

TESIS DOCTORAL

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS A PROBLEMAS DE PROPAGACION DE ONDAS EN EL TERRENO

Autor:

Ángel Muelas Rodríguez

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

**DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCIÓN Y FABRICACIÓN
E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA**

2015

DEPARTAMENTO DE CONSTRUCCIÓN Y FABRICACIÓN

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES

**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS
GENERALIZADAS A PROBLEMAS DE PROPAGACION DE
ONDAS EN EL TERRENO**

Autor:

Angel Muelas Rodríguez
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Director:

D. Juan José Benito Muñoz
Dr. Ingeniero Industrial

Codirector:

D. Francisco Ureña Prieto
Dr. Ingeniero Industrial

2015

Agradecimientos

En primer lugar, quiero dedicar esta tesis a mis padres, Ana M^a y Ángel, por todo el cariño y apoyo que me han mostrado desde niño y que nunca podré agradecer suficientemente. También deseo dedicar este trabajo a mi mujer Ana, mis hijos Ángel e Inés, y mis hermanos Ana y Álvaro, por su apoyo en todas las circunstancias de la vida y la alegría que siempre me transmiten.

Quisiera aprovechar estas líneas para expresar mi agradecimiento a las personas que me han dirigido y ayudado en la elaboración de esta Tesis Doctoral: D. Juan José Benito Muñoz y D. Francisco Ureña Prieto, por su generosa dedicación, su valiosa ayuda, su considerable paciencia y su estímulo constante para llevar a buen fin este trabajo.

Asimismo, quiero subrayar mi agradecimiento al apoyo proporcionado por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales (UNED) de España, Proyecto 2014-IFC02.

INDICE

<i>AGRADECIMIENTOS</i>	3
LISTA DE SÍMBOLOS, ABREVIATURAS Y SIGLAS	6
ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS	9
1. INTRODUCCION.....	14
2. OBJETIVOS	14
3. ANTECEDENTES.....	16
3.1. LOS MÉTODOS MESHLESS.....	19
3.1.1. <i>Definición</i>	19
3.1.2. <i>Origen y evolución de los Métodos sin malla</i>	22
3.1.3. <i>Clasificación de los Métodos sin malla</i>	25
4. EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS	29
4.1. INTRODUCCIÓN	29
4.2. FORMULACIÓN GENERAL DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS	29
4.3. FUNCIONES DE PONDERACIÓN	32
4.4. DISCRETIZACIÓN ESPACIAL EN X E Y HASTA 2º ORDEN.....	33
4.5. DISCRETIZACIÓN ESPACIAL EN X E Y HASTA 4º ORDEN.....	40
5. ESQUEMA EN D.F.G. PARA LA ECUACION DE ONDAS	45
5.1. ECUACIONES BÁSICAS DE ELASTODINÁMICA	45
5.1.1. <i>Formulación en desplazamientos</i>	45
5.1.2. <i>Formulación en tensión-velocidad</i>	50
5.1.3. <i>Condiciones de contorno</i>	52
5.2. ESQUEMA EN DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS	55
5.2.1. <i>Formulación en desplazamientos</i>	55
5.2.2. <i>Formulación en tensión-velocidad</i>	58
5.2.3. <i>Formulación de las condiciones de contorno</i>	61
5.2.4. <i>Discretización temporal</i>	65
5.3. CONVERGENCIA, CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD DEL MÉTODO	66
5.3.1. <i>Consistencia</i>	67
5.3.2. <i>Estabilidad</i>	71
5.4. COMPARACIÓN DE LAS DISTINTAS FORMULACIONES	83
5.4.1. <i>Formulación en desplazamientos y velocidad-tensión para discretizaciones regulares</i>	83
5.4.2. <i>Desplazamientos y velocidad-tensión para discretizaciones irregulares</i>	95
5.5. COMPARATIVA CON OTRO SOFTWARE	98

6. CONTORNOS PERFECTAMENTE SINCRONIZADOS	105
6.1. FORMULACIÓN	106
6.2. ESQUEMA EN D.F.G. PARA LOS PERFECTLY MATCHED LAYERS.....	116
6.2.1. <i>Formulación en tensión-velocidad</i>	116
6.2.2. <i>Formulación en desplazamientos</i>	120
6.2.3. <i>Esquema en D.F.G. para la formulación de P.M.L en desplazamientos</i>	124
6.3. ESTABILIDAD DEL ESQUEMA EN D.F.G. PARA LOS P.M.L.	128
6.4. ANÁLISIS DE LOS CONTORNOS PERFECTAMENTE SINCRONIZADOS	132
6.5. EJEMPLO NUMÉRICO	138
7. ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LA TOPOGRAFIA	143
7.1. SEMIESPACIO ELÁSTICO CON UN ORIFICIO INTERIOR. CASO CIRCULAR Y RECTANGULAR.....	144
7.2. SEMIESPACIO ELÁSTICO CON UNA PEQUEÑA MONTAÑA	146
8. EJEMPLOS DE APLICACIÓN.....	148
8.1. ENSAYO CROSS-HOLE	148
8.2. SÍSMICA DE REFRACCIÓN.....	175
9. CONCLUSIONES	182
10. DESARROLLOS FUTUROS	185
11. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS	186

LISTA DE SÍMBOLOS, ABREVIATURAS Y SIGLAS

U_0 Valor exacto de la función en el nodo central de la estrella.

U_i Valor exacto de la función en el nodo i de la estrella.

h_i Coordenada x del nodo i respecto del nodo central.

k_i Coordenada y del nodo i respecto del nodo central.

x_0 Coordenada x del nodo central de la estrella.

y_0 Coordenada y del nodo central de la estrella.

x_j Coordenada x del nodo j de la estrella.

y_j Coordenada y del nodo j de la estrella.

u_0 Valor aproximado de la función en el nodo central de la estrella.

u_i Valor aproximado de la función en el nodo i de la estrella.

$w(h_i, k_i)$ Función de ponderación de los nodos de la estrella.

$B_5[u]$ Funcional de la estrella hasta 2º orden en x e y .

$B_{14}[u]$ Funcional de la estrella hasta 4º orden en x e y .

A Matriz de los coeficientes.

D_u Vector de las derivadas parciales incógnitas del problema

b Vector de los términos independientes.

L Matriz triangular inferior resultante de la descomposición de Cholesky de **A**.

u_0^n Valor aproximado de la función en el nodo central en el paso temporal n .

u_i^n Valor aproximado de la función en el nodo i en el paso temporal n .

Δt Paso temporal.

E Módulo de elasticidad.

ν Coeficiente de Poisson.

ρ Densidad del medio

G Módulo de rigidez transversal

σ_{ij} : Tensor de tensiones actuante

ε_{ij} : Tensor de deformaciones

F_i : Fuerza actuante por unidad de volumen

λ : Parámetro elástico igual a:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{2 \nu G}{1 - 2\nu}$$

α Velocidad de propagación de las ondas P.

β Velocidad de propagación de las ondas S.

$g_i(t)$: componente i de la tensión aplicada en la superficie de contorno

n_i : componente i de la normal a la superficie de contorno

v_i : componente de la velocidad

TE_t Error cometido en la parte temporal de la aproximación.

$TE_{x,y}$ Error cometido en la parte espacial de la aproximación.

TTE Error total cometido con la aproximación.

ξ Coeficiente de amplificación del análisis de Von Neumann.

k Número de onda.

\mathbf{k} Vector número de onda.

\mathbf{x}_0 Vector de las coordenadas del nodo central de la estrella.

\mathbf{x}_j Vector de las coordenadas del nodo j de la estrella.

\mathbf{h}_j Vector de las coordenadas del nodo j respecto del nodo central de la estrella.

U_x Desplazamiento exacto de la onda en la dirección x .

U_y Desplazamiento exacto de la onda en la dirección y .

${}^n u_x^0$ Desplazamiento aproximado de la onda en el nodo central de la estrella en la dirección x para el paso temporal n .

${}^n u_y^0$ Desplazamiento aproximado de la onda en el nodo central de la estrella en la dirección y para el paso temporal n .

${}^n u_x^j$ Desplazamiento aproximado de la onda en el nodo j en la dirección x para el paso temporal n .

${}^n u_y^j$ Desplazamiento aproximado de la onda en el nodo j en la dirección y para el paso temporal n .

ω Frecuencia angular.

$\delta_x(x)$ Factor de amortiguamiento de PML en la dirección x,

$\delta_y(y)$ Factor de amortiguamiento de PML en la dirección y,

ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

Figura 3-1. Esquema de dominios de influencia nodal	20
Figura 3-2. Ejemplo de función de peso asociada a cada nodo	21
Figura 4-1. Dominio discretizado de manera irregular	29
Figura 4-2. Formación de estrellas dentro del dominio.....	30
Figura 4-3. Superposición de subdominios de funciones de ponderación	32
Figura 5-1. Distribuciones nodales con 441 y 1681 nodos.....	84
Figura 5-2. Representación del módulo de la deformación en el instante inicial	85
Figura 5-3. Comparativa entre los desplazamientos de la solución exacta y los obtenidos empleando una formulación de segundo orden con fórmulas explícitas de diferencias finitas para las derivadas espaciales con aproximación de 2º y 4º orden	86
Figura 5-4. Comparativa entre la solución exacta de U_x y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 2º orden	87
Figura 5-5. Error en U_x entre la solución exacta y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 2º orden.....	87
Figura 5-6. Comparativa entre la solución exacta de U_y y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 2º orden	88
Figura 5-7. Error en U_y entre la solución exacta y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 2º orden.....	88
Figura 5-8. Comparativa entre la solución exacta de U_x y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 4º orden	89
Figura 5-9. Error en U_x entre la solución exacta y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 4º orden.....	89
Figura 5-10. Comparativa entre la solución exacta de U_y y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 4º orden	90
Figura 5-11. Error en U_y entre la solución exacta y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 2º orden.....	90
Figura 5-12. Comparativa entre las soluciones teóricas y las obtenidas mediante el empleo de la formulación en desplazamientos para diferentes valores del coeficiente de Poisson ($t=2$ seg) ...	91
Figura 5-13. Desplazamientos para $v=0.49$ durante 5 seg	92
Figura 5-14. Velocidades. Aproximación de 2º y 4º orden	93
Figura 5-15. Velocidades obtenidas al reducir el espaciado entre nodos	93

Figura 5-16. Velocidades. Aproximación de 2º orden para $v=0.40$	94
Figura 5-17. Velocidades. Aproximación de 2º orden para $v=0.45$	94
Figura 5-18. Velocidades. Aproximación de 2º orden para $v=0.47$	94
Figura 5-19. Nubes de nodos irregulares con 515 y 6526 nodos respectivamente	95
Figura 5-20. Velocidades para aproximación de 2º orden con una distribución irregular de nodos (515 nodos)	96
Figura 5-21. Velocidades para aproximación de 2º orden con una distribución irregular de nodos (6526 nodos)	96
Figura 5-22. Distribuciones nodales irregulares con 272 y 1780 nodos	97
Figura 5-23. Desplazamientos para aproximación de 2º orden empleando una distribución irregular de nodos (272 nodos).....	97
Figura 5-24. Desplazamientos para aproximación de 2º orden empleando una distribución irregular de nodos (1780 nodos).....	97
Figura 5-25. Esquema de cálculo en FLAC (Manual del FLAC v.5.0).	99
Figura 5-26. a) Elementos cuadriláteros utilizados por FLAC; b) Elemento típico triangular con vectores velocidad; c) Vector fuerza en los nodos (Manual FLAC).....	99
Figura 5-27. Modelo de cálculo analizado	101
Figura 5-28. Comparativa entre el desplazamiento vertical obtenido en función del tiempo, en el nodo (2.5, 0.5), con el esquema de D.F.G. y el software comercial FLAC.....	102
Figura 5-29. Comparativa entre el desplazamiento horizontal obtenido en función del tiempo, en el nodo (3.0, 0.0), con el esquema de D.F.G. y el software comercial FLAC.....	103
Figura 5-30. Comparativa entre el desplazamiento vertical obtenido en función del tiempo, en el nodo (3.0, 0.0), con el esquema de D.F.G. y el software comercial FLAC.....	103
Figura 5-31. Comparativa entre el desplazamiento vertical obtenido en función del tiempo, en el nodo (3.207, 0.707), con el esquema de D.F.G. y el software comercial FLAC	104
Figura 5-32. Comparativa entre el desplazamiento horizontal obtenido en función del tiempo, en el nodo (3.207, 0.707), con el esquema de D.F.G. y el software comercial FLAC.....	104
Figura 6-1. Esquema del medio absorbente adosado a los límites del dominio elástico.....	106
Figura 6-2. Solución oscilatoria del tipo e^{ikx}	107
Figura 6-3. Dominio con parte imaginaria para $x \geq 7$	107
Figura 6-4. Atenuación de la solución oscilatoria para $x > 7$	108
Figura 6-5. Modelo empleado en el análisis de PML	132
Figura 6-6. Malla de nodos adoptada	133

Figura 6-7. Reflexión producida en la interfaz dominio elástico-PML	134
Figura 6-8. Un valor bajo de σ disminuye la reflexión en la interfaz dominio elástico-PML	134
Figura 6-9. Relación entre la amplitud de onda A_1 y la amplitud inicial A_0	135
Figura 6-10. Relación entre la amplitud de onda A_1 y y la amplitud inicial A_0 en el interior del PML	136
Figura 6-11. Relación entre la amplitud de onda incidente y la reflejada para el nodo (2.5,0.8) para un valor de $\sigma=0.1$	136
Figura 6-12. Relación entre la amplitud de onda incidente y la reflejada para el nodo (2.5,0.8) para un valor de $\sigma=0.02$	137
Figura 6-13. Relación entre la amplitud de la onda incidente y la reflejada en cuatro puntos del eje de simetría del modelo.....	138
Figura 6-14. Geometría del modelo	139
Figura 6-15. Deformación radial para $t=0.25$ seg.....	140
Figura 6-16. Deformación tangencial para $t=0.25$ seg.	140
Figura 6-17. Deformación radial para $t=0.50$ seg.....	141
Figura 6-18. Deformación tangencial para $t=0.50$ seg.	141
Figura 6-19. Deformación radial para $t=0.68$ seg.....	142
Figura 6-20. Deformación tangencial para $t=0.68$ seg.	142
Figura 7-1. Geometría del modelo empleado en el análisis	144
Figura 7-2. Geometría del semiespacio elástico con nodos añadidos en un patrón circular	144
Figura 7-3. a) Magnitud de los desplazamientos en la irregularidad nodal, representando los nodos; b) Magnitud de los desplazamientos en la irregularidad, representando superficies interpoladas	145
Figura 7-4. Magnitud de los desplazamientos alrededor de un orificio circular con condiciones de contorno de Dirichlet (instante $t=0.177$ seg.)	146
Figura 7-5. Magnitud de los desplazamientos alrededor de un orificio de forma cuadrada con condición de contorno de superficie libre ($t=0.165$ seg.)	146
Figura 7-6. Magnitud de los desplazamientos en el semiespacio con una pequeña montaña en dos instantes de tiempo: a) $t=0.14$ seg. y b) $t=0.184$ seg.	147
Figura 8-1. Esquema del ensayo cross-hole	149
Figura 8-2. Ensayo cross-hole empleado en la detección de oquedades	149
Figura 8-3. Localización de la zona del Proyecto.....	151

Figura 8-4. Testificación del sondeo realizado (0-10 m)	152
Figura 8-5. Testificación del sondeo realizado (10-15 m)	153
Figura 8-6. Tabla con los resultados del ensayo cross-hole realizado	154
Figura 8-7. Gráficas de las propiedades dinámicas obtenidas de la investigación efectuada.....	154
Figura 8-8. Gráficas de los parámetros dinámicos del modelo en función de la profundidad.....	155
Figura 8-9. Modelo empleado en la simulación del ensayo cross-hole	156
Figura 8-10. Gráfica de la simulación del ensayo a $z=5$ m.	157
Figura 8-11. Representación de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono ($z=5$ m).....	157
Figura 8-12. Gráfica de la simulación del ensayo a $z=7$ m.	158
Figura 8-13. Representación de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono ($z=7$ m).....	158
Figura 8-14. Gráfica de la simulación del ensayo a $z=9$ m.	159
Figura 8-15. Representación de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono ($z=9$ m).....	159
Figura 8-16. Gráfica de la simulación del ensayo a $z=11$ m.	160
Figura 8-17. Representación de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono ($z=11$ m).....	160
Figura 8-18. Representación de las velocidades de las ondas P y S obtenidas en el ensayo y las deducidas del modelo	161
Figura 8-19. Modelo con inclusión de menor rigidez.....	162
Figura 8-20. Instante de llegada de la onda a la zona menos rígida	163
Figura 8-21. La perturbación alcanza el centro de la zona de menor rigidez	163
Figura 8-22. La perturbación sobrepasa la inclusión menos rígida	164
Figura 8-23. La onda ha rebasado completamente la inclusión de menor rigidez.....	164
Figura 8-24. Comparativa entre las deformaciones horizontales medidas en el punto de ubicación del geófono sin/con inclusión de material de menor rigidez	165
Figura 8-25. Geometría del modelo con anomalía en velocidad sísmica	165
Figura 8-26. Frente de ondas en el instante $t=0.12$ seg.....	167
Figura 8-27. Frente de ondas en $t=0.20$ seg.....	167
Figura 8-28. Frente de ondas en $t=0.24$ seg.....	168
Figura 8-29. Frente de ondas en $t=0.28$ seg.....	168

Figura 8-30. Frente de ondas en $t=0.32$ seg.....	169
Figura 8-31. Frente de ondas en $t=0.40$ seg.....	169
Figura 8-32. Frente de ondas en el instante $t=0.12$ seg.....	171
Figura 8-33. Frente de ondas en el instante $t=0.16$ seg.....	171
Figura 8-34. Frente de ondas en el instante $t=0.20$ seg.....	172
Figura 8-35. Frente de ondas en el instante $t=0.24$ seg.....	172
Figura 8-36. Frente de ondas en el instante $t=0.28$ seg.....	173
Figura 8-37. Frente de ondas en el instante $t=0.32$ seg.....	173
Figura 8-38. Frente de ondas en el instante $t=0.36$ seg.....	174
Figura 8-39. Frente de ondas en el instante $t=0.40$ seg.....	174
Figura 8-40. Esquema básico del modelo de Sísmica de Refracción	175
Figura 8-41. Propagación de ondas en un modelo bicapa.....	176
Figura 8-42. Definición del ángulo crítico de refracción	177
Figura 8-43. Situación de la zona de estudio	177
Figura 8-44. Perfil interpretado mediante Sísmica de Refracción	178
Figura 8-45. Geometría del modelo tricapa analizado.....	178
Figura 8-46. Instante en el que las ondas alcanzan el contacto capa1-capa 2	179
Figura 8-47. Instante en el que las ondas se refractan en la capa 2	179
Figura 8-48. Generación de ondas refractadas hacia el medio superior	180
Figura 8-49. Instante en el que el frente de ondas alcanza el contacto capa 2-capa 3.....	180
Figura 8-50. Vista de los dos frentes de ondas refractadas	181
Figura 8-51. Vista de los distintos frentes de ondas generadas	181
Tabla 3-1. Clasificación de los métodos sin malla	28

1. INTRODUCCION

Cada día son más variados y complejos los problemas de mecánica cuyo análisis se trata de abordar utilizando métodos numéricos.

En la mayoría de los casos la geometría del problema es determinante, debiéndose comprobar la estabilidad en cada etapa de cálculo. En muchas ocasiones, el dominio de cálculo varía de una etapa a otra.

Estos problemas se abordan, no sin grandes dificultades, con los métodos numéricos más convencionales, tales como elementos finitos, diferencias finitas, etc. En muchos casos, estos métodos presentan la principal desventaja de su dependencia de una malla, por lo que cada modificación de la geometría o la aparición de discontinuidades dentro del dominio exigen la realización de un remallado de éste, lo cual repercute en el tiempo de ejecución del cálculo, precisión y complejidad del algoritmo de cálculo. En los últimos años, los métodos sin malla han surgido como una alternativa a los métodos numéricos convencionales basados en la generación de una malla.

Uno de los objetivos fundamentales de los denominados métodos sin malla, es eliminar en parte las dificultades apuntadas realizando una aproximación en términos nodales únicamente.

Dentro de los llamados métodos sin malla se encuentra el Método de las Diferencias Finitas Generalizadas (MDFG) del cual cabe destacar sobre todo su aplicación para el caso de nubes irregulares de puntos. Los trabajos de Benito [21] a [28], Gavete [61] a [64], Ureña [161] a [168] y Saleté [27], [28], [165] a [168], sobre diferencias finitas generalizadas permiten abordar la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en cualquier tipo de dominio mediante distribuciones irregulares de nodos. Debido a su precisión y eficacia computacional, este método presenta un gran atractivo en la modelización de la aplicación de cargas estáticas o dinámicas en el medio continuo. En particular, dicho método permite la modelización de fenómenos sísmicos en el terreno, introduciendo discontinuidades, irregularidades geométricas, etc.

2. OBJETIVOS

El objeto de la presente tesis se centra en la aplicación del Método de las Diferencias Finitas Generalizadas (MDFG) a los problemas de propagación de ondas en el terreno, analizando problemas de tipo elastodinámico, cuya solución se basa en la resolución de la ecuación de ondas, en su propagación por un dominio semi-infinito, elástico e isótropo.

En la presente tesis se pretende afianzar las bases para el desarrollo y aplicación del método denominado Diferencias Finitas Generalizadas al estudio y modelización de la propagación de ondas en el terreno. Se pretende hacer patente la solidez del método, exponiendo los fundamentos y el desarrollo del método, así como analizando su consistencia y estabilidad.

En primer lugar se va a exponer los fundamentos teóricos del Método de las Diferencias Finitas Generalizadas con el fin de obtener las expresiones que permitan la aproximación de las derivadas espaciales con aproximación de hasta 2º y 4º orden en dos dimensiones. Asimismo se va a plantear una formulación para la discretización temporal a emplear en el esquema de Diferencias Finitas Generalizadas.

Se va a desarrollar el esquema en DFG utilizando las formulaciones en desplazamientos y en tensión-velocidad. Complementariamente, se analizarán las posibles condiciones de contorno a aplicar, exponiendo la formulación que permite la imposición de condiciones de borde al esquema en diferencias finitas.

Una vez expuesta la formulación completa correspondiente al esquema en Diferencias Finitas Generalizadas para la resolución de problemas de elastodinámica, se efectuará una comparación de resultados obtenidos con las distintas formulaciones expuestas, con objeto de evaluar su precisión.

Un aspecto importante de la modelización de un problema elastodinámico es el tratamiento de los contornos del problema. Con el fin de evitar la interferencia debida al rebote de la onda en el contorno del modelo y cumplir la condición de radiación, sería necesario adoptar un dominio excesivamente grande aún para espacios de tiempo de análisis pequeños, ya que en la modelización de la transmisión de ondas la energía transmitida decae muy lentamente con la distancia. Por este motivo, se hace necesaria la modelización de unos contornos que de alguna forma absorban las ondas sin reflejarlas y que no alteren los resultados en la zona de interés debido a la reflexión de las ondas en dichos contornos. Estos contornos absorbentes, denominados Contornos Perfectamente Acoplados o en su denominación inglesa Perfectly Matched Layers (PML), se adosan a los límites del dominio elástico de forma muy natural utilizando la idea de extensión analítica al dominio complejo, provocando que la amplitud de una onda que entra en este material absorbente, se atenúe y decrezca exponencialmente a medida que avanza en él. La exposición de su formulación, estudio de su estabilidad y análisis de los parámetros que gobiernan el comportamiento de los contornos absorbentes es otro de los objetivos de la presente Tesis. Este estudio se completará con un análisis paramétrico de las variables que definen un contorno absorbente y su influencia en la solución del problema.

Una vez expuestos los distintos elementos que permiten modelizar un determinado problema elastodinámico, se analizarán varios ejemplos clásicos (problema de Lamb), comparando la solución obtenida con el MDFG con la obtenida mediante el empleo de programas comerciales (FLAC).

Otros aspectos adicionales que se analizarán son la influencia de la topografía del modelo y el estudio de heterogeneidades dentro del dominio, evaluando los resultados obtenidos.

La última parte de la tesis se centra en la aplicación del Método de Diferencias Finitas Generalizadas a casos concretos reales, con el objetivo de evaluar la representatividad de los modelos desarrollados.

3. ANTECEDENTES

Existen una serie de fenómenos en la naturaleza que pueden describirse mediante la formulación de ecuaciones algebraicas, diferenciales o integrales. Sin embargo, no siempre es posible obtener la solución exacta de estas ecuaciones debido a la complejidad de los fenómenos. En estos casos es necesario recurrir a procedimientos numéricos para lograr soluciones aproximadas. El auge de las técnicas de simulación con ordenadores ha permitido generar modelos numéricos cada vez más complejos para abordar la resolución de problemas en ingeniería.

El diseño en diversas ramas de la ingeniería requiere frecuentemente el análisis y la resolución de problemas derivados del análisis de tensiones y deformaciones en el medio a estudiar. Para ello se construyen modelos matemáticos más o menos complicados que permiten analizar el problema objeto de estudio.

En algunos problemas es posible encontrar las leyes que gobiernan el comportamiento de un determinado fenómeno, siendo factible introducir en el modelo las ecuaciones matemáticas de dichas leyes. Estos tipos de ecuaciones suelen ser de dos clases: ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y/o ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP).

En la resolución de las ecuaciones diferenciales que rigen un fenómeno físico ha de considerarse adicionalmente el dominio de definición del problema y las condiciones de contorno correspondientes. Los dominios reales en los que se plantean las ecuaciones diferenciales que gobiernan los fenómenos físicos presentan geometrías complejas que no pueden simplificarse a dominios geométricos más sencillos en los que serían aplicables los métodos analíticos de resolución de ecuaciones diferenciales. Por este motivo, se han desarrollado los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales.

Se ha desarrollado una gran variedad de métodos y técnicas para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, siendo los más extendidos el método de elementos finitos (MEF) y el método de diferencias finitas (MDF).

El método de Elementos Finitos es un método en el que el requisito principal consiste en que las cantidades (tensiones y deformaciones), varían a lo largo de cada elemento en un campo prefijado, utilizando funciones específicas controladas por parámetros. La formulación consiste en ajustar estos parámetros de tal forma que el error sea mínimo en términos de energía local o global. Este método se ha empleado intensamente para resolver problemas con geometrías complicadas, debido a su capacidad para discretizar los dominios físicos mediante algoritmos de mallado muy potentes que permiten importar y exportar archivos a herramientas CAD que facilitan el tratamiento gráfico del dominio.

En el caso del método de Diferencias Finitas, se emplea otra técnica numérica para la resolución de grupos de ecuaciones diferenciales. En este caso, cada grupo de ecuaciones es reemplazado directamente por una expresión algebraica escrita en términos de variable en puntos discretos.

A pesar del progresivo aumento de la potencia y prestaciones de los ordenadores durante los últimos años, existen algunos problemas de ingeniería que demandan requisitos muy exigentes en términos de capacidad de memoria, tiempo de cálculo, etc. que no son fácilmente solventables.

Por ejemplo, se han constatado las siguientes limitaciones del método de los elementos finitos:

- Elevado coste en la generación de la malla. No siempre es posible generar automáticamente una malla adecuada a la geometría del problema, siendo en muchos casos necesaria la intervención del analista para supervisarla y modificarla.
- Reducida precisión en la obtención de tensiones, especialmente en las interfaces entre elementos.
- Pérdida de precisión en análisis en grandes deformaciones, debido a la distorsión de los elementos.
- Dificultades para simular problemas de generación y progreso de fracturas, especialmente si su ubicación no coincide con la interfaz entre elementos.
- Grandes complicaciones en la simulación de la rotura del material en un gran número de fragmentos.
- Dificultades para llevar a cabo análisis adaptativos, que incluyen remallados para lograr una conectividad adecuada entre nodos. El coste computacional de este remallado en cada paso es excesivo.

Muchos de estos problemas tienen su origen en la necesidad de elementos o mallas en la etapa de creación del modelo. Este hecho ha fomentado el desarrollo de métodos que no requieren el empleo de una malla predefinida para la discretización del dominio. Estos métodos son los denominados Métodos sin Malla o Meshfree Methods.

La definición de Métodos sin Malla puede encontrarse en G.R. Liu y Y.T. Gu [105] en su publicación *An Introduction to Meshfree Methods and their Programming*:

An MFree method is a method used to establish system algebraic equations for the whole problem domain without the use of a predefined mesh for the domain discretization.

Los Métodos sin Malla emplean una serie de puntos distribuidos en el dominio y en sus bordes para modelizar el dominio del problema y sus contornos. Estos puntos –nodos- no constituyen una malla propiamente dicha, ya que no se requiere a priori la información de la conectividad entre los mismos para la interpolación o la aproximación de funciones incógnita de las variables de campo.

Esta ventaja permite abordar problemas donde se requieren remallados (análisis de grandes deformaciones) o modificaciones de la conectividad entre nodos (análisis de la evolución de fracturas), por ejemplo. Asimismo, permiten analizar dominios complejos. Dado el enorme potencial de estos métodos, se está dedicando un gran esfuerzo a desarrollar esta área de investigación, tal como se puede comprobar por la profusión de estudios y artículos existentes sobre estos métodos en los últimos años.

Actualmente se han logrado grandes avances en esta materia, optimizando sus algoritmos de aproximación y mostrando competitividad computacional. Incluso ya se están desarrollando programas de cálculo a nivel comercial.

Sin embargo, se ha observado que las aproximaciones de estos métodos sin malla son fuertemente dependientes de una serie de parámetros intrínsecos de la formulación, que deben ser seleccionados por el analista. Se ha constatado que existe una fuerte dependencia entre la precisión de la solución y la distribución nodal adoptada. Por ejemplo, una distribución nodal inadecuada puede afectar gravemente a la precisión de estos métodos, incluso llegando a provocar singularidades matriciales y la detención del proceso de cálculo. Por este motivo, gran parte de los numerosos trabajos publicados en los últimos años se ha centrado en el estudio de sensibilidad de los factores que influyen en la convergencia y bondad de la solución de los métodos sin malla. Por ejemplo, las aproximaciones numéricas empleadas, al ser generadas a partir de parámetros nodales, generalmente involucran funciones de forma numéricas, no analíticas. La elección adecuada de estas funciones influye considerablemente en la precisión de los resultados obtenidos.

En el momento presente, existen algunas limitaciones para la implementación generalizada de estos métodos sin malla, tales como la necesidad de una malla de integración subyacente, empleo de patrones nodales regulares, selección a priori de parámetros intrínsecos al método, aumento de tiempo computacional, etc.

3.1. Los métodos Meshless

3.1.1. Definición

Los Métodos Meshless —o Meshfree, según otros autores (Fries y Matthies [59]; Liu y Gu [105]; Oñate [138])— son métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales en los que el sistema de ecuaciones discretas a resolver se obtiene íntegramente a partir de un conjunto de nodos o puntos de evaluación repartidos por el dominio del problema y su contorno. Para plantear el sistema de ecuaciones correspondiente no se requiere a priori la información de la conectividad entre los nodos del dominio (malla predefinida).

Son muy variados los diferentes métodos sin malla publicados en la bibliografía de las últimas décadas. Una de las causas de la variedad existente es que el criterio para categorizar a un método numérico como Meshless no es absolutamente rígido. El requisito que idealmente debería satisfacer un Meshless —o Meshfree- Method es que en ningún instante del proceso de resolución de la ecuación diferencial (para una geometría arbitraria dada y cualquier tipo de condiciones de contorno aplicadas) fuera necesaria la existencia de una malla predefinida.

Los MMs desarrollados hasta el presente no suelen considerarse ideales, al encontrarse en alguna de las siguientes situaciones:

- Necesidad de malla subyacente de integración global. En los casos en los que la malla de integración no se desacopla de las posiciones nodales, una estrategia de parcelación clásica de dominios bidimensionales es la triangulación de Delaunay [30]. Cuando la malla de integración se desacopla de las posiciones nodales, la malla recibe el nombre de estructura de celdas.
- Necesidad de malla subyacente de integración local. Los métodos que utilizan una malla de integración local se consideran más próximos al caso ideal, puesto que la generación de una malla local es más inmediata que la de una malla para el dominio completo. La malla de integración local se utiliza para evaluar la formulación de las ecuaciones impuesta en dominios locales alrededor de cada nodo, en lugar de extendida al dominio completo. En este caso, los términos integrales del sistema matricial se evalúan sólo sobre dominios locales muy regulares (generalmente circulares) y sus bordes.

Un concepto que se encuentra ligado a la naturaleza de los MMs es el denominado dominio de influencia nodal (ver figura 3.1) La definición más intuitiva de lo que representa puede encontrarse en Dolbow y Belytschko [48]: *el dominio de influencia es el subdominio en el cual un nodo particular contribuye a la aproximación numérica, de tal forma que el solape de los dominios de influencia nodales definen la conectividad del modelo*. Es decir, el dominio de influencia de un nodo comprende el área en el que quedan inmersos los nodos que contribuyen a la aproximación numérica de la función en dicho nodo. Su tamaño queda generalmente determinado por el del dominio de soporte de la función de peso o ponderación (ver figura 3.2) asociada cada nodo, función que es únicamente no nula en el interior de su soporte compacto. La función de peso define la forma en que los nodos incluidos en el dominio de influencia contribuyen a la aproximación numérica. Por ejemplo, un tipo de función de ponderación comúnmente empleada es la fracción potencial, inversamente proporcional a la función potencial de la distancia d_i de cada nodo al nodo central:

$$w(d_i) = \frac{1}{d_i^p}$$

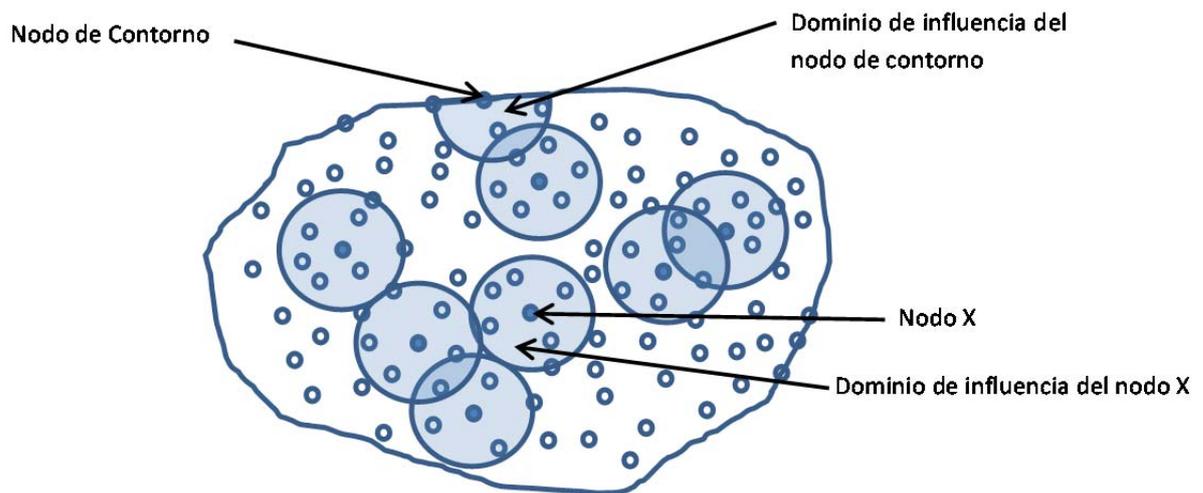


Figura 3-1. Esquema de dominios de influencia nodal

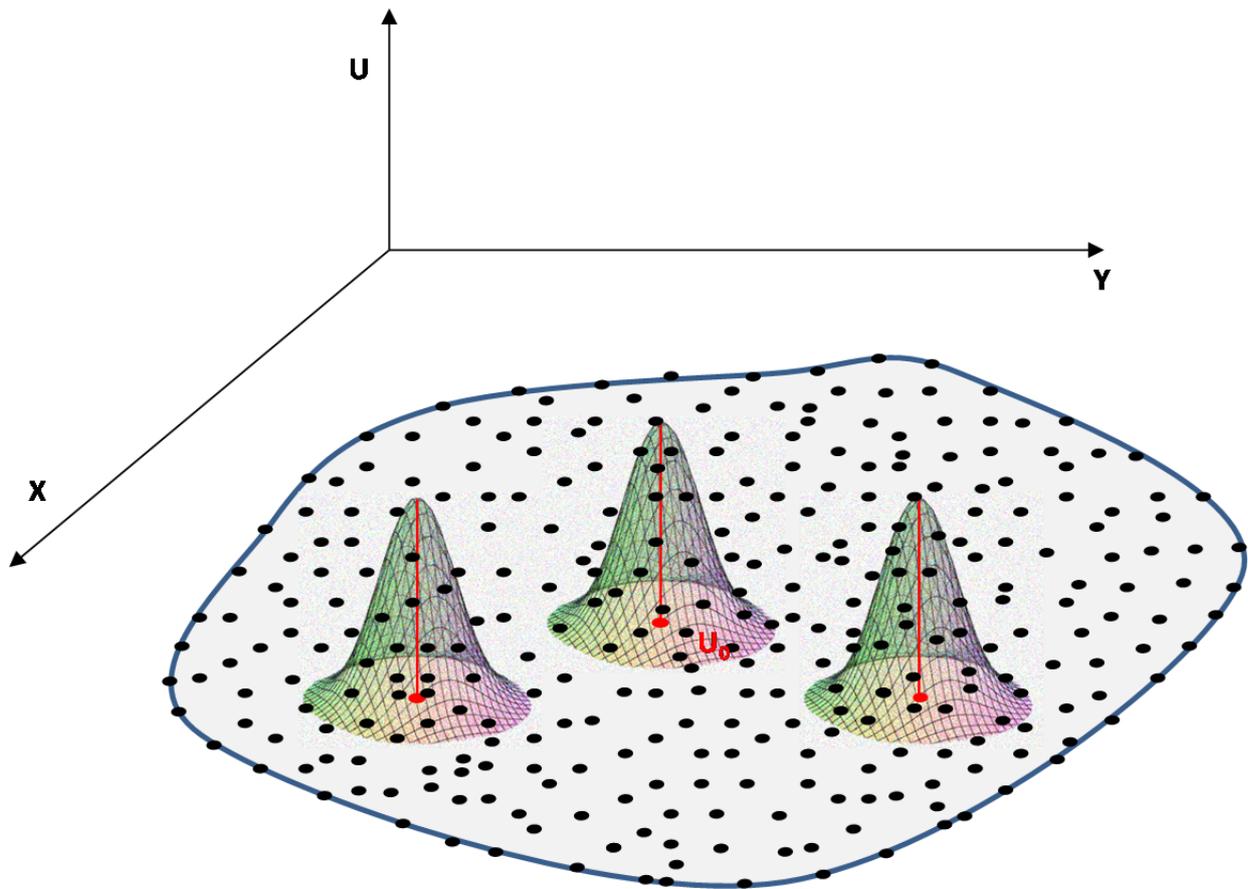


Figura 3-2. Ejemplo de función de peso asociada a cada nodo

En resumen, las características generales de los métodos sin malla son los siguientes:

- No necesidad de malla a priori para generación de la aproximación numérica. En los métodos sin malla no está predefinida la conectividad entre nodos, sino que se va ajustando durante las distintas etapas del cálculo. En cada paso se comprueba qué nodos se sitúan dentro del dominio de cada nodo, por lo que la conectividad puede ir evolucionando durante el cálculo, sin que tenga lugar un proceso de remallado (caso de los métodos de elementos finitos). Esta característica confiere una gran flexibilidad a la hora de incorporar o eliminar nodos al modelo.
- Continuidad de las funciones de forma. Las funciones de forma de los métodos sin malla pueden construirse de tal forma que sean continuas y suaves hasta un orden tan alto como se desee.

- Mayor complejidad en la implementación de condiciones de contorno. En los métodos sin malla el efecto de la aplicación de las condiciones de contorno no se circunscribe sólo a los nodos de frontera, sino que debe extenderse hacia el interior del dominio.
- Mayor coste computacional. Los métodos sin malla actuales presentan un mayor coste computacional que los métodos de elementos finitos. Esto es debido a la mayor complejidad de las funciones de forma respecto a los métodos basados en mallas. Esto quiere decir que en cada punto de integración son necesarias más operaciones adicionales para evaluar las funciones de forma (búsqueda de nodos en el dominio de influencia, inversión matricial) en el caso de los métodos sin mallas que en métodos basados en mallas. Adicionalmente, el número de puntos de integración necesarios para una aproximación suficientemente precisa es mayor en el caso de los métodos sin malla, por tener que evaluar funciones que requieren órdenes polinomiales superiores. Por último, el tamaño del dominio de influencia nodal condiciona la anchura de banda de las matrices en el sistema de ecuaciones que es preciso resolver.

3.1.2. Origen y evolución de los Métodos sin malla

Puede decirse que el origen de los métodos sin malla se sitúa a partir de los años 30 del siglo XX, cuando surgieron los conocidos como métodos de colocación (Slater, 1934; Barta, 1937; Frazer et al., 1937; etc.). Posteriormente, el Método de Diferencias Finitas con distribución nodal arbitraria o Método de Diferencias Finitas Generalizado (GFDM, siglas inglesas de Generalized Finite Difference Method) surge en los años 70, con los trabajos de Girault (1974), Pavlin y Perrone, (1975). Años más tarde, en 1980, Liszka y Orkisz [97,98] presentaron un trabajo de adaptación del Método de Diferencias Finitas a dominios arbitrarios empleando una técnica de condensación local de la malla. En este trabajo pusieron de manifiesto la capacidad del GFDM de competir en prestaciones computacionales con el MEF, mejorando sustancialmente el tratamiento de condiciones de contorno respecto al método de diferencias finitas tradicional.

Hidrodinámica de Partículas Suavizadas

Uno de los primeros métodos sin malla más conocidos es el denominado Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) o Hidrodinámica de Partículas Suavizadas,. El fundamento del SPH es la obtención de soluciones numéricas aproximadas para las ecuaciones de la Dinámica de Fluidos mediante la asimilación de un fluido a un conjunto de partículas que actúan como puntos de interpolación de las propiedades del fluido. Este método fue aplicado inicialmente en modelos de fenómenos astrofísicos, en los que la definición de los contornos del dominio no era esencial para la solución del problema. Los primeros trabajos del SPH se deben a Lucy [109] (1977), y a Monaghan y sus colaboradores (Gingold y Monaghan [65], 1977).

Métodos basados en Mínimos Cuadrados Móviles

En 1981 Lancaster y Salkauskas [94] introdujeron los Mínimos Cuadrados Móviles, Moving Least Squares (MLS) para aplicaciones topográficas de reconstrucción de superficies a partir de datos discretos en puntos arbitrariamente distribuidos. Posteriormente, Belytschko [12,13] empleó esta técnica de aproximación para desarrollar el Element Free Galerkin Method (EFGM), que es uno de los métodos sin malla más extendido. Años después, con el fin de independizar la formulación meshless de una malla auxiliar de integración numérica, Atluri y Zhu [6] publicaron el Meshless Local Petrov Galerkin Method (MLPG), considerado como otro de los principales métodos sin malla. Los autores de ambos métodos, EFGM y MLPG, centraron sus primeras investigaciones en resolver tests clásicos de la teoría de elementos finitos en el campo de la Elasticidad (problemas de Laplace y Poisson en dominios rectangulares) con sus métodos sin malla. Los excelentes resultados obtenidos en cuanto a error numérico y convergencia contribuyeron a profundizar en su estudio.

En la década de 1990 aumentó el desarrollo de los métodos sin malla centrado principalmente en los métodos basados en la formulación débil. El Método de los Elementos Difusos, Diffuse Element Method (DEM), publicado por Nayroles [130], reemplazó las funciones interpolantes del MEF, extendidas a un elemento, por funciones de forma idénticas a las resultantes de una aproximación por mínimos cuadrados móviles, extendidas a un entorno local del nodo. Más tarde Belytschko [12, 13] evolucionó el DEM para dar lugar al EFGM corrigiendo la evaluación de las derivadas de la aproximación numérica y el método de imposición de las condiciones de contorno en la frontera. Belytschko contribuyó decisivamente a potenciar la aplicación de los métodos sin malla en los problemas de la Mecánica de estructuras.

Métodos de kernel reproductor

El método denominado Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) fue desarrollado por W.K. Liu et al. [106,107,108] a partir de 1995. La introducción de la función kernel propuesta por W.K. Liu permite obtener funciones de forma equivalentes (Belytschko et al. [14]) a las que se consiguen por un procedimiento de mínimos cuadrados móviles que emplee las mismas funciones de peso. Estos métodos encontraron sus primeras aplicaciones en el ámbito de la teoría de ondas (W.K. Liu et al. [108]).

Particiones de Unidad

En 1996 Duarte y Oden [52] demostraron que las funciones de mínimos cuadrados móviles (MLSF) constituyen una partición de unidad y posteriormente desarrollaron un método sin malla denominado h-p clouds. La idea básica de este método es emplear una partición de unidad para construir las funciones h-p clouds. Estas funciones resultantes, denominadas h-p clouds,

conservan propiedades del MLSF, tales como la regularidad, y permiten representar polinomios de cualquier grado mediante combinaciones lineales de las mismas.

La idea de disponer de un conjunto de funciones que conforman una PU de cierto orden de consistencia es la base de la familia de métodos que se denominan Partition of Unity Methods o métodos PUM, desarrollados en 1995 por Babuška y Melenk [8].

Métodos de Interpolación de Punto

Hacia el final de la década de 1990 varios investigadores centraron sus esfuerzos en métodos que empleasen técnicas de interpolación. Las investigaciones llevadas a cabo por Liu, Gu y Wang condujeron a la aparición sucesiva de diversos Métodos de Interpolación de Punto: el Point Interpolation Method (PIM, Liu y Gu [100], 1999), con funciones base polinómicas; el Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM, Liu y Gu [101], 2001), con malla de integración local; el Boundary Radial Point Interpolation Method (BRPIM, Gu y Liu [70], 2001); el Radial Point Interpolation Method (RPIM, Wang y Liu [178]), con funciones base radiales; y el Boundary Point Interpolation Method (BPIM, Gu y Liu [71]).

Otros métodos

Entre otros métodos que han contribuido a la difusión de los métodos sin malla merece citar el FPM, el LBIE o el MWS. El Finite Point Method (FPM, Oñate et al. [134]) combina una aproximación local mediante mínimos cuadrados ponderados con una técnica de colocación basada en partículas fijas, con el fin de reducir la inestabilidad numérica. El FPM se ha empleado satisfactoriamente en problemas de transporte por convección-difusión, flujos en régimen incompresible y Mecánica de Sólidos. El Local Boundary Integral Equation Method (LBIE, Zhu et al. [183]) es similar al Método de los Elementos de Contorno (BEM, Boundary Element Method). El LBIE permite restringir a dominios locales de los nodos de contorno las integrales que en el BEM se extienden globalmente. Los Meshfree Weak-Strong Form Methods (MWS [102, 103]) han sido estudiados por Liu y Gu desde 2002. Se trata de métodos basados en la combinación de las formulaciones débil y fuerte aplicadas a distintos grupos de nodos para obtener el sistema de ecuaciones discretas. La formulación débil local se emplea para nodos en la frontera en los que las condiciones de contorno se imponen en la derivada de la función.

Desarrollos recientes

Actualmente existen un grupo de técnicas que, pueden ser consideradas meshless o, de algún modo, pueden combinarse con métodos ya existentes para facilitar su implementación. Una de las más destacadas es el Análisis Isogeométrico (Isogeometric Analysis, IGA en sus siglas

inglesas), desarrollado por el profesor Hughes y sus colaboradores [76,11] desde 2005. El IGA es una generalización del MEF que se basa en la construcción de la aproximación numérica mediante NURBS (Non Uniform Rational B-Splines), en lugar de la clásica discretización mediante malla. El uso de las B-splines para la aproximación permite la integración del análisis en los paquetes CAD, que emplean esa misma técnica para la modelización geométrica. El IGA ofrece así un enorme potencial para la resolución directa de EDPs y, de hecho, el número de trabajos relacionados con su investigación se ha incrementado notablemente.

El Método de Esferas Finitas (Method of Finite Spheres, De y Bathe [45, 46]) se caracteriza porque la discretización se lleva a cabo utilizando esferas n -dimensionales como dominios de soporte nodal y, como novedad, la integración numérica se efectúa mediante reglas específicas que eliminan la necesidad de una malla subyacente. Las funciones de forma que usa el Método de Esferas Finitas carecen de propiedad interpolante, por lo que existen aspectos que requieren una atención especial, como por ejemplo la imposición de condiciones de contorno tipo Dirichlet.

3.1.3. Clasificación de los Métodos sin malla

Diversos autores han abordado la clasificación de los métodos sin malla. Cabe citar los trabajos de Belytschko et al. [14] (1996), Liu [104] (2003), Fries y Matthies [59] (2004), Liu y Gu [105] (2005), Chen et al. [34] (2006) o Nguyen et al. [131] (2008). A continuación se expone la clasificación extraída de Liu y Gu [105], quienes proponen clasificar los MMs atendiendo a los tres criterios siguientes:

- Procedimiento de formulación
- Esquema de aproximación o interpolación
- Representación del dominio

Procedimiento de formulación

La clasificación según este criterio distingue tres grupos de MMs: los basados en la formulación débil, los basados en la formulación fuerte y los basados en una combinación de ambas formulaciones.

En los métodos basados en la formulación débil las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que gobiernan el problema se transforman en primer lugar en un sistema de ecuaciones denominadas ecuaciones integrales en forma débil. A partir de estas ecuaciones se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas mediante un proceso de integración numérica, utilizando una malla de celdas de integración de forma global o local en el dominio del problema. Estos métodos se desarrollaron a partir de 1990: Nayroles et al. [130] publicaron en 1992 el Método de los Elementos Difusos (DEM). Belytschko et al. presentaron en 1994 el Element Free

Galerkin Method (EFGM). Los MMs basados en formulación débil con malla de integración local se deben fundamentalmente al trabajo de Atluri y Zhu, que exploraron la formulación débil de Petrov-Galerkin para desarrollar a partir de 1998 el MLPG, y a Liu y Gu, impulsores del Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM). Otros métodos sin malla basados en la formulación débil son el h-p-cloud Method (Duarte y Oden [52], [53], 1996) o el Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM) (Babuška y Melenk [8], 1997).

Los métodos basados en la formulación fuerte discretizan directamente las ecuaciones diferenciales en los nodos del dominio mediante esquemas de colocación para obtener un sistema discretizado de ecuaciones algebraicas. Las principales ventajas de estos métodos son su simplicidad de los algoritmos de resolución, su eficiencia computacional y la independencia de una malla de integración subyacente. Sin embargo, son a menudo inestables, poco robustos e imprecisos, en especial cuando las condiciones de contorno se imponen en las derivadas de la variable incógnita del problema. En este caso se debe recurrir al empleo de nodos ficticios, utilización de mallas regulares en los contornos, etc. Se encuentran en esta categoría el MDF con distribución arbitraria de nodos, conocido como **Generalized Finite Difference Method (GFDM)**, o el Finite Point Method (FPM).

Por último, los métodos sin malla basados en la combinación de las formulaciones débil y fuerte son los llamados Weak-Strong Form Methods (MWS). En estos métodos se emplean las ambas formulaciones (fuerte y débil), de forma que las ecuaciones discretizadas en forma débil se aplican a los nodos próximos al borde del dominio con condiciones de contorno impuestas en las derivadas de la variable incógnita, mientras que las ecuaciones en forma fuerte se emplean para los restantes nodos del dominio. Estos métodos proporcionan soluciones estables y precisas en problemas de mecánica de sólidos.

Esquema de aproximación o interpolación

El esquema de aproximación o interpolación de las funciones es de suma importancia en los métodos sin malla. La forma en que se construyen las funciones de forma a partir de puntos de evaluación arbitrariamente dispuestos en el dominio, sin una malla predefinida ni conectividad establecida a priori, es un aspecto clave en los métodos sin malla. Según este criterio, se pueden distinguir los siguientes métodos:

- Métodos basados en la aproximación por Mínimos Cuadrados Móviles. Estos métodos proporcionan una aproximación continua para la función de campo en el dominio completo del problema. Entre los métodos que emplean esta técnica para la generación de las funciones de forma se encuentran el DEM, el EFGM o el MLPG.

- Métodos basados en la representación integral de la función. El SPH y el RKPM pertenecen a esta categoría.
- Métodos basados en la Interpolación de Punto. Son los llamados métodos PIM y derivados: LRPIM, BRPIM, RPIM, BPIM. Estos métodos emplean la interpolación para generar las funciones de forma que cumplen la propiedad de función delta de Kronecker. Existen dos tipos de formulaciones: las de base polinómica y las de base radial.
- Particiones de Unidad. Los h-p clouds, el PUFEM, X-FEM y GFEM se encuadran en esta categoría.

Representación del dominio

Según este criterio, los métodos sin malla pueden clasificarse en dos categorías: métodos de tipo dominio y métodos de tipo frontera. En los primeros, tanto el dominio como la frontera son representados mediante nodos o puntos de evaluación. El sistema de ecuaciones discretas deriva de la aplicación de la formulación débil o fuerte en el dominio completo.

En los métodos de tipo frontera sólo la misma se representa mediante nodos, cuya existencia en el interior del dominio no se requiere. El sistema de ecuaciones discretas se obtiene a partir de los nodos de frontera mediante el uso de funciones de forma. Ejemplos de métodos de este tipo son el BNM, el LBIE, el BPIM y el BRPIM.

Como resumen, la clasificación de los métodos sin malla según los criterios comentados se muestra en la tabla siguiente, basada en la publicada por Liu y Gu [105]:

Criterio	Categoría	Método
Formulación	Métodos basados en formulación fuerte	FPM, GFDM
	Métodos basados en formulación débil	EFGM, RPIM, RKPM, MLPG, LRPIM
	Métodos basados en combinación de formulación fuerte-débil	MWS, SPH
Esquema de Aproximación	Mínimos Cuadrados Móviles	DEM, EFGM, MLPG
	Representación integral de la aproximación de la función	SPH, RKPM
	Métodos de interpolación de punto	LRPIM, BRPIM, RPIM, BPIM
	Partición de Unidad	h-p Clouds, PUM,...
Representación del dominio	Dominio	EFGM, SPH, MLPG, GFDM,...
	Frontera	BNM, BPIM, LBIE

Tabla 3-1. Clasificación de los métodos sin malla

Dentro del contexto de los métodos sin malla, el presente trabajo se centra en la formulación del método de diferencias finitas generalizadas (MDFG ó GFDM en inglés) y en el estudio de su aplicación a la implementación, modelización y resolución de problemas de elastodinámica.

4. EL METODO DE DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS

4.1. Introducción

A continuación se van a exponer los fundamentos teóricos del Método de Diferencias Finitas generalizadas, el cual se basa en la aproximación por mínimos cuadrados móviles.

4.2. Formulación general del método de diferencias finitas generalizadas

En este apartado se estudia el MDFG para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de cualquier orden con coeficientes constantes.

Sea un problema gobernado por la siguiente ecuación de orden n en derivadas parciales:

$$L_n[\mathbf{U}] = f \quad \text{en } \Omega$$

Y con las siguientes condiciones de contorno:

$$L_{n-1}[\mathbf{U}] = g \quad \text{en } \Gamma$$

En donde \mathbf{U} es una función al menos n veces derivable, $\Omega \subset \mathcal{R}^m$ en donde $m=2, 3$, dependiendo de si se considera un dominio de 2 o 3 dimensiones. Γ representa el contorno del dominio. Por otro lado L_n y L_{n-1} son operadores lineales en derivadas parciales de orden n y $n-1$ respectivamente, y, f y g son dos funciones conocidas.

A continuación se procede a discretizar el dominio Ω en un número finito de nodos, pudiendo estar estos nodos colocados de manera irregular, tal y como se muestra en la figura adjunta.

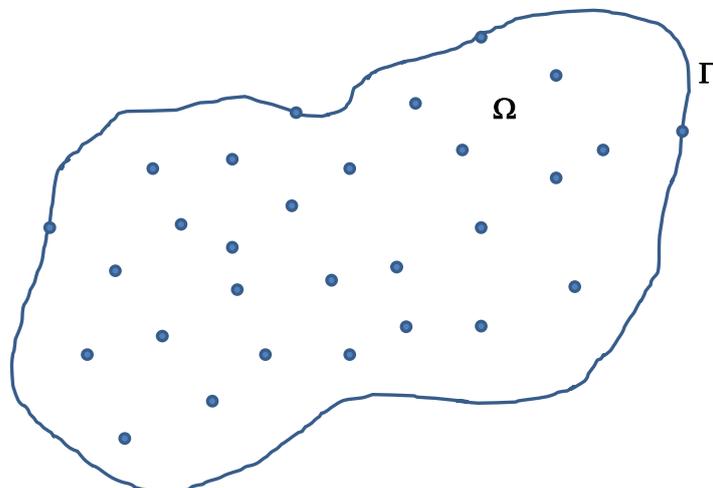


Figura 4-1. Dominio discretizado de manera irregular

A cada uno de los nodos del dominio se le asocia un número de nodos de su entorno, obteniéndose de esta forma lo que se conoce con el nombre de estrella (ver figura siguiente).

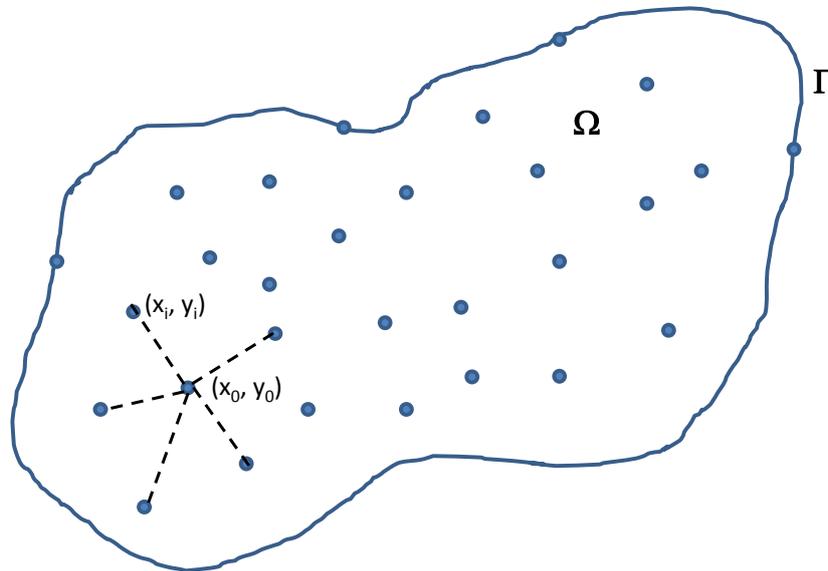


Figura 4-2. Formación de estrellas dentro del dominio

En donde (x_0, y_0) son las coordenadas del nodo central de la estrella y (x_i, y_i) son las coordenadas del nodo i de la estrella. Por tanto, se formarán tantas estrellas como nodos contenga el dominio.

Se llama $\mathbf{U}(x_0, y_0) \equiv U_0$ al valor de la función a aproximar en el nodo central de la estrella, y $\mathbf{U}(x_i, y_i) \equiv U_i$ el valor de la función en el nodo i .

Si se lleva a cabo el desarrollo en serie de Taylor de cada uno de los nodos de la estrella alrededor del nodo central se obtiene:

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \dots + \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n U_0}{\partial x^n} + \dots + \frac{k_i^n}{n!} \frac{\partial^n U_0}{\partial y^n} + \dots \quad [4.1]$$

En donde:

$U_i = U(x_i, y_i)$ representa el valor exacto de la función en el nodo i

$U_0 = U(x_0, y_0)$ representa el valor exacto de la función en el nodo central de la estrella.

Los valores de los incrementos h_i y k_i son los siguientes:

$$h_i = x_i - x_0$$

$$k_i = y_i - y_0$$

Truncando el desarrollo de Taylor en los términos de orden n se obtiene una aproximación de la función U_i , que denominamos u_i :

$$u_i = u_0 + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \dots + \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial x^n} + \dots + \frac{k_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial y^n} \quad [4.2]$$

En donde:

$u_i = u(x_i, y_i)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo i de coordenadas (x_i, y_i) .

$u_0 = u(x_0, y_0)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo central de la estrella.

El error cometido con el truncamiento citado será:

$$E_i = u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \dots + \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial x^n} + \dots + \frac{k_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial y^n} \quad [4.3]$$

Se define el siguiente funcional para cada estrella del dominio, realizando la suma de los errores cuadráticos ponderados de cada uno de los nodos de la estrella:

$$B_{\frac{n(n+3)}{2}}[u] = \sum_{i=1}^N \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \dots + \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial x^n} + \dots + \frac{k_i^n}{n!} \frac{\partial^n u_0}{\partial y^n} \right) w(h_i, k_i) \right]^2 \quad [4.4]$$

Donde:

$w(h_i, k_i)$ es una función de ponderación dependiente de la distancia de cada nodo al nodo central de la estrella.

Imponiendo la condición de que el funcional obtenido sea mínimo respecto a las derivadas parciales, se obtiene un sistema lineal de $\frac{n(n+3)}{2}$ ecuaciones:

$$\mathbf{A} \mathbf{D}_u = \mathbf{b}$$

La matriz \mathbf{A} es una matriz simétrica y de orden $\frac{n(N+3)}{2} \times \frac{n(N+3)}{2}$ invertible, por lo cual se obtendrá una solución única para el sistema de ecuaciones.

Una vez obtenido el vector \mathbf{D}_u se sustituyen en la expresión $L_n[\mathbf{U}] = f$ las derivadas parciales por sus valores en diferencias finitas, reemplazándose de esta manera las ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas en diferencias finitas, las cuales se resuelven de manera recurrente a partir de los valores conocidos en el contorno del dominio.

4.3. Funciones de ponderación

La utilización de funciones de ponderación es una característica común a todos los métodos sin malla. Las funciones de ponderación se usan para disponer de un soporte compacto, definiendo un subdominio (disco, rectángulo, burbuja, etc...) relativamente pequeño en el que su valor es distinto de cero, siendo nulo en el resto del dominio. Cada función de ponderación se asocia a un nodo, pudiéndose superponer con otros subdominios tal y como aparece en la figura siguiente:

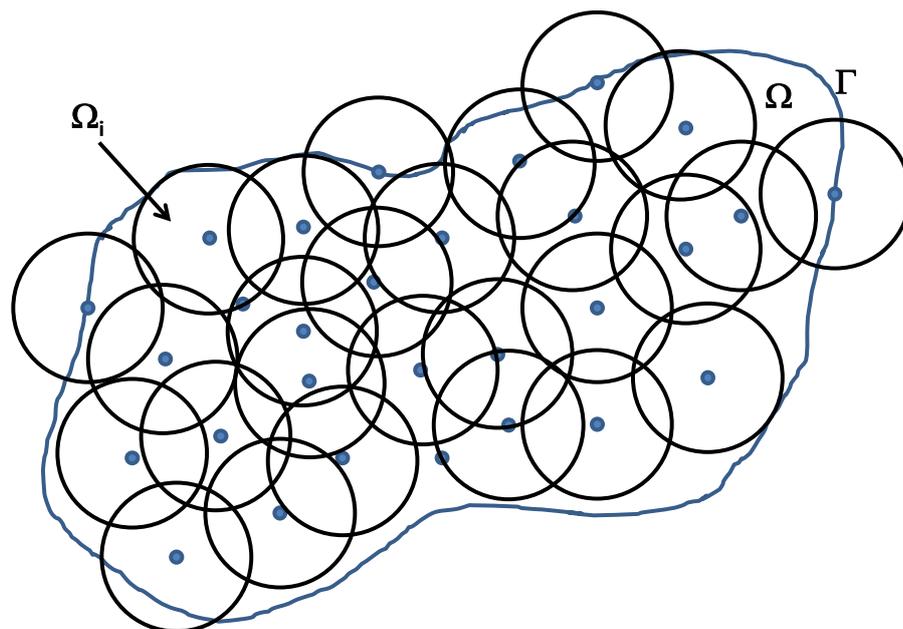


Figura 4-3. Superposición de subdominios de funciones de ponderación

Un tipo de función de ponderación utilizada es la fracción potencial, esto es:

$$w(d_i) = \frac{1}{d_i^p}$$

En donde:

$d_i = \|\{x\} - \{x_i\}\|$, es decir la distancia de cada nodo de la estrella al nodo central.

Otra función de ponderación utilizada es la función exponencial:

$$w(d_i) = e^{(-k d_i^2)}$$

Las spline también son funciones utilizadas como funciones de ponderación, en concreto caben destacar la cúbica:

$$\text{si } d_i < rp/2 \quad w(d_i) = \left(\frac{2}{3} - 4d_i^2 + 4d_i^3\right)^2$$

$$\text{si } rp/2 < d_i < rp \quad w(d_i) = \left(\frac{4}{3} - 4d_i + 4d_i^2 - \frac{4}{3}d_i^3\right)^2$$

$$\text{si } d_i > rp \quad w(d_i) = \frac{1}{10^{10}}$$

Y la spline cuártica:

$$\text{si } d_i < rp/2 \quad w(d_i) = \left(1 - 6d_i^2 + 8d_i^3 - 3d_i^4\right)^2$$

$$\text{si } d_i > rp \quad w(d_i) = \frac{1}{10^{10}}$$

4.4. Discretización espacial en X e Y hasta 2º orden

A continuación se van a obtener las fórmulas en diferencias finitas generalizadas para la resolución de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales con derivadas parciales de hasta 2º orden.

Sea la ecuación diferencial en derivadas parciales en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con frontera Γ :

$$A_1 \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} + A_3 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + A_5 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = F(x, y)$$

[4.5]

Con la condición de contorno:

$$a_1 U(x, y) + a_2 \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + a_3 \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = g(x, y) \quad \text{en } \Gamma \text{ (frontera de } \Omega)$$

[4.6]

En donde $U(x, y)$ es una función al menos dos veces diferenciable en Ω , y $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, a_1, a_2$ y a_3 son constantes.

La condición de contorno establecida es la que se denomina mixta. Por tanto si se anulan a_2 y a_3 en la expresión anterior, se tienen las condiciones de contorno tipo Dirichlet y si se anula el coeficiente a_1 , se tienen las condiciones de tipo Neumann.

Al efectuar el desarrollo de Taylor $U(x, y)$ en torno al nodo central de coordenadas (x_0, y_0) , para cada nodo de la estrella de coordenadas (x_i, y_i) se tiene:

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \dots + \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n U_0}{\partial x^n} + \dots + \frac{k_i^n}{n!} \frac{\partial^n U_0}{\partial y^n} + \dots$$

[4.7]

En donde:

$U_i = U(x_i, y_i)$ representa el valor exacto de la función en el nodo i

$U_0 = U(x_0, y_0)$ representa el valor exacto de la función en el nodo central de la estrella.

Los valores de los incrementos h_i y k_i son los siguientes:

$$h_i = x_i - x_0$$

$$k_i = y_i - y_0$$

Truncando el desarrollo de Taylor en los términos de orden 2 se obtiene una aproximación de la función U_i , que denominamos u_i :

$$u_i = u_0 + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}$$

[4.8]

En donde:

$u_i = u(x_i, y_i)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo i de coordenadas (x_i, y_i) .

$u_0 = u(x_0, y_0)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo central de la estrella.

El error cometido con el truncamiento citado será:

$$E_i = u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \quad [4.9]$$

Realizando la suma de los errores cuadráticos ponderados de cada uno de los nodos de la estrella, se define el siguiente funcional para cada estrella del dominio:

$$B_5[u] = \sum_{i=1}^N \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) w(h_i, k_i) \right]^2 \quad [4.10]$$

Donde:

$w(h_i, k_i)$ es una función de ponderación dependiente de la distancia de cada nodo al nodo central de la estrella.

Minimizando el funcional $B_5[u]$ respecto de las derivadas parciales, se obtiene el siguiente sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} (h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y})) h_i w^2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^N (u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} (h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y})) k_i w^2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^N (u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} (h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y})) \frac{h_i^2}{2} w^2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^N (u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} (h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y})) \frac{k_i^2}{2} w^2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^N (u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} (h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y})) h_i k_i w^2 &= 0 \end{aligned} \quad [4.11]$$

Este sistema se puede representar en forma matricial de la siguiente manera:

$$[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{D}_u] = [\mathbf{b}]$$

Donde \mathbf{D}_u es el vector de incógnitas, las cuales son precisamente las derivadas parciales que buscamos sustituir en la ecuación diferencial que representa el problema.

$$D_u = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right\}^T$$

[4.12]

\mathbf{b} es el vector de los términos independientes del sistema, igual a:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) k_i w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{h_i^2}{2} w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{k_i^2}{2} w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i k_i w(h_i, k_i)^2 \end{pmatrix}$$

[4.13]

Por último \mathbf{A} es la matriz de los coeficientes cuya expresión es la siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N h_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^N h_i k_i w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i k_i^2}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N h_i^2 k_i w^2 \\ & \sum_{i=1}^N k_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2 k_i}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{k_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N h_i k_i^2 w^2 \\ & & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^4}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2 k_i^2}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3 k_i}{2} w^2 \\ & & & \sum_{i=1}^N \frac{k_i^4}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i k_i^3}{2} w^2 \\ & & & & \sum_{i=1}^N h_i^2 k_i^2 w^2 \end{pmatrix}$$

SIM

[4.14]

Se puede observar que la matriz \mathbf{A} es una matriz simétrica y para que ésta no sea singular la estrella debe poseer al menos cinco nodos sin contar el nodo central.

Para la resolución de este sistema de ecuaciones, y dado que la matriz \mathbf{A} es simétrica, se puede aplicar la descomposición de Cholesky, descomponiéndose la matriz \mathbf{A} en el producto de dos matrices: una matriz triangular inferior multiplicada por su traspuesta, esto es:

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{L}]^T$$

El sistema a resolver quedaría de la siguiente forma:

$$[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{D}_u] = [\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{L}]^T \cdot [\mathbf{D}_u] = [\mathbf{b}]$$

Siendo:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} & l_{51} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} & l_{52} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} & l_{53} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} & l_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{55} \end{bmatrix}$$

Este sistema se puede resolver en dos etapas.

1. Llamando a $[\mathbf{L}]^T \cdot [\mathbf{D}_u] = [\mathbf{Y}]$, el sistema quedaría:

$$[\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{L}]^T \cdot [\mathbf{D}_u] = [\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{Y}] = [\mathbf{b}]$$

El desarrollo del sistema $[L] \cdot [Y] = [b]$ en forma matricial es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) k_i w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{h_i^2}{2} w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{k_i^2}{2} w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i k_i w(h_i, k_i)^2 \end{pmatrix} \quad [4.15]$$

Resolviendo el sistema anterior, queda:

$$y_k = (-u_0) \cdot \sum_{i=1}^5 M_{ki} c_i + \sum_{j=1}^N u_j \cdot \sum_{i=1}^5 M_{ki} d_{ji} \quad [4.16]$$

En donde:

$$M_{ij} = (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{l_{ii}} \sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} M_{kj} \quad i > j$$

$$M_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \quad i = j$$

$$M_{ij} = 0 \quad i < j$$

En la que δ_{ij} es la función delta de Kronecker, y los coeficientes c_i y d_{ji} adoptan las siguientes expresiones:

$$c_i = \sum_{j=1}^N d_{ji}$$

$$d_{j1} = h_j w^2 \quad d_{j2} = k_j w^2 \quad d_{j3} = \frac{h_j^2}{2} w^2 \quad d_{j4} = \frac{k_j^2}{2} w^2 \quad d_{j5} = h_j k_j w^2$$

2. A partir de los valores y_k se pueden obtener las derivadas parciales $[D_u]$ resolviendo el sistema:

$$[L]^T \cdot [D_u] = [Y]$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

[4.17]

Al resolver dicho sistema se obtiene la siguiente fórmula recursiva que permite calcular las expresiones explícitas de las derivadas parciales en diferencias finitas generalizadas:

$$D_u(k) = \frac{1}{l_{kk}} \left[y_k - \sum_{i=1}^{5-k} l_{k+i,k} D_u(k+i) \right]$$

$$= \frac{1}{l_{kk}} \left[(-u_0) \cdot \sum_{i=1}^5 M_{ki} c_i + \sum_{j=1}^N u_j \cdot \sum_{i=1}^5 M_{ki} d_{ji} - \sum_{i=1}^{5-k} l_{k+i,k} D_u(k+i) \right]$$

[4.18]

A continuación se sustituyen las fórmulas explícitas de las derivadas parciales en diferencias finitas generalizadas en la ecuación diferencial original:

$$A_1 \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} + A_3 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + A_5 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = F(x, y)$$

[4.19]

Una vez agrupados los términos, la expresión que finalmente se obtiene es la siguiente:

$$-m_0 u_0 + \sum_{j=1}^N m_j u_j = F(x_0, y_0) = f_0$$

[4.20]

La expresión obtenida se denomina **ecuación de la estrella**. Esta ecuación relaciona los valores de la función en el centro de la estrella y en los nodos de la misma con el valor de la función F en el centro de la estrella. Los coeficientes m_0 y m_j dependen del número de nodos de la estrella N, de los incrementos h_j y k_j y de la función de ponderación w:

$$m_0 = m_0(N, h_j, k_j, w)$$

$$m_j = m_j(N, h_j, k_j, w)$$

En la ecuación anterior se cumple, por definición:

$$-m_0 + \sum_{j=1}^N m_j = 0$$

4.5. Discretización espacial en X e Y hasta 4º orden

En este caso se va a obtener la formulación en diferencias finitas generalizadas para la resolución de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales con derivadas parciales de hasta 4º orden.

Sea la ecuación diferencial en derivadas parciales en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con frontera Γ :

$$\begin{aligned} & A_1 \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} + A_3 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + A_5 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} + A_6 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x^3} + \\ & + A_7 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + A_8 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x \partial y^2} + A_9 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial y^3} + A_{10} \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial x^4} + A_{11} \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial x^3 \partial y} + A_{12} \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ & + A_{13} \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial x \partial y^3} + A_{14} \frac{\partial^4 U(x, y)}{\partial y^4} = F(x, y) \end{aligned}$$

[4.21]

Con la condición de contorno:

$$\beta \frac{\partial U}{\partial n} + \gamma U = g(x, y) \quad \text{en } \Gamma \text{ (frontera de } \Omega \text{)}$$

[4.22]

Esta condición de contorno desarrollada es la siguiente:

$$\begin{aligned} a_1 U(x, y) + a_2 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x^3} + a_3 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + a_4 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial x \partial y^2} + a_5 \frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial y^3} + a_6 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \\ + a_7 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} + a_8 \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + a_9 \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + a_{10} \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = g(x, y) \end{aligned}$$

[4.23]

En donde $U(x, y)$ es una función al menos dos veces diferenciable en Ω , γ , $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$, y a_{10} son constantes.

Al efectuar el desarrollo de Taylor $U(x, y)$ en torno al nodo central de coordenadas (x_0, y_0) , para cada nodo de la estrella de coordenadas (x_i, y_i) se tiene:

$$\begin{aligned} U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 U_0}{\partial x^3} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 U_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 U_0}{\partial x^2 \partial y} \\ + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 U_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 U_0}{\partial x^4} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 U_0}{\partial y^4} + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 U_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 U_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 U_0}{\partial x \partial y^3} \\ + \dots + \frac{h_i^n}{n!} \frac{\partial^n U_0}{\partial x^n} + \dots + \frac{k_i^n}{n!} \frac{\partial^n U_0}{\partial y^n} + \dots \end{aligned}$$

[4.24]

En donde:

$U_i = U(x_i, y_i)$ representa el valor exacto de la función en el nodo i

$U_0 = U(x_0, y_0)$ representa el valor exacto de la función en el nodo central de la estrella.

Los valores de los incrementos h_i y k_i son los siguientes:

$$h_i = x_i - x_0$$

$$k_i = y_i - y_0$$

Truncando el desarrollo de Taylor en los términos de orden 4 se obtiene una aproximación de la función U_i , que denominamos u_i :

$$u_i = u_0 + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y}$$

$$+ \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3}$$

[4.25]

En donde:

$u_i = u(x_i, y_i)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo i de coordenadas (x_i, y_i) .

$u_0 = u(x_0, y_0)$ representa el valor aproximado de la función en el nodo central de la estrella.

El error cometido con el truncamiento citado será:

$$E_i = u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}$$

$$+ \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$+ \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3}$$

[4.26]

A continuación se define el siguiente funcional para cada estrella del dominio, que corresponde a la suma de los errores cuadráticos ponderados de cada uno de los nodos de la estrella:

$$B_{14}[u] = \sum_{i=1}^N \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{k_i^3}{6} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{h_i^2 k_i}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h_i k_i^2}{2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{h_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \frac{k_i^4}{24} \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4} + \frac{h_i^3 k_i}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y} + \frac{h_i^2 k_i^2}{4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h_i k_i^3}{6} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} \right) w(h_i, k_i) \right]^2 \quad [4.27]$$

Donde:

$w(h_i, k_i)$ es una función de ponderación dependiente de la distancia de cada nodo al nodo central de la estrella.

Minimizando el funcional $B_{14}[u]$ respecto a las derivadas parciales, se obtiene el siguiente sistema de 14 ecuaciones con 14 incógnitas:

$$[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{D}_u] = [\mathbf{b}] \quad [4.28]$$

En este sistema la matriz de las derivadas parciales es la siguiente:

$$D_u = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial y^4}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^4 u_0}{\partial x \partial y^3} \right\}^T \quad [4.29]$$

La matriz $[\mathbf{A}]$ es simétrica, siendo necesario 14 ecuaciones para resolver el sistema. Esto equivale a decir que las estrellas deben tener al menos 14 nodos más el nodo central. Las expresiones explícitas de los elementos de la matriz $[\mathbf{D}_u]$ dependen del número de nodos, la selección y disposición de los nodos y la función de ponderación.

El sistema mencionado se puede resolver análogamente al caso de la discretización de hasta 2º orden, obteniéndose la siguiente fórmula recursiva:

$$D_u(k) = \frac{1}{l_{kk}} \left[y_k - \sum_{i=1}^{14-k} l_{k+i,k} D_u(k+i) \right] \\ = \frac{1}{l_{kk}} \left[(-u_0) \cdot \sum_{i=1}^{14} M_{ki} c_i + \sum_{j=1}^N u_j \cdot \sum_{i=1}^{14} M_{ki} d_{ji} - \sum_{i=1}^{14-k} l_{k+i,k} D_u(k+i) \right] \quad [4.30]$$

En donde:

$$M_{ij} = (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{l_{ii}} \sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} M_{kj} \quad i > j \quad i, j = 1, \dots, 14$$

$$M_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \quad i = j \quad i, j = 1, \dots, 14$$

$$M_{ij} = 0 \quad i < j \quad i, j = 1, \dots, 14$$

En la que δ_{ij} es la función delta de Kronecker, y los coeficientes c_i y d_{ji} adoptan las siguientes expresiones:

$$c_i = \sum_{j=1}^N d_{ji}$$

$$d_{j1} = h_j w^2 \quad d_{j2} = k_j w^2 \quad d_{j3} = \frac{h_j^2}{2} w^2 \quad d_{j4} = \frac{k_j^2}{2} w^2 \quad d_{j5} = h_j k_j w^2$$

$$d_{j6} = \frac{h_j^3}{6} w^2 \quad d_{j7} = \frac{k_j^3}{6} w^2 \quad d_{j8} = \frac{h_j^2 k_j}{2} w^2 \quad d_{j9} = \frac{h_j k_j^2}{2} w^2 \quad d_{j10} = \frac{h_j^4}{24} w^2$$

$$d_{j11} = \frac{k_j^4}{24} w^2 \quad d_{j12} = \frac{h_j^3 k_j}{6} w^2 \quad d_{j13} = \frac{h_j^2 k_j^2}{4} w^2 \quad d_{j14} = \frac{h_j k_j^3}{6} w^2$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas parciales en la ecuación diferencial original, se obtiene:

$$-m_0 u_0 + \sum_{j=1}^N m_j u_j = F(x_0, y_0) = f_0 \quad (N \geq 14)$$

[4.31]

La expresión obtenida corresponde a la **ecuación de la estrella**. Esta ecuación relaciona los valores de la función en el centro de la estrella y en los nodos de la misma con el valor de la función F en el centro de la estrella. Los coeficientes m_0 y m_j dependen del número de nodos de la estrella N , de los incrementos h_j y k_j y de la función de ponderación w :

$$m_0 = m_0(N, h_j, k_j, w)$$

$$m_j = m_j(N, h_j, k_j, w)$$

En la ecuación anterior se cumple, adicionalmente:

$$-m_0 + \sum_{j=1}^N m_j = 0$$

5. ESQUEMA EN D.F.G. PARA LA ECUACION DE ONDAS

Una vez expuestas las discretizaciones espacial y temporal, se va a estudiar la aplicación del método de diferencias finitas generalizadas a la resolución de problemas en elastodinámica.

5.1. Ecuaciones básicas de elastodinámica

En los apartados siguientes se expondrán las ecuaciones que gobiernan la formulación de problemas en elastodinámica, en función de desplazamientos o en tensión y velocidad.

5.1.1. Formulación en desplazamientos

Las ecuaciones de equilibrio dinámico en elasticidad para el caso de 3 dimensiones son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad [5.1]$$

Estas ecuaciones escritas en notación indicial se reducen a la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad i, j = x, y, z \quad [5.2]$$

Donde:

- σ_{ij} : Tensor de tensiones actuante
- F_i : Fuerza por unidad de volumen, p.ej. el peso del material
- ρ : Densidad del material
- u_i : Componentes del vector desplazamiento

Las tensiones están relacionadas con las deformaciones unitarias mediante la ley de Hooke generalizada para un medio elástico e isótropo:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad [5.3]$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{2 \nu G}{1 - 2\nu} \quad [5.4]$$

Siendo λ y G (módulo de rigidez) las denominadas constantes de Lamé.

Estas ecuaciones, desarrolladas para el caso de 3 dimensiones, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2 G \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2 G \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2 G \varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= 2 G \varepsilon_{xy} \\ \tau_{yz} &= 2 G \varepsilon_{yz} \\ \tau_{xz} &= 2 G \varepsilon_{xz} \end{aligned} \quad [5.5]$$

Adicionalmente, la expresión que relaciona las deformaciones unitarias con los desplazamientos es la siguiente:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad [5.6]$$

O bien, desarrolladas para el caso de 3 dimensiones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \tau_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad [5.7]$$

Sustituyendo la expresión de las deformaciones unitarias en las ecuaciones de la Ley de Hooke, resulta:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad [5.8]$$

Introduciendo esta expresión en las ecuaciones de equilibrio dinámico y considerando nulas las fuerzas unitarias volumétricas F_i , resulta la siguiente ecuación:

$$\sigma_{ij,j} = \lambda u_{k,ki} + G (u_{i,jj} + u_{j,ij}) = \rho \ddot{u}_i \quad i, j = x, y, z \quad [5.9]$$

Cambiando el subíndice mudo j por k , resulta:

$$\sigma_{ik,k} = \lambda u_{k,ki} + G (u_{i,kk} + u_{k,ik}) = (\lambda + G)u_{k,ik} + G u_{i,kk} = \rho \ddot{u}_i \quad i, j = x, y, z \quad [5.10]$$

Desarrollando la ecuación anterior, queda:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + G \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} + G \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + G \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad [5.11]$$

En el caso de dos dimensiones las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + G \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + G \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad [5.12]$$

Esta formulación en desplazamientos gobierna el comportamiento de problemas en elastodinámica en 2 dimensiones.

O bien, escritas de otra manera:

$$\frac{\partial \left[(\lambda + 2G) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right]}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \left[G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right]}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

[5.13]

Las 2 ecuaciones anteriores se pueden escribir empleando el operador $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) = (\lambda + G) \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{u})}{\partial x} + G \nabla^2 u_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)}{\partial y} + G \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) = (\lambda + G) \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{u})}{\partial y} + G \nabla^2 u_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

[5.14]

O en forma vectorial:

$$(\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + G \nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

[5.15]

Como $\nabla^2 \vec{u} = \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times \nabla \times \vec{u}$ o, resulta:

$$(\lambda + 2G) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - G \nabla \times \nabla \times \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

[5.16]

Efectuando la divergencia de esta ecuación y recordando la siguiente identidad:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\boxplus}) = 0$$

[5.17]

Donde $\vec{\boxplus}$ representa cualquier cantidad vectorial.

Resulta:

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \vec{u})}{\partial t^2}$$

[5.18]

Esta ecuación indica que cualquier distorsión asociada con un cambio en el volumen de los elementos del medio ($\nabla \cdot \vec{u}$) se va a propagar en la forma de una onda con una velocidad:

$$v_p = \alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad [5.19]$$

Siendo K el módulo de deformación volumétrica:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}G \quad [5.20]$$

Si ahora efectuamos el rotacional de la ecuación vectorial citada anteriormente, queda:

$$(\lambda + 2G)\nabla \times [\nabla (\nabla \cdot \vec{u})] - G \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 (\nabla \times \vec{u})}{\partial t^2} \quad [5.21]$$

Sabiendo que:

$$\nabla \times \nabla \cdot \vec{\Xi} = 0 \quad [5.22]$$

Donde $\vec{\Xi}$ representa cualquier cantidad vectorial.

Y teniendo en cuenta la igualdad siguiente que resulta de la identidad citada anteriormente:

$$\nabla^2 (\nabla \times \vec{\Xi}) = \nabla (\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\Xi})) - (\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \vec{\Xi})) = -(\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \vec{\Xi})) \quad [5.23]$$

Se llega a:

$$G \nabla^2 (\nabla \times \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 (\nabla \times \vec{u})}{\partial t^2} \quad [5.24]$$

Esta ecuación indica que cualquier distorsión asociada con una deformación tangencial de los elementos del medio elástico se va a propagar en forma de onda con una velocidad v_s :

$$v_s = \beta = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad [5.25]$$

5.1.2. Formulación en tensión-velocidad

Se parte de las ecuaciones, ya citadas anteriormente, de equilibrio dinámico en elasticidad:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad i, j = x, y, z \quad [5.26]$$

Donde:

- σ_{ij} : Tensor de tensiones actuante
- F_i : Fuerza por unidad de volumen, p.ej. el peso del material
- ρ : Densidad del material
- u_i : Componentes del vector desplazamiento

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en función de la velocidad v_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{aligned} \quad [5.27]$$

Las tensiones se relacionan con las deformaciones unitarias teniendo en cuenta la ley de Hooke generalizada para un medio elástico e isótropo:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad [5.28]$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{2 \nu G}{1 - 2\nu} \quad [5.29]$$

Siendo λ y G (módulo de rigidez) las denominadas constantes de Lamé.

Adicionalmente, la expresión que relaciona las deformaciones unitarias con los desplazamientos es la siguiente:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad [5.30]$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación de Hooke se obtiene la relación entre tensiones y desplazamientos:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad [5.31]$$

Desarrollando esta expresión, resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2G) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_y &= \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_z &= \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + (\lambda + 2G) \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad [5.32]$$

Derivando las igualdades anteriores respecto al tiempo, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + (\lambda + 2G) \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} &= G \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} &= G \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= G \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad [5.33]$$

Estas 6 ecuaciones junto con las 3 ecuaciones de equilibrio dinámico, son las que gobiernan la formulación de problemas en elastodinámica a partir de los parámetros de tensión y velocidad.

En el caso de 2 dimensiones, las ecuaciones se reducen a las cinco siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} &= G \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

[5.34]

5.1.3. Condiciones de contorno

La adecuada resolución de un problema en elastodinámica exige definir, además de la formulación de propagación de la sollicitación en el medio elástico (ecuaciones en tensión-velocidad o en desplazamientos), unas condiciones de contorno que han de incorporarse al problema.

Los dos tipos de condiciones de contorno que se habitualmente se consideran son las siguientes:

- Condiciones de frontera tipo Dirichlet
- Condiciones de superficie libre

La condición de frontera tipo Dirichlet supone imponer un desplazamiento fijo en los nodos frontera que delimitan el contorno físico del problema. En el caso de 2 dimensiones (x,y), esta condición es la siguiente:

$$u_x(x, y, 0) = {}^0u_x^{x,y} = u_{x0}(x, y)$$

$$u_y(x, y, 0) = {}^0u_y^{x,y} = u_{y0}(x, y)$$

[5.35]

En el caso de la condición de superficie libre, ésta se impone igualando la tensión en el punto del contorno al valor de la tensión a aplicar (definida por las condiciones de contorno).

Las ecuaciones que permiten imponer esta condición son las siguientes:

$$\begin{aligned}\sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z &= p_x = g_x(t) \\ \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z &= p_y = g_y(t) \\ \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z &= p_z = g_z(t)\end{aligned}$$

[5.36]

Siendo:

- n_x : componente x de la normal a la superficie de contorno
- n_y : componente y de la normal a la superficie de contorno
- n_z : componente z de la normal a la superficie de contorno
- p_x : componente x de la tensión normal en la superficie de contorno
- p_y : componente y de la tensión normal en la superficie de contorno
- p_z : componente z de la tensión normal en la superficie de contorno

Los valores $g_x(t)$, $g_y(t)$ y $g_z(t)$ son funciones del tiempo, de forma que pueden imponerse condiciones de contorno variables con el tiempo.

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_x(t) \\ g_y(t) \\ g_z(t) \end{bmatrix}$$

[5.37]

O en dos dimensiones:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_x(t) \\ g_y(t) \end{bmatrix}$$

[5.38]

En el caso de la formulación del problema de elastodinámica en tensión y velocidad, la implementación de este tipo de condiciones de contorno se lleva a cabo imponiendo directamente el valor de la tensión aplicada en el contorno.

Si la formulación del problema en elastodinámica se lleva a cabo en desplazamientos, es preciso expresar las tensiones en función de los desplazamientos y los parámetros elásticos G y λ :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} (\lambda + 2G) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} & G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + (\lambda + 2G) \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} g_x(t) \\ g_y(t) \\ g_z(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.39}$$

En 2 dimensiones, la expresión matricial resultante es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2G) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} & G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_x(t) \\ g_y(t) \end{bmatrix}
 \tag{5.40}$$

Siendo:

$g_x(t)$: componente x de la tensión aplicada en el punto de la superficie de contorno

$g_y(t)$: componente y de la tensión aplicada en el punto de la superficie de contorno

Esta condición se puede expresar de forma reducida, empleando las expresiones de las tensiones derivadas de la ley de Hooke, en función de los desplazamientos u_i :

$$(\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G (u_{i,j} + u_{j,i})) n_j = g_i(t)
 \tag{5.41}$$

Cuando $g_i(t)$ es igual a cero, no existen fuerzas aplicadas a la superficie.

5.2. Esquema en Diferencias Finitas Generalizadas

En este apartado se va a obtener el esquema en diferencias finitas generalizadas de la ecuación de elastodinámica para el caso de 2 dimensiones.

5.2.1. Formulación en desplazamientos

Las 2 ecuaciones que permiten resolver los problemas de elastodinámica en dos dimensiones en función de los desplazamientos son las siguientes:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + G \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + G \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad [5.42]$$

A partir de la discretización espacial expuesta en los apartados 4.1 y 4.2 (ver expresión recurrente adjunta) se pueden obtener las derivadas parciales incluidas en las ecuaciones anteriores.

$$\begin{aligned} D_u(k) &= \frac{1}{l_{kk}} \left[y_k - \sum_{i=1}^{5-k} l_{k+i,k} D_u(k+i) \right] = \\ &= \frac{1}{l_{kk}} \left[(-u_0) \cdot \sum_{i=1}^5 M_{ki} c_i + \sum_{j=1}^N u_j \cdot \sum_{i=1}^5 M_{ki} d_{ji} - \sum_{i=1}^{5-k} l_{k+i,k} D_u(k+i) \right] \end{aligned} \quad [5.43]$$

Las derivadas parciales se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x^2} &= -m_{11}^0 u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j u_x^j \\ \frac{\partial^2 u_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y^2} &= -m_{22}^0 u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j u_x^j \\ \frac{\partial^2 u_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x \partial y} &= -m_{12}^0 u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j u_x^j \\ \frac{\partial^2 u_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x^2} &= -m_{11}^0 u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j u_y^j \\ \frac{\partial^2 u_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y^2} &= -m_{22}^0 u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j u_y^j \\ \frac{\partial^2 u_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x \partial y} &= -m_{12}^0 u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j u_y^j \end{aligned} \quad [5.44]$$

En notación abreviada, las 6 derivadas se pueden expresar de la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 u_i(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x_j \partial x_k} = [u_{i,jk}^0]_{t=n\Delta t} = -m_{jk}^0 \ ^n u_i^0 + \sum_{l=1}^N m_{jk}^l \ ^n u_i^l \quad [5.45]$$

El superíndice n indica el paso de tiempo; los superíndices 0 y l se refieren al nodo central y al resto de los nodos de la estrella, respectivamente, y N es el número de nodos de la estrella. En este estudio los nodos de la estrella se han seleccionado usando el criterio de distancia. Los coeficientes m_{jk}^0 multiplican al valor aproximado de la función U en el nodo central de la estrella ($^n u_i^0$) en el instante de tiempo $t=n\Delta t$. Adicionalmente, m_{jk}^l son los coeficientes que multiplican al valor aproximado de la función U en los restantes nodos de la estrella ($^n u_i^l$) en el instante de tiempo $t=n\Delta t$.

Las derivadas temporales correspondientes se pueden obtener a partir de las siguientes expresiones (esquema de diferencias finitas centradas):

$$\frac{\partial^2 u_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t^2} = \frac{{}^{n+1}u_x^0 - 2 \ ^n u_x^0 + {}^{n-1}u_x^0}{(\Delta t)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t^2} = \frac{{}^{n+1}u_y^0 - 2 \ ^n u_y^0 + {}^{n-1}u_y^0}{(\Delta t)^2} \quad [5.46]$$

Finalmente, sustituyendo las derivadas espaciales y temporales en las ecuaciones de elastodinámica en 2 dimensiones, resultan las siguientes 2 ecuaciones:

$$\begin{aligned} & (\lambda + G) \left(-m_{11}^0 \ ^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j \ ^n u_x^j \right) + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 \ ^n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j \ ^n u_y^j \right) + \\ & + G \left(-m_{11}^0 \ ^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j \ ^n u_x^j - m_{22}^0 \ ^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j \ ^n u_x^j \right) = \rho \frac{{}^{n+1}u_x^0 - 2 \ ^n u_x^0 + {}^{n-1}u_x^0}{(\Delta t)^2} \end{aligned} \quad [5.47]$$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 \, {}^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j \, {}^n u_x^j \right) + (\lambda + G) \left(-m_{22}^0 \, {}^n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j \, {}^n u_y^j \right) + \\
 & + G \left(-m_{11}^0 \, {}^n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j \, {}^n u_y^j - m_{22}^0 \, {}^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j \, {}^n u_x^j \right) = \rho \frac{{}^{n+1} u_y^0 - 2 \, {}^n u_y^0 + {}^{n-1} u_y^0}{(\Delta t)^2}
 \end{aligned}
 \tag{5.48}$$

Operando, resulta:

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1} u_x^0 = & 2 \, {}^n u_x^0 - {}^{n-1} u_x^0 + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-m_{11}^0 \, {}^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j \, {}^n u_x^j \right) + \right. \\
 & \left. + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 \, {}^n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j \, {}^n u_y^j \right) + G \left(-m_{22}^0 \, {}^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j \, {}^n u_x^j \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1} u_y^0 = & 2 \, {}^n u_y^0 - {}^{n-1} u_y^0 + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-m_{22}^0 \, {}^n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j \, {}^n u_y^j \right) + \right. \\
 & \left. + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 \, {}^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j \, {}^n u_x^j \right) + G \left(-m_{11}^0 \, {}^n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j \, {}^n u_y^j \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.50}$$

En notación abreviada, quedaría:

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1} u_i^0 = & 2 \, {}^n u_i^0 - {}^{n-1} u_i^0 + \\
 & + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + G) \left(-m_{ij}^0 \, {}^n u_j^0 + \sum_{l=1}^N m_{ij}^l \, {}^n u_l^j \right) + G \left(-m_{jj}^0 \, {}^n u_i^0 + \sum_{l=1}^N m_{jj}^l \, {}^n u_l^i \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.51}$$

Estas expresiones permiten calcular las componentes u_x y u_y del desplazamiento del nodo central de la estrella en el instante de tiempo $(n+1)\Delta t$, a partir del desplazamiento del nodo central de la estrella en los instantes de tiempo $n\Delta t$ y $(n-1)\Delta t$, y a partir de los desplazamientos de los nodos de la estrella en el tiempo $n\Delta t$.

5.2.2. Formulación en tensión-velocidad

Las 5 ecuaciones que gobiernan la elastodinámica en 2D en función de los parámetros de tensión y velocidad son las obtenidas en el apartado 5.1.1:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} &= G \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

[5.52]

Análogamente al caso de las derivadas parciales espaciales de la función desplazamiento, las derivadas parciales espaciales de las componentes de la tensión se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} &= -m_1^0 \sigma_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j \sigma_x^j \\ \frac{\partial \tau_{xy}(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} &= -m_1^0 \tau_{xy}^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j \tau_{xy}^j \\ \frac{\partial \sigma_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} &= -m_2^0 \sigma_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j \sigma_y^j \\ \frac{\partial \tau_{xy}(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} &= -m_2^0 \tau_{xy}^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j \tau_{xy}^j\end{aligned}$$

[5.53]

Las derivadas espaciales de la variable velocidad también se pueden escribir análogamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} &= -m_1^0 v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j v_x^j \\ \frac{\partial v_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} &= -m_2^0 v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j v_x^j\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} = -m_1^0 v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j v_y^j$$

$$\frac{\partial v_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} = -m_2^0 v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j v_y^j$$

[5.54]

En notación abreviada, los dos grupos de derivadas espaciales se pueden expresar de la forma siguiente:

$$\frac{\partial \tau_{ij}(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x_k} = [\tau_{ij,k}^0]_{t=n\Delta t} = -m_k^0 \tau_{ij}^0 + \sum_{l=1}^N m_k^l \tau_{ij}^l$$

$$\frac{\partial v_i(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x_k} = [v_{i,k}^0]_{t=n\Delta t} = -m_k^0 v_i^0 + \sum_{l=1}^N m_k^l v_i^l$$

[5.55]

El superíndice n indica el paso de tiempo; los superíndices 0 y l se refieren al nodo central y al resto de los nodos de la estrella, respectivamente, y N es el número de nodos de la estrella. En este estudio los nodos de la estrella se han seleccionado usando el criterio de distancia. Los coeficientes m_j^0 multiplican al valor aproximado de la variable considerada (tensión o velocidad) en el nodo central de la estrella (τ_{ij}^0) en el instante de tiempo $t=n\Delta t$. Adicionalmente, m_j^l son los coeficientes que multiplican al valor aproximado de la variable (tensión o velocidad) en los restantes nodos de la estrella (τ_{ij}^l) en el instante de tiempo $t=n\Delta t$.

Las derivadas temporales de las variables velocidad y tensión se pueden expresar mediante las siguientes ecuaciones (esquema clásico de diferencias finitas):

$$\frac{\partial v_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{v_x^{n+1} - v_x^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial v_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{v_y^{n+1} - v_y^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial \sigma_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{\sigma_x^{n+1} - \sigma_x^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial \sigma_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{\sigma_y^{n+1} - \sigma_y^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{\tau_{xy}^{n+1} - \tau_{xy}^n}{\Delta t}$$

[5.56]

Sustituyendo las derivadas espaciales y temporales en las ecuaciones de elastodinámica en 2 dimensiones (sin consideración de las fuerzas por unidad de volumen F_i), resultan las siguientes ecuaciones en diferencias finitas (se muestra la ecuación diferencial y a continuación la ecuación en diferencias finitas):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)$$

$${}^{n+1}v_x^0 = {}^n v_x^0 + \frac{\Delta t}{\rho} \left[-m_1^0 {}^n \sigma_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n \sigma_x^j - m_2^0 {}^n \tau_{xy}^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n \tau_{xy}^j \right]$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right)$$

$${}^{n+1}v_y^0 = {}^n v_y^0 + \frac{\Delta t}{\rho} \left[-m_1^0 {}^n \tau_{xy}^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n \tau_{xy}^j - m_2^0 {}^n \sigma_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n \sigma_y^j \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = (\lambda + 2G) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$${}^{n+1}\sigma_x^0 = {}^n \sigma_x^0 + \Delta t \left[(\lambda + 2G) \left(-m_1^0 {}^n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n v_x^j \right) + \lambda \left(-m_2^0 {}^n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n v_y^j \right) \right]$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$${}^{n+1}\sigma_y^0 = {}^n \sigma_y^0 + \Delta t \left[\lambda \left(-m_1^0 {}^n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n v_x^j \right) + (\lambda + 2G) \left(-m_2^0 {}^n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n v_y^j \right) \right]$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = G \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$${}^{n+1}\tau_{xy}^0 = {}^n \tau_{xy}^0 + \Delta t \cdot G \left[-m_2^0 {}^n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n v_x^j - m_1^0 {}^n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n v_y^j \right]$$

[5.57]

Las 5 ecuaciones en diferencias finitas se pueden escribir de forma abreviada:

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1}v_i^0 &= {}^n v_i^0 + \frac{\Delta t}{\rho} \left[-m_j^0 {}^n \tau_{ij}^0 + \sum_{l=1}^N m_j^l {}^n \tau_{ij}^l \right] \\
 {}^{n+1}\tau_{ij}^0 &= {}^n \tau_{ij}^0 + \Delta t \left[\lambda \delta_{ij} \left(-m_k^0 {}^n v_k^0 + \sum_{l=1}^N m_k^l {}^n v_k^l \right) + G \left(-m_j^0 {}^n v_i^0 + \sum_{l=1}^N m_j^l {}^n v_i^l - m_i^0 {}^n v_j^0 + \sum_{l=1}^N m_i^l {}^n v_j^l \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.58}$$

5.2.3. Formulación de las condiciones de contorno

Los dos tipos de condiciones de contorno mencionados anteriormente que se van a aplicar al esquema en diferencias finitas obtenido son:

- Condiciones de frontera tipo Dirichlet
- Condiciones de superficie libre

La condición de frontera tipo Dirichlet supone imponer un desplazamiento fijo en los nodos frontera:

$$u_x(x, y, 0) = {}^0 u_x^{x,y} = u_{x0}(x, y)$$

$$u_y(x, y, 0) = {}^0 u_y^{x,y} = u_{y0}(x, y)$$

[5.59]

La aplicación de la condición de frontera de este tipo al esquema en diferencias finitas es sencilla: basta con imponer en cada paso temporal a cada nodo frontera el valor del desplazamiento indicado por las expresiones anteriores; $u_{x0}(x, y)$ y $u_{y0}(x, y)$.

En el caso de la condición de superficie libre, ésta se impone igualando la tensión en el punto del contorno al valor de la tensión a aplicar. Si la formulación empleada en el análisis del problema se lleva a cabo en términos de tensión y velocidad, la implementación de este tipo de condiciones de contorno se lleva a cabo imponiendo directamente el valor de la tensión aplicada en el contorno. Si la formulación del problema se lleva a cabo en desplazamientos, es preciso expresar las tensiones en función de los desplazamientos y los parámetros elásticos G y λ :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} (\lambda + 2G) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} & G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} + (\lambda + 2G) \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} g_x(t) \\ g_y(t) \\ g_z(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

[5.60]

En 2 dimensiones, la expresión matricial resultante es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2G) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} & G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_x(t) \\ g_y(t) \end{bmatrix}$$

[5.61]

Siendo:

n_x : componente x de la normal a la superficie de contorno

n_y : componente y de la normal a la superficie de contorno

$g_x(t)$: componente x de la tensión aplicada en el punto de la superficie de contorno

$g_y(t)$: componente y de la tensión aplicada en el punto de la superficie de contorno

Esta condición se puede expresar de forma reducida, empleando las expresiones de las tensiones derivadas de la ley de Hooke, en función de los desplazamientos u_i :

$$(\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G (u_{i,j} + u_{j,i})) n_j = g_i(t)$$

[5.62]

Cuando $g_i(t)$ es igual a cero, no existen fuerzas aplicadas a la superficie.

A continuación se va a desarrollar la imposición de condiciones de borde de este tipo al esquema en diferencias finitas. Las expresiones explícitas de las derivadas espaciales primeras son las siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} &= -m_1^0 n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n u_x^j \\ \frac{\partial u_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} &= -m_2^0 n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n u_x^j \\ \frac{\partial u_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} &= -m_1^0 n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n u_y^j \\ \frac{\partial u_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} &= -m_2^0 n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n u_y^j\end{aligned}$$

[5.63]

Sustituyendo estas expresiones en las dos ecuaciones de la condición de borde, queda:

$$\begin{aligned}\left[(\lambda + 2G) \left(-m_1^0 n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n u_x^j \right) + \lambda \left(-m_2^0 n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n u_y^j \right) \right] \cdot n_x + \\ + \left[G \left(-m_2^0 n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n u_x^j - m_1^0 n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n u_y^j \right) \right] \cdot n_y = g_x(t)\end{aligned}$$

[5.64]

$$\begin{aligned}\left[G \left(-m_2^0 n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n u_x^j - m_1^0 n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n u_y^j \right) \right] \cdot n_x + \\ + \left[\lambda \left(-m_1^0 n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n u_x^j \right) + (\lambda + 2G) \left(-m_2^0 n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n u_y^j \right) \right] \cdot n_y = g_y(t)\end{aligned}$$

[5.65]

Estas dos ecuaciones se pueden expresar de forma reducida:

$$\begin{aligned}\left\{ \lambda \left(-m_k^s n u_k^s + \sum_{l=1}^N m_k^l n u_k^l \right) + G \left[\left(-m_j^s n u_i^s + \sum_{l=1}^N m_j^l n u_i^l \right) + \left(-m_i^s n u_j^s + \sum_{l=1}^N m_j^l n u_j^l \right) \right] \right\} \cdot n_j = \\ = g_i(t)\end{aligned}$$

[5.66]

Correspondiendo el superíndice **s** a los nodos de la superficie libre y el superíndice **l** a los restantes nodos de las estrellas cuyo nodo central pertenece a la superficie libre.

Dejando en el lado derecho de las ecuaciones anteriores los términos correspondientes al nodo central de la estrella, resulta:

$$\begin{aligned} & \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_1^j n_{u_x^j} \right) + \lambda \left(\sum_{j=1}^N m_2^j n_{u_y^j} \right) \right] \cdot n_x + \left[G \left(\sum_{j=1}^N m_2^j n_{u_x^j} + \sum_{j=1}^N m_1^j n_{u_y^j} \right) \right] \cdot n_y = \\ & = g_x(t) + [(\lambda + 2G) m_1^0 n_{u_x^0} + \lambda m_2^0 n_{u_y^0}] \cdot n_x + [G(m_2^0 n_{u_x^0} + m_1^0 n_{u_y^0})] \cdot n_y \end{aligned} \quad [5.67]$$

$$\begin{aligned} & \left[G \left(\sum_{j=1}^N m_2^j n_{u_x^j} + \sum_{j=1}^N m_1^j n_{u_y^j} \right) \right] \cdot n_x + \left[\lambda \left(\sum_{j=1}^N m_1^j n_{u_x^j} \right) + (\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_2^j n_{u_y^j} \right) \right] \cdot n_y = \\ & = g_y(t) + [G(m_2^0 n_{u_x^0} + m_1^0 n_{u_y^0})] \cdot n_x + [\lambda(m_1^0 n_{u_x^0}) + (\lambda + 2G)(m_2^0 n_{u_y^0})] \cdot n_y \end{aligned} \quad [5.68]$$

Agrupando los términos en $n_{u_x^j}$ y $n_{u_y^j}$, queda el siguiente sistema de $2n$ ecuaciones en el que las incógnitas son los desplazamientos $n_{u_x^j}$ y $n_{u_y^j}$ de los n nodos añadidos de la frontera libre:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N [n_x (\lambda + 2G) m_1^j + n_y G m_2^j] n_{u_x^j} + \sum_{j=1}^N [n_x \lambda m_2^j + n_y G m_1^j] n_{u_y^j} = \\ & = g_x(t) + [(\lambda + 2G) m_1^0 n_{u_x^0} + \lambda m_2^0 n_{u_y^0}] \cdot n_x + [G(m_2^0 n_{u_x^0} + m_1^0 n_{u_y^0})] \cdot n_y \end{aligned} \quad [5.69]$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N [n_x G m_2^j + n_y \lambda m_1^j] n_{u_x^j} + \sum_{j=1}^N [n_x G m_1^j + n_y (\lambda + 2G) m_2^j] n_{u_y^j} = \\ & = g_y(t) + [G(m_2^0 n_{u_x^0} + m_1^0 n_{u_y^0})] \cdot n_x + [\lambda(m_1^0 n_{u_x^0}) + (\lambda + 2G)(m_2^0 n_{u_y^0})] \cdot n_y \end{aligned} \quad [5.70]$$

Para resolver este sistema se añade en la superficie libre pero fuera del dominio, un número igual de nodos a los correspondientes a la superficie libre. En una estrella con nodo central i , los nodos añadidos son n_i^{se} . Los restantes nodos son n_i^{si} . Por tanto, los nodos totales de una estrella alrededor del nodo central i son $N = n_i^{se} + n_i^{si}$.

Los valores de la función en los nodos de la superficie libre son desconocidos, pero las condiciones de superficie libre son conocidas (condición que se ha impuesto). U_i^{se} son los desplazamientos de los n nodos añadidos (nodos de Neumann) que pertenecen a una estrella en la que U_i^s es el desplazamiento de su nodo central y U_i^{si} los desplazamientos en los restantes n_{si} nodos de la estrella.

Por tanto, resultan $2n$ ecuaciones (2 ecuaciones por cada nodo de la superficie libre) con $2n$ incógnitas, las cuales son los desplazamientos en los n nodos añadidos. Estas incógnitas aparecen en los sumatorios. Resolviendo este sistema, se obtienen los valores de la función ${}^n u_i^{se}$ en los nodos Neumann añadidos, en el instante $t=n\Delta t$.

5.2.4. Discretización temporal

Debido a que el objeto de esta tesis se centra en la aplicación del Método de las Diferencias Finitas Generalizadas a los problemas de propagación de ondas en el terreno, adicionalmente a la discretización espacial expuesta es necesario realizar una discretización temporal. Esta discretización temporal se llevará a cabo empleando diferencias finitas clásicas.

Realizando el desarrollo en serie de Taylor de la función $U(x,y,t)$ en un entorno $\pm\Delta t$ de t_1 , se tiene:

$$U(t_1 + \Delta t) = U(t_1) + \Delta t \frac{\partial U(t_1)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 U(t_1)}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 U(t_1)}{\partial t^3} + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 U(t_1)}{\partial t^4} + \dots \quad [5.71]$$

$$U(t_1 - \Delta t) = U(t_1) - \Delta t \frac{\partial U(t_1)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 U(t_1)}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 U(t_1)}{\partial t^3} + \frac{(\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 U(t_1)}{\partial t^4} - \dots \quad [5.72]$$

En donde se ha abreviado $U(x, y, t_1) = U(t_1)$. Truncando ambos desarrollos en los términos de 2º orden y sumándolos, se obtiene:

$$u(t_1 + \Delta t) + u(t_1 - \Delta t) = 2 u(t_1) + (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u(t_1)}{\partial t^2} + \frac{2 (\Delta t)^4}{4!} \frac{\partial^4 u(t_1)}{\partial t^4} + \theta[(\Delta t)^6] \quad [5.73]$$

siendo $U(t_1)$ el valor exacto de la función y $u(t_1)$ el valor aproximado en t_1 .

Operando en la expresión anterior para despejar el valor de la derivada segunda, queda:

$$\frac{\partial^2 u(t_1)}{\partial t^2} = \frac{u(t_1 + \Delta t) - 2 u(t_1) + u(t_1 - \Delta t)}{(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta t)^2}{12} \frac{\partial^4 u(t_1)}{\partial t^4} + \theta[(\Delta t)^4] \quad [5.74]$$

Donde el error de truncamiento sería:

$$TE_{t,2^a \text{ deriv}} = -\frac{(\Delta t)^2}{12} \frac{\partial^4 u(t_1)}{\partial t^4} + \theta[(\Delta t)^4] \quad t < t_1 < t + \Delta t \quad [5.75]$$

Si vez de sumar se restan ambos desarrollos en serie se tiene:

$$u(t_1 + \Delta t) - u(t_1 - \Delta t) = 2 \Delta t \frac{\partial u(t_1)}{\partial t} + \frac{2 (\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 u(t_1)}{\partial t^3} + \theta[(\Delta t)^5] \quad [5.76]$$

Operando en la expresión anterior para despejar el valor de la derivada primera, queda:

$$\frac{\partial u(t_1)}{\partial t} = \frac{u(t_1 + \Delta t) - u(t_1 - \Delta t)}{2 \Delta t} - \frac{(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3 u(t_1)}{\partial t^3} + \theta[(\Delta t)^4] \quad [5.77]$$

En este caso el error de truncamiento sería:

$$TE_{t,1^a \text{ deriv}} = -\frac{(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3 u(t_1)}{\partial t^3} + \theta[(\Delta t)^4] \quad t < t_1 < t + \Delta t \quad [5.78]$$

5.3. Convergencia, consistencia y estabilidad del método

Una vez obtenido la ecuación en diferencias finitas explícita en el tiempo, es necesario demostrar la convergencia del método, es decir, que dicha ecuación en diferencias finitas se aproxima a la solución cuando los incrementos disminuyen, y el número de iteraciones tiende a infinito.

De acuerdo con el teorema de equivalencia de Lax, un esquema en diferencias finitas explícito en el tiempo, consistente y bien planteado¹, es convergente si y sólo si es estable. Por tanto, en los apartados siguientes se va a analizar la consistencia y la estabilidad del esquema de diferencias finitas obtenido.

¹ Problema bien planteado: Dado un problema de valor inicial o de Cauchy se dice que el problema está bien planteado si este admite solución única y dependiente de forma continua de sus valores iniciales.

5.3.1. Consistencia

El esquema en diferencias finitas será consistente si se aproxima a la solución cuando los incrementos disminuyen, o lo que es lo mismo: el error tiende a cero cuando Δh e Δt tienden también a cero.

Por tanto se van a evaluar los errores cometidos tanto en el truncamiento espacial como en el temporal.

Para la parte temporal se tiene:

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0, \Delta t)}{\partial t^2} = \frac{u(x_0, y_0, t + \Delta t) - 2u(x_0, y_0, t) + u(x_0, y_0, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} - \frac{(\Delta t)^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_0, y_0, t_1)}{\partial t^4} + \theta[(\Delta t)^4]$$

[5.79]

Siendo $t \leq t_1 \leq t + \Delta t$

El error de truncamiento temporal es, por tanto:

$$TE_t = -\frac{(\Delta t)^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_0, y_0, t_1)}{\partial t^4} + \theta[(\Delta t)^4]$$

[5.80]

En el caso de las derivadas espaciales, se parte de la ecuación diferencial genérica:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = [C] [D_U] = F(x, y)$$

[5.81]

Siendo U una función de x, y, t.

Con objeto de obtener el error de truncamiento cometido al calcular las derivadas espaciales, se va a emplear el desarrollo completo de la serie de Taylor. De esta forma se obtiene el siguiente funcional B(U), realizando la suma de los errores cuadráticos ponderados en cada uno de los nodos de la estrella:

$$B(U) = \sum_{i=1}^N \left[\left(U_0 - U_i + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} \right)^4 + \dots \right) w(h_i, k_i) \right]^2 \quad [5.82]$$

Donde:

$w(h_i, k_i)$ es una función de ponderación dependiente de la distancia de cada nodo al nodo central de la estrella.

Si el funcional anterior se minimiza respecto a las derivadas de hasta orden 2, se obtiene el siguiente sistema lineal:

$$[A] \cdot [D_U] = \left(\sum_{j=1}^N \chi h_j \quad \sum_{j=1}^N \chi k_j \quad \sum_{j=1}^N \chi \frac{h_j^2}{2} \quad \sum_{j=1}^N \chi \frac{k_j^2}{2} \quad \sum_{j=1}^N \chi h_j k_j \right)^T = [\hat{b}] \quad [5.83]$$

Siendo:

$$\chi = \left[-u_0 + u_j - \frac{1}{6} \left(h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^3 - \frac{1}{24} \left(h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^4 - \dots \right] w(h_i, k_i)^2 \quad [5.84]$$

Por otra parte, al aproximar la función U por el desarrollo de Taylor truncado en las derivadas parciales de hasta orden 2, el sistema lineal obtenido es el siguiente:

$$[A] \cdot [D_u] = [b] \quad [5.85]$$

Donde D_u es el vector de las derivadas parciales:

$$D_u = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad [5.86]$$

b es el vector de los términos independientes del sistema, igual a:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) k_i w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{h_i^2}{2} w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{k_i^2}{2} w(h_i, k_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i k_i w(h_i, k_i)^2 \end{pmatrix}$$

[5.87]

El error de truncamiento espacial T_{EX} será igual a la diferencia entre función $F(x,y)$ de la ecuación diferencial calculada a partir del desarrollo completo de Taylor y del desarrollo truncado.

$$[C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = [C] [D_U] = F(x, y)$$

[5.88]

$$TE_x = [C] ([D_U] - [D_u]) = [C] [A]^{-1} ([\hat{b}] - [b]) = [C] [A]^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N \chi h_j \\ \sum_{j=1}^N \chi k_j \\ \sum_{j=1}^N \chi \frac{h_j^2}{2} \\ \sum_{j=1}^N \chi \frac{k_j^2}{2} \\ \sum_{j=1}^N \chi h_j k_j \end{pmatrix} \quad [5.89]$$

Se aprecia que el error de truncamiento derivado de la aproximación espacial es proporcional a los valores de los incrementos h_j y k_j , h_j^2 , k_j^2 , y al producto $h_j k_j$.

El error de truncamiento total TTE será la suma de los errores respectivos de la discretización temporal TE_t y espacial TE_x . Finalmente, hay que comprobar el límite del error de truncamiento cuando los incrementos de tiempo y espaciales tienden a cero:

$$\begin{aligned} \lim_{h,k,\Delta t \rightarrow (0,0,0)} TTE &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} TE_t + \lim_{h,k \rightarrow (0,0)} TE_x = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{(\Delta t)^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_0, y_0, t_1)}{\partial t^4} + \theta[(\Delta t)^4] \right) + \lim_{h,k \rightarrow (0,0)} [C] [A]^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N \chi h_j \\ \sum_{j=1}^N \chi k_j \\ \sum_{j=1}^N \chi \frac{h_j^2}{2} \\ \sum_{j=1}^N \chi \frac{k_j^2}{2} \\ \sum_{j=1}^N \chi h_j k_j \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad [5.90]$$

Por tanto, se cumple la consistencia del esquema en diferencias finitas.

5.3.2. Estabilidad

El siguiente paso para asegurar la convergencia es demostrar la estabilidad, estableciendo un criterio en términos de paso temporal para asegurar dicha estabilidad.

Existen diversos criterios para determinar la estabilidad de una ecuación diferencial en derivadas parciales. Entre ellos, el criterio de Von Neumann es el más fácil de aplicar para determinar si un método de integración es estable. Consiste en realizar una descomposición armónica de la solución aproximada.

Los desplazamientos u_x y u_y del nodo central de la estrella (x_0, y_0) en el tiempo n se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} {}^n u_x^0 &= A \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_0} = A \xi^n e^{i (K_x x_0 + K_y y_0)} \\ {}^n u_y^0 &= B \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_0} = B \xi^n e^{i (K_x x_0 + K_y y_0)} \end{aligned} \quad [5.91]$$

Los desplazamientos u_x y u_y del nodo j de la estrella (x_j, y_j) en el tiempo n se descomponen análogamente:

$$\begin{aligned} {}^n u_x^j &= A \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_j} = A \xi^n e^{i (K_x x_j + K_y y_j)} \\ {}^n u_y^j &= B \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_j} = B \xi^n e^{i (K_x x_j + K_y y_j)} \end{aligned} \quad [5.92]$$

Siendo:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} \quad \bar{x}_j = \bar{x}_0 + \bar{h}_j = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_j \\ k_j \end{pmatrix}$$

$$\xi = e^{-i \omega \Delta t} = \cos(\omega \Delta t) - i \sin(\omega \Delta t)$$

Las expresiones anteriores de los desplazamientos se introducen en el esquema de diferencias finitas obtenido en el apartado 4.4.2:

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1}u_x^0 = & 2 {}^n u_x^0 - {}^{n-1}u_x^0 + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-m_{11}^0 {}^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j {}^n u_x^j \right) + \right. \\
 & \left. + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 {}^n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j {}^n u_y^j \right) + G \left(-m_{22}^0 {}^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j {}^n u_x^j \right) \right]
 \end{aligned}$$

[5.93]

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1}u_y^0 = & 2 {}^n u_y^0 - {}^{n-1}u_y^0 + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-m_{22}^0 {}^n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j {}^n u_y^j \right) + \right. \\
 & \left. + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 {}^n u_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j {}^n u_x^j \right) + G \left(-m_{11}^0 {}^n u_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j {}^n u_y^j \right) \right]
 \end{aligned}$$

[5.94]

Después de sustituir las expresiones de los desplazamientos, resulta:

$$\begin{aligned}
 A \xi^{n+1} e^{i [K]^T \bar{x}_0} = & 2 A \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_0} - A \xi^{n-1} e^{i [K]^T \bar{x}_0} + \\
 & + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-m_{11}^0 A \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_0} + \sum_{j=1}^N m_{11}^j A \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_j} \right) + \right. \\
 & + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 B \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_0} + \sum_{j=1}^N m_{12}^j B \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_j} \right) + \\
 & \left. + G \left(-m_{22}^0 A \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_0} + \sum_{j=1}^N m_{22}^j A \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_j} \right) \right]
 \end{aligned}$$

[5.95]

$$\begin{aligned}
 B \xi^{n+1} e^{i [K]^T \bar{x}_0} = & 2 B \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_0} - B \xi^{n-1} e^{i [K]^T \bar{x}_0} + \\
 & + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-m_{22}^0 B \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_0} + \sum_{j=1}^N m_{22}^j B \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_j} \right) + \right. \\
 & + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 A \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_0} + \sum_{j=1}^N m_{12}^j A \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_j} \right) + \\
 & \left. + G \left(-m_{11}^0 B \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_0} + \sum_{j=1}^N m_{11}^j B \xi^n e^{i [K]^T \bar{x}_j} \right) \right]
 \end{aligned}$$

[5.96]

Dividiendo ambas ecuaciones por $\xi^n e^{i[K]^T \bar{x}_0}$, queda:

$$A \xi = 2 A - \frac{A}{\xi} + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-m_{11}^0 A + \sum_{j=1}^N m_{11}^j A e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 B + \sum_{j=1}^N m_{12}^j B e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) + G \left(-m_{22}^0 A + \sum_{j=1}^N m_{22}^j A e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) \right] \quad [5.97]$$

$$B \xi = 2 B - \frac{B}{\xi} + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-m_{22}^0 B + \sum_{j=1}^N m_{22}^j B e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 A + \sum_{j=1}^N m_{12}^j A e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) + G \left(-m_{11}^0 B + \sum_{j=1}^N m_{11}^j B e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) \right] \quad [5.98]$$

Como:

$$m_{11}^0 = \sum_{j=1}^N m_{11}^j \quad m_{12}^0 = \sum_{j=1}^N m_{12}^j \quad m_{22}^0 = \sum_{j=1}^N m_{22}^j$$

Queda:

$$A \xi = 2 A - \frac{A}{\xi} + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-\sum_{j=1}^N m_{11}^j A + \sum_{j=1}^N m_{11}^j A e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) + (\lambda + G) \left(-\sum_{j=1}^N m_{12}^j B + \sum_{j=1}^N m_{12}^j B e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) + G \left(-\sum_{j=1}^N m_{22}^j A + \sum_{j=1}^N m_{22}^j A e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) \right] \quad [5.99]$$

$$B \xi = 2 B - \frac{B}{\xi} + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-\sum_{j=1}^N m_{22}^j B + \sum_{j=1}^N m_{22}^j B e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) + (\lambda + G) \left(-\sum_{j=1}^N m_{12}^j A + \sum_{j=1}^N m_{12}^j A e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) + G \left(-\sum_{j=1}^N m_{11}^j B + \sum_{j=1}^N m_{11}^j B e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) \right] \quad [5.100]$$

Despejando la relación A/B en ambas ecuaciones e igualando las dos expresiones, resulta:

$$\left\{ \xi - 2 + \frac{1}{\xi} - \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-\sum_{j=1}^N m_{11}^j + \sum_{j=1}^N m_{11}^j e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) + G \left(-\sum_{j=1}^N m_{22}^j + \sum_{j=1}^N m_{22}^j e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) \right] \right\} \cdot$$

$$\left\{ \xi - 2 + \frac{1}{\xi} - \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(-\sum_{j=1}^N m_{22}^j + \sum_{j=1}^N m_{22}^j e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) + G \left(-\sum_{j=1}^N m_{11}^j + \sum_{j=1}^N m_{11}^j e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{(\Delta t)^4}{\rho^2} (\lambda + G)^2 \left(-\sum_{j=1}^N m_{12}^j + \sum_{j=1}^N m_{12}^j e^{i[K]^T \bar{h}_j} \right)^2$$

[5.101]

Sabiendo que:

$$\xi + \frac{1}{\xi} = e^{-i \omega \Delta t} + e^{i \omega \Delta t} = \cos(\omega \Delta t) - i \sin(\omega \Delta t) + \cos(\omega \Delta t) + i \sin(\omega \Delta t) = 2 \cos(\omega \Delta t)$$

Queda:

$$\left\{ 2(1 - \cos(\omega \Delta t)) - \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) \right] \right\} \cdot$$

$$\left\{ 2(1 - \cos(\omega \Delta t)) - \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{(\Delta t)^4}{\rho^2} (\lambda + G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right)^2$$

[5.102]

Efectuando la multiplicación del primer miembro de la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned}
 & 4(1 - \cos(\omega\Delta t))^2 - 2(1 - \cos(\omega\Delta t)) \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) + \right. \\
 & \left. + G \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) + (\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) \right] + \\
 & + \frac{(\Delta t)^4}{\rho^2} \left[(\lambda + 2G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) + \right. \\
 & \left. + (\lambda + 2G) G \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right)^2 + (\lambda + 2G) G \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right)^2 + \right. \\
 & \left. + G^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right) \right] = \frac{(\Delta t)^4}{\rho^2} (\lambda + G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j}) \right)^2
 \end{aligned} \tag{5.103}$$

Se puede expresar la siguiente relación:

$$1 - e^{i[K]^T \bar{h}_j} = 1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)$$

Dividiendo la ecuación [5.103] por 4 y sustituyendo la expresión anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \cos(\omega\Delta t))^2 - 2(1 - \cos(\omega\Delta t)) \frac{(\Delta t)^2}{4\rho} \left[(\lambda + 3G) \sum_{j=1}^N (m_{11}^j + m_{22}^j) (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)) \right] + \\
 & + \frac{(\Delta t)^4}{4\rho^2} \left[(\lambda + 2G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)) \right) + \right. \\
 & \left. + (\lambda + 2G) G \sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)) \cdot \sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)) + \right. \\
 & \left. + (\lambda + 2G) G \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)) \right) + \right. \\
 & \left. + G^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)) \right) + \right. \\
 & \left. - (\lambda + G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j) - i \sin([K]^T \bar{h}_j)) \right)^2 \right] = 0
 \end{aligned} \tag{5.104}$$

[5.104]

La ecuación anterior se puede descomponer en una parte real y una imaginaria.

Parte Real

$$\begin{aligned}
 & (1 - \cos(\omega\Delta t))^2 - 2(1 - \cos(\omega\Delta t)) \frac{(\Delta t)^2}{4\rho} \left[(\lambda + 3G) \sum_{j=1}^N (m_{11}^j + m_{22}^j) (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right] + \\
 & + \frac{(\Delta t)^4}{4\rho^2} \left[(\lambda + 2G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + \right. \\
 & + (\lambda + 2G) G \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + \\
 & + (\lambda + 2G) G \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + \\
 & + G^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + \\
 & - (\lambda + 2G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) + \\
 & - (\lambda + 2G) G \sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \cdot \sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) + \\
 & - (\lambda + 2G) G \sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \cdot \sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) + \\
 & - G^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) + \\
 & - (\lambda + G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + \\
 & + (\lambda + G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \left. \right] = 0
 \end{aligned}$$

[5.105]

La ecuación anterior se puede agrupar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \cos(\omega\Delta t))^2 - 2(1 - \cos(\omega\Delta t)) \frac{(\Delta t)^2}{4\rho} \left[(\lambda + 3G) \sum_{j=1}^N (m_{11}^j + m_{22}^j) (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right] + \\
 & + \frac{(\Delta t)^4}{4\rho^2} \left\{ \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \right] \cdot \right. \\
 & \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \right] + \\
 & - \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \right] \cdot \\
 & \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \right] + \\
 & \left. - (\lambda + G)^2 \left[\left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right)^2 \right] \right\} = 0
 \end{aligned}$$

[5.106]

Denominando:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) & a_2 &= \sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \\
 a_3 &= \sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) & a_4 &= \sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \\
 a_5 &= \sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) & a_6 &= \sum_{j=1}^N m_{12}^j \sin([K]^T \bar{h}_j)
 \end{aligned}$$

[5.107]

La ecuación queda así:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \cos(\omega\Delta t))^2 - 2(1 - \cos(\omega\Delta t)) \frac{(\Delta t)^2}{4\rho} [(\lambda + 3G)(a_1 + a_3)] + \\
 & + \frac{(\Delta t)^4}{4\rho^2} \{ [(\lambda + 2G) a_1 + G a_3] \cdot [(\lambda + 2G) a_3 + G a_1] + \\
 & - [(\lambda + 2G) a_2 + G a_4] \cdot [(\lambda + 2G) a_4 + G a_2] - (\lambda + G)^2 (a_5^2 - a_6^2) \} = 0
 \end{aligned}$$

[5.108]

Esta ecuación es una ecuación de 2º grado cuya incógnita es: $1 - \cos(\omega\Delta t)$

Resolviendo dicha ecuación, se obtiene:

$$1 - \cos(\omega\Delta t) = \frac{(\Delta t)^2}{4\rho} [(\lambda + 3G)(a_1 + a_3) + \sqrt{[(\lambda + 3G)(a_1 + a_3)]^2 - 4\{[(\lambda + 2G)a_1 + G a_3] \cdot [(\lambda + 2G)a_3 + G a_1] - [(\lambda + 2G)a_2 + G a_4] \cdot [(\lambda + 2G)a_4 + G a_2] - (\lambda + G)^2(a_5^2 - a_6^2)\}}]$$

[5.109]

Llamando:

$$A = (\lambda + 3G)(a_1 + a_3)$$

$$B = [(\lambda + 2G)a_1 + G a_3] \cdot [(\lambda + 2G)a_3 + G a_1] - [(\lambda + 2G)a_2 + G a_4] \cdot [(\lambda + 2G)a_4 + G a_2] - (\lambda + G)^2(a_5^2 - a_6^2)$$

Se puede escribir:

$$1 - \cos(\omega\Delta t) = \frac{(\Delta t)^2}{4\rho} [A + \sqrt{A^2 - 4B}]$$

[5.110]

Como: $0 \leq 1 - \cos(\omega\Delta t) \leq 2$, resulta:

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{8\rho}{A + \sqrt{A^2 - 4B}}}$$

[5.111]

En primer lugar ha de tenerse en cuenta:

$$0 \leq a_1 = \sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \leq 2 m_{11}^0$$

$$-m_{11}^0 \leq a_2 = \sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \leq m_{11}^0$$

$$0 \leq a_3 = \sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \leq 2 m_{22}^0$$

$$-m_{22}^0 \leq a_4 = \sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \leq m_{22}^0$$

$$0 \leq a_5 = \sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \leq 2 m_{12}^0$$

$$-m_{12}^0 \leq a_6 = \sum_{j=1}^N m_{12}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \leq m_{12}^0$$

[5.112]

Para acotar el valor de Δt , el objetivo es hacer mínima la expresión de la derecha de la inecuación. Para que esto suceda, el valor de A debe ser máximo y el de B mínimo.

El término que debe ser máximo es:

$$A = (\lambda + 3G)(a_1 + a_3) \quad [5.113]$$

Teniendo en cuenta las 6 expresiones anteriores, el valor de A se puede acotar de la siguiente manera:

$$A = (\lambda + 3G)(a_1 + a_3) \leq 2(\lambda + 3G)(|m_{11}^0| + |m_{22}^0|) \quad [5.114]$$

El término que debe ser mínimo es:

$$B = [(\lambda + 2G)a_1 + Ga_3] \cdot [(\lambda + 2G)a_3 + Ga_1] - [(\lambda + 2G)a_2 + Ga_4] \cdot [(\lambda + 2G)a_4 + Ga_2] - (\lambda + G)^2(a_5^2 - a_6^2) \quad [5.115]$$

Para que B sea mínimo, a_1 y a_3 deben ser mínimos. Por tanto:

$$\min a_1 \Rightarrow (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) = 0 \rightarrow \sin([K]^T \bar{h}_j) = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \quad [5.116]$$

$$\min a_3 \Rightarrow (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) = 0 \rightarrow \sin([K]^T \bar{h}_j) = 0 \Rightarrow a_4 = 0 \quad [5.117]$$

También a_5 ha de ser máximo:

$$\max a_5 \Rightarrow (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) = 2 \rightarrow \sin([K]^T \bar{h}_j) = 0 \Rightarrow a_6 = 0 \quad [5.118]$$

Sustituyendo los valores anteriores, queda:

$$[(\lambda + 2G)a_1 + Ga_3] \cdot [(\lambda + 2G)a_3 + Ga_1] - [(\lambda + 2G)a_2 + Ga_4] \cdot [(\lambda + 2G)a_4 + Ga_2] - (\lambda + G)^2(a_5^2 - a_6^2) \geq -(\lambda + G)^2 a_5^2 = -4 m_{12}^0{}^2 (\lambda + G)^2 \geq -4 m_{12}^0{}^2 (\lambda + 3G)^2 \quad [5.119]$$

Por tanto:

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{8\rho}{A + \sqrt{A^2 - 4B}}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{8\rho}{2(\lambda + 3G)(|m_{11}^0| + |m_{22}^0|) + \sqrt{[2(\lambda + 3G)(|m_{11}^0| + |m_{22}^0|)]^2 + 16m_{12}^0{}^2(\lambda + 3G)^2}}}$$

[5.120]

Finalmente se llega al siguiente criterio de estabilidad:

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{4\rho}{(\lambda + 3G)(|m_{11}^0| + |m_{22}^0|) + \sqrt{[(\lambda + 3G)(|m_{11}^0| + |m_{22}^0|)]^2 + 4m_{12}^0{}^2(\lambda + 3G)^2}}}$$

[5.121]

Simplificando, queda:

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{4\rho}{(\lambda + 3G) \left[(|m_{11}^0| + |m_{22}^0|) + \sqrt{(|m_{11}^0| + |m_{22}^0|)^2 + 4m_{12}^0{}^2} \right]}}$$

[5.122]

Parte Imaginaria

En este caso se considera la parte imaginaria de la ecuación:

$$\begin{aligned}
 & 2(1 - \cos(\omega\Delta t)) \frac{(\Delta t)^2}{4\rho} \left[(\lambda + 3G) \sum_{j=1}^N (m_{11}^j + m_{22}^j) \sin([K]^T \bar{h}_j) \right] + \\
 & - \frac{(\Delta t)^4}{4\rho^2} \left[(\lambda + 2G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \right] + \\
 & + (\lambda + 2G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) + \\
 & + 2(\lambda + 2G)G \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) + \\
 & + 2(\lambda + 2G)G \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) + \\
 & + G^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + \\
 & + G^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + \\
 & - 2(\lambda + G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \Big] = 0
 \end{aligned}$$

[5.123]

Simplificando, queda:

$$\begin{aligned}
 & 2(1 - \cos(\omega\Delta t)) \left[(\lambda + 3G) \sum_{j=1}^N (m_{11}^j + m_{22}^j) \sin([K]^T \bar{h}_j) \right] + \\
 & - \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left\{ \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \right] \cdot \right. \\
 & \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \right] + \\
 & + \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \right] \cdot \\
 & \left. \left[(\lambda + 2G) \left(\sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) + G \left(\sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \right] + \right. \\
 & \left. - 2(\lambda + G)^2 \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) \right) \left(\sum_{j=1}^N m_{12}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \right) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

[5.124]

Llamando de nuevo:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sum_{j=1}^N m_{11}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) & a_2 &= \sum_{j=1}^N m_{11}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \\
 a_3 &= \sum_{j=1}^N m_{22}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) & a_4 &= \sum_{j=1}^N m_{22}^j \sin([K]^T \bar{h}_j) \\
 a_5 &= \sum_{j=1}^N m_{12}^j (1 - \cos([K]^T \bar{h}_j)) & a_6 &= \sum_{j=1}^N m_{12}^j \sin([K]^T \bar{h}_j)
 \end{aligned}$$

[5.125]

Queda entonces:

$$\begin{aligned}
 2(1 - \cos(\omega\Delta t)) &= \frac{(\Delta t)^2}{\rho(\lambda + 3G)(a_2 + a_4)} \{ [(\lambda + 2G) a_1 + G a_3] \cdot [(\lambda + 2G) a_4 + G a_2] + \\
 & + [(\lambda + 2G) a_2 + G a_4] \cdot [(\lambda + 2G) a_3 + G a_1] - 2(\lambda + G)^2 a_5 a_6 \}
 \end{aligned}$$

[5.126]

Como: $0 \leq 2(1 - \cos(\omega\Delta t)) \leq 4$, resulta:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{(\Delta t)^2}{\rho(\lambda + 3G)(a_2 + a_4)} \{ [(\lambda + 2G) a_1 + G a_3] \cdot [(\lambda + 2G) a_4 + G a_2] + \\
 & + [(\lambda + 2G) a_2 + G a_4] \cdot [(\lambda + 2G) a_3 + G a_1] - 2(\lambda + G)^2 a_5 a_6 \} \leq 4
 \end{aligned}$$

[5.127]

Despejando Δt , queda:

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{4\rho(\lambda + 3G)(a_2 + a_4)}{[(\lambda + 2G)a_1 + G a_3] \cdot [(\lambda + 2G)a_4 + G a_2] + [(\lambda + 2G)a_2 + G a_4] \cdot [(\lambda + 2G)a_3 + G a_1] - 2(\lambda + G)^2 a_5 a_6}}$$

[5.128]

Con el fin de hacer mínimo el valor de la derecha de la inecuación, ha de ser:

$$\min |4\rho(\lambda + 3G)(a_2 + a_4)| = 0$$

[5.129]

Con lo cual, la parte imaginaria no aporta un nuevo criterio de estabilidad, quedando por tanto la condición obtenida con la parte real:

$$0 \leq \Delta t \leq \sqrt{\frac{4\rho}{(\lambda + 3G) \left[(|m_{11}^0| + |m_{22}^0|) + \sqrt{(|m_{11}^0| + |m_{22}^0|)^2 + 4m_{12}^0{}^2} \right]}}$$

[5.130]

5.4. Comparación de las distintas formulaciones

5.4.1. Formulación en desplazamientos y velocidad-tensión para discretizaciones regulares

En primer lugar se van a comparar los resultados de la formulación en desplazamientos y en velocidad-tensión, empleando esquemas de GFDM de aproximación de 2º y 4º orden, para dos casos académicos.

Complementariamente, se analizará la influencia del coeficiente de Poisson y el número de nodos elegido para la estrella en la formulación de 2º orden.

El modelo elegido para efectuar el análisis es un cuadrado de 441 nodos, siendo el espaciado nodal $h=k=0.05$. El criterio elegido para la elección de los nodos de la estrella es el de la distancia, siendo la función de peso elegida la siguiente:

$$w(h_i, k_i) = \frac{1}{(\sqrt{h_i^2 + k_i^2})^3}$$

Adicionalmente, se ha elegido un cuadrado de 1681 nodos ($h=k=0.025$) para estudiar la influencia de la distancia entre nodos respecto al paso temporal.

Formulación en desplazamientos

Con el fin de evaluar el grado de aproximación que se obtiene con el esquema de diferencias finitas generalizadas expuesto, se a un modelo simple constituido por un cuadrado de lado unidad.

Se han empleado dos modelos con 441 (espaciado nodal: 0.05 m. - ver figura 5-1) y 1681 nodos (espaciado nodal: 0.025 m.- ver figura 5-2), aplicando una condición de contorno tipo Dirichlet en los bordes del dominio.

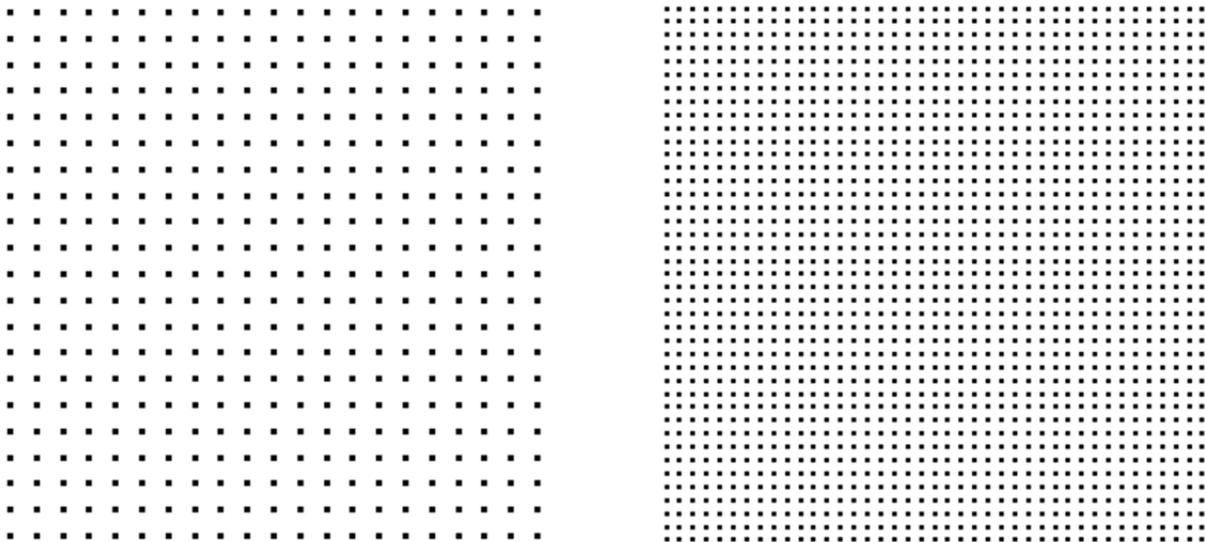


Figura 5-1. Distribuciones nodales con 441 y 1681 nodos

Se ha considerado un módulo $\lambda = E_{edométrico} \cdot \frac{\nu}{1-\nu} = 0.5$, un módulo de rigidez transversal $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0.25$, y una densidad $\rho = 1$.

La solución exacta de este problema es la siguiente:

$$\begin{cases} U_x(x,y,t) = \cos\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}} t\right) \sin x \sin y \\ U_y(x,y,t) = \cos\left(\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}} t\right) \cos x \cos y \end{cases}$$

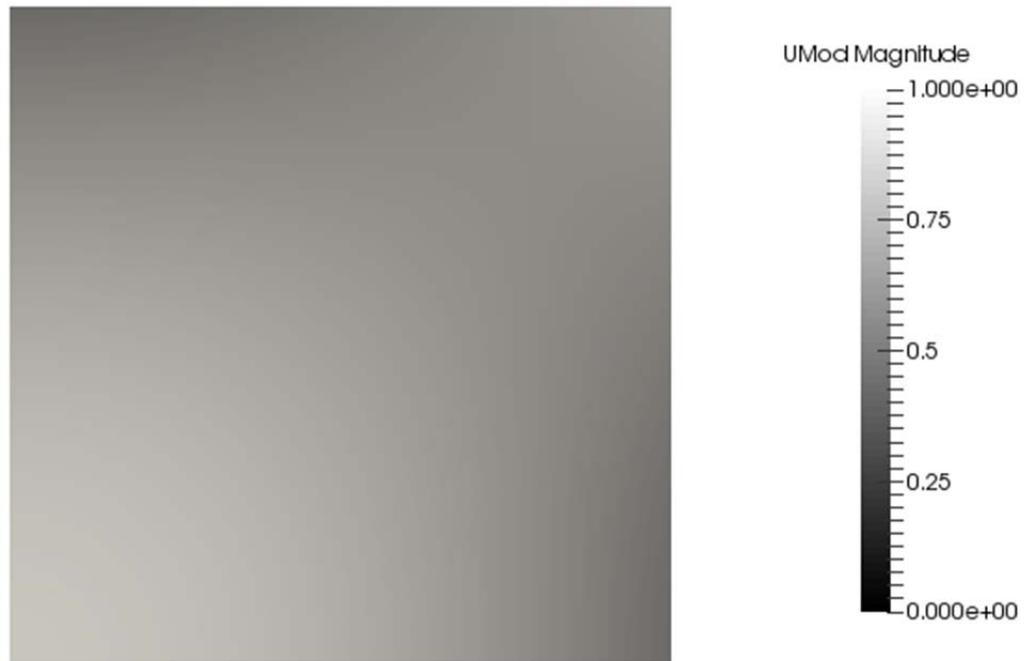


Figura 5-2. Representación del módulo de la deformación en el instante inicial

En las figuras siguientes se muestra la comparación entre la solución exacta de la deformación (u_x , u_y) y los valores obtenidos empleando el esquema de Diferencias Finitas Generalizadas para el nodo de coordenadas (0.5, 0.5), considerando 500 pasos de tiempo, equivalente a 0.5 seg. Se ha calculado la solución con esquemas de diferencias finitas con aproximación de segundo y cuarto orden para las derivadas espaciales de segundo orden, empleando dos modelos con 441 (espaciado nodal: 0.05m) y 1681 nodos (espaciado nodal: 0.025m).

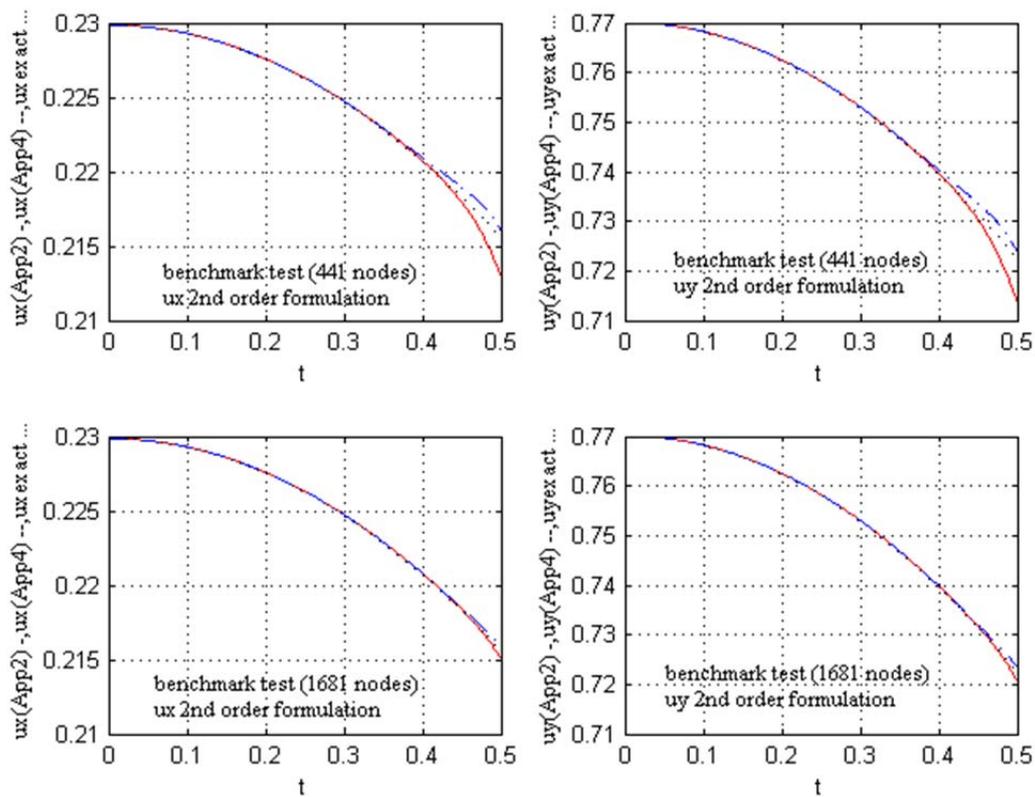


Figura 5-3. Comparativa entre los desplazamientos de la solución exacta y los obtenidos empleando una formulación de segundo orden con fórmulas explícitas de diferencias finitas para las derivadas espaciales con aproximación de 2º y 4º orden

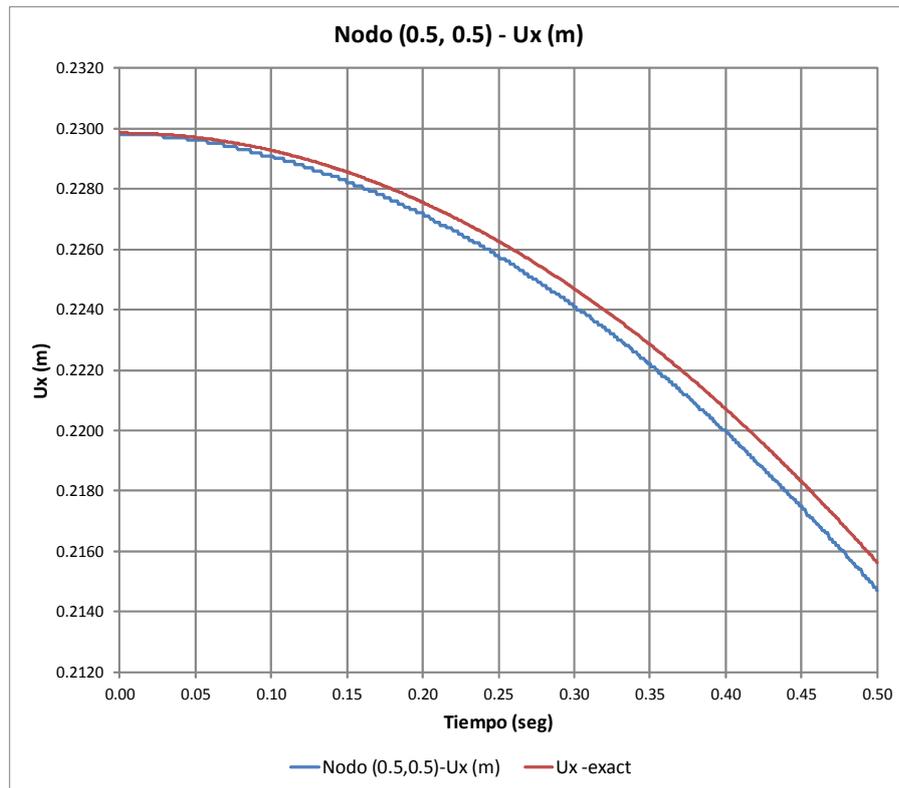


Figura 5-4. Comparativa entre la solución exacta de U_x y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 2º orden

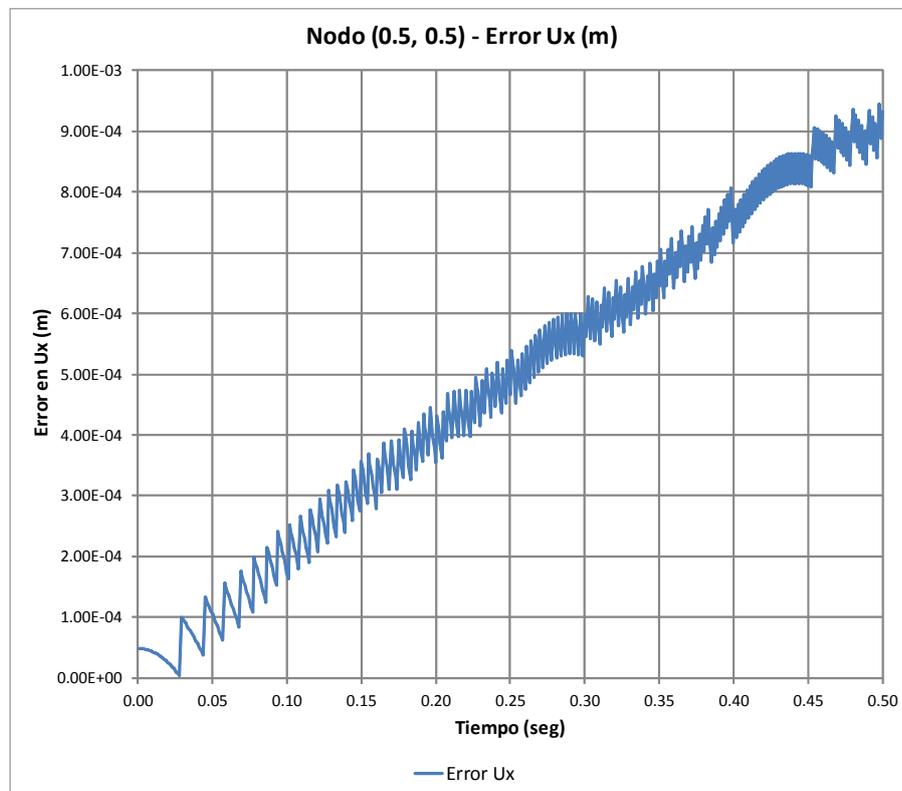


Figura 5-5. Error en U_x entre la solución exacta y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 2º orden

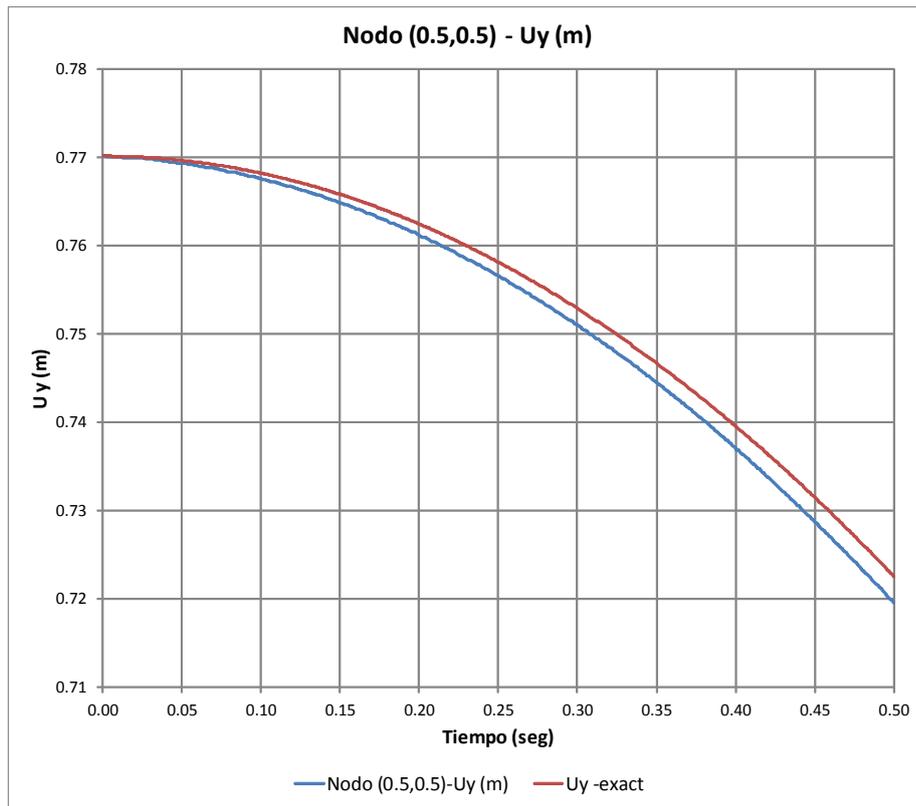


Figura 5-6. Comparativa entre la solución exacta de Uy y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 2º orden

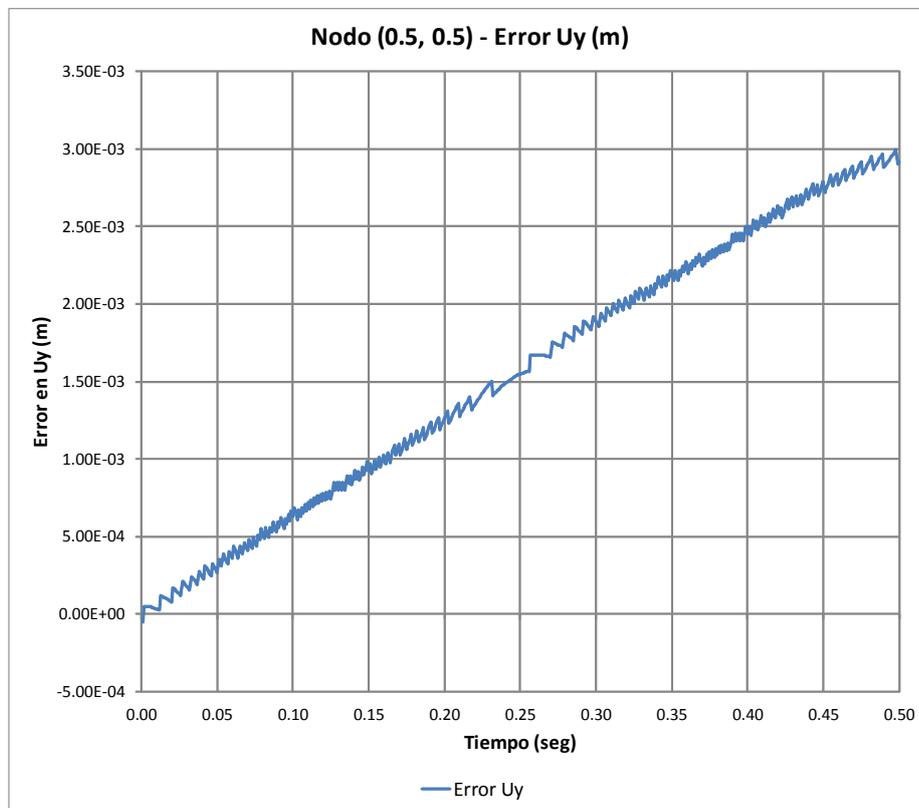


Figura 5-7. Error en Uy entre la solución exacta y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 2º orden

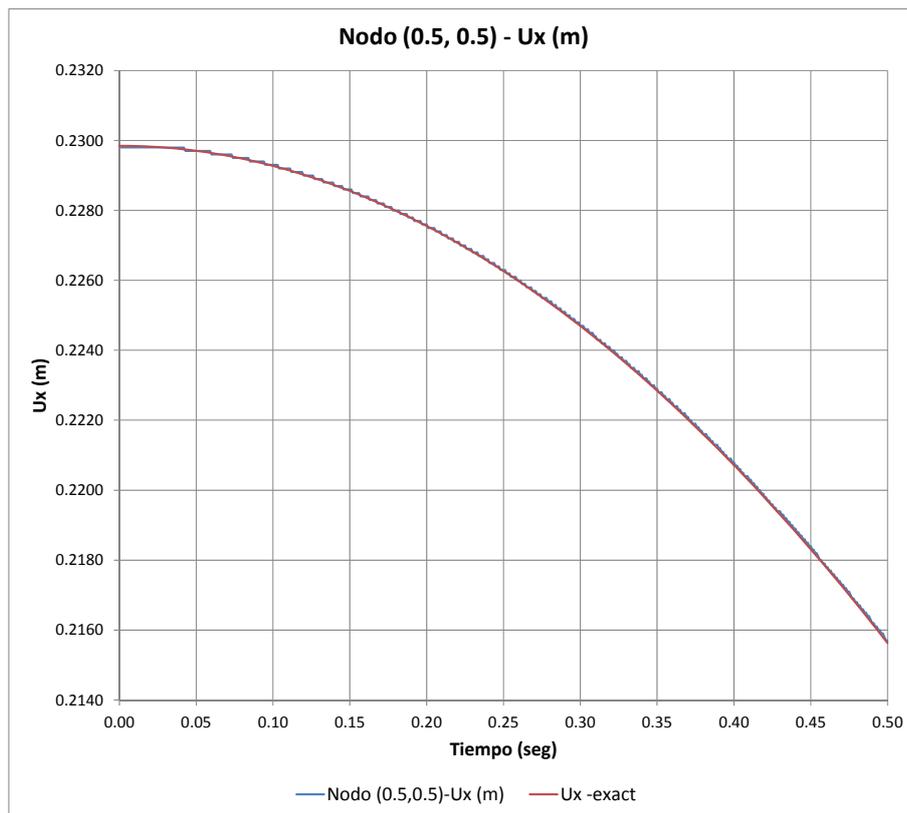


Figura 5-8. Comparativa entre la solución exacta de U_x y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 4º orden

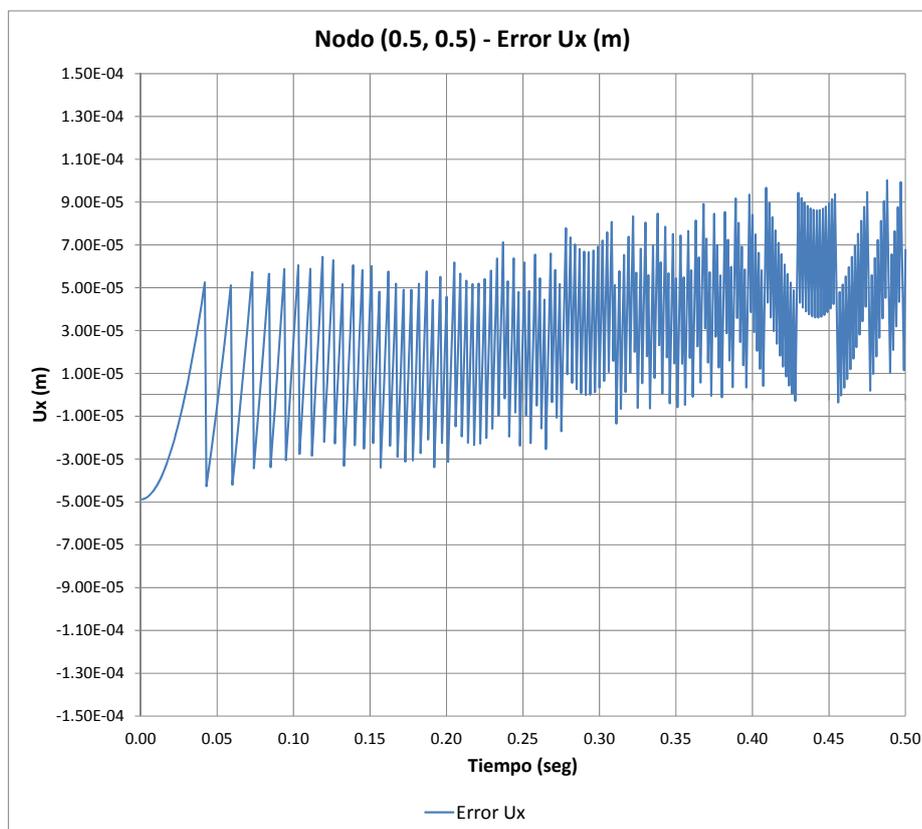


Figura 5-9. Error en U_x entre la solución exacta y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 4º orden

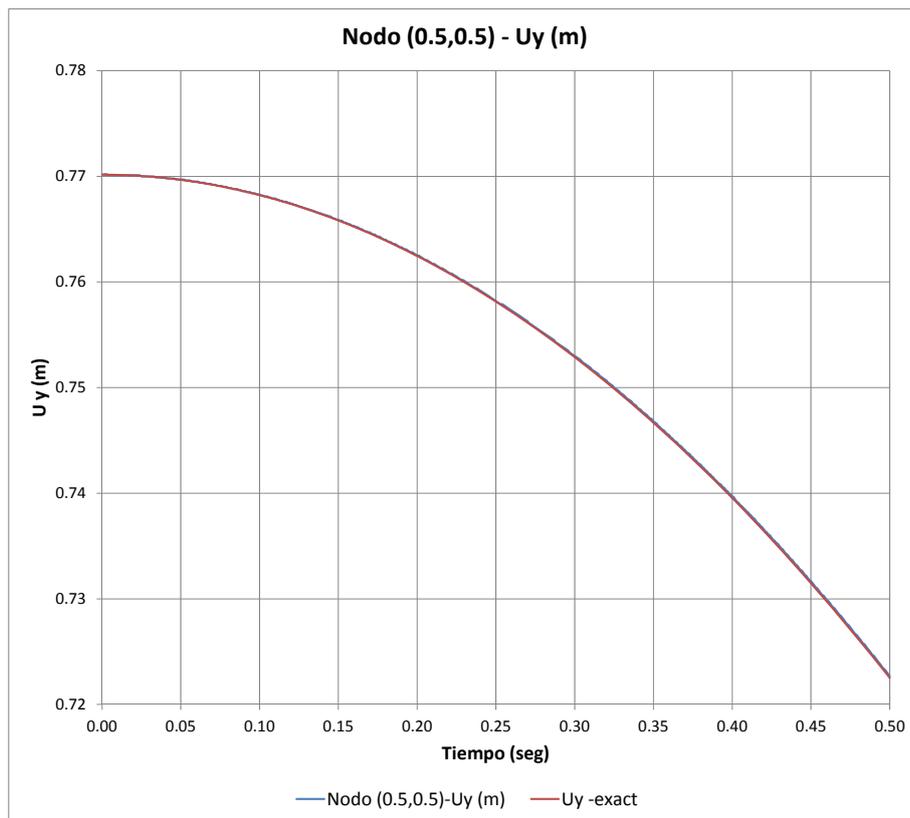


Figura 5-10. Comparativa entre la solución exacta de U_y y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 4^o orden

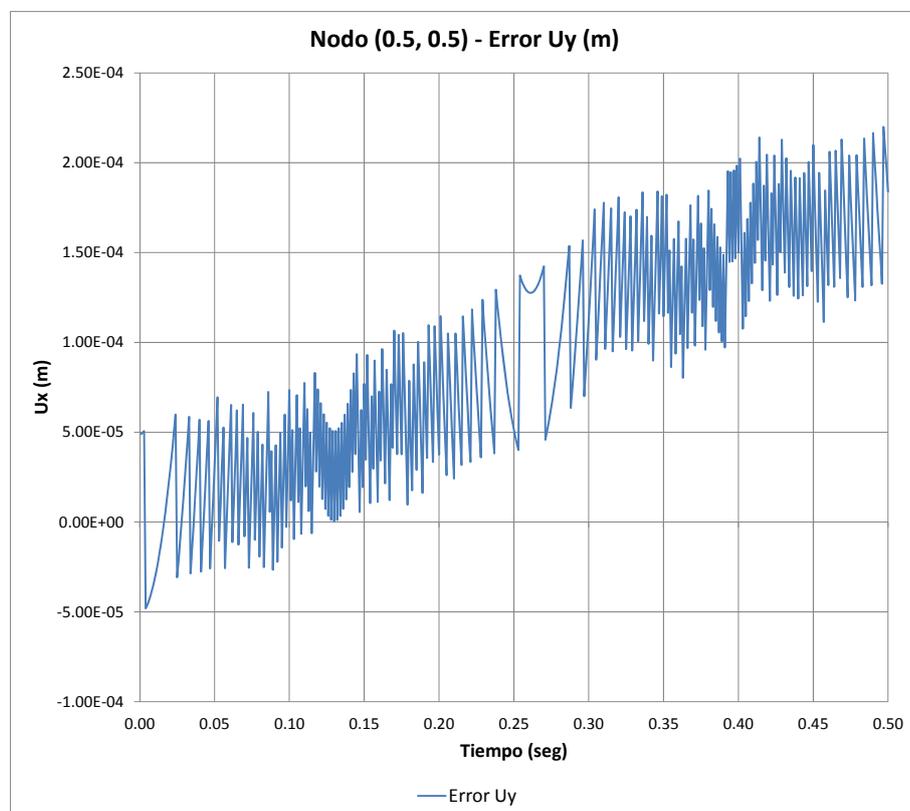


Figura 5-11. Error en U_y entre la solución exacta y la obtenida con un esquema de D.F.G para las derivadas espaciales con aproximación de 2^o orden

Como se puede ver, el grado de aproximación es significativo, estimando el máximo error cometido entre 1×10^{-3} y 3×10^{-3} para aproximación de 2º orden, y entre 7×10^{-5} y 2×10^{-4} para aproximación de 4º orden.

Adicionalmente, se ha analizado otro caso académico, con el fin de evaluar otros parámetros.

La solución teórica de este segundo caso se muestra a continuación:

$$\begin{cases} U_x(x, y, t) = \cos x \sin y \cos\left(\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}}t\right) \\ U_y(x, y, t) = \sin x \cos y \cos\left(\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}}t\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_x(x, y, t) = \cos \pi x \sin \pi y \cos\left(\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}}\pi t\right) \\ U_y(x, y, t) = \sin \pi x \cos \pi y \cos\left(\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}}\pi t\right) \end{cases}$$

La figura 5.12 muestra las soluciones teóricas y las obtenidas mediante el empleo de la formulación en desplazamientos con aproximaciones de 2º orden, para valores del coeficiente de Poisson igual a: 0.45, 0.47, y 0.49. Como se puede apreciar, en todos los casos se han obtenido resultados satisfactorios.

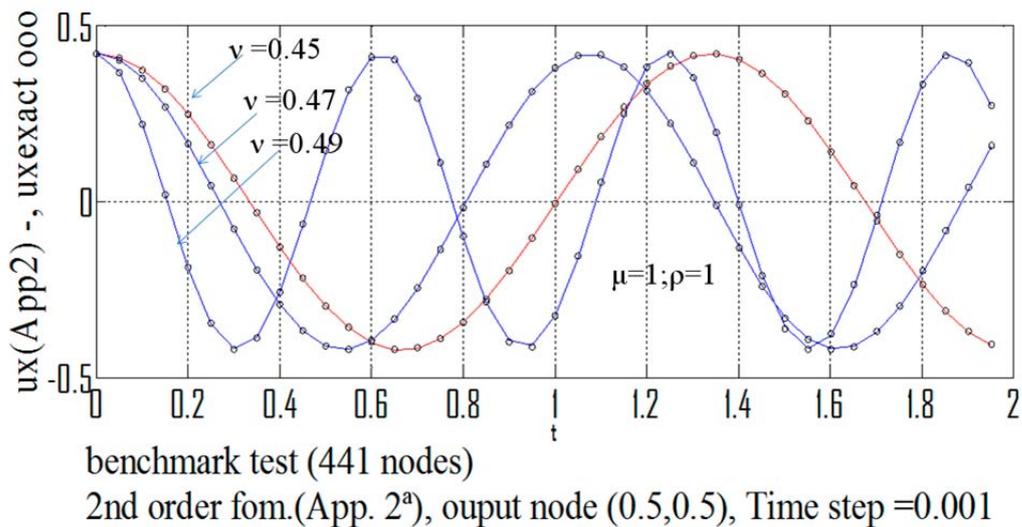
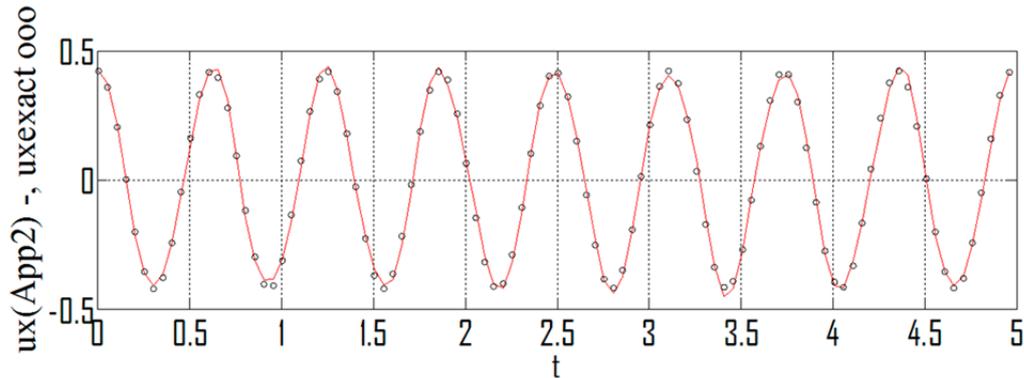


Figura 5-12. Comparativa entre las soluciones teóricas y las obtenidas mediante el empleo de la formulación en desplazamientos para diferentes valores del coeficiente de Poisson (t=2 seg)

La figura 5.13 muestra los resultados obtenidos cuando se aumenta el tiempo de cálculo (t=5 seg.), adoptando un coeficiente de Poisson igual a 0.49. Se puede apreciar la precisión de los resultados.



benchmark test (441 nodes) $\mu=1;\lambda=1;v=0.49$
 2nd order fom.(App. 2ª), output node (0.5,0.5), Time step =0.005

Figura 5-13. Desplazamientos para v=0.49 durante 5 seg.

Formulación en velocidad-tensión

En este caso, la solución teórica es la siguiente:

$$\begin{cases} V_x(x, y, t) = -\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}} \cos x \sin y \sin\left(\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}}t\right) \\ V_y(x, y, t) = -\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}} \sin x \cos y \cos\left(\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}}t\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x(x, y, t) = -\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}}\pi \cos \pi x \sin \pi y \sin\left(\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}}\pi t\right) \\ V_y(x, y, t) = -\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}}\pi \sin \pi x \cos \pi y \cos\left(\sqrt{\frac{2(\lambda+2\mu)}{\rho}}\pi t\right) \end{cases}$$

La figura 5.14 muestra la solución teórica (a trazos) y las obtenidas empleando la formulación en tensión-velocidad (línea continua), con aproximaciones de 2º y 4º orden, para un coeficiente de Poisson de 0.30.

La figura 5.15 muestra el mismo caso, pero con el modelo de 1681 nodos. Puede observarse la inestabilidad de la solución. Se deduce que cuando disminuye la separación entre nodos, el paso temporal también debe reducirse.

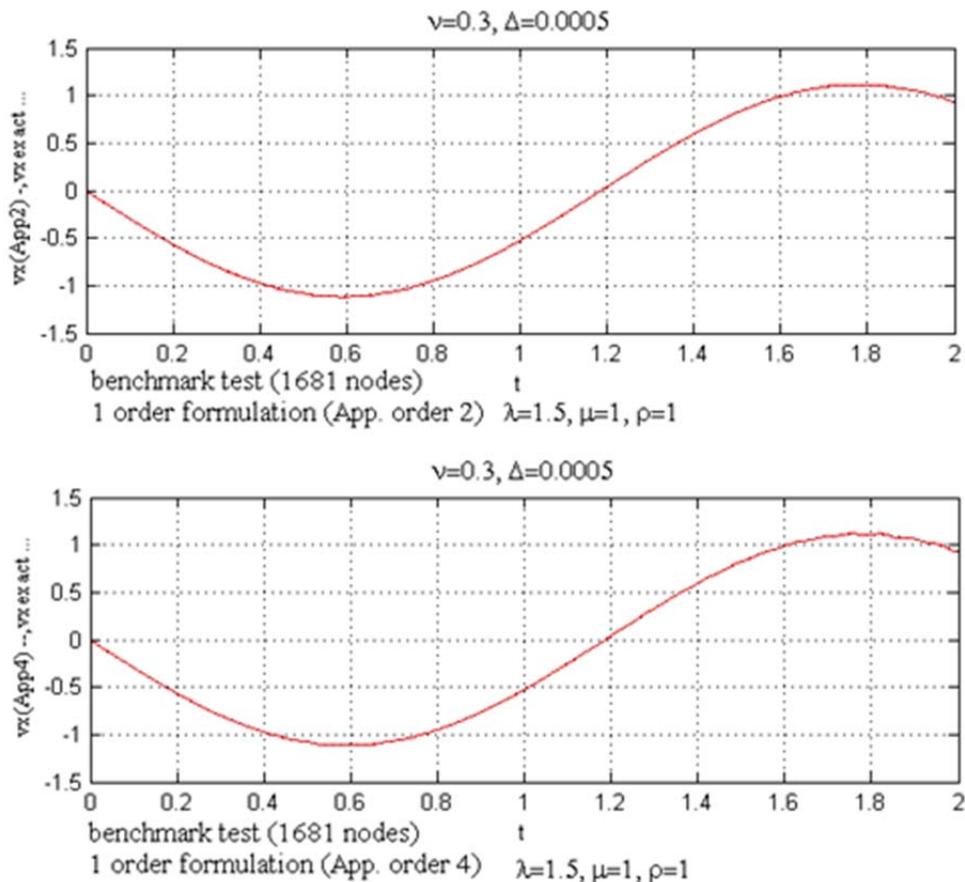


Figura 5-14. Velocidades. Aproximación de 2º y 4º orden

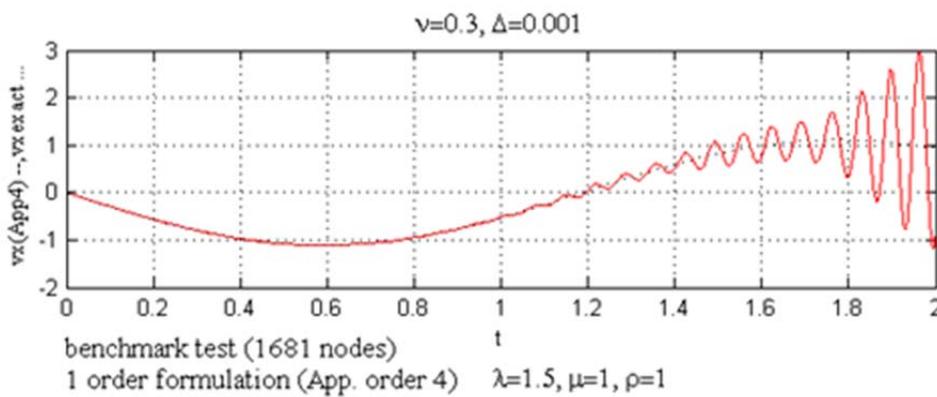


Figura 5-15. Velocidades obtenidas al reducir el espaciado entre nodos

Las figuras 5.16, 5.17 y 5.18, muestran la solución teórica exacta (líneas de puntos) y las obtenidas empleando la formulación de GFD en velocidad-tensión (línea continua), con aproximación de 2º orden para diferentes valores del coeficiente de Poisson: 0.40, 0.45, y 0.47. En todos los casos se obtienen buenos resultados, pero a medida que el coeficiente de Poisson se aproxima a su valor máximo (0.5) la precisión de la solución disminuye a lo largo del tiempo, siendo necesario adoptar un paso temporal λ menor o una nube de puntos más fina.

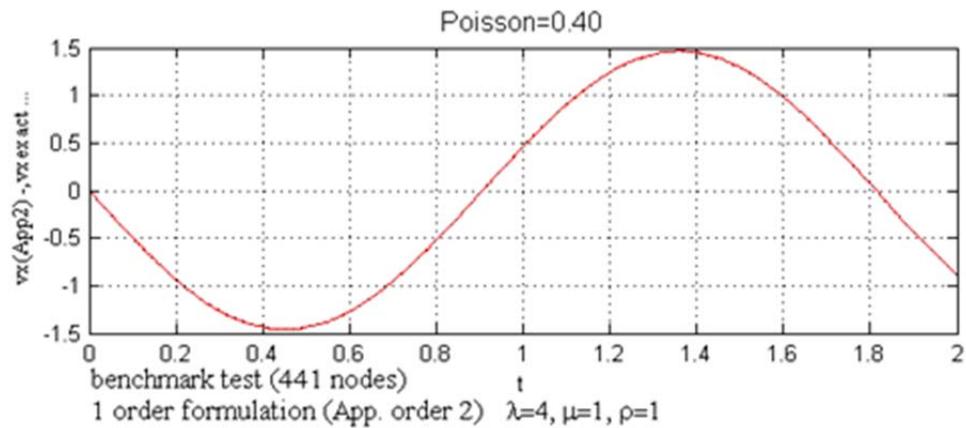


Figura 5-16. Velocidades. Aproximación de 2º orden para $v=0.40$.

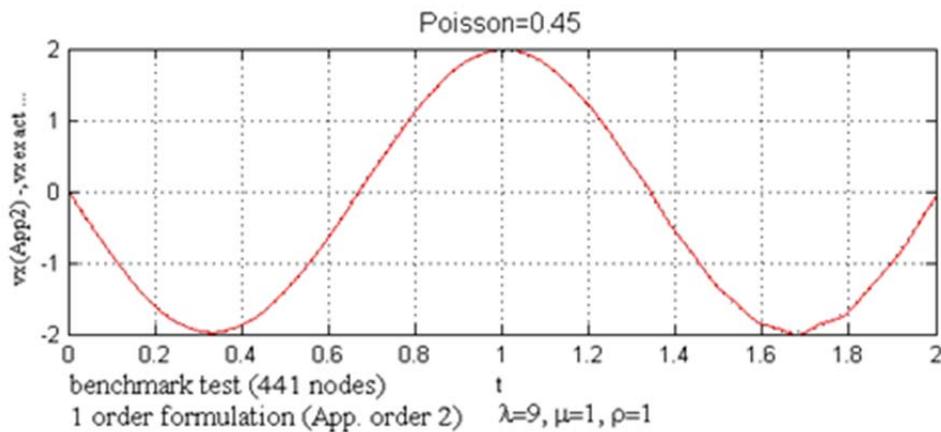


Figura 5-17. Velocidades. Aproximación de 2º orden para $v=0.45$.

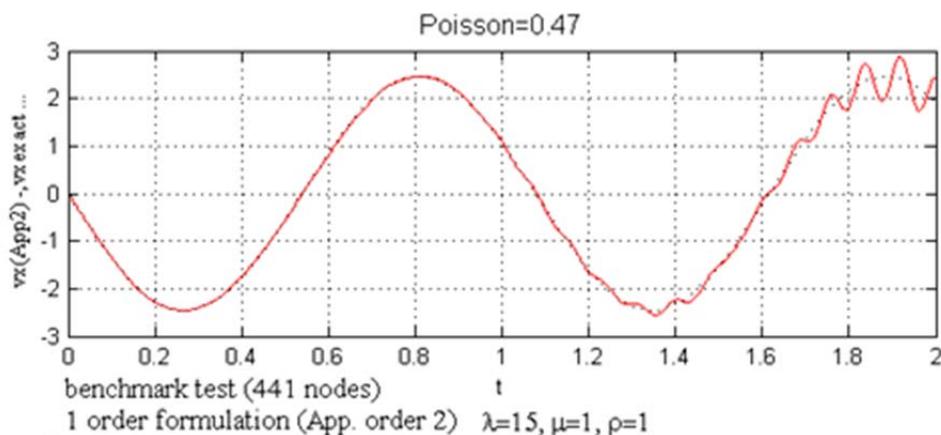


Figura 5-18. Velocidades. Aproximación de 2º orden para $v=0.47$.

5.4.2. Desplazamientos y velocidad-tensión para discretizaciones irregulares

En este caso se van a analizar las formulaciones en desplazamientos y velocidad-tensión con aproximación de 2º orden en distribuciones nodales irregulares.

La figura 5-19 muestra las dos distribuciones irregulares de nodos (515 y 6526 nodos) empleadas para evaluar la formulación en velocidad-tensión.

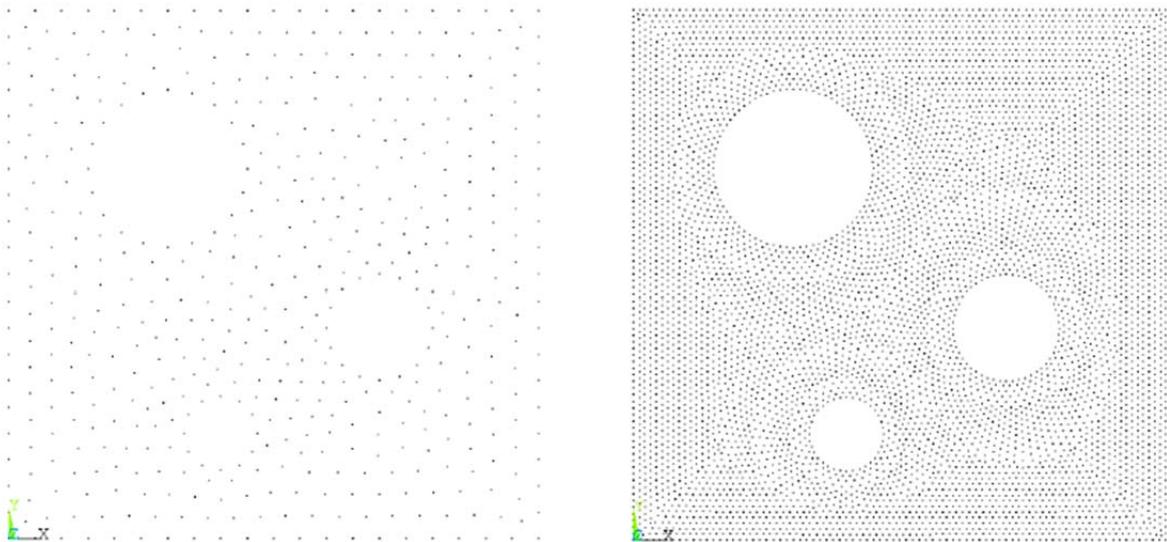


Figura 5-19. Nubes de nodos irregulares con 515 y 6526 nodos respectivamente

Las figuras 5.20 y 5.21 muestran la solución exacta (con círculos) y los valores obtenidos para las velocidades (línea continua). Se puede observar, en este caso, el incremento de precisión que se logra cuando se incrementa el número de nudos del modelo, manteniendo el mismo paso temporal.

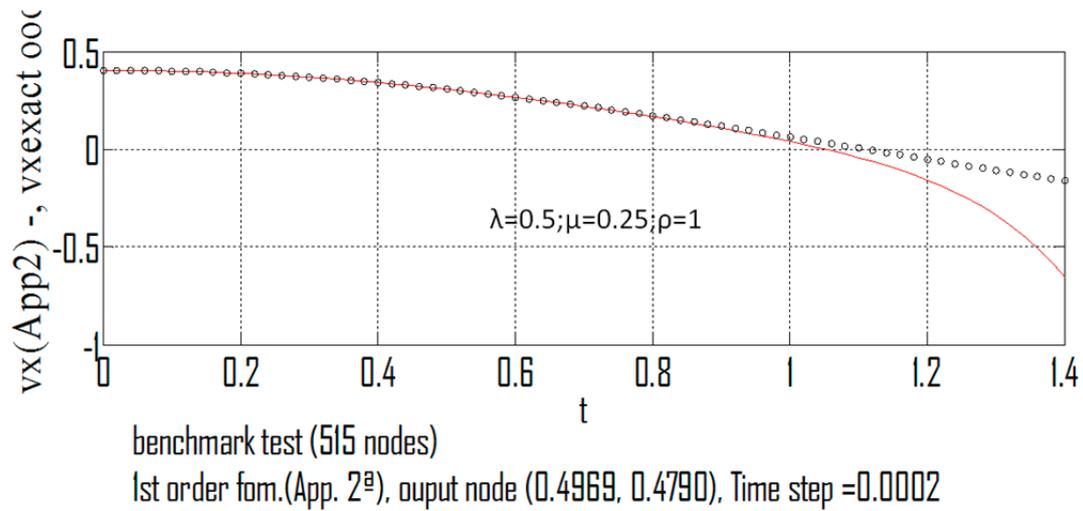


Figura 5-20. Velocidades para aproximación de 2º orden con una distribución irregular de nodos (515 nodos)

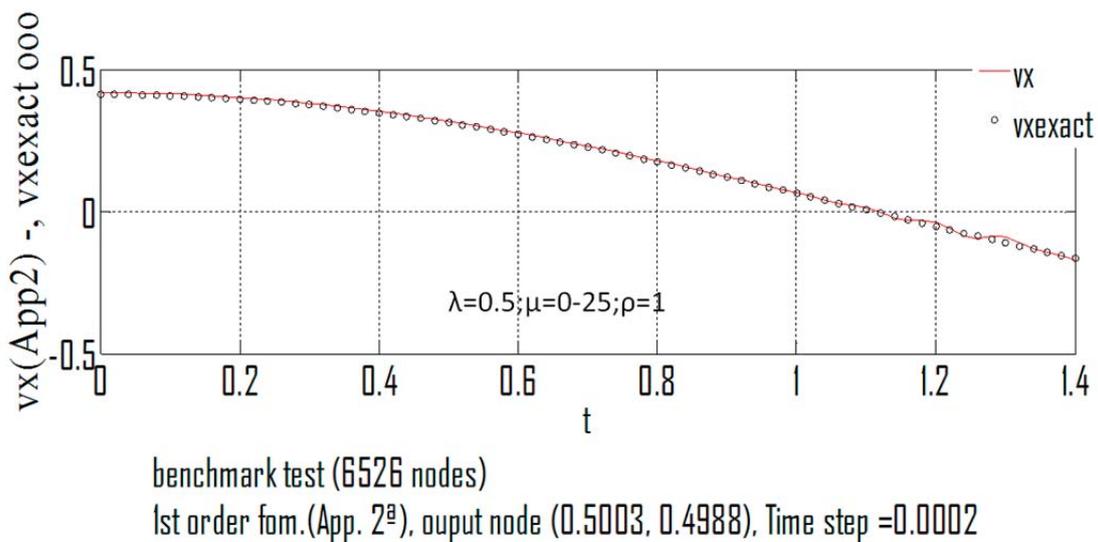


Figura 5-21. Velocidades para aproximación de 2º orden con una distribución irregular de nodos (6526 nodos)

La figura 5.22 muestra las dos distribuciones nodales irregulares usadas para evaluar la formulación en desplazamientos. Las figuras 5.23 y 5.24 muestran la solución exacta (con círculos) y los resultados aproximados de las velocidades (línea continua). En este caso se observa que la mejora en la precisión al incrementarse el número de nodos no es significativa.

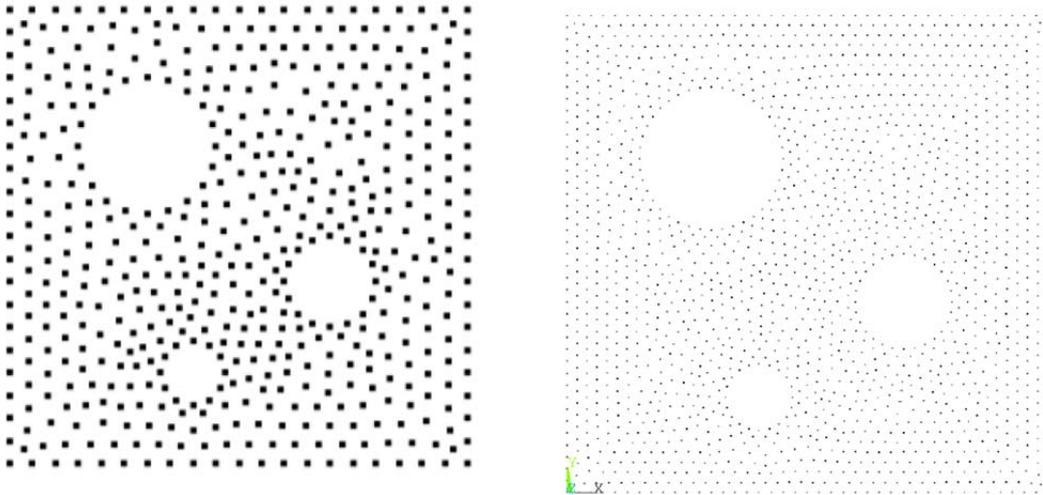
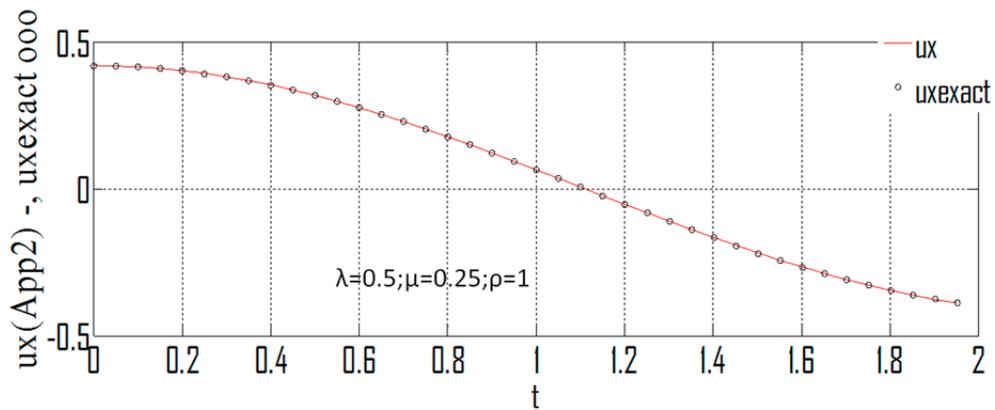


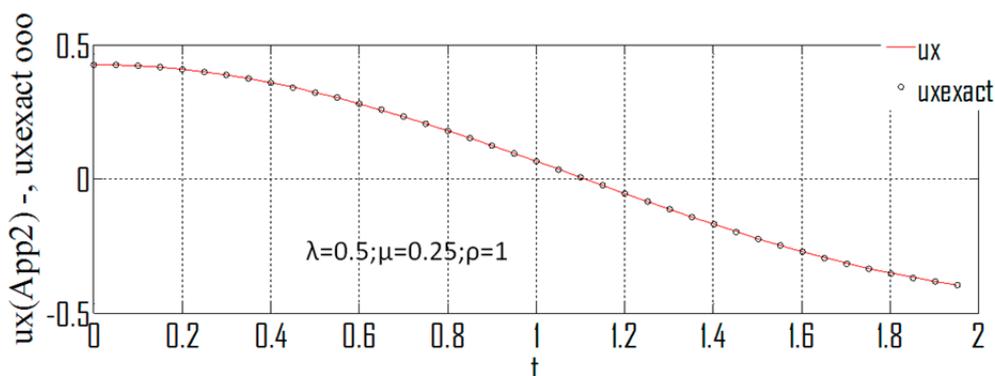
Figura 5-22. Distribuciones nodales irregulares con 272 y 1780 nodos



benchmark test (272 nodes)

2nd order fom.(App. 2^a), node (0.4918, 0.4950), Time step =0.0002

Figura 5-23. Desplazamientos para aproximación de 2º orden empleando una distribución irregular de nodos (272 nodos)



benchmark test (1780 nodes)

2nd order fom.(App. 2^a), node (0.4956, 0.5047), Time step =0.0002

Figura 5-24. Desplazamientos para aproximación de 2º orden empleando una distribución irregular de nodos (1780 nodos)

5.5. Comparativa con otro software

Complementariamente, con el fin de validar los resultados obtenidos empleando el esquema de diferencias finitas generalizadas expuesto, se ha efectuado un cálculo con un software comercial contrastado (FLAC), que emplea el método de diferencias finitas.

El programa FLAC (Fast Lagrangian Analysis of Continua), fue desarrollado para el cálculo geotécnico en 1986 por el grupo ITASCA, de Indiana. Desde entonces hasta hoy día, han ido apareciendo versiones más sofisticadas y actualizadas de la versión inicial ideada por el Dr. Peter Cundall.

El programa FLAC emplea el método de las diferencias finitas con un esquema de resolución explícito para la resolución de las ecuaciones diferenciales planteadas en el problema objeto de estudio. En diferencias finitas, cada grupo de ecuaciones se sustituye por una expresión algebraica en puntos discretos.

Las ecuaciones utilizadas por FLAC se basan en la segunda ley de Newton del movimiento, que relaciona la aceleración de una masa al ser sometida a una fuerza aplicada variable con el tiempo. En problemas estáticos, FLAC utiliza la propiedad de que la aceleración correspondiente a la suma de las fuerzas del sistema tiende a cero ($\Sigma F = 0$).

Además de la ecuación de movimiento, se necesita la ley del comportamiento del sólido, que se conoce como la relación constitutiva o ley tensión-deformación (por ejemplo, modelo elástico, modelo de Mohr-Coulomb,...). Finalmente, para terminar de definir el sistema a resolver, se deben indicar las condiciones iniciales y de contorno.

El proceso de cálculo se lleva a cabo de forma cíclica en cada uno de los elementos y en cada uno de los pasos de cálculo de manera independiente, según el siguiente esquema:

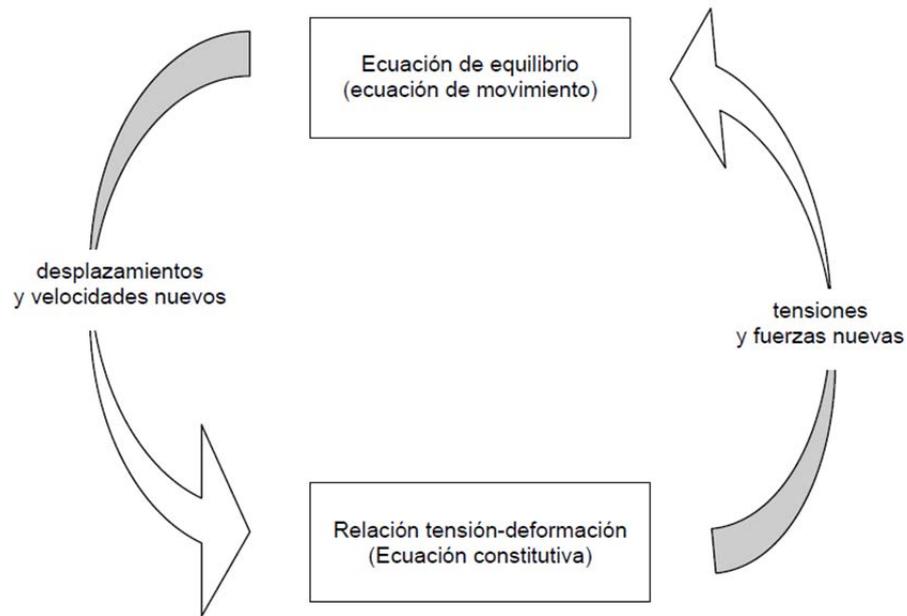


Figura 5-25. Esquema de cálculo en FLAC (Manual del FLAC v.5.0).

Aunque se divide el medio en elementos formados por cuadriláteros, FLAC divide internamente el cuadrilátero en dos grupos superpuestos de triángulos de deformación constante de elementos triangulares según se muestra en la figura XXX. Cada triángulo constituye una subzona del cuadrilátero.

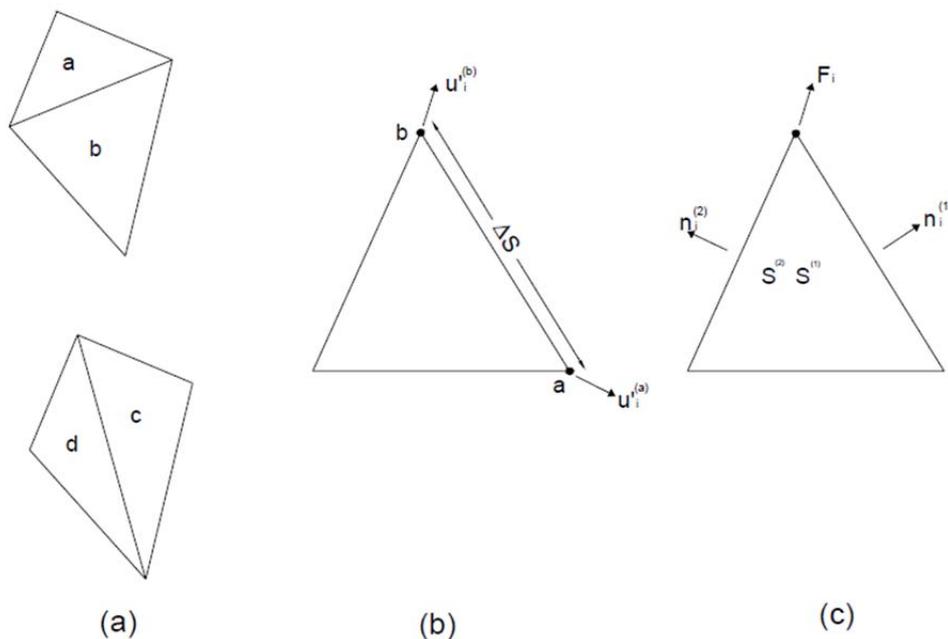


Figura 5-26. a) Elementos cuadriláteros utilizados por FLAC; b) Elemento típico triangular con vectores velocidad; c) Vector fuerza en los nodos (Manual FLAC)

En cada paso temporal, el cálculo resuelve dos conjuntos de ecuaciones: las de equilibrio del movimiento y las constitutivas. Las deformaciones y desplazamientos se obtienen a partir de las tensiones y fuerzas de cada punto de masa en el paso anterior. Por aplicación del teorema de la divergencia de Gauss a los elementos discretizados, se obtienen velocidades en cada punto de masa que son usadas para expresar las deformaciones del elemento. A continuación, se usan las ecuaciones constitutivas para calcular las nuevas tensiones a partir de dichas deformaciones. Calculadas las tensiones, las fuerzas equivalentes aplicadas en cada nodo están determinadas pues las tensiones en cada subzona triangular, actúan como tracciones en los lados del triángulo, de forma que cada una de ellas es equivalente a dos fuerzas iguales F_i , actuando en los extremos del correspondiente lado.

Según se ha expuesto, en el esquema explícito utilizado por FLAC, la ley constitutiva solamente es consultada una vez por cada elemento y por cada paso de cálculo, con lo que no es necesario almacenar ninguna matriz de rigidez.

Según se indica en el manual de FLAC, el software alcanza toda su potencia en problemas de flujo plástico, donde el método de resolución explícito, permite seguir procesos físicamente inestables sin divergencias numéricas, así como la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales de tensión-deformación en casi el mismo tiempo de cálculo que con sistemas de ecuaciones lineales, sin necesidad de almacenar ninguna matriz. Por tanto, el método de cálculo utilizado por FLAC, lo hace un programa recomendado para la simulación de grandes deformaciones y modelos de un gran número de elementos. El esquema de diferencias finitas explícito que incorpora el programa puede seguir el recorrido físico y simular el efecto del recorrido de carga en la respuesta constitutiva. El criterio de estabilidad numérico para el esquema debe proporcionar una frontera superior para los valores de los pasos de cálculo usados en el método de diferencias finitas.

El modelo adoptado para efectuar la comparación se muestra en la figura 5-27. Se ha considerado un medio elástico de dimensión horizontal igual a 5 m. y dimensión vertical igual a 1.5 m., formado por una malla de nodos igualmente espaciados en las dos direcciones (espaciado nodal igual a 0,02 unidades). El número total de nodos es de 19076. El origen de coordenadas se sitúa en la esquina superior izquierda del modelo, siendo el eje x horizontal y creciente hacia la derecha, y el eje y vertical y creciente hacia abajo (ver figura adjunta).

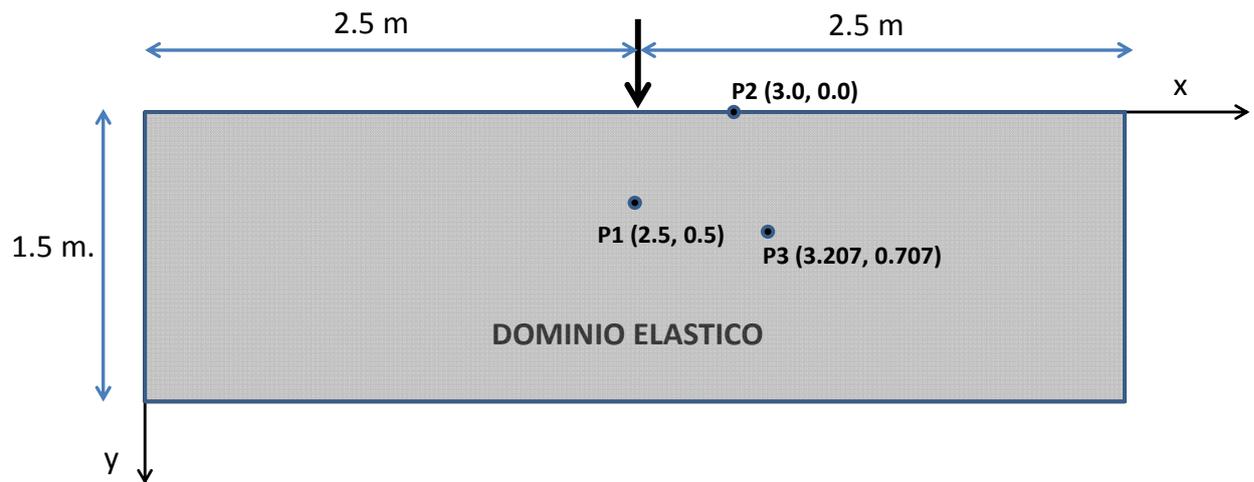


Figura 5-27. Modelo de cálculo analizado

Los parámetros elásticos adoptados son:

$$\lambda = 18 \text{ (unidades de tensión, p. ej. kN/m}^2\text{)}$$

$$G = 9.0 \text{ (unidades de tensión, p.ej kN/m}^2\text{)}$$

$$\rho = 1 \text{ (unidades de masa/volumen, p.ej Ton(m)/m}^3\text{)}$$

En este modelo, los valores de la velocidad de las ondas P y S son:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{18 \text{ kN/m}^2 + 2 \cdot 9 \text{ kN/m}^2}{1 \text{ Ton/m}^3}} = 6 \text{ m/s}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{9 \text{ kN/m}^2}{1 \text{ Ton/m}^3}} = 3 \text{ m/s}$$

Se ha aplicado una carga vertical dinámica de tipo pulso (en unidades de tensión) en un punto situado en la intersección del eje de simetría vertical con el borde superior. El pulso está definido de la forma siguiente:

$$p(t) = \begin{cases} 0.5 & 0 \leq t \leq 0.012 \text{ s.} \\ 0 & t > 0.012 \text{ s.} \end{cases}$$

Este modelo descrito se ha calculado adicionalmente con el software comercial FLAC, considerando la misma geometría, separación de nodos, propiedades elásticas y pulso dinámico aplicado. Se han adoptado las mismas condiciones de contorno y el mismo paso de tiempo.

Los puntos empleados para efectuar la comparación de resultados empleando el esquema de diferencias finitas generalizadas (GFDM) y el software comercial (FLAC) corresponden a:

$$P1=(2.5, 0.5)$$

$$P2=(3.0, 0.0)$$

$$P3=(3.207, 0.707)$$

El siguiente gráfico muestra la comparación del desplazamiento vertical del punto P1(2.5, 0.5) en función del tiempo.

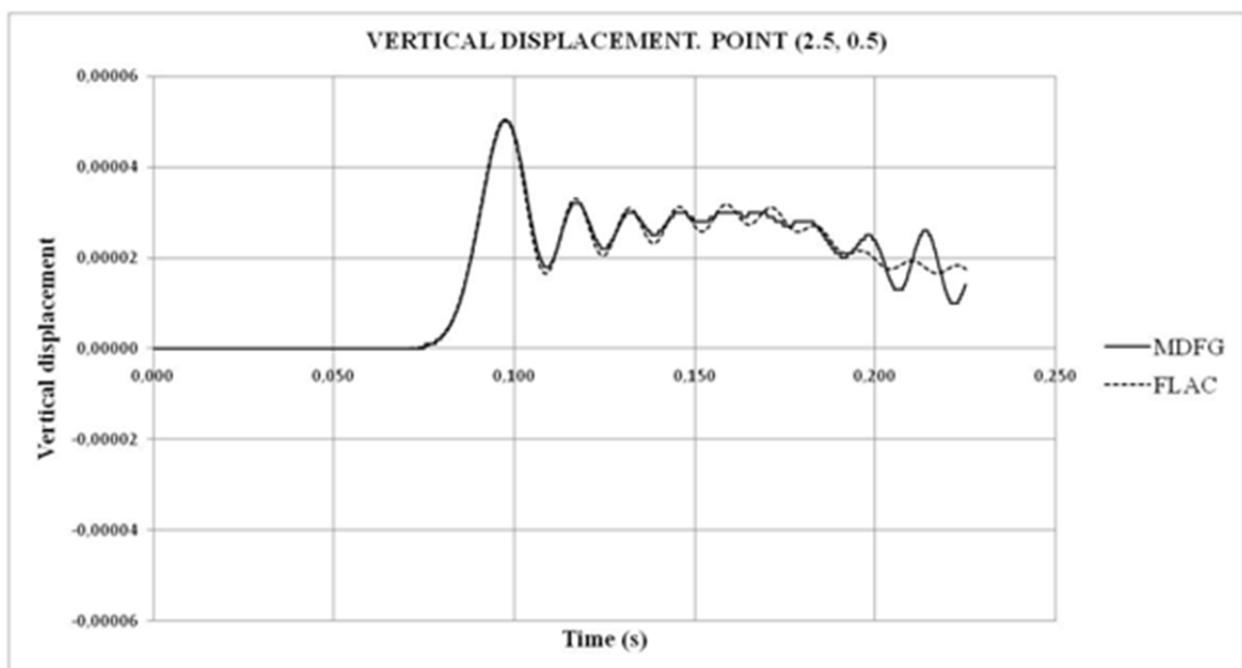


Figura 5-28. Comparativa entre el desplazamiento vertical obtenido en función del tiempo, en el nodo (2.5, 0.5), con el esquema de D.F.G. y el software comercial FLAC

La onda P alcanza el punto P1 en el instante $t=0.083$ seg. El valor máximo del desplazamiento vertical producido es igual a 5×10^{-5} . El desplazamiento horizontal registrado es prácticamente nulo. Observando las dos curvas de la evolución del desplazamiento vertical del punto P1, se aprecia que el GFDM proporciona valores muy próximos a los obtenidos con el software comercial FLAC.

Las ondas P alcanzan el punto P2 en 0.083 seg, las ondas S en $t=0.166$ seg. y las ondas Rayleigh en $t=0.175$ seg. Estos instantes de llegada se pueden apreciar en las figuras siguientes:

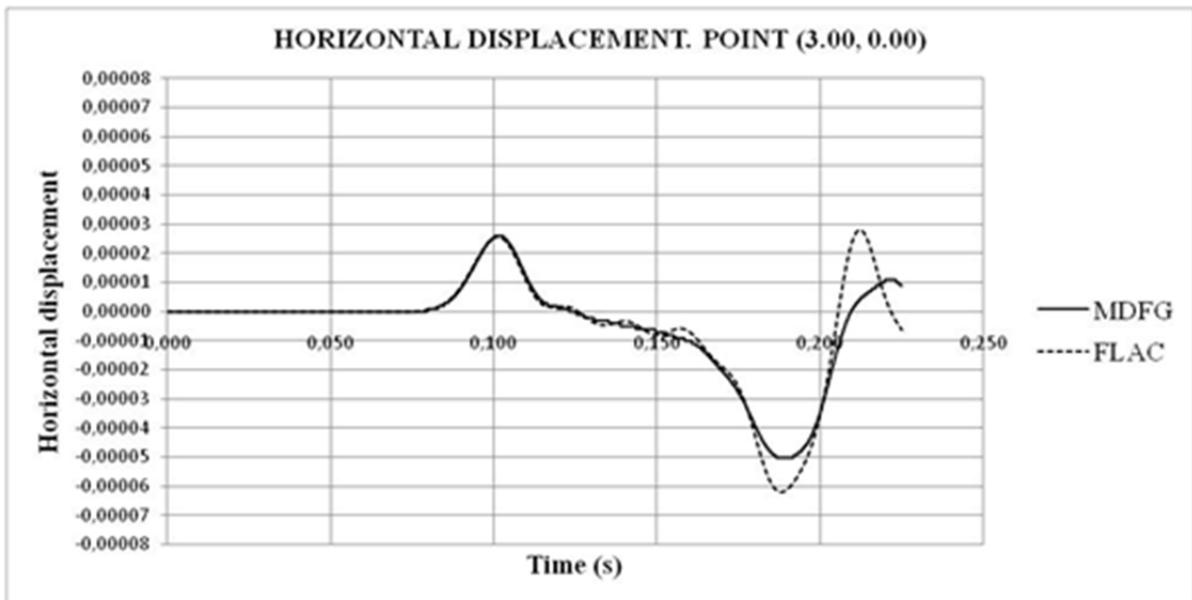


Figura 5-29. Comparativa entre el desplazamiento horizontal obtenido en función del tiempo, en el nodo (3.0, 0.0), con el esquema de D.F.G. y el software comercial FLAC

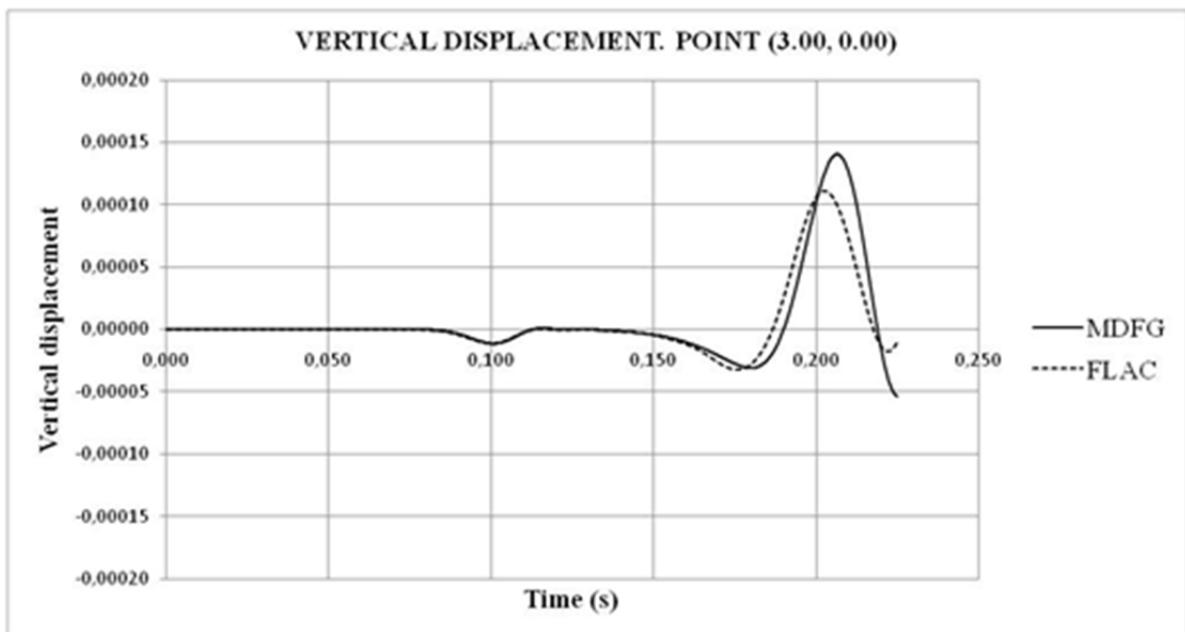


Figura 5-30. Comparativa entre el desplazamiento vertical obtenido en función del tiempo, en el nodo (3.0, 0.0), con el esquema de D.F.G. y el software comercial FLAC

Observando simultáneamente la evolución de los desplazamientos en el punto P2, se puede apreciar que el desplazamiento máximo vertical corresponde al instante en el que el desplazamiento horizontal se anula (0.21 seg.) y análogamente el valor máximo del desplazamiento horizontal se corresponde con un valor casi nulo de desplazamiento vertical (0.19 seg.). Esta correspondencia entre desplazamientos es característica de las ondas Rayleigh.

Finalmente, en las dos figuras siguientes se puede observar el instante de llegada de las ondas al punto P3. Las ondas P alcanzan este punto en el instante $t= 0.166$ seg., obteniéndose valores muy similares de los desplazamientos vertical y horizontal, ya que las componentes vertical y horizontal del movimiento tienen el mismo ángulo de proyección respecto a la dirección de propagación de la onda. Como se aprecia en estas figuras, los resultados obtenidos son muy similares en ambos métodos (FLAC y Método de Diferencias Finitas Generalizadas).

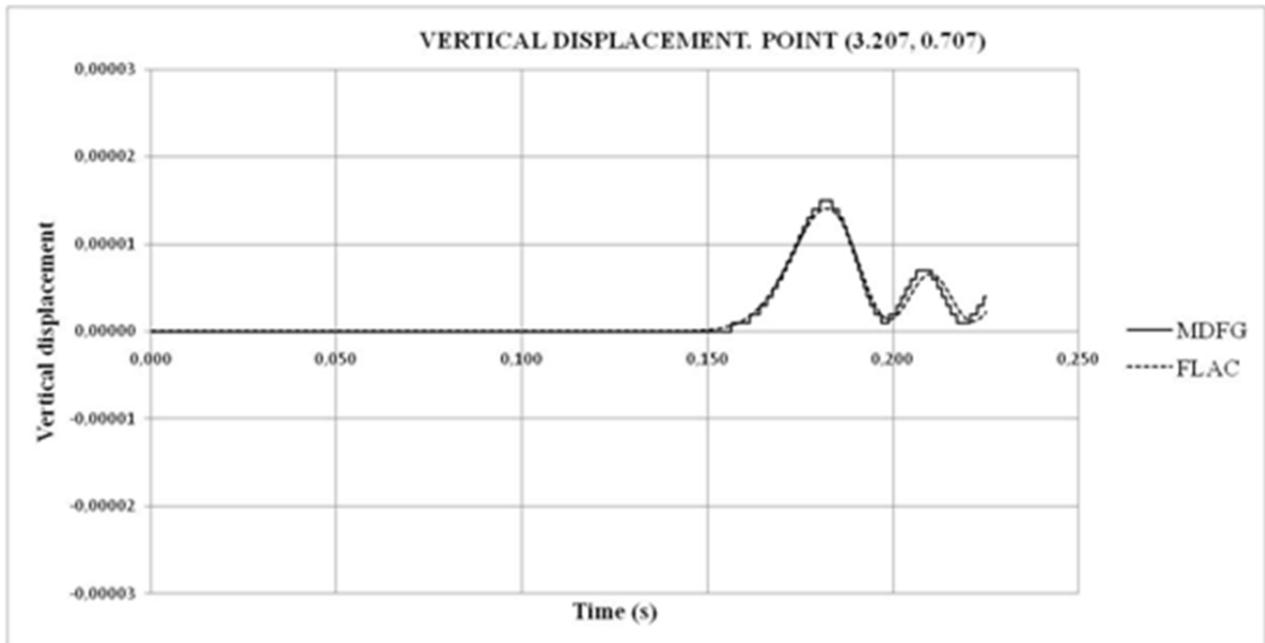


Figura 5-31. Comparativa entre el desplazamiento vertical obtenido en función del tiempo, en el nodo (3.207, 0.707), con el esquema de D.F.G. y el software comercial FLAC

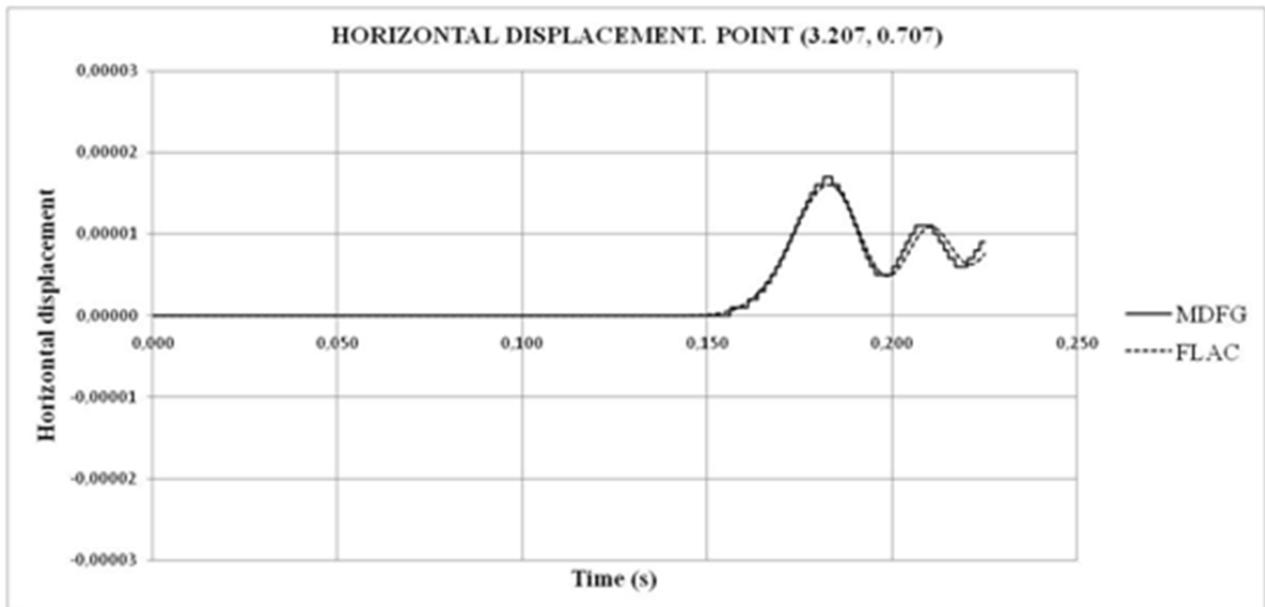


Figura 5-32. Comparativa entre el desplazamiento horizontal obtenido en función del tiempo, en el nodo (3.207, 0.707), con el esquema de D.F.G. y el software comercial FLAC

6. CONTORNOS PERFECTAMENTE SINCRONIZADOS

Al resolver un problema numérico definido sobre un espacio infinito mediante diferencias finitas o elementos finitos, surge el problema de que el modelo debe ser finito y, por tanto, deben introducirse contornos inexistentes en el problema real.

La modelización de la transmisión de ondas ha de resolver uno de los problemas más difíciles a la hora de truncar una malla, ya que la energía transmitida decae muy lentamente con la distancia. Por este motivo, se hace necesaria la modelización de unos contornos que de alguna forma absorban las ondas sin reflejarlas y que no alteren los resultados en la zona de interés debido a la reflexión de las ondas en dichos contornos. Debido a la dificultad de implementar una condición de contorno en el modelo que cumpla las condiciones citadas, se modificó este enfoque (“A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”, Berenger, 1994): en lugar de incorporar una condición de contorno absorbente, se planteó la posibilidad de acoplar un medio absorbente en el contorno del medio elástico (ver figura 6.1). Este “material absorbente” (Perfectly Matched Layer) se adosa a los límites del dominio elástico y es independiente de la condición de contorno que desee fijarse. Cuando una onda entra en este material absorbente, se atenúa y decrece exponencialmente a medida que avanza en él. Aunque dicha onda alcance la frontera, la onda reflejada que regresa continúa atenuándose en el interior del material absorbente, de forma que la energía de la onda que vuelve a entrar en el medio elástico se ha reducido significativamente. No obstante, el principal problema que se produce es la generación de ondas reflejadas en el contacto medio elástico-material absorbente, ya que dichas ondas se generan en la transición entre materiales diferentes. La adecuada formulación de este material absorbente debe reducir al máximo las reflexiones producidas en dicho contacto, al entrar en el dominio PML.

En los siguientes apartados se desarrolla la formulación empleada para incorporar este material absorbente en la modelización de la transmisión de ondas.

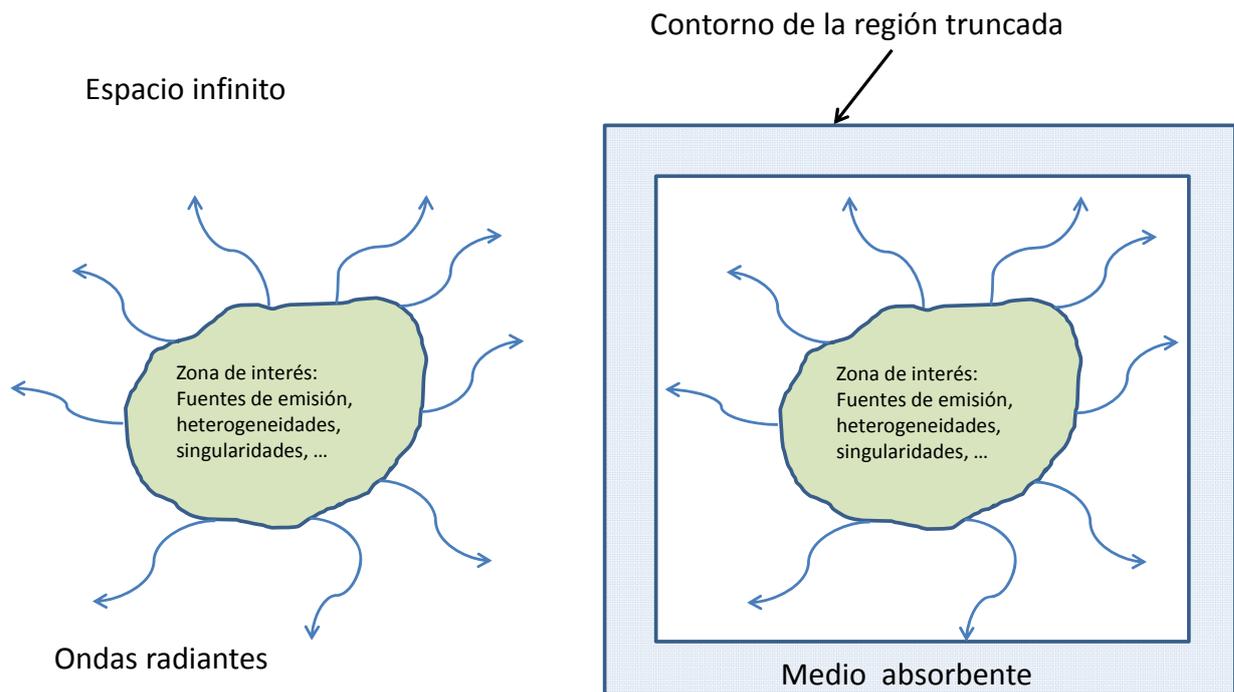


Figura 6-1. Esquema del medio absorbente adosado a los límites del dominio elástico

6.1. Formulación

Se supone que el espacio alejado de la región de interés es homogéneo, lineal e invariante en el tiempo. Por tanto, la solución de la ecuación de ondas en el espacio infinito puede considerarse una superposición de ondas planas.

Una onda plana desplazándose a lo largo del eje x puede representarse mediante la siguiente ecuación:

$$u(x, t) = A(\omega)e^{i(kx - \omega t)} \quad [6.1]$$

Siendo $A(\omega)$ la amplitud, donde ω es la frecuencia angular y k el vector de onda. En un medio isotrópico se cumple:

$$c = \frac{L}{T} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{k} \quad [6.2]$$

Donde c es la velocidad de fase, L es la longitud de onda, T el período, ω la frecuencia angular (número de oscilaciones en 2π unidades de tiempo) y k el vector de onda (número de oscilaciones en 2π unidades de espacio).

Con estas consideraciones, la solución de la ecuación de ondas puede descomponerse en la suma de una serie de funciones de la forma:

$$W(y, z) e^{i(kx-wt)}$$

[6.3]

La expresión anterior es una función analítica de x . Por tanto, dicha función puede continuarse analíticamente, siendo posible evaluar la solución en valores complejos de x . Así, por ejemplo, en el caso del dominio real de x , la solución de la ecuación de ondas corresponde a una función oscilatoria del tipo e^{ikx} (ver figura adjunta).

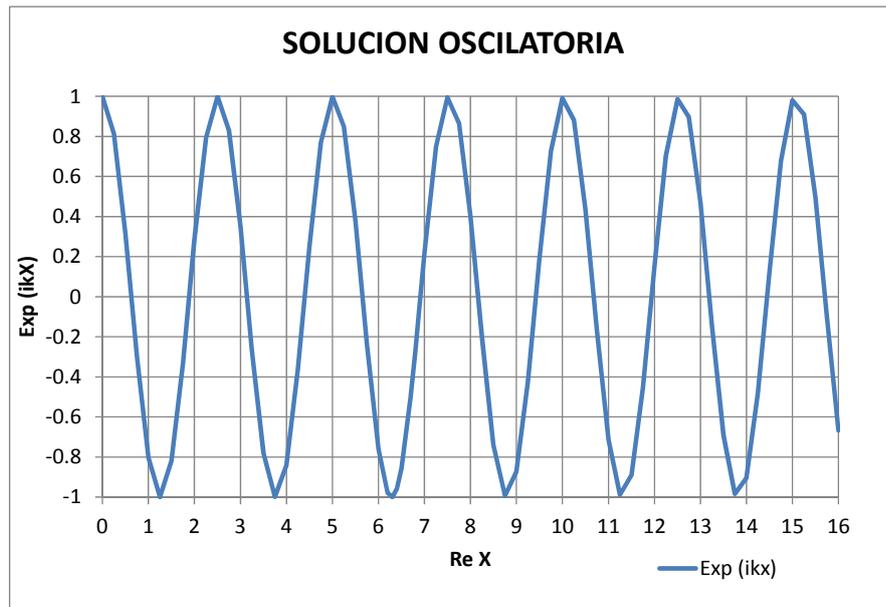


Figura 6-2. Solución oscilatoria del tipo e^{ikx}

Sin embargo, si se considera un dominio en el que para $x \geq 7$ se añade una parte imaginaria linealmente creciente (ver figura adjunta), se obtiene una solución exponencialmente decreciente para $x \geq 7$.

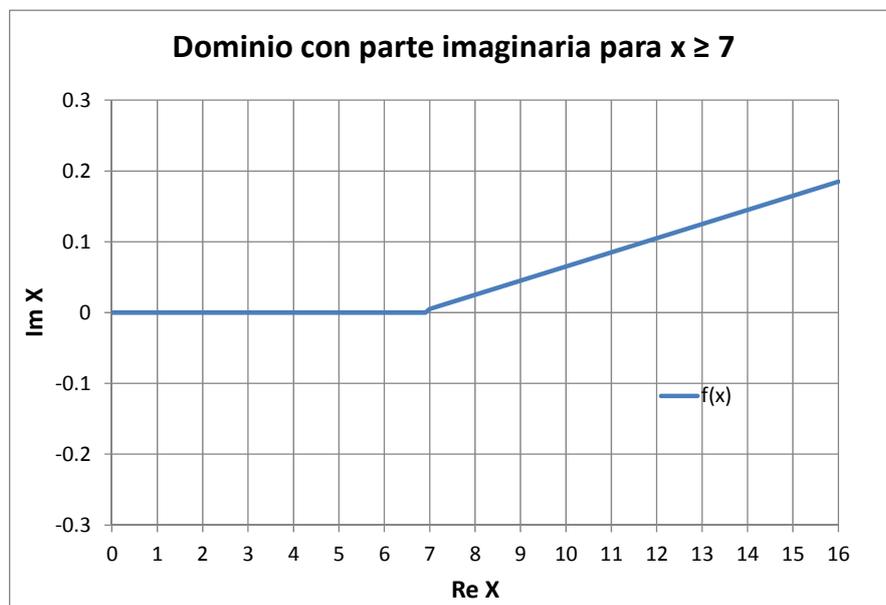


Figura 6-3. Dominio con parte imaginaria para $x \geq 7$

La razón es que al evaluar la función e^{ikx} en el dominio con parte imaginaria se multiplica por un factor exponencialmente decreciente:

$$e^{ik(\text{Re } x + i \text{Im } x)} = e^{ik(\text{Re } x)} e^{-k \text{Im } x}$$

[6.4]

Se produce entonces una atenuación de la solución en el contorno absorbente, tal como se muestra en la figura siguiente:

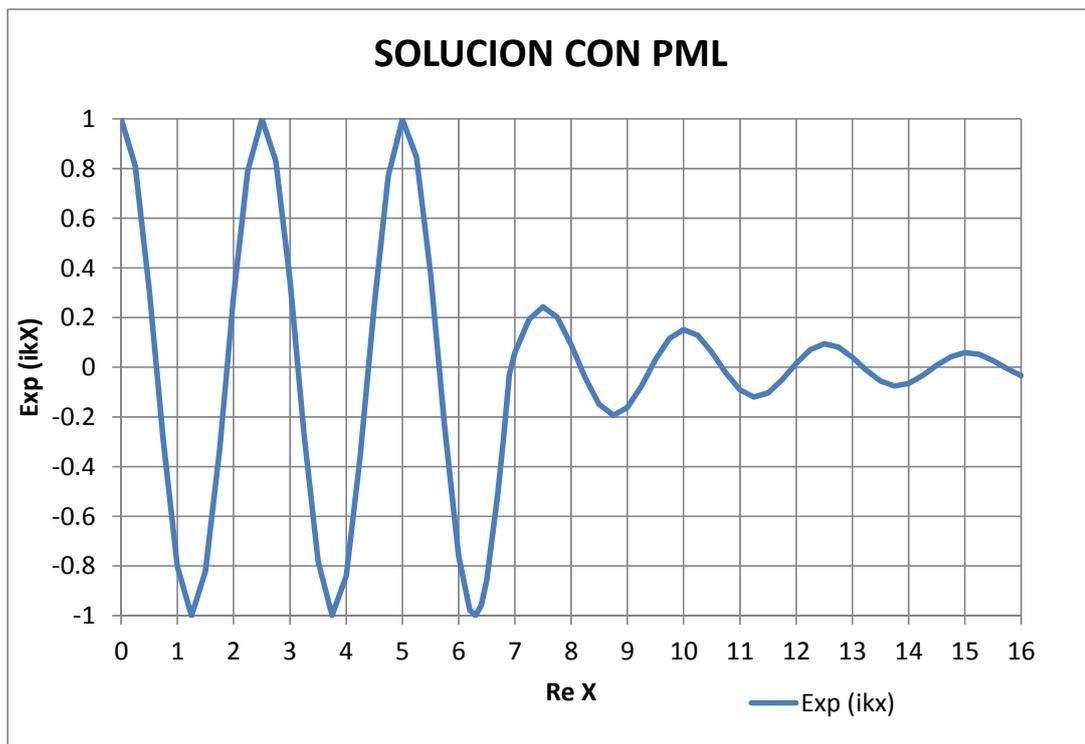


Figura 6-4. Atenuación de la solución oscilatoria para $x > 7$

En el caso de 2 dimensiones, como las variables de campo son funciones analíticas de x e y , pueden continuarse analíticamente, evaluando la solución en los valores complejos de x e y . Sin embargo, el principal inconveniente es la resolución de la ecuación de ondas en el dominio complejo. Para evitar este inconveniente, se efectúa un cambio de variable en el dominio PML, el cual puede suponerse conceptualmente como una transformación simple de la ecuación original.

Si se tiene en el dominio PML:

$$\tilde{x}(x) = x + i f(x)$$

[6.5]

Se puede escribir:

$$\partial \tilde{x} = \left(1 + i \frac{df}{dx}\right) \partial x \quad [6.6]$$

Si se considera una función tal que:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\delta_x(x)}{\omega} \quad [6.7]$$

Se puede escribir:

$$\partial \tilde{x} = \left(1 + i \frac{df}{dx}\right) \partial x = \left(1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}\right) \partial x \quad [6.8]$$

Por tanto:

$$\tilde{x} = \int \left(1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}\right) \partial x = x + i \int \frac{\delta_x(x)}{\omega} \partial x \quad [6.9]$$

La derivada parcial respecto a la variable \tilde{x} resulta igual a:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \quad [6.10]$$

Por tanto, la ecuación de ondas en elastodinámica se puede resolver en el dominio PML efectuando la transformación anterior de la derivada parcial. La función $\delta_x(x)$ corresponde a la función de atenuación de la onda en el dominio PML. La frecuencia ω divide a la función de atenuación para lograr un perfil de absorción en el dominio PML independiente de la frecuencia.

Análogamente, en el caso de un contorno PML en dirección x e y donde las derivadas espaciales aparecen en la ecuación de ondas, las mismas se sustituirían por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_y(y)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial y} \end{cases} \quad [6.11]$$

Esta sustitución se va a efectuar en las 5 ecuaciones siguientes que gobiernan la formulación de problemas en elastodinámica en 2 dimensiones a partir de los parámetros de tensión y velocidad:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} &= G \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

[6.12]

Estas ecuaciones se pueden escribir de la siguiente manera (considerando nulas las fuerzas másicas F):

$$\begin{cases} \rho v_{i,t} = \sigma_{ij,j} \\ \sigma_{ij,t} = \lambda \delta_{ij} v_{k,k} + G (v_{i,j} + v_{j,i}) \end{cases}$$

[6.13]

Donde el parámetro v representa velocidades y σ tensiones en el material del dominio.

Estas ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial x} & \lambda \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & G \frac{\partial}{\partial y} & G \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \frac{\partial}{\partial x} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

[6.14]

Como se ha mencionado anteriormente, para obtener la formulación de PML en dirección x en problemas lineales de propagación de ondas, se considera el dominio PML como una continuación analítica de las variables espaciales del medio elástico a un dominio parcial de variable compleja.

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + i \frac{\delta_x(x)}{\omega} \\ \tilde{y} = y + i \frac{\delta_y(x)}{\omega} \end{cases}$$

[6.15]

Donde δ_x , δ_y son las funciones de amortiguamiento, que se han considerado iguales y función de la variable x. El perfil de amortiguamiento en el dominio PML es:

$$\delta_x(x) = \delta_y(x) = \delta(x) = \delta = \frac{l}{\Delta t} \sigma \left(\frac{x_i^F - x_i}{x_i^F - x_i^I} \right)^Q$$

[6.16]

Donde x_i^I y x_i^F corresponden a las coordenadas inicial y final del dominio PML, y el exponente Q adopta el valor 2.

En el dominio PML las derivadas espaciales que aparecen en la ecuación de ondas se sustituirían por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_y(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

[6.17]

La solución de la ecuación de ondas en 2 dimensiones puede descomponerse en funciones de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, t) &= \sigma'_x(x, y) e^{i\omega t} \\ \sigma_y(x, y, t) &= \sigma'_y(x, y) e^{i\omega t} \\ \tau_{xy}(x, y, t) &= \tau'_{xy}(x, y) e^{i\omega t} \\ v_x(x, y, t) &= v'_x(x, y) e^{i\omega t} \\ v_y(x, y, t) &= v'_y(x, y) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

[6.18]

Adoptando $\delta_x(x) = \delta_y(x) = \delta$ y sustituyendo las derivadas anteriores, resultan las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \frac{(\lambda + 2G)}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\lambda}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial v_y}{\partial y} = -i\omega \sigma_x$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \frac{G}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{G}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial v_y}{\partial x} = -i\omega \tau_{xy}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \frac{\lambda}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{(\lambda + 2G)}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial v_y}{\partial y} = -i\omega \sigma_y$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) = -i\omega v_x$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) = -i\omega v_y$$

[6.19]

Operando, resulta:

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} = -i\omega \sigma_x \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = -i\omega \sigma_x + \delta \sigma_x$$

$$G \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = -i\omega \tau_{xy} \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = -i\omega \tau_{xy} + \delta \tau_{xy}$$

$$\lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial v_y}{\partial y} = -i\omega \sigma_y \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = -i\omega \sigma_y + \delta \sigma_y$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) = -i\omega v_x \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = -i\omega v_x + \delta v_x$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) = -i\omega v_y \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = -i\omega v_y + \delta v_y$$

[6.20]

Finalmente, volviendo al dominio del tiempo queda:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = -i\omega \sigma_x = (\lambda + 2G) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} - \delta \sigma_x$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = -i\omega \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \delta \tau_{xy}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = -i\omega \sigma_y = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial v_y}{\partial y} - \delta \sigma_y$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -i\omega v_x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - \delta v_x$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -i\omega v_y = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) - \delta v_y$$

[6.21]

Estas relaciones se pueden poner en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & 0 & 0 & (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial x} & \lambda \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\delta & 0 & G \frac{\partial}{\partial y} & G \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\delta & \lambda \frac{\partial}{\partial x} & (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

[6.22]

Para efectuar un análisis de estabilidad en el medio continuo del PML, según Kristel C. Meza-Fajardo y Apostolos S. Papageorgiu [113], [114], se puede escribir la matriz anterior de los coeficientes como:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\delta & 0 & 0 & ik_x(\lambda + 2G) & ik_y\lambda \\ 0 & -\delta & 0 & ik_yG & ik_xG \\ 0 & 0 & -\delta & ik_x\lambda & ik_y(\lambda + 2G) \\ \frac{ik_x}{\rho} & \frac{ik_y}{\rho} & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & \frac{ik_x}{\rho} & \frac{ik_y}{\rho} & 0 & -\delta \end{pmatrix}$$

[6.23]

El problema de autovalores asociado con la ecuación anterior es:

$$X_i \mathbf{W}_i = \mathbf{A} \mathbf{W}_i$$

[6.24]

Se considera el sistema estable si todos los autovalores X_i tienen partes reales negativas. Por tanto, para encontrar los autovalores debe igualarse a cero el siguiente determinante:

$$|\mathbf{A} - \chi \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\delta - \chi & 0 & 0 & ik_x(\lambda + 2\mu) & ik_y\lambda \\ 0 & -\delta - \chi & 0 & ik_y\mu & ik_x\mu \\ 0 & 0 & -\delta - \chi & ik_x\lambda & ik_y(\lambda + 2\mu) \\ \frac{ik_x}{\rho} & \frac{ik_y}{\rho} & 0 & -\delta - \chi & 0 \\ 0 & \frac{ik_x}{\rho} & \frac{ik_y}{\rho} & 0 & -\delta - \chi \end{vmatrix} = 0$$

[6.25]

La matriz $[\mathbf{A} - \chi \mathbf{I}]$ puede reducirse a la siguiente matriz triangular superior mediante eliminación gaussiana:

$$\mathbf{A} - \chi \mathbf{I} \rightarrow \begin{pmatrix} \varsigma & 0 & 0 & ik_x(\lambda+2\mu) & ik_y\lambda \\ 0 & \varsigma & 0 & ik_y\mu & ik_x\mu \\ 0 & 0 & \varsigma & ik_x\lambda & ik_y(\lambda+2\mu) \\ 0 & 0 & 0 & \varsigma + \frac{k_x^2(\lambda+2\mu) + k_y^2\mu}{\rho\varsigma} & \frac{k_x k_y(\lambda+\mu)}{\rho\varsigma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{\rho\varsigma} \end{pmatrix}$$

[6.26]

Donde:

$$\varsigma = -\delta - \chi$$

$$g = \rho\varsigma^2 + k_x^2\mu + k_y^2(\lambda+2\mu) - \frac{k_x^2 k_y^2 (\lambda+\mu)^2}{\rho\varsigma^2 + k_x^2(\lambda+2\mu) + k_y^2\mu}$$

[6.27]

En la matriz anterior el determinante se obtiene fácilmente como el producto de los elementos de la diagonal de la matriz triangular superior. La ecuación característica queda de la siguiente manera:

$$|\mathbf{A} - \chi \mathbf{I}| = \frac{\varsigma}{\rho^2} \left[(\rho\varsigma^2 + k_x^2\mu + k_y^2(\lambda+2\mu)) (\rho\varsigma^2 + k_x^2(\lambda+2\mu) + k_y^2\mu) - k_x^2 k_y^2 (\lambda+\mu)^2 \right] = 0$$

[6.28]

Una de las 5 raíces de la ecuación anterior es evidente:

$$\varsigma = 0 \Rightarrow \chi_1 = -\delta$$

[6.29]

Los otros cuatro autovalores se obtienen a partir de la ecuación siguiente:

$$\left[(\rho\varsigma^2 + k_x^2\mu + k_y^2(\lambda+2\mu)) (\rho\varsigma^2 + k_x^2(\lambda+2\mu) + k_y^2\mu) - k_x^2 k_y^2 (\lambda+\mu)^2 \right] = 0$$

[6.30]

Llamando $\rho \zeta^2 = \Psi$, queda:

$$\psi^2 + \psi(k_x^2 + k_y^2)(\lambda + 3\mu) + (k_x^2 + k_y^2)^2 \mu(\lambda + 2\mu) = 0 \quad [6.31]$$

Los 4 autovalores restantes son los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = -(k_x^2 + k_y^2)\mu \\ \psi_2 = -(k_x^2 + k_y^2)(\lambda + 2\mu) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_2 = -\delta + i\sqrt{(k_x^2 + k_y^2)\frac{\mu}{\rho}} \\ \chi_3 = -\delta - i\sqrt{(k_x^2 + k_y^2)\frac{\mu}{\rho}} \\ \chi_4 = -\delta + i\sqrt{(k_x^2 + k_y^2)\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \\ \chi_5 = -\delta + i\sqrt{(k_x^2 + k_y^2)\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \end{array} \right. \quad [6.32]$$

Al ser negativa la parte real de todos los autovalores, la estabilidad está garantizada.

El desarrollo es análogo para el PML en dirección y .

En las esquinas del modelo, donde se intersectan el PML en la dirección x y el PML en la dirección y , se superponen las propiedades de ambos PML.

6.2. Esquema en D.F.G. para los Perfectly Matched Layers

En este apartado se deducirán las expresiones en diferencias finitas para los contornos absorbentes (Perfectly Matched Layers- PML), tanto para la formulación en tensión-velocidad como en desplazamientos.

6.2.1. Formulación en tensión-velocidad

Según se indicó al desarrollar la formulación del esquema en diferencias finitas generalizadas para la ecuación de ondas, las derivadas parciales espaciales de las componentes de la tensión se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \sigma_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} = -m_1^0 n \sigma_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n \sigma_x^j$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} = -m_1^0 n \tau_{xy}^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n \tau_{xy}^j$$

$$\frac{\partial \sigma_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} = -m_2^0 n\sigma_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n\sigma_y^j$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} = -m_2^0 n\tau_{xy}^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n\tau_{xy}^j$$

[6.33]

Las derivadas espaciales de la variable velocidad también se pueden escribir análogamente:

$$\frac{\partial v_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} = -m_1^0 n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n v_x^j$$

$$\frac{\partial v_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} = -m_2^0 n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n v_x^j$$

$$\frac{\partial v_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x} = -m_1^0 n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n v_y^j$$

$$\frac{\partial v_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y} = -m_2^0 n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n v_y^j$$

[6.34]

Las derivadas temporales de las variables velocidad y tensión se pueden expresar mediante las siguientes ecuaciones (esquema clásico de diferencias finitas):

$$\frac{\partial v_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{n^{+1}v_x^0 - n v_x^0}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial v_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{n^{+1}v_y^0 - n v_y^0}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial \sigma_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{n^{+1}\sigma_x^0 - n\sigma_x^0}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial \sigma_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{n^{+1}\sigma_y^0 - n\sigma_y^0}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} = \frac{n^{+1}\tau_{xy}^0 - n\tau_{xy}^0}{\Delta t}$$

[6.35]

A continuación se sustituyen las expresiones anteriores en las 5 ecuaciones obtenidas en tensión y velocidad correspondientes al dominio P.M.L.:

$$1) \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = (\lambda + 2 G) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} - \delta \sigma_x \quad [6.36]$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas espaciales y temporales, se obtiene:

$$\frac{n^{+1}\sigma_x^0 - n\sigma_x^0}{\Delta t} = (\lambda + 2 G) \left(-m_1^0 n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n v_x^j \right) + \lambda \left(-m_2^0 n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n v_y^j \right) - \delta n \sigma_x^0 \quad [6.37]$$

Despejando, queda:

$$n^{+1}\sigma_x^0 = (1 - \delta \Delta t) n \sigma_x^0 + \Delta t \left[(\lambda + 2 G) \left(-m_1^0 n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n v_x^j \right) + \lambda \left(-m_2^0 n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n v_y^j \right) \right] \quad [6.38]$$

$$2) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = G \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \delta \tau_{xy} \quad [6.39]$$

Al sustituir las expresiones de las derivadas espaciales y temporales, resulta:

$$\frac{n^{+1}\tau_{xy}^0 - n\tau_{xy}^0}{\Delta t} = G \left(-m_2^0 n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n v_x^j - m_1^0 n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n v_y^j \right) - \delta n \tau_{xy}^0 \quad [6.40]$$

Despejando, se obtiene:

$$n^{+1}\tau_{xy}^0 = (1 - \delta \Delta t) n \tau_{xy}^0 + \Delta t G \left(-m_2^0 n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j n v_x^j - m_1^0 n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j n v_y^j \right) \quad [6.41]$$

$$3) \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2 G) \frac{\partial v_y}{\partial y} - \delta \sigma_y \quad [6.42]$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas espaciales y temporales, se obtiene:

$$\frac{{}^{n+1}\sigma_y^0 - {}^n\sigma_y^0}{\Delta t} = \lambda \left(-m_1^0 {}^n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n v_x^j \right) + (\lambda + 2G) \left(-m_2^0 {}^n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n v_y^j \right) - \delta {}^n \sigma_y^0 \quad [6.43]$$

Despejando, queda:

$${}^{n+1}\sigma_y^0 = (1 - \delta \Delta t) {}^n \sigma_y^0 + \Delta t \left[\lambda \left(-m_1^0 {}^n v_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n v_x^j \right) + (\lambda + 2G) \left(-m_2^0 {}^n v_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n v_y^j \right) \right] \quad [6.44]$$

$$4) \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) - \delta v_x \quad [6.45]$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas espaciales y temporales, se puede obtener:

$$\frac{{}^{n+1}v_x^0 - {}^n v_x^0}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \left(-m_1^0 {}^n \sigma_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n \sigma_x^j - m_2^0 {}^n \tau_{xy}^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n \tau_{xy}^j \right) - \delta {}^n v_x^0 \quad [6.46]$$

Despejando, resulta:

$${}^{n+1}v_x^0 = (1 - \delta \Delta t) {}^n v_x^0 + \frac{\Delta t}{\rho} \left(-m_1^0 {}^n \sigma_x^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n \sigma_x^j - m_2^0 {}^n \tau_{xy}^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n \tau_{xy}^j \right) \quad [6.47]$$

$$5) \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) - \delta v_y \quad [6.48]$$

Al sustituir las expresiones de las derivadas espaciales y temporales, resulta:

$$\frac{{}^{n+1}v_y^0 - {}^n v_y^0}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \left(-m_1^0 {}^n \tau_{xy}^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n \tau_{xy}^j - m_2^0 {}^n \sigma_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n \sigma_y^j \right) - \delta {}^n v_y^0 \quad [6.49]$$

Despejando, se obtiene:

$${}^{n+1}v_y^0 = (1 - \delta \Delta t) {}^n v_y^0 + \frac{\Delta t}{\rho} \left(-m_1^0 {}^n \tau_{xy}^0 + \sum_{j=1}^N m_1^j {}^n \tau_{xy}^j - m_2^0 {}^n \sigma_y^0 + \sum_{j=1}^N m_2^j {}^n \sigma_y^j \right) \quad [6.50]$$

Estas 5 ecuaciones en diferencias finitas generalizadas se pueden escribir en notación abreviada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} n^{+1}\sigma_{ij}^0 &= (1 - \delta \Delta t) n\sigma_{ij}^0 + \Delta t \left[\lambda \delta_{ij} \left(-m_k^0 n v_k^0 + \sum_{l=1}^N m_k^l n v_k^l \right) + G \left(-m_i^0 n v_j^0 + \sum_{l=1}^N m_i^l n v_j^l - m_j^0 n v_i^0 + \sum_{l=1}^N m_j^l n v_i^l \right) \right] \\ n^{+1}v_i^0 &= (1 - \delta \Delta t) n v_i^0 + \frac{\Delta t}{\rho} \left(-m_j^0 n \sigma_{ij}^0 + \sum_{l=1}^N m_j^l n \sigma_{ij}^l \right) \end{aligned} \quad [6.51]$$

6.2.2. Formulación en desplazamientos

La formulación en desplazamientos se puede obtener a partir de las 5 ecuaciones en tensión-velocidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= (\lambda + 2 G) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2 G) \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} &= G \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

[6.52]

Se definen las siguientes variables auxiliares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x}{\partial t} &= v_x & \frac{\partial U_y}{\partial t} &= v_y \\ \frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial t} &= \sigma_x & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} &= \tau_{xy} & \frac{\partial \gamma_{yy}}{\partial t} &= \sigma_y \end{aligned}$$

[6.53]

Al sustituir las variables citadas, las 5 ecuaciones anteriores quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yy}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2G) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{yy}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial U_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} &= G \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

[6.54]

Las funciones anteriores pueden descomponerse en funciones armónicas de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}(x, y, t) &= \gamma'_{xx}(x, y) e^{i\omega t} \\ \gamma_{yy}(x, y, t) &= \gamma'_{yy}(x, y) e^{i\omega t} \\ \gamma_{xy}(x, y, t) &= \gamma'_{xy}(x, y) e^{i\omega t} \\ U_x(x, y, t) &= U'_x(x, y) e^{i\omega t} \\ U_y(x, y, t) &= U'_y(x, y) e^{i\omega t}\end{aligned}$$

[6.55]

Como se ha mencionado anteriormente, la ecuación de ondas en elastodinámica se puede resolver en el dominio PML efectuando las transformaciones de las derivadas parciales siguientes:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\delta_y(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

[6.56]

La función $\delta_x(x)$ corresponde a la función de atenuación de la onda en el dominio PML. Adoptando $\delta_x(x) = \delta_y(x) = \delta$ y sustituyendo las derivadas anteriores, resultan las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) = -i\omega U_x$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial \gamma_{yy}}{\partial y} \right) = -i\omega U_y$$

$$\frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial t} = \frac{(\lambda + 2G)}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\lambda}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial U_y}{\partial y} = -i\omega \gamma_{xx}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} = \frac{G}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{G}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial U_y}{\partial x} = -i\omega \gamma_{xy}$$

$$\frac{\partial \gamma_{yy}}{\partial t} = \frac{\lambda}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{(\lambda + 2G)}{1 + i \frac{\delta}{\omega}} \frac{\partial U_y}{\partial y} = -i\omega \gamma_{yy}$$

[6.57]

Operando, resulta:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) = -i\omega U_x \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = -i\omega U_x + \delta U_x$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yy}}{\partial y} \right) = -i\omega U_y \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = -i\omega U_y + \delta U_y$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_y}{\partial y} = -i\omega \gamma_{xx} \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = -i\omega \gamma_{xx} + \delta \gamma_{xx}$$

$$G \frac{\partial U_x}{\partial y} + G \frac{\partial U_y}{\partial x} = -i\omega \gamma_{xy} \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = -i\omega \gamma_{xy} + \delta \gamma_{xy}$$

$$\lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial U_y}{\partial y} = -i\omega \gamma_{yy} \left(1 + i \frac{\delta}{\omega} \right) = -i\omega \gamma_{yy} + \delta \gamma_{yy}$$

[6.58]

Finalmente, volviendo al dominio del tiempo queda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_x}{\partial t} &= -i\omega U_x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) - \delta U_x \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} &= -i\omega U_y = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yy}}{\partial y} \right) - \delta U_y \\ \frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial t} &= -i\omega \gamma_{xx} = (\lambda + 2G) \frac{\partial U_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U_y}{\partial y} - \delta \gamma_{xx} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} &= -i\omega \gamma_{xy} = G \frac{\partial U_x}{\partial y} + G \frac{\partial U_y}{\partial x} - \delta \gamma_{xy} \\ \frac{\partial \gamma_{yy}}{\partial t} &= -i\omega \gamma_{yy} = \lambda \frac{\partial U_x}{\partial x} + (\lambda + 2G) \frac{\partial U_y}{\partial y} - \delta \gamma_{yy}\end{aligned}$$

[6.59]

A partir de las dos primeras ecuaciones se puede escribir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{xx}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial t} \right) - \delta \frac{\partial U_x}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \gamma_{yy}}{\partial y \partial t} \right) - \delta \frac{\partial U_y}{\partial t}\end{aligned}$$

[6.60]

Sustituyendo las tres ecuaciones restantes en las dos ecuaciones obtenidas, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} - \delta \frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial x} + G \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} - \delta \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right] - \delta \frac{\partial U_x}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \left[G \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} - \delta \frac{\partial \gamma_{yy}}{\partial y} \right] - \delta \frac{\partial U_y}{\partial t}\end{aligned}$$

[6.61]

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} &= \rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + \delta U_x \right) \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yy}}{\partial y} &= \rho \left(\frac{\partial U_y}{\partial t} + \delta U_y \right)\end{aligned}$$

[6.62]

Se puede escribir:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} + 2 \delta \rho \frac{\partial U_x}{\partial t} &= (\lambda + 2 G) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} - \rho \delta^2 U_x \\ \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} + 2 \delta \rho \frac{\partial U_y}{\partial t} &= G \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + (\lambda + 2 G) \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} - \rho \delta^2 U_y \end{aligned} \quad [6.63]$$

Estas dos ecuaciones se pueden escribir en notación abreviada de la siguiente manera:

$$\rho U_{i,tt} + 2 \delta \rho U_{i,t} = (\lambda + G) U_{j,ji} + G U_{i,jj} - \rho \delta^2 U_i \quad [6.64]$$

6.2.3. Esquema en D.F.G. para la formulación de P.M.L en desplazamientos

Una vez obtenida la formulación en desplazamientos para los Perfectly Matched Layers, se puede obtener el esquema en Diferencias Finitas Generalizadas a partir de las expresiones de las siguientes derivadas parciales espaciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x^2} &= -m_{11}^0 \ ^n U_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j \ ^n U_x^j \\ \frac{\partial^2 U_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y^2} &= -m_{22}^0 \ ^n U_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j \ ^n U_x^j \\ \frac{\partial^2 U_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x \partial y} &= -m_{12}^0 \ ^n U_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j \ ^n U_x^j \\ \frac{\partial^2 U_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x^2} &= -m_{11}^0 \ ^n U_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j \ ^n U_y^j \\ \frac{\partial^2 U_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y^2} &= -m_{22}^0 \ ^n U_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j \ ^n U_y^j \\ \frac{\partial^2 U_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x \partial y} &= -m_{12}^0 \ ^n U_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j \ ^n U_y^j \end{aligned} \quad [6.65]$$

Las 6 derivadas espaciales anteriores se pueden expresar en notación abreviada de la forma siguiente:

$$[U_{i,jk}^0]_{t=n\Delta t} = -m_{jk}^0 \ ^nU_i^0 + \sum_{l=1}^N m_{jk}^l \ ^nU_i^l \quad [6.66]$$

El superíndice n indica el paso de tiempo; los superíndices 0 y l se refieren al nodo central y al resto de los nodos de la estrella, respectivamente, y N es el número de nodos de la estrella. Los coeficientes m_{jk}^0 multiplican al valor aproximado de la función U en el nodo central de la estrella ($^nU_i^0$) en el instante de tiempo $t=n\Delta t$. Los coeficientes m_{jk}^l multiplican al valor aproximado de la función U en los restantes nodos de la estrella ($^nU_i^l$) en el instante de tiempo $t=n\Delta t$.

Las derivadas temporales correspondientes se pueden obtener a partir de las siguientes expresiones (esquema de diferencias finitas centradas):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} &= \frac{{}^{n+1}U_x^0 - {}^{n-1}U_x^0}{2 \Delta t} \\ \frac{\partial U_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} &= \frac{{}^{n+1}U_y^0 - {}^{n-1}U_y^0}{2 \Delta t} \\ \frac{\partial^2 U_x(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t^2} &= \frac{{}^{n+1}U_x^0 - 2 \ ^nU_x^0 + {}^{n-1}U_x^0}{(\Delta t)^2} \\ \frac{\partial^2 U_y(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t^2} &= \frac{{}^{n+1}U_y^0 - 2 \ ^nU_y^0 + {}^{n-1}U_y^0}{(\Delta t)^2} \end{aligned} \quad [6.67]$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas parciales en las dos ecuaciones obtenidas en el apartado anterior [6.63], resulta:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} + 2 \delta \rho \frac{\partial U_x}{\partial t} &= (\lambda + 2 G) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} - \rho \delta^2 U_x \\ \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} + 2 \delta \rho \frac{\partial U_y}{\partial t} &= G \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + (\lambda + 2 G) \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} - \rho \delta^2 U_y \end{aligned} \quad [6.68]$$

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{{}^{n+1}U_x^0 - 2 {}^nU_x^0 + {}^{n-1}U_x^0}{(\Delta t)^2} + 2 \delta \rho \frac{{}^{n+1}U_x^0 - {}^{n-1}U_x^0}{2 \Delta t} = \\
 & = (\lambda + 2 G) \left(-m_{11}^0 {}^nU_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j {}^nU_x^j \right) + G \left(-m_{22}^0 {}^nU_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j {}^nU_x^j \right) + \\
 & \quad + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 {}^nU_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j {}^nU_y^j \right) - \rho \delta^2 {}^nU_x^0
 \end{aligned}$$

[6.69]

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{{}^{n+1}U_y^0 - 2 {}^nU_y^0 + {}^{n-1}U_y^0}{(\Delta t)^2} + 2 \delta \rho \frac{{}^{n+1}U_y^0 - {}^{n-1}U_y^0}{2 \Delta t} = \\
 & = G \left(-m_{11}^0 {}^nU_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j {}^nU_y^j \right) + (\lambda + 2 G) \left(-m_{22}^0 {}^nU_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j {}^nU_y^j \right) + \\
 & \quad + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 {}^nU_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j {}^nU_x^j \right) - \rho \delta^2 {}^nU_y^0
 \end{aligned}$$

[6.70]

Despejando el valor de ${}^{n+1}U_x^0$ y ${}^{n+1}U_y^0$ se obtiene el esquema en D.F.G. siguiente:

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1}U_x^0 = & \frac{1}{1 + \delta \Delta t} \left\{ (2 - (\Delta t)^2 \delta^2) {}^nU_x^0 \right. \\
 & + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + 2 G) \left(-m_{11}^0 {}^nU_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j {}^nU_x^j \right) + \right. \\
 & \left. + G \left(-m_{22}^0 {}^nU_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j {}^nU_x^j \right) + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 {}^nU_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j {}^nU_y^j \right) \right] \\
 & \left. - (1 - \delta \Delta t) {}^{n-1}U_x^0 \right\}
 \end{aligned}$$

[6.71]

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1}U_y^0 = & \frac{1}{1 + \delta \Delta t} \left\{ (2 - (\Delta t)^2 \delta^2) {}^n U_y^0 \right. \\
 & + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(G) \left(-m_{11}^0 {}^n U_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{11}^j {}^n U_y^j \right) + \right. \\
 & + (\lambda + 2G) \left(-m_{22}^0 {}^n U_y^0 + \sum_{j=1}^N m_{22}^j {}^n U_y^j \right) \\
 & \left. \left. + (\lambda + G) \left(-m_{12}^0 {}^n U_x^0 + \sum_{j=1}^N m_{12}^j {}^n U_x^j \right) \right] - (1 - \delta \Delta t) {}^{n-1} U_y^0 \right\}
 \end{aligned}$$

[6.72]

Estas dos expresiones pueden resumirse en la siguiente ecuación escrita en notación abreviada:

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1}U_i^0 = & \frac{1}{1 + \delta \Delta t} \left\{ (2 - (\Delta t)^2 \delta^2) {}^n U_i^0 \right. \\
 & + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left[(\lambda + G) \left(-m_{ji}^0 {}^n U_j^0 + \sum_{l=1}^N m_{ji}^l {}^n U_j^l \right) + \right. \\
 & \left. \left. + G \left(-m_{jj}^0 {}^n U_i^0 + \sum_{l=1}^N m_{jj}^l {}^n U_i^l \right) \right] - (1 - \delta \Delta t) {}^{n-1} U_i^0 \right\} + \Theta[(\Delta t)^2,]
 \end{aligned}$$

[6.73]

6.3. Estabilidad del esquema en D.F.G. para los P.M.L.

En este apartado se estudia la estabilidad del esquema en diferencias finitas generalizadas para la zona de P.M.L., obtenido en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}u_i^0 &= \frac{1}{1 + \delta\Delta t} \left[(2 - \delta^2(\Delta t)^2) {}^n u_i^0 + \frac{(\Delta t)^2}{\rho} [(\lambda + G)(-m_{ji}^0 {}^n u_j^0 + \sum_{l=1}^N m_{ji}^l {}^n u_j^l) + \right. \\ &\left. + G(-m_{kk}^0 {}^n u_i^0 + \sum_{l=1}^N m_{kk}^l {}^n u_i^l)] - (1 - \delta\Delta t) {}^{n-1} u_i^0 \right] + \Theta[\Delta t^2, (h_i)^p] \end{aligned} \quad [6.74]$$

Análogamente al estudio de estabilidad del esquema en Diferencias Finitas Generalizadas de la zona lineal del modelo, este análisis del esquema en D.F.G. para la zona de PML se lleva a cabo realizando una descomposición armónica de la solución aproximada en los nodos de la malla en un instante de tiempo t .

$${}^n u_x^0 = A \xi^n e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0}; \quad {}^n u_x^j = A \xi^n e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j}; \quad {}^n u_y^0 = B \xi^n e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0}; \quad {}^n u_y^j = B \xi^n e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j} \quad \forall j = 1, \dots, N \quad [6.75]$$

Donde N es el número de nodos de la estrella y ,

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_j; \quad \xi = e^{-i\omega\Delta t}; \quad \mathbf{k} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \end{Bmatrix} = \kappa \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad [6.76]$$

La amplitud de \mathbf{k} es el número de onda, ξ es el factor de amplificación cuyo valor determinará la condición de estabilidad y ω es la frecuencia angular.

Sustituyendo los valores de las descomposiciones armónicas en la expresión del esquema en diferencias finitas generalizadas para la zona de P.M.L., resulta:

$$\begin{cases} A\xi(1+\delta\Delta t) = (2-\delta^2(\Delta t)^2)A - \frac{A}{\xi}(1-\delta\Delta t) + (\Delta t)^2[\alpha^2(-Am_0 + A\sum_1^N m_j e^{ik^T h_j}) + \\ \beta^2(-A\eta_0 + A\sum_1^N \eta_j e^{ik^T h_j}) + (\alpha^2 - \beta^2)(-B\zeta_0 + B\sum_1^N \zeta_j e^{ik^T h_j})] \\ B\xi(1+\delta\Delta t) = (2-\delta^2(\Delta t)^2)B - \frac{B}{\xi}(1-\delta\Delta t) + (\Delta t)^2[\beta^2(-Bm_0 + B\sum_1^N m_j e^{ik^T h_j}) + \\ \alpha^2(-B\eta_0 + B\sum_1^N \eta_j e^{ik^T h_j}) + (\alpha^2 - \beta^2)(-A\zeta_0 + A\sum_1^N \zeta_j e^{ik^T h_j})] \end{cases}$$

[6.77]

Donde:

$$m_0 = \sum_1^N m_j; \quad \eta_0 = \sum_1^N \eta_j; \quad \zeta_0 = \sum_1^N \zeta_j$$

y sabiendo que,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

[6.78]

Resulta:

$$\begin{cases} A \left[\xi(1+\delta\Delta t) + \xi^{-1}(1-\delta\Delta t) - (2-\delta^2(\Delta t)^2) + (\Delta t)^2 \sum_1^N (\alpha^2 m_j + \beta^2 \eta_j) \left(1 - e^{ik^T h_j} \right) \right] \\ = -B(\alpha^2 - \beta^2)(\Delta t)^2 \sum_1^N \zeta_j \left(1 - e^{ik^T h_j} \right) \\ B \left[\xi(1+\delta\Delta t) + \xi^{-1}(1-\delta\Delta t) - (2-\delta^2(\Delta t)^2) + (\Delta t)^2 \sum_1^N (\beta^2 m_j + \alpha^2 \eta_j) \left(1 - e^{ik^T h_j} \right) \right] \\ = -A(\alpha^2 - \beta^2)(\Delta t)^2 \sum_1^N \zeta_j \left(1 - e^{ik^T h_j} \right) \end{cases}$$

[6.79]

Despejando el valor de B de la segunda ecuación e introduciéndolo en la primera ecuación, resulta:

$$\begin{aligned} & \left[\xi(1 + \Delta t) + \xi^{-1}(1 - \Delta t) - (2 - \delta^2(\Delta t)^2) + (\Delta t)^2 \sum_1^N (\alpha^2 m_j + \beta^2 \eta_j) \left(1 - e^{ik^T h_j} \right) \right] \times \\ & \left[\xi(1 + \Delta t) + \xi^{-1}(1 - \Delta t) - (2 - \delta^2(\Delta t)^2) + (\Delta t)^2 \sum_1^N (\beta^2 m_j + \alpha^2 \eta_j) \left(1 - e^{ik^T h_j} \right) \right] = \\ & = \left[(\alpha^2 - \beta^2)(\Delta t)^2 \sum_1^N \zeta_j \left(1 - e^{ik^T h_j} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

[6.80]

Sustituyendo la expresión $\xi = e^{i\omega\Delta t}$ en la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned} & \left[2\cos\omega\Delta t + 2i\delta\Delta t\sin\omega\Delta t - (2 - \delta^2(\Delta t)^2) + (\Delta t)^2 \sum_1^N (\alpha^2 m_j + \beta^2 \eta_j) \left(1 - e^{ik^T h_j} \right) \right] \times \\ & \left[2\cos\omega\Delta t + 2i\delta\Delta t\sin\omega\Delta t - (2 - \delta^2(\Delta t)^2) + (\Delta t)^2 \sum_1^N (\beta^2 m_j + \alpha^2 \eta_j) \left(1 - e^{ik^T h_j} \right) \right] = \\ & (\Delta t)^4 (\alpha^2 - \beta^2)^2 \left[\sum_1^N \zeta_j \left(1 - e^{ik^T h_j} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

[6.81]

Operando, se obtienen las siguientes condiciones:

Parte Real

$$\begin{aligned} & \left[2\cos\omega\Delta t - (2 - \delta^2(\Delta t)^2) + (\Delta t)^2 \sum_1^N (\alpha^2 m_j + \beta^2 \eta_j) (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] \times \\ & \left[2\cos\omega\Delta t - (2 - \delta^2(\Delta t)^2) + (\Delta t)^2 \sum_1^N (\beta^2 m_j + \alpha^2 \eta_j) (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] - \\ & \left[2\delta\Delta t\sin\omega\Delta t - (\Delta t)^2 \sum_1^N (\alpha^2 m_j + \beta^2 \eta_j) \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \right] \times \\ & \left[2\delta\Delta t\sin\omega\Delta t - (\Delta t)^2 \sum_1^N (\beta^2 m_j + \alpha^2 \eta_j) \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \right] \\ & - (\Delta t)^4 (\alpha^2 - \beta^2)^2 \left[\left(\sum_1^N \zeta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right)^2 - \left(\sum_1^N \zeta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \right)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

[6.82]

Parte Imaginaria

$$\begin{aligned} & \left[2\delta\Delta t \sin \omega\Delta t - (\Delta t)^2 \sum_1^N (\alpha^2 m_j + \beta^2 \eta_j) \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \right] \times \\ & \left[2\cos \omega\Delta t - \left(2 - \delta^2 (\Delta t)^2 \right) + (\Delta t)^2 \sum_1^N (\beta^2 m_j + \alpha^2 \eta_j) (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \\ & \left[2\delta\Delta t \sin \omega\Delta t - (\Delta t)^2 \sum_1^N (\beta^2 m_j + \alpha^2 \eta_j) \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \right] \times \\ & \left[2\cos \omega\Delta t - \left(2 - \delta^2 (\Delta t)^2 \right) + (\Delta t)^2 \sum_1^N (\alpha^2 m_j + \beta^2 \eta_j) (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right] + \\ & (\Delta t)^4 (\alpha^2 - \beta^2)^2 \left[\left(\sum_1^N \zeta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right) \left(\sum_1^N \zeta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

[6.83]

Operando con la ecuación anterior y eliminando términos con criterios conservadores, se obtienen las siguientes condiciones de estabilidad de la estrella:

$$\begin{cases} 0 < \delta\Delta t < 1 \\ \Delta t < \sqrt{\frac{4}{(\alpha^2 + \beta^2)[(|m_0| + |\eta_0|) + \sqrt{(m_0 + \eta_0)^2 + \zeta_0^2 + \delta^2 \Xi^2}]}]} \end{cases}$$

[6.84]

Donde

$$\Xi = \frac{\alpha^2 \beta^2 (m_0 + \eta_0)^2 + m_0 \eta_0 (\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 (m_0 + \eta_0)}$$

Esta condición de estabilidad es un 5% menor que en el caso elástico.

6.4. Análisis de los contornos perfectamente sincronizados

En este apartado se analiza la influencia del parámetro σ , correspondiente a la ecuación que representa la función de atenuación δ considerada en el dominio PML:

$$\delta_x(x) = \delta_y(y) = \delta(x) = \delta = \frac{1}{\Delta t} \sigma \left(\frac{x_i^F - x_i^I}{x_i^F - x_i^I} \right)^Q \quad [6.85]$$

Donde x_i^I y x_i^F corresponden a las coordenadas inicial y final del dominio PML, y el exponente Q adopta el valor 2.

En la figura siguiente se muestra el modelo empleado para analizar la mencionada influencia. Consiste en un modelo de un medio elástico semi-infinito con una superficie libre horizontal.

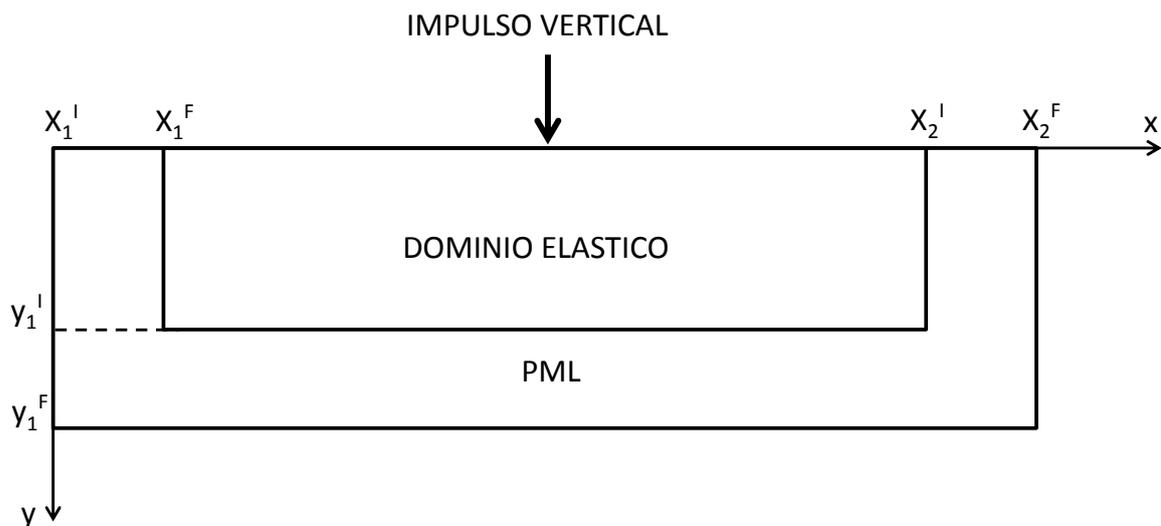


Figura 6-5. Modelo empleado en el análisis de PML

El dominio elástico del modelo queda delimitado como sigue:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 5; \ 0 \leq y \leq 1.5 \}$$

El dominio PML para simular un dominio infinito viene definido por:

$$\Pi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x < 0.5; \ 0 \leq y \leq 1.0 \}$$

$$\Pi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 4.5 < x \leq 5; \ 0 \leq y \leq 1.0 \}$$

$$\Pi_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 5; \ 1.0 < y \leq 1.5 \}$$

Se han definido adicionalmente las siguientes condiciones de contorno:

$$U_x(x, 1.5, t) = U_y(x, 1.5, t) = 0$$

$$U_x(0, y, t) = U_y(0, y, t) = 0$$

$$U_x(5, y, t) = U_y(5, y, t) = 0$$

$$\left. \frac{\partial U_x(x,y,t)}{\partial y} \right|_{(x,0)} = \left. \frac{\partial U_y(x,y,t)}{\partial y} \right|_{(x,0)} = 0 \quad 0 \leq x \leq 5$$

Se ha adoptado una malla regular de 19076 nodos, con un espaciado de 0.02. En la figura siguiente se muestra el mallado efectuado.

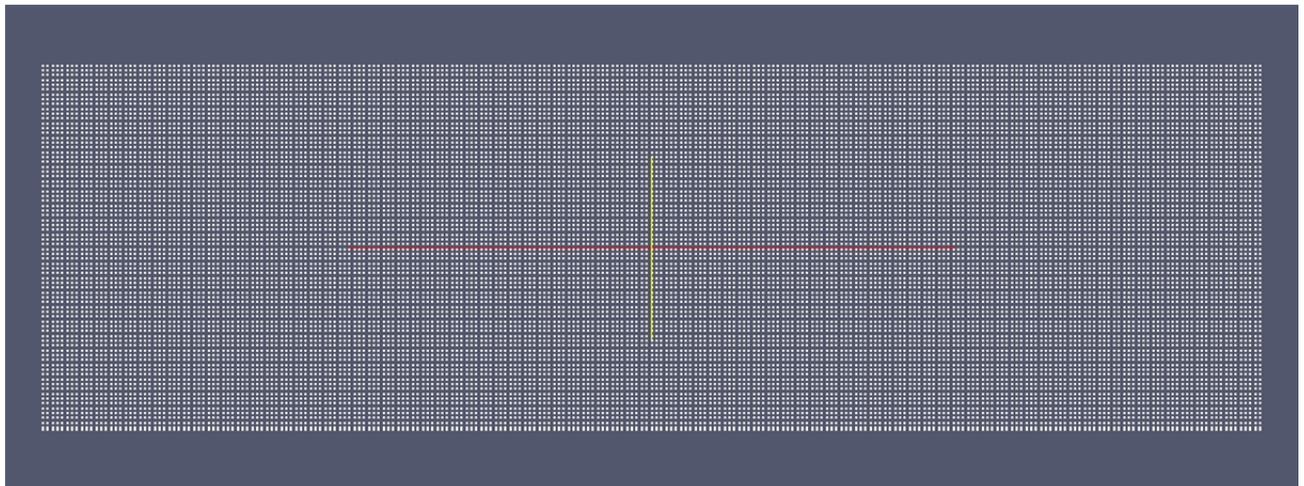


Figura 6-6. Malla de nodos adoptada

Se ha aplicado un pulso tipo escalón en la intersección entre el eje de simetría y el contorno superior (2.5, 0.0). A continuación se analizará la variación de la amplitud de onda en el interior del dominio PML en función del parámetro σ .

Los parámetros tensodeformacionales del dominio elástico son:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} = 2.0 \text{ N/m}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 1.0 \text{ N/m}^2$$

$$\rho (\text{densidad}) = 1.0 \text{ kg/m}^3$$

Las velocidades de propagación de las ondas P y S se pueden obtener a partir de las expresiones siguientes:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = 2 \text{ m/s}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 1 \text{ m/s}$$

El rango de valores considerado para el parámetro σ es el siguiente:

$$0.01 \leq \sigma \leq 0.15.$$

Cuanto mayor sea el valor del parámetro σ , más rápidamente se atenúa la amplitud de onda en el interior del dominio PML. No obstante, una atenuación muy brusca origina un fenómeno de reflexión mayor en la interfaz dominio elástico-PML (en la figura adjunta se muestra la reflexión citada).

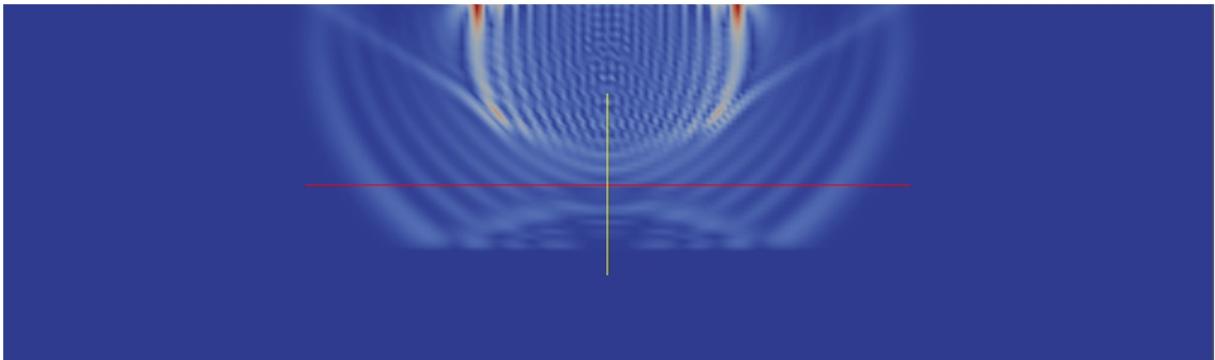


Figura 6-7. Reflexión producida en la interfaz dominio elástico-PML

Un valor bajo del parámetro σ reduce la reflexión mencionada, pero también disminuye el nivel de atenuación dentro del dominio PML (ver figura adjunta).

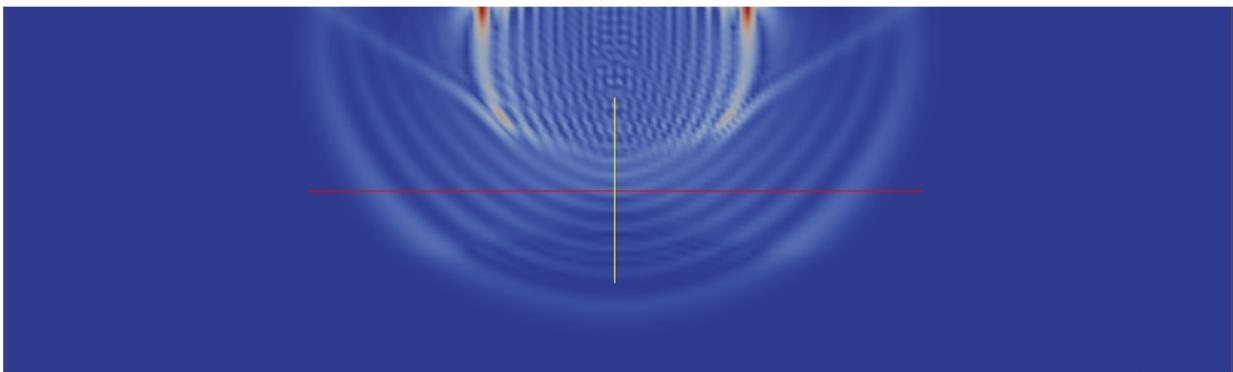


Figura 6-8. Un valor bajo de σ disminuye la reflexión en la interfaz dominio elástico-PML

Por tanto, es preciso alcanzar un equilibrio entre ambos fenómenos (reflexión de la onda en el interfaz dominio elástico-PML y grado de atenuación en el interior del dominio PML).

Con el fin de obtener el valor óptimo del parámetro σ , se ha analizado la evolución de la amplitud de onda en la dirección y , dado que el pulso se ha aplicado en dicha dirección.

El gráfico siguiente muestra la relación entre la amplitud de onda A_1 (amplitud de la onda en distintos puntos del eje y) y la inicial A_0 (amplitud inicial en el punto de aplicación del pulso) para distintos valores del parámetro σ . La interfaz dominio elástico-PML corresponde a $y=1.0$.

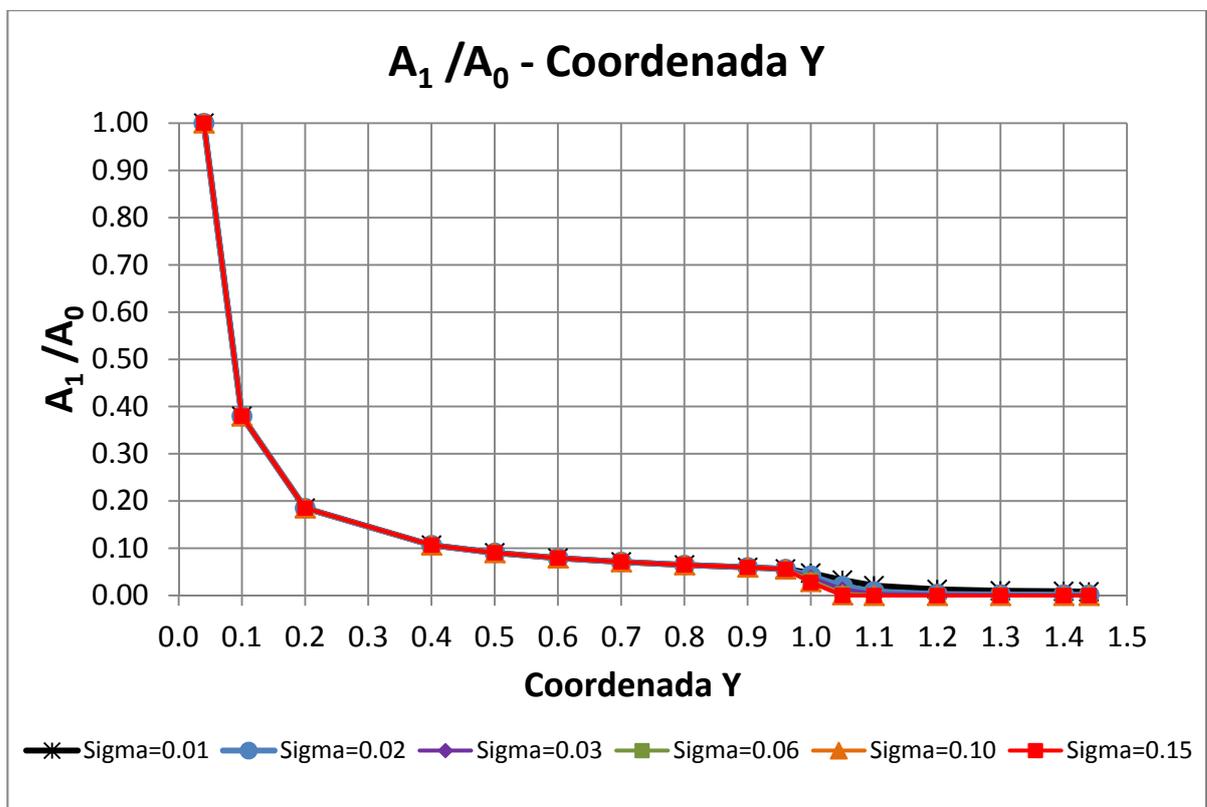


Figura 6-9. Relación entre la amplitud de onda A_1 y la amplitud inicial A_0

El siguiente gráfico muestra en detalle la relación A_1/A_0 dentro del dominio PML. Como puede apreciarse, se produce una atenuación significativa para valores $\sigma \geq 0.06$. Por el contrario, no se produce una atenuación completa para $\sigma = 0.01$, ya que la onda alcanza el límite del dominio PML, generándose una cierta reflexión.

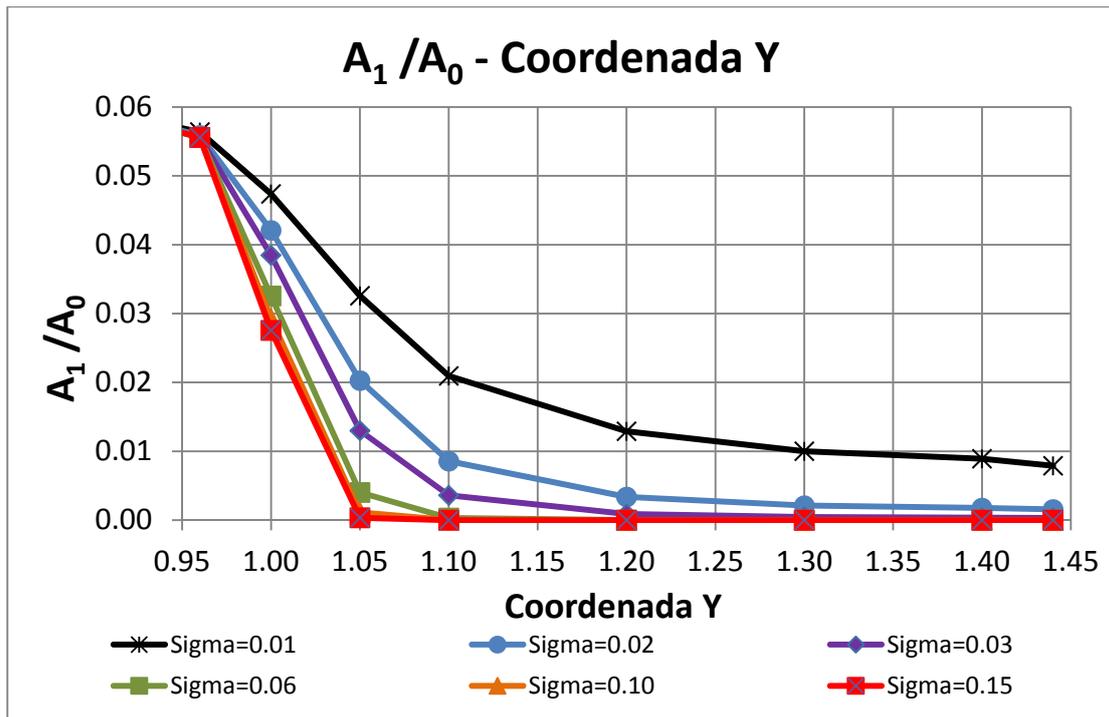


Figura 6-10. Relación entre la amplitud de onda A_1 y la amplitud inicial A_0 en el interior del PML

Adicionalmente, se ha analizado la relación entre la amplitud de la onda incidente A_1 y la de la reflejada A_2 para distintos valores del parámetro sigma (σ). Los dos gráficos siguientes muestran la amplitud de la onda incidente y reflejada para $\sigma=0,10$ y $\sigma=0,02$.

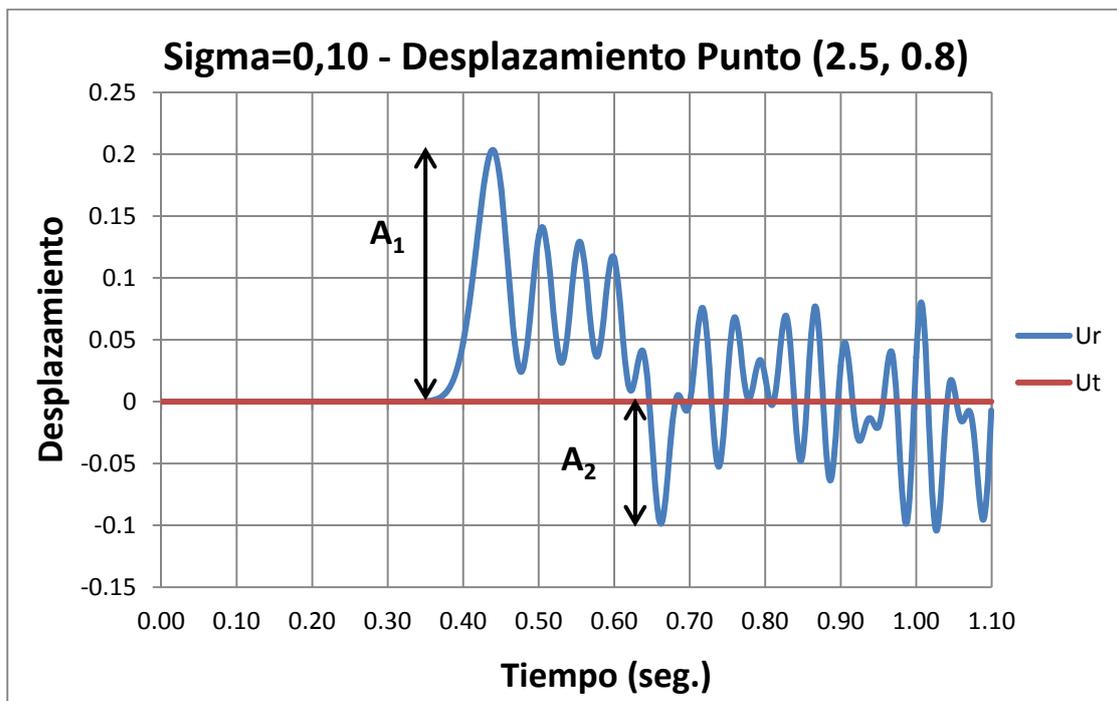


Figura 6-11. Relación entre la amplitud de onda incidente y la reflejada para el nodo (2.5,0.8) para un valor de $\sigma=0.1$

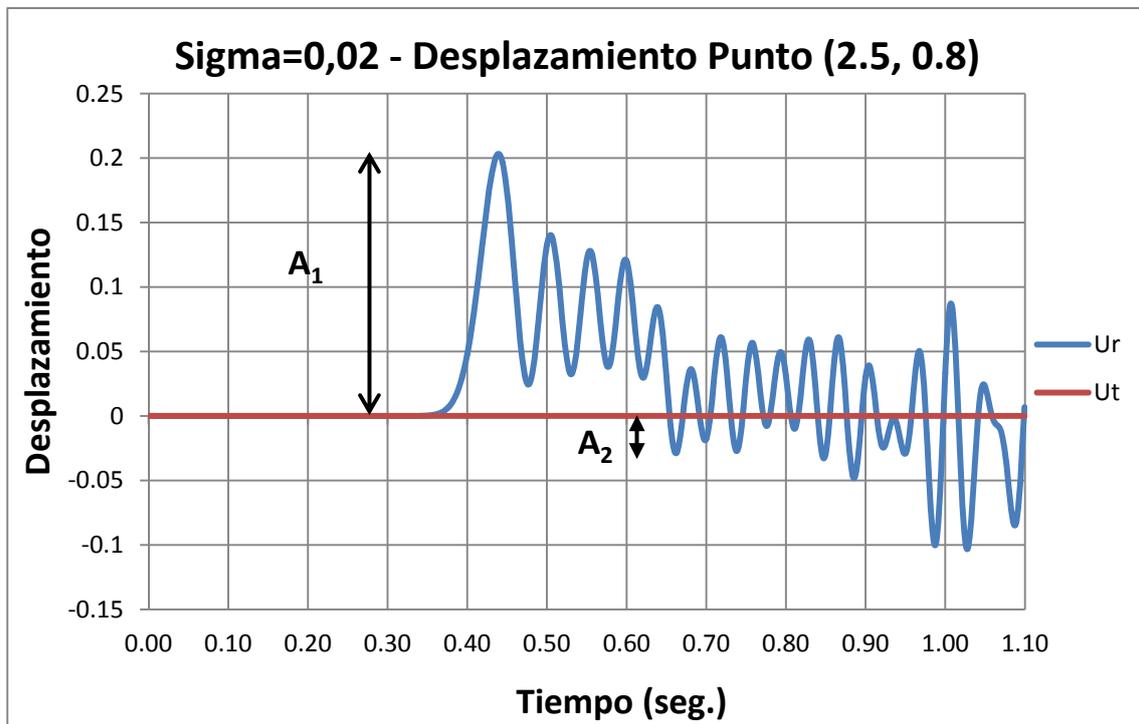


Figura 6-12. Relación entre la amplitud de onda incidente y la reflejada para el nodo (2.5,0.8) para un valor de $\sigma=0.02$

El gráfico siguiente muestra la relación entre la amplitud de la onda incidente y de la reflejada para 4 puntos distribuidos a lo largo del eje de simetría del modelo ($y=0.2$, $y=0.7$, $y=0.8$, $y=0.96$). Se aprecia que la relación A_2/A_1 no se reduce significativamente para valores de sigma (σ) superiores a 0,06. La mayor atenuación se produce para valores de sigma (σ) inferiores a 0,03.

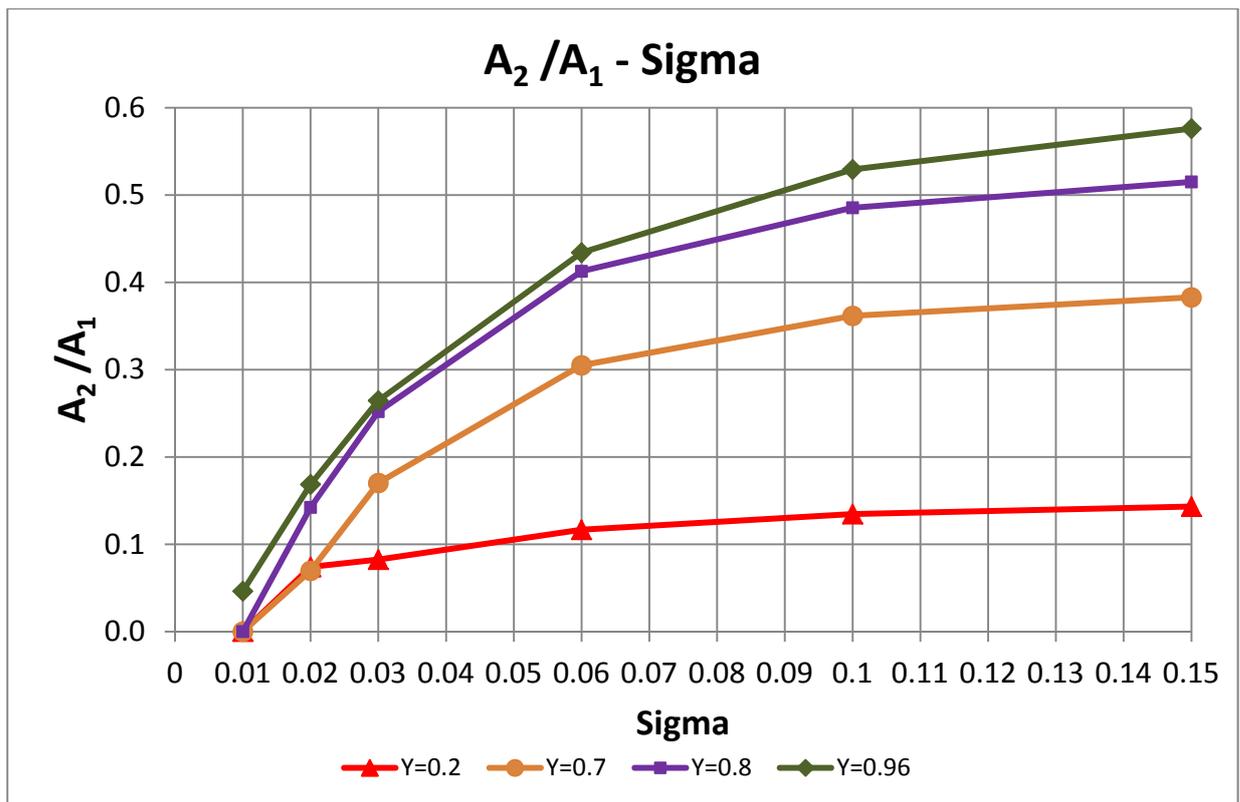


Figura 6-13. Relación entre la amplitud de la onda incidente y la reflejada en cuatro puntos del eje de simetría del modelo

A partir del análisis llevado a cabo (atenuación de la amplitud en el dominio PML y relación de amplitudes de las ondas incidente y reflejada), se puede concluir que el valor óptimo del parámetro sigma (σ) se sitúa en el intervalo 0.2- 0.3, para el PML considerado en el modelo.

Si la dimensión y del dominio PML fuese superior, se podría adoptar un valor inferior del parámetro sigma (σ), siempre que no se produjera ninguna reflexión en el límite externo del dominio PML.

6.5. Ejemplo Numérico

Con objeto de evaluar la viabilidad de la función de atenuación δ considerada en el dominio PML, se ha analizado un ejemplo que muestra la propagación de un impulso vertical en la superficie del terreno. La geometría del modelo se muestra en la figura 6-14.

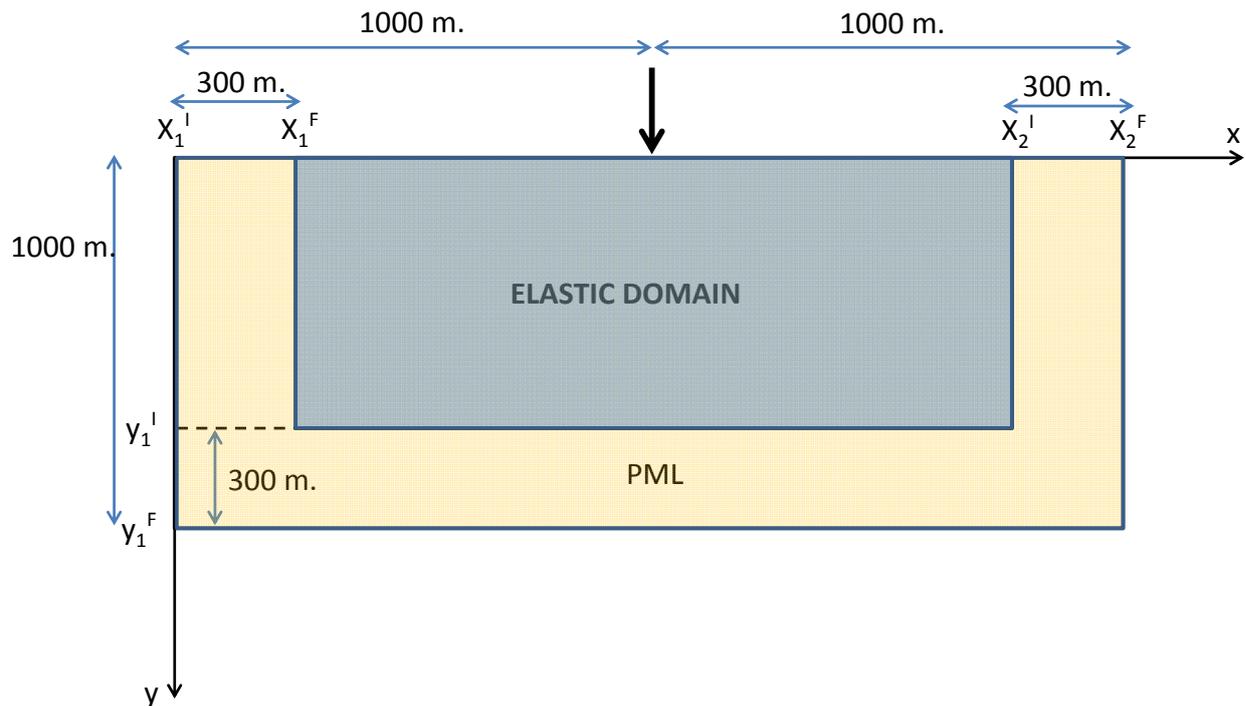


Figura 6-14. Geometría del modelo

El terreno se ha modelizado mediante una malla regular de 20301 nodos, con un espaciado de 10 entre nodos. Los parámetros elásticos del terreno adoptados son:

$$\begin{aligned}\lambda &= 2 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2 \\ G &= 5 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2 \\ \rho &= 2000 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

Con estos parámetros, la velocidad de las ondas P y S es la siguiente:

$$\begin{aligned}v_p &= 1225 \text{ m/s} \\ v_s &= 500 \text{ m/s}\end{aligned}$$

El paso de tiempo adoptado en el problema es de $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ seg.

El perfil de atenuación adoptado para el PML es el siguiente:

$$\delta_x(x) = \delta_y(x) = \delta(x) = \delta = \frac{1}{\Delta t} \sigma \left(\frac{x_i^F - x_i}{x_i^F - x_i^I} \right)^Q$$

Donde x_i^I y x_i^F corresponden a las coordenadas inicial y final del dominio PML, y el exponente Q adopta el valor 2. El parámetro sigma se ha considerado igual a 0.02.

En las figuras siguientes se muestra la deformación radial y tangencial (centrada en el punto donde se ha aplicado el impulso) para los instantes de tiempo $t=0.25$ seg., 0.50 seg. y 0.68 seg.

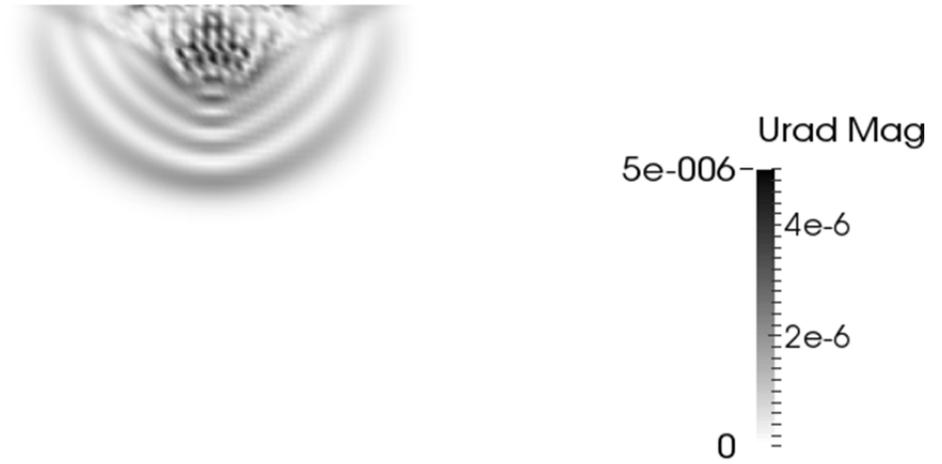


Figura 6-15. Deformación radial para $t=0.25$ seg.

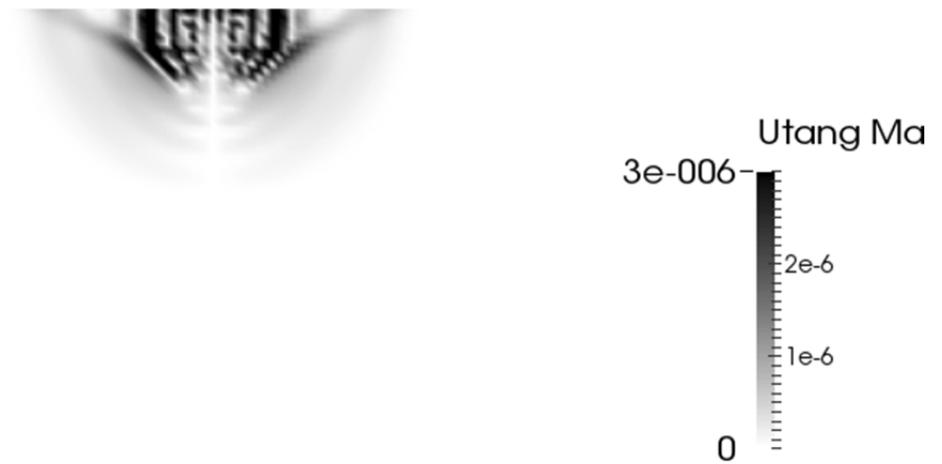


Figura 6-16. Deformación tangencial para $t=0.25$ seg.

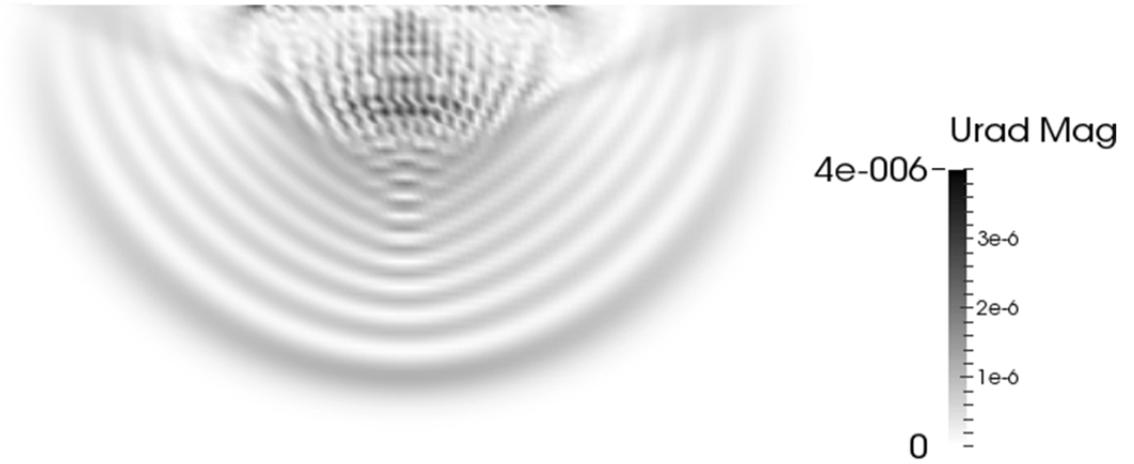


Figura 6-17. Deformación radial para t=0.50 seg.



Figura 6-18. Deformación tangencial para t=0.50 seg.

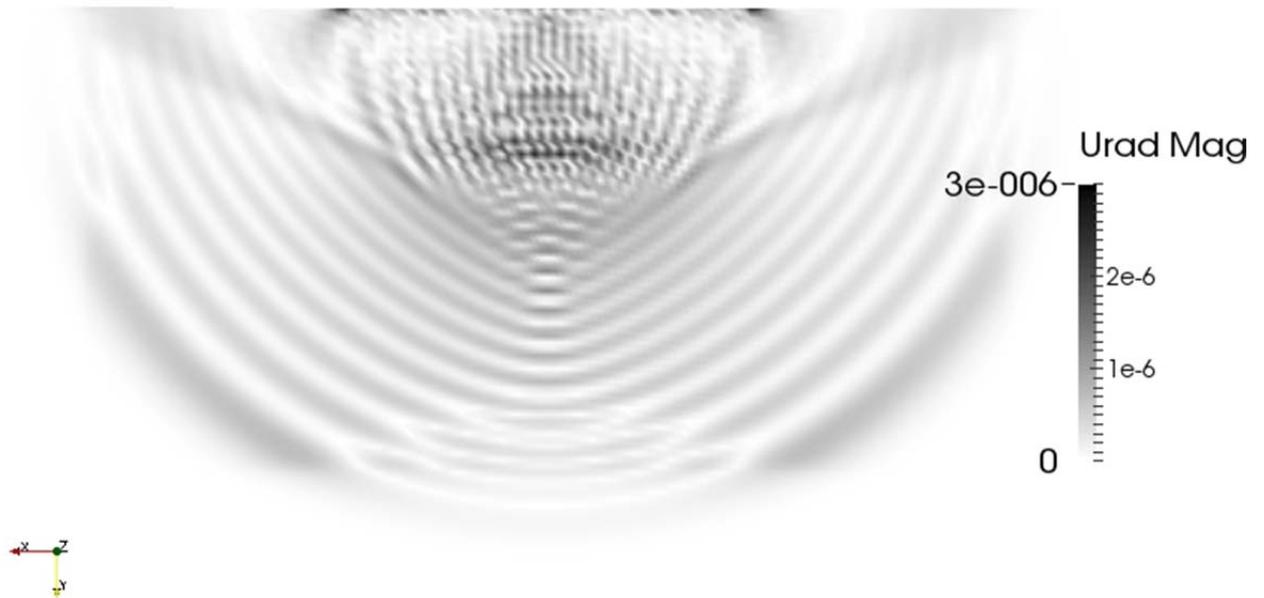


Figura 6-19. Deformación radial para $t=0.68$ seg.

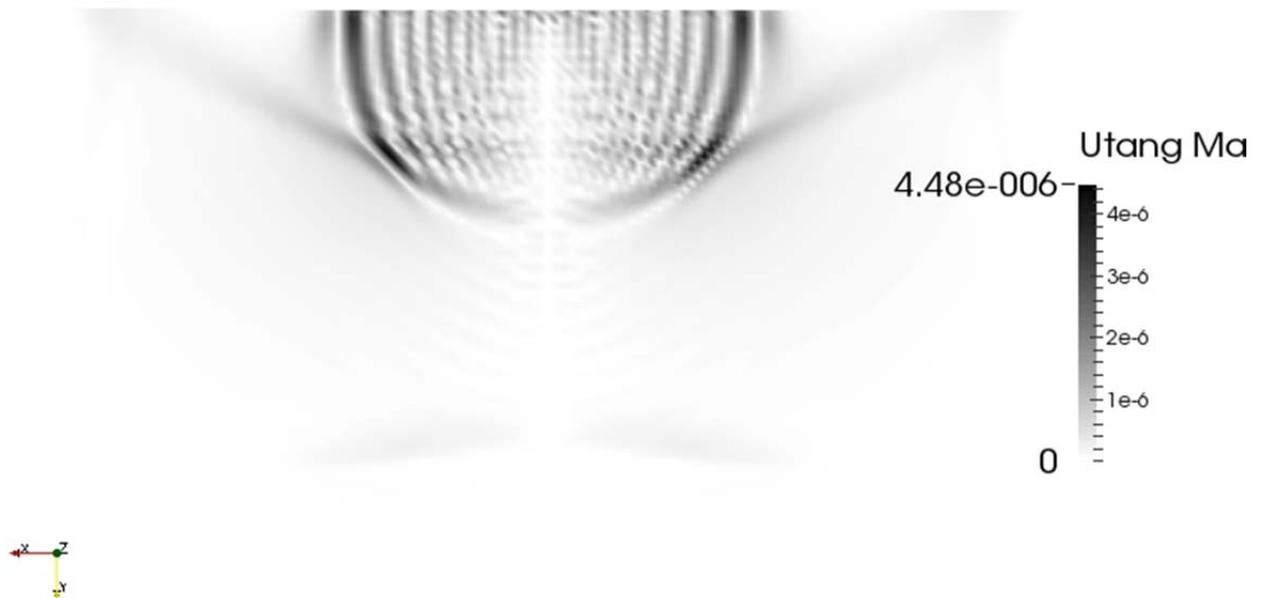


Figura 6-20. Deformación tangencial para $t=0.68$ seg.

Como se puede apreciar en las figuras, se ha producido una atenuación efectiva en el PML. Podría haberse adoptado un exponente Q mayor para lograr una atenuación mayor, pero produciría una mayor reflexión en la interfaz dominio elástico-PML. Este parámetro debe ser cuidadosamente elegido para cada caso, dependiendo de los parámetros físicos del modelo y teniendo en cuenta la longitud del PML.

7. ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LA TOPOGRAFIA

En este apartado se muestra la influencia que la topografía y la presencia de irregularidades en el dominio tienen en la resolución de problemas de elastodinámica. Se ha planteado una variación del problema de Lamb [93] en un dominio con una irregularidad topográfica y otro caso adicional con presencia de un hueco en el dominio elástico.

En todos los casos analizados se ha empleado el modelo descrito en la sección anterior (ver figura 7.1). Se ha adoptado una malla regular de 19076 nodos, con un espaciado nodal de 0.02. Los parámetros elásticos asignados al modelo son los siguientes:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} = 18.0 \text{ N/m}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 9.0 \text{ N/m}^2$$

$$\rho (\text{densidad}) = 1.0 \text{ kg/m}^3$$

la función de atenuación δ considerada en el dominio PML es la siguiente:

$$\delta_x(x) = \delta_y(x) = \delta(x) = \delta = \frac{1}{\Delta t} \sigma \left(\frac{x_i^F - x_i}{x_i^F - x_i^I} \right)^2$$

Donde x_i^I y x_i^F corresponden a las coordenadas inicial y final del dominio PML. Se ha adoptado un valor del parámetro sigma (σ) igual a 0.02.

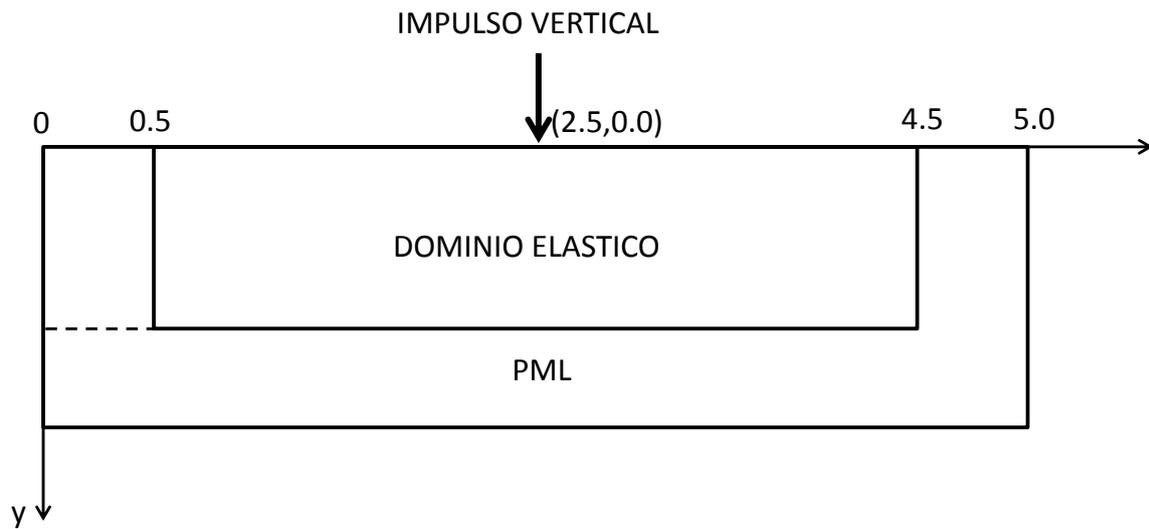


Figura 7-1. Geometría del modelo empleado en el análisis

Se ha aplicado un pulso vertical de tipo escalón en el centro de la superficie libre (2.5, 0.0). Las condiciones de contorno empleadas son: superficie libre en el borde superior y condiciones homogéneas de Dirichlet ($u=0$) en los bordes del modelo (límite final del PML).

7.1. Semiespacio elástico con un orificio interior. Caso circular y rectangular

En primer lugar, se han añadido una serie de nodos al modelo que servirán para definir el borde del orificio circular que se analizará posteriormente (ver figura 7.2). Los nodos añadidos aportan una irregularidad al esquema nodal al generarse tipos de estrellas diferentes de las que se generan para el resto de la nube de nodos.

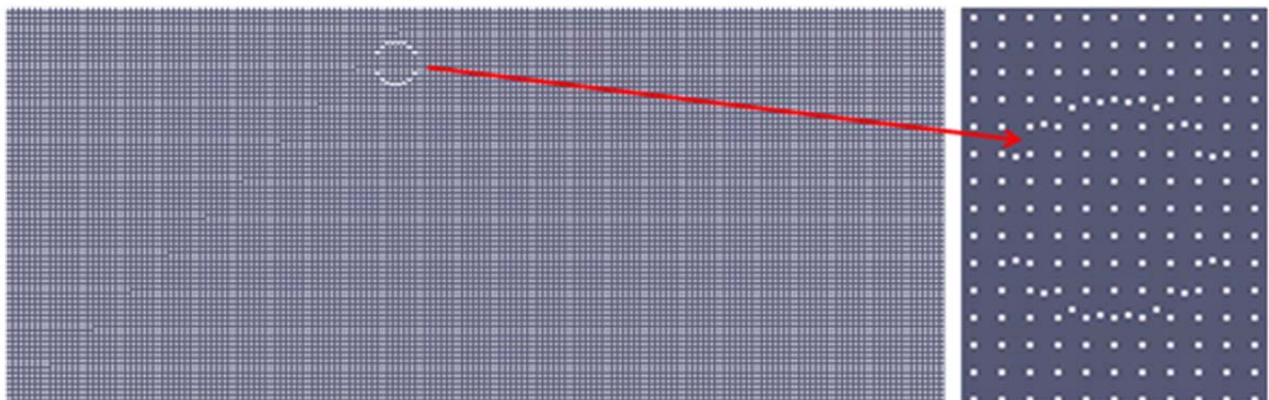


Figura 7-2. Geometría del semiespacio elástico con nodos añadidos en un patrón circular

El principal objetivo de este modelo inicial es analizar la influencia de la presencia de una irregularidad en la malla. La figura 7.3.a muestra la magnitud del desplazamiento en el instante $t=0.137$ seg. (se ha considerado un paso de tiempo de 0.0003 seg.). En este instante la onda P ya ha rebasado la irregularidad, mientras que la onda S acaba de llegar a la misma. Se puede observar que no se produce distorsión apreciable en los desplazamientos, aunque los nodos son claramente visibles ya que la gradación de color en los nodos representa la magnitud del desplazamiento producido. Para una mejor apreciación, en la figura 7.3.b se representa el mismo resultado (magnitud del desplazamiento) pero en lugar de representar los nodos del modelo se ha generado una superficie por triangulación. Los vértices de cada triángulo están constituidos por nodos del modelo y la intensidad de color de los mismos se ha calculado interpolando los valores de los desplazamientos en los vértices de cada triángulo (nodos del modelo).

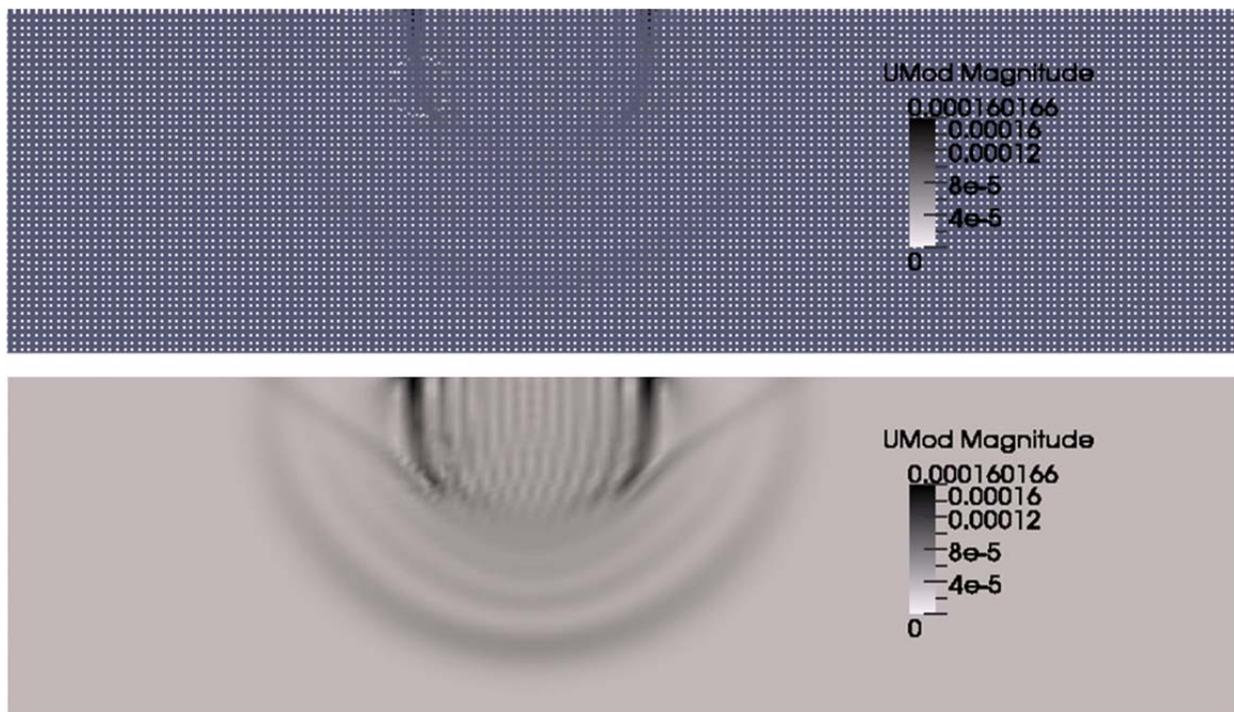


Figura 7-3. a) Magnitud de los desplazamientos en la irregularidad nodal, representando los nodos; b) Magnitud de los desplazamientos en la irregularidad, representando superficies interpoladas

A continuación se han eliminado los nodos interiores a la circunferencia delimitada por los nodos añadidos anteriormente, imponiendo una condición homogénea de Dirichlet en el contorno interior. La figura 7.4 corresponde a la magnitud de los desplazamientos en el instante $t=0.177$ seg. Se puede apreciar la aparición de varios frentes de ondas: los que se generan desde el punto de aplicación del impulso y los generados alrededor del contorno del orificio del interior del modelo.

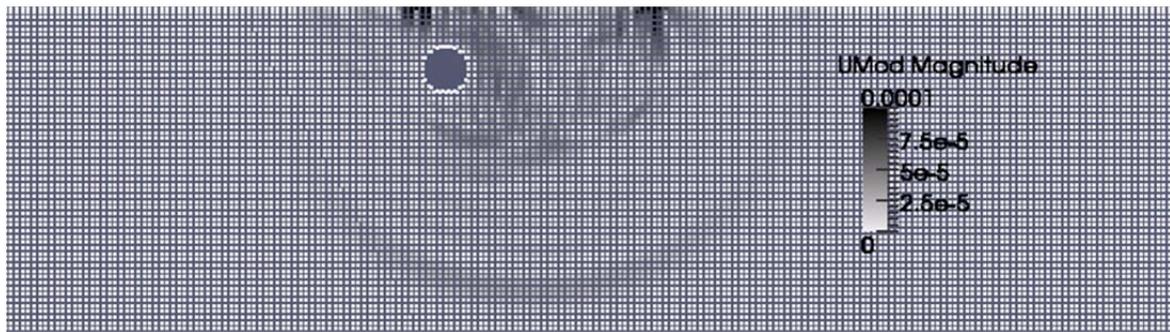


Figura 7-4. Magnitud de los desplazamientos alrededor de un orificio circular con condiciones de contorno de Dirichlet (instante $t=0.177$ seg.)

Finalmente, se ha analizado la presencia de un orificio no circular en el interior del modelo. Se ha eliminado un grupo de nodos de un área de forma cuadrada del modelo, imponiendo una condición de superficie libre en los bordes que delimitan dicha área. La figura 7.5 muestra la magnitud del desplazamiento en el instante $t=0.165$ seg., cuando las ondas P y S han sobrepasado la irregularidad de forma cuadrada. En este instante es posible apreciar que se genera una cierta perturbación en el área que rodea al orificio.



Figura 7-5. Magnitud de los desplazamientos alrededor de un orificio de forma cuadrada con condición de contorno de superficie libre ($t=0.165$ seg.)

7.2. Semiespacio elástico con una pequeña montaña

En este apartado se ha analizado una irregularidad diferente: una pequeña montaña en la superficie libre superior del modelo. En la figura 7.6.a se muestra la magnitud del desplazamiento en el instante de tiempo $t=0.14$ seg., precisamente cuando las ondas de Rayleigh pasan por la montaña de la superficie. En dicha figura se puede observar que se genera una reflexión en la superficie del modelo a ambos lados de la irregularidad topográfica.

En la figura 7.6.b se muestra la situación unos instantes más tarde ($t=0.182$ seg.), donde ya se puede apreciar que la irregularidad topográfica actúa como un foco emisor de ondas. Dicha figura muestra claramente la nueva familia de ondas generadas (scattering).

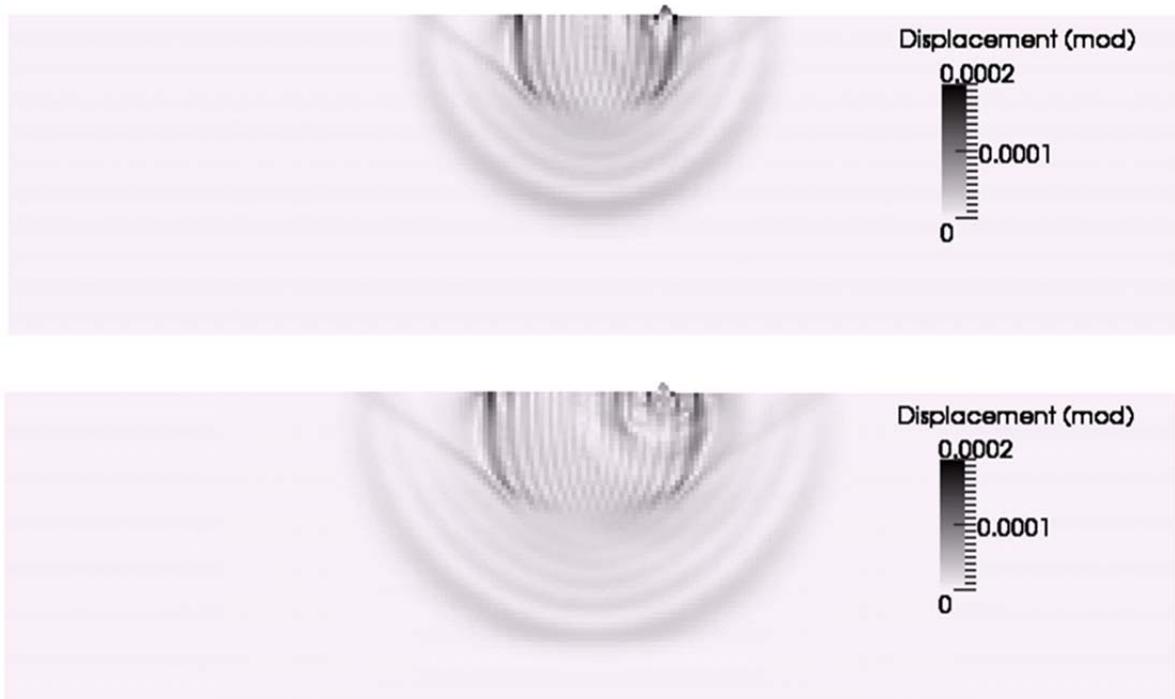


Figura 7-6. Magnitud de los desplazamientos en el semiespacio con una pequeña montaña en dos instantes de tiempo: a) $t=0.14$ seg. y b) $t=0.184$ seg.

8. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

A continuación se van a exponer dos ejemplos en los que se ha aplicado el esquema de Diferencias Finitas Generalizadas para modelizar dos tipos de ensayos de investigación geofísica habitualmente empleados.

Estos ensayos mencionados son:

- Ensayo cross-hole
- Sísmica de refracción

A continuación se detalla cada uno de ellos.

8.1. Ensayo Cross-hole

Es un método que se basa en registrar el tiempo que tarda una onda sísmica en propagarse desde un emisor a un receptor los cuales se desplazan simultáneamente por dos perforaciones verticales ejecutadas previamente. En la primera perforación se introduce la fuente emisora de energía y en el segundo el receptor, situados ambos a la misma profundidad. De esta manera se mide la velocidad de propagación de las ondas a través del material situado entre ambos sondeos. Repitiendo el ensayo a distintas profundidades se obtiene un perfil de velocidades sísmicas en función de la profundidad.

En función del tipo de fuente emisora utilizada en la generación de las ondas sísmicas, varía el contenido en ondas P y S es diferente. Si, por ejemplo, se emplean explosivos el contenido en ondas P es mayor, particularmente cuando se utilizan grandes cantidades y se detona cerca de la superficie del terreno. Los impactos verticales también tienen un contenido elevado en ondas P, mientras que si se producen impactos horizontales en la superficie del suelo se genera un mayor contenido en ondas SH.

Para la ejecución del ensayo, es necesario un mínimo de dos sondeos (ver figura 8.1). La técnica consiste en generar pulsos sísmicos dentro de uno de los sondeos (sondeo emisor) y determinar el tiempo transcurrido desde que se genera el pulso hasta que se recibe, por medio de un geófono de tres componentes, en el otro sondeo (sondeo receptor). Conociendo el tiempo de recorrido que las ondas emplean en recorrer la distancia que separa la fuente y los receptores, se puede determinar la velocidad de propagación del medio situado entre ambos. Adicionalmente, es necesario calcular, de manera independiente, la densidad de los materiales extraídos de los sondeos.

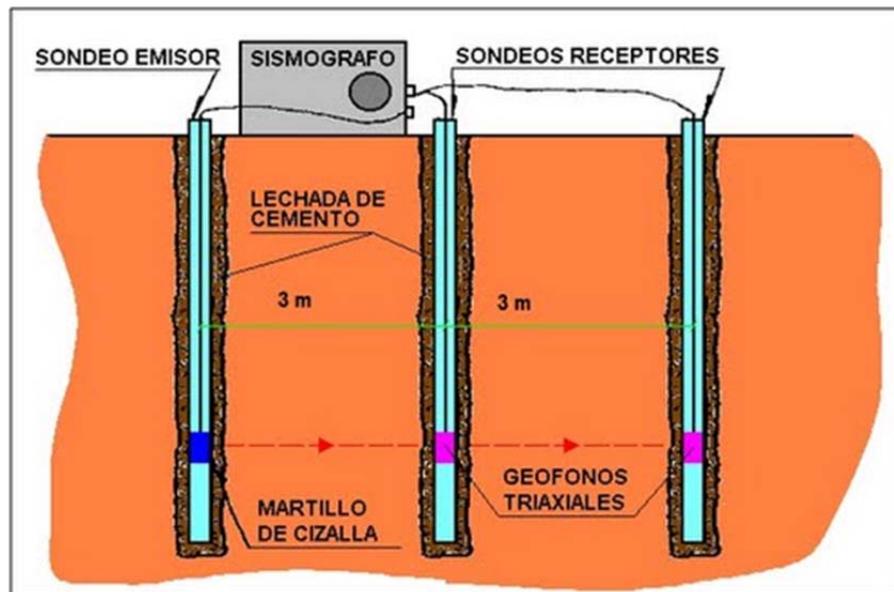


Figura 8-1. Esquema del ensayo cross-hole

El tiempo medido es función de la distancia entre el emisor y el receptor y de las características del medio atravesado. En el caso de existir oquedades -o inclusiones de un material con una velocidad sísmica menor- (ver figura 8.2) en el camino de las ondas que hagan alargar el tiempo de recorrido, se reflejará dicha variación en la gráfica del ensayo a la profundidad a la que se ha producido.

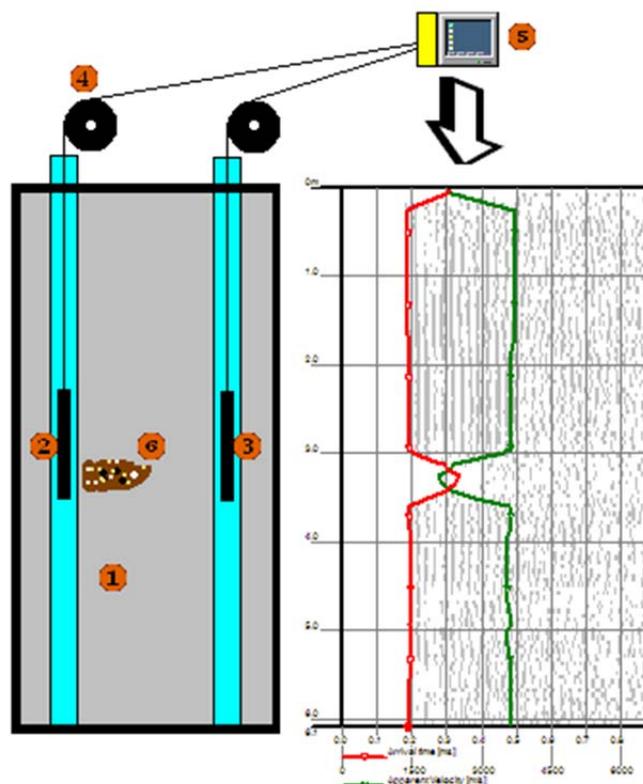


Figura 8-2. Ensayo cross-hole empleado en la detección de oquedades

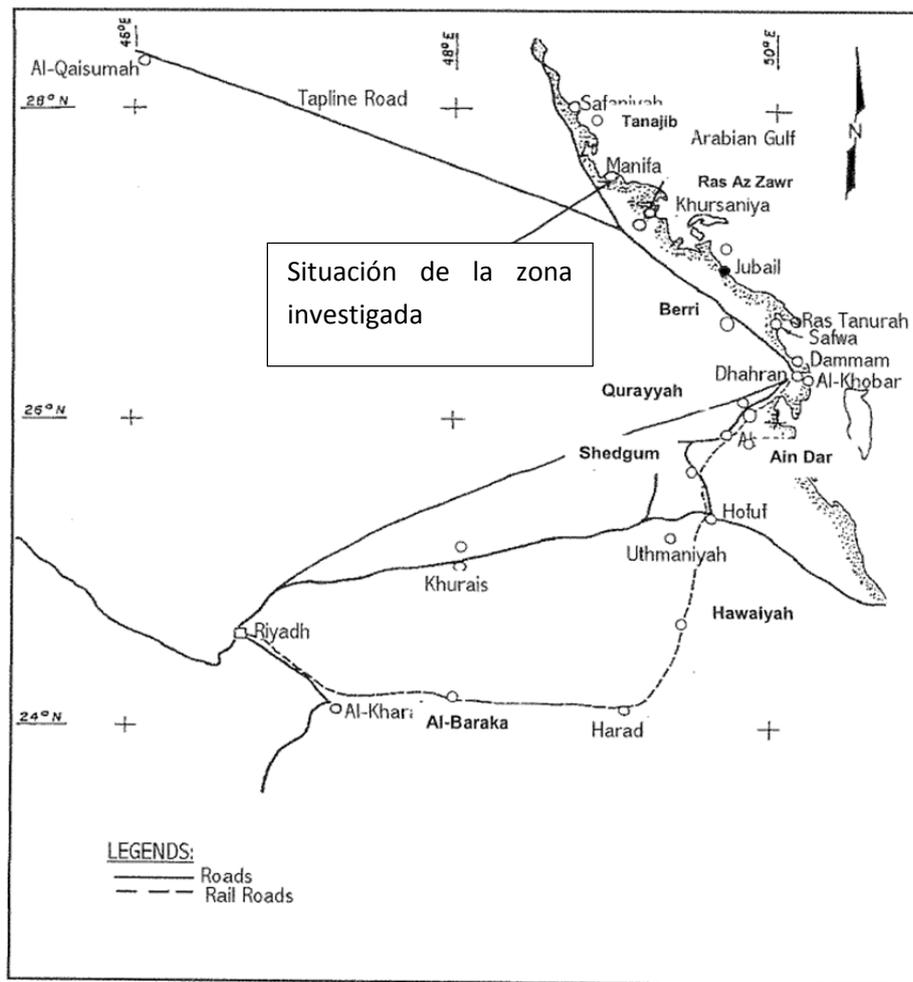
A partir de los valores de velocidad se puede obtener un modelo del subsuelo compuesto por capas de velocidad constante y espesor variable. Este método es muy útil para determinar, de manera rápida, la estructura del subsuelo.

Sus aplicaciones más frecuentes son la detección del sustrato rocoso, estudios sobre ripabilidad de rocas, etc. Por ejemplo, Son varios los criterios que se han venido utilizando para juzgar a priori la ripabilidad de un terreno. El más extendido consiste en determinar la velocidad sísmica de propagación de las ondas de compresión (Ondas P) a través del macizo rocoso, mediante una prospección geofísica de sísmica de refracción.

A continuación se muestra una tabla donde se indica la potencial ripabilidad de una roca en función de la velocidad de las ondas P en el macizo rocoso.

Vp (m/s)	CALIDAD DE MATERIAL
Menor a 600	Materiales Suelos
600-1300	Ripado Fácil
1300-1700	Ripado Normal
1700-1850	Ripado Duro
Mayores a 1850	No son Ripable (Voladura).

Con el fin de comprobar la aplicabilidad del método de Diferencias Finitas Generalizadas a un caso concreto, se ha procedido a efectuar la simulación de un ensayo cross-hole realizado en un Proyecto en Arabia Saudita (ver figura 8.3)



GENERAL LOCATION MAP
 Geotechnical Investigation, Manifa Cogeneration and Main Substation Project
 Manifa, Saudi Arabia

Figura 8-3. Localización de la zona del Proyecto

En la zona citada se realizó una investigación geotécnica consistente en tres sondeos a rotación con extracción de testigo continuo y un ensayo cross-hole adicional (ver figuras 8.4 y 8.5).

LOG OF BOREHOLE: CH-03

Report No. SA08-1342/2



PROJECT: Geotechnical Investigation, Manifa Cogeneration and Main Substation Project, Manifa, Saudi Arabia									
DRILLING METHOD: Mud rotary			DIAM: 100 mm		SHEET 1 OF 2				
SAMPLING METHOD: 50mm split barrel					COORDINATES: N 3052772.584 m E 299371.316 m				
CORE BARREL: -					ELEVATION: 7.52				
DEPTH (m)	SAMPLES/ CORE RUNS No/DEPTH (m)	SPT Blows for every 0.15m Penetration (REC %) [RQD %]	DESCRIPTION	SYMBOL	CO ₂ , %	-200, %	UCS, MPa	UDW, kN/m ³ (MC), %	LL (PL), %
0.00	B-1		Medium dense to dense light brown poorly graded SAND (SP) 0.15	[Symbol: Dotted pattern]					
0.75	S-1	14/12/10	- silty sand with gravel, 0.0 to 0.15m						
1.20			- hand excavation, 0.0 to 0.15m						
1.50	S-2	11/13/10							
1.95									
2.25	S-3	13/14/16							
2.70				[Symbol: Dotted pattern]					
3.00	S-4	14/14/18							
3.45									
3.75	S-5	20/21/24							
4.20									
4.50	S-6	18/21/22							
4.95				[Symbol: Dotted pattern]					
6.00	S-7	22/24/25	Dense to very dense light gray silty SAND varying to sandy SILT (SM or ML)						
6.45									
7.50	S-8	24/28/22-100mm							
7.90									
9.00	S-9	26/38/12-50mm							
9.35				[Symbol: Dotted pattern]					
DATE	TIME	BORING DEPTH (m)	CASING DEPTH (m)	WATER DEPTH (m)	REMARKS				
26 Feb 09	-	15.25	Not Used	-	Drilling Rig: Falling 1500 Driller: Gone Logger: Ashfaq Note:				
27 Feb 09	0745	-	-	6.60					

Figura 8-4. Testificación del sondeo realizado (0-10 m)

LOG OF BOREHOLE: CH-03

Report No. SA08-1342/2



PROJECT: Geotechnical Investigation, Manifa Cogeneration and Main Substation Project, Manifa, Saudi Arabia										
DRILLING METHOD: Mud rotary			DIAM: 100 mm			SHEET 2 OF 2				
SAMPLING METHOD: 50mm split barrel						COORDINATES: N 3052772.584 m E 299371.316 m				
CORE BARREL: -						ELEVATION: 7.52				
DEPTH (m)	SAMPLES/ CORE RUNS	SPT Blows for every 0.15m Penetration (REC %) [RQD %]	DESCRIPTION	SYMBOL	CO ₂ , %	-200, %	UCS, MPa	UDW ₃ , kN/m ³ (MC), %	LL (PL), %	
11	S-10	20/30/20- 100mm	Very dense light gray silty SAND (SM)							
12	S-11	24/29/21- 100mm	Very dense light gray poorly graded SAND with silt (SP-SM)							
13	S-12	48/50-100mm								
14	S-13	44/50-100mm								
15										
16										
17										
18										
19										
20										
DATE	TIME	BORING DEPTH (m)	CASING DEPTH (m)	WATER DEPTH (m)	REMARKS					
26 Feb 09	-	15.25	Not Used	-	Drilling Rig: Failing 1500 Driller: Gone Logger: Ashfaq Note:					
27 Feb 09	0745	-	-	6.60						

Figura 8-5. Testificación del sondeo realizado (10-15 m)

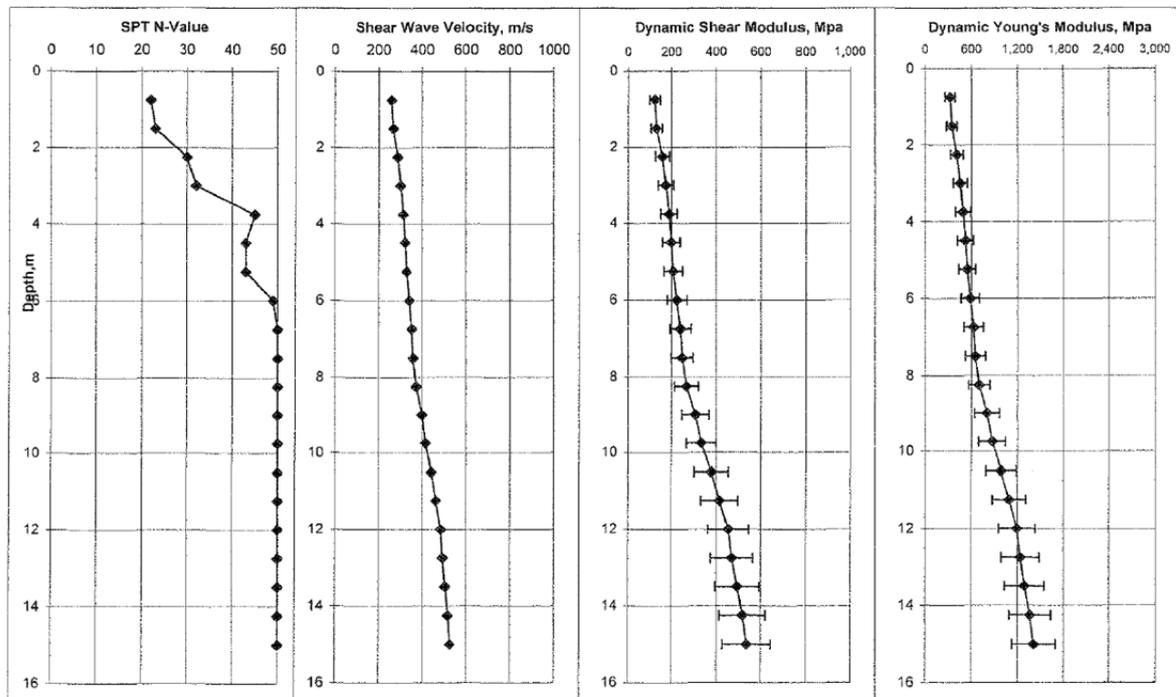
En las figuras 8.6 y 8.7 se muestran los resultados del ensayo cross-hole realizado y las propiedades dinámicas deducidas de los ensayos efectuados.

Test Depth, m	Material Description	SPT N Value	Assumed Total Unit Weight, γ_t (kN/m ³)	Compression Wave Velocity, V_p (m/s)	Shear Wave Velocity, V_s (m/s)	Poisson's Ratio μ	Dynamic Shear Modulus, $G_{dynamic}$ (MPa)	Dynamic Young's Modulus, $E_{dynamic}$ (MPa)
0.75	Sand	22	18	486	260	0.30	124	323
1.50	-do-	23	18	508	268	0.31	131	344
2.25	-do-	30	19	525	287	0.29	159	410
3.00	-do-	32	19	565	300	0.30	174	455
3.75	-do-	45	19	584	313	0.30	189	492
4.50	-do-	43	19	612	321	0.31	200	523
5.25	-do-	43	19	625	328	0.31	208	546
6.00	-do-	49	19	637	341	0.30	225	585
6.75	-do-	50	19	663	353	0.30	241	628
7.50	-do-	50	19	682	358	0.31	248	651
8.25	-do-	50	19	709	372	0.31	268	703
9.00	-do-	50	19	750	399	0.30	309	804
9.75	-do-	50	19	782	415	0.30	334	870
10.50	-do-	50	19	826	443	0.30	379	985
11.25	-do-	50	19	886	463	0.31	415	1,090
12.00	-do-	50	19	921	485	0.31	456	1,192
12.75	-do-	50	19	942	493	0.31	471	1,235
13.50	-do-	50	19	952	505	0.30	494	1,288
14.25	-do-	50	19	991	517	0.31	518	1,359
15.00	-do-	50	19	1,012	526	0.31	536	1,409

CROSS-HOLE TEST RESULTS

Borehole No. CH03
 Geotechnical Investigation, Manifa Cogeneration and Substation Project
 Manifa, Saudi Arabia

Figura 8-6. Tabla con los resultados del ensayo cross-hole realizado



DYNAMIC SOIL PROPERTIES

Borehole No. CH03
 Geotechnical Investigation, Manifa Cogeneration and Substation Project
 Manifa, Saudi Arabia

Figura 8-7. Gráficas de las propiedades dinámicas obtenidas de la investigación efectuada

A la vista de la investigación efectuada, se constató que el sustrato estaba constituido por un terreno arenoso de compacidad densa hasta los 6 metros de profundidad, aumentando a muy densa a partir de dicha profundidad.

En la figura 8.8 se muestran los parámetros dinámicos obtenidos (E_{dyn} , G_{dyn}), junto con el parámetro lambda definido anteriormente:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{2 \nu G}{1 - 2\nu}$$

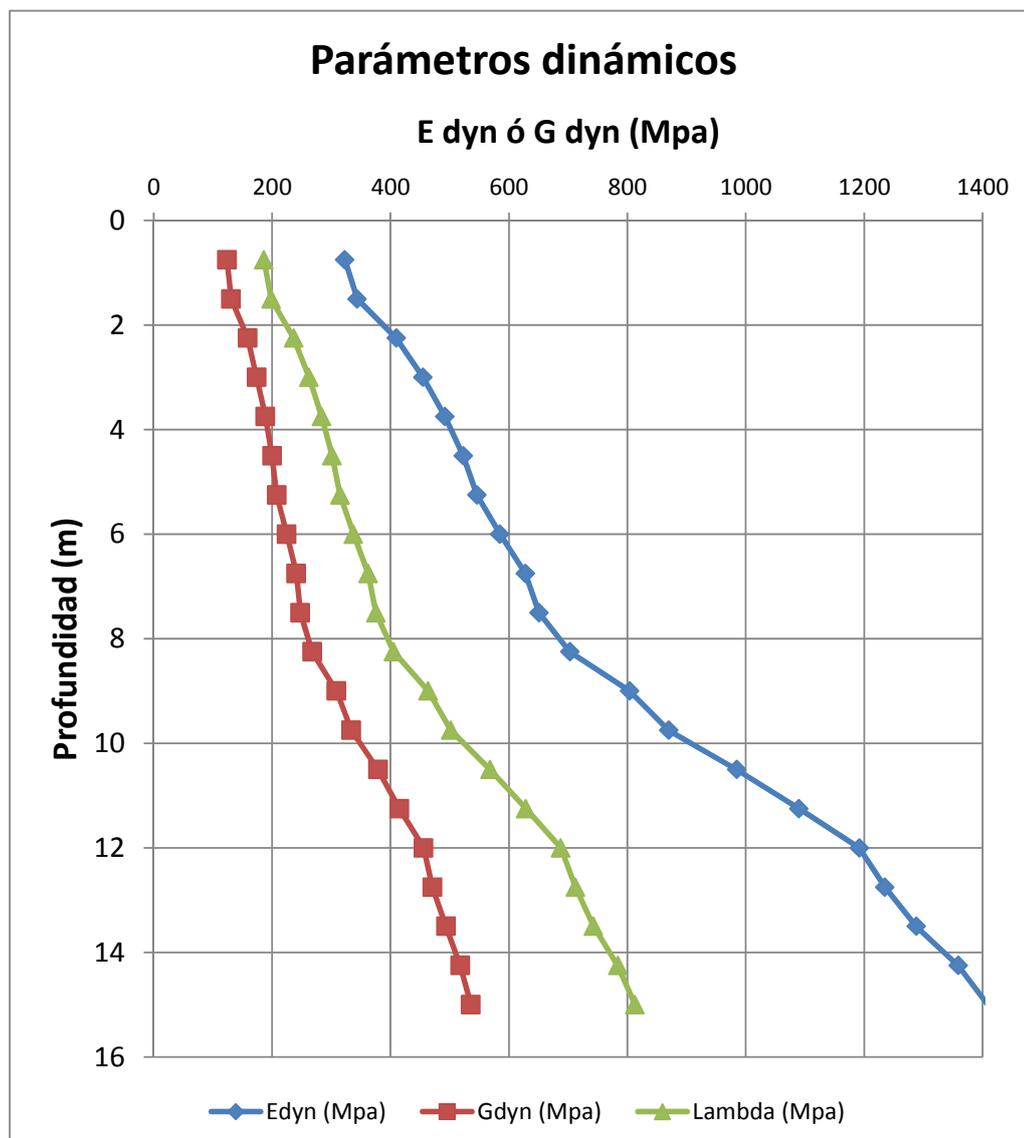


Figura 8-8. Gráficas de los parámetros dinámicos del modelo en función de la profundidad

Una vez definido el tipo de terreno con sus propiedades dinámicas, se ha simulado el ensayo cross-hole efectuado mediante el siguiente modelo de cálculo:

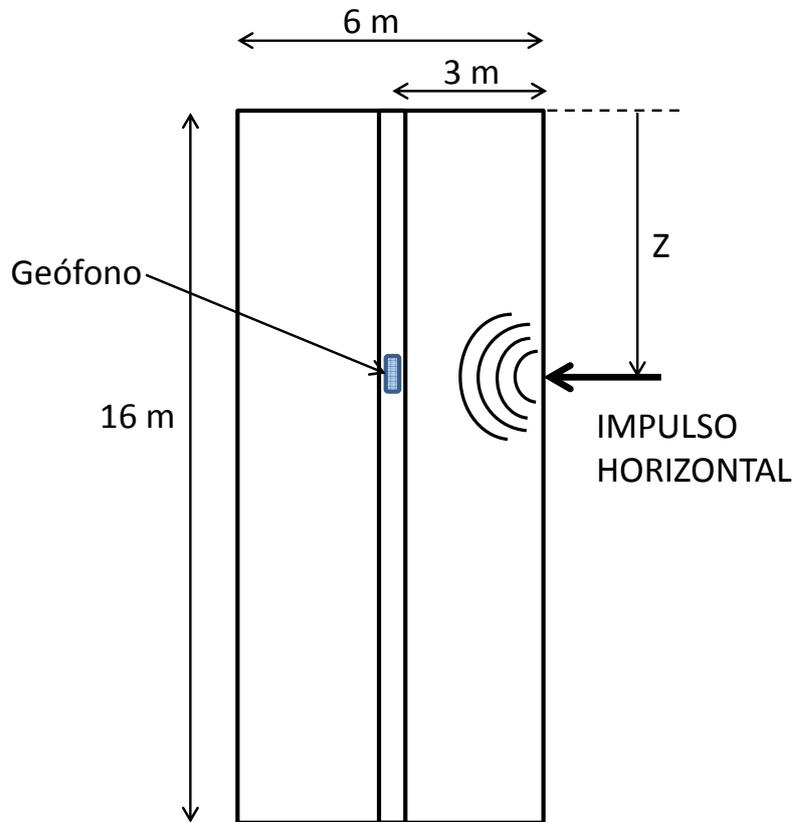


Figura 8-9. Modelo empleado en la simulación del ensayo cross-hole

Se ha zonificado el modelo mediante 8 subniveles de 2 metros de espesor, asignándole a cada uno de los subniveles los parámetros siguientes correspondientes al punto medio de cada estrato:

Material	Prof. (m)	λ medio (Mpa)	$G_{\text{dyn-medio}}$ (Mpa)	ρ (Ton/m ³)
1	1	192.404	127.500	1.9
2	3	260.962	174.000	1.9
3	5	318.077	211.000	1.9
4	7	358.462	238.000	1.9
5	9	457.115	303.667	1.9
6	11	628.269	416.667	1.9
7	13	714.423	473.667	1.9
8	15	798.462	527.000	1.9

A continuación se muestran los resultados de los modelos correspondientes a los ensayos efectuados a 5, 7, 9 y 11 metros de profundidad.

En primer lugar se muestra la simulación para el ensayo cross-hole a 5 metros de profundidad. En la figura 8.9 se muestra el instante donde la perturbación alcanza la posición del geófono y en la figura 8.10 se representa evolución de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono. El instante donde la onda alcanza al geófono es el $t=0.0046$ seg, correspondiente a una velocidad aproximada de $V_p=650$ m/s.

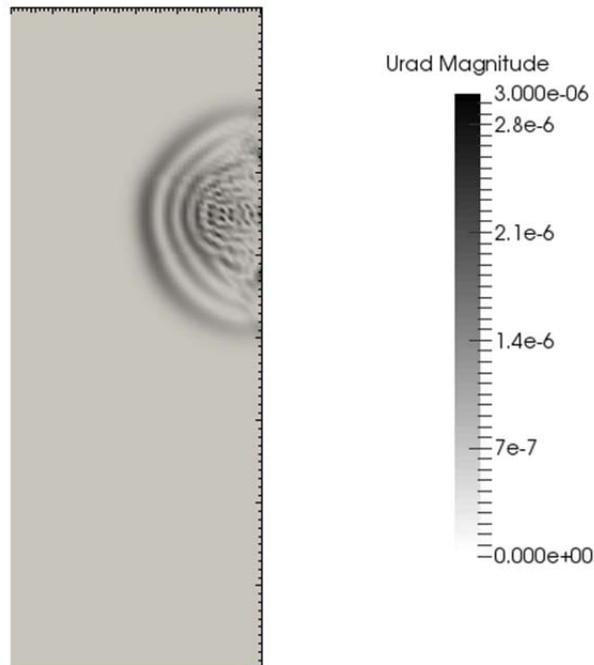


Figura 8-10. Gráfica de la simulación del ensayo a $z=5$ m.

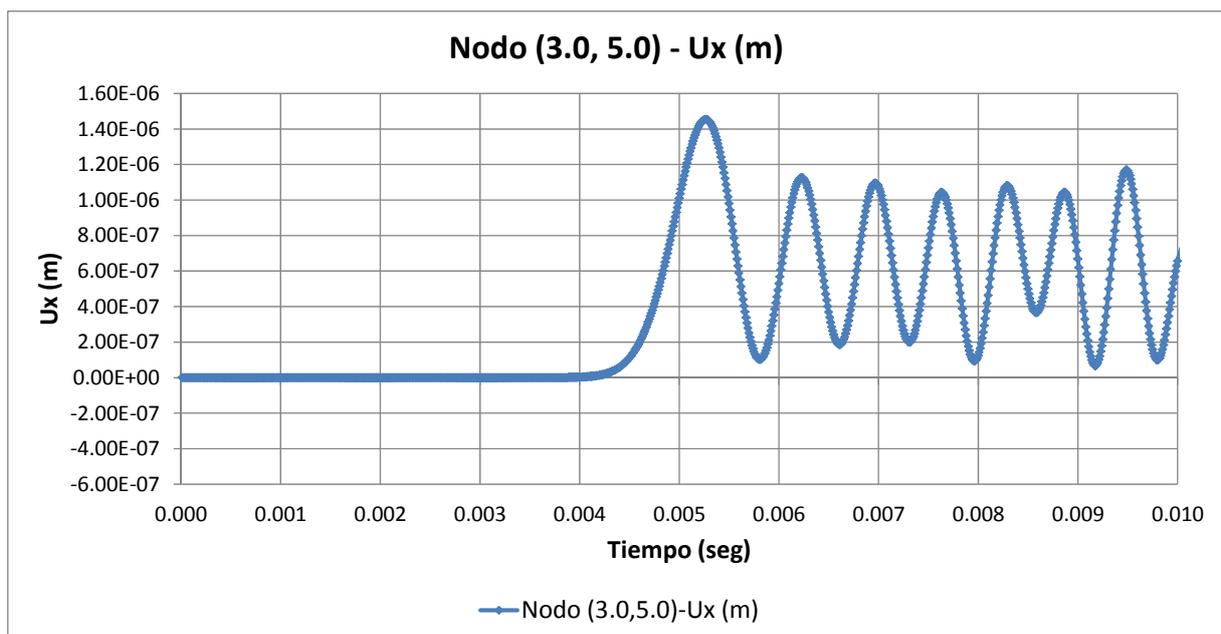


Figura 8-11. Representación de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono ($z=5$ m)

En el caso de la modelización del ensayo cross-hole a 7 metros de profundidad, se muestra en la figura 8.11 el instante donde la perturbación alcanza la posición del geófono. En la figura 8.12 se representa evolución de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono. El instante donde la onda alcanza al geófono es el $t=0.0042$ seg, correspondiente a una velocidad aproximada de $V_p=710$ m/s.

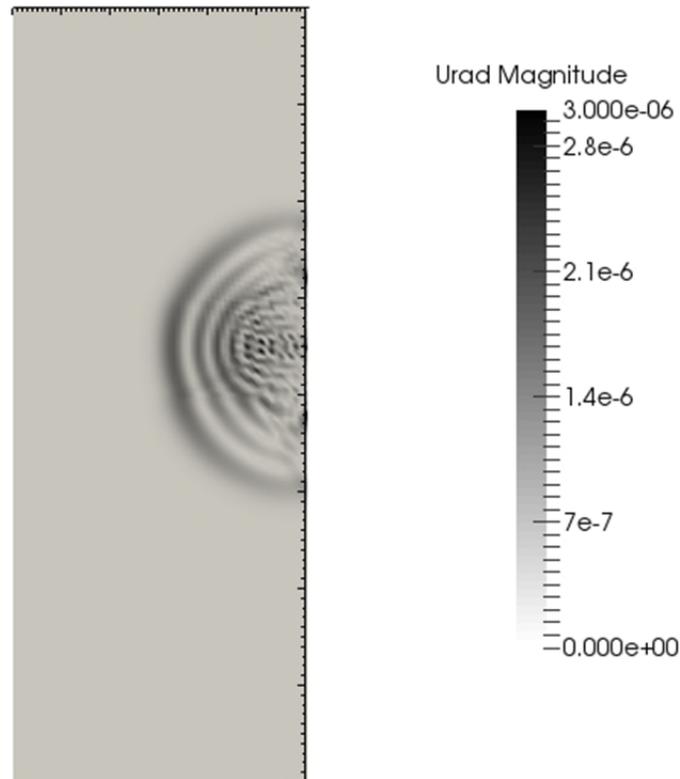


Figura 8-12. Gráfica de la simulación del ensayo a $z=7$ m.

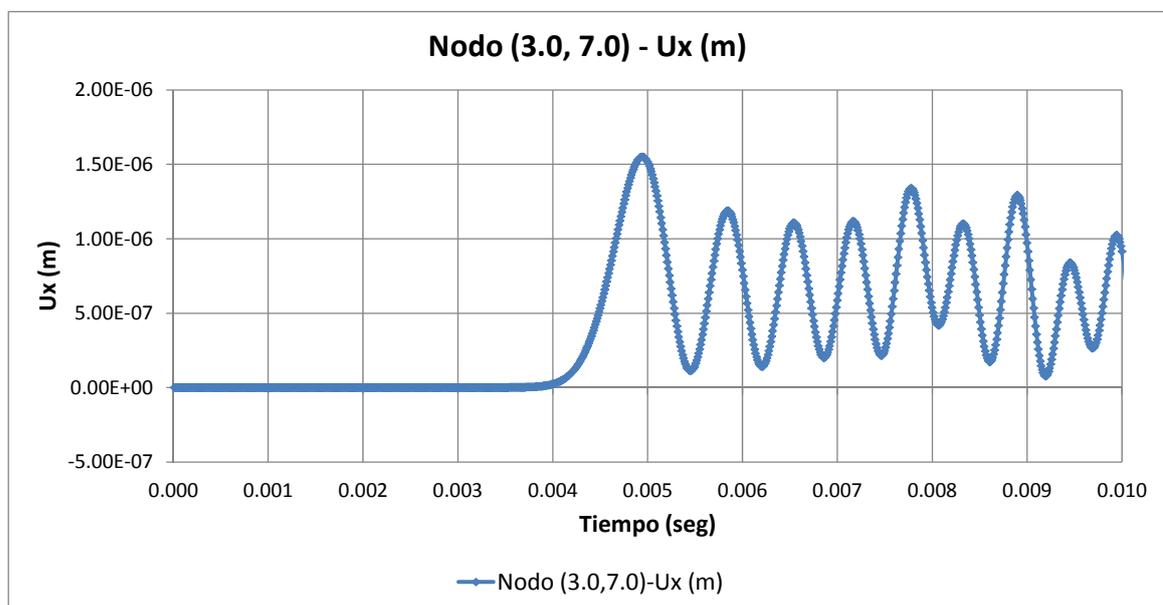


Figura 8-13. Representación de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono ($z=7$ m)

Respecto al ensayo efectuado a 9 metros de profundidad, se aprecia en la figura 8.13 el instante donde la perturbación alcanza la posición del geófono a 9 metros de profundidad y en la figura 8.14 se representa evolución de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono. El instante donde la onda alcanza al geófono es el $t=0.0038$ seg, correspondiente a una velocidad de $V_p=790$ m/s.

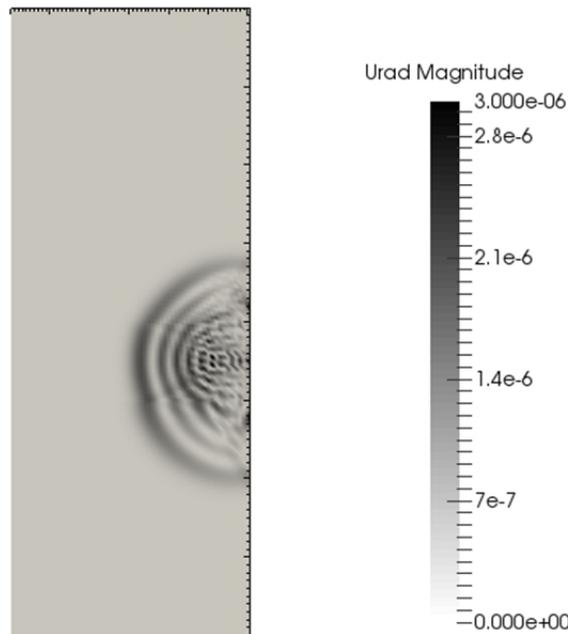


Figura 8-14. Gráfica de la simulación del ensayo a $z=9$ m.

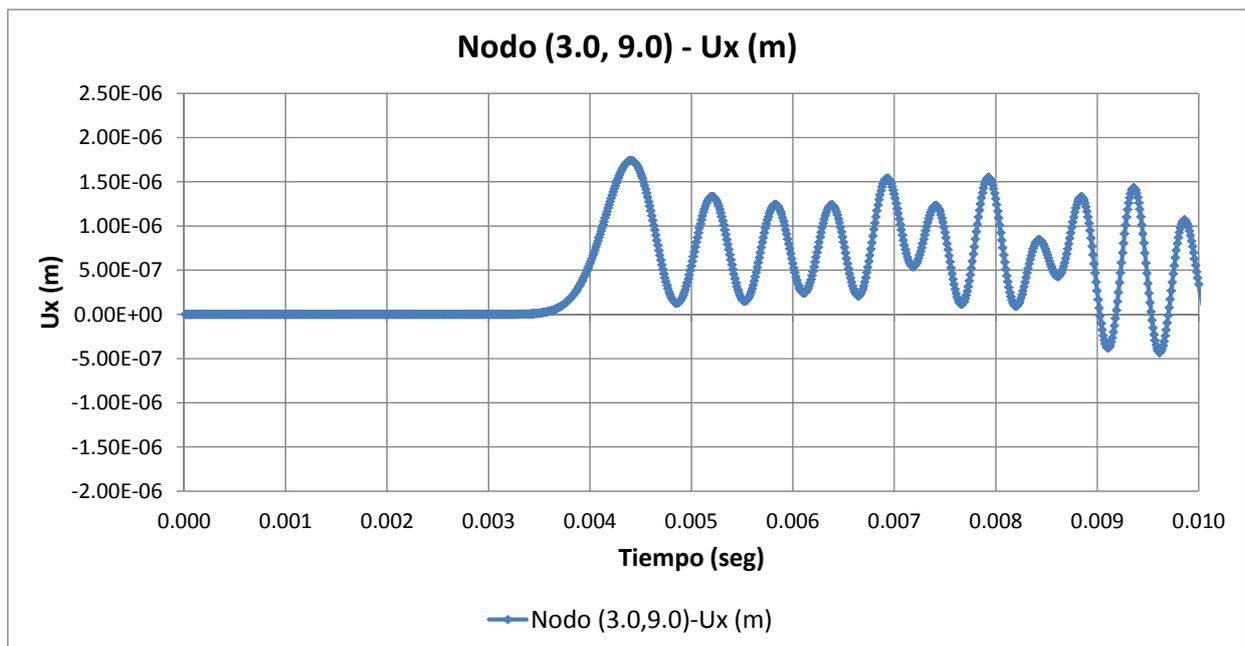


Figura 8-15. Representación de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono ($z=9$ m)

Finalmente, se ha efectuado un análisis similar para una profundidad de 11 metros. En la figura 8.15 se muestra el instante donde la perturbación alcanza la posición del geófono a 11 metros de profundidad y en la figura 8.16 se representa evolución de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono. El instante donde la onda alcanza al geófono es el $t=0.0033$ seg., correspondiente a una velocidad de $V_p=910$ m/s.

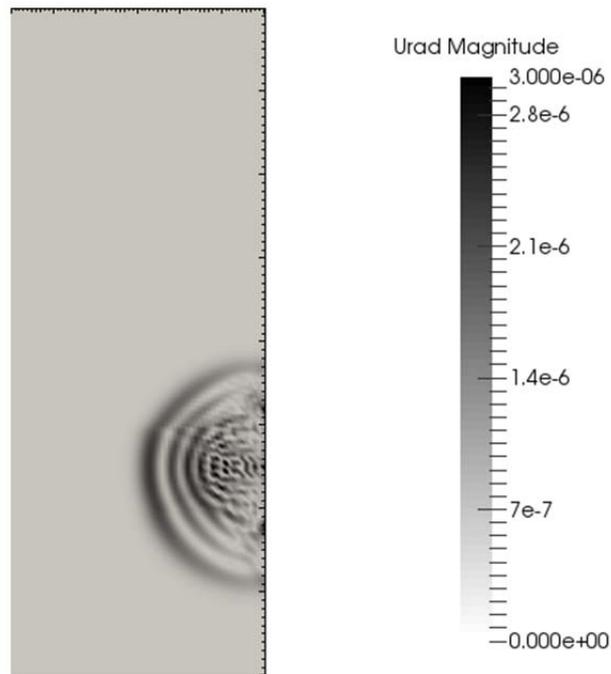


Figura 8-16. Gráfica de la simulación del ensayo a $z=11$ m.

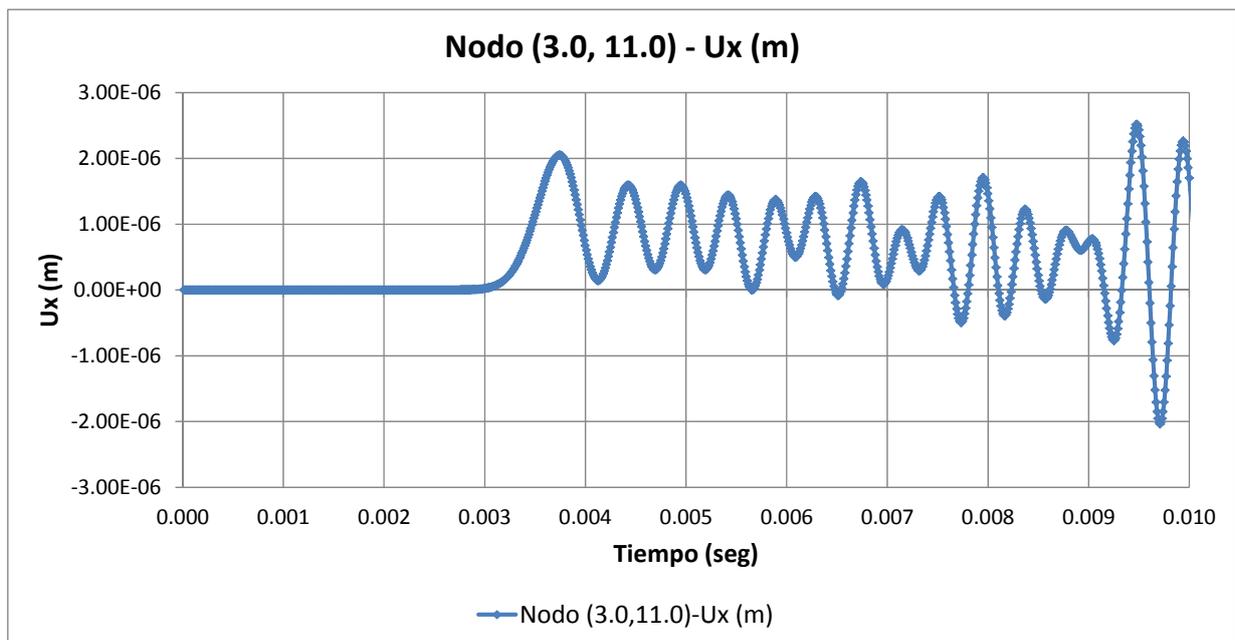


Figura 8-17. Representación de la deformación horizontal en el punto de ubicación del geófono ($z=11$ m)

Una vez obtenidos los valores para las restantes profundidades, se ha obtenido el siguiente cuadro con las velocidades sísmicas obtenidas del modelo:

Prof. (m)	Vp-modelo (m/s)	Vs-modelo (m/s)
1	510	270
3	590	320
5	650	347
7	710	380
9	790	420
11	910	490
13	970	520
15	1030	550

En la figura 8.18 se muestra la comparativa entre las velocidades sísmicas deducidas del ensayo cross-hole y las del modelo de Diferencias Finitas Generalizadas:

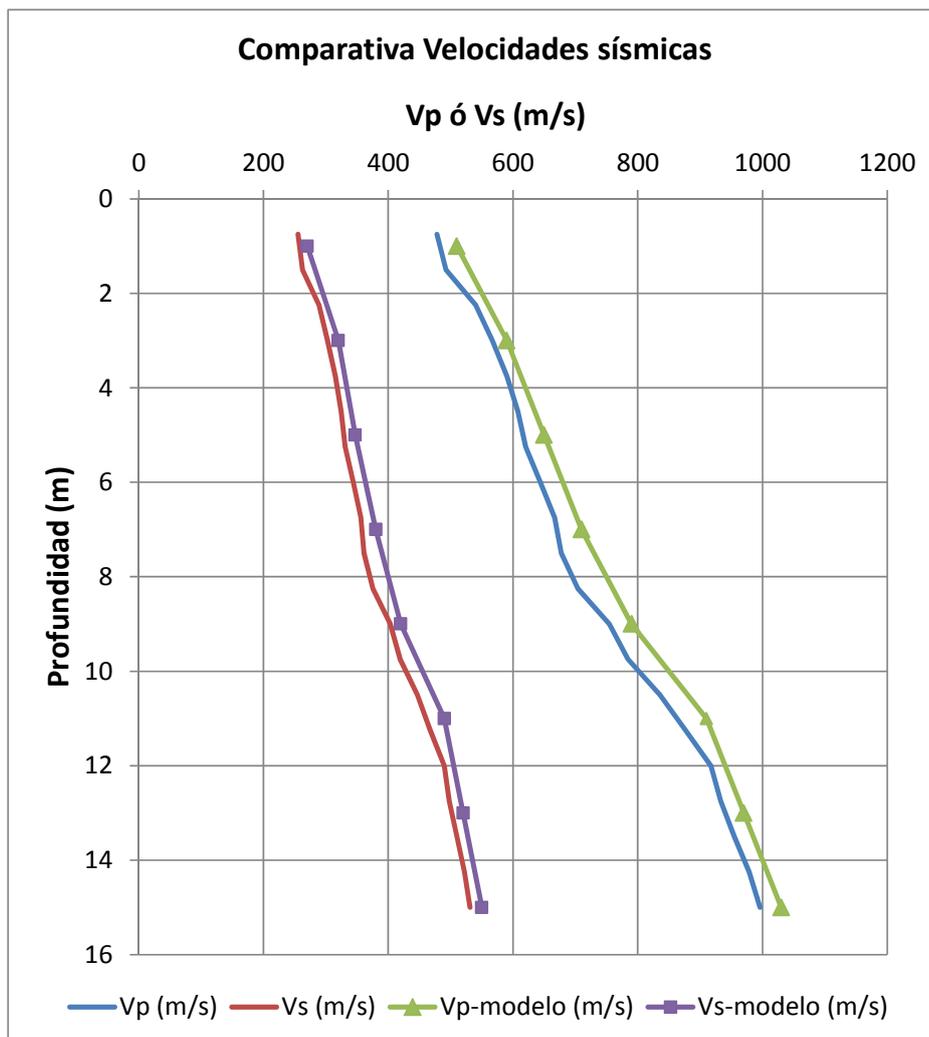


Figura 8-18. Representación de las velocidades de las ondas P y S obtenidas en el ensayo y las deducidas del modelo

Como se puede apreciar, las velocidades sísmicas obtenidas se ajustan satisfactoriamente a las obtenidas en el ensayo real, con un error máximo del orden del 5%. Se considera, por tanto, que el modelo realizado permite representar adecuadamente un ensayo cross-hole e incluso sirve para obtener parámetros dinámicos a partir de ensayos reales.

Un aspecto adicional que se ha estudiado es la posibilidad de existencia de una oquedad en el terreno –o la presencia de un terreno más blando- en la zona donde se efectúa el ensayo. Para ello, se ha empleado el modelo del ensayo cross-hole efectuado a 11 metros de profundidad, incorporando una inclusión de 1 m² de un terreno significativamente más blando (ver figura 8.19).

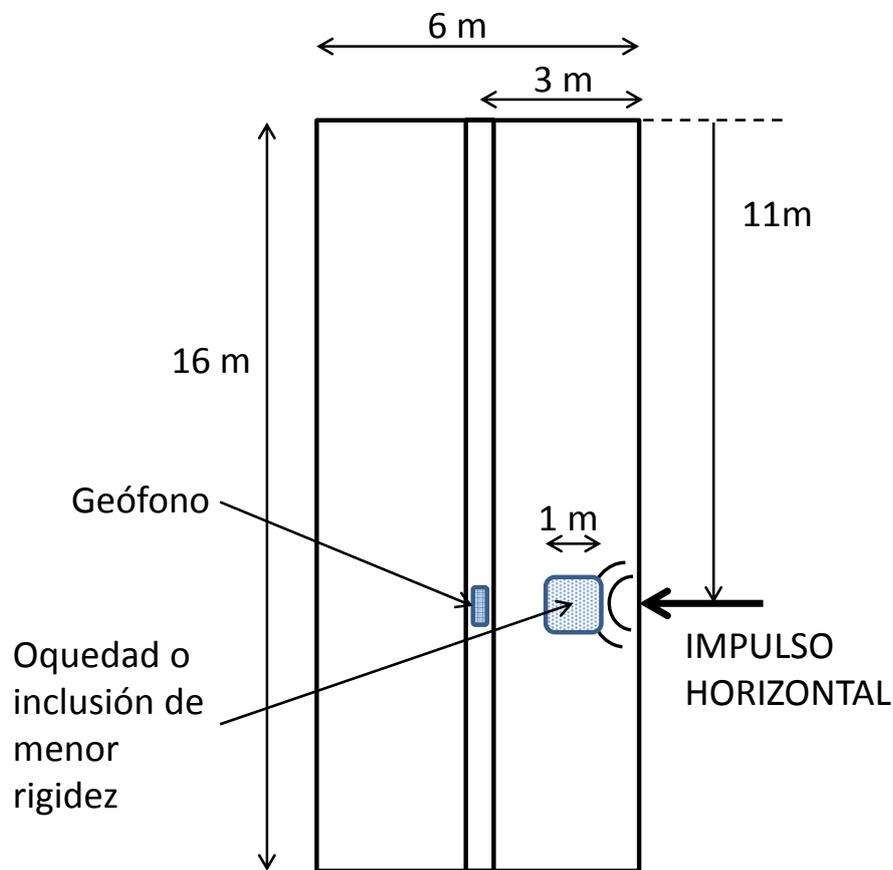


Figura 8-19. Modelo con inclusión de menor rigidez

En las figuras siguientes 8.20 a 8.23 se muestran cuatro instantes de la evolución de la perturbación.

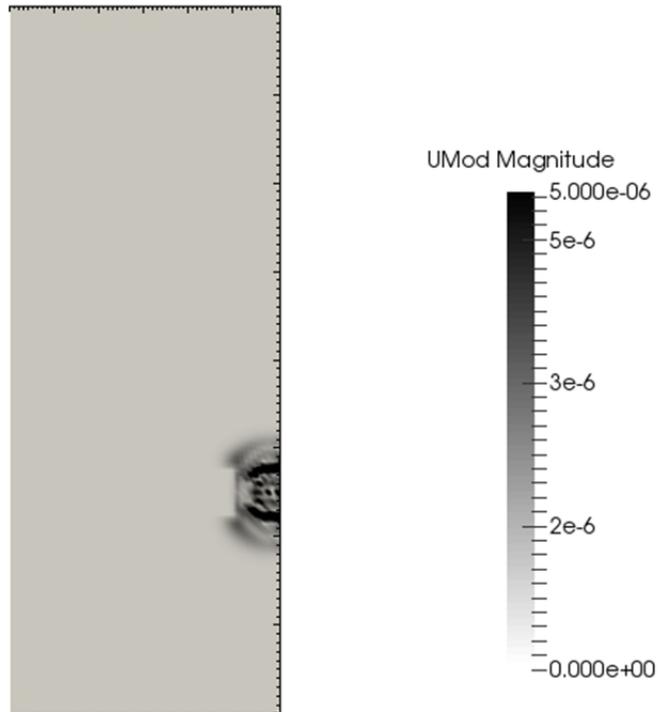


Figura 8-20. Instante de llegada de la onda a la zona menos rígida

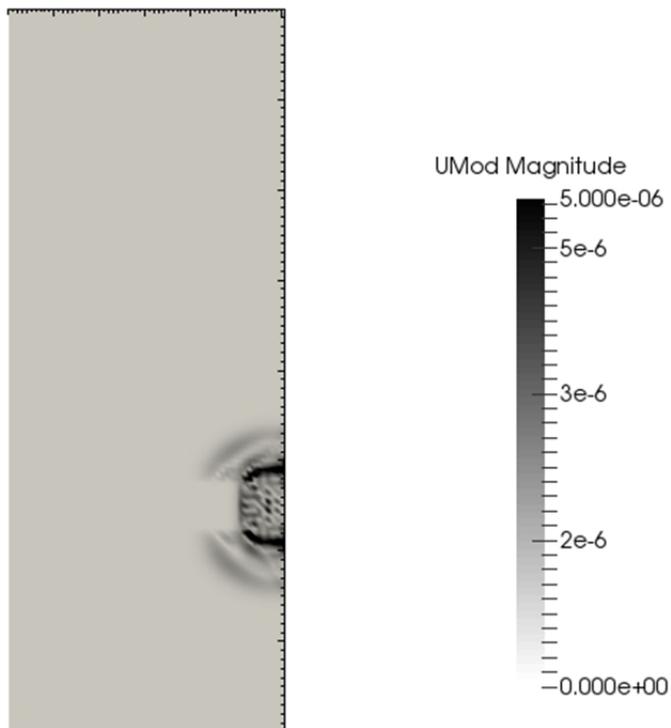


Figura 8-21. La perturbación alcanza el centro de la zona de menor rigidez

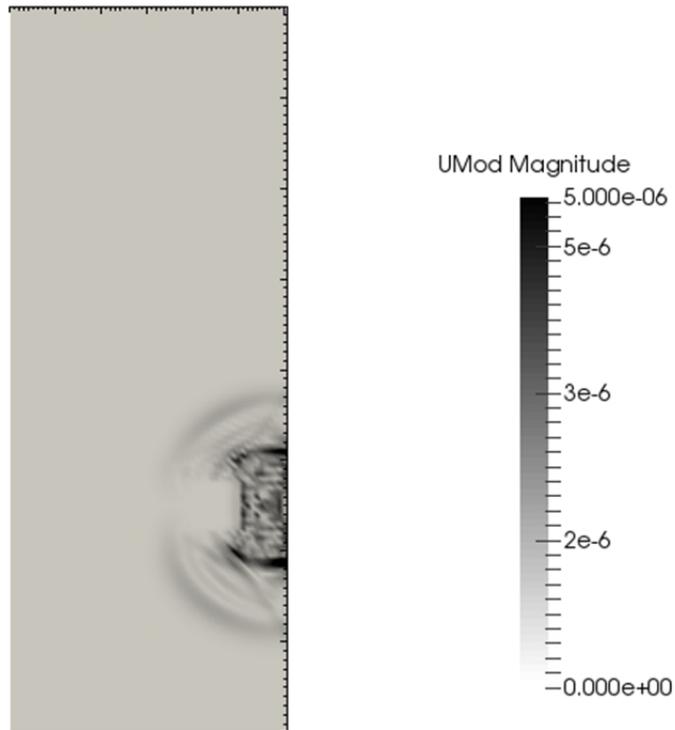


Figura 8-22. La perturbación sobrepasa la inclusión menos rígida

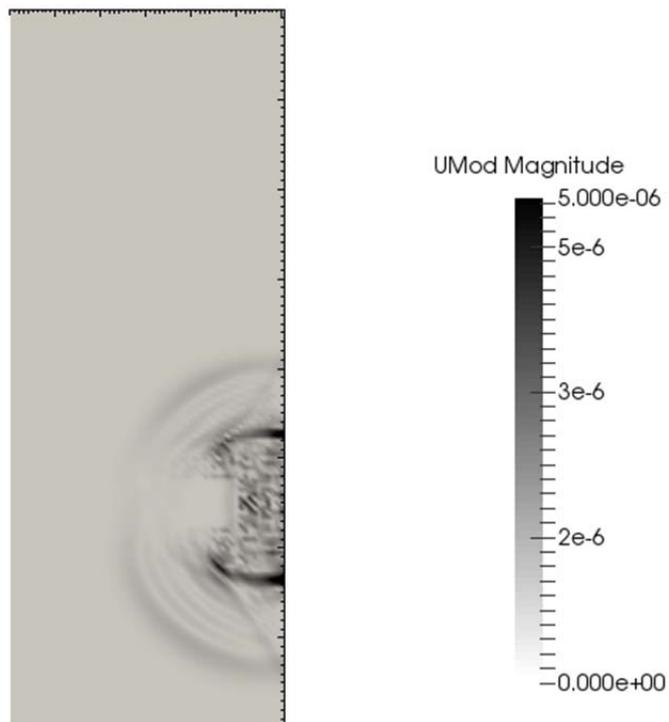


Figura 8-23. La onda ha rebasado completamente la inclusión de menor rigidez

En la figura 8.24 se muestra la diferencia entre las deformaciones horizontales medidas en el punto de ubicación del geófono. Se aprecia un retraso significativo en la llegada de las ondas al geófono, así como una disminución notable de la energía recibida.

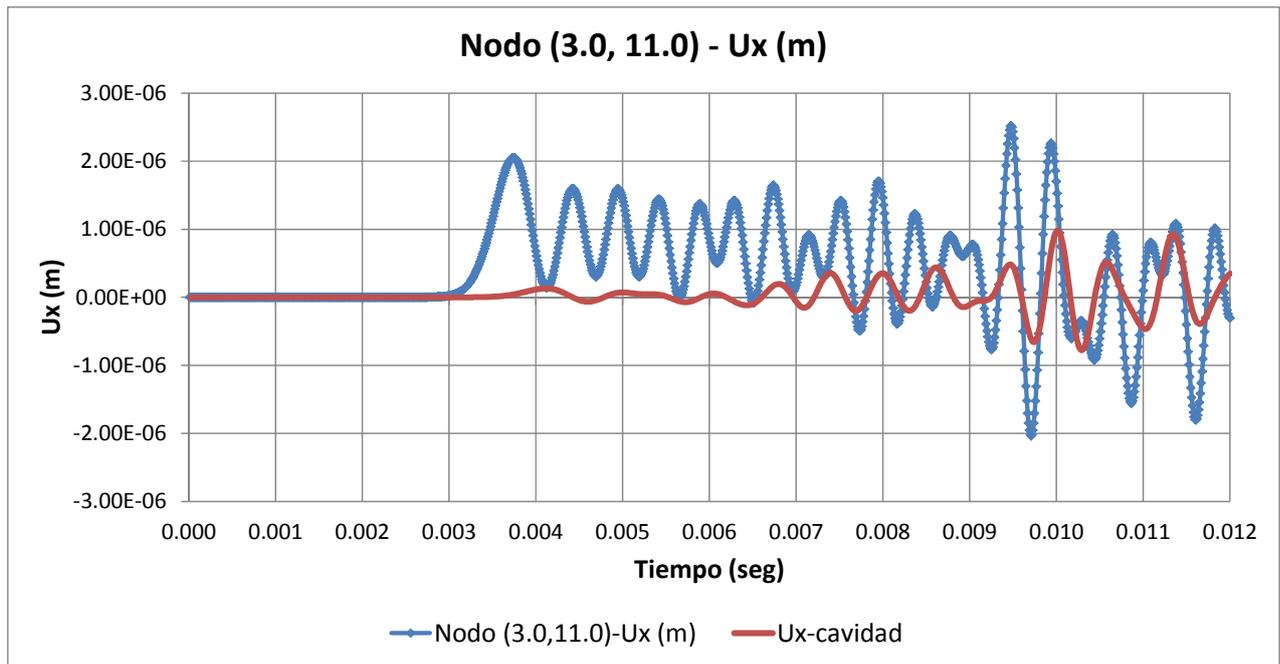


Figura 8-24. Comparativa entre las deformaciones horizontales medidas en el punto de ubicación del geófono sin/con inclusión de material de menor rigidez

A la vista del gráfico anterior, un aspecto que es posible modelizar con más detalle es la modificación que se produce en un frente de ondas al atravesar una anomalía con una velocidad sísmica mayor o menor que la correspondiente al terreno circundante. Con este objeto se ha estudiado el modelo siguiente

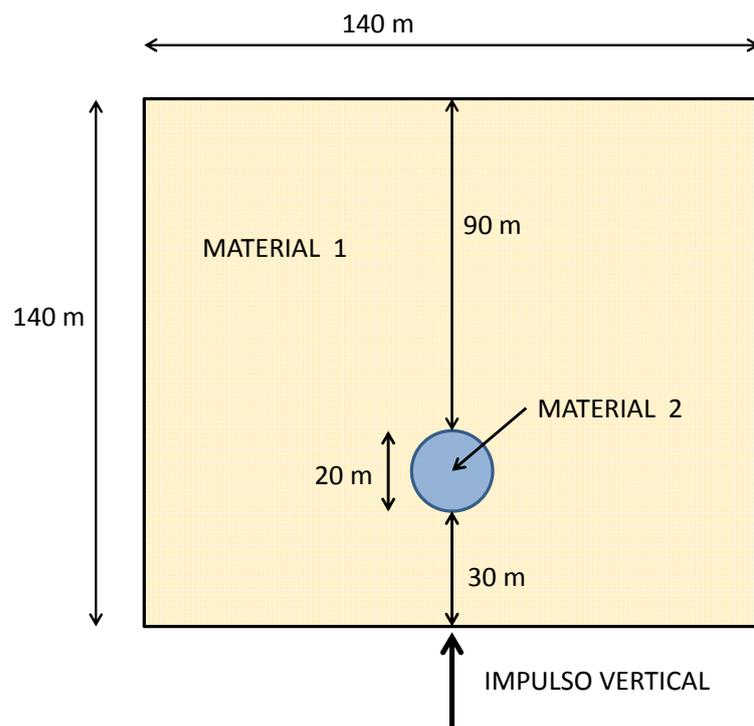


Figura 8-25. Geometría del modelo con anomalía en velocidad sísmica

En el primer caso, el material 1 tiene las siguientes propiedades:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} = 76000 \text{ kN/m}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 52000 \text{ kN/m}^2$$

$$\rho (\text{densidad}) = 2.0 \text{ Ton/m}^3$$

Las velocidades de las ondas P y S son:

$$v_p = 300 \text{ m/s}$$

$$v_s = 160 \text{ m/s}$$

Al material 2 se le ha asignado los siguientes parámetros:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} = 5200 \text{ kN/m}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 3500 \text{ kN/m}^2$$

$$\rho (\text{densidad}) = 1.5 \text{ Ton/m}^3$$

Las velocidades de las ondas P y S son:

$$v_p = 90 \text{ m/s}$$

$$v_s = 48 \text{ m/s}$$

En las figuras siguientes se muestran varios instantes del frente de ondas generado.

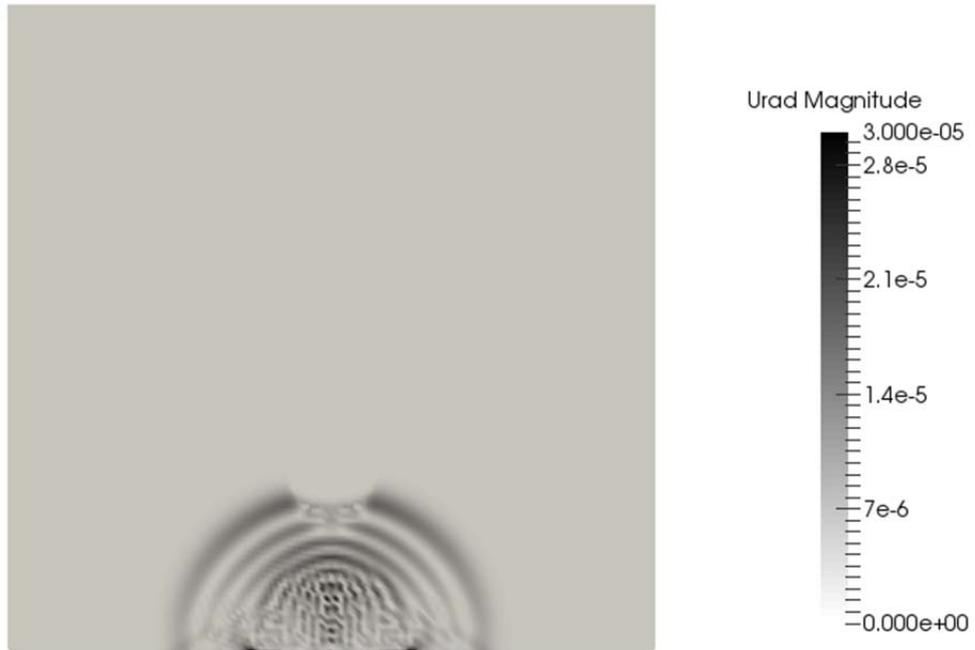


Figura 8-26. Frente de ondas en el instante $t=0.12$ seg

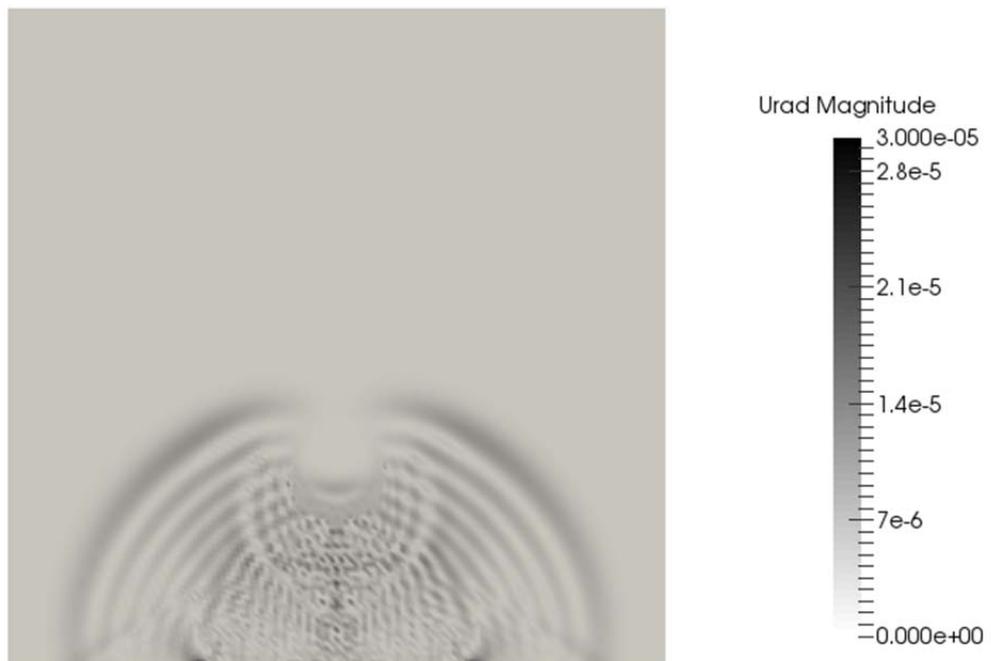


Figura 8-27. Frente de ondas en $t=0.20$ seg

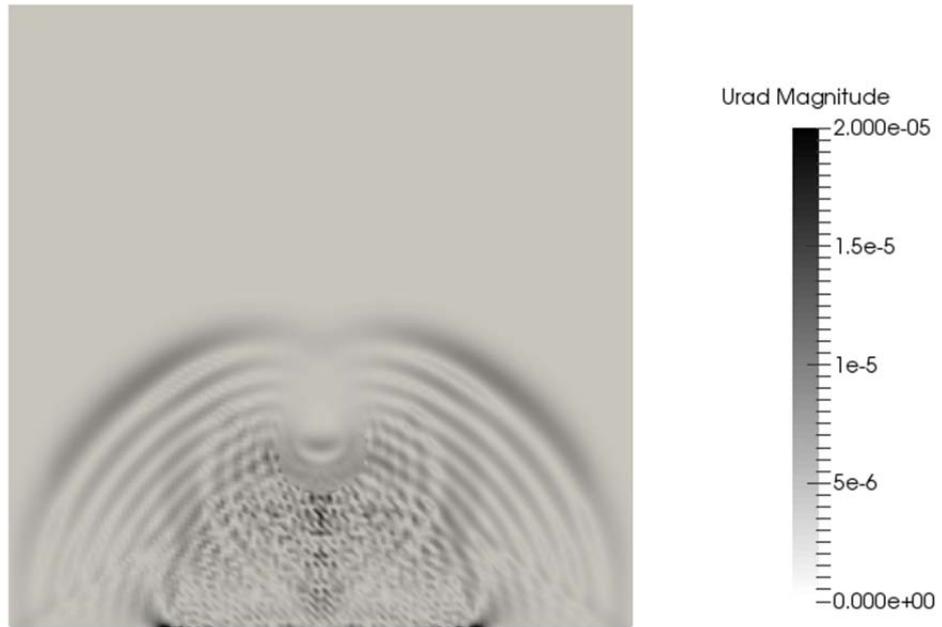


Figura 8-28. Frente de ondas en $t=0.24$ seg

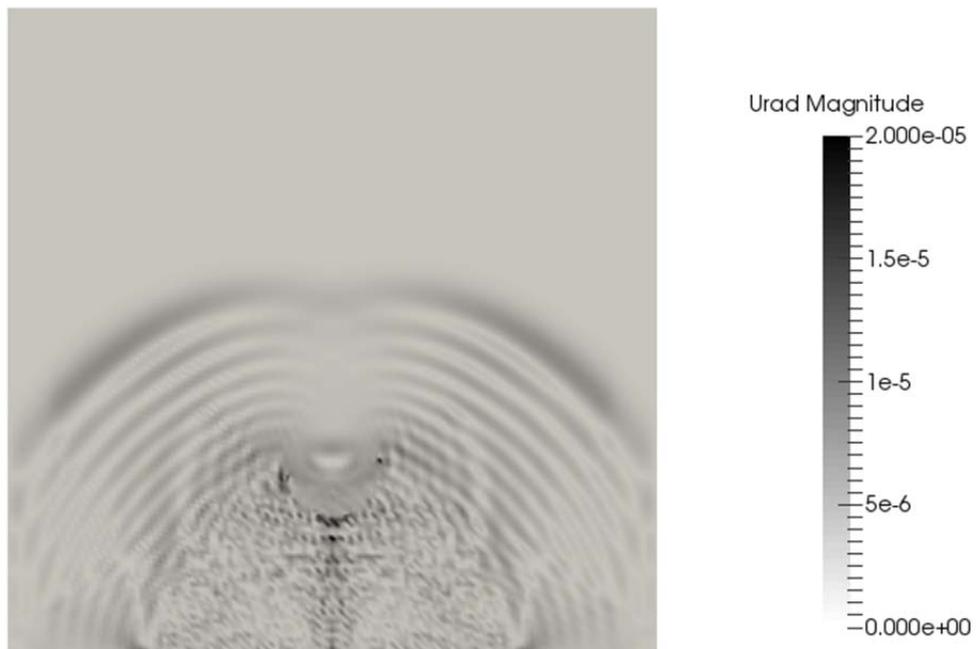


Figura 8-29. Frente de ondas en $t=0.28$ seg



Figura 8-30. Frente de ondas en $t=0.32$ seg



Figura 8-31. Frente de ondas en $t=0.40$ seg

Analizando las figuras, se observa que una vez que el frente de ondas termina rodeando la anomalía, se produce una transferencia de energía desde los lados hacia la zona “en sombra” situada tras la anomalía circular, de tal forma que a medida que la onda progresa, el retraso generado por dicha anomalía queda prácticamente laminado.

En el segundo caso analizado, el material 1 tiene las mismas propiedades:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} = 76000 \text{ kN/m}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 52000 \text{ kN/m}^2$$

$$\rho (\text{densidad}) = 2.0 \text{ Ton/m}^3$$

Las velocidades de las ondas P y S son:

$$v_p = 300 \text{ m/s}$$

$$v_s = 160 \text{ m/s}$$

Al material 2, sin embargo, se le ha asignado los siguientes parámetros:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} = 2450000 \text{ kN/m}^2$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 1700000 \text{ kN/m}^2$$

$$\rho (\text{densidad}) = 2.6 \text{ Ton/m}^3$$

Las velocidades de las ondas P y S son:

$$v_p = 1500 \text{ m/s}$$

$$v_s = 810 \text{ m/s}$$

En las figuras siguientes se muestran varios instantes del frente de ondas generado.



Figura 8-32. Frente de ondas en el instante t=0.12 seg

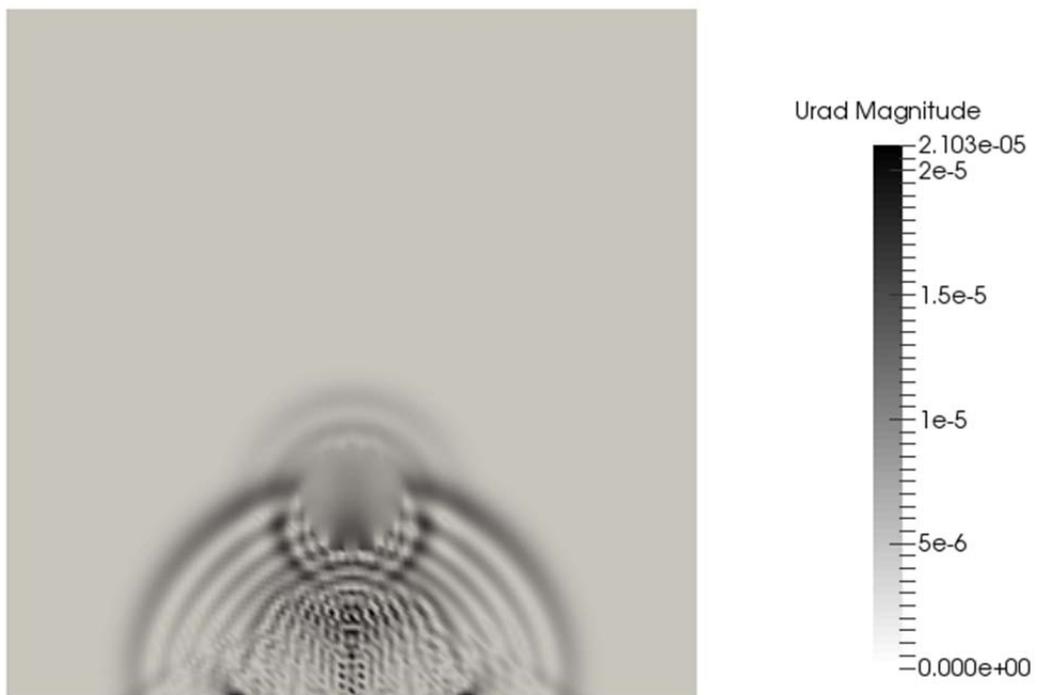


Figura 8-33. Frente de ondas en el instante t=0.16 seg

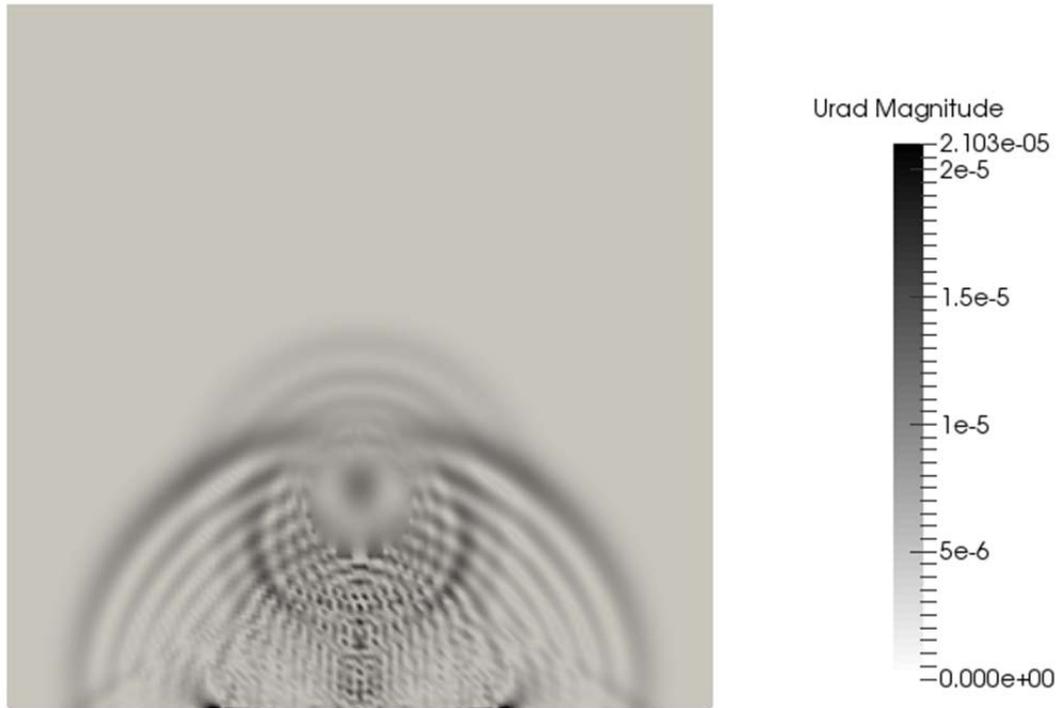


Figura 8-34. Frente de ondas en el instante $t=0.20$ seg

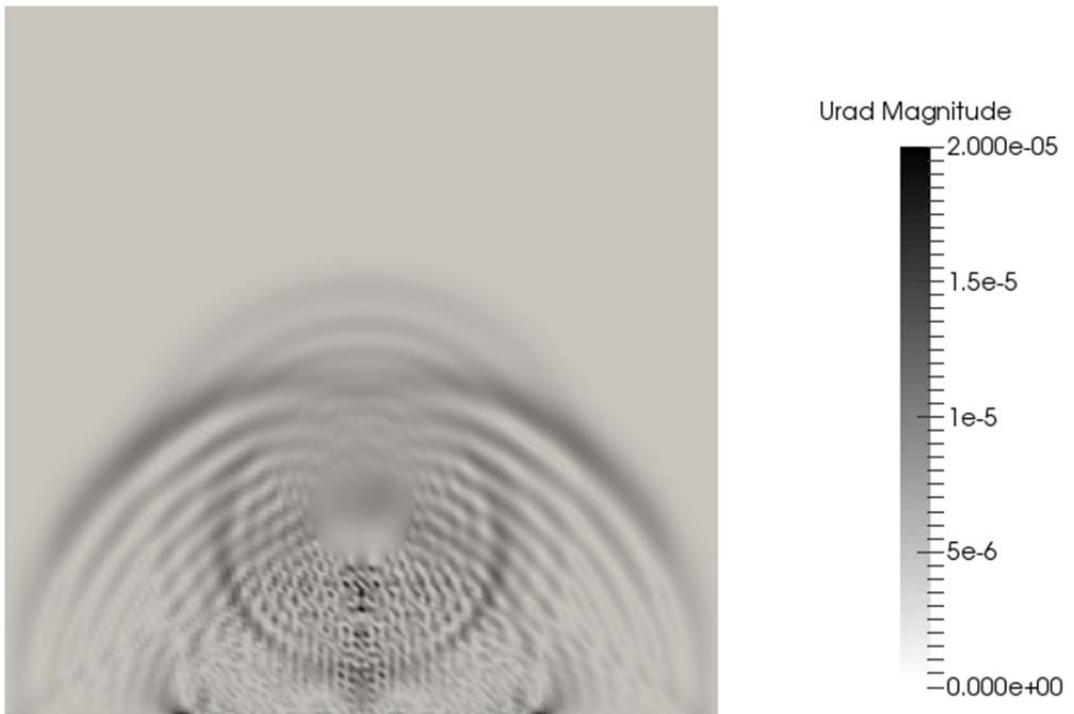


Figura 8-35. Frente de ondas en el instante $t=0.24$ seg

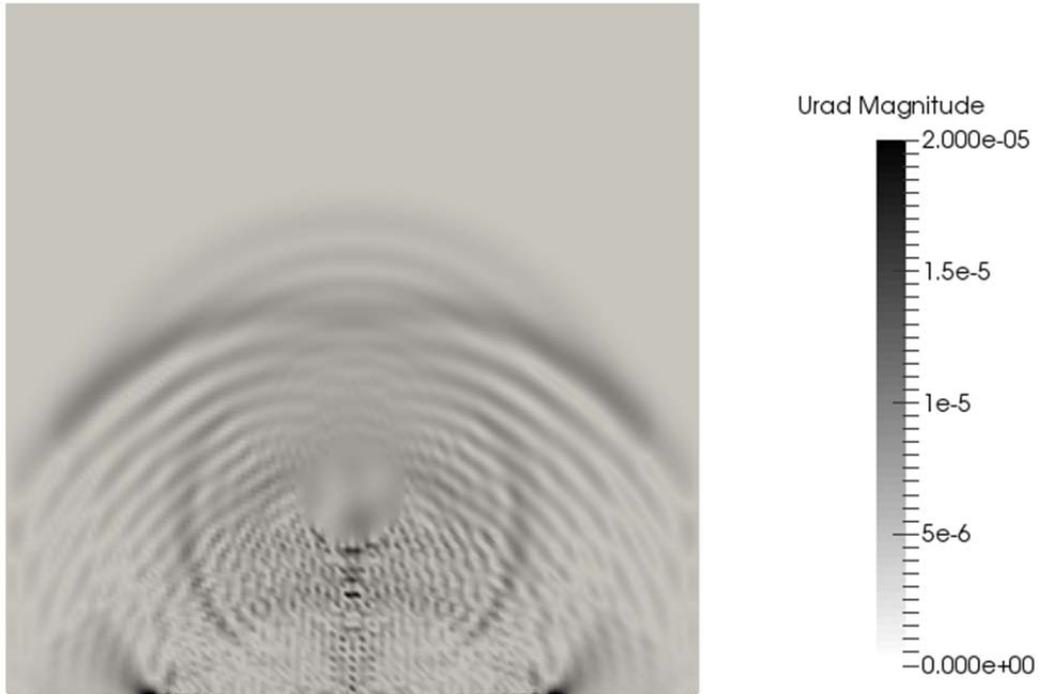


Figura 8-36. Frente de ondas en el instante $t=0.28$ seg

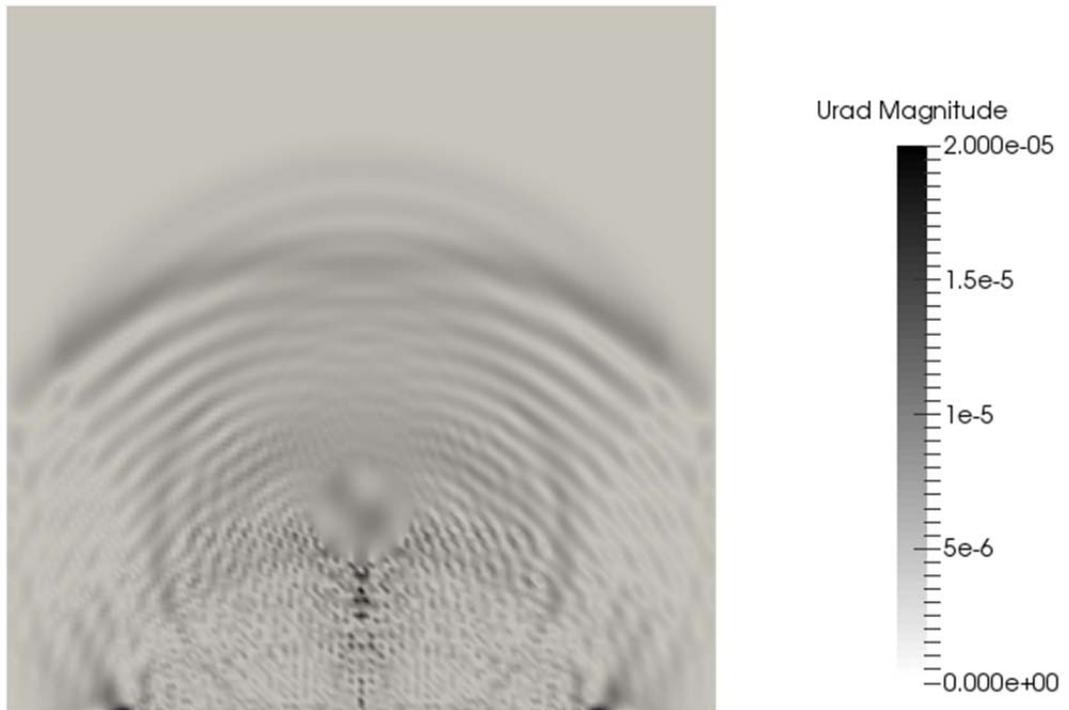


Figura 8-37. Frente de ondas en el instante $t=0.32$ seg



Figura 8-38. Frente de ondas en el instante $t=0.36$ seg



Figura 8-39. Frente de ondas en el instante $t=0.40$ seg

En este segundo caso estudiado se produce una aceleración del frente de ondas al pasar por la anomalía con mayor velocidad sísmica. Una vez rebasada la anomalía, este frente de ondas continúa avanzando y extendiéndose lateralmente, como si la fuente de la onda fuese la propia anomalía.

8.2. Sísmica de refracción

Este método se basa en determinar los tiempos de recorrido de las ondas P desde un punto conocido (fuente sísmica) hasta una serie de receptores (geófonos) situados a lo largo de una línea de adquisición. Conociendo el tiempo de recorrido que las ondas P emplean en recorrer la distancia que separa la fuente y los receptores, se puede determinar la velocidad de propagación del medio situado entre ambos.

Los registros de cada sensor tienen información de los movimientos del terreno en función del tiempo y son conocidos como sismogramas. Estos son analizados para obtener el tiempo de llegada de las primeras ondas a cada sensor desde el punto de disparo, y para obtener información de las ondas que son reflejadas en las diferentes interfaces de suelo.

A partir de los valores de velocidad se puede obtener un modelo del subsuelo compuesto por capas de velocidad constante y espesor variable. Este método es muy útil para determinar, de manera rápida, la estructura del subsuelo. Sus aplicaciones más frecuentes son la detección del sustrato rocoso, estudios sobre ripabilidad, estabilidad de taludes, etc.

La explicación resumida de la trayectoria de las ondas en el método de la Refracción sísmica se expone a continuación.

Se considera un medio, con velocidad V_1 , situado sobre un medio semiinfinito de velocidad V_2 , mayor que V_1 (Figura 8.40). Una vez se han generado las ondas en el punto de disparo, éstas comienzan a viajar por el medio superior conformando unos frentes de onda en el espacio.

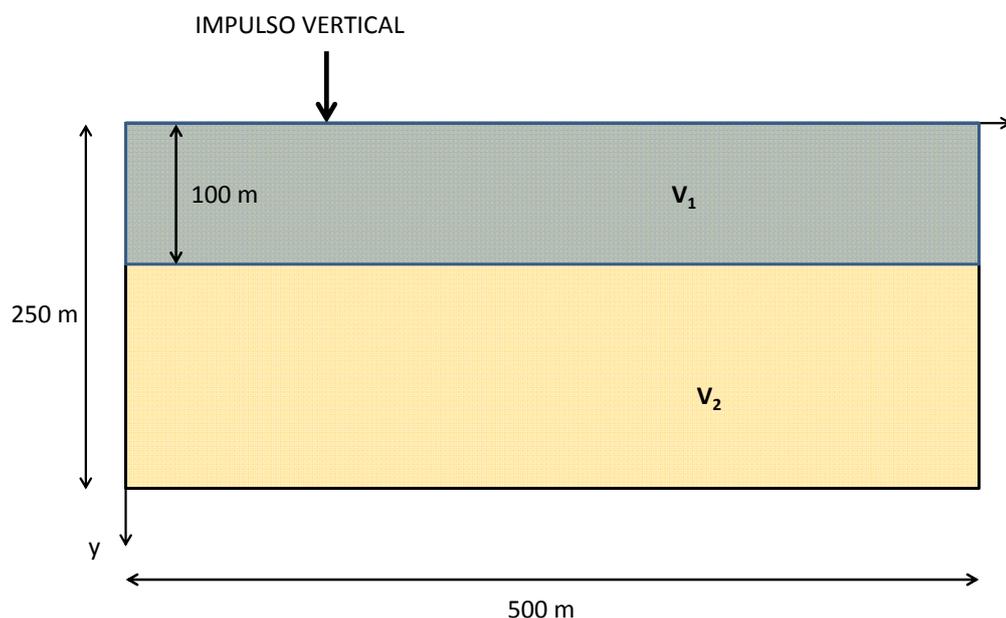


Figura 8-40. Esquema básico del modelo de Sísmica de Refracción

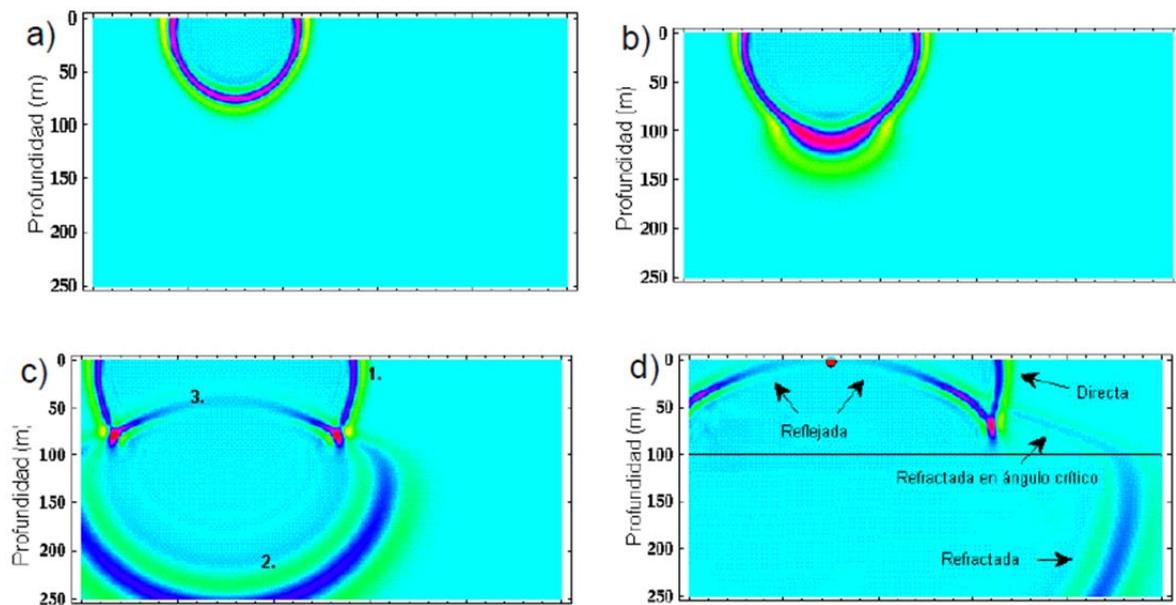


Figura 8-41. Propagación de ondas en un modelo bicapa.

Inicialmente el frente de ondas sería el mostrado en la figura 8.41.a. Este frente se denomina frente de ondas directas. En la figura 8.41.b el frente de ondas alcanza el contacto entre los dos medios y se generan las primeras refracciones hacia la capa inferior. En la figura 8.41.c se aprecian 3 frentes de ondas: 1- de las ondas directas; 2- de las ondas refractadas hacia la capa inferior, y 3- de las reflejadas hacia la capa superior. Adicionalmente, se puede identificar un cuarto frente de ondas. El frente de ondas refractado hacia la capa inferior, no tiene una curvatura constante, de tal manera que corresponde a dos frentes de onda, el que se refracta hacia el medio inferior, y el que se refracta hacia el medio superior. Como se puede observar, este frente de ondas se encuentra más alejado del punto disparo que el frente de ondas directas en la primera capa, por lo que alcanzará más rápidamente los geófonos de la superficie donde aún no ha llegado el frente de ondas directas. En la figura 8.41.d, los 4 frentes de onda se diferencian claramente.

El frente de ondas refractadas hacia el medio superior se genera cuando los rayos provenientes de la fuente alcanzan la interfaz entre los dos medios con un ángulo crítico. Este ángulo crítico i_c viene definido por la siguiente expresión:

$$\text{sen } i_c = \frac{V_1}{V_2}$$

Siendo:

V_1 : Velocidad de transmisión de las ondas en el medio superior

V_2 : Velocidad de transmisión de las ondas en el medio inferior

La refracción mostrada en la figura 8.42, correspondiente al ángulo crítico, implica que las ondas no se propagan por la capa inferior, sino por el contacto entra ambas capas – es decir por la superficie de refracción- con la velocidad v_2 de la capa inferior, siguiendo la ley de recorrido mínimo o Principio de Fermat

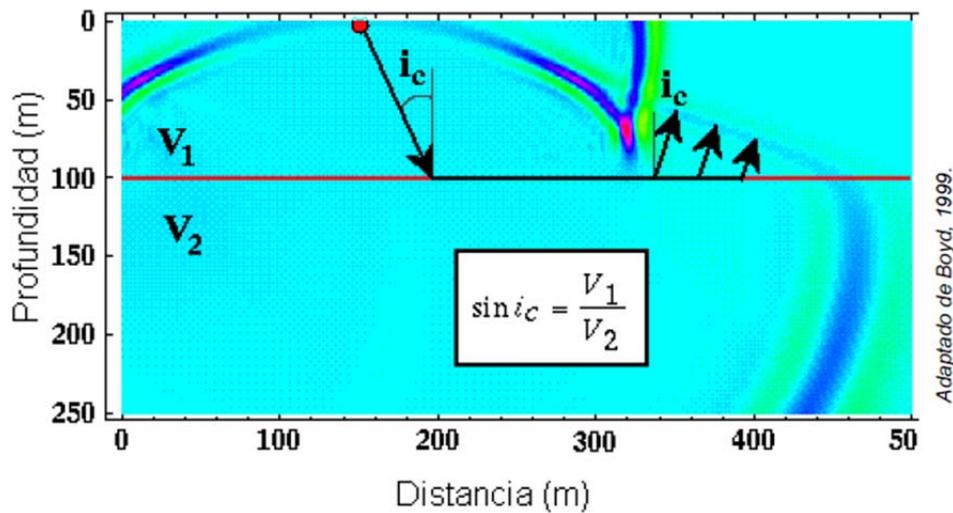


Figura 8-42. Definición del ángulo crítico de refracción

Con el fin de modelizar un caso real, se ha utilizado un estudio geofísico basado en el método de Refracción Sísmica como parte de un estudio que se ha realiza para una cantera en la Ruta F-730, Camino La Pólvora, Valparaíso, Chile. A continuación se muestra la zona estudiada.



Figura 8-43. Situación de la zona de estudio

Como conclusión de este estudio geofísico se ha obtenido una serie de perfiles longitudinales multicapa, uno de los cuales ha sido elegido para modelarlo.

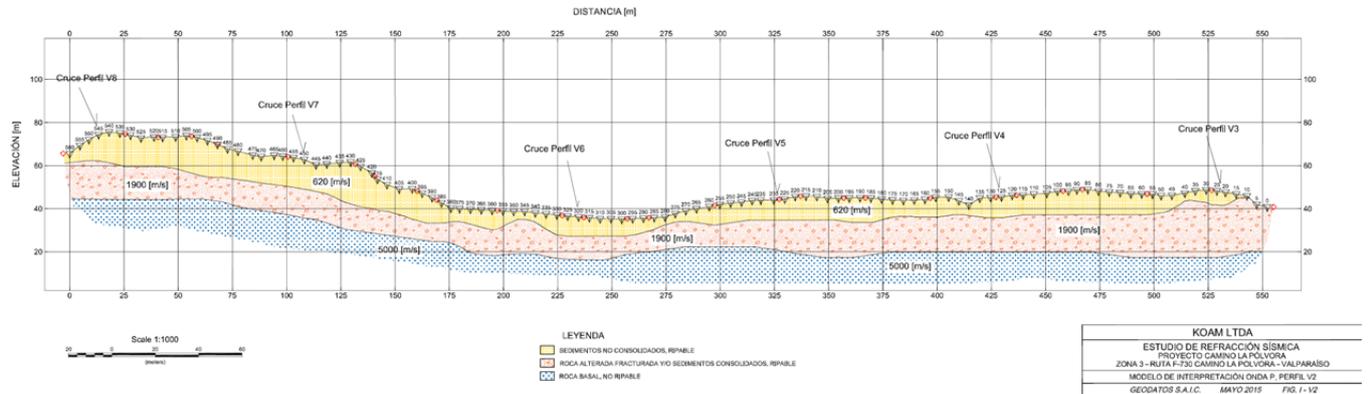


Figura 8-44. Perfil interpretado mediante Sísmica de Refracción

Básicamente, el modelo de terreno interpretado corresponde al modelo tricapa siguiente:

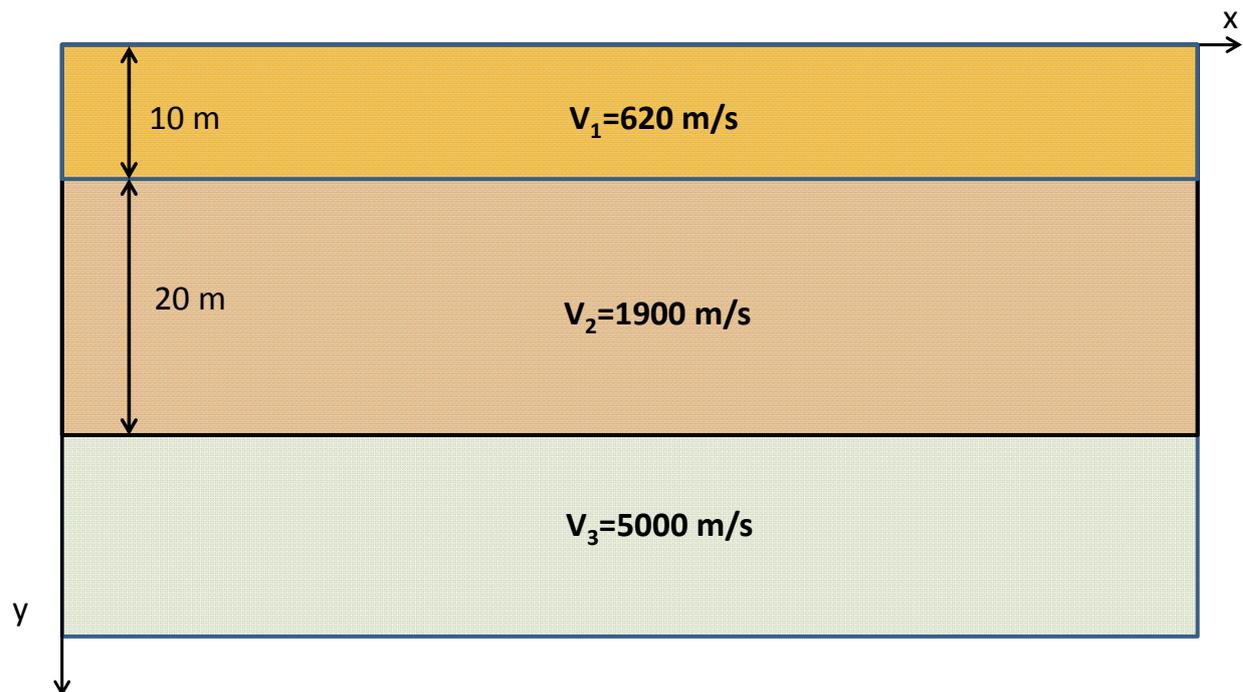


Figura 8-45. Geometría del modelo tricapa analizado

Se ha modelado el mismo esquema de terreno, simulando el ensayo de Sísmica de Refracción, obteniéndose las figuras siguientes, correspondientes a distintos instantes de tiempo. Como se puede apreciar, la modelización obtenida es claramente satisfactoria, ya que se pueden apreciar los distintos frentes de ondas generados y determinar la velocidad de los mismos.



Figura 8-46. Instante en el que las ondas alcanzan el contacto capa1-capa 2



Figura 8-47. Instante en el que las ondas se refractan en la capa 2

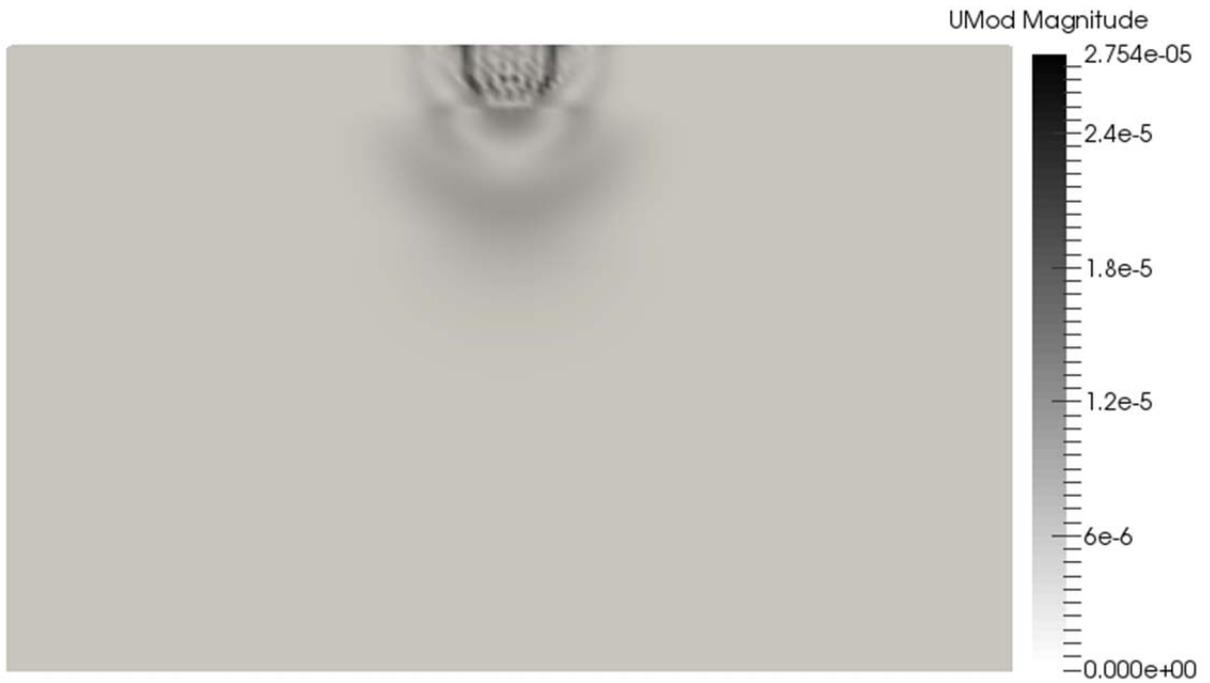


Figura 8-48. Generación de ondas refractadas hacia el medio superior

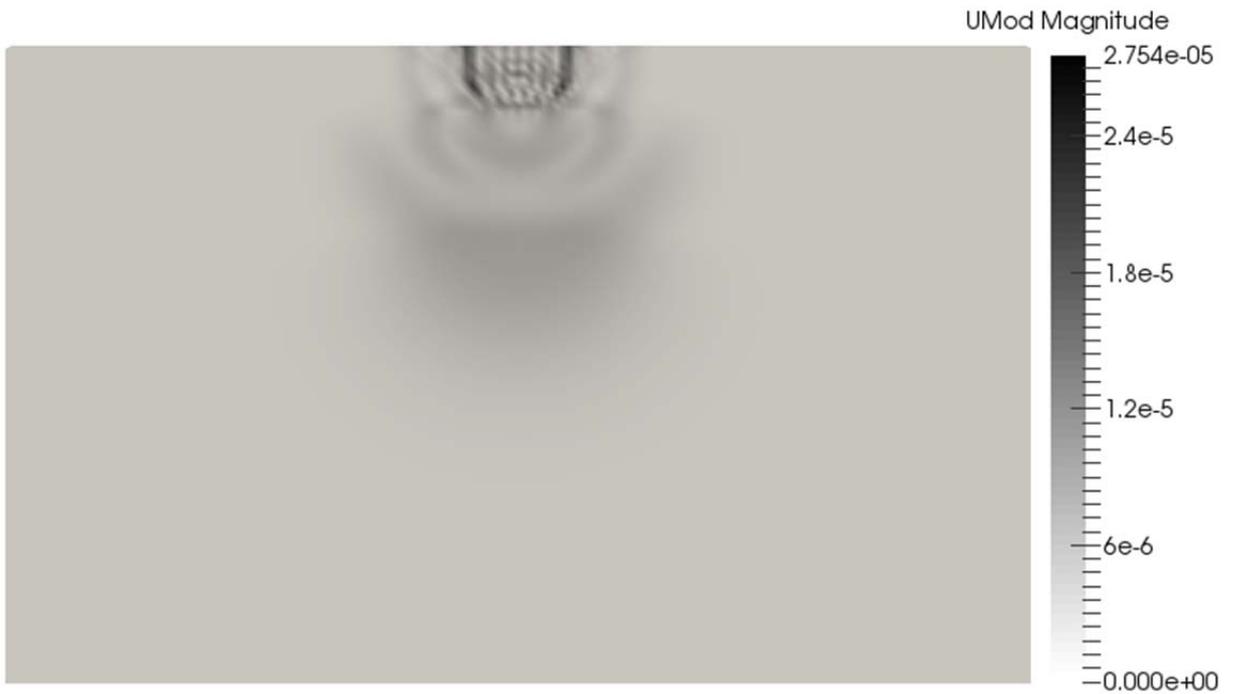


Figura 8-49. Instante en el que el frente de ondas alcanza el contacto capa 2-capa 3

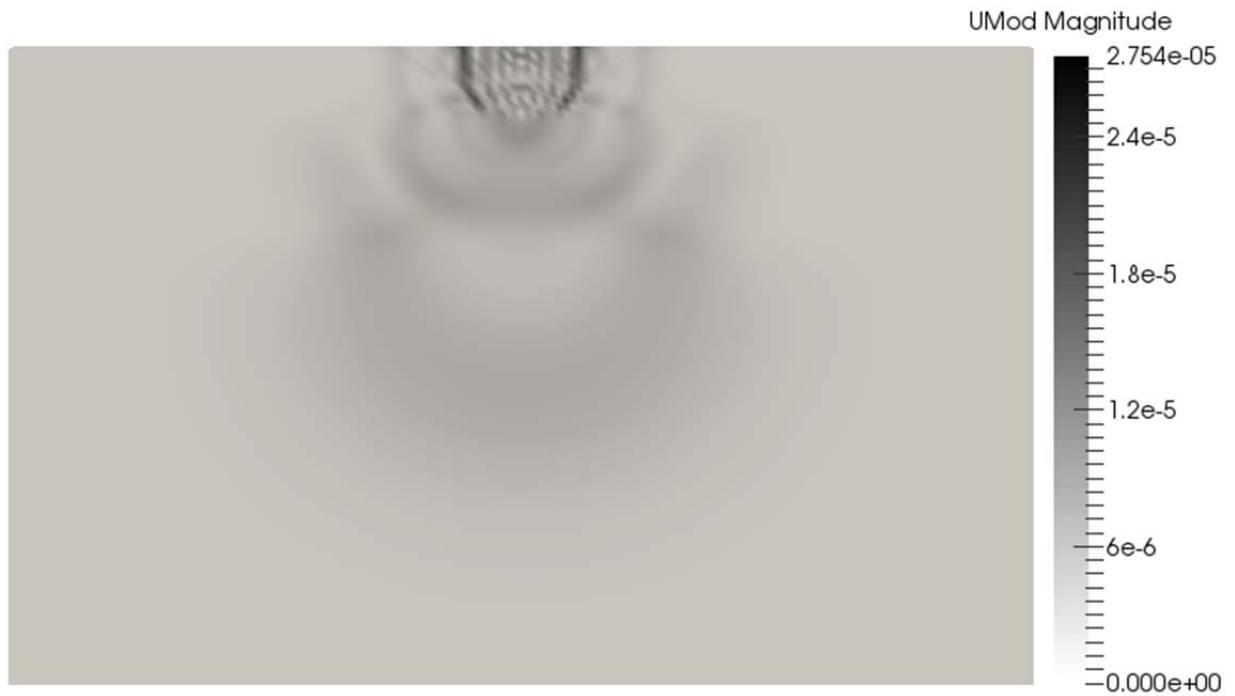


Figura 8-50. Vista de los dos frentes de ondas refractadas

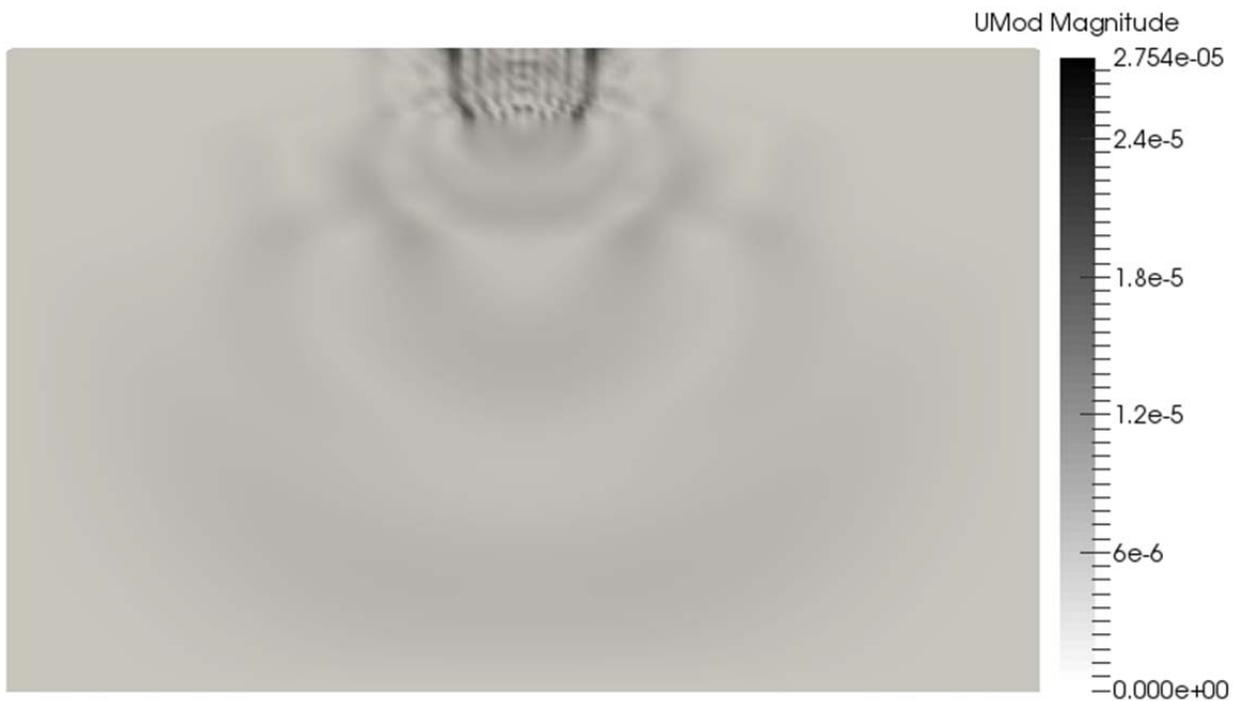


Figura 8-51. Vista de los distintos frentes de ondas generadas

9. CONCLUSIONES

A continuación se exponen las conclusiones más relevantes del trabajo de investigación que se ha materializado en la presente tesis doctoral

Previamente se ha efectuado una revisión bibliográfica de publicaciones, artículos y trabajos que han marcado el origen y desarrollo posterior de los Métodos sin Malla (Meshless Methods o Meshfree Methods). La ventaja de estos métodos sin malla es que permiten resolver una ecuación diferencial en un dominio genérico en el que los nodos se encuentran aleatoriamente distribuidos y entre los que no existe ninguna relación de conectividad a priori.

Conclusiones generales sobre el Método de Diferencias Finitas Generalizadas

Dentro de los denominados métodos sin malla, la presente tesis se centra en el Método de las Diferencias Finitas Generalizadas (MDFG), destacando sobre todo su aplicación para el caso de nubes irregulares de puntos. Los trabajos de Benito [21] a [28], Gavete [61] a [64], Ureña [161] a [168] y Saleté [27], [28], [165] a [168], sobre diferencias finitas generalizadas permiten abordar la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en cualquier tipo de dominio mediante distribuciones irregulares de nodos.

Se ha podido comprobar que el Método de Diferencias Finitas Generalizadas mantiene la sencillez del Método de Diferencias Finitas Clásico a la vez que presenta el enorme potencial de poder aplicarse a mallas irregulares.

Se han obtenido las expresiones explícitas en diferencias finitas de las derivadas espaciales con aproximación de hasta 2º y 4º orden en dos dimensiones. Adicionalmente, se ha expuesto la discretización temporal a emplear (esquema clásico de diferencias finitas) en la formulación en desplazamientos y en la de tensión-velocidad.

Se han estudiado las posibles condiciones de contorno a aplicar, de tipo Dirichlet o de superficie libre, desarrollando la formulación para su aplicación.

Una vez completado el desarrollo del esquema en Diferencias Finitas Generalizadas, se ha comprobado la consistencia y la estabilidad del método, acotando el incremento temporal a emplear.

Como conclusión de la aplicabilidad del método, se ha llevado a cabo una comparación de resultados obtenidos con las distintas formulaciones expuestas, pudiendo concluir que la formulación en desplazamientos proporciona mejores resultados que la formulación en tensión-velocidad. No obstante, cuando la aproximación espacial en la formulación en tensión-velocidad

es de cuarto orden, se logran resultados satisfactorios, aunque requiere mayor tiempo de cálculo. Sin embargo, la sensibilidad de la formulación en tensión-velocidad a la distancia entre nodos y al paso temporal se vuelve más crítica al emplear la aproximación de 4º orden.

La formulación en desplazamientos arroja resultados más precisos al incrementar el orden de aproximación de las derivadas espaciales, aunque ello conlleva un mayor tiempo de proceso. Este aspecto puede no ser decisivo en modelos con un número de nodos reducido, pero puede no ser asumible en modelos con un número de nodos significativamente mayor, en los que un orden de aproximación menor proporciona una mejor relación precisión-tiempo de cálculo.

La formulación en desplazamientos es menos sensible a la distancia entre nodos y al incremento en el coeficiente de Poisson que la formulación tensión-velocidad, alcanzando incluso valores próximos a $\nu=0.5$. Sin embargo, la formulación en tensión-velocidad permite definir condiciones de superficie libre de forma más inmediata y precisa, lo que representa una ventaja en el caso de análisis sísmicos, en los que es necesario modelizar el terreno y las condiciones de la superficie.

Al emplear distribuciones regulares de nodos los resultados son lógicamente mejores. En los casos en los que esta distribución no es posible (topografía o geometría irregular del modelo), el empleo de estrellas constituidas por un mayor número de nodos permite obtener resultados precisos, aunque obviamente a costa de un mayor tiempo de cálculo. No obstante, aunque en los casos reales la distribución nodal será lo más regular posible, una de las ventajas del GDFM es su probado buen comportamiento en distribuciones irregulares de nodos.

Conclusiones sobre la aplicación de Contornos Perfectamente Sincronizados

Al resolver un problema numérico definido sobre un espacio infinito mediante diferencias finitas o elementos finitos, surge el problema de que el modelo debe ser finito y, por tanto, deben introducirse contornos inexistentes en el problema real. Sin embargo, en la modelización de la transmisión de ondas la energía transmitida decae muy lentamente con la distancia. Por este motivo, se hace necesaria la modelización de unos contornos que de alguna forma absorban las ondas sin reflejarlas y que no alteren los resultados en la zona de interés debido a la reflexión de las ondas en dichos contornos. Estos contornos absorbentes, denominados Contornos Perfectamente Sincronizados o Perfectly Matched Layers, se adosan a los límites del dominio elástico de forma que la amplitud de una onda que entra en este material absorbente, se atenúa y decrece exponencialmente a medida que avanza en él.

En la presente tesis, se ha presentado la formulación de contornos Perfectamente Acoplados (Perfectly Matched Layers - PML) dentro de la formulación general en diferencias finitas generalizadas, obteniéndose los correspondientes esquemas explícitos en 2-D. Adicionalmente

se ha comprobado la estabilidad de la formulación, así como la condición de estabilidad del esquema en Diferencias Finitas Generalizadas propuesto.

Aunque al tratarse de una extensión analítica, no deberían producirse reflexiones en la interfaz zona de interés-PML, la aproximación numérica las hace inevitables, haciendo necesaria una transición suave entre ambas zonas que las minimice. Esto afecta al espesor del PML, ya que tras el inevitable rebote en el contorno exterior del PML la amplitud de la onda que vuelve al dominio de interés debe ser despreciable (en el camino de vuelta tras el rebote en el contorno del PML, la onda también se amortigua). Este aspecto también se ha analizado en el presente trabajo.

Conclusiones sobre la aplicabilidad del método a la investigación geofísica

Se han analizado dos ejemplos en los que se ha aplicado el esquema de Diferencias Finitas Generalizadas para modelizar dos tipos de ensayos de investigación geofísica habitualmente empleados: el ensayo cross-hole y la Tomografía mediante Sísmica de Refracción.

A la vista de los resultados obtenidos, se considera, por tanto, que el Método de Diferencias Finitas Generalizadas permite representar adecuadamente un ensayo cross-hole e incluso sirve para obtener parámetros dinámicos a partir de ensayos reales. Adicionalmente ha permitido modelizar adecuadamente el comportamiento de los frentes de ondas ante anomalías presentes en el terreno.

Finalmente, la modelización del ensayo de Sísmica de Refracción ha sido igualmente satisfactoria, si bien el procesado de datos exige un trabajo adicional de interpretación.

10. DESARROLLOS FUTUROS

En cuanto a posibles desarrollos futuros se pueden indicar los siguientes:

- Continuar con la aplicación del Método de Diferencias Finitas Generalizadas para la resolución de la ecuación de ondas propagándose por medios heterogéneos, analizando en detalle los fenómenos originados por heterogeneidades diversas, tales como cavidades cársticas, inclusiones de suelos de rigidez diferente, presencia de fallas, etc., estudiándose de forma más detallada la reflexión y refracción de los frentes de onda que tiene lugar en los interfaces entre medios de distintas características.
- Modelización de ensayos geofísicos para la determinación de las propiedades dinámicas de un material.
- Aplicación del Método de Diferencias Finitas Generalizadas a la resolución de problemas sísmicos en los que están involucradas estructuras, analizando la interacción suelo-estructura.
- Realización de modelos 3D incorporando los elementos ya desarrollados para esquemas 2D.
- Incorporación de modelos diferentes para el comportamiento del material como por ejemplo modelos viscoelásticos.

11. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- [1] Alarcón E., Álvarez R. y Gómez Lera M^a. S.; Cálculo matricial de estructuras. Ed. Reverté S.A. 1986.
- [2] Alterman Z., and Karal F.C., Propagation of elastic waves in layered media by finite-difference methods , Bull. Seism. Society American 58, 367-398, 1968.
- [3] Andrews D.J., A numerical study of tectonic stress release by underground explosions, Bull. Seism. Society American 63, 1375-1391, 1973.
- [4] Appelö D, Petersson N.A. A stable finite difference method for the elastic wave equation on complex geometries with free surfaces. Communications Comput Phys 5:84–107, 2009.
- [5] Atluri S.N., Zhu T. New concepts in meshless methods. International journal for numerical methods in engineering, vol 47, 537-556. John Wiley & Sons, 2000.
- [6] Atluri S.N., Zhu T. The messless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. Comput. Mech., Vol 25, 169-179, 2000.
- [7] Atluri S.N., Sladek J., Sladek V., Zhu T. The local boundary integral equation (LBIE) and it's meshless implementation for linear elasticity. Comput. Mech., Vol. 25(2-3), 180–198, 2000.
- [8] Babuška I. y Melenk J.M.; The partition of unity method. International journal for numerical methods in engineering, vol. 40, 727-758. John Wiley & Sons, 1997.
- [9] Babuška I., Banerjee U., Osborn J.E., Zhang Q. Effect of numerical integration on meshless methods. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 198(37-40), 2886–2897, 2009.
- [10] Basu U, Chopra AK. Perfectly matched layers for elastic waves and application to earthquake analysis of dams. Proceedings of the 16th ASCE engineering mechanics conference. University of Washington Seattle; 2003. pp. 16–18.
- [11] Bazilevs Y., Beirão de Veiga L., Cottrell J.A., Hughes T.J.R., Sangalli G. Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. Math. Model. Meth. Appl. Sci., Vol. 16(7), 1031-1090, 2006.
- [12] Belytschko T., Lu Y.Y. y Gu L.; Element-free Galerkin methods. International journal for numerical methods in engineering, vol. 37, 229-256, 1994.
- [13] Belytschko T., Gu L., A new implementation of the elements free Galerkin method. Computer Methods Applied Mech. Eng. 113, 397-414, 1994.
- [14] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. y Krysl P.; Meshless methods: an overview and recent developments. Comput Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 139, 3- 47, 1996.

- [15] Belytschko T., Lin W.K., Singer M., Advances in Adaptive Computational Methods: On adaptivity and error criteria in mesh free methods. Ladeveze P., Oden J. T., (Eds.)Elsevier, 1998.
- [16] Belytschko T., Krongauz Y., Dolbow J., Gerlach C. On the completeness of meshfree particle methods. Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 43, 785–819, 1998.
- [17] Belytschko T., Moës N., Usui S., Parimi C. Arbitrary discontinuities in finite elements. Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 50, 993–1013, 2001.
- [18] Bender C.M., Orszag S.A. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Book Company, 1978.
- [19] Benito J.J., Gavete L., Buceta A., Falcon S., Idelson S., Oñate E., Dvorkin E. Approximation of Functions in a method of Finite Points. Computational Mechanics, CIMNE, 1998.
- [20] Benito, J.J., Gavete, L.; Aproximación de Funciones en un Método de Puntos Finitos. V Encuentro Portugués de Mecánica Computacional (Internacional). Cuimaraes (Portugal),1997.
- [21] Benito, J.J.; Método sin malla. Trabajo de investigación presentado para el concurso de una plaza de Catedrático de Universidad, Madrid, España. 1998.
- [22] Benito, J.J., Ureña, F., Gavete, L.; Influence of several factors in the generalized finite difference method. Applied Mathematical Modelling, volume 25, Issue 12, pag. 1039-1053, 2001.
- [23] Benito, J.J, Ureña, F. Gavete, L. Alvarez R, An h-adaptive method in the generalized finite difference, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 192: 735 – 759, 2003.
- [24] Benito J.J, Ureña F., Gavete, L. Alonso, B, Solving parabolic and hyperbolic equations by Generalized Finite Difference Method, Journal of Computational and Applied Mathematics 209 Issue 2: 208-233, 2007.
- [25] Benito, J.J., Ureña, F. and Gavete L. Leading-Edge Applied Mathematical Modelling Research (chapter 7), Nova Science Publishers, New York, 2008.
- [26] Benito, J.J, Ureña, F., Gavete L, Alonso B, Application of the Generalized Finite Difference Method to improve the approximated solution of pdes, Computer Modelling in Engineering & Sciences 38: 39-58, 2009.
- [27] Benito J.J., Ureña F., Gavete L., Salet E., Muelas A. A GFDM with PML for seismic wave equations in heterogeneous media. Journal of Computational and Applied Mathematics 252, 40–51, 2013.
- [28] Benito J.J., Ureña F., Salet E., Muelas A., Gavete L., Galindo R. Wave propagation in soils problems using the Generalized Finite Difference Method. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 79, 190–198, 2015.

- [29] Berenger, J.P.: A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal Comput. Physics*, 114,185–200, 1994.
- [30] Berg M. de, Cheong O., Kreveld M. van, Overmars M. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, Third Edition, 2008.
- [31] Boore D.M., Love waves in non-uniform waveguides: finite-difference calculations, *J. Geophys. Res.* 75, 1512-1527, 1970.
- [32] Caicedo M. I., Mora P.J. *Temas de Propagación de Ondas*. Universidad Simón Bolívar, 2004.
- [33] Cendrowicz J., Tribillo R.; Variational approach to the static analysis of plates of an arbitrary shape, (in polish). *Archiwum Inzynierii Ladowej* 3(24), 1978.
- [34] Chen Y., Lee J.D., Eskandarian A. *Meshless Methods in Solid Mechanics*. Springer, 2006.
- [35] Cheng N. Borehole wave propagation in isotropic and anisotropic media: three-dimensional finite difference approach. Thesis (Ph. D.)--Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Earth, Atmospheric, and Planetary Sciences, 1994.
- [36] Chew, W.C., Liu, Q.H.: Perfectly matched layer for elastodynamics; a new absorbing boundary condition. *J. Comput. Acoustics*, 4, 341–359, 1996.
- [37] Chou P.C., Pagano N.J. *Elasticity: Tensor, Dyadic, and Engineering Approaches*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1967
- [38] Chu W.H.; Development of a General Finite Difference Approximation for a General Domain. *Journal of Computational Physics*, 8, 3, 1971, 392-408.
- [39] Chugh A.K., Gesund H.; Automatic Generation of the Coefficient Matrix of Finite Difference Equations. *IJNME*, 8(3), 1974, 662-671.
- [40] Collino F, Tsogka C. Application of the perfectly matched layer absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics* 66(1):294–307, 2001.
- [41] Crase E, Wideman C.H, Noble N and Tarantula A, Non linear elastic waveform inversion of land seismic reflection data , *J. Geophys. Res.* 97, 4685-4703, 1992.
- [42] Cruz-Atienza V.M, and Virieux J, Dynamic rupture simulation of nonplanar fault with finite-difference approach , *Geophys. J. Int.* 158, 939-954, 2004.
- [43] Cuesta J.L., Método de Diferencias Finitas Generalizadas en mallas irregulares. Proyecto Fin de Carrera, E.T.S.I. Minas, UPM, 1998.
- [44] Curtis F.G., *Análisis Numérico*. Ed. Alfaomega. 1991.
- [45] De S., Bathe K.J. The method of finite spheres. *Comput. Mech.*, Vol. 25, 329–345, 2000.

- [46] De S., Bathe K.J. The method of finite spheres with improved numerical integration. *Comput. Struct.*, Vol. 79, 2183–2196, 2001.
- [47] Dekker K.; Semi-Discretization Methods for Partial Differential Equations on Non-Rectangular Grids. *IJNME*, 15, 1980, 405-419.
- [48] Dolbow J., Belytschko T. An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method. *Arch. Comp. Methods Engrg*, vol 5(3), 207-241, 1998.
- [49] Domínguez J.,; Boundary Elements in Dynamics. Computational Mechanics Publications. 1993.
- [50] Dou A. y Mendizábal A.; Ecuaciones en Derivadas Parciales y su Resolución Numérica. Publicación de la E.T.S.I. Caminos Canales y Puertos de Madrid. 1973
- [51] Dow J.O. and Stevenson I.; Adaptive refinement procedure for the Finite Difference method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley and Sons, 8, 537-550, 1992.
- [52] Duarte, C.A. y Oden J. T.; H-p clouds- An H-p meshless method. *Numerical methods for partial differential equations*, vol. 12, 673-705 John Wiley & Sons, 1996.
- [53] Duarte C.A. y Oden J.T.; An adaptive method using clouds. TICAM report 96-07, 1996.
- [54] Duchateau P., y Zachmann D.; Ecuaciones Diferenciales Parciales. Ed. McGraw-Hill. 1988.
- [55] Duru, K. Dissertation for the degree of Licentiate of Philosophy in Scientific Computing with specialization in numerical analysis. Department of Information Technology, Uppsala University, Sweden, 2010.
- [56] Fernández-Méndez S., Huerta A. Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 193(12-14), 1257–1275, 2004
- [57] Ferreira A.J.M. *MatLab codes for Finite Element Analysis, Solids and Structures*. Springer, 2009.
- [58] Forsythe G.E., Wasow W.R. *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. Wiley. New York (1960).
- [59] Fries T., Matthies H. Classification and Overview of Meshfree Methods. Institute of Scientific Computing. Technical University Braunschweig, Brunswick, Germany, 2004.
- [60] Garijo D. Modelos sin malla en simulación numérica de estructuras aeroespaciales. Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos, 2015.
- [61] Gavete L., Benito J.J., Falcón S. And Ruiz A.; Implementation of essential boundary conditions in a meshless method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2000; 16:000-000

- [62] Gavete L., Gavete M. L., Benito J.J., Improvements of generalized finite difference method and comparison other meshless method, *Applied Mathematical Modelling* 27, 2003. 831-847. Dynamic analysis of beams and plates using GFDM
- [63] Gavete L., García M., Molina P., Gavete M.L., Ureña F. y Benito J.J. Implementation in Chimère of a conservative solver for the advection equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, doi:10.1016/j.cam.2011.04.003 (ISSN: 0377-0427).
- [64] Gavete L., Ureña F., Benito J.J y Gavete M.L. Modelling of the advection-diffusion equation with a meshless method without numerical diffusion, *International Journal of Computer Mathematics*, DOI: 10.1080/00207160.2011.587872.
- [65] Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. R. Astr.Soc.*, Vol 181, 375-389, 1977.
- [66] Gómez-Escalonilla F.J. Aplicación de Métodos Meshless al Análisis de Problemas de Autovalores. Tesis doctoral ETSIA-UPM, 2012
- [67] Gordon W.H.; Development of an Error Estimation Scheme for use with an Arbitrary Irregular Grid Finite Difference Method. Phd. Dissertation., The Catholic University of America, Washington D.C., 1982.
- [68] Graves R W, Simulating seismic wave propagation in 3-D elastic media using staggered-grid finite differences , *Bull. Seism. Soc. Am.* 93, 283-300, 1996.
- [69] Graves R W, and Day S M, Stability and accuracy analysis of course grained viscoelastic simulations , *Bull. Seism. Soc. Am.* 87, 494-515, 2003.
- [70] Gu Y.T., Liu G.R. A boundary point interpolation method (BPIM) using radial function basis. First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 1590–1592, 2001.
- [71] Gu Y.T., Liu G.R. A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. *Comput. Mech.*, Vol. 28(1), 47–54, 2002.
- [72] Guangyu L, Kaixin L. Exact solution for a two-dimensional Lamb's problem due to a strip impulse loading. *Acta Mech Solida Sinica* 20(3):258–65, 2007.
- [73] Guenfoud S, Amranev MN, Bokasov SV, Ouelaa N. Semi-analytical evaluation of integral forms associated with Lamb's problem. *Soil Dyn Earthq Eng* 29:438–43, 2009.
- [74] Guzman F.S. Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas. *Revista Mexicana de Física*, vol 56(1), 51-68, 2010.
- [75] Hao S., Liu W.K., Belytschko T. Moving particle finite element method with global smoothness. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 59, 1007-1020, 2004.

- [76] Hughes T.J.R., Cottrell J.A., Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 194(39-41), 4135-4195, 2005.
- [77] Itasca Consulting Group. Inc FLAC, Fast Lagrangian Analysis of Continua, Version 5.0. Fluid-mechanical interaction. Minneapolis; 2005.
- [78] Jensen P.S. Finite difference techniques for variable grids. *Comp. Structures* 2, 17-29, 1972.
- [79] Jensen P.S.; A Survey of Some Recent Work in Variable Grid Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. LMSC 6-78-70-24, Lockheed Missiles and Space Company, Palo Alto, California, 1970.
- [80] Johnson L.R. Green's function for Lamb's problem. *Geophys J R Astron Soc* 34:99–131, 1974.
- [81] Johnson R.S. Singular Perturbation Theory. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Springer, 2005.
- [82] Johnson S.G., Notes on the algebraic structure of wave equations. Online at <http://math.mit.edu/~stevenj/18.369/wave-equations.pdf>, August 2007
- [83] Johnson, S.G. Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs). Courses 18.369 and 18.336 at MIT. Created August (2007); updated March 2010.
- [84] Kaczkowski Z., y Tribillo R.,; A generalization of the finite difference method.(in polish), *Archiwum Inzynierii Ladowej* 2(21), 287-293, 1975.
- [85] Kaljevic I., Saigal S. An improved element free Galerkin formulation. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 40(16), 2953–2974, 1997.
- [86] Kelly L. R., Ward R. W., Freitel S. and Alford R. M., Synthetic seismograms: a finite-difference approach , *Geophysics* 41, 2-27, 1976.
- [87] Kirsh C. Non-reflecting boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems in unbounded domains. Inaugural dissertation zur Erlangung der Wurde eines Doktors der Philosophie vorgelegt der Philosophisch .Zurich: Naturwissenschaftlichen Fakultat; 2005.
- [88] Komatitsch D, Tromp J. A perfectly matched layer (PML) absorbing condition for the second-order elastic wave equation. *Geophys J Int* 154:146–53, 2003.
- [89] Kristek J., Moczo P. and Archuleta P. J., Efficient method to simulate planar free surface in the 3-D 4th-order staggered-grid finite difference schemes, *Studia Geophys. Geod.* 46, 355-381, 2002.

- [90] Kristek J., and Moczo P., Seismic wave propagation in viscoelastic media with material discontinuities- a 3-D 4th-order staggered grid finite-difference modelling , Bull. Seism. Soc. Am. 93, 2273-2280, 2003.
- [91] Krok J., Orkisz. J.; Application of the Generalized FD Approach to Stress Evaluation in the Solution. International Conference on Computational Mechanics, Tokyo, 1986, Springer-Verlag, Tokyo-Berlin-Heidelberg-New York, 12, 1986, 31-36.
- [92] Kurowski Z.; Automatic Generation of Triangular Meshes in 2D Domains. Computer and Mechanics, 1, 1978, 379-389.
- [93] Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. London: Philosophical Transactions of the Royal Society; 1904. p. 1–42.
- [94] Lancaster P. y Salkauskas K., Surfaces generated by moving least square methods, Mathematics of computation, vol 37, 141–158, 1981.
- [95] Levander A. R., Fourth-order finite-difference P-SV seismograms, Geophysics 53, 1425–1436, 1988.
- [96] Liska T., Orkisz J.; Application of the Difference Method at Arbitrary Irregular Grids to Solution of Various Problems of Applied Mechanics. Bulgarian Academy of Science, Theoretical and Applied Mechanics, 9, 1, 105-111, 1978.
- [97] Liszka T., Orkisz J.; The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids and its application in applied mechanics. Computers & Structures, vol. 11, 83-95. Pergamon Press, 1980.
- [98] Liska T., Orkisz J.; The Finite Difference Method for Arbitrary Irregular Meshes: a Variational Approach to Applied Mechanics Problem. 2nd International Congress on Numerical Methods for Engineering, Paris, 227-288, 1980
- [99] Liszka T. An interpolation method for an irregular net of nodes, International journal for numerical methods in engineering, Vol. 20, 1599-1612, 1984.
- [100] Liu G.R., Gu Y.T. A point interpolation method. Proceedings of Fourth Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics, 1009–1014, Singapore, December 1999.
- [101] Liu G.R., Gu Y.T. A Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids. J. Sound Vib., Vol. 246(1), 29–46, 2001.
- [102] Liu G.R., Gu Y.T. A truly meshless method based on the strong-weak form. Advances in Meshfree and X-FEM Methods. In: Proceedings of the First Asian Workshop in Meshfree Methods, 259–261, Singapore, 2002.
- [103] Liu G.R., Gu Y.T. A meshfree method: Meshfree Weak-Strong (MWS) form method, for 2-D solids. Comput. Mech., Vol. 33(1), 2–14, 2003.
- [104] Liu G.R. Meshfree Methods. Moving beyond the Finite element Method. CRC Press, 2003

- [105] Liu, G.R., Gu, Y.T. An introduction to Meshfree Methods and Their Programming, Springer, 2005.
- [106] Liu W.K., Jun S., Zhang Y.F. Reproducing Kernel Particle Methods. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, Vol. 20, 1081–1106, 1995.
- [107] Liu W.K., Jun S., Li S., Adee J., Belytschko T. Reproducing Kernel Particle Methods For Structural Dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 38, 1655–1679, 1995.
- [108] Liu W.K., Chen Y., Uras R.A., Chang C.T. Generalized Multiple Scale Reproduction Kernel Particle Methods. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, 91–158, 1996.
- [109] Lucy L., A numerical approach to testing the fission hypothesis, *App. Jour.* 82, 1013–1024, 1977.
- [110] Madariaga R, Dynamics of an expanding circular fault, *Bull. Seism. Soc. Am.* 67, 163-182, 1976.
- [111] Marcinkovich C., Olsen K. On the implementation of perfectly matched layers in a three-dimensional fourth-order velocity-stress finite difference scheme. *Journal of Geophysical Research*, Volume 108, Issue B5, 2003
- [112] Melenk J.M., Babuška I.; The partition of unity finite element method: Basic Theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996.
- [113] Meza-Fajardo, K.C., Papageorgiou A.S. A non-convolutional split-field perfectly matched layer (PML) for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media-stability analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol 98, No. 4, pp. 1811-1836, 2008. Doi: 10.1785/0120070223
- [114] Meza-Fajardo, K.C., Papageorgiou A.S. On the stability of a non-convolutional perfectly matched layer for isotropic Elastic Media. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol 30, No 3, pp. 68-81, 2010.
- [115] Michavila F., Gavete L.; Programación y Cálculo Numérico. Ed. Reverté, S.A., 1985.
- [116] Mikumo T and Miyatake, Numerical modeling of realistic fault rupture process. *Seismic motion synthetics*, B. A. Bott, ed., Academic Press, 91-151, 1987.
- [117] Mitchell A. R. and Griffiths D. F.; *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. Ed. John Wiley & Sons. 1997.
- [118] Moczo, P., Kristek, J., Halada, L.: *The finite-difference method for seismologists. An introduction*. Comenius University Bratislava, 158 pgs, 1994.
- [119] Moczo, P.: *Introduction to modelling seismic wave propagation by finite difference method*. Lectures notes, Kyoto, (1998).

- [120] Moczo, P Jozef Kristek, and Ladislav Halada; 3D Fourth-Order Staggered-Grid Finite-Difference Schemes: Stability and Grid Dispersion. Bulletin of the Seismological Society of America, 90, 3, pp. 587–603, June 2000.
- [121] Moczo, P., J. Kristeka, L. Halad; The Finite-Difference Method for Seismologists. An Introduction. Comenius University Bratislava 2004.
- [122] Moczo, P., Kristek, J., Galis, M., Pazak, P., Balazoviech, M.: The finite-difference and finite element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion. Acta Physica Slovaca, 57(2),177–406, 2007.
- [123] Moës N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 46, 131–150, 1999.
- [124] Monaghan JJ, Why particle methods work?, SIAM Scientific Journal of stat. Comp., vol. 3, 422–433, 1982.
- [125] Monaghan JJ, And introduction to SPH, Comput. Phys. Comun., vol 48, 89–96, 1988.
- [126] Moreno, C.G. Cálculo Numérico II. Servicio de publicaciones de la Universidad Nacional de Educación a Distancia. 1999.
- [127] Morton K.W., Mayers D.F. Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction. Cambridge University Press, Second Edition, 2005.
- [128] Most T., Bucher C. New concepts for moving least squares: an interpolating non-singular weighting function and weighted nodal least squares. Eng. Anal. Bound. Elem., Vol. 32(6), 461–470, 2008.
- [129] Mukherjee Y.X., Mukherjee S. The Boundary Node Method for potential problems. Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 40(5), 797–815, 1997.
- [130] Nayroles B., Touzot G. y Villon P.; Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. Computational mechanics, Springer-Verlag, 307-318, 1992.
- [131] Nguyen V.P., Rabczuk T., Bordas S., Duflot M. Meshless Methods: A review and computer implementation aspects. Math. Comput. Simulat., Vol. 79(3), 763–813, 2008.
- [132] Oden J.T. y Duarte C.A.; Solution of singular problems using h-p clouds. MAFELAP 96, 1996.
- [133] Ohnimoto T and Chovet b A, A free-surface boundary condition for including 3-D topography in finite difference method, Bull. Seism. Soc. Am. 87, 494-515, 1997.
- [134] Oñate E., Idelson S., Zienkiewicz D.C. and Taylor R.L.; A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. International journal for numerical methods in engineering, vol. 39, 3839-3866, 1996.

- [135] Oñate E.; Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis Elástico Lineal. CIMNI, 1995.
- [136] Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O.C., and Taylor R.L.; A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Comput. Meth. In Appl. Engineering.*, vol 139, 1-4, pp. 315-347, 1996.
- [137] Oñate E., Perazzo F. and Miquel J.; Advances in the stabilized finite point method for structural mechanics. Publication CINME nº. 164, May 1999.
- [138] Oñate E. Advances in Meshfree Techniques. *Computational Methods in Applied Sciences*, Volume 5. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE). Springer, 2007.
- [139] Orkisz J. Adaptive Approach to the Finite Difference Method Generalized for Arbitrary Irregular Meshes. *Proc. of the XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics*, Poznań, Poland, 1977, 1025-1032.
- [140] Orkisz J., Idelson S., Oñate E., Dvorkin E. Meshless finite difference method I. Basic approach. *Computational Mechanics*, CINME, 1998.
- [141] Orkisz J., Idelson S., Oñate E., Dvorkin E. Meshless finite difference method II. Adaptive approach. *Computational Mechanics.*, CINME, 1998.
- [142] Orkisz, J. Finite Difference Method (Part, III) in handbook of Computational Solid Mechanics, M. Kleiber (Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [143] Orkisz J., Villon P., Liu G., Pimenta P., De S., Idelsohn S. Meshless and Related Methods, accepted minisymposium. WCCM XI - ECCM V - ECCM VI, Barcelona, Spain, July 20 25, 2014
- [144] Perrone N. and Kao R.; A general finite difference method for arbitrary meshes. *Comp. Structures* 5, 45-58, 1975.
- [145] Pitarka A, 3-D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with non-uniform spacing, *Bull. Seism. Soc. Am.* 89, 54-68, 1999.
- [146] Ren H., Cheng Y. The interpolating element-free Galerkin (IEFG) method for twodimensional potential problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 36(5), 873–880, 2012.
- [147] Sáinz de Cueto Torres F. J. Dinámica de Estructuras. Colegio de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos. Servicio de publicaciones. Octubre 2005.
- [148] Schroeder C.T., Scott W.R. Finite-difference time-domain model for elastic waves in the ground, *Proc. SPIE 3710, Detection and Remediation Technologies for Mines and Minelike Targets IV*, 1361, 1999); doi:10.1117/12.357021

- [149] Schroeder C.T., Scott Jr. W.R. Finite-difference time-domain model for elastic waves in the ground. School of Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology; Atlanta, USA, 1999, p. 1–14, GA 30332-0250, USA.
- [150] Skelton E.A., Adams S.D.M., Craster R.V.: Guided elastic waves and perfectly matched layers. Elsevier. Wave Motion 44, 573–592, 2007.
- [151] Strouboulis T., Copps K., Babuška I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 47(8), 1401–1417, 2000.
- [152] Sukumar N., Moran B., Belytschko T. The Natural Element Method in Solid Mechanics. Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol. 43, 839–887, 1998.
- [153] Taylor R.L., Zienkiewicz D.C., Oñate E. e Idelson S.; Moving least square approximations for solution of differential equations. International center for numerical methods in engineering, Publ. CIMNE nº 74, 1995.
- [154] Timoshenko S. Vibration problems in engineering. D. van Nostrand Company, Inc., Second Edition, New York, 1937.
- [155] Timoshenko S. P. Strength of materials, Part I: Elementary theory and problems. D. Van Nostrand Company, Inc., Second Edition, New York, 1940.
- [156] Timoshenko S. y Goodier J.N. Teoría de la Elasticidad. Ed. Urmo. 1951.
- [157] Timoshenko S. P., Young D. H. Teoría de las Estructuras, Urmo S.A. de Ediciones, Spain, 1981
- [158] Tribillo R.; Generalization of the mesh Meted. Zeszyty Naukowe Politechniki Bialystokiej, 1976, (in Polish).
- [159] Tribillo R.; Application of the Generalized Finite Difference Meted to the Plate Problem. Archiwum Inzynierii Ladowej, 21, 4, 1975, 579-586, (in Polish).
- [160] Thomson, W T, Vibration Theory and Applications, Prentice Hall Publishers, 1965.
- [161] Ureña F., Un método adaptativo en Diferencias finitas Generalizadas. Tesis Doctoral. 2001.
- [162] Ureña F.; Benito J.J.; Gavete L.; Alvarez R., Resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo de segundo orden utilizando diferencias finitas generalizadas, Revista International de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería, 19, 3, 331-340, 2003.
- [163] Ureña F.; Benito J.J.; Gavete L.; Alvarez R., Computational Error Approximation and H-Adaptive Algorithm for the 3-D Generalized finite Difference Method, International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, 6 , 31-39, 2005.

- [164] Ureña, J. J. Benito, L. Gavete, Application of the Generalized Finite Difference Method to solve the advection-diffusion equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235: 1849 – 1855, 2011.
- [165] Ureña F., Benito J.J., Gavete L, Salete E. y Casasús A. Estudio de la estabilidad y dispersión del problema de propagación de ondas sísmicas en 2-D utilizando el método de diferencias finitas generalizadas, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y diseño en Ingeniería*, Vol 27, Nº 4 de diciembre de 2011. (ISSN: 0213-1315)
- [166] Ureña F., Benito J.J., Gavete L. y Salete E. Application of the generalized finite difference method to seismic wave propagation in 2-D, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, doi:10.1016/j.cam.2011.04.005 (ISSN: 0377-0427).
- [167] Ureña F, Benito JJ, Salete E, Gavete L. A note on the application of the Generalized Finite Difference Method to seismic wave propagation in 2-D. *Journal Comput Appl Math* 236(12):3016–25, 2011.
- [168] Ureña F., Salete E., Benito J.J. y Gavete L. Solving third and fourth order partial differential equations using GFDM. Application to solve problems of plates, *International Journal of Computer Mathematics*, *Int Journal Comput Math* 89(3):366–76, 2012. DOI: 10.1080/00207160.2011.587871.
- [169] Ventura G., Xu J.X., Belytschko T. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 54, 923–944, 2002.
- [170] Verhulst F. *Methods and Applications of Singular Perturbations*. Springer, 2005.
- [171] Vinson, J. R. *The Behavior of Thin Walled Structures: Beams, Plates and Shells*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [172] Virieux J., P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method *Geophysics* 51, 889-901, 1986.
- [173] Virieux J, SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite difference method *Geophysics* 49, 1933-1957, 1984.
- [174] Weaver W Jr., S. P. Timoshenko, D. H. Young, *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1990.
- [175] Wagner G.J, Liu W.K. Application of essential boundary conditions in mesh-free methods: a corrected collocation method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 47, 1367-1379, 2000.
- [176] Walter Mora F., Geovanni Figueroa M. *Cálculo superior. Teoría y Ejemplos*. Revista digital *Matemática, Educación e Internet*, Costa Rica, 2012
- [177] Wang Y, Xu J. and Schuster G.T., Viscoelastic wave simulation in basin by a variable-grid finite-difference method, *Bull. Seism. Soc. Am.* 91, 1641-1749, 2001. *Bull. Seism. Soc. Am.* 90, 587-603, 2000.

- [178] Wang J.G., Liu G.R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 54, 1623–1648, 2002.
- [179] Zahradnik J., Priolo E. Heterogeneous formulations of elastodynamic equations and finite-difference schemes. *Geophysical Journal International* Volume 120, Issue 3, pages 663–676, 1995
- [180] Zhang J, Quadruple-grid velocity-stress finite-difference method for elastic wave-propagation simulation *Geophysics J. Int.* 131, 127-134, 1997. Wave propagation simulation *Geophysics J. Int.* 131, 127-134, 1997.
- [181] Zhang J.L., Tian Z.P., Wang C.X. P- and S-wave separated elastic wave equation numerical modeling using 2D staggered-grid, *Proceedings of the SEG/San Antonio Annual Meeting*, pp. 2104–2109, 2007.
- [182] Zheng Y, Huang X. Anisotropic perfectly matched layers for elastic waves in cartesian and curvilinear coordinates. *Cambridge, MA: Department of Earth, Atmospheric, and Planetary Sciences, Massachusetts Institute Technology; 2002.* p. 1–18.
- [183] Zhu T., Zhang J., Atluri S.N. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Comput. Mech.*, Vol. 21, 223–235, 1998.
- [184] Zhu T., Zhang J., Atluri S.N. A meshless numerical method based on the local boundary integral equation (LBIE) to solve linear and non-linear boundary value problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 23, 375–389, 1999.
- [185] Zhuang X., Augarde C., Bordas S. Accurate fracture modelling using meshless methods, the visibility criterion and level sets: Formulation and 2D modelling. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 86(2), 249–268, 2011.