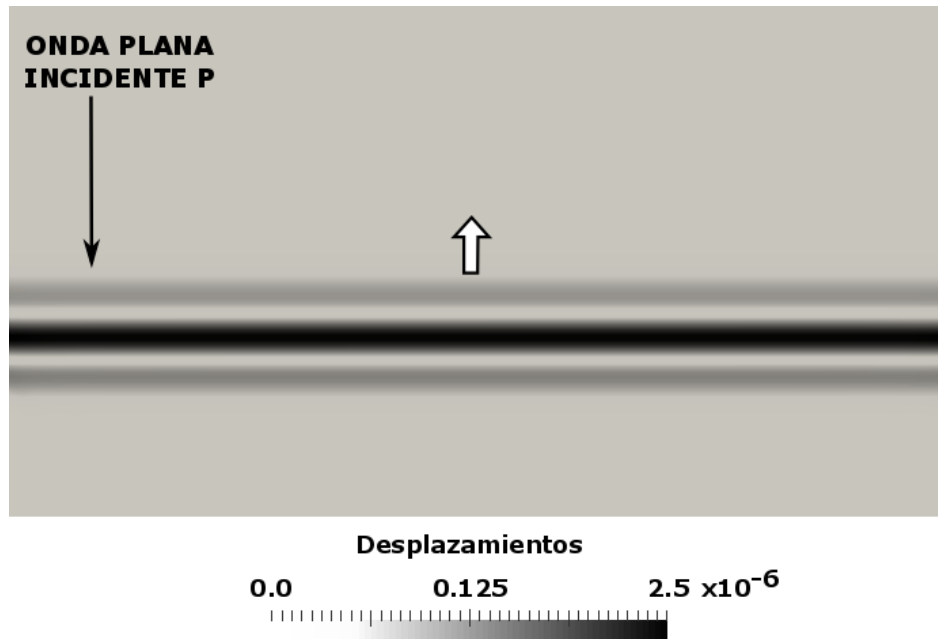


Figura 4.3: Pulso de Ricker viajando hacia arriba como un frente de ondas. La flecha en fondo blanco señala la dirección de propagación.

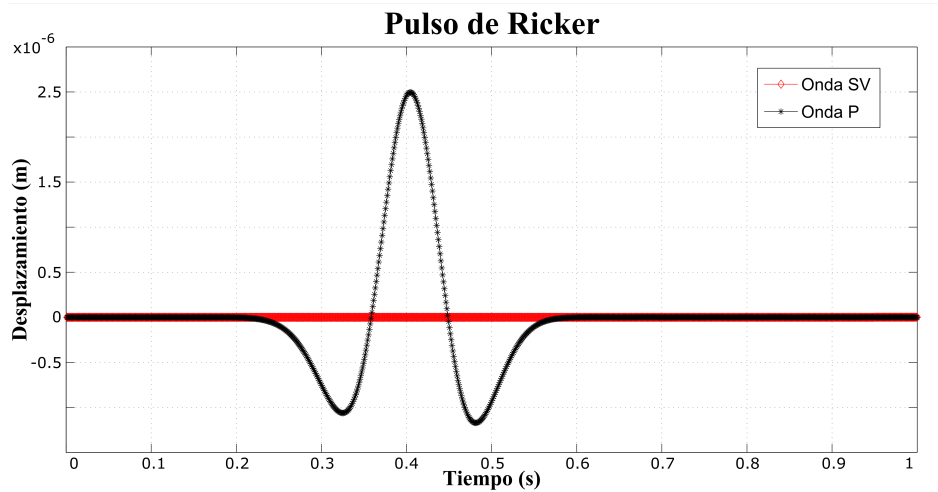


Figura 4.4: Onda plana P en el nodo $(x, z) = (1000, 200)$ situado a 200 metros del origen.

4.2. Influencia de la irregularidad de la discretización en la propagación de ondas

Una de las principales ventajas del método de las diferencias finitas generalizadas es que no precisa de una disposición regular de los nodos. Esto no significa que se tengan que formar discretizaciones irregulares, de hecho, los mejores resultados se obtienen, en general, para discretizaciones lo más regulares posible. En cualquier caso, el objetivo ahora es mostrar con un caso académico que se obtienen buenos resultados aunque la irregularidad sea alta.

Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0,5\}$ un dominio rectangular formado por un subdominio irregular $D_I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 0,4, 0 < y < 0,5\} \subset D$ y un subdominio regular $D_R = D_I^c$. El subdominio regular tiene paso de referencia h en el eje X y k en el eje Y . El subdominio irregular se construye a partir de uno regular desplazando cada nodo una distancia aleatoria, $\Delta d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, en una dirección aleatoria, cumpliéndose que $-\frac{h}{2} \frac{r}{100} < \Delta x < \frac{h}{2} \frac{r}{100}$ y $-\frac{k}{2} \frac{r}{100} < \Delta y < \frac{k}{2} \frac{r}{100}$ de manera que dos nodos no puedan superponerse. Por tanto, r define el grado de irregularidad por lo que $r = 0$ es una discretización completamente regular y $r = 100$ es la más irregular.

Las figuras 4.5 y 4.6 muestran las discretizaciones para un grado de irregularidad de $r = 20\%$ y $r = 40\%$.

Para analizar el efecto de la irregularidad de la discretización en la propagación de las ondas, se da un impulso unitario en $P = (0,5, 0,5)$ y se comparan los desplazamientos en las direcciones radial y tangencial generados en los nodos $A_R = (0,25, 0,35) \in D_R$ y $A_I = (0,75, 0,35) \in D_I$. El siguiente gráfico muestra el cociente entre el máximo desplazamiento, en valor absoluto, de A_I y A_R en ambas direcciones para valores crecientes del grado de irregularidad. Se puede apreciar en la figura 4.7 que cuanto más regular es la discretización, mejores resultados se obtienen.

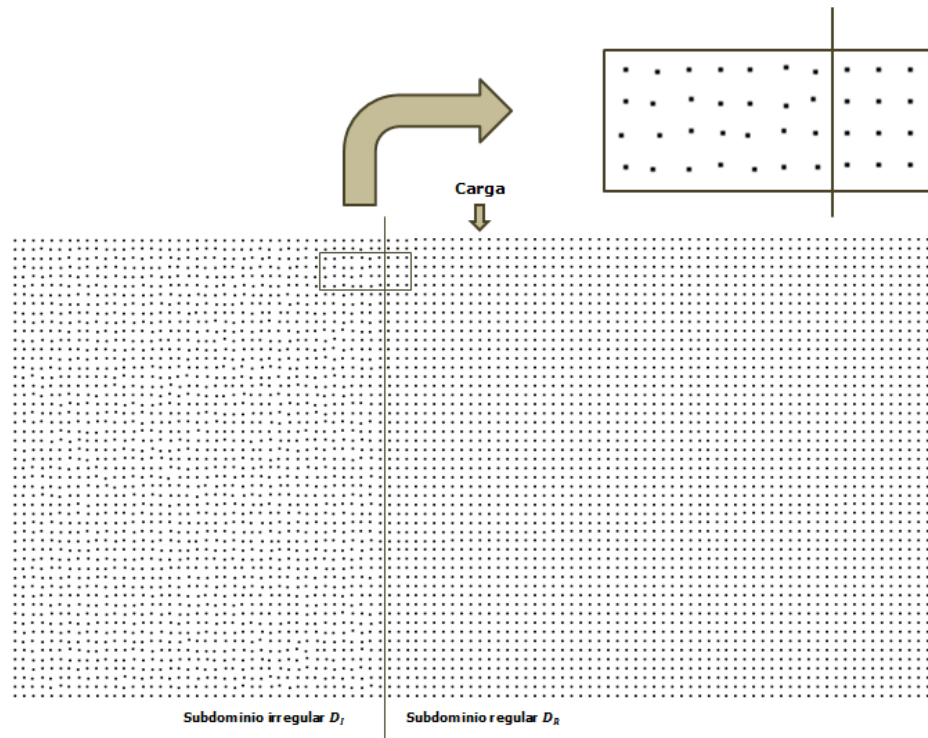


Figura 4.5: Discretización con grado de irregularidad de $r = 20\%$

Se muestra finalmente la onda en los casos de la discretización con un grado de irregularidad de $r = 20\%$ y $r = 40\%$ en el instante $t = 0,6$ s. La distorsión es un poco mayor en el subdominio irregular para las ondas S, lo que puede observarse en las figuras 4.8 y 4.9 para zonas próximas al origen del pulso. No obstante, esta distorsión no es apreciable para las ondas P.

4.3. Adaptatividad y aplicación al problema sísmico

El error se evalúa mediante la siguiente fórmula global:

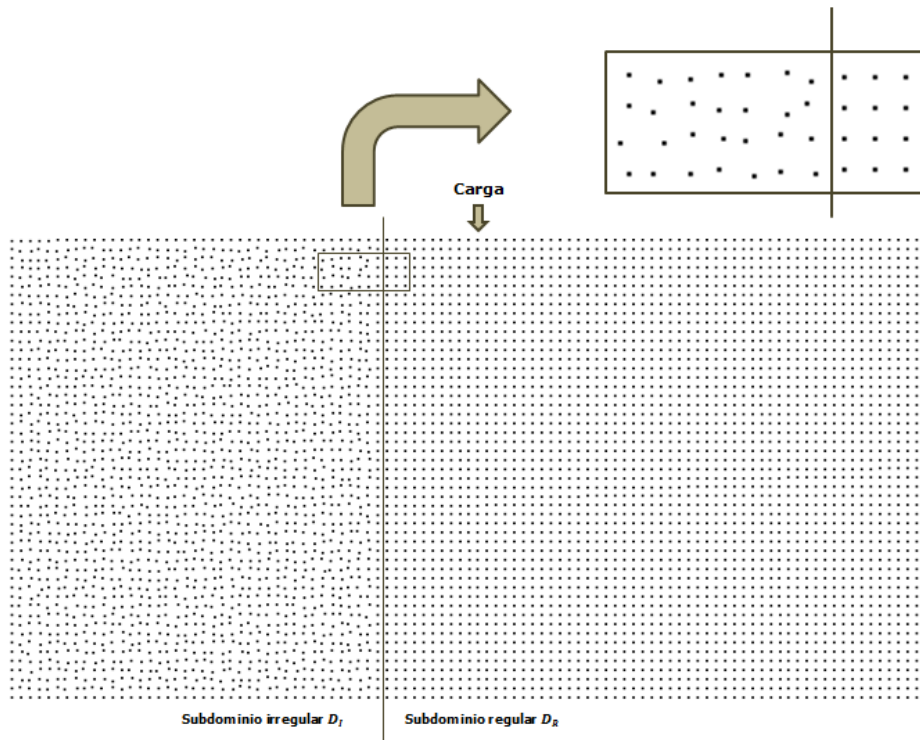


Figura 4.6: Discretización con grado de irregularidad de $r = 40\%$

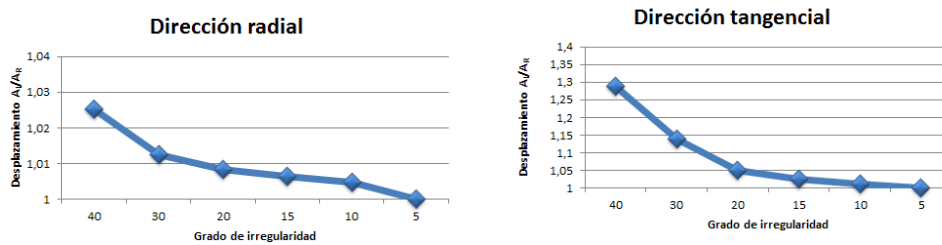


Figura 4.7: Izquierda: Cocientes en la dirección radial. Derecha: Cocientes en la dirección tangencial

$$\text{Global Error (\%)} = \frac{1}{|e_{max}|} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NI} e_i^2}{NI}} \times 100 \quad (4.6)$$

siendo e_{max} el máximo valor del error del indicador y NI el número de



Figura 4.8: Onda en la discretización con grado de irregularidad del 20% en el instante $t = 0,6$ s

nodos interiores.

En todos los casos de esta sección, el algoritmo de adición y el del movimiento se aplican alternativamente, comenzando con el algoritmo del movimiento. Además, un nodo es procesado por cualquier algoritmo si la estimación del error en el nodo es mayor que la estimación del error medio en la discretización más dos veces la desviación típica. Los valores para los diferentes parámetros involucrados en el método adaptativo son, en todos los casos, $\alpha = 0,5$, $\mu = 2/3$ y $\kappa = \max(e_1, \dots, e_N)$, siendo e_i , $i = 1, \dots, N$, la estimación del error en cada nodo de la estrella.



Figura 4.9: Onda en la discretización con grado de irregularidad del 40 % en el instante $t = 0,6$ s

4.3.1. Comparación entre el algoritmo de adición y el método adaptativo

Para comparar el algoritmo de adición y el método adaptativo, se resuelven dos ecuaciones en derivadas parciales en dos discretizaciones irregulares.

Ejemplo 1. Se considera la siguiente ecuación sobre una discretización irregular contenida en $D = [0, 3] \times [0, 2]$.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.7)$$

con condiciones de contorno Dirichlet y solución exacta

$$\Phi(x, z) = \ln(x^2 + z^2) \quad (4.8)$$

En cada nodo se utilizan estrellas de 8 nodos formadas por el criterio del cuadrante y la función de ponderación $w(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\|_2^{-4}$

Se realizan 8 pasos tanto con el algoritmo de adición como con el método adaptativo. El error se reduce más al aplicar el método adaptativo incluso usando un menor número de nodos, como se puede ver en la tabla 4.2. La figura 4.10 muestra la discretización tanto inicial con 55 nodos y como final con 120 nodos cuando se aplica el método adaptativo. La figura 4.11 muestra, en una zona ampliada, el movimiento de los nodos en el sexto paso del método adaptativo con la posición inicial denotada por ∇ , la posición final de los mismos denotada por \circ y los eliminados denotados por \otimes

Tabla 4.2: Errores inicial y final y número de nodos del ejemplo 1 con 8 pasos de ambos casos

Ejemplo 1	Error inicial (nodos)	Error final (nodos)
Algoritmo de adición	$6,16 \cdot 10^{-1} \%$ (55)	$3,58 \cdot 10^{-2} \%$ (138)
Método adaptativo	$6,16 \cdot 10^{-1} \%$ (55)	$3,29 \cdot 10^{-2} \%$ (120)

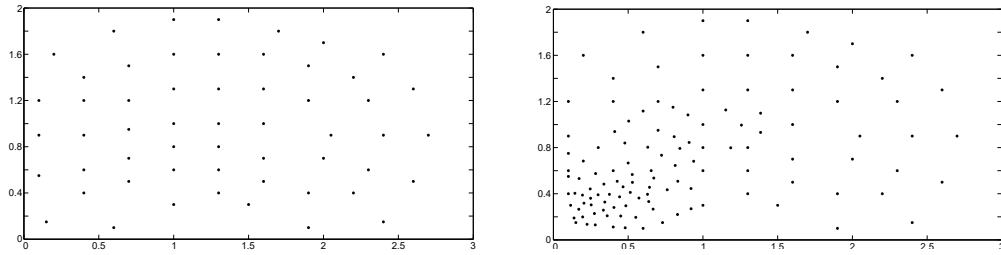


Figura 4.10: Discretizaciones, inicial (55 nodos) y final (120 nodos), aplicando el método adaptativo en el ejemplo 1

Ejemplo 2. Se considera la siguiente ecuación sobre una discretización regular contenida en el cuadrado $D = [0, 01, 1, 01] \times [0, 01, 1, 01]$.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

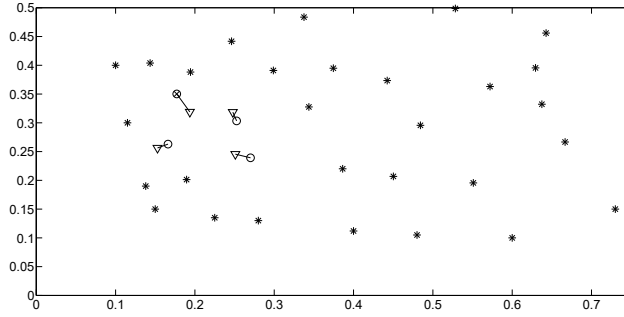


Figura 4.11: Ampliación de la región con errores más elevados en la discretización del ejemplo 1 en el sexto paso de aplicación del método adaptativo, en particular de la aplicación del algoritmo del movimiento. Leyenda: * nodos interiores y frontera, ▽ posición inicial nodo interior seleccionado, ○ posición final del nodo interior seleccionado y ⊗ nodo eliminado.

con condiciones de contorno Dirichlet y solución exacta

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{x + z} \quad (4.10)$$

En cada nodo se utilizan estrellas de 8 nodos formadas por el criterio del cuadrante y la función de ponderación $w(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\|_2^{-4}$

Se realizan 6 pasos tanto con el algoritmo de adición como con el método adaptativo. El error se reduce más al aplicar el método adaptativo incluso usando un menor número de nodos, como se puede ver en la tabla 4.3. La figura 4.12 muestra la discretización tanto inicial con 81 nodos y como final con 126 nodos cuando se aplica el método adaptativo. Además, aumentar el número de pasos del algoritmo de adición, no sólo aumenta el número de nodos, sino que además no asegura que el error disminuya con respecto al método adaptativo. Por ejemplo, si se dan dos pasos más con el algoritmo de adición, se ha aumentado el número de nodos en algo más de un 10% y el error sigue siendo mayor. En la tabla 4.4 se puede ver que el error cometido con 6 pasos del método adaptativo y 8 pasos del algoritmo de adición.

Tabla 4.3: Errores inicial y final y número de nodos del ejemplo 2 con 6 pasos en ambos casos

Ejemplo 2	Error inicial (nodos)	Error final (nodos)
Algoritmo de adición	1,04 % (81)	$2,61 \cdot 10^{-1}$ % (128)
Método adaptativo	1,04 % (81)	$1,12 \cdot 10^{-1}$ % (126)

Tabla 4.4: Errores inicial y final y número de nodos del ejemplo 2 con 6 pasos del método adaptativo y 8 pasos del algoritmo de adición

Ejemplo 2	Error inicial (nodos)	Error final (nodos)
Algoritmo de adición	1,04 % (81)	$1,50 \cdot 10^{-1}$ % (141)
Método adaptativo	1,04 % (81)	$1,12 \cdot 10^{-1}$ % (126)

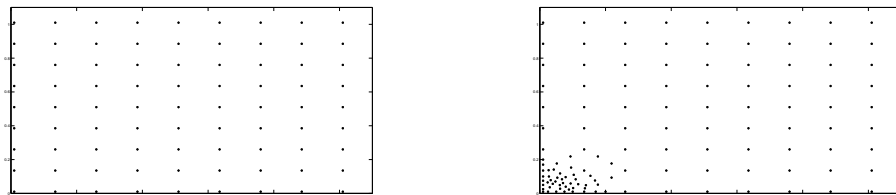


Figura 4.12: Discretizaciones, inicial (81 nodos) y final (126 nodos), aplicando el método adaptativo en el ejemplo 2

4.3.2. Aplicación a problemas dependientes del tiempo

El criterio de estabilidad del método de las diferencias finitas generalizadas en cualquier problema dependiente del tiempo depende de los coeficientes de la estrella y éstos, a su vez, dependen de la distribución de los nodos. Una distribución de nodos inadecuada podría forzar a escoger un paso temporal menor con el correspondiente incremento en el tiempo de resolución del problema o incluso podría provocar que el esquema fuese inestable. Es claro que el criterio de estabilidad debe satisfacerse en cualquier nodo de una discretización y en una discretización regular la cota temporal para la estabilidad es la misma en todos los nodos. En una discretización irregular no ocurre lo

mismo puesto que cada nodo puede tener una cota distinta y el problema debe satisfacer la menor de todas ellas. En esta situación puede ocurrir que la cota temporal se vea reducida como consecuencia de unos pocos nodos mal distribuidos. Se pueden evitar estos casos aplicando el método adaptativo a priori en los nodos en cuestión mejorando su distribución.

Para aplicar el método adaptativo a priori, el vector $\vec{\phi}_0$ en (2.54) será el resultante de la suma de los N vectores $\vec{\phi}_i$ sin ponderar y manteniendo las restricciones $C1$ and $C2$. Para decidir qué algoritmo aplicar se empleará el siguiente criterio, se aplica el algoritmo del movimiento si el nodo seleccionado \mathbf{x}_0 satisface que $f_b(\mathbf{x}_0) \geq 0,5$ o tiene algún nodo en el intervalo $(0, \bar{s}r - 2\sigma_{\bar{s}r})$ y se aplica el algoritmo de adición en otro caso.

Para ilustrar la eficiencia del método adaptativo en problemas dependientes del tiempo, se va a resolver un problema de propagación de ondas que presenta dos inestabilidades locales. En el ejemplo se aplica un pulso en el nodo $P = (0,5, 0)$. La figura 4.13 muestra la discretización irregular y el nodo problemático. Aplicando el algoritmo de adición sobre el nodo problemático, se incorporan a la discretización tres nodos más y surge una nueva inestabilidad en uno de ellos. Esta última es resuelta por el algoritmo del movimiento eliminando el nodo en cuestión. En la figura 4.14 se puede ver la onda en los instantes $t = 0,25$ s y $t = 0,5$ s antes de aplicar el adaptativo y en la figura 4.15 se muestra la onda en los mismos instantes pero después de aplicar el método adaptativo donde ya no aparece ninguna inestabilidad.

4.4. Reflexión y transmisión

Salvo que se indique lo contrario, el problema para ondas P-SV vendrá dado por las ecuaciones (3.63) y el problema para ondas SH por la ecuación (3.64).

En estos casos las condiciones de contorno se deben ampliar pues el me-

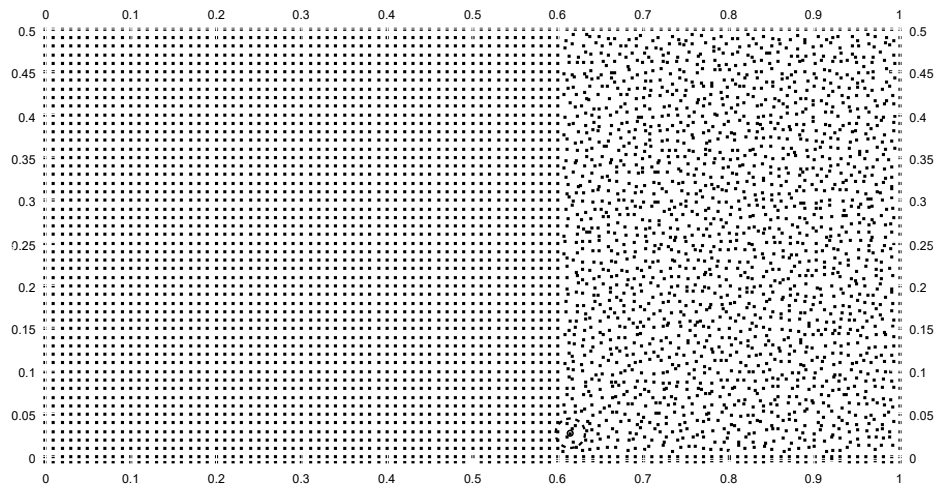


Figura 4.13: Discretización irregular con 5151 nodos. El nodo crítico está en el interior del círculo en línea continua los nodos de la estrella están dentro de la circunferencia en línea discontinua.

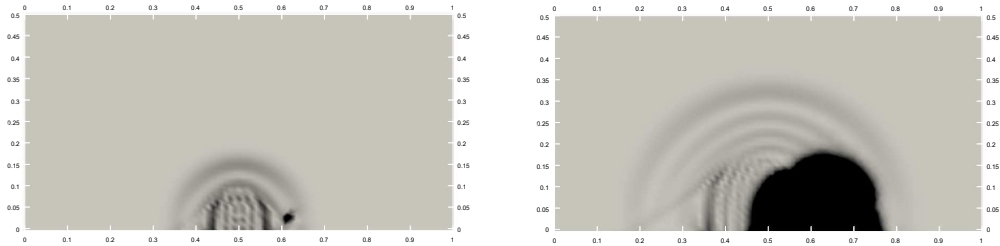


Figura 4.14: Instantáneas de la onda en $t = 0,25$ s y $t = 0,5$ s antes de aplicar el método adaptativo en la discretización de 5151 nodos.

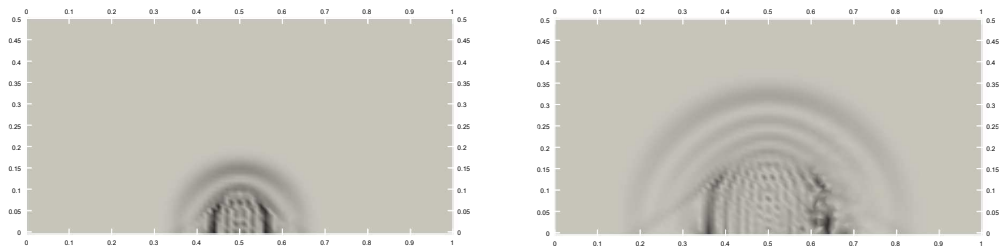


Figura 4.15: Instantáneas de la onda en $t = 0,25$ s y $t = 0,5$ s después de aplicar el método adaptativo en la discretización de 5153 nodos.

dio estará formado por dos subdominios, $D = D_1 \cup D_2$. Se llamará entonces $\Gamma_1 = \Gamma \cap D_1$ y $\Gamma_2 = \Gamma \cap D_2$ a los contornos de cada subdominio que eran contorno en el dominio original. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que la onda entra en el dominio a través del contorno Γ_1 . Se denota por α_i y β_i las velocidades de las ondas P y de las ondas S, respectivamente, en el subdominio D_i con $i \in \{1, 2\}$.

Sean $\mathbf{k} = (k_x, k_z)^T$ el vector de onda normalizado y $r_0 : k_x x + k_z z + c_0 = 0$ la recta que pasa por el primer nodo de contacto de la onda con el dominio de interés, que puede suponerse que ocurre en Γ_1 . En cualquier instante, t , la onda plana se encontrará entre las rectas $r_1 : k_x x + k_z z + c_1 = 0$ y $r_2 : k_x x + k_z z + c_2 = 0$ con $c_1 = c_0 + \frac{v}{k_z}(t - t_i)$ y $c_2 = c_0 + \frac{v}{k_z}(t - t_f)$ siendo $v \in \{\alpha_1, \beta_1\}$. Sean $\mathbf{k}' = (k'_x, k'_z)^T$ y $\mathbf{k}'' = (k''_x, k''_z)^T$ los vectores de onda normalizados para las ondas P y las ondas SV, respectivamente, en el medio Γ_2 . Como antes, sean $r'_0 : k'_x x + k'_z z + c'_0 = 0$ la recta que pasa por el primer nodo de contacto de la onda P con Γ_2 y $r''_0 : k''_x x + k''_z z + c''_0 = 0$ la recta que pasa por el primer nodo de contacto de la onda SV con Γ_2 . En el segundo medio las ondas P se encontrarán entre las rectas $r'_1 : k'_x x + k'_z z + c'_1 = 0$ y $r'_2 : k'_x x + k'_z z + c'_2 = 0$ con $c'_1 = c'_0 + \frac{\alpha_2}{k'_z}(t - t'_i)$ y $c'_2 = c'_0 + \frac{\alpha_2}{k'_z}(t - t'_f)$ y las ondas SV o SH se encontrarán entre las rectas $r''_1 : k''_x x + k''_z z + c''_1 = 0$ y $r''_2 : k''_x x + k''_z z + c''_2 = 0$ con $c''_1 = c''_0 + \frac{\beta_2}{k''_z}(t - t''_i)$ y $c''_2 = c''_0 + \frac{\beta_2}{k''_z}(t - t''_f)$. Las condiciones de contorno para las ondas P-SV son

$$\begin{aligned} U(x, z, t) &= U_P(x, z, t) + U_{SV}(x, z, t) \\ W(x, z, t) &= W_P(x, z, t) + W_{SV}(x, z, t) \end{aligned} \tag{4.11}$$

siendo

$$U_P(x, z, t) = \begin{cases} k_x \cdot g\left(t - \frac{k_z}{\alpha_1}(c - c_0)\right) & (x, z) \in \Gamma_1, c_2 \leq c \leq c_1, t \geq t_1 \\ k'_x \cdot g\left(t - \frac{k'_z}{\alpha_2}(c' - c'_0)\right) & (x, z) \in \Gamma_2, c'_2 \leq c' \leq c'_1, t \geq t'_1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$U_{SV}(x, z, t) = \begin{cases} k''_z \cdot g\left(t - \frac{k''_z}{\beta_2}(c'' - c''_0)\right) & (x, z) \in \Gamma_2, c''_2 \leq c'' \leq c''_1, t \geq t''_1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \tag{4.12}$$

$$W_P(x, z, t) = \begin{cases} k_z \cdot g\left(t - \frac{k_z}{\alpha_1}(c - c_0)\right) & (x, z) \in \Gamma_1, c_2 \leq c \leq c_1, t \geq t_1 \\ k'_z \cdot g\left(t - \frac{k'_z}{\alpha_2}(c' - c'_0)\right) & (x, z) \in \Gamma_2, c'_2 \leq c' \leq c'_1, t \geq t'_1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$W_{SV}(x, z, t) = \begin{cases} k''_x \cdot g\left(t - \frac{k''_z}{\beta_2}(c'' - c''_0)\right) & (x, z) \in \Gamma_2, c''_2 \leq c'' \leq c''_1, t \geq t''_1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \tag{4.13}$$

y las condiciones de contorno para las ondas SH son

$$V(x, z, t) = \begin{cases} g\left(t - \frac{k_z}{\beta_1}(c - c_0)\right) & (x, z) \in \Gamma_1, c_2 \leq c \leq c_1, t \geq t_1 \\ g\left(t - \frac{k''_z}{\beta_2}(c'' - c''_0)\right) & (x, z) \in \Gamma_2, c''_2 \leq c'' \leq c''_1, t \geq t''_1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \tag{4.14}$$

donde $c = -k_x x - k_z z$, $\forall (x, z) \in \Gamma_1$, $c' = -k'_x x - k'_z z$, $\forall (x, z) \in \Gamma_2$, $c'' = -k''_x x - k''_z z$, $\forall (x, z) \in \Gamma_2$ y g es el pulso de Ricker descrito en (4.5).

Los diferentes parámetros de las condiciones de contorno serán especificados en cada caso particular.

Para analizar la precisión del método se calculará el error relativo cometido por las amplitudes máximas obtenidas por el método, A_m , respecto a las amplitudes máximas teóricas, A_t ,

$$e = \frac{|A_m - A_t|}{A_t} \quad (4.15)$$

Salvo que se indique lo contrario, se utilizarán en todos los casos estrellas de 8 nodos formadas por el criterio de la distancia y con función de ponderación $w(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\|_2^{-6}$.

4.4.1. Reflexión de ondas en superficie libre

Los coeficientes de reflexión se obtienen imponiendo condiciones de frontera libre a la superficie libre, esto es, imponiendo tensión nula en la superficie. Las fórmulas pueden encontrarse, por ejemplo, en [14] y éstas son

$$\begin{aligned} CR_P &= \frac{\sin 2e \cdot \sin 2f - (\alpha/\beta)^2 \cdot \cos^2 2f}{\sin 2e \cdot \sin 2f + (\alpha/\beta)^2 \cdot \cos^2 2f} \\ CR_{SV} &= \frac{-2(\alpha/\beta) \cdot \sin 2e \cdot \cos 2f}{\sin 2e \cdot \sin 2f - (\alpha/\beta)^2 \cdot \cos^2 2f} \\ CR_{SH} &= -1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

siendo e el ángulo de incidencia y reflexión de las ondas P y f el ángulo de reflexión de las ondas S.

A continuación se tratan los casos de ondas P-SV y SH sobre la superficie terrestre dispuesta de forma horizontal y el caso de una onda SH sobre una superficie libre inclinada.

Ondas P – SV y SH sobre superficie terrestre horizontal

La superficie terrestre es aproximadamente un sólido de Poisson, con coeficientes de Lamé $\lambda \approx \mu \approx 3 \cdot 10^{10}$ Pa y densidad $\rho = 3000$ kg/m³, y por tanto, la velocidad de las ondas P es $\alpha = 5,48$ km/s y la velocidad de las ondas S es $\beta = 3,16$ km/s.

Se considera el dominio espacial $D = [0, 6000] \times [-2000, 0]$ y el dominio temporal $t \in [0, 1]$ para ondas P-SV y $t \in [0, 1,25]$ para ondas SH. La discretización espacial es regular con paso de referencia $h = 20$ m y 30401 nodos y la discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.

Para las condiciones anteriores se resuelve el problema (3.12) con condiciones iniciales (4.1) y condiciones de contorno (4.3). Del mismo modo, se resuelve el problema (3.13) con condiciones iniciales (4.2) y condiciones de contorno (4.4). Los parámetros de las condiciones de contorno son en ambos casos $k_x = -0,3420$, $k_z = 0,9397$ y $c_0 = -6322,2$ y el ángulo de incidencia es 20° . La máxima amplitud ha sido medida en el nodo $P = (4000, -1200)$ para las ondas P-SV y en el nodo $Q = (4000, -1500)$ para la onda SH. Los errores relativos en los nodos P y Q se encuentran en la tabla 4.5 y una instantánea para cada caso se muestra en las figuras 4.16 y 4.17.

Tabla 4.5: Errores relativos para las ondas planas en los nodos $P = (4000, -1200)$ para las ondas P-SV y $Q = (4000, -1500)$ para las ondas SH. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis.

Onda	P (tiempo)	SV (tiempo)	SH (tiempo)
Incidente	$1,00 \cdot 10^{-2}$ (0,3825)	—	$3,30 \cdot 10^{-2}$ (0,7140)
Reflejada	$1,73 \cdot 10^{-2}$ (0,6565)	$2,90 \cdot 10^{-2}$ (0,7670)	$2,98 \cdot 10^{-2}$ (1,0140)

En la figura 4.16 también aparecen las ondas Rayleigh que son ondas de superficie con movimiento circular por lo que cuando en la dirección de pro-

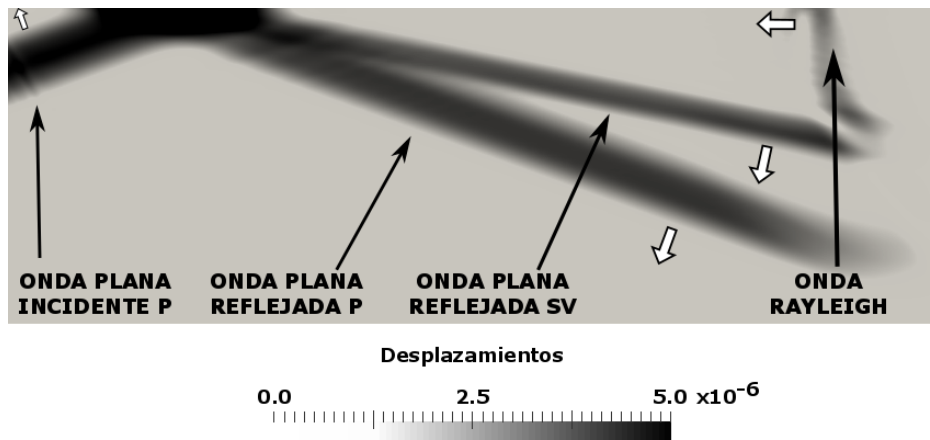


Figura 4.16: Onda P incidente y ondas P y SV reflejadas en el instante $t = 0,7$ s. Puede verse también una onda Rayleigh. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

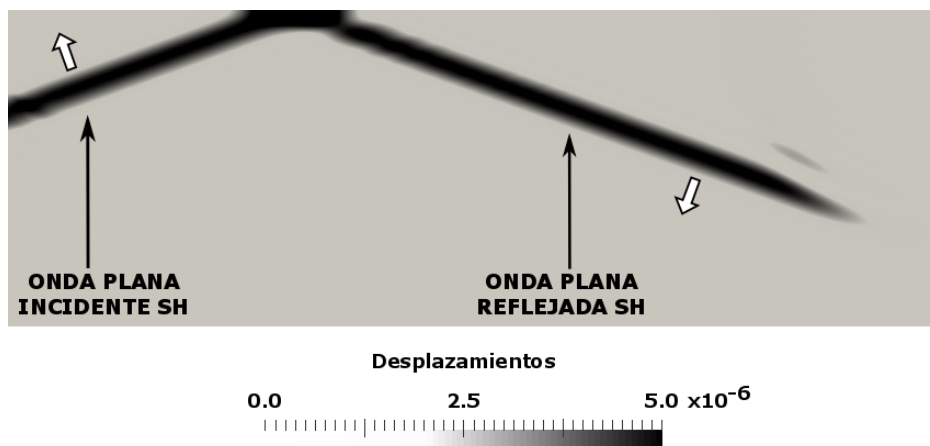


Figura 4.17: Onda SH incidente y onda SH reflejada en el instante $t = 1,1$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

pagación aparece un desplazamiento máximo o un desplazamiento mínimo, en la dirección perpendicular a la dirección de propagación el desplazamiento se hace cero, y viceversa. Para corroborar que se trata de una onda Rayleigh se toma un nodo en la superficie libre y se muestra el desplazamiento en la

dirección de propagación, $d = (-1, 0)$, y en la dirección perpendicular a ésta para el dominio temporal. En la figura 4.18 se aprecia que dichas condiciones se cumplen por lo que, en efecto, se trata de una onda de Rayleigh.

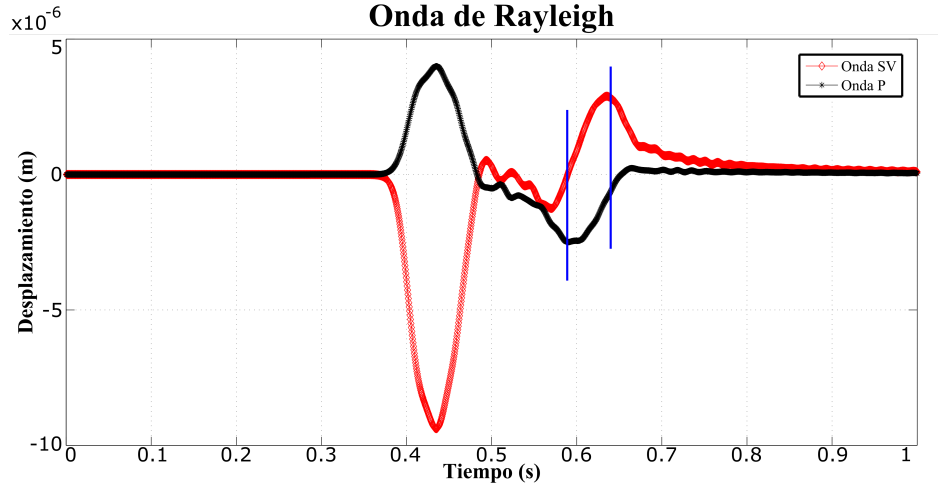


Figura 4.18: Onda de Rayleigh.

Onda SH sobre superficie libre inclinada

Se considera el dominio espacial $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 0,75, 0 \leq z \leq -\tan(10^\circ)x + 0,7295\}$ con $\alpha = 3,06$ m/s, $\beta = 1,25$ m/s y $\rho = 16$ kg/m³ y el dominio temporal $t \in [0, 0,75]$. La discretización espacial es irregular con paso de referencia $h = 7,5 \cdot 10^{-3}$ m y 16209 nodos y la discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.

Para las condiciones anteriores se resuelve el problema (3.13) con condiciones iniciales (4.2) y condiciones de contorno (4.4). Los parámetros de las condiciones de contorno son $k_x = 0$, $k_z = 1$ y $c_0 = 0$ y el ángulo de incidencia es 10° . La máxima amplitud ha sido medida en el nodo $P = (1,0050, 0,2878)$. Los errores relativos en el nodo P son $1,04 \cdot 10^{-2}$ ($t = 0,4188$ s) para la onda incidente y $3,92 \cdot 10^{-2}$ ($t = 0,7015$ s) para la onda reflejada. En la figura 4.19 puede verse una instantánea de la onda incidente y reflejada.

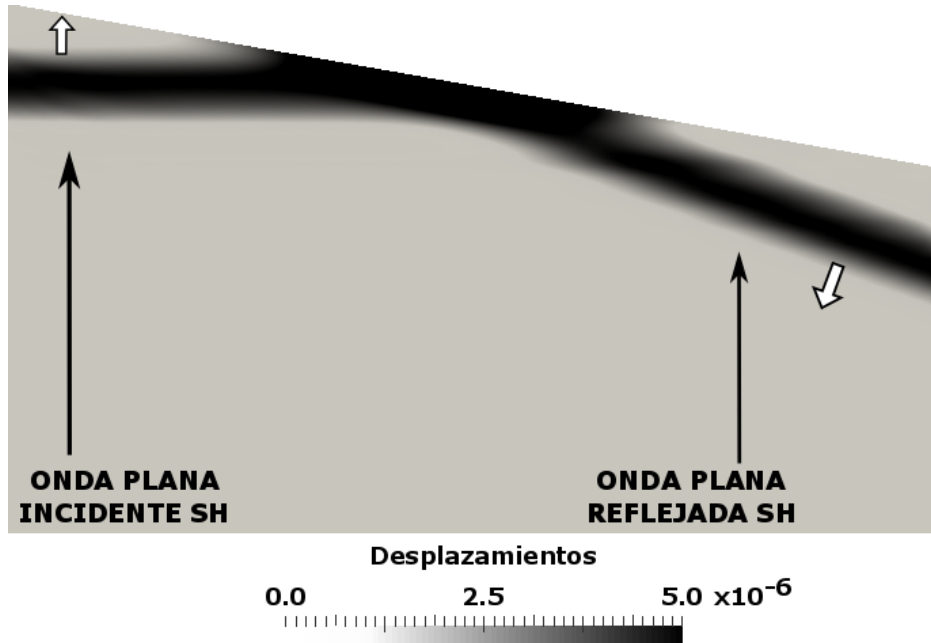


Figura 4.19: Onda SH incidente y onda SH reflejada en el instante $t = 0,55$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

4.4.2. Reflexión y transmisión de ondas en una interfaz sólido – sólido

Los coeficientes de reflexión y transmisión se obtienen imponiendo condiciones de contorno en la interfase de ambos medios, esto es, imponiendo la continuidad de los desplazamientos y de la tensión. Las fórmulas pueden encontrarse, por ejemplo, en [14] y éstas son en el caso de ondas P-SV

$$M \cdot \mathbf{C} = \mathbf{c} \quad (4.17)$$

siendo la matriz M

$$M = \begin{pmatrix} -\sin e & \cos f & \sin e' & \cos f' \\ \cos e & \sin f & \cos e' & -\sin f' \\ \sin 2e & -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cos 2f & \frac{\rho_2 \alpha_1 \beta_2^2}{\rho_1 \alpha_2 \beta_1^2} \sin 2e' & \frac{\rho_2 \alpha_1 \beta_2}{\rho_1 \beta_1} \cos 2f' \\ -\cos 2f & -\frac{\beta_1}{\alpha_1} \sin 2f & \frac{\rho_2 \alpha_2}{\rho_1 \alpha_1} \cos 2f' & \frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 \alpha_1} \sin 2f' \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

y los vectores de coeficientes \mathbf{C} y de términos independientes \mathbf{c}

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} CR_P \\ CR_{SV} \\ CT_P \\ CT_{SV} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \sin e \\ \cos e \\ \sin 2e \\ \cos 2f \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

En el caso de ondas SH las fórmulas son

$$CR_{SH} = \frac{\rho_1 \beta_1 \cos j_1 - \rho_2 \beta_2 \cos j_2}{\rho_1 \beta_1 \cos j_1 + \rho_2 \beta_2 \cos j_2} \quad (4.20)$$

$$CT_{SH} = \frac{2\rho_1 \beta_1 \cos j_1}{\rho_1 \beta_1 \cos j_1 + \rho_2 \beta_2 \cos j_2}$$

Los ángulos pueden verse en la figura 4.20.

Es fácil comprobar que los coeficientes de reflexión y transmisión quedan unívocamente determinados por las velocidades de ambos medios cuando las constantes de Lamé en ambos medios son iguales. Por lo tanto, en aquellos casos en los que el único parámetro variable sea la densidad, se puede optar por omitir los nodos en la interfase y beneficiarse de la gran ventaja que supone utilizar los esquemas homogéneos en todo el dominio.

Se van a abordar diferentes casos en esta sección, un caso académico para ondas SH con interfaz horizontal y utilizando el esquema homogéneo, el

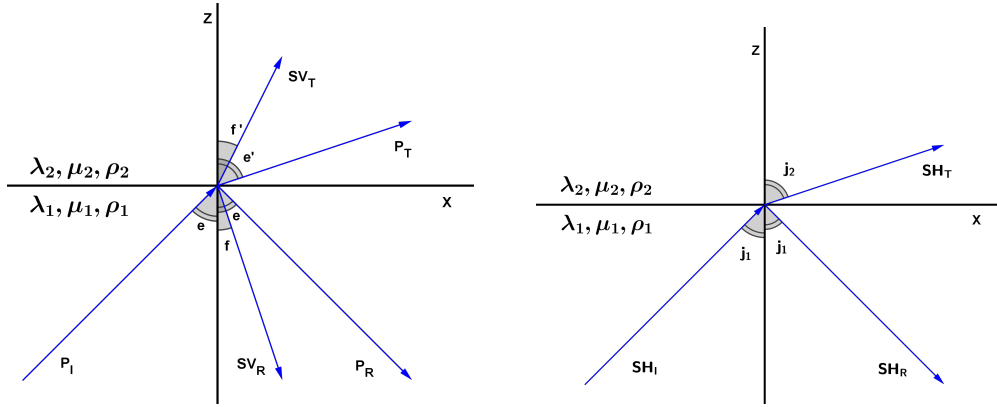


Figura 4.20: Izquierda: Ángulos de reflexión y transmisión para una onda P incidente. Derecha: Ángulos de reflexión y transmisión para una onda SH incidente

caso de la discontinuidad de Mohorovičić con interfaz horizontal para ondas P-SV y ondas SH en el que se aplicarán los esquemas heterogéneos, un caso académico con interfaz horizontal tanto para ondas P-SV como para ondas SH donde también se utilizarán esquemas heterogéneos, se analizará el caso de una onda P atravesando una interfaz horizontal con una zona irregular usando los esquemas homogéneos, tres casos de interfases inclinadas, uno para ondas P-SV y dos para ondas SH, en las que se aplican los esquemas heterogéneos y, finalmente, se analizará el caso de una interfaz curva aplicando esquemas homogéneos.

Onda SH sobre interfase horizontal con esquema homogéneo

Se considera el dominio espacial $D = [0, 2,1] \times [-1,5, 0]$ que está formado por dos medios homogéneos, el medio superior $D_1 = [0, 2,1] \times (0,75, 0]$ tiene $\lambda_1 = 1$ Pa, $\mu_1 = 1$ Pa y $\rho_1 = 0,25$ kg/m^3 , por lo que $\beta_1 = 2$ m/s, y el medio inferior $D_2 = [0, 2,1] \times [-1,5, 0,75)$ tiene $\lambda_2 = 1$ Pa, $\mu_2 = 1$ Pa y $\rho_2 = 1$ kg/m^3 , por lo que $\beta_2 = 1$ m/s. El dominio temporal es $t \in [0, 1,5]$. La discretización espacial es regular con paso de referencia $h = 7,5 \cdot 10^{-3}$ m y 56481 nodos y la discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.

Para las condiciones anteriores se resuelve el problema (3.13) con condiciones iniciales (4.2) y condiciones de contorno (4.14).

Los parámetros de las condiciones de contorno son $k_x = -0,3420$, $k_z = 0,9397$ y $c_0 = 2,1277$ para el medio inferior y $k_x'' = -0,6840$, $k_z'' = 0,7294$, $c_0'' = 1,9899$ y $t_i'' = 0,7118$ para el medio superior. El ángulo de incidencia es de 20° . La máxima amplitud ha sido medida en los nodos $P_1 = (1, -0,5)$ para la onda transmitida y $P_2 = (1, -1)$ para la onda reflejada. Los errores relativos son $1,80 \cdot 10^{-2}$ ($t = 1,1970$ s) para la onda transmitida y $2,20 \cdot 10^{-2}$ ($t = 1,3455$ s) para la onda reflejada. En la figura 4.21 puede verse una instantánea de la onda incidente, reflejada y transmitida. En la figura 4.22 y en la figura 4.23 se muestra la evolución temporal de los desplazamientos en los nodos P_2 y P_1 . Además, en éstas últimas, se puede apreciar los efectos de la dispersión numérica cuyo valor, conforme a la fórmula definida en (3.53), es de 0,0018.

Ondas P-SV y SH en la discontinuidad de Mohorovičić horizontal

La discontinuidad de Mohorovičić (Moho) separa la corteza terrestre del manto superior, a unos 25 km de profundidad, y es donde las ondas sufren una mayor aceleración.

Se considera el dominio espacial $D = [0, 10000] \times [-28000, -22000]$ que está formado por la corteza terrestre, $D_1 = [0, 10000] \times (-25000, -22000]$, donde las velocidades son $\alpha_1 = 6,8$ km/s y $\beta_1 = 3,9$ km/s y la densidad es $\rho_1 = 2800$ kg/m³, y el manto superior, $D_2 = [0, 10000] \times [-28000, -25000]$, donde las velocidades son $\alpha_2 = 8$ km/s y $\beta_2 = 4,6$ km/s y la densidad es $\rho_2 = 3300$ kg/m³. El dominio temporal es $t \in [0, 1]$ para ondas P-SV y $t \in [0, 1,75]$ para ondas SH. La discretización espacial es regular con paso de referencia $h = 40$ m y 37903 nodos y la discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.

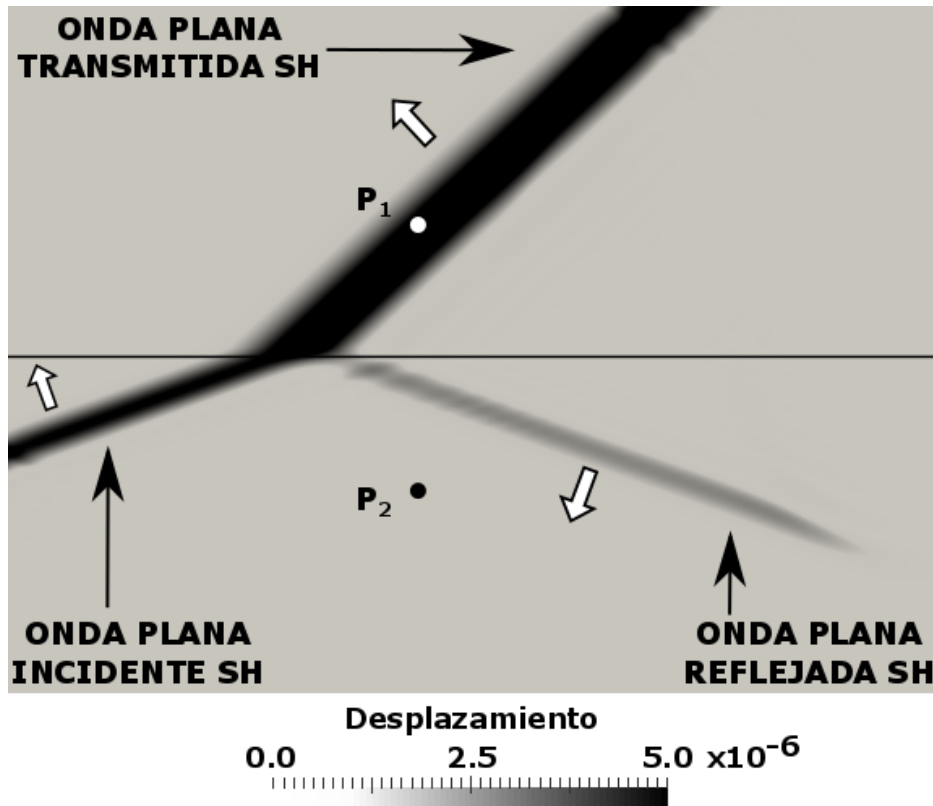


Figura 4.21: Onda plana SH incidente, reflejada y transmitida en el instante $t = 1,25$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

Para las condiciones anteriores se resuelve el problema (3.12) con condiciones iniciales (4.1) y condiciones de contorno (4.11). Los parámetros de las condiciones de contorno son $k_x = 0,3420$, $k_z = -0,9397$ y $c_0 = -28000$ en la corteza terrestre y los parámetros en el manto superior para las ondas P son $k'_x = 0,4024$, $k'_z = -0,9155$, $c'_0 = -25000$ y $t'_i = 0,4166$ y para las ondas SV son $k''_x = 0,2314$, $k''_z = -0,9729$, $c''_0 = c'_0$ y $t''_i = t'_i$. El ángulo de incidencia de la onda P en el dominio es 20° .

Del mismo modo, se resuelve el problema (3.13) con condiciones iniciales (4.2) y condiciones de contorno (4.4). Los parámetros de las condiciones de

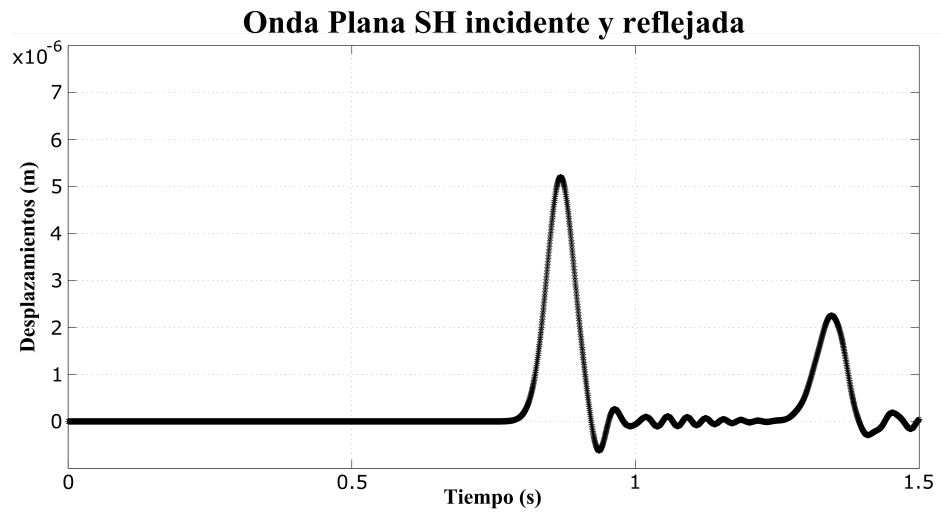


Figura 4.22: Onda plana SH incidente y reflejada en el nodo $P_2 = (1, -1)$. El lóbulo de la izquierda corresponde a la onda incidente y el lóbulo de la derecha a la onda reflejada. Las colas después de cada lóbulo son debidas a la dispersión numérica.

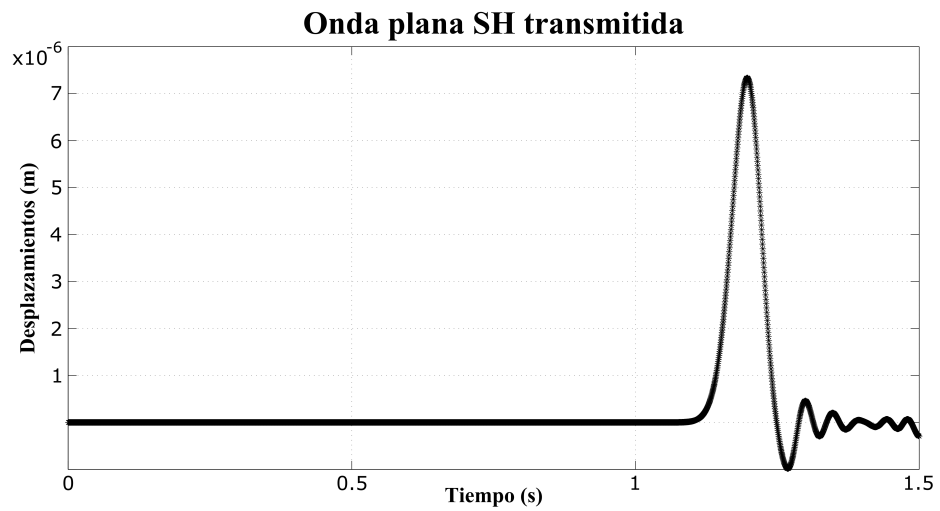


Figura 4.23: Onda plana SH transmitida en el nodo $P_1 = (1, -0,5)$. La cola después del lóbulo se debe a la dispersión numérica.

contorno son $k_x = 0,3420$, $k_z = -0,9397$ y $c_0 = -28000$ en la corteza terrestre y los parámetros en el manto superior son $k_x'' = 0,4034$, $k_z'' = -0,9150$,

$c_0'' = -25000$ y $t_i'' = 0,7265$. El ángulo de incidencia de la onda SH es también de 20° .

La máxima amplitud ha sido medida, tanto para ondas P-SV como para ondas SH, en el nodo $P = (4000, -24000)$ para ondas incidentes y reflejadas y en el nodo $Q = (4000, -26000)$ para ondas transmitidas. Los errores relativos en los nodos P y Q se encuentran en la tabla 4.6 y una instantánea para cada caso se muestra en la figura 4.24 y en la figura 4.25.

Tabla 4.6: Errores relativos para las ondas planas en los nodos $P = (4000, -24000)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $Q = (4000, -26000)$ para las ondas transmitidas. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis.

Onda	P (tiempo)	SV (tiempo)	SH (tiempo)
Incidente	$7,00 \cdot 10^{-3}$ (0,5262)	—	$1,28 \cdot 10^{-2}$ (0,8932)
Reflejada	$4,43 \cdot 10^{-3}$ (0,8058)	$3,61 \cdot 10^{-3}$ (0,9278)	$6,66 \cdot 10^{-3}$ (1,3839)
Transmitida	$4,15 \cdot 10^{-2}$ (0,7825)	$1,27 \cdot 10^{-3}$ (0,8878)	$4,68 \cdot 10^{-2}$ (1,3389)

Ondas P-SV y SH sobre interfase horizontal con esquema heterogéneo

Se considera el dominio espacial $D = [0, 2, 1] \times [-1, 5, 0]$ que está formado por dos medios homogéneos, $D_1 = [0, 2, 1] \times [-1, 5, -0, 75]$ y $D_2 = [0, 2, 1] \times (-0, 75, 0]$. Los parámetros del medio inferior son $\alpha_1 = 1,0$ m/s, $\beta_1 = 0,5$ m/s y $\rho_1 = 10,0$ kg/m³ para las ondas P-SV y $\alpha_1 = \sqrt{3}$ m/s, $\beta_1 = 1,0$ m/s y $\rho_1 = 1,0$ kg/m³ para las ondas SH. Los parámetros del medio superior son $\alpha_2 = 2,0$ m/s, $\beta_2 = 1,0$ m/s y $\rho_2 = 2,0$ kg/m³ para las ondas P-SV y $\alpha_2 = \sqrt{8,5}$ m/s, $\beta_2 = 2,0$ m/s y $\rho_2 = 2,0$ kg/m³ para las ondas SH. El dominio temporal es $t \in [0, 1, 5]$ tanto para ondas P-SV como para ondas SH. La discretización espacial es regular con paso de referencia $h = 7,5 \cdot 10^{-3}$ m y 56483 nodos y la discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.

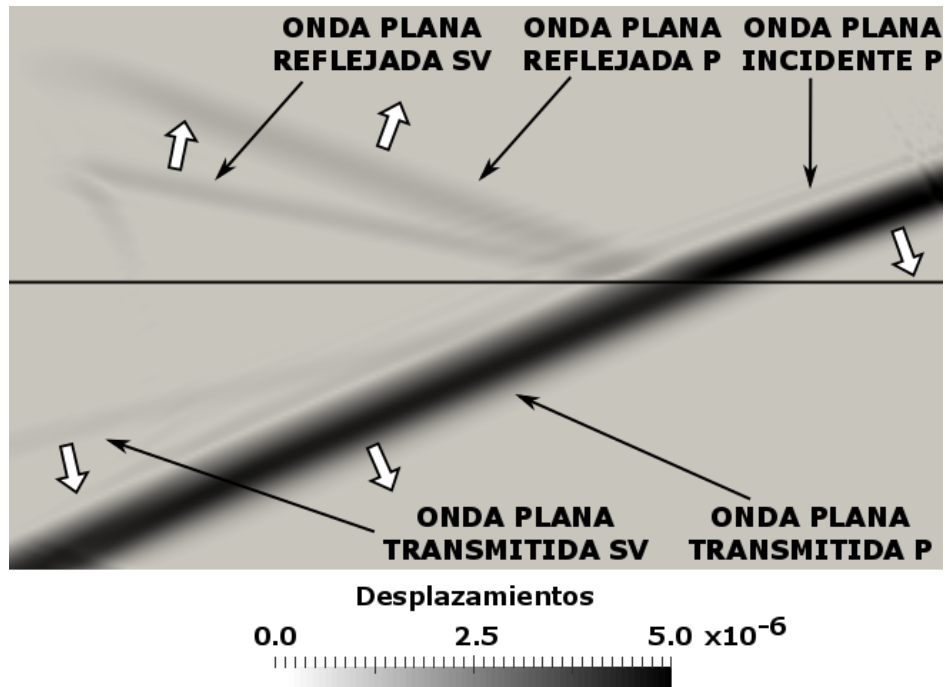


Figura 4.24: Onda P incidente, ondas P y SV reflejadas y ondas P y SV transmitidas en el instante $t = 0,825$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

Para las condiciones anteriores se resuelve el problema (3.12) con condiciones iniciales (4.1) y condiciones de contorno (4.11). Los parámetros de las condiciones de contorno son $k_x = -0,3420$, $k_z = 0,9397$ y $c_0 = -2,2643$ en el medio inferior y los parámetros en el medio superior para las ondas P son $k'_x = 0,6840$, $k'_z = -0,7294$, $c'_0 = -1,5106$ y $t'_i = 0,7082$ y para las ondas SV son $k''_x = 0,3420$, $k''_z = -0,9397$, $c''_0 = c'_0$ y $t''_i = t'_i$. El ángulo de incidencia de la onda P en el dominio es 20° .

Del mismo modo, se resuelve el problema (3.13) con condiciones iniciales (4.2) y condiciones de contorno (4.14). Los parámetros de las condiciones de contorno son $k_x = -0,3420$, $k_z = 0,9397$ y $c_0 = -2,2643$ en el medio inferior y los parámetros en el medio superior son $k''_x = -0,3420$, $k''_z = 0,9397$,

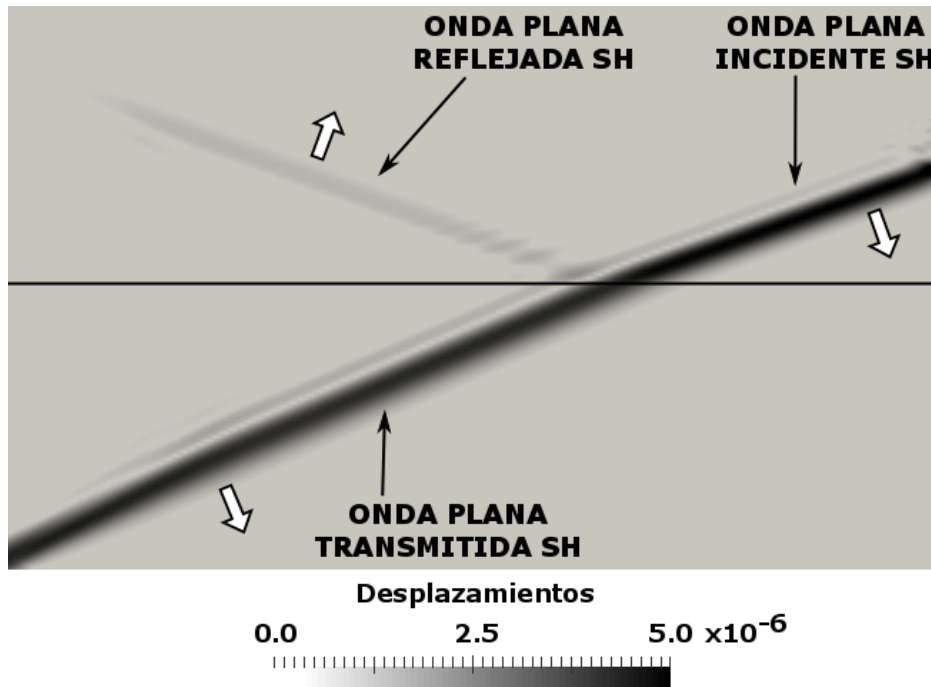


Figura 4.25: Onda SH incidente, reflejada y transmitida en el instante $t = 1,35$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

$c_0'' = -1,5106$ y $t_i'' = 0,7082$. El ángulo de incidencia de la onda SH es también de 20° .

La máxima amplitud ha sido medida para las ondas P-SV en los nodos $P_1 = (0,8025, -0,6150)$ para ondas incidentes y reflejadas y en el nodo $P_2 = (0,8025, -1,0200)$ para ondas transmitidas. En el caso de las ondas SH la máxima amplitud ha sido medida en los nodos $Q_1 = (1,0500, -0,9975)$ para ondas incidentes y reflejadas y en el nodo $Q_2 = (1,0500, -0,5025)$ para ondas transmitidas. Los errores relativos en los nodos P_1 , P_2 , Q_1 y Q_2 se encuentran en la tabla 4.7 y una instantánea para cada caso se muestra en la figura 4.26 y en la figura 4.27.

Tabla 4.7: Errores relativos para las ondas planas P-SV en los nodos $P_1 = (0,8025, -0,6150)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $P_2 = (0,8025, -1,0200)$ para las ondas transmitidas y errores relativos para las ondas planas SH en los nodos $Q_1 = (1,0500, -0,9975)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $Q_2 = (1,0500, -0,5025)$ para las ondas transmitidas. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis.

Onda	P (tiempo)	SV (tiempo)	SH (tiempo)
Incidente	$3,32 \cdot 10^{-2}$ (0,9100)	—	$4,00 \cdot 10^{-2}$ (0,8858)
Reflejada	$7,25 \cdot 10^{-3}$ (1,1629)	$5,28 \cdot 10^{-2}$ (1,3130)	$1,68 \cdot 10^{-3}$ (1,3575)
Transmitida	$2,85 \cdot 10^{-2}$ (1,1385)	$1,13 \cdot 10^{-2}$ (1,2855)	$1,40 \cdot 10^{-2}$ (1,2124)

Ondas SH sobre interfase horizontal irregular con esquema homogéneo

Sobre un dominio rectangular con interfaz horizontal se va a aplicar una onda plana con dirección de propagación perpendicular a la interfaz. Una pequeña región alrededor de la interfaz se va a irregularizar y se van a comparar las amplitudes de ondas reflejadas y transmitidas en nodos situados cerca de la irregularidad y en nodos de la parte regular, véase la figura 4.28.

Para ello, se considera el dominio espacial $D = [0, 2,1] \times [-1,5, 0]$ que está formado por el medio $D_1 = [0, 2,1] \times (-0,75, 0]$, donde las velocidades son $\alpha_1 = 3$ m/s y $\beta_1 = 2$ m/s y la densidad es $\rho_1 = 1$ kg/m³, y el medio $D_2 = [0, 2,1] \times [-1,5, -0,75)$, donde las velocidades son $\alpha_2 = 1,5$ m/s y $\beta_2 = 1$ m/s y la densidad es $\rho_2 = 4$ kg/m³. El dominio temporal es $t \in [0, 0,75]$. La discretización espacial consta de 56481 nodos y es regular con paso de referencia $h = 7,5 \cdot 10^{-3}$ m, excepto en la región $(0,4950, 0,5500) \times (0,7125, 0,7800)$ donde los nodos han sido distribuidos aleatoriamente en el entorno de su posición original. La discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.

Se resuelve el problema (3.13) con condiciones iniciales (4.2) y condiciones de contorno (4.14). Los parámetros de las condiciones de contorno son

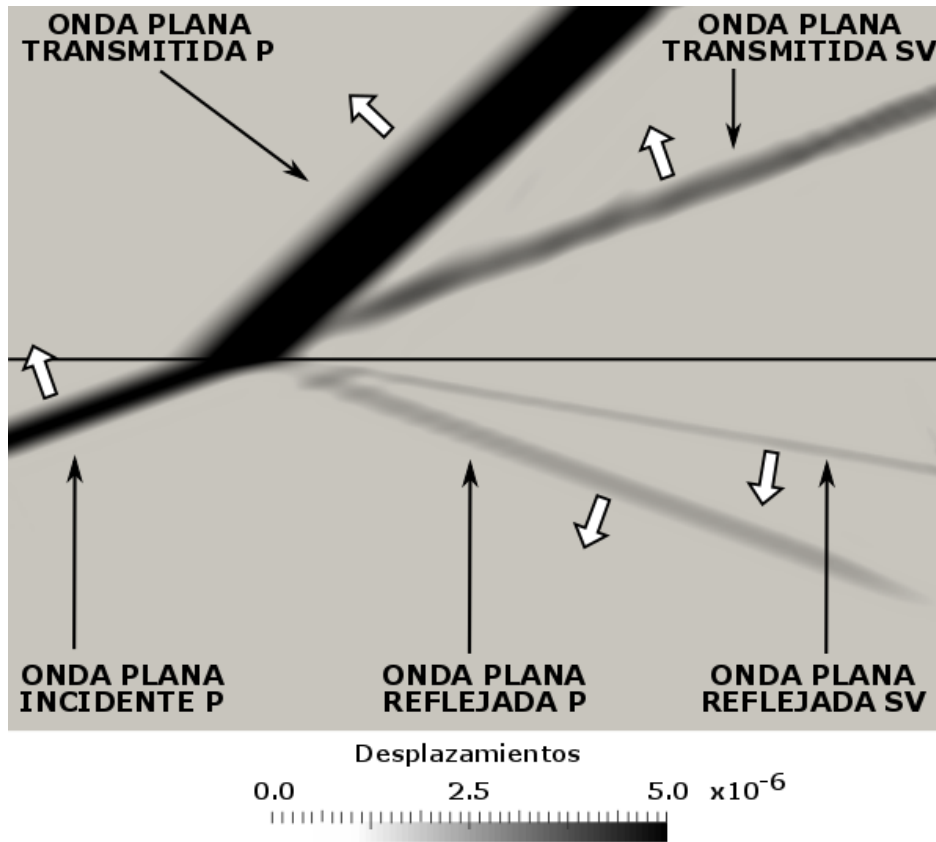


Figura 4.26: Onda P incidente, ondas P y SV reflejadas y ondas P y SV transmitidas en el instante $t = 1,3$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

$k_x = 0$, $k_z = -1$ y $c_0 = 0$ en el medio superior y los parámetros en el medio inferior son $k_x'' = 0$, $k_z'' = -1$, $c_0'' = -0,7575$ y $t_i'' = 0,3788$. El ángulo de incidencia de la onda SH es de 0° .

La máxima amplitud ha sido medida en los nodos $Q_R = (0,525, -0,6)$ y $P_R = (1,575, -0,6)$ para ondas reflejadas y en los nodos $Q_T = (0,525, -0,84)$ y $P_T = (1,575, -0,84)$ para ondas transmitidas. Los errores relativos en los nodos P_R , Q_R , P_T y Q_T se encuentran en la tabla 4.8 y una instantánea se muestra en la figura 4.29. Las figuras 4.30 y 4.31 muestran la evolución temporal en los nodos Q_R y Q_T , respectivamente. Las figuras para la evolución

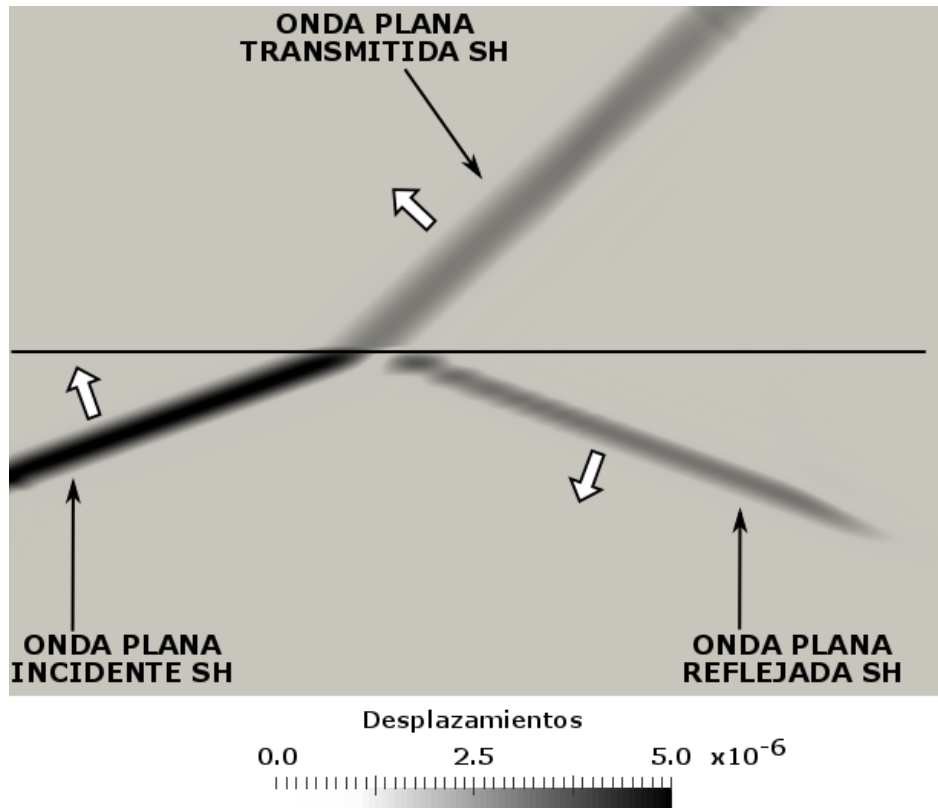


Figura 4.27: Onda SH incidente, reflejada y transmitida en el instante $t = 1,3$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

temporal en los nodos P_R y P_T son tan similares que no se aprecia diferencia y, por tanto, no se muestran.

Aunque los errores relativos de las amplitudes de la zona irregular son el doble que los errores relativos de las amplitudes en la zona regular, debe tenerse en cuenta que la irregularidad considerada es exagerada y no tiene sentido en un caso real. En cualquier caso, se observa que los errores se mantienen en los valores obtenidos hasta el momento en los demás casos.

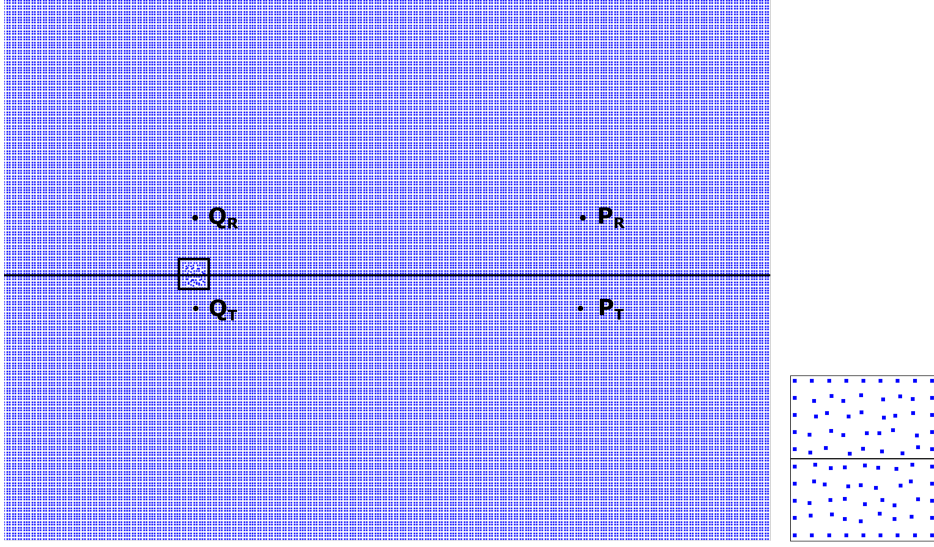


Figura 4.28: Discretización irregular cerca de la interfase (izquierda). Detalle de la irregularidad de la interfase (derecha).

Tabla 4.8: Errores relativos para la onda plana en los nodos $Q_R = (0,525, -0,6)$ y $P_R = (1,575, -0,6)$ para las ondas reflejadas y en los nodos $Q_T = (0,525, -0,84)$ y $P_T = (1,575, -0,84)$ para las ondas transmitidas.

Onda	Nodos P (tiempo)	Nodos Q (tiempo)
Reflejada	$1,00 \cdot 10^{-3}$ (0,5110)	$1,90 \cdot 10^{-3}$ (0,5110)
Transmitida	$2,00 \cdot 10^{-3}$ (0,5115)	$4,60 \cdot 10^{-3}$ (0,5115)

Ondas P-SV y SH sobre interfase inclinada con esquema heterogéneo

Se considera el dominio espacial $D = [0, 2,1] \times [0, 1,5]$ que está formado por dos medios homogéneos, $D_1 = \{(x, z) \in D | z > -\tan(5^\circ)x + 0,855\}$ con $\alpha_1 = \sqrt{3}$ m/s, $\beta_1 = 1$ m/s y $\rho_1 = 1$ kg/m³ y $D_2 = \{(x, z) \in D | z < -\tan(5^\circ)x + 0,855\}$ con $\alpha_2 = \sqrt{10}$ m/s, $\beta_2 = 2$ m/s y $\rho_2 = 2$ kg/m³. El dominio temporal es $t \in [0, 1,5]$ tanto para ondas P-SV como para ondas SH. Puesto que el GDFM permite una distribución irregular de nodos, la discretización espacial que se va a considerar es $M = \Omega \cup \Gamma$ donde

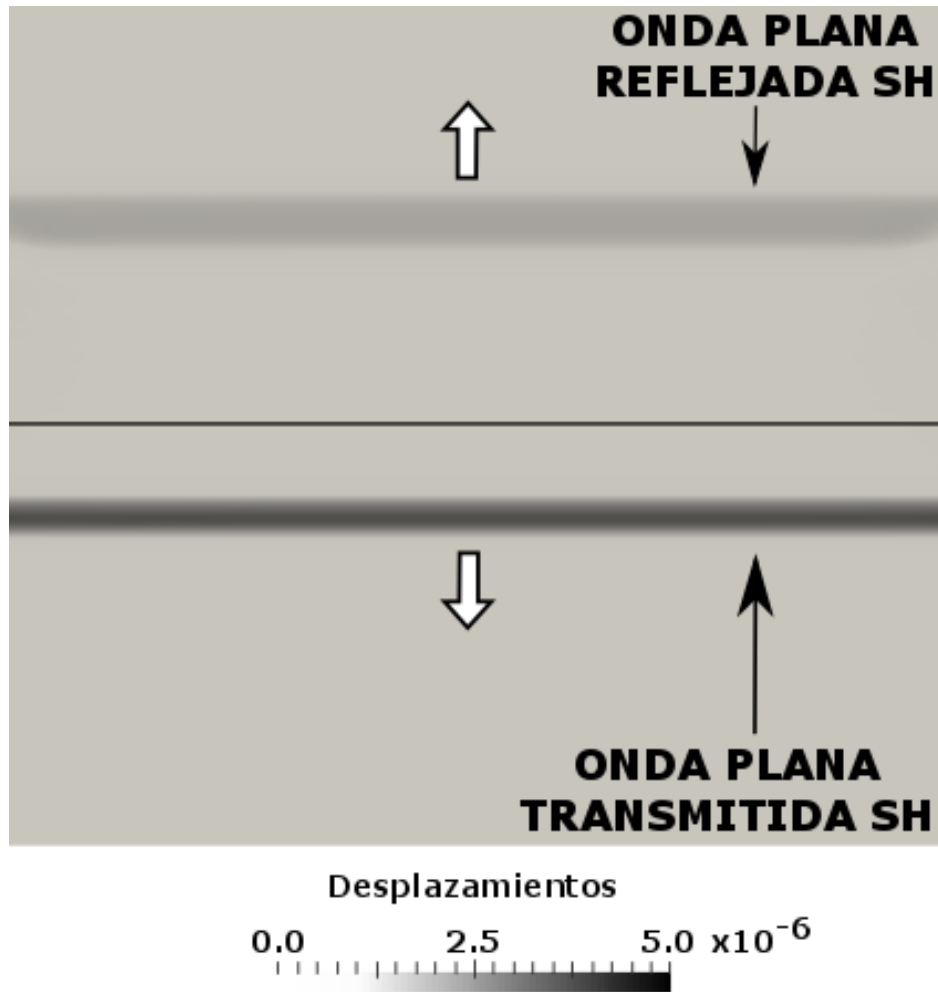


Figura 4.29: Onda SH reflejada y transmitida en el instante $t = 0,6$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

$\Omega = \{(x_i, z_i) \in D | x_i = n \cdot h, z_i = f(x_i) + m \cdot h\}$ siendo $h = 7,5 \cdot 10^{-3}$ m el paso de referencia de la discretización, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2, \dots, 56482\}$ el número de nodos de la discretización y $f(x) = -\tan(5^\circ)x + 0,855$. En este tipo de discretizaciones se debe imponer una condición de mínima distancia entre nodos que en este caso es $h/2$, esto es, no puede haber dos nodos cuya distancia sea inferior. Aunque no es una discretización ideal puesto que provoca estrellas irregulares y huecos en el contorno, se ha elegido debido a su facilidad de generación. La discretización puede verse en la figura 4.32. La

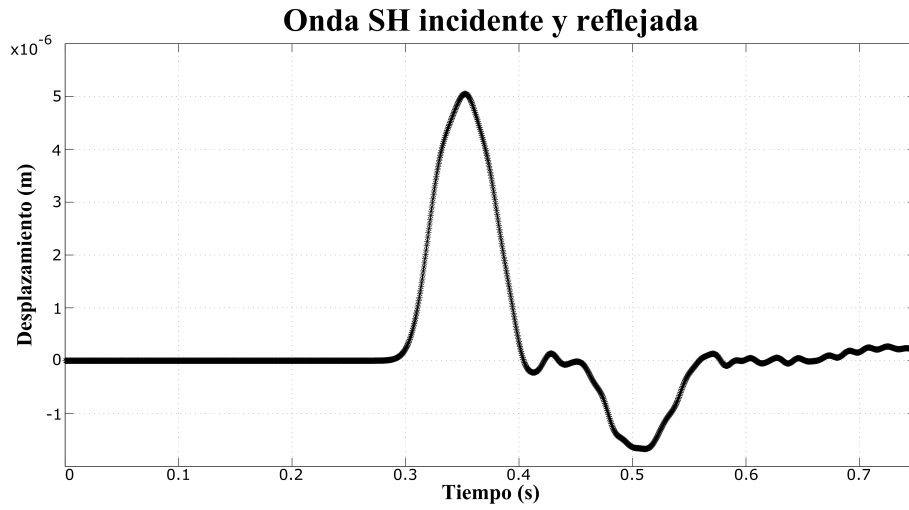


Figura 4.30: Onda plana SH incidente y reflejada en el nodo $Q_R = (0,525, -0,6)$. El lóbulo de la izquierda corresponde a la onda incidente y el lóbulo de la derecha a la onda reflejada. Las colas después de cada lóbulo son debidas a la dispersión numérica.

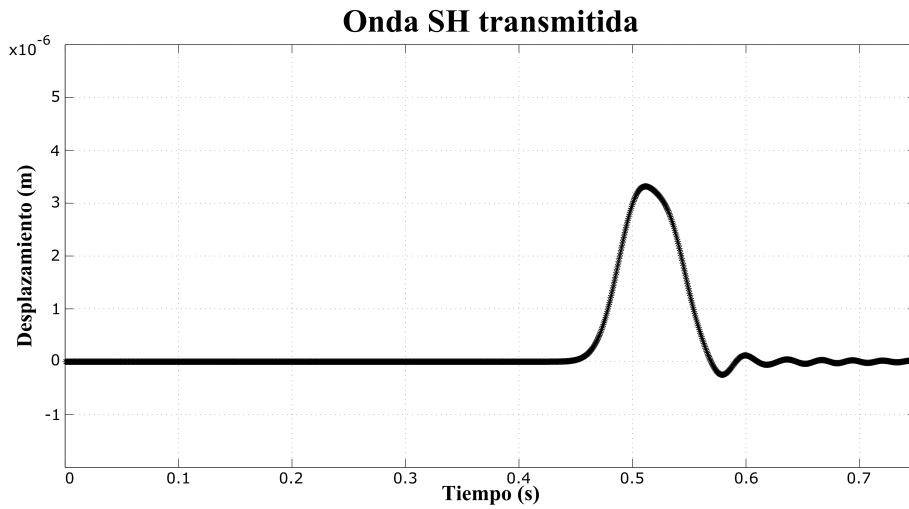


Figura 4.31: Onda plana SH transmitida en el nodo $Q_T = (0,525, -0,84)$. La cola después del lóbulo se debe a la dispersión numérica.

discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.

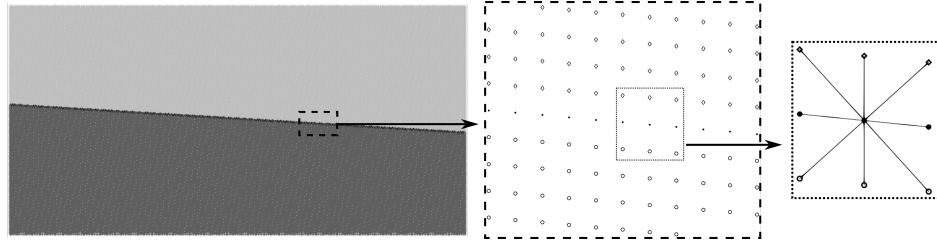


Figura 4.32: Izquierda: Dominio formado por dos medios homogéneos y separados por una interfaz inclinada 5° . Centro: Interfaz ampliada. Derecha: Estrella cuyo nodo central es un nodo de la interfase. Los nodos con forma de diamante están en el dominio D_1 , los nodos con forma de circunferencia están en el dominio D_2 y los nodos denotados por puntos están en la interfase. Esta imagen pone de manifiesto que no se trata de una discretización regular a la que se ha realizado un giro.

Para las condiciones anteriores se resuelve el problema (3.12) con condiciones iniciales (4.1) y condiciones de contorno (4.11). Para este problema los parámetros de las condiciones de contorno son $k_x = -0,0872$, $k_z = -0,9962$ y $c_0 = 1,6774$ en el medio superior y los parámetros en el medio inferior para las ondas P son $k'_x = -0,0872$, $k'_z = -0,9962$, $c'_0 = 0,8481$ y $t'_i = 0,4788$. El ángulo de incidencia de la onda P en el dominio es 0° .

Del mismo modo, se resuelve el problema (3.13) con condiciones iniciales (4.2) y condiciones de contorno (4.14). Para este problema los parámetros de las condiciones de contorno son $k_x = 0,2588$, $k_z = -0,9659$ y $c_0 = 1,5$ en el medio superior y los parámetros en el medio inferior son $k''_x = 0,6179$, $k''_z = -0,7863$, $c''_0 = 0,8512$ y $t''_i = 0,7082$. El ángulo de incidencia de la onda SH es en este caso de 20° .

La máxima amplitud ha sido medida para las ondas P-SV en los nodos $Q_1 = (0,9, 1,1062)$ para ondas incidentes y reflejadas y en el nodo $Q_2 = (0,9, 0,6037)$ para ondas transmitidas. En el caso de las ondas SH la máxima amplitud ha sido medida en los nodos $P_1 = (1,005, 0,9996)$ para ondas incidentes y reflejadas y en el nodo $P_2 = (1,005, 0,5946)$ para ondas transmitidas. Los errores relativos en los nodos P_1 , P_2 , Q_1 y Q_2 se encuentran

en la tabla 4.9 y una instantánea para cada caso se muestra en las figuras 4.33 y 4.34.

Tabla 4.9: Errores relativos para las ondas planas P-SV en los nodos $Q_1 = (0,9, 1,1062)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $Q_2 = (0,9, 0,6037)$ para las ondas transmitidas y errores relativos para las ondas planas SH en los nodos $P_1 = (1,005, 0,9996)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $P_2 = (1,005, 0,5946)$ para las ondas transmitidas. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis.

Onda	P (tiempo)	SH (tiempo)
Incidente	$1,08 \cdot 10^{-2}$ (0,3397)	$3,90 \cdot 10^{-2}$ (0,7980)
Reflejada	$4,84 \cdot 10^{-3}$ (0,7156)	$1,17 \cdot 10^{-2}$ (1,2394)
Transmitida	$5,77 \cdot 10^{-2}$ (0,5870)	$3,37 \cdot 10^{-2}$ (1,0935)

Ondas P-SV sobre interfase inclinada con esquema heterogéneo

Se considera el dominio espacial $D = [0, 1,5] \times [0, 2,1]$ que está formado por dos medios homogéneos, $D_1 = \{(x, z) \in D | z > -\tan(30^\circ)x + 1,5\}$ con $\alpha_1 = 2$ m/s, $\beta_1 = 1$ m/s y $\rho_1 = 2$ kg/m³ y $D_2 = \{(x, z) \in D | z < -\tan(30^\circ)x + 1,5\}$ con $\alpha_2 = 3$ m/s, $\beta_2 = 2$ m/s y $\rho_2 = 5$ kg/m³. El dominio temporal es $t \in [0, 0,75]$. Puesto que el GDFM permite una distribución irregular de nodos, la discretización espacial que se va a considerar es $M = \Omega \cup \Gamma$ donde $\Omega = \{(x_i, z_i) \in D | x_i = n \cdot h, z_i = f(x_i) + m \cdot h\}$ siendo $h = 7,5 \cdot 10^{-3}$ m el paso de referencia de la discretización, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2, \dots, 56335\}$ el número de nodos de la discretización y $f(x) = -\tan(30^\circ)x + 1,5$. En este tipo de discretizaciones se debe imponer una condición de mínima distancia entre nodos que en este caso es $h/2$. Como antes, aunque no es una discretización ideal puesto que provoca estrellas irregulares y huecos en el contorno, se ha elegido debido a su facilidad de generación. La discretización puede verse en la figura 4.35. La discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.

Para las condiciones anteriores se resuelve el problema (3.12) con condi-

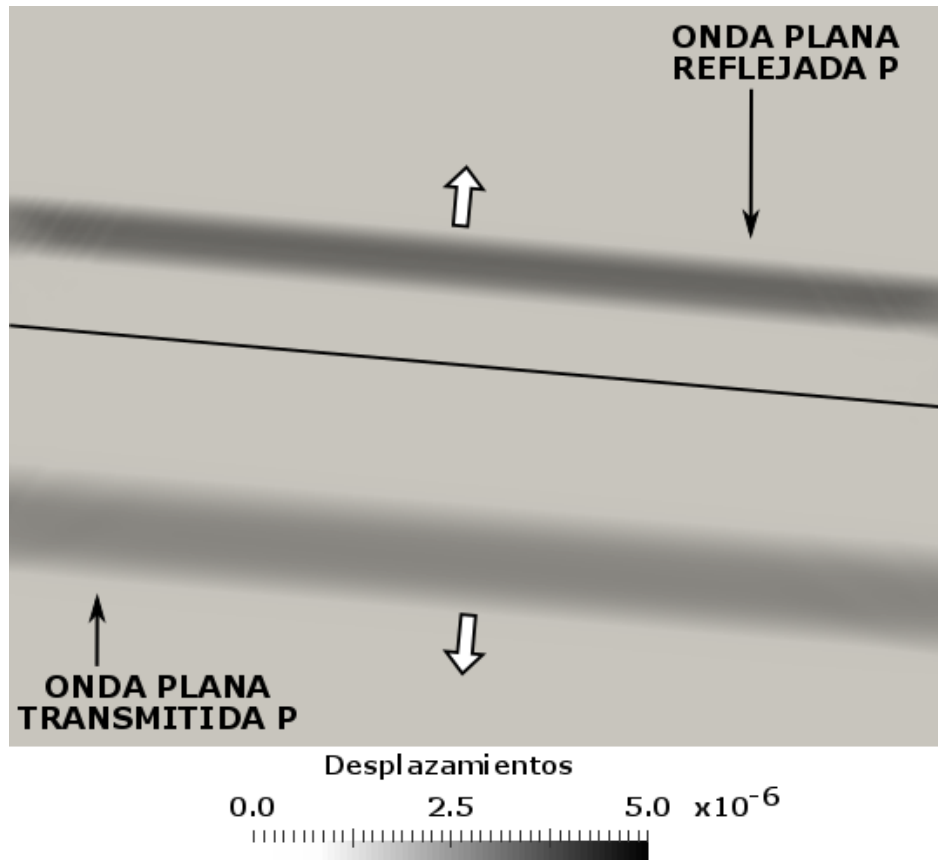


Figura 4.33: Onda P reflejada y transmitida en el instante $t = 0,65$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

ciones iniciales (4.1) y condiciones de contorno (4.11). Para este problema los parámetros de las condiciones de contorno son $k_x = 0,0$, $k_z = -1,0$ y $c_0 = 2,1$ en el medio superior y los parámetros en el medio inferior para las ondas P son $k'_x = 0,3188$, $k'_z = -0,9478$, $c'_0 = 1,5$ y $t'_i = 0,3$ y para las ondas SV son $k''_x = 0$, $k''_z = -1,0$, $c''_0 = c'_0$ y $t''_i = t'_i$. El ángulo de incidencia de la onda P en el dominio es de 30° .

La máxima amplitud ha sido medida para las ondas P-SV en el nodo $P_1 = (1,005, 1,1526)$ para ondas incidentes y reflejadas y en el nodo $P_2 = (0,75, 0,5572)$ para ondas transmitidas. Los errores relativos en los

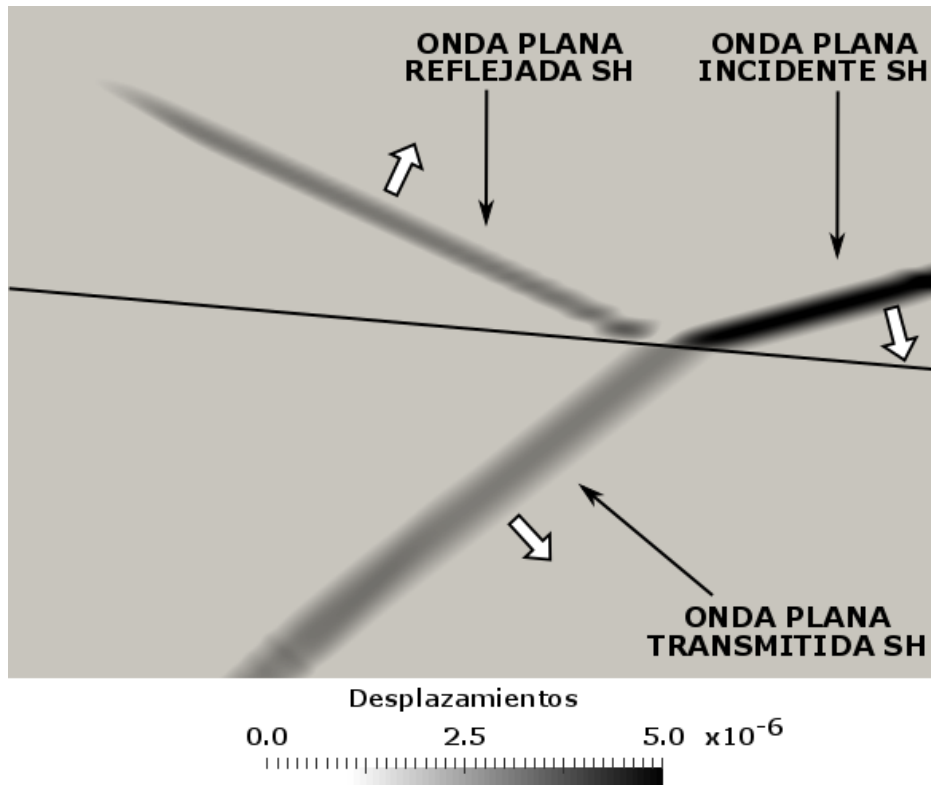


Figura 4.34: Onda SH incidente, reflejada y transmitida en el instante $t = 1,19$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

nodos P_1 y P_2 se encuentran en la tabla 4.10 y una instantánea se muestra en la figura 4.36.

En este caso particular, sería una buena opción usar estrellas de 6 nodos debido a su distribución en forma de hexágono, véase la figura 4.35 (parte inferior derecha). El tiempo computacional se reduce un 19,41% y los errores relativos para la máxima amplitud, que ha sido medida en el nodo $Q_1 = (1,005, 1,2051)$ para ondas incidentes y reflejadas y en el nodo $Q_2 = (0,75, 0,5047)$ para ondas transmitidas, se encuentran en la tabla 4.11.

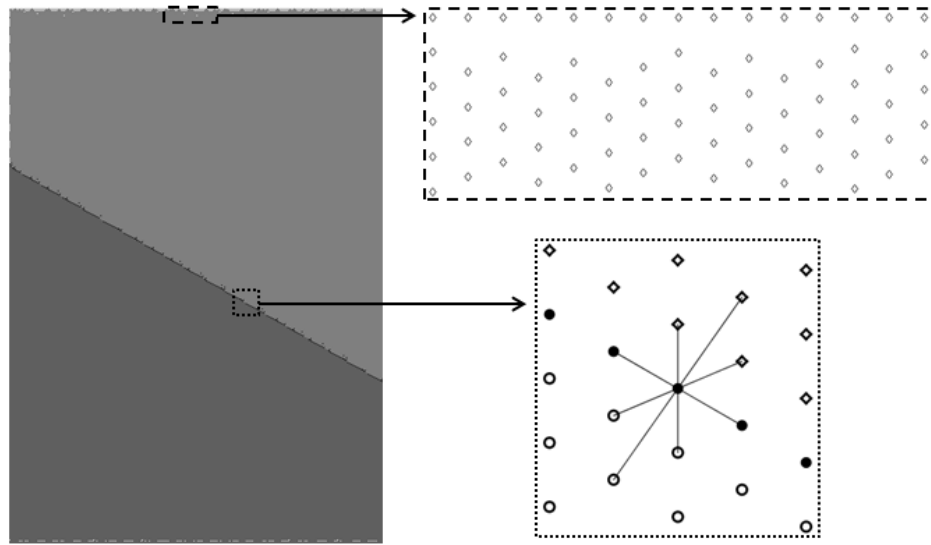


Figura 4.35: Izquierda: Dominio formado por dos medios homogéneos y separados por una interfaz inclinada 30° . Parte superior derecha: Detalle del contorno. Esta imagen pone de manifiesto los huecos provocados por la irregularidad. Parte inferior derecha: Estrella cuyo nodo central es un nodo de la interfase. Los nodos con forma de diamante están en el dominio D_1 , los nodos con forma de circunferencia están en el dominio D_2 y los nodos denotados por puntos están en la interfase. Esta imagen pone de manifiesto que no se trata de una discretización regular a la que se ha realizado un giro.

Tabla 4.10: Errores relativos para las ondas planas P - SV en los nodos $P_1 = (1,005, 1,1526)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $P_2 = (0,75, 0,5572)$ para las ondas. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis.

Onda	P (tiempo)	SV (tiempo)
Incidente	$1,28 \cdot 10^{-2}$ (0,5282)	—
Reflejada	$7,76 \cdot 10^{-3}$ (0,6960)	$1,45 \cdot 10^{-2}$ (0,7275)
Transmitida	$1,30 \cdot 10^{-2}$ (0,8055)	$1,78 \cdot 10^{-2}$ (0,8225)

Ondas P - SV sobre interfase curva con esquema homogéneo

En este caso la interfase viene dada por la siguiente curva

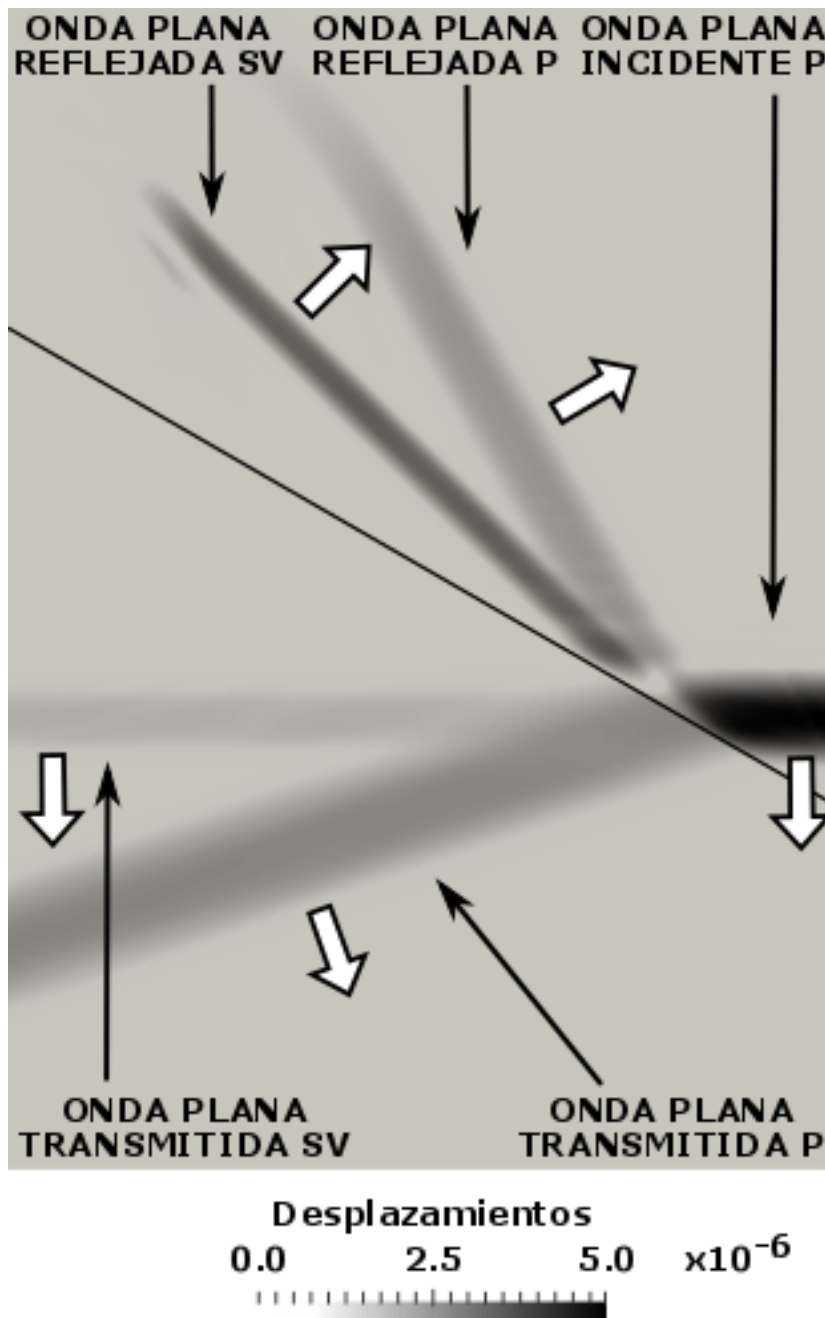


Figura 4.36: Onda P incidente, ondas P y SV reflejadas y ondas P y SV transmitidas en el instante $t = 0,7$ s. Las flechas con fondo blanco señalan la dirección de propagación en cada caso.

Tabla 4.11: Errores relativos para las ondas planas P-SV en los nodos $Q_1 = (1,005, 1,2051)$ para las ondas incidentes y reflejadas y $Q_2 = (0,75, 0,5047)$ para las ondas. El instante en el que la amplitud es máxima en cada nodo se muestra entre paréntesis.

Onda	P (tiempo)	SV (tiempo)
Incidente	$3,40 \cdot 10^{-3}$ (0,5080)	—
Reflejada	$1,39 \cdot 10^{-2}$ (0,7120)	$8,95 \cdot 10^{-3}$ (0,8430)
Transmitida	$1,41 \cdot 10^{-2}$ (0,7460)	$3,24 \cdot 10^{-3}$ (0,8640)

$$f(x) = \begin{cases} 1620, & 0 \leq x \leq 1000 \\ 1620 + 250 \cos\left(\frac{x - 1000 - 500\pi}{500}\right), & 1000 < x < 1000 + 500\pi \\ 1620, & 1000 + 500\pi \leq x \leq 5000 - 500\pi \\ 1620 - 250 \cos\left(\frac{x - 5000 - 750\pi}{500}\right), & 5000 - 500\pi < x < 5000 \\ 1620, & 5000 \leq x \leq 6000 \end{cases} \quad (4.21)$$

Se considera el dominio espacial $D = [0, 6000] \times [0, 2800]$ que está formado por dos medios homogéneos, $D_1 = \{(x, z) \in D | z > f(x)\}$ con $\alpha_1 = 2$ km/s, $\beta_1 = 1$ km/s y $\rho_1 = 2000$ kg/m³ y $D_2 = \{(x, z) \in D | z < f(x)\}$ con $\alpha_2 = 4$ km/s, $\beta_2 = 2$ km/s y $\rho_2 = 500$ kg/m³. El dominio temporal es $t \in [0, 1]$. La discretización es irregular de 53741 nodos y está formada por capas horizontales de discretizaciones regulares de diferentes pasos de referencia, desde $h = 10$ m para los nodos en la franja que cubre la interfase hasta $h = 30$ m para los nodos más alejados de la interfase. La discretización puede verse en la figura 4.37. La discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$.

Este es un buen ejemplo sobre la eficiencia del método ya que es posible ensamblar discretizaciones regulares de diferente paso de forma natural sin requerir ningún tratamiento adicional.

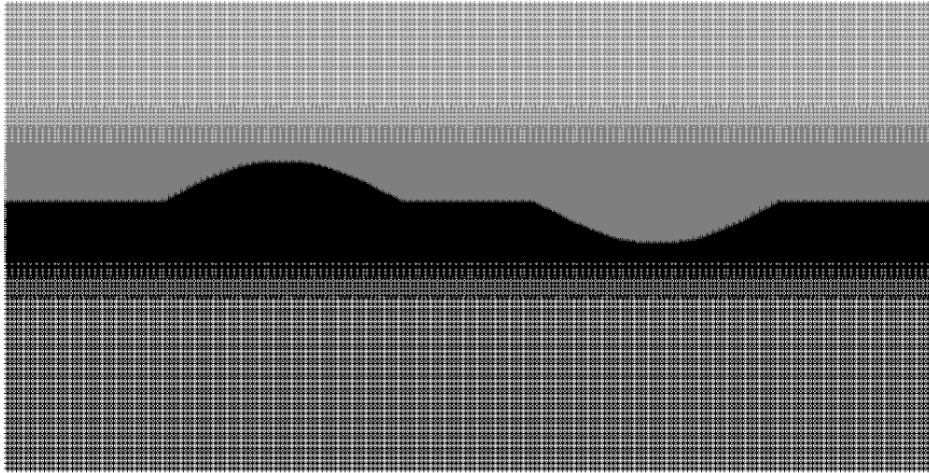


Figura 4.37: Discretización irregular formada por capas de discretizaciones regulares que son más finas cerca de la interfase y más gruesas lejos de ella. El medio superior con nodos grises es D_1 y el medio inferior con nodos negros es D_2 .

Bajo las consideraciones anteriores se resuelve el problema (3.12) con condiciones iniciales (4.1) y condiciones de contorno (4.11) para el medio superior con parámetros $k_x = 0,0$, $k_z = -1,0$ y $c_0 = 2800$ y desplazamientos nulos en el medio inferior. El ángulo de incidencia de la onda P es de 0° .

De acuerdo con la ley de Snell, en la interfase curva las ondas P reflejadas mantienen la misma forma al alejarse de ésta, expandiéndose en la región cóncava y contrayéndose en la región convexa. Por su parte las ondas P transmitidas se doblan hacia los lados en la región cóncava y hacia el mínimo en la región convexa, véase la figura 4.38. Debido a esto último y como consecuencia del principio de superposición, los mayores desplazamientos se producen a ambos lados en la región cóncava y hacia el centro en la región convexa. Además, las ondas P transmitidas se comportan como una anomalía circular rápida en el caso cóncavo y como una anomalía circular lenta en el caso convexo. Finalmente, se observa que, en este caso, $\beta_1 = \alpha_2$ y, por tanto, las ondas SV se transmiten con la misma inclinación que las ondas P, esto es, horizontalmente. La figura 4.39 muestra los casos citados.

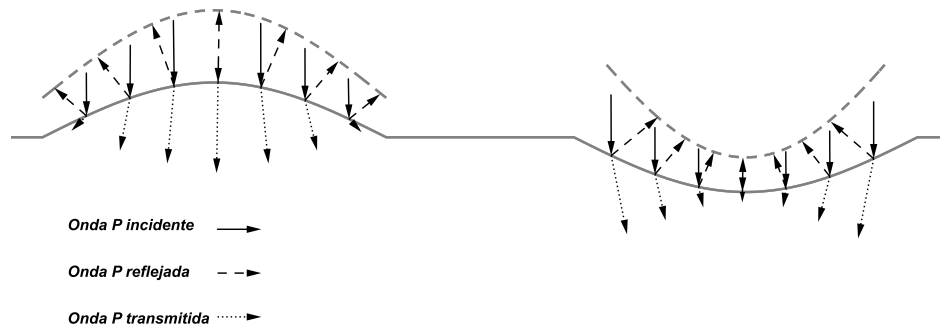


Figura 4.38: Direcciones de la onda plana conforme a la ley de Snell.

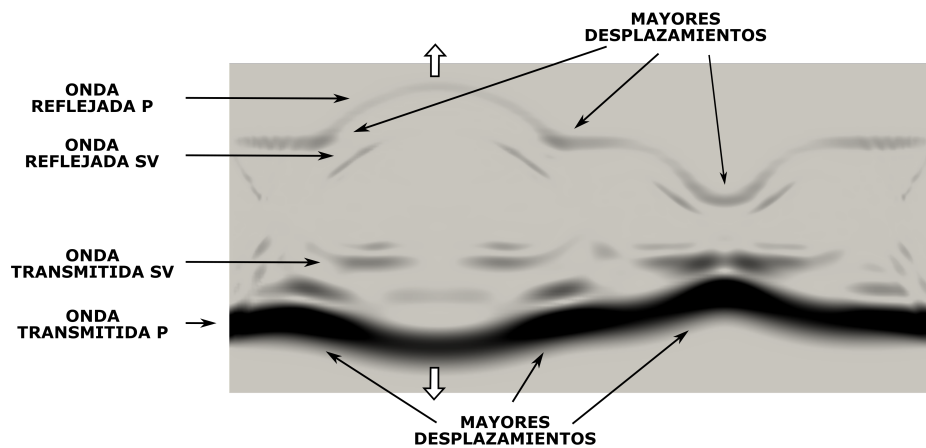


Figura 4.39: Ondas reflejadas y transmitidas en el instante $t = 0,9$ s.

4.5. Guía de ondas

En general, la velocidad de las ondas sísmicas aumenta con la profundidad por lo que las ondas se vuelven horizontales a medida que profundizan en el interior terrestre. Sin embargo, en algunas regiones la velocidad disminuye con la profundidad, produciendo un medio de baja velocidad entre dos medios de alta velocidad. Si las ondas sísmicas son generadas en el medio

de baja velocidad, entonces el fenómeno de la reflexión interna total atrapará mucha de la energía sísmica en el canal de baja velocidad, que actúa como una guía de ondas. Un caso bien conocido de guía de ondas es la región SOFAR, *SOund Fixing And Ranging*, que se produce en los océanos a una profundidad aproximada de 1000 m. Los terremotos pueden ser estudiados usando el canal SOFAR que propaga las ondas sísmicas como ondas T. Las guías de ondas son también asociadas con zonas de fallas debido a sus bajas velocidades en comparación con el medio que las envuelve.

Para verificar esto, se van a mostrar dos casos en los cuales el dominio espacial considerado es $D = [300, 1700] \times [0, 2000]$ con contornos absorbentes laterales en $C = [0, 300) \times [0, 2000] \cup (1700, 2000] \times [0, 2000]$. En el primer caso, el medio de baja velocidad está comprendido por la región del dominio $D_1 = \{(x, z) \in D | 900 \leq z \leq 1000\}$ y tiene velocidades de $\alpha_1 = 1$ km/s y $\beta_1 = 0,5$ km/s y densidad $\rho_1 = 1000$ kg/m³ mientras que las regiones de alta velocidad, $D_2 = \{(x, z) \in D | z < 900\} \cup \{(x, z) \in D | z > 1000\}$, tienen velocidades de $\alpha_2 = 3,16$ km/s y $\beta_2 = 1,58$ km/s y densidad $\rho_2 = 100$ kg/m³. En el segundo caso los medios están intercambiados para poder comparar los efectos en ambos casos.

Para el dominio espacial considerado se resuelve el problema (3.12), al que se han añadido las fuerzas de volumen y su discretización en el esquema en GDF, con condiciones iniciales (4.1) y desplazamientos igual a cero como condiciones de contorno. Las fuerzas de volumen vienen dadas por la función

$$f(x, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, z) \neq (400, 1000) \\ g(t) & \text{si } (x, z) = (400, 1000) \text{ y } t \in [0, 0,1] \end{cases} \quad (4.22)$$

siendo g la función definida en (4.5) con $A = 5 \cdot 10^{-6}$ m, $f = \frac{\sqrt{2}}{0,1\pi}$ Hz y $t_0 = 0,1$ s. La explosión se muestra en la figura 4.40.

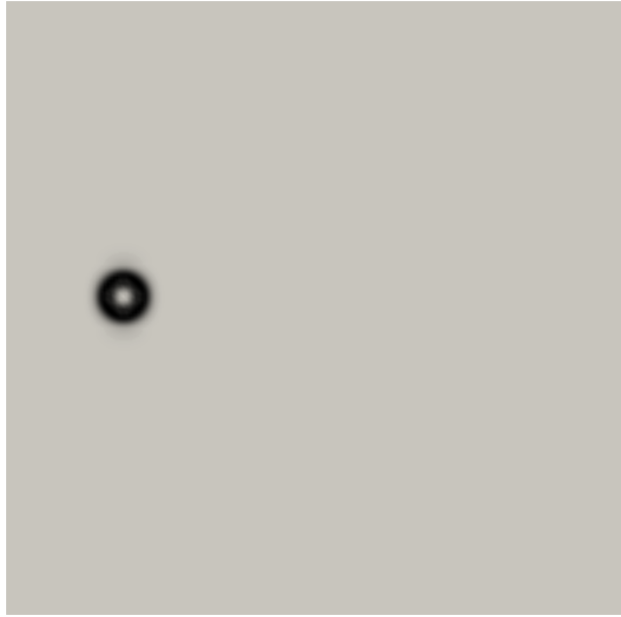


Figura 4.40: Explosión generada en la región intermedia.

El dominio temporal para el caso de la guía de ondas es $t \in [0, 2]$ y $t \in [0, 1]$ en el otro caso. La discretización espacial es regular de paso de referencia $h = 10$ m y la discretización temporal es $\Delta t = 10^{-3}$ s en ambos casos.

En el caso de la guía de ondas se puede observar en la escala de la figura 4.41 (izquierda) que las ondas en D_1 tienen, después de $t = 1,3$ s., módulos de desplazamientos más altos que las ondas en D_2 como consecuencia de una mayor reflexión interna que produce una gran cantidad de superposiciones de ondas. Sin embargo, en el caso opuesto, cuando la región intermedia es de alta velocidad y el medio que la rodea de baja velocidad se tiene que las ondas tienen, después de $t = 0,9$ s., módulos de desplazamientos más bajos en D_1 que en D_2 , como se puede observar en la figura 4.41 (derecha) pues la reflexión interna es muy baja y más ondas escapan de la región intermedia D_2 . Los máximos desplazamientos en el primer caso se alcanza en la región central y su valor es $6,4 \cdot 10^{-14}$ m, mientras que los máximos desplazamientos en el segundo caso se alcanzan fuera de la región central y su valor es $9,4 \cdot 10^{-15}$ m.

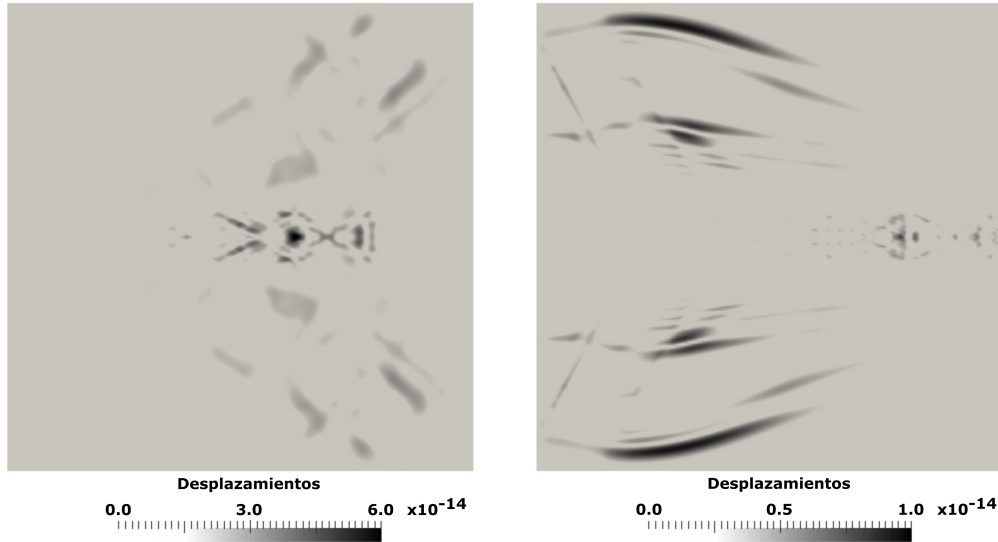


Figura 4.41: Izquierda: Un medio de baja velocidad entre dos medios de alta velocidad en el instante $t = 1,3$ s. Derecha: Un medio de alta velocidad entre dos medios de baja velocidad en el instante $t = 0,9$ s.

4.6. Principio de Huygens

La teoría geométrica de rayos tiene dos principales limitaciones, por un lado no proporciona información directa sobre las amplitudes de las ondas y por otro lado en algunas aplicaciones falla al describir el comportamiento de la onda.

Por ejemplo, las ondas se doblan o difractan alrededor del núcleo terrestre alcanzando lugares en los cuales la ley de Snell no predice trayectorias de rayos. Del mismo modo, aunque la teoría de trayectorias de rayos dice que no se transmite energía cuando una onda incide en una interfase con un ángulo postcrítico, algo de energía sí que se transmite. Redirigir tales cuestiones requiere considerar explícitamente el hecho de que la energía sísmica se propaga como ondas. Una importante aproximación es conocida como principio

de Huygens.

Principio de Huygens. Cada punto en un frente de onda se considera un foco de Huygens que origina otro frente de onda circular.

El principio de Huygens explica el fenómeno de la difracción. El caso más simple es el de un frente de onda llegando a una hendedura. La energía se propaga a los lados y puede ser detectada alrededor de las esquinas aunque la teoría geométrica de rayos no detecte trayectoria allí. Este proceso ocurre con las ondas de cortante que no pueden atravesar el líquido del núcleo exterior y, por tanto, difractan a su alrededor. Si el obstáculo tiene una anchura menor que media longitud de onda, las ondas que incidan en él difractan generando un foco de ondas. Recíprocamente, si la hendedura es muy ancha en comparación con la longitud de onda, la difracción ocurre sólo en los bordes de la hendedura.

Para comprobarlo, se considera el dominio espacial $D = [0, 2000] \times [0, 1000]$ con $\alpha = 1$ km/s y $\beta = 0,5$ km/s y $\rho = 1000$ kg/m³. El dominio temporal es $t \in [0, 1]$. La discretización espacial consta de 20301 nodos y es regular de paso de referencia $h = 10$ m. La discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ s. El contorno viene dado por $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma'$ siendo $\Gamma_1 = \{0\} \times (500, 1000) \cup [0, 2000] \times \{1000\} \cup \{2000\} \times (500, 1000)$, $\Gamma_2 = \{0\} \times (0, 500) \cup [0, 2000] \times \{0\} \cup \{2000\} \cup (0, 500)$ y para el caso de una hendedura con anchura menor a media longitud de onda se usará $\Gamma' = [0, 500] \times \{950\} \cup [0, 1050] \times \{500\}$ y para el caso de una hendedura más ancha se utilizará $\Gamma' = [0, 500] \times \{500\} \cup [0, 1500] \times \{500\}$.

En estas condiciones se resuelve el problema (3.12) con condiciones iniciales (4.1) y condiciones de contorno (4.11) en Γ_1 con parámetros $k_x = 0,0$, $k_z = -1,0$ y $c_0 = 1000$ y desplazamientos nulos en Γ_2 y Γ' en ambos casos. El ángulo de incidencia de la onda P es de 0° .

La longitud de la onda plana incidente es $\lambda = \frac{\alpha}{f} \approx 222,14$ m y las hendeduras consideradas tienen 100 m y 1000 m de ancho. En el primer caso

se produce un frente de ondas circular, como se aprecia en la figura 4.42, y en el segundo caso el frente se difracta sólo en los bordes de las hendeduras, como se muestra en la figura 4.43. Además, en el primer caso se observa que el frente reflejado vuelve a unirse lo que es debido al efecto de la difracción.

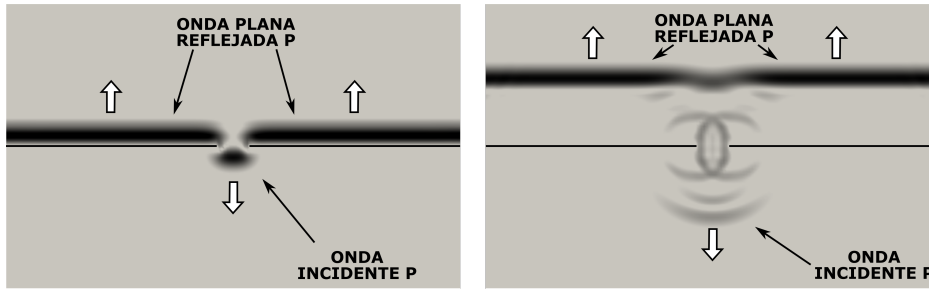


Figura 4.42: Frente de ondas propagándose a través de una hendidura con anchura menor a media longitud de onda en los instantes $t = 0,6$ s (izquierda) y $t = 0,8$ s (derecha).

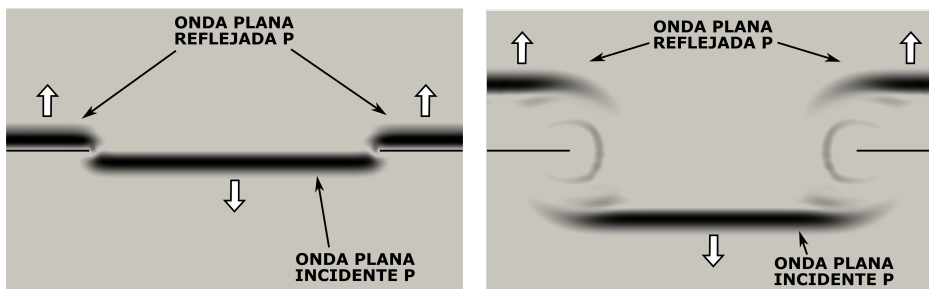


Figura 4.43: Frente de ondas propagándose a través de una hendidura con anchura de varias longitudes de onda en los instantes $t = 0,6$ s (izquierda) y $t = 0,8$ s (derecha).

Efectos similares ocurren cuando un frente de ondas se encuentra con un obstáculo circular donde la teoría geométrica de rayos predice que no llegará energía detrás del obstáculo pero, en realidad, las ondas difractan a su alrededor y cierran el hueco. Este proceso, conocido como *waveform annealing*, explica por qué es difícil detectar un obstáculo o una zona de baja velocidad, como por ejemplo plumas subiendo desde las profundidades del manto.

En cambio es muy fácil detectar zonas de alta velocidad, como por ejemplo subducciones de la litosfera en fosos.

Para estos casos se considera el dominio espacial $D = [0, 2000] \times [0, 2000]$ con $\alpha_1 = 2$ km/s, $\beta_1 = 1$ km/s y $\rho_1 = 1000$ kg/m³. El dominio temporal es $t \in [0, 1]$. La discretización es irregular con 39213 nodos donde la irregularidad se encuentra alrededor de la anomalía circular $C = \{(x, z) \in D \mid (x - 1000)^2 + (z - 800)^2 \leq 200^2\}$ y el resto del dominio es regular de paso de referencia $h = 10$ m. La discretización temporal es $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ s.

En estas condiciones y para los tres casos considerados, se resuelve el problema (3.12) con condiciones iniciales (4.1) y condiciones de contorno (4.11) con parámetros $k_x = 0,0$, $k_z = 1,0$ y $c_0 = 0$. El ángulo de incidencia de la onda P es de 0° .

En el primer caso se considera que la anomalía es un obstáculo y, por tanto, se establecen desplazamientos igual a cero en $fr(C)$ como condiciones de contorno y se eliminan los nodos en $int(C)$. En este caso se observa, véase la figura 4.44, como el frente de ondas difracta alrededor de la circunferencia cerrando el hueco tras ella y recuperando la forma del frente de ondas.

En el segundo caso la anomalía es un medio de menor velocidad y, por tanto, se tienen dos medios, $D - C$ con parámetros, α_1 , β_1 y ρ_1 y C con parámetros $\alpha_2 = 1,5$ km/s, $\beta_2 = 0,75$ km/s y $\rho_2 = 1600/9$ kg/m³. En este caso se observa, véase la figura 4.45, que las ondas se ralentizan en la anomalía y difractan alrededor de la misma. Una vez pasada la anomalía el frente vuelve a recuperar su forma.

En el tercer caso la anomalía es un medio de menor velocidad y, por tanto, se tienen dos medios, $D - C$ con parámetros, α_1 , β_1 y ρ_1 y C con parámetros $\alpha_2 = 4,0$ km/s, $\beta_2 = 2,0$ km/s y $\rho_2 = 250$ kg/m³. En este último caso se observa, véase la figura 4.46, que la velocidad general del frente de ondas aumenta por lo que este tipo de anomalías son fáciles de detectar en sismología.

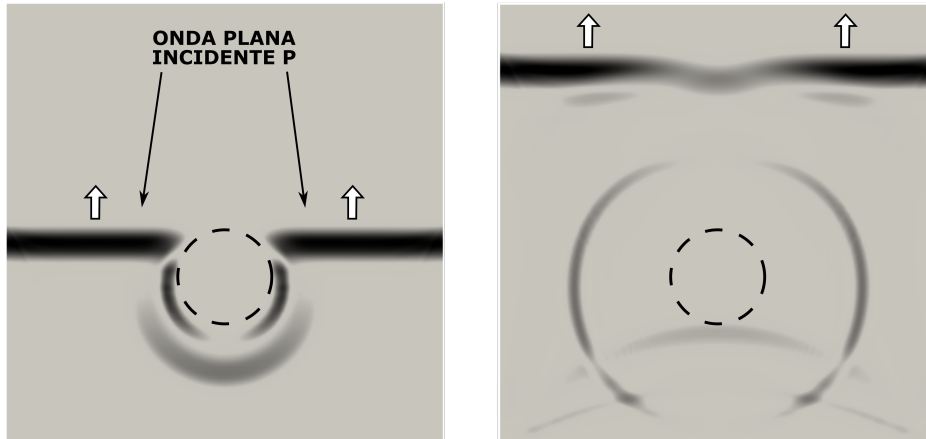


Figura 4.44: Frente de ondas atravesando un obstáculo circular en los instantes $t = 0.5$ s (izquierda) y $t = 0.9$ s (derecha).

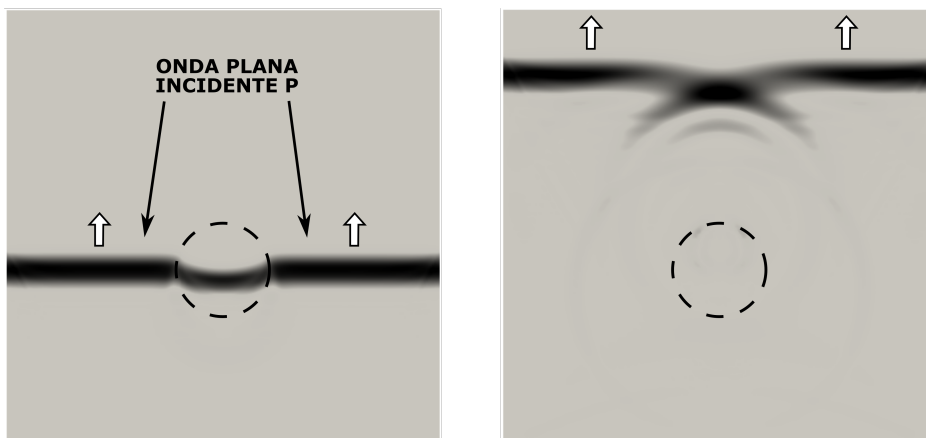


Figura 4.45: Frente de ondas atravesando una anomalía circular de menor velocidad que el medio que la rodea en los instantes $t = 0.45$ s (izquierda) y $t = 0.9$ s (derecha).

4.7. Medios viscoelásticos

Para analizar los esquemas presentados, se van a comparar los resultados obtenidos con estos esquemas con las soluciones exactas en cuatro casos. En

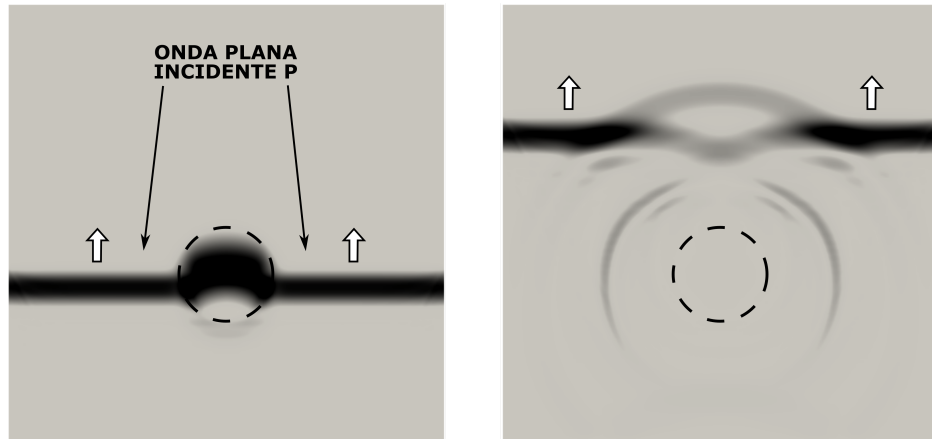


Figura 4.46: Frente de ondas atravesando una anomalía circular de mayor velocidad que el medio que la rodea en los instantes $t = 0.4$ s (izquierda) y $t = 0.75$ s (derecha).

el primer y tercer caso se utiliza el esquema P-SV para una onda plana P, con y sin frontera libre, y en el segundo y cuarto caso se utiliza el esquema SH para una onda plana SH, con y sin frontera libre.

Se van a aplicar los esquemas para ondas P-SV y SH en medios viscoelásticos (3.83) y (3.89) y se van a comparar con las soluciones exactas.

Onda plana P

Se considera el dominio $D = [0, 2] \times [0, 1,5]$. Para discretizar el dominio se parte de una discretización regular de paso de referencia $h = 0,01$ y cada nodo (x, z) de la discretización, excepto los nodos con abscisa $x = 1$, se desplazan arbitrariamente dentro del cuadrado centrado en (x, z) y de lado $l = 0,002$. De esta forma se obtiene una discretización completamente irregular, similar a la mostrada en 4.50 pero con un dominio mayor. El medio es homogéneo con $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\tau_P = \tau_S = 1,5 \text{ ms}$ y $\alpha = 1 \text{ m/s}$ y $\beta = 0,5 \text{ m/s}$ a frecuencia cero. Se resuelve la ecuación (3.77) con condiciones iniciales

$$\begin{cases} U(\mathbf{x}, 0) = U(\mathbf{x}, \Delta t) = U(\mathbf{x}, 2\Delta t) = 0 \\ W(\mathbf{x}, 0) = W(\mathbf{x}, \Delta t) = W(\mathbf{x}, 2\Delta t) = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

y condiciones de contorno Dirichlet

$$g(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} A \exp(i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{x} + \frac{\pi}{2})) & \text{if } x + z \leq -c_0 - \frac{\alpha t}{k_z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.24)$$

donde $A = 5 \cdot 10^{-5}$ m es la amplitud, $\omega = 4\pi$ rad/s la frecuencia angular, $\boldsymbol{\kappa}^T = \left(0, \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2(1+i\omega\tau)}}\right)^T m^{-1}$ el número de onda y $c_0 = k_x x_0 + k_z z_0$ con $(x_0, z_0) \in M$ el primer contacto del frente de ondas con algún nodo de la discretización.

Para comparar los resultados obtenidos con la solución exacta, se muestran los valores de los desplazamientos en la recta de abscisa $x = 1$ en el instante $t = 1,5$ s. La figura 4.47, donde se puede apreciar el amortiguamiento, muestra la precisión de los resultados.

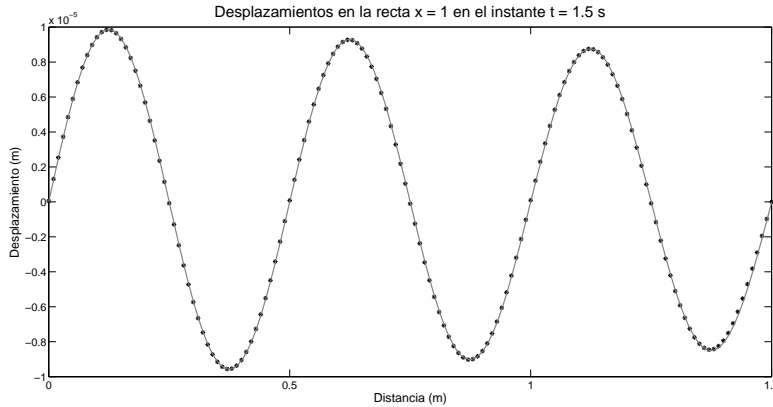


Figura 4.47: Desplazamientos en la recta $x = 1$ en el instante $t = 1,5$ s. La línea continua representa la solución exacta y los asteriscos representan la solución numérica obtenida con el GDFM.

Onda plana SH

Se considera el dominio del caso anterior y la misma discretización. El medio es homogéneo con $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\tau_S = 1,0 \text{ ms}$ y $\alpha = \sqrt{3} \text{ m/s}$ y $\beta = 1 \text{ m/s}$ a frecuencia cero. Se resuelve la ecuación (3.78) con condiciones iniciales

$$V(\mathbf{x}, 0) = V(\mathbf{x}, \Delta t) = V(\mathbf{x}, 2\Delta t) = 0 \quad (4.25)$$

y condiciones de contorno Dirichlet

$$g(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} A \exp(i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{x} + \frac{\pi}{2})) & \text{if } x + z \leq -c_0 - \frac{\beta t}{k_z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.26)$$

donde $A = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ es la amplitud, $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$ la frecuencia angular, $\boldsymbol{\kappa}^T = \left(0, \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2(1+i\omega\tau)}}\right)^T m^{-1}$ el número de onda y $c_0 = -k_x x_0 - k_z z_0$ con $(x_0, z_0) \in M$ el primer contacto del frente de ondas con algún nodo de la discretización.

Como en el caso anterior, se comparan los resultados obtenidos con la solución exacta en la recta $x = 1$ en el instante $t = 1,5 \text{ s}$. La figura 4.48, donde se aprecia un mayor amortiguamiento que en el caso anterior, muestra la precisión de los resultados obtenidos y en la figura 4.49 puede verse una instantánea del frente de ondas en $t = 1,05 \text{ s}$ donde se aprecia el amortiguamiento en la dirección de propagación del frente.

Onda plana P incidiendo en una frontera libre

Se considera el dominio $D = [0, 1] \times [0, 0,5]$. Para discretizar el dominio se parte de una discretización regular de paso de referencia $h = 0,01$ y cada nodo (x, z) de la discretización, excepto los nodos con abscisa $x = 0,5$, se desplazan arbitrariamente dentro del cuadrado centrado en (x, z) y de lado $l = 0,002$. De

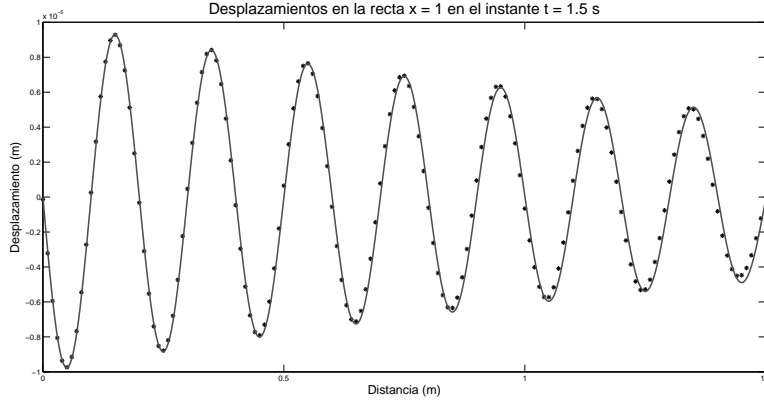


Figura 4.48: Desplazamientos en la recta $x = 1$ en el instante $t = 1,5$ s. La línea continua representa la solución exacta y los asteriscos representan la solución numérica obtenida con el GDFM.

esta forma se obtiene una discretización completamente irregular que puede verse en 4.50. El medio es homogéneo con $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\tau_P = \tau_S = 1 \text{ ms}$ y $\alpha = 1 \text{ m/s}$ y $\beta = 0,5 \text{ m/s}$ a frecuencia cero. Se resuelve la ecuación (3.77) con condiciones iniciales

$$\begin{cases} U(\mathbf{x}, 0) = U(\mathbf{x}, \Delta t) = U(\mathbf{x}, 2\Delta t) = 0 \\ W(\mathbf{x}, 0) = W(\mathbf{x}, \Delta t) = W(\mathbf{x}, 2\Delta t) = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

y condiciones de contorno Dirichlet

$$g(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} A \exp(i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{x} + \frac{\pi}{2})) & \text{if } x + z \leq -c_0 - \frac{\alpha t}{k_z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.28)$$

donde $A = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ es la amplitud, $\omega = 6\pi \text{ rad/s}$ la frecuencia angular, $\boldsymbol{\kappa}^T = \left(0, \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2(1+i\omega\tau_P)}}\right)^T \text{ m}^{-1}$ el número de onda y $c_0 = k_x x_0 + k_z z_0$ con $(x_0, z_0) \in M$ el primer contacto del frente de ondas con algún nodo de la discretización.

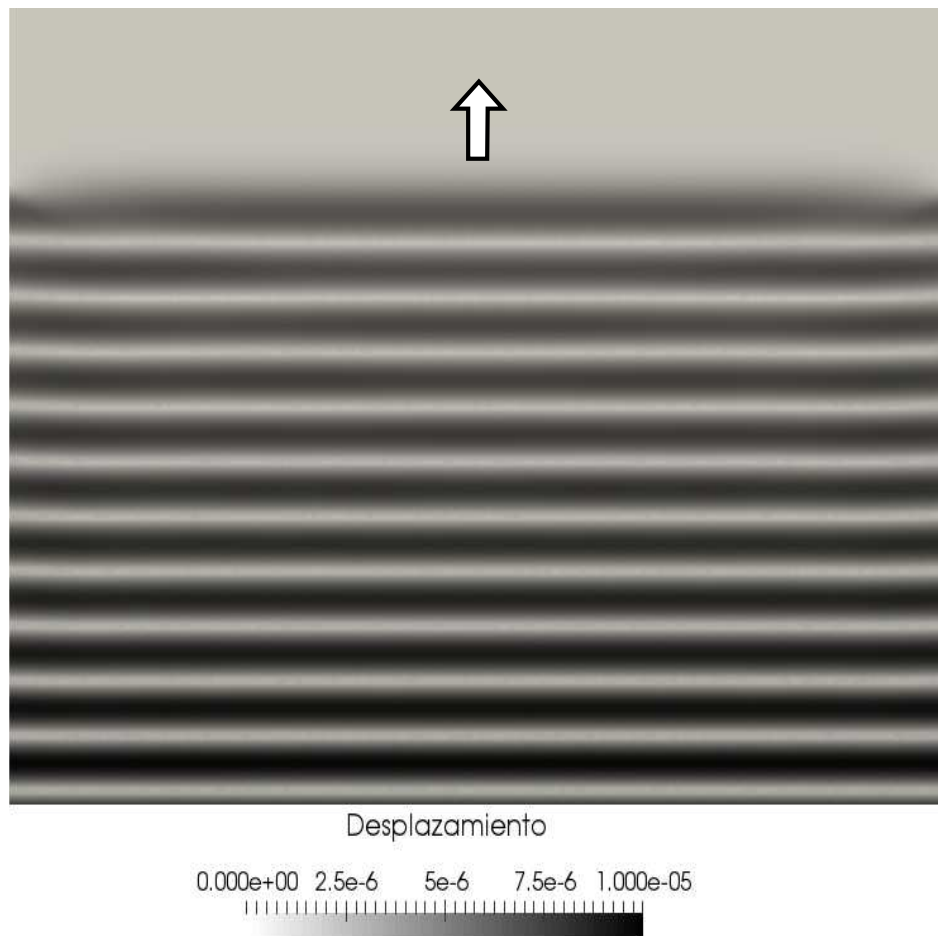


Figura 4.49: Instantánea del frente de ondas en $t = 1,125$ s. Debido al amortiguamiento, los desplazamientos en la dirección de propagación del frente van decayendo. La dirección de propagación del frente de ondas viene indicado por la flecha en fondo blanco.

Se comparan los desplazamientos analíticos y aproximados en la tabla 4.12 después de la reflexión del frente de ondas en la superficie libre. En la figura 4.51 pueden verse dos instantáneas del frente de ondas en $t = 0,15$ s (izquierda) y en $t = 0,375$ s (derecha) donde se aprecia el amortiguamiento en la dirección de propagación del frente.

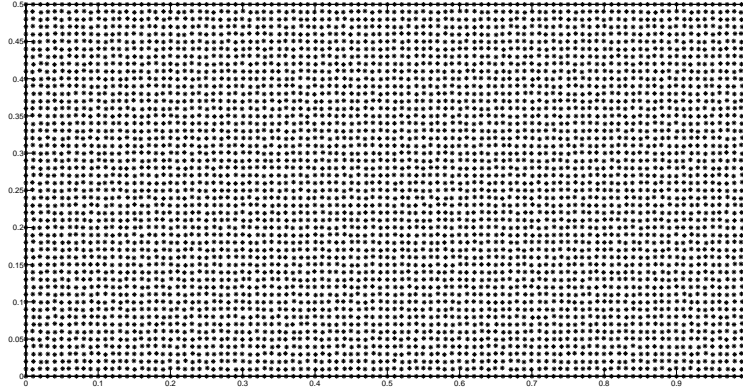


Figura 4.50: Discretización irregular en $D = [0, 1] \times [0, 0,5]$

Tabla 4.12: Desplazamientos onda P

Nodo	$\mathbf{x} = (0,5, 0,3)$	$\mathbf{x} = (0,5, 0,2)$	$\mathbf{x} = (0,5, 0,05)$
Instante	$t = 0,875$	$t = 0,925$	$t = 1,0$
Solución analítica	$-1,397 \cdot 10^{-6}$	$-6,122 \cdot 10^{-6}$	$-6,846 \cdot 10^{-6}$
Solución aproximada	$-1,330 \cdot 10^{-6}$	$-6,531 \cdot 10^{-6}$	$-6,314 \cdot 10^{-6}$

Onda plana SH incidiendo en una frontera libre

Se considera el dominio del caso anterior y la misma discretización. El medio es homogéneo con $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\tau_S = 1 \text{ ms}$ y $\alpha = 3 \text{ m/s}$ y $\beta = 2 \text{ m/s}$ a frecuencia cero. Se resuelve la ecuación (3.78) con condiciones iniciales

$$V(\mathbf{x}, 0) = V(\mathbf{x}, \Delta t) = V(\mathbf{x}, 2\Delta t) = 0 \quad (4.29)$$

y condiciones de contorno Dirichlet

$$g(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} A \exp(i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{x} + \frac{\pi}{2})) & \text{if } x + z \leq -c_0 - \frac{\beta t}{k_z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.30)$$

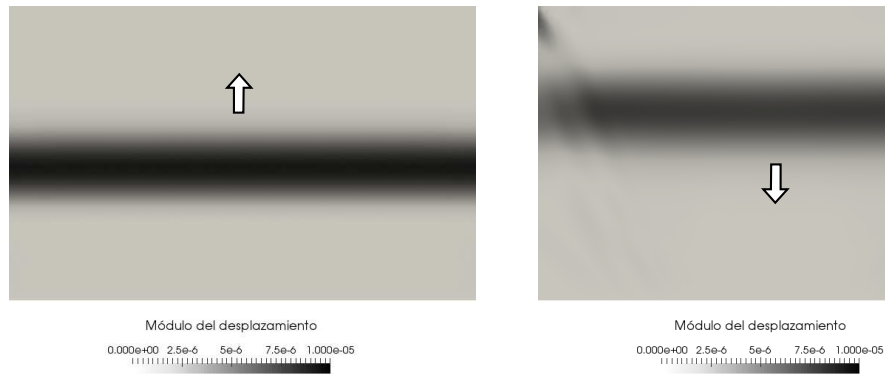


Figura 4.51: Instantánea del frente de ondas en $t = 0,15$ s (izquierda) y $t = 0,375$ s (derecha). Debido al amortiguamiento, los desplazamientos en la dirección de propagación del frente van decayendo como se observa en la figura de la derecha. La dirección de propagación del frente de ondas viene indicado por la flecha en fondo blanco.

donde $A = 1 \cdot 10^{-5}$ m es la amplitud, $\omega = 14\pi$ rad/s la frecuencia angular, $\boldsymbol{\kappa}^T = \left(0, \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2(1+i\omega\tau_S)}}\right)^T m^{-1}$ el número de onda y $c_0 = -k_x x_0 - k_z z_0$ con $(x_0, z_0) \in M$ el primer contacto del frente de ondas con algún nodo de la discretización.

Como en el caso anterior, se comparan los desplazamientos analíticos y aproximados en la tabla 4.13 después de la reflexión del frente de ondas en la superficie libre. En la figura 4.52 pueden verse dos instantáneas del frente de ondas en $t = 0,125$ s (izquierda) y en $t = 0,375$ s (derecha) donde se aprecia el amortiguamiento en la dirección de propagación del frente.

Tabla 4.13: Desplazamientos onda SH

Nodo	$\mathbf{x} = (0,5,0,3)$	$\mathbf{x} = (0,5,0,2)$	$\mathbf{x} = (0,5,0,05)$
Instante	$t = 0,375$	$t = 0,425$	$t = 0,5$
Solución analítica	$-8,190 \cdot 10^{-6}$	$-8,092 \cdot 10^{-6}$	$-7,947 \cdot 10^{-6}$
Solución aproximada	$-8,366 \cdot 10^{-6}$	$-8,124 \cdot 10^{-6}$	$-7,946 \cdot 10^{-6}$

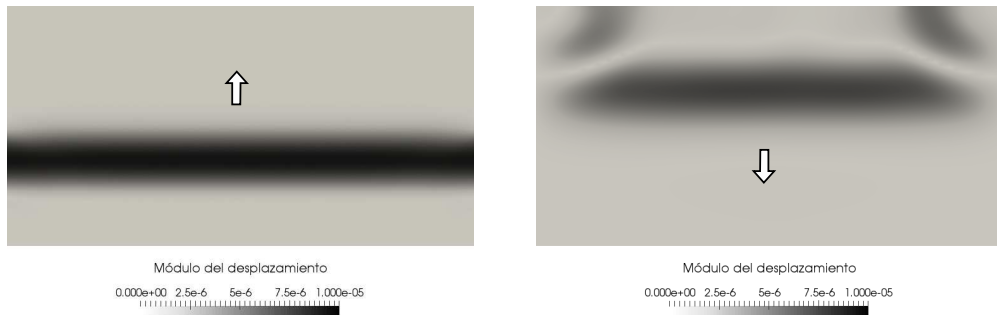


Figura 4.52: Instantánea del frente de ondas en $t = 0,125$ s (izquierda) y $t = 0,375$ s (derecha). Debido al amortiguamiento, los desplazamientos en la dirección de propagación del frente van decayendo como se observa en la figura de la derecha. La dirección de propagación del frente de ondas viene indicado por la flecha en fondo blanco.

Capítulo 5

Conclusiones y desarrollos futuros

5.1. Conclusiones

En cuanto al desarrollo teórico del método de las diferencias finitas generalizadas (GFDM) se destacan las siguientes conclusiones.

Se ha establecido una notación matricial para el GFDM sencilla y compacta. Se ha demostrado el teorema de existencia y unicidad del que se extraen algunas conclusiones de interés, como son el número mínimo de nodos necesarios para que exista solución única, las disposiciones de nodos que deben evitarse o el hecho de que la obtención de las aproximaciones de las derivadas parciales en una discretización no dependa del problema a tratar.

Se han definido dos funciones de penalización asociadas con estrellas, la función de penalización de desequilibrios, relacionada con la distribución de los nodos alrededor del nodo central, y la función de penalización de distancias, relacionada con las distancias de los nodos respecto al nodo central. Estas funciones permiten clasificar la discretización para el método de las diferencias finitas generalizadas y permiten escoger la combinación más adecuada de los parámetros involucrados en el método.

Se ha presentado un método adaptativo mejorado con nuevas funcionalidades. Este método permite, además de añadir nodos, el movimiento y la eliminación de los mismos. Se han comparado el método adaptativo anterior, desarrollado por Benito, Ureña y Gavete, con el método adaptativo mejorado y se han obtenido mejores resultados con este último en todos los casos analizados. Se ha puesto de manifiesto la importancia de su aplicación en problemas de propagación de ondas para la mejora de la cota de estabilidad en casos de discretizaciones irregulares.

Además, las funciones de penalización definidas sirven también para decidir que función del algoritmo adaptativo, adicción, movimiento o eliminación, es más adecuado en cada caso.

Se ha estudiado la influencia de la irregularidad de la distribución de nodos para mostrar que incluso en condiciones extremas, mucho más exageradas de lo habitual, el método sigue proporcionando excelentes resultados.

En lo que respecta a la aplicación del método a problemas de propagación de ondas se establecen las siguientes conclusiones teóricas.

Se han obtenido los esquemas en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de ondas SH en medios isótropos, elásticos y homogéneos. Se ha analizado la estabilidad y la dispersión. Los resultados obtenidos con el método han sido contrastados con las soluciones analíticas poniéndose de manifiesto la precisión del mismo.

Se han incorporado al método las excitaciones en forma de frentes de onda mediante pulsos de Ricker y exponenciales lo que ha permitido comparar las amplitudes teóricas con las obtenidas con el GFDM.

Se ha tratado desde el punto de vista heterogéneo el problema de la reflexión y transmisión de ondas P-SV y SH desde dos perspectivas. La primera

considera únicamente variaciones de densidad en el medio y en tal caso siguen siendo válidos los esquemas en GFD aplicables a medios homogéneos. En este caso la discontinuidad es tenida en cuenta por los valores de la densidad en los diferentes nodos del dominio. La segunda considera los parámetros de elasticidad y densidad como funciones lineales en el entorno de la interfase para lo que se han obtenido esquemas heterogéneos. Además, se ha comprobado que los esquemas heterogéneos obtenidos preservan la precisión en cualquier tipo de interfase, al contrario de lo que ocurre con los métodos clásicos basados en diferencias finitas más utilizados para propagación de ondas sísmicas como señalan Vishnevsky et al. [150].

Se han obtenido los esquemas en diferencias finitas para ondas P-SV y SH en medios con viscoelasticidad lineal que siguen el modelo de Kelvin-Voight. Los resultados subrayan la precisión del método tanto con condiciones Dirichlet como con condiciones Neumann para el caso de superficies libres.

Atendiendo a los resultados obtenidos en las múltiples aplicaciones incluidas en la presente tesis, cabe destacar las siguientes conclusiones.

En la comparación del algoritmo adaptativo utilizado por Benito, Ureña y Gavete con el algoritmo adaptativo mejorado propuesto en esta tesis se ha mostrado claramente una múltiple mejora pues se disminuye el número de nodos a añadir, se disminuye el número de etapas adaptativas y se aumenta la precisión. La incorporación de algoritmos adaptativos en dominios irregulares para tratar a priori de mejorar la estabilidad es fundamental ya que unos pocos nodos pueden provocar la elección de un incremento de tiempo que haga inviable la resolución de un problema. Por ello se ha aplicado el algoritmo adaptativo mejorado a problemas dependientes del tiempo, en particular al caso de ondas, con discretizaciones en las que aparecen estrellas con cotas de estabilidad muy bajas con objeto de mejorar la malla inicial.

Se ha comprobado que incluso en casos con discretizaciones muy irregulares el esquema mantiene la precisión. Por supuesto, cuanto más irregular sea

la discretización y menor la longitud de onda de las ondas, más fina deberá ser la discretización, como se pone de manifiesto al comparar la precisión de las ondas P y S en el mismo caso.

Se ha comprobado numéricamente que el esquema en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de ondas P-SV y SH en medio isótropo, elástico y homogéneo funciona correctamente para ondas planas, en particular para la ondícula de Ricker. En el resto de casos sólo se ha utilizado el lóbulo central de la ondícula de Ricker por razones de claridad.

Se ha mostrado que la precisión de los esquemas en superficie libre horizontal se mantiene para las ondas reflejadas tanto en el caso de ondas P-SV como en el caso de ondas SH. En el caso de superficies libres inclinadas también se mantiene la precisión.

Se ha mostrado que los esquemas para medios heterogéneos formados por capas de medios homogéneos con interfases horizontales mantienen la precisión incluso al atravesar zonas con irregularidades.

La precisión del método se mantiene en los casos presentados en los que se han utilizado esquemas heterogéneos en medios con interfases horizontales entre medios homogéneos, tanto en casos en los que hay variaciones de velocidad que se ajustan a valores reales, como la discontinuidad de Mohorovičić, como en casos académicos en los que las variaciones de velocidad han sido aumentadas.

Se ha mostrado que la precisión se mantiene al utilizar esquemas heterogéneos en medios heterogéneos formados por capas de medios homogéneos cuando la interfase entre los medios no es horizontal, que es el principal problema de los métodos basados en diferencias finitas que suelen emplearse en la modelización de la propagación de ondas. Además, en estos casos, gracias a la posibilidad que ofrece el GFDM de utilizar mallas irregulares se han realizado discretizaciones adecuadas a los dominios considerados.

El principio de Huygens también ha sido verificado. Por un lado, se han utilizado ejemplos clásicos de hendeduras donde las ondas atravesando una hendedura de anchura menor a media longitud de onda han difractado generando un foco de ondas y las ondas atravesando una hendedura de anchura mayor a media longitud de onda han difractado sólo en los bordes. Por otro lado, también ha sido comprobado el fenómeno conocido como *waveform annealing*, en el que la difracción hace que las ondas aparezcan tras un obstáculo que es atravesado por un frente.

La posibilidad de utilizar discretizaciones irregulares del GFDM se ha aprovechado para discretizar un dominio con interfase irregular utilizando una discretización con densidad de nodos progresiva. Este tipo de discretizaciones, además de ser muy eficientes en dominios con grandes variaciones del gradiente como se muestra en el trabajo de M. Ureña et al. [147], lo es también cuando se necesita discretizar una zona del dominio de forma muy fina, como por ejemplo, en el caso de interfases no horizontales. Se ha mostrado el caso de un dominio con una interfase curva para la que ha sido necesario realizar una discretización muy fina a su alrededor, haciendo la discretización más grosera cuanto más lejos de la interfase se esté. Los resultados se ajustan al comportamiento esperado.

En el caso de los esquemas para ondas P-SV y SH en medios isótropos, viscoelásticos y homogéneos se han resuelto casos académicos sencillos pero con dominios completamente irregulares poniendo de manifiesto el buen comportamiento de los esquemas en condiciones extremas de irregularidad.

Finalmente merece la pena resaltar las siguientes consideraciones de carácter general.

Es importante notar que en muchos casos las discretizaciones irregulares generadas en esta tesis para los casos analizados han sido exageradas para forzar la aplicación del GFDM en condiciones adversas. En casos reales las

irregularidades deben ser tan suaves como sea posible.

La posición predominante de los métodos basados en diferencias finitas para abordar problemas de propagación de ondas y los resultados mostrados en esta tesis convierten al método de las diferencias finitas generalizadas en un poderoso aliado para el tratamiento de este tipo de problemas.

5.2. Desarrollos futuros

Se proponen los siguientes desarrollos para la continuidad de la aplicación del método de las diferencias finitas generalizadas a problemas de propagación de ondas.

- Utilización del GFDM en proyectos de ingeniería para los que se ha visto que resulta muy eficiente. Al hilo de lo anterior, sería también interesante ir mejorando la eficiencia computacional del código desarrollado.
- Obtención de un método híbrido de diferencias finitas clásicas y generalizadas para optimizar la aplicabilidad de ambos.
- Aunque en la actualidad el modelo contiene la posibilidad de incluir contornos absorbentes, deberán incorporarse los últimos avances tanto en el problema elástico como en el viscoelástico.
- Tratamiento de problemas viscoelásticos con cualquier otro modelo, como el modelos de Maxwell, el de Burger, et.
- Modelización en tres dimensiones de todo lo desarrollado
- Incorporación de modelos hiperelásticos y plásticos

Bibliografía

- [1] Alford, R. M., Kelly, K. R., & Boore, D. M. (1974). Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 39(6), 834-842.
- [2] Alterman, Z., & Karal, F. C. (1968). Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 58(1), 367-398.
- [3] Aluru, N. R. (2000). A point collocation method based on reproducing kernel approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(6), 1083-1121.
- [4] Arroyo, M., & Ortiz, M. (2006). Local maximum-entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 65(13), 2167-2202.
- [5] Atluri, S. N., & Zhu, T. (1998). A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational mechanics*, 22(2), 117-127.
- [6] BA Auld, Acoustic fields and waves in solids, 2nd ed Malabar Fla., RE Krieger (1990).
- [7] Babuška, I., Banerjee, U., & Osborn, J. E. (2003). Meshless and generalized finite element methods: A survey of some major results. *In Meshfree methods for partial differential equations* (pp. 1-20). Springer, Berlin, Heidelberg.

- [8] Bartholomew-Biggs, M. (2008). *Nonlinear optimization with engineering applications* (Vol. 19). Springer Science & Business Media.
- [9] Basu, U., & Chopra, A. K. (2003). Perfectly matched layers for elastic waves and applications to earthquakes analysis of dams. In *16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, University of Washington.
- [10] Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2), 229-256.
- [11] Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L. (1995). Crack propagation by element-free Galerkin methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(2), 295-315.
- [12] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., & Krysl, P. (1996). Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139(1-4), 3-47.
- [13] Belytschko, T., & Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 45(5), 601-620.
- [14] Ben-Menahem, A., & Singh, S. J. (2012). *Seismic waves and sources*. Springer Science & Business Media.
- [15] Benito, J. J., Urena, F., & Gavete, L. (2001). Influence of several factors in the generalized finite difference method. *Applied Mathematical Modelling*, 25(12), 1039-1053.
- [16] Benito, J. J., Urena, F., Gavete, L., & Alvarez, R. (2003). An h-adaptive method in the generalized finite differences. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(5), 735-759.
- [17] Benito, J. J., Urena, F., & Gavete, L. (2007). Solving parabolic and hyperbolic equations by the generalized finite difference method. *Journal of computational and applied mathematics*, 209(2), 208-233.

- [18] Benito, J. J., Ureña, F., Gavete, L., & Alonso, B. (2008). A posteriori error estimator and indicator in generalized finite differences. Application to improve the approximated solution of elliptic PDEs. *International Journal of Computer Mathematics*, 85(3-4), 359-370.
- [19] Benito, J. J., Ureña, F., Gavete, L., & Alonso, B. (2009). Application of the generalized finite difference method to improve the approximated solution of pdes. *Computer Modelling in Engineering & Sciences*, 38, 39-58.
- [20] Benito, J. J., Ureña, F., Gavete, L., Salete, E., & Muelas, A. (2013). A GFDM with PML for seismic wave equations in heterogeneous media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 252, 40-51.
- [21] Benito, J. J., Ureña, F., Salete, E., Muelas, A., Gavete, L., & Galindo, R. (2015). Wave propagation in soils problems using the Generalized Finite Difference Method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 79, 190-198.
- [22] Benito, J. J., Ureña, F., Gavete, L., Salete, E., & Ureña, M. (2017). Implementations with generalized finite differences of the displacements and velocity-stress formulations of seismic wave propagation problem. *Applied Mathematical Modelling*, 52, 1-14.
- [23] Berenger, J. P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of computational physics*, 114(2), 185-200.
- [24] Blanc, E., Komatitsch, D., Chaljub, E., Lombard, B., & Xie, Z. (2016). Highly accurate stability-preserving optimization of the Zener viscoelastic model, with application to wave propagation in the presence of strong attenuation. *Geophysical Supplements to the Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 205(1), 427-439.
- [25] Boore, D. M. (1972). Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials. *Methods in computational physics*, 11, 1-37.

- [26] Borchardt, R. D. (2009). Viscoelastic waves in layered media. Cambridge University Press.
- [27] Braun, J., & Sambridge, M. (1995). A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids. *Nature*, 376(6542), 655-660.
- [28] Brinson, H., & Brinson, L. C. (2016). Polymer engineering science and viscoelasticity. SPRINGER-VERLAG NEW YORK.
- [29] Carcione, J. M., Kosloff, D., & Kosloff, R. (1988). Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium. *Geophysical Journal International*, 95(3), 597-611.
- [30] Carcione, J. M. (1995). Constitutive model and wave equations for linear, viscoelastic, anisotropic media. *Geophysics*, 60(2), 537-548.
- [31] Carcione, J. M., Poletto, F., & Gei, D. (2004). 3-D wave simulation in anelastic media using the Kelvin–Voigt constitutive equation. *Journal of Computational Physics*, 196(1), 282-297.
- [32] Carcione, J. M. (2007). Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media (Vol. 38). Elsevier.
- [33] Casasús, A. (2011) Aplicación del método de las diferencias finitas generalizadas a problemas de elasto-dinámica. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid
- [34] Chan, H. F., Fan, C. M., & Kuo, C. W. (2013). Generalized finite difference method for solving two-dimensional non-linear obstacle problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(9), 1189-1196.
- [35] Chen, J. S., Pan, C., Wu, C. T., & Liu, W. K. (1996). Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139(1-4), 195-227.

- [36] Chen, J. S., Wu, C. T., Yoon, S., & You, Y. (2001). A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 50(2), 435-466.
- [37] Chen, J. S., Yoon, S., & Wu, C. T. (2002). Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(12), 2587-2615.
- [38] Chen, J. S., & Wu, Y. (2007). Stability in Lagrangian and semi-Lagrangian reproducing kernel discretizations using nodal integration in nonlinear solid mechanics. *Advances in Meshfree Techniques*, 55-76.
- [39] Chen, J. S., Hillman, M., & Rüter, M. (2013). An arbitrary order variationally consistent integration for Galerkin meshfree methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95(5), 387-418.
- [40] Chen, J. S., Hillman, M., & Chi, S. W. (2017). Meshfree Methods: Progress Made after 20 Years. *Journal of Engineering Mechanics*, 143(4), 04017001.
- [41] Chew, W. C., & Liu, Q. H. (1996). Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition. *Journal of Computational Acoustics*, 4(04), 341-359.
- [42] Chi, S. W., Chen, J. S., Hu, H. Y., & Yang, J. P. (2013). A gradient reproducing kernel collocation method for boundary value problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(13), 1381-1402.
- [43] Collino, F., & Tsogka, C. (2001). Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 66(1), 294-307.
- [44] De, S., & Bathe, K. J. (2000). The method of finite spheres. *Computational Mechanics*, 25(4), 329-345.

-
- [45] De, S., & Bathe, K. J. (2001). The method of finite spheres with improved numerical integration. *Computers & Structures*, 79(22), 2183-2196.
- [46] Dilts, G. A. (1999). Moving-least-squares-particle hydrodynamics—I. Consistency and stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(8), 1115-1155.
- [47] Dolbow, J. O. H. N., & Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 46(1), 131-150.
- [48] Dominguez, J. (1993). Boundary elements in dynamics. Wit Press.
- [49] Duarte, C. A., & Oden, J. T. (1996). An hp adaptive method using clouds. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139(1-4), 237-262.
- [50] Duarte, C. A., & Oden, J. T. (1996). Hp clouds-an hp meshless method. *Numerical methods for partial differential equations*, 12(6), 673-706.
- [51] Fan, C. M., Huang, Y. K., Li, P. W., & Chiu, C. L. (2014). Application of the generalized finite-difference method to inverse biharmonic boundary-value problems. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 65(2), 129-154.
- [52] Fan, C. M., Li, P. W., & Yeih, W. (2015). Generalized finite difference method for solving two-dimensional inverse Cauchy problems. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 23(5), 737-759.
- [53] Fries, T. P., & Matthies, H. (2004). Classification and overview of mesh-free methods.
- [54] García, A. (2014). *Diferencias finitas generalizadas en tres dimensiones. Un método adaptativo..* Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.
- [55] Garijo, D. (2015). Modelos sin malla en simulación numérica de estructuras aeroespaciales. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.

- [56] Gavete, L., Gavete, M. L., & Benito, J. J. (2003). Improvements of generalized finite difference method and comparison with other meshless method. *Applied Mathematical Modelling*, 27(10), 831-847.
- [57] Gavete, L., Ureña, F., Benito, J. J., & Saletе, E. (2013). A note on the dynamic analysis using the generalized finite difference method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 252, 132-147.
- [58] Gavete, L., Gavete, M. L., Ureña, F., & Benito, J. J. (2015). An approach to refinement of irregular clouds of points using generalized finite differences. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
- [59] Gavete, L., Ureña, F., Benito, J. J., García, A., Ureña, M., & Saletе, E. (2017). Solving second order non-linear elliptic partial differential equations using generalized finite difference method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 318, 378-387.
- [60] Gavete, L., Benito, J. J., & Ureña, F. (2016). Generalized finite differences for solving 3D elliptic and parabolic equations. *Applied Mathematical Modelling*, 40(2), 955-965.
- [61] Gavete, L., Ureña, F., Benito, J. J., García, A., Ureña, M., & Saletе, E. (2016). Solving second order non-linear elliptic partial differential equations using generalized finite difference method. *International Conference on Mathematical Methods in Science and Engineering*. ISBN: 978-84-608-6082-2
- [62] Gavete, M. L., Vicente, F., Gavete, L., Ureña, F., & Benito, J. J. (2012). Solving anisotropic elliptic and parabolic equations by a meshless method: simulation of the electrical conductivity of a tissue. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(13-14), 1914-1926.
- [63] Gholamy, A., & Kreinovich, V. (2014, December). Why Ricker wavelets are successful in processing seismic data: Towards a theoretical explanation. In *Computational Intelligence for Engineering Solutions (CIES), 2014 IEEE Symposium on* (pp. 11-16). IEEE.

- [64] Gingold, R. A., & Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 181(3), 375-389.
- [65] Graves, R. W. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 86(4), 1091-1106.
- [66] Griebel, M., & Schweitzer, M. A. (2000). A particle-partition of unity method for the solution of elliptic, parabolic, and hyperbolic PDEs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(3), 853-890.
- [67] Gurevich, B., Zyrianov, V. B., & Lopatnikov, S. L. (1997). Seismic attenuation in finely layered porous rocks: Effects of fluid flow and scattering. *Geophysics*, 62(1), 319-324.
- [68] Hardy, R. L. (1971). Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of geophysical research*, 76(8), 1905-1915.
- [69] Hardy, R. L. (1990). Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968–1988. *Computers & Mathematics with Applications*, 19(8-9), 163-208.
- [70] Hestholm, S. (1999). Three-dimensional finite difference viscoelastic wave modelling including surface topography. *Geophysical Journal International*, 139(3), 852-878.
- [71] Hoffman, J. D., & Frankel, S. (2001). Numerical methods for engineers and scientists. CRC press.
- [72] Hosseini, S. M. (2013). Application of a hybrid mesh-free method based on generalized finite difference (GFD) method for natural frequency analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotubes. *CMES-Computer Modeling Engineering Science*, 95, 1-29.

- [73] Hosseini, S. M. (2015). Shock-induced two dimensional coupled non-Fickian diffusion–elasticity analysis using meshless generalized finite difference (GFD) method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 61, 232-240.
- [74] Hu, H. Y., Chen, J. S., & Hu, W. (2011). Error analysis of collocation method based on reproducing kernel approximation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(3), 554-580.
- [75] Hua, Q., Gu, Y., Qu, W., Chen, W., & Zhang, C. (2017). A meshless generalized finite difference method for inverse Cauchy problems associated with three-dimensional inhomogeneous Helmholtz-type equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 82, 162-171.
- [76] Idelsohn, S. R., Onate, E., Calvo, N., & Del Pin, F. (2003). The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(6), 893-912.
- [77] Idelsohn, S. R., Onate, E., & Del Pin, F. (2003). A Lagrangian meshless finite element method applied to fluid–structure interaction problems. *Computers & Structures*, 81(8), 655-671.
- [78] Idelsohn, S. R., Oñate, E., & Pin, F. D. (2004). The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International journal for numerical methods in engineering*, 61(7), 964-989.
- [79] Ilan, A., Ungar, A., & Alterman, Z. (1975). An improved representation of boundary conditions in finite difference schemes for seismological problems. *Geophysical Journal International*, 43(3), 727-745.
- [80] Jensen, P. S. (1972). Finite difference techniques for variable grids. *Computers & Structures*, 2(1-2), 17-29.
- [81] Jianfeng, Z. (1997). Quadrangle-grid velocity-stress finite-difference method for elastic-wave-propagation simulation. *Geophysical Journal International*, 131(1), 127-134.

-
- [82] Johnson, S. G. (2008). Notes on perfectly matched layers (PMLs). *Lecture notes*, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 29.
- [83] Kalyani, V. K., & Chakraborty, S. K. (2014). Finite-difference time-domain method for modelling of seismic wave propagation in viscoelastic media. *Applied Mathematics and Computation*, 237, 133-145.
- [84] Kansa, E. J. (1990). Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with applications*, 19(8-9), 127-145.
- [85] Kansa, E. J. (1990). Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & mathematics with applications*, 19(8), 147-161.
- [86] Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S., & Alford, R. M. (1976). Synthetic seismograms: A finite-difference approach. *Geophysics*, 41(1), 2-27.
- [87] Kirsch, C. (2005). Non-reflecting boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems in unbounded domains (*Doctoral dissertation, University of Basel*).
- [88] Komatitsch, D., & Tromp, J. (2003). A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, 154(1), 146-153.
- [89] Koshizuka, S., & Oka, Y. (1996). Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. *Nuclear science and engineering*, 123(3), 421-434.
- [90] Kummer, B., & Behle, A. (1982). Second-order finite-difference modeling of SH-wave propagation in laterally inhomogeneous media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72(3), 793-808.
- [91] Lancaster, P., & Salkauskas, K. (1981). Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of computation*, 37(155), 141-158.

- [92] Li, B., Habbal, F., & Ortiz, M. (2010). Optimal transportation meshfree approximation schemes for fluid and plastic flows. *International journal for numerical methods in engineering*, 83(12), 1541-1579.
- [93] Li, P. W., & Fan, C. M. (2017). Generalized finite difference method for two-dimensional shallow water equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 80, 58-71.
- [94] Liang, W. Q., Wang, Y. F., & Yang, C. C. (2015). Comparison of numerical dispersion for finite-difference algorithms in transversely isotropic media with a vertical symmetry axis. *Journal of Geophysics and Engineering*, 12(1), 108.
- [95] Lisitsa, V., Podgornova, O., & Tcheverda, V. (2010). On the interface error analysis for finite difference wave simulation. *Computational Geosciences*, 14(4), 769-778.
- [96] Liszka, T., & Orkisz, J. (1980). The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers & Structures*, 11(1-2), 83-95.
- [97] Liszka, T. (1984). An interpolation method for an irregular net of nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(9), 1599-1612.
- [98] Liu, G. R., & Gu, Y. T. (2001). A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids. *Journal of Sound and vibration*, 246(1), 29-46.
- [99] Liu, G. R., & Gu, Y. T. (2005). An introduction to meshfree methods and their programming. Springer Science & Business Media.
- [100] Liu, W. K., Jun, S., & Zhang, Y. F. (1995). Reproducing kernel particle methods. *International journal for numerical methods in fluids*, 20(8-9), 1081-1106.

-
- [101] Liu, Y., & Sen, M. K. (2009). A practical implicit finite-difference method: Examples from seismic modelling. *Journal of Geophysics and Engineering*, 6(3), 231.
- [102] Lu, Y. Y., Belytschko, T., & Gu, L. (1994). A new implementation of the element free Galerkin method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 113(3-4), 397-414.
- [103] Lucy, L. B. (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The astronomical journal*, 82, 1013-1024.
- [104] Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 66(3), 639-666.
- [105] Martin, B., & Fornberg, B. (2017). Seismic modeling with radial basis function-generated finite differences (RBF-FD)—a simplified treatment of interfaces. *Journal of Computational Physics*, 335, 828-845.
- [106] Melenk, J. M. (1995). On generalized finite element methods (Doctoral dissertation, research directed by Dept. of Mathematics. University of Maryland at College Park).
- [107] Melenk, J. M., & Babuška, I. (1996). The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139(1-4), 289-314.
- [108] Mitchell, A. R., & Griffiths, D. F. (1980). The finite difference method in partial differential equations.
- [109] Mochnacki, B., & Majchrzak, E. (2010). Numerical modeling of casting solidification using generalized finite difference method. *In Materials Science Forum* (Vol. 638, pp. 2676-2681). Trans Tech Publications.
- [110] Moczo, P. (1989). Finite-difference technique for SH-waves in 2-D media using irregular grids—application to the seismic response problem. *Geophysical Journal International*, 99(2), 321-329.

- [111] Moczo, P., Kristek, J., Vavryčuk, V., Archuleta, R. J., & Halada, L. (2002). 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 92(8), 3042-3066.
- [112] Moczo, P., Kristek, J., Galis, M., Pazak, P., & Balazovjeh, M. (2007). The finite-difference and finite-element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion. *Acta physica slovacica*, 57(2).
- [113] Moreno González, C. (1999). *Cálculo numérico II: métodos numéricos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales*. Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- [114] Muelas, A. (2016). Aplicación del método de las diferencias finitas generalizadas a problemas de propagación de ondas en el terreno. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.
- [115] Muelas, A., Salet, E., Benito, J.J., Ureña, F., Gavete, L. & Ureña, M. (2016). Application of GFDM: Modelling of Geophysical methods. *International Conference on Mathematical Methods in Science and Engineering*. ISBN: 978-84-608-6082-2
- [116] Nayroles, B., Touzot, G., & Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational mechanics*, 10(5), 307-318.
- [117] Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (1996). A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *International journal for numerical methods in engineering*, 39(22), 3839-3866.
- [118] Orkisz, J. (1998). Meshless finite difference method I. Basic approach. In *Proceedings of the IACM-fourth world congress in computational mechanics*, Argentina.

- [119] Orkisz, J. (1998). Meshless finite difference method II. Adaptive approach. *Computation Mechanics, CIMNE*.
- [120] Orkisz, J. (1998). Finite difference method (Part III). *Handbook of Computational Solid Mechanics*, 336-432.
- [121] París, F. (1998). Teoría de la Elasticidad. Universidad de Sevilla, Escuela técnica Superior de Ingenieros Industriales.
- [122] Perrone, N., & Kao, R. (1975). A general finite difference method for arbitrary meshes. *Computers & Structures*, 5(1), 45-57.
- [123] Prieto, F. U., Muñoz, J. J. B., & Corvinos, L. G. (2011). Application of the generalized finite difference method to solve the advection–diffusion equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(7), 1849-1855.
- [124] Rabczuk, T., & Areias, P. (2006). A meshfree thin shell for arbitrary evolving cracks based on an extrinsic basis.
- [125] Rabczuk, T., Bordas, S., & Zi, G. (2007). A three-dimensional mesh-free method for continuous multiple-crack initiation, propagation and junction in statics and dynamics. *Computational Mechanics*, 40(3), 473-495.
- [126] Robertsson, J. O., Blanch, J. O., & Symes, W. W. (1994). Viscoelastic finite-difference modeling. *Geophysics*, 59(9), 1444-1456.
- [127] Salete, E., Benito, J. J., Ureña, F., Gavete, L., Ureña, M., & García, A. (2017). Stability of perfectly matched layer regions in generalized finite difference method for wave problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312, 231-239.
- [128] Salete, E., Ureña, M., Benito, J. J., Ureña, F., Muelas, A. & Gavete, L. (2017). Wave propagation through linear viscoelastic media using the Generalized Finite Difference Method. *International Conference on Mathematical Methods in Science and Engineering*. ISBN: 978-84-617-8694-7

- [129] Sahu, S. A., Saroj, P. K., & Dewangan, N. (2014). SH-waves in viscoelastic heterogeneous layer over half-space with self-weight. *Archive of Applied Mechanics*, 84(2), 235-245.
- [130] Silling, S. A., & Askari, E. (2005). A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. *Computers & structures*, 83(17), 1526-1535.
- [131] Silling, S. A., Epton, M., Weckner, O., Xu, J., & Askari, E. (2007). Peridynamic states and constitutive modeling. *Journal of Elasticity*, 88(2), 151-184.
- [132] Skelton, E. A., Adams, S. D., & Craster, R. V. (2007). Guided elastic waves and perfectly matched layers. *Wave motion*, 44(7), 573-592.
- [133] Stein, S., & Wysession, M. (2009). An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure. John Wiley & Sons.
- [134] Strouboulis, T., Copps, K., & Babuska, I. (2000). The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(8), 1401-1417.
- [135] Strouboulis, T., Babuška, I., & Copps, K. (2000). The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 181(1), 43-69.
- [136] Strouboulis, T., Copps, K., & Babuška, I. (2001). The generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(32), 4081-4193.
- [137] Sukumar, N., Moran, B., & Belytschko, T. (1998). The natural element method in solid mechanics (Doctoral dissertation, Northwestern University).
- [138] Sukumar, N. (2004). Construction of polygonal interpolants: a maximum entropy approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(12), 2159-2181.

- [139] Taflove, A., & Hagness, S. C. (2005). Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method. Artech house.
- [140] Ureña, F., Benito, J. J., Alvarez, R., & Gavete, L. (2005). Computational error approximation and h-adaptive algorithm for the 3-D generalized finite difference method. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 6(1), 31-39.
- [141] Ureña, F., Salete, E., Benito, J. J., & Gavete, L. (2012). Solving third- and fourth-order partial differential equations using GFDM: application to solve problems of plates. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(3), 366-376.
- [142] Ureña, F., Benito, J. J., Salete, E., & Gavete, L. (2012). A note on the application of the generalized finite difference method to seismic wave propagation in 2D. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(12), 3016-3025.
- [143] Ureña, M. (2014). *Método de las diferencias finitas generalizadas en tres dimensiones*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.
- [144] Ureña, M., Benito, J. J., Ureña, F., Salete, E., Gavete, L. & García, A. (2017). Application of generalized finite differences method to reflection and transmission problems in seismic SH waves propagation. *International Conference on Mathematical Methods in Science and Engineering*. ISBN: 978-84-608-6082-2
- [145] Ureña, M., Benito, J. J., Ureña, F., Salete, E., & Gavete, L. (2017). Application of generalised finite differences method to reflection and transmission problems in seismic SH waves propagation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. DOI: 10.1002/mma.4268
- [146] Ureña, M., Benito, J. J., Ureña, F., García, A., Gavete, L., & Benito, L. (2017). Adaptive strategies to improve the application of the generalized finite differences method in 2D and 3D. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. DOI: 10.1002/mma.4675

- [147] Ureña, M., Benito, J. J., Ureña, F., García, A., Gavete, L., & Benito, L. (2017). An improved h-adaptive method with different applications for the generalised finite differences method in 2D and 3D. *International Conference on Mathematical Methods in Science and Engineering*. ISBN: 978-84-617-8694-7
- [148] Virieux, J. (1984). SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 49(11), 1933-1942.
- [149] Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51(4), 889-901.
- [150] Vishnevsky, D., Lisitsa, V., Tcheverda, V., & Reshetova, G. (2014). Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves. *Geophysics*.
- [151] Verruijt, A., & Córdova, C. C. (2001). Moving loads on an elastic half-plane with hysteretic damping. *Journal of applied mechanics*, 68(6), 915-922.
- [152] Verruijt, A. (2009). An introduction to soil dynamics (Vol. 24). Springer Science & Business Media.
- [153] Wang, J. G., & Liu, G. R. (2002). A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(11), 1623-1648.
- [154] Wang, Y. (2015). Frequencies of the Ricker wavelet. *Geophysics*, 80(2), A31-A37.
- [155] White, R. E. (1992). The accuracy of estimating Q from seismic data. *Geophysics*, 57(11), 1508-1511.
- [156] Yagawa, G., & Yamada, T. (1996). Free mesh method: a new meshless finite element method. *Computational Mechanics*, 18(5), 383-386.

- [157] Yoo, J. W., Moran, B., & Chen, J. S. (2004). Stabilized conforming nodal integration in the natural-element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(5), 861-890.
- [158] Zahradník, J., & Priolo, E. (1995). Heterogeneous formulations of elastodynamic equations and finite-difference schemes. *Geophysical Journal International*, 120(3), 663-676.
- [159] Zhang, T., Ren, Y. F., Yang, Z. Q., Fan, C. M., & Li, P. W. (2016). Application of generalized finite difference method to propagation of nonlinear water waves in numerical wave flume. *Ocean Engineering*, 123, 278-290.
- [160] Zhang, T., Ren, Y. F., Fan, C. M., & Li, P. W. (2016). Simulation of two-dimensional sloshing phenomenon by generalized finite difference method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 63, 82-91.
- [161] Zheng, Y., & Huang, X. (2002). Anisotropic perfectly matched layers for elastic waves in cartesian and curvilinear coordinates. Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory.